

Цена 2 р. 66 к.



ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

КОСМИЧЕСКИЙ ПОЛЕТ

К. ЭРИКЕ

КОСМИЧЕСКИЙ ПОЛЕТ

ТОМ II
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

II

ЧАСТЬ
ПЕРВАЯ



К. ЭРИКЕ

К Космический ПОЛЕТ

ТОМ II
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ







PRINCIPLES OF GUIDED MISSILE DESIGN

EDITED BY GRAYSON MERRILL, CAPTAIN, U. S. N. (Ret.)

KRAFFT A. EHRLIKE

Director of Advanced Studies
General Dynamics/Astronautics

SPACE FLIGHT

II. DYNAMICS

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.
PRINCETON, NEW JERSEY · TORONTO · NEW YORK · LONDON
(1962)

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

КРАФТ ЭРИКЕ

КОСМИЧЕСКИЙ ПОЛЕТ

ТОМ II

ДИНАМИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
(главы 1—4)

Перевод с английского
Ш. КАРЫ-НИЯЗОВА и А. Д. КУЗНЕЦОВА
под редакцией
Д. А. ПОГОРЕЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

Космический полет, том II (динамика), часть I (главы 1—4), Эрик К., перевод с английского, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1969, 572 стр.

Первая часть второго тома трехтомной монографии «Космический полет» посвящена исследованию свободного движения и изменения орбиты под действием импульсных изменений скорости. В главе 1 рассматриваются баллистические траектории типа «Земля — Земля», а также баллистический спуск с орбиты. Глава 2 посвящена выводу спутников на орбиты, различным видам возмущений орбит, рассмотрению общего случая плоского движения в ограниченной задаче трех тел, орбитам спутников Луны и планет и их возмущениям. В главе 3 рассматриваются орбитальные маневры в центральном поле, исследуются плоские и пространственные переходы между различными типами орбит, а также влияние ошибок маневра. В главе 4 изучаются маневры перехода из одного поля тяготения в другое (например, маневр выхода из поля тяготения планеты или маневр захвата) и гиперболическая встреча, исследуется влияние ошибок.

Табл. 17. Илл. 259. Библ. 44 назв.

О Г Л А В Л Е Н И Е

От издательства	8
Таблица перевода некоторых американских мер в метрические единицы и единицы СИ	9
Из предисловия американского издателя	10
Из предисловия автора	12
Глава 1. Баллистика	21
1.1. Введение	21
1.2. Эллиптическая траектория	22
1.3. Траектория минимальной энергии (ТМЭ)	28
1.4. Наземная и орбитальная баллистика	33
1.5. Влияние вращения Земли	43
1.6. Расчет траекторий	47
1.7. Отклонения точки падения, вызываемые начальными отклоне- ниями	48
1.8. Баллистический спуск	64
Основные обозначения	93
Задачи	94
Литература	96
Глава 2. Орбиты спутников	97
2.1. Введение	97
2.2. Вывод спутника на орбиту	98
2.3. Внутриорбитальные переходы	154
2.4. Возмущения орбиты спутника	160
2.5. Прецессия орбиты и движение спутника в поле сфероида	164
2.6. Оценка предыдущего анализа	184
2.7. Вековые возмущения орбиты спутника, вызванные сжатием пла- неты	195
2.8. Периодические возмущения первого порядка орбиты спутника, вызванные сжатием планеты	202
2.9. Возмущение спутника Земли Луной и Солнцем	207
2.10. Атмосферные возмущения спутника	209
2.11. Дополнительные возмущения	249

2.12. Точки либрации и центры периодических движений в системе «Земля — Луна»	253
2.13. Общий случай плоского движения в ограниченной задаче трех тел	267
2.14. Численные результаты для системы «Земля — Луна»	272
2.15. Общее рассмотрение механики полета в долунном пространстве	276
2.16. Долунные орбиты спутников	287
2.17. Орбиты спутников около других планет с учетом возмущающего влияния Солнца и окодолунные орбиты с учетом возмущающего влияния Земли	303
2.18. Устойчивость орбит в долунном и залунном пространствах . . .	311
Основные обозначения	312
Задачи	316
Литература	318
Глава 3. Орбитальные маневры в поле центральной силы	320
3.1. Введение	320
3.2. Кинематика изменения орбиты	321
3.3. Динамика изменения орбиты	327
3.4. Переход с орбиты на орбиту	340
3.5. Переход между компланарными круговыми орбитами	341
3.6. Переход между компланарными круговой и эллиптической орбитами	354
3.7. Переход между компланарными эллиптическими орбитами . . .	363
3.8. Влияние малых импульсов скорости на элементы кеплеровой орбиты	383
3.9. Переход между некомпланарными орбитами	406
3.10. Пространственные маневры	413
3.11. Анализ изменения скорости на кеплеровой орбите	427
3.12. Анализ ошибок маневров в поле центральной силы	433
3.13. Применение анализа ошибок маневров в поле центральной силы	452
3.14. Переход с поверхности на орбиту	463
Основные обозначения	479
Задачи	481
Глава 4. Переходные маневры в поле двух центральных сил	483
4.1. Введение	483
4.2. Переход с эллиптической или круговой орбиты на компланарную гиперболическую орбиту	484
4.3. Основы механики полета при гиперболическом выходе и захвате	491
4.4. Маневры выхода и захвата	501
4.5. Гиперболическая встреча	513
4.6. Расчет параметров движения при гиперболической встрече и захвате	521
4.7. Общий анализ ошибок, возникающих при двухимпульсном переходе	526

4.8. Ошибки гиперболической орбиты	530
4.9. Связь гиперболических ошибок с начальными ошибками гелиоцентрической орбиты	534
4.10. Связь планетоцентрических ошибок с элементами гелиоцентрической орбиты	538
4.11. Влияние произвольных планетоцентрических трансверсальных и радиальных ошибок на гелиоцентрическое удаление тела, движущегося по гелиоцентрической переходной орбите	539
4.12. Обсуждение и выводы из анализа ошибок переходного движения в бицентральных полях	545
4.13. Анализ ошибок при гиперболической встрече	551
4.14. Гиперболическая встреча и оценка влияния ошибок (численный пример)	556
Основные обозначения	562
Задачи	564
Литература	565
Именной указатель	566
Предметный указатель	567

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателя книга написана известным американским специалистом в теории космических полетов, руководителем Отдела перспективных исследований фирмы «Дженерал Дайнэмикс/Астронотикс». Трехтомная монография К. Эрике «Космический полет» входит в серию «Основы проектирования управляемых снарядов», выпускаемую американским издательством «Ван Ностранд». Первый том этой монографии был выпущен в русском переводе в 1963 г. Редакция сочла целесообразным ввиду большого объема второго тома разбить его на две части.

Настоящая книга представляет собой первую часть второго тома монографии. Она включает в себя главы 1—4, посвященные изучению свободного движения и изменения орбиты под действием импульсных изменений скорости. В подготавливаемой к печати второй части книги (главы 5—9) рассмотрены вопросы динамики полета на активном участке траектории и проблемы динамики полетов к Луне и планетам солнечной системы.

При подготовке русского издания книги было устранено огромное количество ошибок и опечаток в формулах, свидетельствующих, по-видимому, о небрежной подготовке к печати американского издания. В подавляющем большинстве случаев эти исправления не оговорены в примечаниях.

При переводе текста американские меры были, как правило, переведены в метрические. Это, однако, не всегда могло быть сделано на графиках и в примерах численных расчетов. Поэтому для облегчения работы читателя прилагается таблица перевода американских мер в метрические единицы и единицы Международной системы СИ.

ТАБЛИЦА ПЕРЕВОДА НЕКОТОРЫХ АМЕРИКАНСКИХ МЕР В МЕТРИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ И ЕДИНИЦЫ СИ

Единицы длины

1 *миля* («уставная») = 1,609 *км*

1 *морская миля* = 1,852 *км*

1 *фут* = 0,3048 *м*

1 *дюйм* = 2,54 *см*

Единицы площади

1 *дюйм*² = 6,4516 *см*²

1 *фут*² = 0,092903 *м*²

Единицы скорости

1 *миля/час* = 0,447 *м/сек*

1 *узел* = 1 *морская миля/час* = 0,514 *м/сек*

1 *фут/сек* = 0,3048 *м/сек*

Единицы массы

1 *фунт* = 0,4535924 *кг*

1 *слэг* = 14,5939 *кг*

Единицы силы (веса)

1 *фунт* = 0,4535924 *кг* Γ = 4,4482 *н*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АМЕРИКАНСКОГО ИЗДАТЕЛЯ

Трехтомная монография Краффта Эрике, посвященная изложению основ теории космического полета, входит в серию книг «Основы проектирования управляемых снарядов». Назначение указанной серии книг в целом — дать возможность студентам университетов, научным работникам, инженерам, а также инженерно-техническому составу вооруженных сил основательно познакомиться с техникой управляемых снарядов и космического полета. Настоящий, второй том назван «Динамика». Последний том серии, «Операции в космосе», завершит рассмотрение основ космического полета. В указанной серии уже вышли в свет следующие книги: «Управление снарядами», «Аэродинамика. Реактивные двигатели. Практика конструирования и расчета», «Исследование операций. Боевые части. Пуск снарядов», «Руководство по проектированию снарядов», «Эскизное проектирование систем», «Словарь терминов по управляемым снарядам и космическому полету», «Бортовые радиолокационные установки» и «Инерциальная навигация». Готовятся к печати: «Полигонные испытания», «Теория исследования» и «Электронное оборудование космических аппаратов».

Несколько лет тому назад, когда решался вопрос о написании и издании научной книги о космическом полете, высказывались серьезные сомнения, найдет ли книга достаточно технических подготовленных читателей. Но это сомнение быстро рассеялось после проведения работ по программе Международного геофизического года и благодаря огромному воздействию на людей запусков советских и американских спутников. Осуществимость космического полета больше уже не ставится под сомнение, и ресурсы многих стран мобилизуются для его реализации. Я надеюсь и верю, что трехтомный труд Краффта Эрике «Космический полет» облегчит эту задачу.

Мы просим направлять нам критические замечания и конструктивные предложения. На их основе и с учетом развития ракетной техники мы надеемся своевременно вносить исправления в настоящую книгу.

Выражаем признательность и благодарность многочисленным авторам и издателям, любезно разрешившим использовать свои материалы, а также Министерству обороны США, содействие которого позволило создать содержательную книгу без нарушения секретности.

Мнения и утверждения, приводимые в настоящей работе, являются частными мнениями и утверждениями автора и редактора и не должны рассматриваться как официальные или как отражающие взгляды какого-либо государственного учреждения.

Октябрь 1962 г.

Грейсон Мерилл,
издатель

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Во втором томе книги «Космический полет» сделана попытка охватить широкий круг вопросов динамики полета космических аппаратов с учетом влияния большого количества различных сил. Этими силами являются: сила притяжения, большие и малые тяги, микротяги, лобовое сопротивление и световое давление. Материал книги тематически может быть разбит на три части. Первая часть (главы 1—4) посвящена изучению свободного движения и изменения орбиты под действием импульсных изменений скорости. Во второй части (главы 5—7) рассмотрены вопросы динамики полета на активном участке траектории. В третьей части (главы 8 и 9) изложены вопросы приложения общей теории к изучению механики полета к Луне и механики межпланетных полетов¹⁾.

Первая часть начинается с изложения вопросов наземной и орбитальной баллистики, т. е. вопросов, связанных с изучением баллистики спуска с орбиты. В заключительном параграфе первой главы приводится большое количество графиков, описывающих характеристики траекторий при баллистическом спуске сферических тел с начальными скоростями спуска, величина которых находится в пределах от 70% круговой скорости до параболической скорости, в широком диапазоне начальных углов.

Глава 2, посвященная изучению орбит спутников, начинается с рассмотрения различных типов вывода спутника на орбиту, включая баллистический, непрерываемый и прерываемый (с использованием промежуточной орбиты ожидания) выводы. Далее рассматриваются возможные источники возмущений. При этом особое внимание уделяется анализу возмущающих влияний сжатия центрального тела и атмосферы. Затем изучается движение спутников в долунном пространстве, вклю-

¹⁾ Вторая и третья части (по терминологии автора) образуют подготовляемую к печати вторую часть русского перевода второго тома книги «Космический полет». (Прим. ред.)

чая периодические движения вблизи точек либрации, общее движение в ограниченной задаче трех тел и механику полета из околоземного пространства в долунное пространство. Глава заканчивается анализом устойчивости орбит около одного из тел с конечной массой в ограниченной системе трех тел (имеются в виду системы «Земля — Луна», «Солнце — Земля» или вообще «Солнце — планета»).

Глава 3 посвящена теории маневра в поле центральной силы. В начале главы изучаются импульсные изменения круговой, эллиптической, параболической и гиперболической орбит. Далее следует обширный раздел, посвященный изучению перехода между орбитами. Переход рассматривается состоящим из двух изменений орбиты — одного изменения на исходной орбите и второго изменения на орбите цели. Рассмотрены плоские и пространственные переходы между различными типами орбит. Подробно излагается вопрос о влиянии малых импульсов скорости на элементы кеплеровой орбиты. Затем приводятся дифференциальные уравнения движения космического аппарата в прямоугольной системе координат, позволяющие рассчитывать изменения скорости на кеплеровой орбите непосредственным интегрированием [методом Коуэлла (Cowell)]. Исследование ошибок маневра в поле центральной силы проведено на основании применения теории влияния малых импульсов скорости на элементы кеплеровой орбиты. Глава заканчивается обсуждением вопросов перехода типа «поверхность — орбита».

В главе 4 завершается обсуждение импульсных маневров. Рассматриваются маневры перехода из одного поля тяготения в другое, высшего или низшего порядка (например, маневр выхода из планетоцентрического гравитационного поля или маневр захвата). Траектория перехода космического аппарата с замкнутой орбиты одного поля тяготения на замкнутую орбиту другого поля тяготения представляет собой гиперболу. Поэтому изложение материала начинается с рассмотрения одноимпульсных маневров (изменение орбиты) и двухимпульсных маневров, обеспечивающих переход с круговой или эллиптической орбиты на гиперболическую орбиту или обратно. Затем рассматривается теория маневров выхода и захвата с выводом условий оптимальности этих маневров. Вторым типом маневра в полях тяготения двух тел является гиперболическая встреча. В отличие от выхода или захвата при выполнении такого маневра движение космического аппарата происходит по обеим ветвям гиперболы. Этот тип маневра рассматривается весьма подробно, так как его практическое использование позволяет осуществить значительные изменения параметров гелиоцентрической или планетоцентрической орбиты без расхода топлива. Далее следует

анализ ошибок переходных маневров в бицентральных полях. Рассматриваются ошибки гиперболической орбиты, связь планетоцентрических ошибок с элементами гелиоцентрической орбиты и влияние произвольных планетоцентрических трансверсальных и радиальных ошибок скорости на величину гелиоцентрического радиуса-вектора космического аппарата. Глава завершается анализом ошибок гиперболической встречи.

Главой 5 открывается вторая часть книги, посвященная динамике полета на активном участке траектории. В ней обсуждаются основные понятия, связанные с движением на активном участке, начиная с анализа движения при отсутствии гравитационного поля. В дальнейшем учитывается влияние силы тяжести и аэродинамического сопротивления и выводятся точные дифференциальные уравнения движения центра масс аппарата на активном участке и уравнения движения вокруг центра масс. В этой главе приводятся также результаты численного интегрирования упрощенных уравнений движения на активном участке траектории. Затем рассматривается вертикальный активный участок движения в бессиловом пространстве с постоянной тягой, постоянным ускорением и оптимальной программой по ускорению. Данные этого анализа могут быть использованы и для траектории активного участка с произвольной программой по тангажу, поскольку эти траектории также обычно начинаются с участка вертикального подъема. В заключительной части главы 5 обсуждается роль вертикальной программы выведения в астронавтике и сравниваются характеристики вертикального активного участка при постоянной тяге и постоянном ускорении.

В главе 6 анализ активного участка распространяется на траектории с произвольной (не вертикальной) программой тангажа. Траектория при отсутствии силы тяжести может задаваться программой разворота, определяющей скорость изменения угла наклона траектории от начального до конечного значения как функцию времени. Можно представить много таких функций, для которых меняется момент достижения максимума скорости разворота, сдвигаясь то к началу, то к концу периода работы двигательной установки данной ступени многоступенчатой ракеты-носителя. Для одной конкретной функции получены зависимости гравитационных потерь от формы орбиты. Затем этот метод распространен на расчет траектории выведения в атмосфере и показана возможность его эффективного применения в данном случае. Другим важным методом управления траекторией является гравитационный разворот, при котором сила тяжести, действующая на движущийся по изогнутой траектории ракетный аппарат, используется для дальнейшего ее от-

клонения. Важность маневра гравитационного разворота заключается в том, что он позволяет продольной оси аппарата следовать за направлением касательной к траектории, поскольку при развороте только с помощью двигателя аппарат должен поворачиваться на положительный или отрицательный угол атаки, определяемый как угол между продольной осью и мгновенным направлением движения. При совпадении продольной оси с касательной к траектории угол атаки становится равным нулю, что минимизирует аэродинамические нагрузки при симметричной конфигурации аппарата. Таким образом, гравитационный разворот обладает особыми преимуществами при прохождении аппарата через нижние слои атмосферы, где динамический напор велик. В дальнейших разделах главы 6 излагается теория оптимального (в энергетическом смысле) выведения при заданных конечных условиях (в частности, на орбите спутника) для двух случаев: плоского поля притяжения и с учетом кривизны Земли. Кратко обсуждается маневр отклонения прямолинейной траектории. Траектория достигающего круговой скорости носителя, отклоняемая от почти горизонтального до горизонтального направления, может быть достаточно точно аппроксимирована указанным выше типом траектории. Главу заключает вывод уравнений управления возмущенным движением для траектории выведения с разворотом.

Глава 7 посвящена наиболее важной, с точки зрения астронавтики, теме — полету с малой тягой. Хотя термин «малая тяга» чаще всего применяется к весьма малым значениям тяги $[(10^{-4} \div 10^{-5})g]$, присущим электрическим двигательным установкам, он употребляется в этой книге для всего диапазона от $0,1g$ до области микроускорений $(10^{-5} \div 10^{-6})g$, поскольку все эти режимы ускорений имеют большее значение в механике активного полета, чем режим «большой тяги» $[(1 \div 10)g$ и более]. Под g здесь понимается значение местного гравитационного ускорения, используемое в качестве эталона для сравнения, так как даже 10^{-3} земного ускорения g — явно «малое» ускорение для околоземной орбиты спутника — становится «большим» ускорением в гелиоцентрическом пространстве на расстоянии одной астрономической единицы, где местное ускорение притяжения Солнца составляет $6 \cdot 10^{-4}$ земного ускорения g . Механика полета с малой тягой (и, следовательно, с малым ускорением) рассматривается в связи с тремя важными классами задач астронавтики, а именно: орбитальными полетами во внешних областях планетной атмосферы (сателлоид); маневрами коррекции орбиты, встречи и стыковки с малой тягой; межпланетными перелетами с помощью двигательных систем с малой тягой и высоким удельным импульсом. Глава 7 начинается с

рассмотрения полета сателлоида, поддержание орбиты которого требует малой силы, уравнивающей непрерывное малое возмущение динамическим сопротивлением верхних слоев атмосферы планеты. Выведенная теория движения сателлоида применима к анализу полета сателлоида Земли. Затем дается введение в механику полета с малой тягой. Особое внимание уделяется межорбитальным перелетам и двигательным устройствам малой тяги с системой раздельной генерации мощности. Отличие маневров с конечной величиной ускорения (касательная тяга) от импульсных маневров, рассматривавшихся в главах 1—4, иллюстрируется большим числом графиков (основанных на данных численного интегрирования), охватывающих диапазон ускорений от 1 до 10^{-3} местного гравитационного ускорения и диапазон удельных импульсов от 400 до 1000 сек. Таким образом, эти графики применимы к анализу движения космических аппаратов с химическими двигательными установками на высококалорийном горючем и с ядерными двигательными установками с теплообменником. Для расчета многих типов маневров коррекции с малой тягой и для расчета орбит, возмущаемых малыми ускорениями, важно иметь методику упрощенного анализа. Она выведена в § 7.8, и на ее основе в § 7.14 проводится дальнейшее обсуждение орбитальных маневров, включая касательный, нормальный, трансверсальный, радиальный и бинормальный (перпендикулярный плоскости орбиты) типы ориентации тяги. Для всех упомянутых типов маневра, а также для произвольной ориентации тяги выведены точные дифференциальные уравнения движения в центральном поле для случаев плоского и пространственного движений. Эти уравнения определяют скорость и координаты, а также вариации орбитальных элементов как для эллиптических, так и для гиперболических активных траекторий. Активные траектории с касательной и радиальной тягой рассматриваются в дальнейшем более подробно. Представлено большое число обобщенных графиков для случая касательного ускорения, на которых даны значения числа оборотов, времени активного полета при круговой начальной орбите, скорости в единицах круговой скорости на начальной орбите, расстояния в единицах радиуса начальной орбиты и угла наклона траектории к местному горизонту. Графики охватывают эллиптические и гиперболические траектории для диапазона ускорений тяги от 1 до $10^{-4}g$ и диапазона удельных импульсов от 400 до 15 000 сек. Рассмотрен предельный случай бесконечного удельного импульса. Подобный же набор графиков приведен и для радиальной тяги, однако он охватывает более узкую область ускорений, поскольку разгон до параболической скорости невозможно осуществить с по-

мощью непрерывного радиального ускорения, если его величина меньше $1/8$ величины местного ускорения g . В § 7.11 после обсуждения характеристик маневра касательной раскрутки в центральном поле рассматривается безразмерная теория усредненного расчета активных траекторий для очень малых (меньших $10^{-2}g$) постоянных касательных ускорений. Последняя треть главы 7 в основном посвящена интересной задаче оптимизации траекторий межорбитальных перелетов с малой тягой, включая траектории гиперболического пролета¹⁾, а также траектории встречи. Различие между этими двумя классами траекторий заключается в том, что гиперболический пролет требует близкого прохождения мимо цели во время ее движения по некоторой произвольной орбите, в то время как конечная точка орбиты встречи должна принадлежать орбите цели, то есть значения радиуса-вектора, кинетического момента и радиальной составляющей скорости аппарата должны в основном совпадать с соответствующими величинами для цели в точке встречи. Достижение этой точки с выполнением граничных условий завершает активный маневр перелета в данном центральном силовом поле. Если цель (например, космическая станция) не обладает заметной массой, то этим заканчивается и весь перелет, вслед за чем, возможно, следует стыковка с целью. Если цель обладает собственным полем притяжения, то маневр встречи считается завершенным, если космический аппарат имеет нулевой или пренебрежимо малый гиперболический избыток скорости относительно цели и, следовательно, приближается к ней с околопараболической скоростью. Перелет со встречей с целью требует больше энергии, чем пролет у цели, и может быть предпринят, если предполагается осуществить захват аппарата полем цели. Для околопараболической траектории требуются для захвата только относительно малые изменения скорости. Такой маневр может быть выполнен за ограниченное время до выхода из сферы притяжения цели, даже если ускорение двигателя очень мало. Вслед за захватом следует вывод аппарата на заданную орбиту спутника цели. Маневры ухода (раскрутки), перелета и захвата (выхода на орбиту спутника цели) могут рассматриваться как независимые, пока их граничные условия «стыкуются» и дают в сумме полную траекторию аппарата, выполняющего поставленную задачу. Любой перелет с пролетом или встречей в конце представляет собой переход от некоторого множества начальных (граничных) условий. Под *граничными условиями* понимаются значения векторов положения и скорости в данный момент времени. При

¹⁾ В тексте оригинала «fly-by». (Прим. перев.)

выполнении этого перехода (маневра перелета) мы располагаем тремя управляющими параметрами: величиной модуля вектора тяги, ориентацией вектора тяги и временем перелета. Если, кроме того, время перелета фиксировано, то оптимальные уравнения движения определяют скорость изменения составляющих вектора тяги относительно соответствующих осей координат (изменения модуля и ориентации вектора тяги) таким образом, чтобы минимизировать расход массы. Эти уравнения выведены для одномерных, двумерных и пространственных траекторий. Проведены расчеты по уравнениям для случая плоского движения, результаты которых представлены в виде обобщенных графиков, применимых как для движения в гелиоцентрическом поле, так и для некоторых областей других центральных полей притяжения. Эти графики, наряду с другими возможностями, позволяют быстро оценить в первом приближении минимальный расход массы, потребный для перелета с малой тягой, заканчивающегося пролетом или встречей, между любой группой из двух или более орбит планет в солнечной системе при времени перелета от одного месяца до трех лет. Если вместо времени перелета фиксировать величину тяги, уравнения оптимального движения будут определять закон изменения ориентации вектора тяги, обеспечивающий минимум времени перелета, поскольку для постоянной тяги, то есть для постоянного секундного расхода топлива, расход массы может быть минимизирован только путем минимизации времени перелета. Этот тип оптимизации рассмотрен для случая плоского перелета. В последнем параграфе главы 7 кратко анализируется механика раскрутки посредством периодического включения двигательной установки в периферии орбиты.

Заключительная часть книги, посвященная различным приложениям динамики космического полета к конкретным задачам астронавтики, открывается главой 8, содержащей изложение механики полета к Луне. В зависимости от целей запуска можно выделить пять групп траекторий полета к Луне: гиперболический пролет, облет Луны, выход на орбиту искусственного спутника Луны, попадание в Луну и посадка на Луну («жесткая» или «мягкая»). Каждый из этих типов полета рассматривается в главе 8. В главе 9 исследуется динамика межпланетного полета. После обсуждения классического гомановского перелета представлен подробный обзор задачи межпланетного перелета между компланарными орбитами и предложен быстрый метод численной оценки орбиты перелета без возвращения и с возвращением к Земле.

Большое количество графиков позволит читателю быстро определить все необходимые параметры траектории, требования

к взаимному расположению планет, периоды захвата, возможные периоды запуска и другие данные, характеризующие полеты в один конец и с возвращением, с выходом на орбиту искусственного спутника планеты и без него. Эта информация дополняется обширным набором графиков, на которых представлены основные результаты расчетов (выполненных электронной вычислительной машиной) траекторий с дискретными периодами пассивного полета между реальными орбитами Земли, Венеры, Марса и Юпитера для космических аппаратов с большой тягой в отдельные периоды запуска между 1960 и 1971 гг.

Предыдущая тема естественно приводит к обсуждению межпланетных перелетов между несколькими планетами. Детально рассмотрена динамика запуска межпланетных космических аппаратов из произвольной точки поверхности вращающейся планеты на заданную гелиоцентрическую орбиту перелета. Обсуждение межпланетных перелетов с большой тягой завершается анализом численного расчета конкретных траекторий пролета около Венеры, Марса и Юпитера, а также оценками изменения траекторий вследствие пертурбационного маневра вблизи планеты, чувствительности параметров траекторий к начальным ошибкам и оценкой эффективных сечений захвата. В дальнейшем дается введение в космическую навигацию в межпланетном пространстве с описанием оборудования, необходимого для навигации и наведения, и анализом принципов коррекции орбит перелета. Еще более важной, чем связь между динамикой полета и навигацией, является связь между динамикой полета и вопросами создания тяги в космическом пространстве. Обсуждаются двигательные системы большой и малой тяги и целесообразные области их применения в задачах взлета, посадки и межзвездных полетов. Для случаев конфигурации космического аппарата типа «сферы» или «паруса» представлено краткое введение в теорию движения с помощью использования давления солнечного излучения. В главе содержится также исследование вопросов создания искусственных спутников планет и посадки на другие планеты или их естественные спутники. Глава 9 заканчивается изложением трех методов определения пространственной орбиты перелета в гелиоцентрическом пространстве или внутри сферы действия планеты.

В настоящей книге предпринята попытка дать наиболее полное (по сравнению с ранее вышедшими работами) обсуждение, анализ и оценку динамики космического полета. Несмотря на это, читатель обнаружит отсутствие рассмотрения ряда специальных вопросов, таких, как динамика посадки космического аппарата на небесные тела, лишённые атмосферы, подробная динамика маневров встречи и причаливания, реля-

тивистская механика полета и другие. Эти вопросы будут изучены в третьем томе наряду с рассмотрением реактивных систем (ввиду их тесной связи с операциями в космосе). Приведенный список литературы далек от исчерпывающей библиографии и не содержит большого количества трудов и статей, которые во все возрастающем количестве издаются NASA, Научно-исследовательским центром ВВС, а также частными научно-исследовательскими институтами. Ряд глубоких теоретических исследований и вычислительных работ, проведенных при подготовке настоящей книги, был выполнен независимо различными авторами и организациями и опубликован в 1960—1961 гг., что свидетельствует об огромном увеличении публикаций, ставшем возможным благодаря все увеличивающемуся финансированию программы изучения космических полетов. Для обзора быстро увеличивающейся литературы рекомендуем читателю обратиться к информационным перечням работ NASA, прекрасному «Обзору открытой литературы», периодически издаваемому Лабораторией реактивного движения (Пасадена, Калифорния), обзорам и перечням публикаций Американского ракетного общества, Института космических исследований, Американского астронавтического общества, Американского общества инженеров-механиков и многих других.

Подготовка к печати и чтение корректуры этой книги вследствие моей занятости в разработке программы ракеты-носителя «Кентавр» и других работ потребовали значительного времени — почти на год больше, чем предполагалось первоначально. Я должен извиниться за эту задержку перед теми читателями, которые приобрели первый том книги «Космический полет» и ожидали более раннего издания второго тома. Я должен также выразить глубокую признательность издателю Грейсону Мериллу за его поистине бесконечное терпение и помощь. Однако эта задержка была бы еще большей, если бы не действенная помощь г-жи Елены Пенс, выполнившей проверку формул, оценку результатов вычислений на ЭВМ, подготовку и вычерчивание графиков и внесшей много улучшений в формулировки и решения задач, приведенных в конце каждой главы. Я также глубоко признателен моему другу доктору Та Ли из «Дженерал Дайнемикс/Астронотикс» за просмотр и ценные замечания по анализу движения в поле центрального тела со сжатием, изложенному в главе 2, Вальтеру Дэвису и Джеральду Флейшнеру за подготовку и проведение большинства вычислений на электронной вычислительной машине.

ГЛАВА 1

БАЛЛИСТИКА

1.1. Введение

Полет баллистической ракеты дальнего действия является первым шагом к космическому полету. Снаряд, запущенный на большую дальность, движется по эллиптической траектории, большая часть которой лежит вне земной атмосферы. Поэтому значительную часть времени снаряд движется как искусственный спутник Земли. С увеличением дальности его начальная скорость быстро приближается к круговой скорости спутника. Следовательно, проблема входа снаряда в атмосферу порождает задачи, родственные тем, которые должны решаться для успешного возвращения из космоса спутников и пилотируемых космических аппаратов. Таким образом, раздел техники, получивший развитие в связи с разработкой баллистических снарядов, отмечает собой начало космической техники.

Вследствие важности этой начальной фазы развития космической техники настоящая глава посвящена рассмотрению основ баллистики больших дальностей. Мы будем называть путь движения баллистического снаряда *траекторией* в отличие от термина *орбита*, хотя геометрия траектории точно такая же, как и эллиптической орбиты (или, в случае малых дальностей, как параболической орбиты). Следовательно, траектория определяется как путь снаряда, пересекающий в двух точках поверхность небесного тела (или плотные слои его атмосферы). В отличие от траектории орбита не пересекает небесное тело. Орбита может быть замкнутой (эллиптическая или круговая, представляющая собой частный случай эллиптической) или разомкнутой (парабола и гипербола).

Вначале будут рассмотрены общие характеристики эллиптической траектории. Затем будет проведена оптимизация эллиптической траектории для заданной дальности с целью получения траектории минимальной энергии (ТМЭ). В параграфе,

посвященном наземной и орбитальной баллистике, будет рассмотрена механика полета на большие дальности и для случая баллистического спуска с орбиты спутника без учета сопротивления атмосферы. После установления баллистических полетных характеристик в инерциальном пространстве будет рассмотрено влияние вращения Земли. В качестве примеров использования предварительно полученных уравнений даны расчеты траекторий. Особо важным является анализ ошибок баллистических траекторий, изложение которого дается для случая плоского движения. В этой главе рассматривается только состояние свободного полета. Изложение вопросов, относящихся к активному участку полета, читатель найдет в пятой главе. В заключительном параграфе настоящей главы приведены характеристики траекторий баллистического спуска, полученные в результате расчетов на электронных машинах большого числа траекторий при величинах начальных скоростей входа от 70% круговой до параболической. Нагрев, который зависит главным образом от аэротермодинамических и магнитогидродинамических условий, так же как и от конфигурации тела, в этой главе не рассматривается — он будет рассмотрен в третьем томе настоящей серии, выходящем под названием «Операции в космосе».

1.2. Эллиптическая траектория

Эллиптические траектории учитывают кривизну Земли, то есть учитывают тот факт, что центр масс Земли находится на конечном расстоянии от ее поверхности. Для очень малых дальностей полета можно рассматривать поверхность Земли как плоскость. Это равносильно предположению, что центр масс Земли находится на бесконечном удалении. Траектории свободного полета в этом случае должны совпадать с участками параболической орбиты¹⁾. Анализ траекторий малой дальности можно найти в любой книге по баллистике.

Эллиптическая траектория является строго правильной только в условиях безвоздушного пространства. В действительности сопротивление воздуха создает возмущающий эффект. Однако при дальностях полета, превышающих несколько сотен километров, большая часть баллистической траектории (95% и более) практически расположена за пределами земной атмосферы. Исключение составляют лишь участки подъема и спуска, примыкающие к поверхности Земли. На участке подъема полет происходит под действием силы, создаваемой двигателем, и контролируется системой управления. Спуск обычно происходит

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, гл. 4.

настолько быстро, что боковые смещения космического аппарата оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с дальностью (хотя и не пренебрежимо малыми с точки зрения оценки эффективности оружия). В силу сказанного при проведении общего анализа характеристик полета оказывается вполне приемлемым предположение об отсутствии атмосферы. При точном расчете координат точки падения, необходимом для баллистического оружия, условия входа в атмосферу должны быть, конечно, тщательно учтены, в особенности в случае очень сильного торможения при спуске.

Эллиптическая траектория представляет собой часть эллипса, наиболее удаленную от центра притяжения, т. е. лежащую в области апогея. Большая часть эллипса проходит внутри Земли и, следовательно, не представляет практического интереса. Основные обозначения, используемые здесь, приведены на рис. 1.1. Связь между угловой дальностью 2δ и сферической дальностью, измеренной на сферической поверхности Земли, показана на графике (рис. 1.2).

Уравнение эллипса в полярных координатах записывается в следующей форме:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \eta} = \frac{p}{1 - e \cos \delta}, \quad (1.1)$$

откуда

$$e \cos \eta = \frac{p}{r} - 1 = q - 1. \quad (1.2)$$

Для q можно получить следующее выражение¹⁾:

$$q = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} = \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \cos^2 \theta = v^2 \cos^2 \theta, \quad (1.3)$$

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, § 4.2. (Прим. ред.)

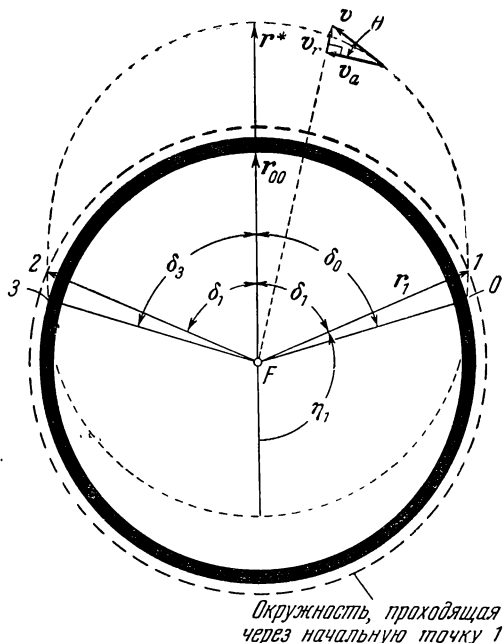


Рис. 1.1. Эллиптическая траектория.

где $v = v/v_c$, а v_c — круговая скорость, соответствующая рассматриваемому удалению r от центра притяжения. Выражение для эксцентриситета через величины q и θ может быть представлено в таком виде¹⁾:

$$e = \sqrt{(1-q)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad (1.4a)$$

откуда

$$e = \sqrt{[1 - v^2 \cos^2 \theta]^2 + v^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}. \quad (1.4b)$$

Дифференцируя равенство (1.2) по времени, получаем следующее равенство:

$$e \sin \eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{p}{r^2} v_r.$$

Разделив последнее соотношение на соотношение (1.2), получим:

$$\operatorname{tg} \eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{\frac{p}{r^2} v_r}{q-1}. \quad (1.5)$$

По определению¹⁾,

$$r^2 \frac{d\eta}{dt} = C = r v_a = r v \cos \theta, \quad (1.6)$$

где C — постоянная эллиптической орбиты, представляющая собой, в соответствии со вторым законом Кеплера, кинетический момент, отнесенный к единице массы снаряда. Используя очевидное равенство $v_r = v \sin \theta$ и соотношение (1.6), из (1.5) получим:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{p v_r}{C (q-1)} = \frac{q \operatorname{tg} \theta}{q-1}.$$

И, наконец, перейдя к углу δ_1 с помощью равенства $\operatorname{tg} \eta_1 = -\operatorname{tg} \delta_1$, получим следующее выражение для тангенса половины угловой дальности эллиптической траектории:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{q_1 \operatorname{tg} \theta_1}{1 - q_1} = \frac{v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1} = \frac{v_1^2 \sin 2\theta_1}{2 - 2v_1^2 \cos^2 \theta_1}, \quad (1.7)$$

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, § 4.2. (Прим. ред.)

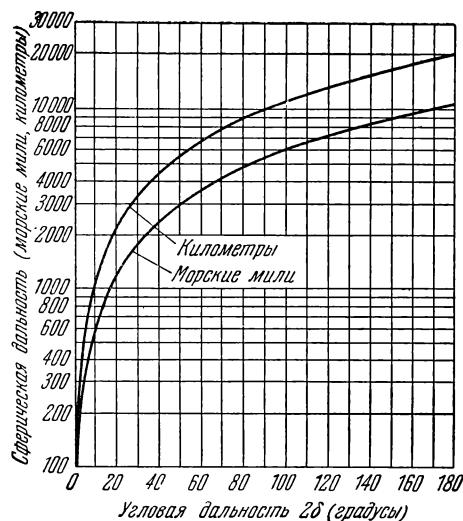


Рис. 1.2. Связь между угловой и сферической дальностями на поверхности Земли.

где индекс «1» относится к начальным условиям, соответствующим концу активного участка [см. также далее соотношение (1.33)]. При $\theta_1 \rightarrow 0$ величина $\delta_1 \rightarrow 0$; при $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$ величина $\operatorname{tg} \delta_1 \rightarrow 1/\operatorname{tg} \theta_1$, так как $1/\infty \rightarrow 0$. Следовательно, между этими значениями находится значение δ_1 , максимальное для заданного v_1 . Это максимальное значение величины δ_1 будет рассмотрено в § 1.3 (см. также рис. 1.8 и 1.9).

Разрешая уравнение (1.7) относительно параметра v_1 , характеризующего начальную скорость, получаем:

$$v_1^2 = \frac{2 \operatorname{tg} \delta_1}{2 \cos^2 \theta_1 \operatorname{tg} \delta_1 + \sin 2\theta_1}. \quad (1.8a)$$

Это соотношение позволяет в явном виде выразить начальную скорость v_1 через начальную высоту r_1 , начальный угол бросания θ_1 и половину угловой дальности δ_1 . Имея в виду, что $v = v/v_c$ и что для начальной точки $v_c = \sqrt{K/r_1}$, находим:

$$v_1^2 = \frac{K}{r_{00}} \frac{r_{00}}{r_1} \frac{2 \operatorname{tg} \delta_1}{2 \cos^2 \theta_1 \operatorname{tg} \delta_1 + \sin 2\theta_1}, \quad (1.8b)$$

где r_{00} — радиус Земли¹⁾ (6378,4 км), $K = 3,9858 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{сек}^2$. Сомножитель K/r_{00} представляет собой квадрат круговой скорости на удалении r_{00} от центра Земли:

$$\frac{K}{r_{00}} = 62,5616 \text{ км}^2/\text{сек}^2.$$

Для очень малых угловых дальностей ($2\delta_1 \leq 2^\circ$) величина $2 \cos^2 \theta_1 \operatorname{tg} \delta_1$ становится пренебрежимо малой по сравнению с величиной $\sin 2\theta_1$, при этом $r_{00}/r_1 \rightarrow 1$ и $2 \operatorname{tg} \delta_1 \rightarrow 2\delta_1$. Поэтому становится справедливым приближенное равенство

$$v_1^2 \approx \frac{K}{r_{00}} \frac{2\delta_1}{\sin 2\theta_1}.$$

Положив в нем $\delta_1 = x_1/r_{00}$, где x_1 — горизонтальная дальность, получим формулу (известную из параболической теории) для плоской Земли:

$$v_1^2 \approx \frac{K}{r_{00}^2} \frac{x_1}{\sin 2\theta_1} = \frac{g_{00} x_1}{\sin 2\theta_1}, \quad (1.8c)$$

где g_{00} — ускорение силы притяжения на поверхности Земли.

Радиальная («вертикальная») составляющая скорости определяется следующими выражениями:

$$v_r = \dot{r} = v \sin \theta = v_a \frac{e}{q} \sin \theta, \quad (1.9)$$

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, таблицы 3.1б и 3.1в.

где v_a — трансверсальная («горизонтальная») составляющая скорости. Для трансверсальной составляющей скорости можно получить такие выражения:

$$v_a = r\dot{\eta} = v \cos \theta = \frac{C}{r} = \frac{V \sqrt{pK}}{r} = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 - e \cos \delta) = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{K}{a}} \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.10)$$

Угол наклона траектории (угол наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта) в произвольной точке траектории определяется выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_r}{v_a} = \frac{\frac{dr}{dt}}{r \frac{d\eta}{dt}} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\eta}.$$

Из уравнения (1.1) после дифференцирования получаем:

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{pe \sin \eta}{(1 + e \cos \eta)^2} = \frac{r^2 e \sin \eta}{p}.$$

Подставив полученное выражение для производной в выражение для $\operatorname{tg} \theta$, находим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{re}{p} \sin \eta = \frac{e \sin \eta}{1 + e \cos \eta}$$

или, перейдя от угла η к углу δ с помощью соотношения $\eta = \pi - \delta$, можно представить выражение для $\operatorname{tg} \theta$ в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_r}{v_a} = \frac{e \sin \delta}{1 - e \cos \delta}. \quad (1.11)$$

Величина скорости в каждый момент времени полета может быть выражена соотношением

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_a^2} \quad (1.12)$$

или определена из уравнения (1.6) следующим образом:

$$v = \frac{r_1 v_{a1}}{r \cos \theta} = \frac{C}{r \cos \theta} = \frac{V \sqrt{Kp}}{r \cos \theta}. \quad (1.13)$$

Вершина траектории соответствует значениям $\eta = 180^\circ$ и $\delta = 0$. Поэтому из записанных выше выражений для $\operatorname{tg} \theta$ следует, что в вершине траектории $\theta = 0$. Положив $\theta = 0$ в соотношениях (1.13), можно определить величину скорости в вершине траектории так:

$$v^* = v_{a1} \frac{r_1}{r^*} = \frac{V \sqrt{Kp}}{r^*},$$

где r^* — расстояние от центра Земли до вершины траектории. Из соотношений (1.1) и (1.2) следует, что $r^* = \frac{p}{1-e}$, $q = \frac{p}{r}$, $p = qr$. В результате для величины v^* получаем следующие соотношения:

$$v^* = v_{a_1} \frac{r_1}{r^*} = v_{a_1} \frac{1-e}{q_1} = v_c \sqrt{q_1} \frac{r_1}{r^*}, \quad (1.14)$$

где $v_c = \sqrt{\frac{K}{r_1}}$.

Если орбитальную энергию, необходимую для ухода тела из данной точки поля притяжения Земли в бесконечность, принять за нуль отсчета, то энергия тела, движущегося по эллиптической орбите в поле притяжения Земли, будет отрицательной и может быть представлена в виде

$$h = v^2 - v_p^2 = v^2 - \frac{2K}{r} = \frac{K}{r} (v^2 - 2), \quad (1.15)$$

где $v_p = \sqrt{\frac{2K}{r}}$ — параболическая скорость, или минимальная скорость «ухода» из гравитационного поля Земли. Из равенства (1.12), учитывая, что в вершине траектории $v_r = 0$, получаем $v^* = v_a$. Из соотношений (1.15) следует, что

$$v^* = \sqrt{v_1^2 - \frac{2K}{r_1} + \frac{2K}{r^*}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, скорость в вершине траектории может быть определена либо с помощью соотношений (1.14), либо с помощью соотношения (1.16). Из записанных выше выражений (1.14) можно определить расстояние от центра притяжения до вершины траектории в следующем виде:

$$r^* = r_1 \frac{q_1}{1-e}, \quad (1.17)$$

откуда нетрудно получить выражение для высоты вершины траектории:

$$y^* = y_1 + r^* - r_1 = y_1 + r_1 \left(\frac{q_1}{1-e} - 1 \right).$$

Выражение для дальности, измеряемой от начальной точки до вершины траектории по дуге окружности, проходящей через начальную точку, может быть записано в следующем виде:

$$x_1^* = r_1 \delta_1^{(\omega)} = \frac{\pi}{180} r_1 \delta_1^{(^\circ)}, \quad (1.18a)$$

а если измерять эту дальность по дуге окружности радиуса, равного радиусу Земли r_{00} , то она может быть записана так:

$$x_{00}^* = r_{00} \delta_1^{(\cup)} = x_1^* \frac{r_{00}}{r_1}. \quad (1.18b)$$

Используя выражения (1.10), (1.3) и полагая $\delta = \delta_1$ и $r = r_1$, получаем следующие удобные выражения для эксцентриситета:

$$e = \frac{1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1}{\cos \delta_1} = \frac{1 - q_1}{\cos \delta_1}. \quad (1.19)$$

1.3. Траектория минимальной энергии (ТМЭ)

Траекторией минимальной энергии (ТМЭ) назовем такую из эллиптических траекторий, которая при заданной начальной высоте для получения заданной дальности на земной поверхности требует минимальной начальной скорости. Влияние начальной высоты на характеристики траектории сравнительно невелико, и в дальнейшем им можно пренебречь. Среди всех эллипсов, которые проходят через одну и ту же начальную точку и одну и ту же точку падения на поверхности Земли (рис. 1.3), траектория минимальной энергии имеет наименьшую большую полуось a , потому что для такого эллипса величина h [см. выражения (1.15)] должна быть минимальной, как это следует из данного выше определения ТМЭ.

Действительно, поскольку постоянную h через величины p , e и гравитационный параметр K можно выразить как

$$h = - \frac{K(1 - e^2)}{p}, \quad (1.20)$$

то множитель $(1 - e^2)/p$ для ТМЭ должен быть минимальным. Уравнение эллипса в полярных координатах можно записать

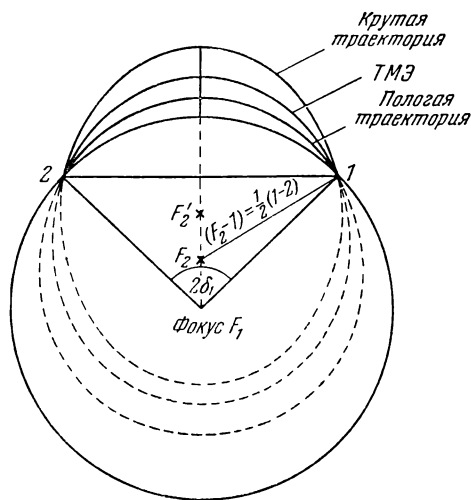


Рис. 1.3. Эллиптическая траектория между двумя точками на поверхности Земли.

в следующей форме:

$$r = a(1 - e^2) - er \cos \eta = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \eta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \delta}. \quad (1.21)$$

При $\eta = 90^\circ$

$$r = a(1 - e^2) = p$$

и, следовательно,

$$\frac{1 - e^2}{p} = \frac{1}{a}.$$

В результате выражение (1.20) для постоянной h может быть преобразовано к виду

$$h = -\frac{K}{a}.$$

Используя последнее соотношение и соотношения (1.15), можно выразить скорость через расстояние r в виде

$$v = \sqrt{2 - \frac{r}{a}}, \quad (1.22)$$

где $v = v/v_c$. Из выражения (1.22) следует, что для ТМЭ большая полуось эллипса, определяемая значениями r_1 , v_1 и θ_1 в начальной точке, должна быть минимальной. На рис. 1.3 можно видеть, что ТМЭ действительно имеет наименьшую большую полуось¹⁾.

В начальной точке выражение (1.1) обращается в соотношение

$$r_1 = \frac{p}{1 - e \cos \delta_1},$$

откуда для фокального параметра эллипса получаем:

$$p = r_1(1 - e \cos \delta_1).$$

Подставляя последнее выражение для p в соотношение (1.1), находим:

$$r = \frac{r_1(1 - e \cos \delta_1)}{1 - e \cos \delta}. \quad (1.23)$$

Из соотношений (1.21) для апогейного расстояния (полагая $\eta = 180^\circ$) получаем:

$$r_A = a(1 + e).$$

Поскольку точка, определяемая расстоянием r_A , соответствует $\delta = 0$, то есть является вершиной траектории, то

$$r^* = a(1 + e). \quad (1.24)$$

¹⁾ Геометрически это условие выполняется (рис. 1.3), если расстояние от второго фокуса F_2 до начальной точки 1 (или конечной точки 2) равно половине прямой, соединяющей точки 1 и 2.

Таким образом, для вершины траектории величина r в соотношении (1.23) может быть заменена величиной $a(1+e)$. После этого, разрешив уравнение (1.23) относительно a , получим:

$$a = \frac{r_1 (1 - e \cos \delta_1)}{1 - e^2}. \quad (1.25)$$

Равенство (1.25) позволяет представить величину большой полуоси в виде функции расстояния между начальной точкой и центром притяжения и угловой дальности между вершиной траектории и начальной точкой. Из равенства (1.25) также следует, что для заданной дальности $2\delta_1$ большая полуось эллипса становится минимальной при обращении в нуль частной производной da/de . Приравняв нулю указанную частную производную, после элементарных преобразований получим следующее уравнение:

$$e^2 - \frac{2e}{\cos \delta_1} + 1 = 0.$$

Разрешив его относительно e , получим выражение для эксцентриситета ТМЭ:

$$e_{\min} = \frac{1 \pm \sin \delta_1}{\cos \delta_1},$$

где знак «минус» относится к случаю, когда $0 < \delta_1 < 180^\circ$:

$$e_{\min} = \frac{1 - \sin \delta_1}{\cos \delta_1}. \quad (1.26)$$

Следовательно, для ТМЭ можно записать следующее уравнение в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 - \frac{1 - \sin \delta_1}{\cos \delta_1} \cos \delta}. \quad (1.27)$$

Для определения соответствующего угла бросания (угла наклона вектора скорости в начальной точке к плоскости начального горизонта) используем соотношение (1.11) при $\delta = \delta_1$:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{e \sin \delta_1}{1 - e \cos \delta_1}. \quad (1.28)$$

При заданных значениях эксцентриситета e и угла δ_1 последнее равенство позволяет вычислить угол бросания. Для определения оптимального угла бросания $\theta_{1 \text{ opt}}$, соответствующего ТМЭ, необходимо в соотношение (1.28) подставить выражение $e_{\min}$ из соотношения (1.26). После проведения указанной подстановки получим:

$$\operatorname{tg} \theta_{1 \text{ opt}} = e_{\min}. \quad (1.29a)$$

Отсюда следует, что угол $\theta_{1 \text{ opt}} = 45^\circ$ является предельным углом бросания для очень малых дальностей, для которых величина $e_{\min}$ близка к единице (то есть к величине e для параболической траектории). Другим предельным углом бросания является угол $\theta_{1 \text{ opt}} = 0$, при котором $e_{\min} = 0$ (эллипс обращается в окружность). Между указанными предельными значениями находятся оптимальные углы бросания, уменьшающиеся с увеличением начальных скоростей или дальностей. Поскольку оптимальный угол бросания обращается в нуль при достижении начальной скоростью значения круговой скорости v_c , то можно получить другое выражение для угла $\theta_{1 \text{ opt}}$:

$$\operatorname{tg} \theta_{1 \text{ opt}} = \sqrt{1 - v_1^2} = \sqrt{1 - \frac{r_1 v_1^2}{K}}. \quad (1.29b)$$

Максимальная высота ТМЭ будет рассмотрена ниже. Дальность полета, соответствующую ТМЭ, можно определить с помощью соотношения

$$\operatorname{tg} \delta_{1 \text{ opt}} = \frac{v_1^2}{2 \sqrt{1 - v_1^2}} \quad (1.30a)$$

или соотношения

$$\sin 2\delta_{1 \text{ opt}} = \frac{4v_1^2 \sqrt{1 - v_1^2}}{(2 - v_1^2)^2}. \quad (1.30b)$$

Время полета от начальной точки 1 до конечной точки 2 (рис. 1.3) можно вычислить с помощью следующей зависимости:

$$\Delta t_{12} = 2 \left(\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}} - t_{r_1} \right), \quad (1.31a)$$

где $\pi \sqrt{a^3/K}$ — половина периода обращения по эллиптической орбите, частью которой является рассматриваемая траектория, а t_{r_1} — время полета от перигея до начальной точки 1 по тому же эллипсу:

$$t_{r_1} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \left[\arccos \left(\frac{a - r_1}{ae} \right) - \frac{r_1}{a} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \delta_1 \right]. \quad (1.31b)$$

Последнее выражение можно получить из соотношений, приведенных в § 4.9 первого тома настоящей серии. Время полета Δt_{12} можно представить безразмерной величиной τ_c , поделив Δt_{12} на величину периода T_{00} обращения по круговой орбите нулевой высоты

$$T_{00} = \frac{2\pi r_{00}^{3/2}}{\sqrt{K}} = 84,3 \text{ мин.}$$

Тогда

$$\tau_c = \frac{\Delta t_{12}}{T_{00}} = \left(\frac{a}{r_{00}}\right)^{3/2} \left[1 + \frac{1}{\pi} \frac{r_1}{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \delta_1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{a-r_1}{ae} \right) \right]. \quad (1.32)$$

На рис. 1.4 приведены графики зависимости начальной скорости v_1 от угла бросания θ_1 ; пунктирная линия $(v_1)_{\min}$ пересекает кривые минимальных значений скоростей для каждой дальности. На рис. 1.5 показаны графики изменения начальной скорости (в единицах круговой и параболической скоростей на поверхности Земли), угла бросания и безразмерного времени полета τ_c в зависимости от полной высоты траектории, выраженной в единицах земного радиуса, для баллистических траекторий, соответствующих дальности 10 200 км. Как следует из рис. 1.4, кривая, выражающая зависимость скорости в области минимума, отвечающей ТМЭ, имеет сравнительно пологую форму, что

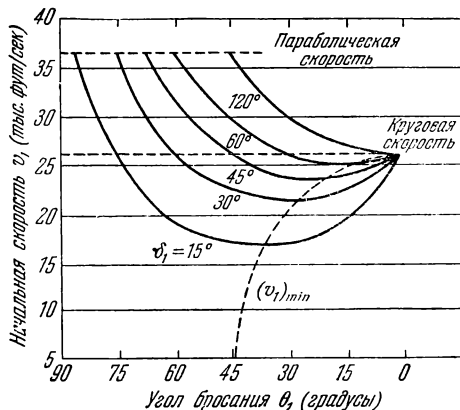


Рис. 1.4. Зависимость начальной скорости от угла бросания для различных дальностей ($r_1 \approx r_{00}$).

позволяет изменять угол бросания от его оптимального значения без значительного увеличения начальной скорости. Рис. 1.5 позволяет сравнить начальную скорость, соответствующую траекториям с дальностью, равной четвертой части земной окружности, со скоростью гипотетического спутника с нулевой высотой полета. Из рис. 1.5 также следует, что время полета по ТМЭ равно 0,38, тогда как то же самое расстояние спутником, движущимся по орбите нулевой высоты, будет пройдено, очевидно, за 0,25. Для спутника с высотой полета 556 км это время несколько больше и составит примерно 0,265. Эти цифры показывают, что только спутники обладают достаточной скоростью и то без большого запаса, чтобы служить в качестве разведывательных средств в войне с использованием баллистических снарядов. Более подходящим для проведения разведывательных операций в короткое время и для раннего предупреждения является применение спутников на очень высоких орбитах, кото-

рые могут держать под контролем большие площади, вести мгновенное глобальное наблюдение и осуществлять передачу

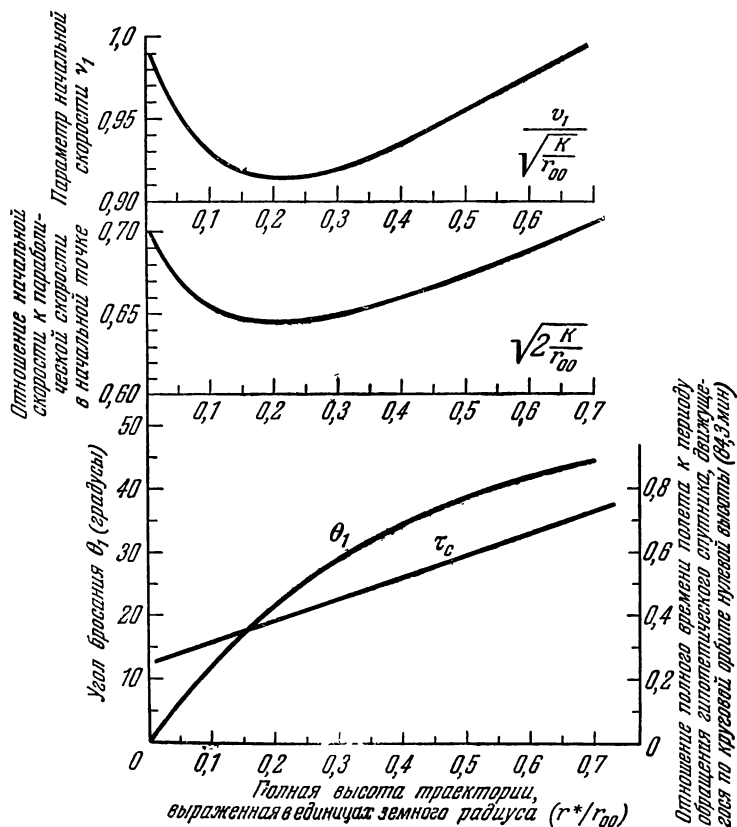


Рис. 1.5. Зависимость начальной скорости, угла бросания и безразмерного времени полета от полной высоты траектории для дальности 10 200 км (5500 морских миль).

информации по схеме «Земля — спутник — Земля» или «Земля — спутник — второй спутник — Земля».

1.4. Наземная и орбитальная баллистика

Равенство (1.7) показывает, что дальность, отсчитываемая по дуге окружности радиуса r_1 , зависит только от двух параметров: угла бросания θ_1 и параметра начальной скорости

$v_1^2 = \left(\frac{v_1}{v_c}\right)^2 = v_1^2 r_1 / K$. Использование параметра v позволяет устанавливать соотношения в общем виде, справедливые для любого расстояния r_1 начальной точки. Это желательно потому, что величина r_1 обычно заранее неизвестна. Безразмерная величина v^2 может изменяться лишь в пределах от 0 до 2. Послед-

нее значение соответствует параболической скорости.

На рис. 1.6 показано изменение угла бросания $\theta_{1 \text{ опт}}$, отсчитываемого от местного горизонта, в зависимости от параметра v_1 для ТМЭ. Из рисунка видно, что известное артиллерийское правило, согласно которому наибольшая дальность достигается при угле бросания 45° , оказывается справедливым лишь при малых начальных скоростях и, следовательно, при малых дальностях. С увеличением начальной скорости угол бросания уменьшается до нуля, что соответствует горизонтальному направлению начальной скорости. Так как такая скорость достигается

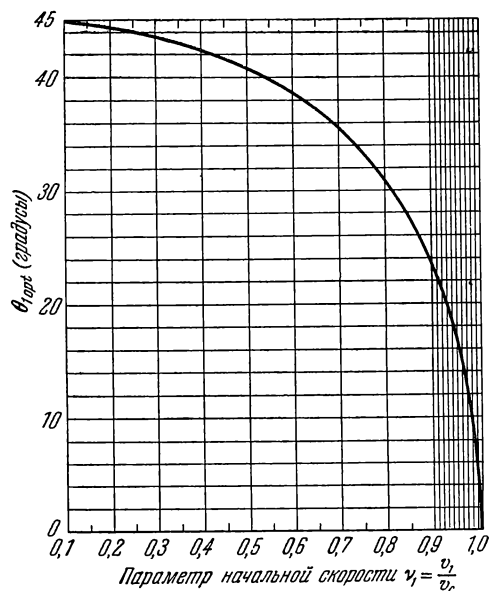


Рис. 1.6. Зависимость угла бросания от параметра v_1 для траектории минимальной энергии.

только очень большими аппаратами, то начальное расстояние r_1 будет для них столь велико, что начальная точка баллистического полета будет находиться практически за пределами земной атмосферы, и горизонтальное направление начальной скорости будет вполне возможным.

В таблице 1.1 приведены основные характеристики ТМЭ. Из таблицы следует, что при $v_1=0,91$ угловая дальность $2\delta_1$ примерно равна 90° , что соответствует четвертой части земной окружности. При $v_1=1$ $\theta_1=0$ и при соответствующей высоте начальной точки можно достигнуть любой точки земной поверхности¹⁾. На

¹⁾ С учетом сопротивления воздуха. Если высота будет слишком велика, то есть начальная точка окажется за пределами земной атмосферы, то при этих условиях аппарат превратится в спутник Земли.

Таблица 1.1

**Основные характеристики траекторий минимальной энергии
(безвоздушное пространство) ¹⁾**

v_1	θ_1 , град	$V\sqrt{q_1}$	q_1	δ_1		δ_1 , рад	e	r^*/r_1	$t_{r_1-r^*}$, мин
				град	мин				
0,1	44,86	0,071	$5,022 \cdot 10^{-3}$	0	17	0,0050	0,9950	1,0025	0,94
0,2	44,4	0,143	$2,038 \cdot 10^{-2}$	1	10	0,0204	0,9798	1,0101	1,87
0,3	43,65	0,217	$4,707 \cdot 10^{-2}$	2	41	0,0468	0,9539	1,0230	2,97
0,4	42,5	0,2945	$8,686 \cdot 10^{-2}$	4	57	0,0864	0,9165	1,0416	4,17
0,5	40,9	0,378	0,1427	8	12	0,1431	0,8660	1,0663	5,53
0,6	38,65	0,484	0,2193	12	40	0,2210	0,8000	1,0976	7,15
0,7	35,53	0,57	0,2345	18	55	0,3301	0,7141	1,1352	9,23
0,8	31,0	0,685	0,4701	28	05	0,4901	0,6000	1,1765	11,85
0,9	23,55	0,825	0,6799	42	49	0,7470	0,4359	1,2066	15,6
0,91	22,52	0,841	0,7058	44	51	0,7827	0,4146	1,2071	16,0
0,92	21,4	0,858	0,7329	47	04	0,8215	0,3919	1,2066	16,53
0,94	18,85	0,89	0,7906	52	20	0,9134	0,3412	1,2013	17,49
0,96	15,65	0,923	0,8536	58	30	1,0210	0,2800	1,1870	18,59
0,98	11,24	0,96	0,9228	67	29	1,1778	0,0199	1,1533	19,75
1,0	0	1,0	1,0	—	—	∞	0	1,0	0

¹⁾ $v_1 = v_1/v_c$ — параметр начальной скорости; $V\sqrt{q_1}$ — параметр горизонтальной скорости; $q_1 = v_1^2 \cos^2 \theta_1$; θ_1 — угол бросания; δ_1 — половина угловой дальности; e — эксцентриситет эллиптической траектории; r^*/r_1 — параметр высоты вершины; $t_{r_1-r^*}$ — время полета от начальной точки до вершины.

рис. 1.7 приведены графики зависимости между дальностью полета и начальной скоростью для ТМЭ.

Для сравнения на том же рисунке приведены аналогичные графики для гипотетических крылатых ракет, имеющих различное аэродинамическое качество (отношение подъемной силы L к лобовому сопротивлению D). При постоянном угле бросания θ_1 дальность зависит только от параметра v_1 . На рис. 1.8 и 1.9 приведены графики, связывающие три параметра: δ_1 , θ_1 и v_1 . Из соотношения (1.7) можно получить:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{v_1^2 \operatorname{tg} \theta_1}{1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1} = \frac{v_1^2 \operatorname{ctg} \theta_1}{1 + (1 - v_1^2) \operatorname{ctg} \theta_1}. \quad (1.33)$$

Можно показать, что для заданного значения $\delta_1 < 90^\circ$ существуют два угла бросания в пределах от 0 до 90° , соответствующие одному и тому же значению v_1 , то есть одной и той же высоте начальной точки и одной и той же величине начальной скорости. Подтверждением этому является наличие точек пересечения между кривыми на рис. 1.8. Кроме того, подтверждение

этому можно усмотреть и из графиков, приведенных на рис. 1.9. Действительно, прямая $2\delta_1 = \text{const}$ ($2\delta_1 < 180^\circ$), параллельная оси абсцисс, дважды пересекает кривые семейства и каждая пара точек пересечения соответствует двум углам θ_1 . При этом одно значение угла бросания отвечает

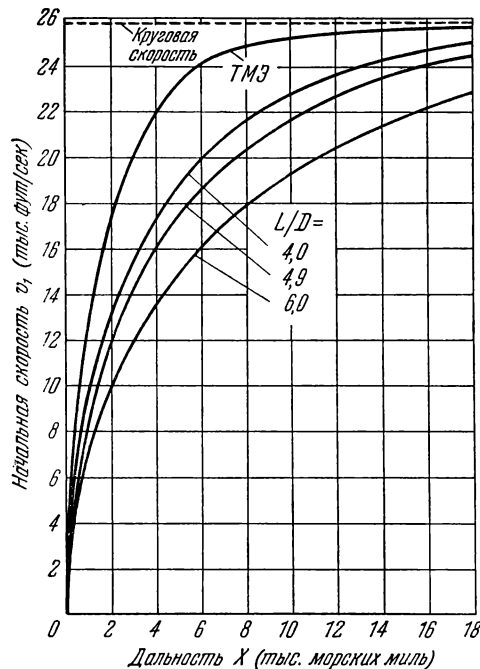


Рис. 1.7. Сравнение графиков зависимости между дальностью полета и начальной скоростью для баллистических ракет (ТМЭ) и для планирующих крылатых ракет с различным аэродинамическим качеством L/D .

настильной траектории, а другое — навесной. Связь между этими значениями угла бросания дается следующими равенствами:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_1 - \delta_1)}, \quad (1.34)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} + \delta_1, \quad (1.35)$$

где $\gamma = 90^\circ - \theta$. При очень малых дальностях ($\delta_1 \rightarrow 0$) равенство (1.35) приводит к хорошо известному положению: углы бросания при навесной и настильной стрельбе на малую дальность являются дополнительными. Для случая, когда $\delta_1 > 90^\circ$, равенство (1.7) всегда дает отрицательное значение угла бросания для настильной стрельбы ($\gamma_1 > 90^\circ$). Это означает, что вектор начальной скорости направлен в сторону поверхности Земли. Тогда при $v_1^2 > 1$, если

угол θ_1 , оставаясь отрицательным, имеет большую абсолютную величину, брошенное тело пересечет земную поверхность, пройдя высоту $y_1 = r_1 - r_{00}$; если же тело не пересекает земную поверхность, то оно проходит через точку перигея, так как оно имеет сверхкруговую скорость ($v_1^2 > 1$) и в предположении отсутствия атмосферы никогда не будет пересекать Землю. Этот тип траекторий, имеющий важное значение в орбитальной баллистике, будет рассмотрен в настоящем параграфе несколько позже. В наземной баллистике дальности $2\delta_1 \geq 180^\circ$ могут быть получены лишь при углах бро-

сания, указанных на рис. 1.9, и при начальных скоростях, находящихся в пределах, соответствующих диапазону $1 < v_1^2 \leq 2$. При $\theta_1 = 0$ все начальные скорости, соответствующие $v_1^2 > 1$, как это следует непосредственно из соотношения (1.7), приводят к значению $2\delta_1 = 360^\circ$.

Необходимо подчеркнуть, что проведенное рассмотрение относится к инерциальной системе координат (вращение Земли

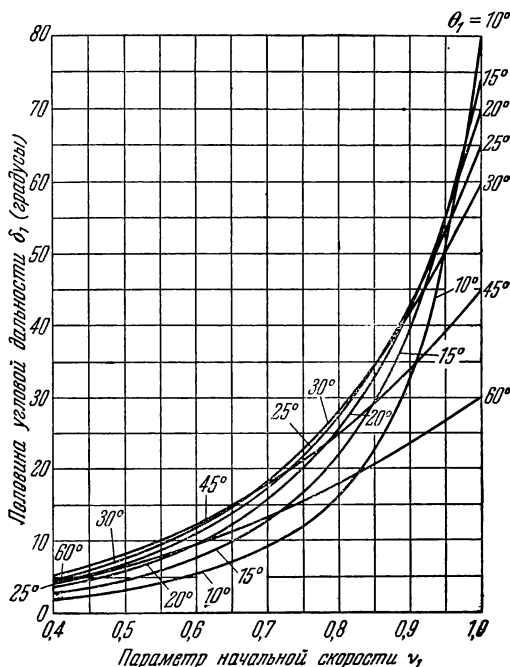


Рис. 1.8. Графики дальностей (без учета вращения Земли; угол бросания θ_1 — параметр семейства).

не учитывается). Точку падения на вращающуюся Землю нетрудно определить, зная угловую скорость вращения Земли и время полета на пассивном участке траектории.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что при некоторых условиях точка падения будет отсутствовать. Поэтому необходимо выяснить условия, обеспечивающие наличие точки падения (условия, обеспечивающие пересечение траектории с окружностью радиуса, равного радиусу Земли r_{00}). Очевидно, для того чтобы траектория пересекла окружность радиуса r_{00} ,

необходимо выполнить условие $r_P < r_{00}$, где r_P — перигейное расстояние, или условие $a - r_{00} < c$, где a — большая полуось

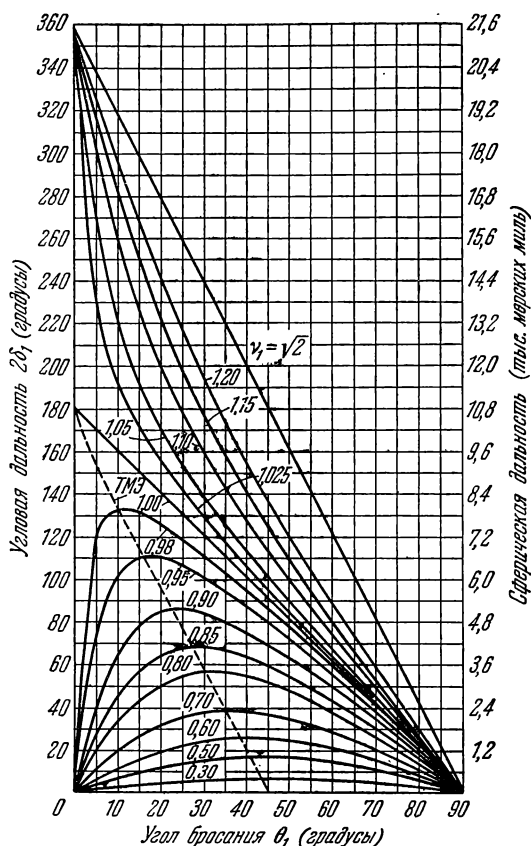


Рис. 1.9. Графики дальностей (без учета вращения Земли; v_1 — параметр семейства).

эллипса, а $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет. Возведя в квадрат второе неравенство, получим:

$$-r_{00}^2 + 2ar_{00} > b^2,$$

$$r_{00}^2 h + 2Kr_{00} < K \frac{b^2}{a},$$

где K — гравитационный параметр, h — постоянная энергии орбиты, а b — малая полуось. Учитывая, что $K = gr^2$, $Kb^2/a =$

$= r^2 v^2 \cos^2 \theta$ и $a = -\frac{K}{h}$, окончательно можно получить:

$$2 \left(\frac{r}{r_{00}} - 1 \right) + v^2 < \left(\frac{r}{r_{00}} \right)^2 v^2 \cos^2 \theta.$$

Подставляя в последнее выражение $r = r_{00} + y$ и разрешая его относительно $\cos \theta$, получим условие, обеспечивающее наличие точки падения:

$$\cos^2 \theta_1 \geq \frac{2 \frac{y_1}{r_{00}} + v_1^2}{v_1^2 \left(1 + \frac{y_1}{r_{00}} \right)^2} = \frac{2 \frac{r_1}{r_{00}} + v_1^2 - 2}{v_1^2 \left(\frac{r_1}{r_{00}} \right)^2}. \quad (1.36)$$

На рис. 1.10 приведены графики граничных значений углов бросания, обеспечивающих наличие точки падения для широкого диапазона высот начальной точки $y_1 = r_1 - r_{00} \leq 0,20 r_{00}$

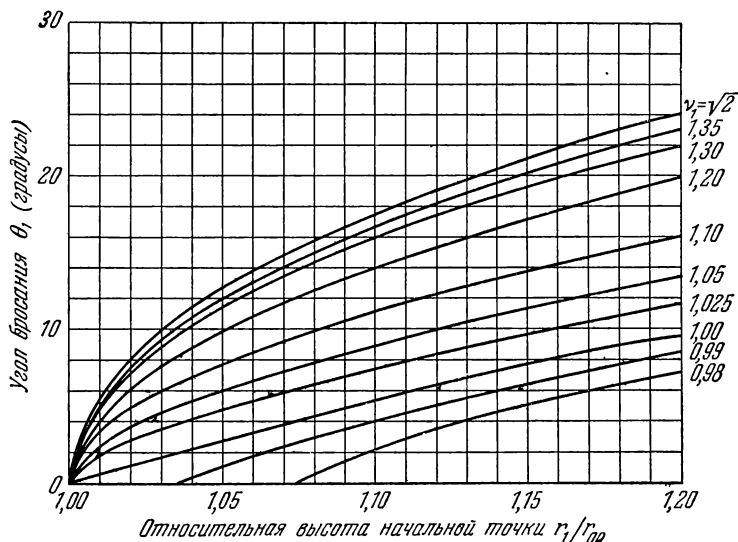


Рис. 1.10. Нижние границы углов бросания, обеспечивающих наличие точки падения.

(или $r_1/r_{00} = 1,20$), что охватывает высоты начальной точки до 1240 км. Соответствующие дальности могут быть рассчитаны по соотношению (1.7) (также без учета вращения Земли).

Необходимо отметить, что кривые, приведенные на рис. 1.10, представляют собой не только нижние границы *положительных* углов бросания, но также являются верхними границами

отрицательных углов бросания¹⁾. Пояснение этому дано на рис. 1.11. В первом случае (положительный угол бросания θ_1) начальная точка расположена до апогея; во втором случае (отрицательный угол бросания θ_1) она расположена на таком же расстоянии после апогея. Случай отрицательного угла бросания,

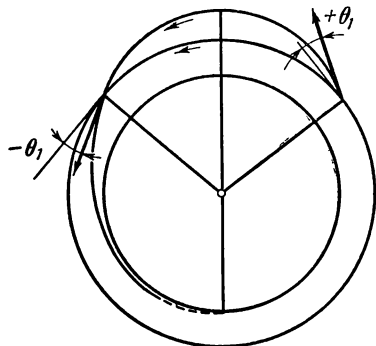


Рис. 1.11. Положительный и отрицательный граничные углы бросания.

особенно при $v_1=1$, представляет интерес как случай реализации начальных условий спуска с орбиты спутника (орбитальная баллистика). Примером подобного случая может служить траектория капсулы, посланной с орбиты спутника Марса или Венеры на поверхность соответствующей планеты. При применении рассмотренных положений к подобным случаям, очевидно, нет нужды в допущении о движении спутника планеты по строго круговой орбите, поскольку необходимое направление бросания может быть получено при различных

комбинациях параметров движения спутника и скоростях отделения тела от спутника.

Подставляя граничное значение угла бросания в соотношение (1.7), после несложных преобразований получаем:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sqrt{xv_1^2 - 1}}{x - 1}, \quad x = \frac{1 + \frac{y_1}{r_{00}}}{2 \frac{y_1}{r_{00}} + v_1^2}. \quad (1.37)$$

Любая пара значений v_1 и y_1/r_{00} , соответствующая некоторой точке на графиках (рис. 1.10), будучи подставлена в соотношения (1.37), определяет максимальную дальность. В этом случае точка падения удалена на 180° от апогея эллипса, то есть точка перигея касается поверхности Земли (без учета сопротивления воздуха). Если в соотношения (1.37) подставить значения v_1 и y_1/r_{00} , отвечающие углу бросания, превосходящему граничное значение, то соответствующая дальность будет меньше, то есть перигей эллипса будет «внутри Земли». Углы бросания, меньшие граничного, дают бесконечную дальность, то есть тело будет двигаться по замкнутой орбите вокруг Земли. Для $v_1 \leq 1$

¹⁾ Верхней границей абсолютной величины отрицательных углов. (Прим. ред.)

значения высоты начальной точки, обеспечивающие наличие точки падения на поверхности Земли¹⁾, даются следующими соотношениями:

$$\frac{y_1}{r_{00}} \leq \frac{2(1-v_1^2)}{v_1^2}, \quad \frac{r_1}{r_{00}} \leq \frac{2-v_1^2}{v_1^2}. \quad (1.38)$$

Знак равенства соответствует касанию точки перигея траектории поверхности Земли. Выражения (1.38) являются условиями наличия точки падения. Зависимость, выражаемая соотношениями (1.38), в случае, когда в них взят знак равенства, изображена на рис. 1.12.

Кривые на этом рисунке ставят в соответствие друг другу те значения величин v_1 и r_1 , которые отвечают случаю $\theta=0$ (рис. 1.10). Кривые, приведенные на рис. 1.12, показывают, например, что для спуска аппарата с круговой орбиты при $y_1/r_{00}=0,3$ величина v_1 должна равняться по крайней мере примерно 0,86. Таким образом, 14% круговой скорости должно быть погашено при реализации спуска. Напомним, что рассматриваемый пример относится к случаю $\theta_1=0$. Если величина y_1/r_{00} меньше или равна каждой из правых частей соотношений (1.38), то снаряд попадает на Землю при любых углах бросания. Однако при спуске с круговой орбиты энергетически выгоднее так уменьшать круговую скорость до величины, соответствующей значению $v_1=0,86$, чтобы спуск происходил при $\theta_1=0$, а не при $\theta_1 \leq 0$. Углы бросания $\theta_1 \leq 0$ обеспечивают при спуске более крутые траектории и, следовательно, более высокую точность попадания, поскольку при более крутых траекториях отклонение точки падения менее чувствительно к ошибкам в точке бросания. Исследование точности попадания является важным вопросом как наземной, так и орбитальной баллистики. Этот вопрос будет рассмотрен отдельно в § 1.7.

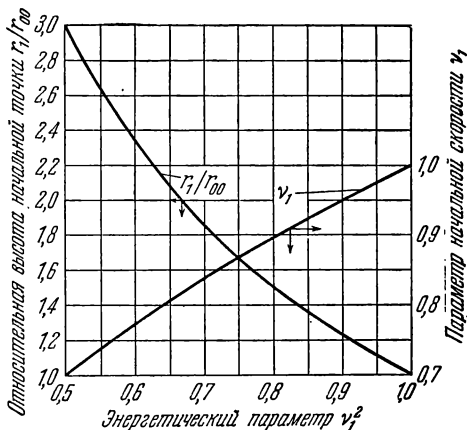


Рис. 1.12. Граничное значение высоты начальной точки, обеспечивающее наличие точки падения ($v_1^2 \leq 1$).

к случаю $\theta_1=0$. Если величина y_1/r_{00} меньше или равна каждой из правых частей соотношений (1.38), то снаряд попадает на Землю при любых углах бросания. Однако при спуске с круговой орбиты энергетически выгоднее так уменьшать круговую скорость до величины, соответствующей значению $v_1=0,86$, чтобы спуск происходил при $\theta_1=0$, а не при $\theta_1 \leq 0$. Углы бросания $\theta_1 \leq 0$ обеспечивают при спуске более крутые траектории и, следовательно, более высокую точность попадания, поскольку при более крутых траекториях отклонение точки падения менее чувствительно к ошибкам в точке бросания. Исследование точности попадания является важным вопросом как наземной, так и орбитальной баллистики. Этот вопрос будет рассмотрен отдельно в § 1.7.

¹⁾ При $\theta_1=0$. (Прим. ред.)

В заключение рассмотрим поправку в дальности, которую необходимо учитывать для участка движения снаряда от точки 2 (точки пересечения траектории с окружностью радиуса r_1) до точки 3 (точки пересечения траектории с поверхностью Земли). Как следует из рис. 1.1, угол $2\delta_1$ соответствует дальности, измеренной по дуге радиуса r_1 . Угол δ_1 может быть вычислен с помощью соотношений (1.7), (1.18a), (1.30) и (1.37). Соответствующая сферическая дальность, измеренная по дуге земного радиуса, может быть вычислена с помощью соотношений (1.18b). Если на участке от точки 2 до точки 3 снаряд испытывает небольшое торможение или вовсе не испытывает торможения, то эллиптическая траектория может быть продолжена до земной поверхности и точка пересечения эллиптической траектории с окружностью радиуса r_{00} может быть принята за действительную точку падения. В этом случае сферическая дальность между точкой 1 и точкой 3 может быть вычислена как

$$x_{13} = r_{00}(\delta_1 + \delta_3), \quad (1.39)$$

где δ_3 — центральный угол, заключенный между радиусами-векторами точки апогея и точки падения. Для определения соотношения, определяющего величину δ_3 в явном виде, можно воспользоваться уравнением эллипса в виде

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \delta_3} = \frac{b^2}{a - c \cos \delta_3}. \quad (1.40)$$

Используя соотношения

$$b = -\frac{rv \cos \theta}{\sqrt{h}}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad a = -\frac{K}{h} = -\frac{gr^2}{h}, \quad -h = 2gr - v^2, \\ v^2 = \frac{v^2}{v_c^2} \quad \text{и} \quad r = r_{00},$$

из выражения (1.40) можно получить:

$$\cos \delta_3 = \frac{1 - v_1^2 \frac{r_1}{r_{00}} \cos^2 \theta_1}{\sqrt{(1 - v_1^2)^2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}}. \quad (1.41)$$

Последняя формула дает зависимость δ_3 от трех основных баллистических параметров: параметра начальной скорости v_1 , относительной высоты начальной точки r_1/r_{00} и угла бросания θ_1 . В частном случае, для ТМЭ, равенство (1.41) обращается в такое:

$$\cos \delta_{3\max} = \frac{2(1 - v_1^2) - \frac{v_1^2 y_1}{r_{00}}}{(2 - v_1^2) \sqrt{1 - v_1^2}}. \quad (1.42)$$

1.5. Влияние вращения Земли

До сих пор рассматривалось абсолютное движение баллистического аппарата, то есть принималось допущение о том, что Земля является невращающейся сферой и, следовательно, координаты любой точки на ее поверхности считались неподвижными относительно инерциального пространства. Это допустимо при изучении характеристик баллистической траектории. Однако в случаях, требующих точного определения координат точки падения, необходимо учитывать влияние вращения Земли.

Пусть λ — долгота, положительный отсчет которой принимается в восточном направлении от меридиана начальной точки с долготой λ_1 . Пусть φ — широта, положительный отсчет которой принимается от экватора к Северному полюсу. Наконец, пусть a_1 — азимут начальной скорости, то есть угол, составленный горизонтальной проекцией скорости с направлением на север. При стрельбе строго на восток на любой широте $a_1 = 90^\circ$. Положительный отсчет азимута начальной скорости принимается с севера на восток (по ходу часовой стрелки).

Величины v_1 , θ_1 и a_1 , определяющие вектор начальной скорости в относительной системе координат, связанной с Землей в случае невращающейся Земли, будут такими же, как и в инерциальной (абсолютной) системе координат. В случае вращающейся Земли эти величины в абсолютной и относительной системах координат будут различными. Естественно, что для расчета траектории, рассматриваемой как часть эллиптической орбиты, будет представлять интерес только вектор начальной скорости в абсолютной системе координат. Эта абсолютная начальная скорость может быть представлена векторной суммой относительной начальной скорости и окружной скорости начальной точки, с которой она участвует во вращательном движении Земли. Если задан вектор *абсолютной* начальной скорости $\mathbf{v}_1(v_1, \theta_1, a_1)$, то элементы эллиптической траектории могут быть определены.

Рассмотрим сначала простейшую задачу: определение координат точки падения на вращающейся Земле по заданным координатам начальной точки r_1 , φ_1 , λ_1 и вектору начальной скорости $\mathbf{v}_1(v_1, \theta_1, a_1)$. Как будет показано ниже, сначала может быть определена *кажущаяся* точка падения $(r_{00}, \varphi_3, \lambda_3)$, а затем путем ввода поправки на вращение Земли — *истинная* точка падения. После этого будет рассмотрено решение более сложной задачи: определение начальных условий полета по заданным координатам начальной точки и истинной точки падения. Решение обеих задач будет проводиться без учета сопротивления воздуха.

При рассмотрении первой задачи предположим, что на вращающейся Земле координаты начальной точки заданы величинами r_1 , φ_1 , λ_1 , а вектор начальной скорости — величинами v_1 , θ_1 , a_1 . При определении кажущейся точки падения не на сфере радиуса r_1 (точка 2), а на поверхности Земли (точка 3) необходимо учитывать разность высот $y_1 = r_1 - r_{00}$ (см. рис. 1.1). Поскольку вектор начальной скорости известен, то можно определить радиальную v_{r_1} и трансверсальную v_{a_1} составляющие скорости и местную круговую скорость $v_c = \sqrt{K/r_1}$. Далее можно рассчитать величину q_1 , эксцентриситет e и параметр $p = r_1 q_1$ с помощью соотношений (1.3), (1.4) и (1.2). Для расчета угловой дальности $\delta_1 + \delta_0$ следует воспользоваться соотношениями $\cos \delta_1 = [1 - (p/r_1)]e$ и $\cos \delta_0 = [1 - (p/r_{00})]/e$. Координаты кажущейся точки падения представляются величинами φ_3 , r_{00} и λ_3 . Для определения φ_3 и λ_3 могут быть использованы выражения:

$$\sin \varphi_3 = \sin \varphi_1 \cos (\delta_1 + \delta_0) + \cos \varphi_1 \sin (\delta_1 + \delta_0) \cos a_1, \quad (1.43a)$$

$$\sin (\lambda_3 - \lambda_1) = \frac{\sin (\delta_1 + \delta_0) \sin a_1}{\cos \varphi_3}. \quad (1.43b)$$

Рассмотрим теперь *влияние вращения Земли*. Окружная скорость начальной точки может быть определена следующим образом:

$$w_1 = r_1 \omega \cos \varphi_1, \quad (1.44)$$

где ω — угловая скорость вращения Земли. Радиальная составляющая начальной скорости в абсолютной системе координат остается такой же, как и в относительной системе координат: $v'_{r_1} = v_{r_1}$. Горизонтальная (трансверсальная) составляющая вектора абсолютной начальной скорости будет равна

$$v'_{a_1} = v_{a_1} \sqrt{1 + 2k_1 \sin a_1 + k^2}, \quad (1.45)$$

где

$$k_1 = \frac{w_1}{v_{a_1}}.$$

Далее,

$$\cos a'_1 = \frac{\cos a_1}{v'_{a_1}/v_{a_1}}, \quad (1.46a)$$

$$\sin a'_1 = \frac{k_1 + \sin a_1}{v'_{a_1}/v_{a_1}}, \quad (1.46b)$$

$$\operatorname{tg} \theta'_1 = \frac{v_{r_1}}{v'_{a_1}}, \quad (1.46c)$$

$$v'_1 = \sqrt{v_{r_1}^2 + (v'_{a_1})^2} \quad (1.46d)$$

(штрихами помечены параметры, определяемые в абсолютной системе координат). Теперь величины q'_1 , e' , p' , δ'_1 , δ'_0 могут быть определены по той же методике, которая использовалась ранее для определения соответствующих величин в случае не-вращающейся Земли. Определив также большую полуось эллипса a' , можно рассчитать полетное время от начальной точки I до истинной точки падения i , воспользовавшись равенствами (1.31a) и (1.31b):

$$\begin{aligned} t'_{13} &= \Delta t_{r_1 r^*} + \Delta t_{r_{00} r^*}, \\ \Delta t_{r_1 r^*} &= \pi \sqrt{\frac{a'^3}{K}} - t_{r_1}, \\ t_{r_1} &= \sqrt{\frac{a'^3}{K}} \left[\arccos \left(\frac{a' - r_1}{a' e'} \right) - \frac{r_1}{a'} \frac{e'}{\sqrt{1 - e'^2}} \sin \delta'_1 \right], \\ \Delta t_{r_{00} r^*} &= \pi \sqrt{\frac{a'^3}{K}} - t_{r_{00}}, \\ t_{r_{00}} &= \sqrt{\frac{a'^3}{K}} \left[\arccos \left(\frac{a' - r_{00}}{a' e'} \right) - \frac{r_{00}}{a'} \frac{e'}{\sqrt{1 - e'^2}} \sin \delta'_0 \right] \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} t'_{13} &= \sqrt{\frac{a'^3}{K}} \left\{ 2\pi + \frac{e'}{\sqrt{1 - e'^2}} \left(\frac{r_1 \sin \delta'_1 + r_{00} \sin \delta'_0}{a'} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\arccos \left(\frac{a' - r_1}{a' e'} \right) + \arccos \left(\frac{a' - r_{00}}{a' e'} \right) \right] \right\}. \quad (1.47) \end{aligned}$$

Таким образом, для определения координат *кажущейся точки падения на вращающейся Земле* имеем следующие соотношения:

$$r'_{00} = r_{00},$$

$$\sin \varphi'_3 = \sin \varphi_1 \cos (\delta'_1 + \delta'_0) + \cos \varphi_1 \sin (\delta'_1 + \delta'_0) \cos a'_1, \quad (1.48a)$$

$$\sin (\lambda'_3 - \lambda_1) = \frac{\sin (\delta'_1 + \delta'_0) \sin a'_1}{\cos \varphi'_3}. \quad (1.48b)$$

Окончательно для получения координат *истинной точки падения* используем следующие соотношения:

$$\varphi_i = \varphi'_3, \quad (1.49a)$$

$$\lambda_i - \lambda_1 = \lambda'_3 - \lambda_1 - \omega t'_{13}, \quad (1.49b)$$

где слагаемое $\omega t'_{13}$ представляет собой угол поворота Земли за время свободного полета снаряда. Теперь можно записать выражения для отклонений координат точки падения, вызванных вращением Земли:

$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_3, \quad (1.50a)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_i - \lambda_3. \quad (1.50b)$$

На практике задача ставится по-разному. Могут быть заданы точка падения и начальная точка, а определяться начальные условия. Эта задача не может быть решена прямо. Обычно при ее решении используют один из следующих методов.

1. *Метод обратного расчета.* Рассмотрим случай, когда точка падения строго фиксирована, а старт определен районом с достаточно широкими границами. В данном случае точку падения можно принять за точку старта 0 и произвести «пуск» по району стартов. При этом расчет точки падения 3 производится с учетом вращения Земли. Начальную точку 1 выбирают на траектории, для которой точка падения окажется внутри районов стартов. Затем определяется точка старта с помощью расчета оптимального активного участка траектории, который соответствует выбранной точке 1 на эллиптической траектории. Ограниченность описанного метода состоит в том, что он применим только для одной точки цели. При необходимости рассмотрения ряда целей и использовании подвижной стартовой установки этим методом может быть определена серия стартовых точек для выбранных целей. Однако на практике может оказаться желательным решение задачи для группы нескольких близко расположенных друг к другу целей и для одной фиксированной или подвижной стартовой позиции. В этом случае данный метод становится непригодным.

2. *Метод расчетов таблиц стрельбы.* Такие таблицы позволяют с достаточной точностью и быстротой интерполированием находить начальные условия полета для ряда целей в пределах досягаемости с заданной стартовой позиции. Обычно так и поступают на практике. Однако для предварительного анализа подобные таблицы не являются рациональными.

3. *Метод итераций.* При достаточном объеме вычислительных работ этот метод может обеспечить любую желаемую точность решения задачи. По известным точкам старта и падения определяют дальность. Затем по дальности определяют начальную скорость (и угол бросания в случае ТМЭ) в инерциальной системе координат, после чего задаются приближенными значениями высоты и удаления конца активного участка от точки

старта. Зная, таким образом, в первом приближении r_1 , φ_1 , λ_1 и v_1 , θ_1 , a_1 , а также ω_1 , можно рассчитать k_1 , v'_{a_1} , a'_1 , θ'_1 , v'_1 , t'_{13} , φ'_3 , $\lambda'_3 - \lambda_1$, φ_i и λ_i . Затем начальные условия уточняются последующими итерациями.

Хотя рассмотренные выше методы представляют собой значительное уточнение методов, основывающихся на представлении о невращающейся Земле, они все же не учитывают ряда факторов, пренебрежение которыми недопустимо в случае необходимости определения точки падения при больших дальностях с ошибкой не более двух километров и меньше. Основными из этих неучтенных факторов являются сопротивление воздуха и несферичность Земли.

В настоящее время эти факторы в действительности учитываются при расчете траекторий современных баллистических снарядов на электронных вычислительных машинах. Однако обсуждение этого вопроса не входит в задачу настоящей книги. В заключение стоит, пожалуй, отметить, что при расчете траекторий на любые дальности и практически с любой точностью возмущающим влиянием Солнца и Луны можно пренебречь.

1.6. Расчет траекторий

В настоящем параграфе приведен ряд примеров использования полученных выше соотношений для решения различных задач.

1. *Заданы дальность и высота начальной точки.* Требуется рассчитать параметры ТМЭ, отвечающей заданной дальности.

Для заданной сферической дальности между точками 1 и 2 (рис. 1.1) $\delta_1 = x_{12}/2r_{00}$ или, если рассматривать траекторию в виде участка эллипса до точки падения 3, $\delta_1 = x_1^*/r_{00}$, $\delta_3 = x_3^*/r_{00}$. По этим зависимостям рассчитываются δ_1 и δ_3 . Далее с помощью соотношения (1.26) определяем величину $e_{\min}$, а с помощью соотношения (1.25) — большую полуось a . Для определения начальной скорости можно воспользоваться выражением $v_1^2 = K [(2/r_1) - (1/a)]$ или, так как $K = (v_c^2)_1 r_1$, выражением $v_1^2 = 2 - (r_1/a)$. Оптимальный угол бросания может быть определен из выражения (1.29a).

2. *Заданы скорость и высота в начальной точке.* Необходимо определить оптимальный угол бросания и соответствующую угловую дальность.

Оптимальный угол бросания определяется из выражения (1.29b), угловая дальность δ_1 — из выражения (1.30), угловая дальность δ_3 — из выражения (1.42).

3. *Заданы скорость и высота в начальной точке, а также произвольный угол бросания.* Требуется рассчитать дальность и второй угол бросания, отвечающий той же дальности.

Угловые дальности δ_1 и δ_3 рассчитываются с помощью соотношений (1.33) и (1.41) соответственно, второй угол бросания — с помощью соотношения (1.35).

4. *Заданы угол бросания θ_1 , высота y_1 и скорость v_1 (близкая к круговой) в начальной точке.* Требуется определить, будет ли траектория иметь точку падения.

Для ответа на этот вопрос достаточно сравнить заданный угол бросания с величиной граничного угла бросания, рассчитываемого по зависимости (1.36) при заданных условиях.

5. *С космического аппарата, движущегося по круговой орбите вокруг планеты на заданной высоте y_1 с известной круговой скоростью, необходимо опустить на поверхность планеты автоматическую станцию.* Требуется определить, существует ли точка падения при заданной горизонтальной начальной скорости спуска станции ($v_1 < 1$), и если существует, то какова сферическая дальность, проходимая станцией от начала спуска до точки падения (без учета сопротивления воздуха).

Наличие или отсутствие точки падения устанавливается из соотношений (1.38) либо по величине y_1/r_{00} , либо по величине v_1^2 после разрешения неравенств (1.38) относительно v_1^2 (см. также рис. 1.12):

$$v_1^2 \leq \frac{2r_{00}}{2r_{00} + y_1}, \quad v_1^2 \leq \frac{2}{1 + \frac{r_1}{r_{00}}}. \quad (1.51)$$

При наличии точки падения дальность определяется с помощью соотношений (1.37).

1.7. Отклонения точки падения, вызываемые начальными отклонениями

В предыдущих параграфах было показано, что при заданных начальной скорости и высоте начальной точки наибольшую дальность обеспечивает ТМЭ. Однако имеется ряд причин, вынуждающих отступать от энергетически оптимального угла бросания.

1. Траектория минимальной энергии является оптимальной с энергетической точки зрения лишь при отсутствии сопротивления воздуха. В реальных условиях торможение за счет сопротивления воздуха должно быть компенсировано соответствующим дополнительным расходом топлива. Поэтому при выведении ракеты в начальную точку траектория теоретического минимума

энергии не обязательно соответствует траектории минимального расхода топлива.

2. Другой причиной, вынуждающей отступать от ТМЭ, является необходимость прямой видимости ракеты из пунктов радиоуправления полетом, в особенности если по ряду причин удаление пунктов радиоуправления от стартовой позиции ограничено.

3. Пожалуй, наиболее важная причина, вынуждающая отходить от оптимального угла бросания, вытекает из требования точности попадания. По мере роста дальностей ТМЭ становятся все более настильными и отклонения точки падения, вызываемые одной и той же ошибкой в начальной скорости, быстро увеличиваются.

Поскольку в настоящее время главной технической проблемой является не получение больших начальных скоростей, а достижение высокой точности в величине и направлении начальных скоростей, то важность рассмотрения вопроса о точности попадания становится совершенно очевидной. Особую остроту, в частности, приобретает этот вопрос в баллистике дальнобойных ракет. Его изложению и посвящается настоящий параграф. Для искусственных спутников Земли, оборудованных научной аппаратурой, требования по точности являются сравнительно менее жесткими, поскольку большинство научных задач, для которых предназначены эти спутники, может решаться при наличии отклонений параметров движения, превышающих отклонения, обусловленные ошибками системы управления. Как будет показано позже, проблема точности становится более серьезной для окололунных и межпланетных полетов автоматических станций. При полетах пилотируемых космических аппаратов и более усовершенствованных автоматических станций проблема точности становится менее острой, поскольку для них имеется возможность введения коррекции во время движения. Вообще можно сказать, что технические решения, полученные в связи с развитием баллистических снарядов, рассчитанных на большие дальности, удовлетворяют большинству требований, предъявляемых к полетам спутников, а также к некоторым полетам к Луне. Это является одним из наиболее важных вкладов развития техники управляемых снарядов в технику космических полетов. Современные полностью инерциальные системы управления небольшого веса и повышенной точности являются результатом развития систем управления снарядов.

Желаемая скорость может быть получена лишь с ограниченной точностью. Обозначим ошибку в величине начальной скорости через δv , а соответствующее отклонение в дальности через δx или $\delta \delta$. Тогда для небольших дальностей (без учета

кривизны Земли) непосредственным дифференцированием идеализированного выражения для дальности

$$x = \frac{v_1^2}{g_{00}} \sin 2\theta \quad (1.52)$$

по переменной v_1 получим:

$$\frac{\partial x}{\partial v_1} = \frac{2v_1}{g_{00}} \sin 2\theta_1 = 2 \frac{x}{v_1}. \quad (1.53)$$

Отсюда видно, что при малых дальностях производная от дальности по начальной скорости представляет собой простую функцию от дальности и начальной скорости.

При больших дальностях (с учетом кривизны Земли) дифференцированием соотношения (1.33) по v_1^2 получим:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1^2} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{(1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1) + v_1^4 \operatorname{tg}^2 \theta_1} = \frac{\operatorname{ctg} \theta_1 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_1)}{[1 + (1 - v_1^2) \operatorname{ctg}^2 \theta_1]^2 + v_1^4 \operatorname{ctg}^2 \theta_1}. \quad (1.54)$$

Учитывая, что

$$v_1^2 = \left(\frac{v_1}{v_c} \right)^2, \quad \frac{\partial v_1^2}{\partial v_1} = 2 \frac{v_1^2}{v_1},$$

находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial v_1} &= \frac{\partial \delta}{\partial v_1^2} \frac{\partial v_1^2}{\partial v_1} = \frac{2v_1^2 \operatorname{tg} \theta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{v_1 (1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1) + v_1^4 \operatorname{tg}^2 \theta_1} = \\ &= \frac{2v_1^2 \operatorname{ctg} \theta_1 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_1)}{v_1 [1 + (1 - v_1^2) \operatorname{ctg}^2 \theta_1]^2 + v_1^4 \operatorname{ctg}^2 \theta_1}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Отсюда следует, что производная от дальности по начальной скорости при больших дальностях является функцией величин θ_1 , v_1 и y_1 . Чтобы иметь дело с функцией только двух величин (θ_1 и v_1), рассмотрим функцию $v_1 \partial \delta / \partial v_1 = f(v_1, \theta_1)$ (фактор ошибки), график которой представлен на рис. 1.13. При малых значениях v_1 (малые дальности) выражение (1.55) обращается в приведенное ниже в несколько иной форме выражение (1.53):

$$v_1 \frac{\partial \delta}{\partial v_1} = v_1^2 \sin 2\theta_1, \quad (1.56)$$

которое при оптимальном угле бросания для малых дальностей (45°) приводится к простому виду: $v_1 \partial \delta / \partial v_1 = v_1^2$.

Для ТМЭ из выражения (1.55) с использованием соотношения (1.30а) можно получить:

$$\left(v_1 \frac{\partial \delta}{\partial v_1} \right)_{\text{ТМЭ}} = \frac{2v_1^2}{(2 - v_1^2) \sqrt{1 - v_1^2}} \quad (0 \leq v_1 \leq 1,0). \quad (1.57)$$

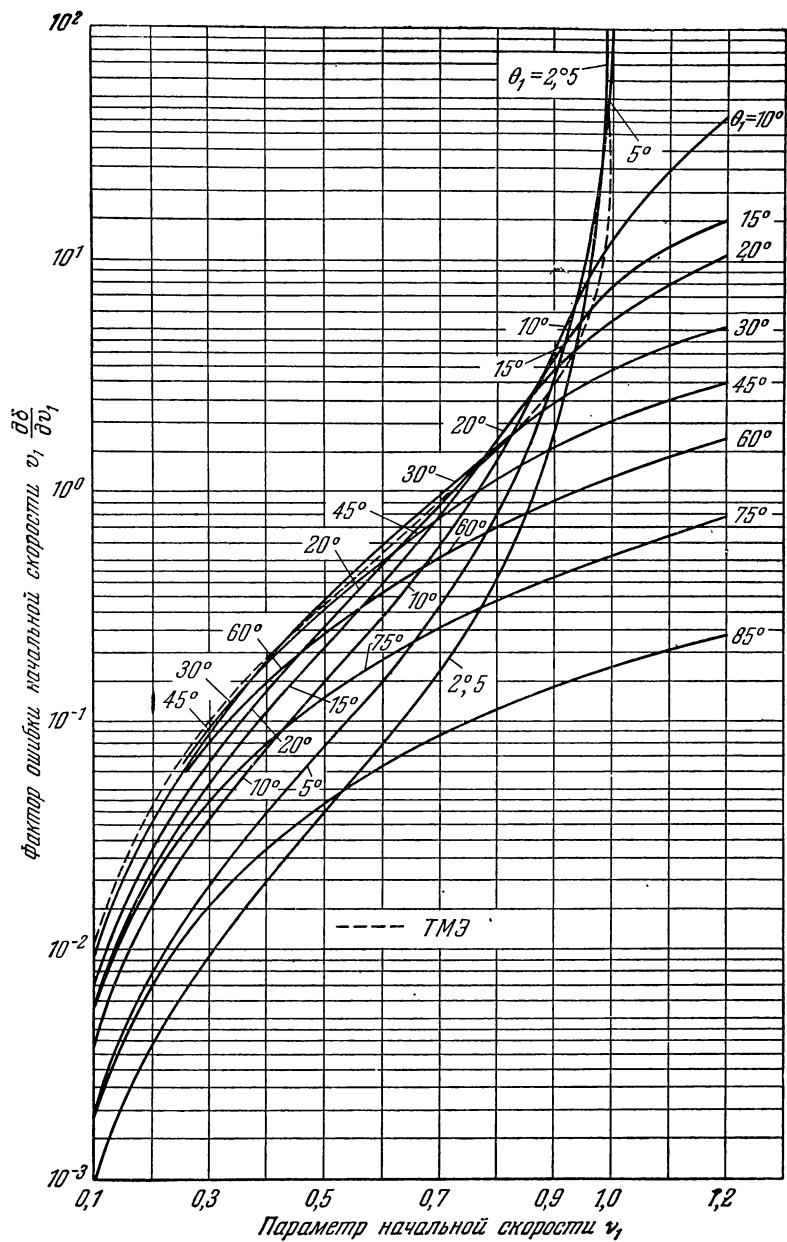


Рис. 1.13. Зависимость фактора ошибки начальной скорости от параметра начальной скорости и угла бросания.

Эта зависимость также приведена на рис. 1.13, из которого видно, что фактор ошибки неограниченно возрастает с приближением начальной скорости к круговой, а угла бросания — к нулю. Отсюда следует, что ТМЭ окончательно становится непрактичной хотя бы уже потому, что при этом требования по точности, предъявляемые к реализации начальной скорости, начинают превосходить физические возможности.

Графики, приведенные на рис. 1.13, могут быть использованы следующим образом. С помощью графика (рис. 1.9), дающего зависимость между угловой дальностью $2\delta_1$, параметром начальной скорости v_1 и углом бросания θ_1 , можно найти величину v_1 , соответствующую заданным сферической дальности и углу бросания. Затем можно определить (или оценить) высоту y_1 начальной точки и найти соответствующую ей круговую скорость v_{c1} , по которой нетрудно вычислить начальную скорость $v_1 = v_1 v_{c1}$. После чего, сняв с графика (рис. 1.13) для заданных v_1 и θ_1 (или только v_1 для ТМЭ) величину $v_1 \partial\delta/\partial v_1$ и разделив ее на v_1 , получим величину частной производной $\partial\delta/\partial v_1$. Величина частной производной угловой дальности по начальной скорости равна удвоенному значению производной $\partial\delta/\partial v_1$ (напомним, что δ — половина угловой дальности).

Дифференцируя соотношение (1.33) по v_1 , можно получить выражение для фактора ошибки также через δ в следующем виде:

$$v_1 \frac{\partial\delta}{\partial v_1} = \sin 2\delta \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \theta_1} \right). \quad (1.58)$$

Эта зависимость, приведенная на рис. 1.14, более удобна для определения необходимого изменения начальных условий в случае желательности увеличения дальности при сохранении прежней величины фактора ошибки либо при ее изменении определенным образом. Из графиков видно, что увеличение дальности без увеличения частной производной от дальности по начальной скорости приводит к увеличению угла бросания, а следовательно, и начальной скорости, так как при этом траектория изменяется (по сравнению с ТМЭ) в сторону более крутых траекторий. Соответствующее увеличение v_1 может быть найдено интерполированием с помощью таблицы 1.2 или снято с графиков (рис. 1.15), изображающих зависимость

$$v_1 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \theta_1}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}{1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \delta}}}. \quad (1.59)$$

При заданной дальности чувствительность отклонения по дальности к ошибкам в начальной скорости быстро уменьшается

с увеличением угла бросания для $\theta_1 > \theta_{1\text{opt}}$; в то же время требуемая энергия увеличивается. Таким образом, повышение точности попадания за счет использования более крутых траекторий достигается ценой увеличения энергетических затрат.

Из рис. 1.9 видно, что угол $\theta_1 = 45^\circ$ является наименьшим углом бросания, при котором может быть достигнута любая

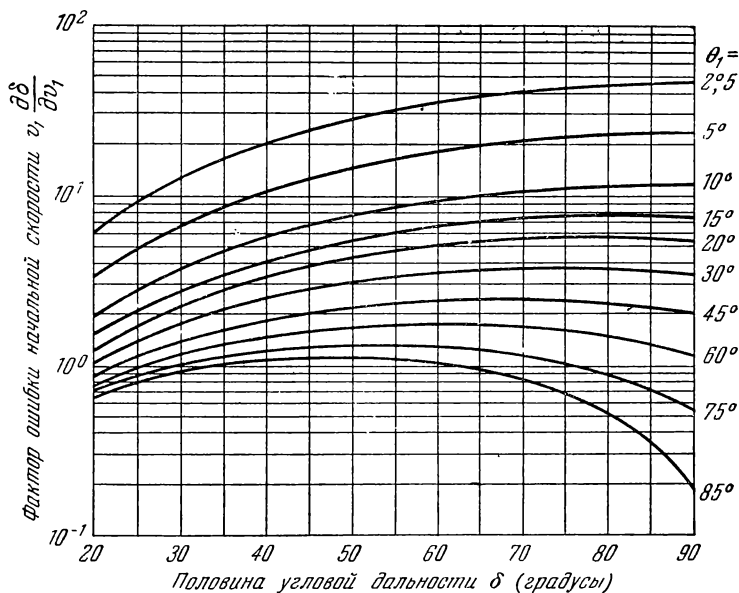


Рис. 1.14. Зависимость фактора ошибки начальной скорости от половины угловой дальности и угла бросания.

точка на земной поверхности ($2\delta = 180^\circ$, $v_1 = \sqrt{2}$). Чем ближе цель, тем больше может быть угол бросания θ_1 , если в наличии имеется достаточный запас энергии. Однако на практике использование слишком крутых траекторий ограничивается не только энергетическими соображениями, но также и температурными условиями спуска в атмосфере, которые с увеличением крутизны траектории становятся все более жесткими.

С помощью графиков, приведенных на рис. 1.16, можно сравнить дальности, получаемые при $\theta_1 = 30^\circ$ и $\theta_1 = 45^\circ$, с дальностями, соответствующими ТМЭ, при различных значениях параметра начальной скорости v_1 . Из сравнения графиков видно, что до дальностей, не превосходящих одной десятой части окружности земного радиуса ($2\delta < 36^\circ$), при $\theta_1 = 45^\circ$ обеспечивается

Т а б л и ц а 1.2

Связь между параметром начальной скорости v_1 и половиной угловой дальности для различных начальных углов бросания *)

δ , град	θ_1 , град	v_1	δ , град	θ_1 , град	v_1	δ , град	θ_1 , град	v_1
20	2,5	0,94583	30	2,5	0,96512	40	2,5	0,97588
	5	0,90132		5	0,93544		5	0,95525
	10	0,83342		10	0,88874		10	0,92306
	15	0,78570		15	0,85560		15	0,90132
	20	0,75249		20	0,83342		20	0,88874
	30	0,71801		30	0,81650		30	0,88874
	45	0,73054		45	0,85560		45	0,95525
	60	0,83342		60	1,00000		60	1,14254
	75	1,15174		75	1,41421		75	1,65538
	85	2,01561		85	2,51593		85	3,00057
45	2,5	0,97979	50	2,5	0,98301	60	2,5	0,98857
	5	0,96259		5	0,96888		5	0,97939
	10	0,93623		10	0,94773		10	0,96738
	15	0,91940		15	0,93544		15	0,96343
	20	0,91120		20	0,93141		20	0,96738
	30	0,91940		30	0,94773		30	1,00000
	45	0,99999		45	1,04283		45	1,12603
	60	1,21000		60	1,27688		60	1,41421
	75	1,77614		75	1,90084		75	2,17533
	85	3,25437		85	3,52563		85	4,16219
70	2,5	0,99309	80	2,5	0,99712	85	2,5	0,99905
	5	0,98821		5	0,99616		5	1,00000
	10	0,98433		10	1,00000		10	1,00768
	15	0,98821		15	1,01165		15	1,02335
	20	1,00000		20	1,03159		20	1,04763
	30	1,04967		30	1,10006		30	1,12660
	45	1,21091		45	1,30392		45	1,35613
	60	1,56632		60	1,75048		60	1,86377
	75	2,51593		75	3,00057		75	3,35466
	85	5,05092		85	6,60738		85	8,11314

*) Таблица заканчивается данными для значения $\delta = 85^\circ$, так как для значения $\delta = 90^\circ$ $v_1 = \sec \theta_1$. Таблицы этой функции можно найти в сборниках математических таблиц.

практически такая же дальность, что и при ТМЭ. При $\theta_1 = 30^\circ$ отмеченное совпадение дальностей наблюдается до дальности, примерно равной четвертой части окружности земного радиуса ($2\delta < 90^\circ$).

Если величина начальной скорости задана точно, но имеется ошибка в ее направлении, то для малых дальностей дифференцированием соотношения (1.52) можно получить выражение

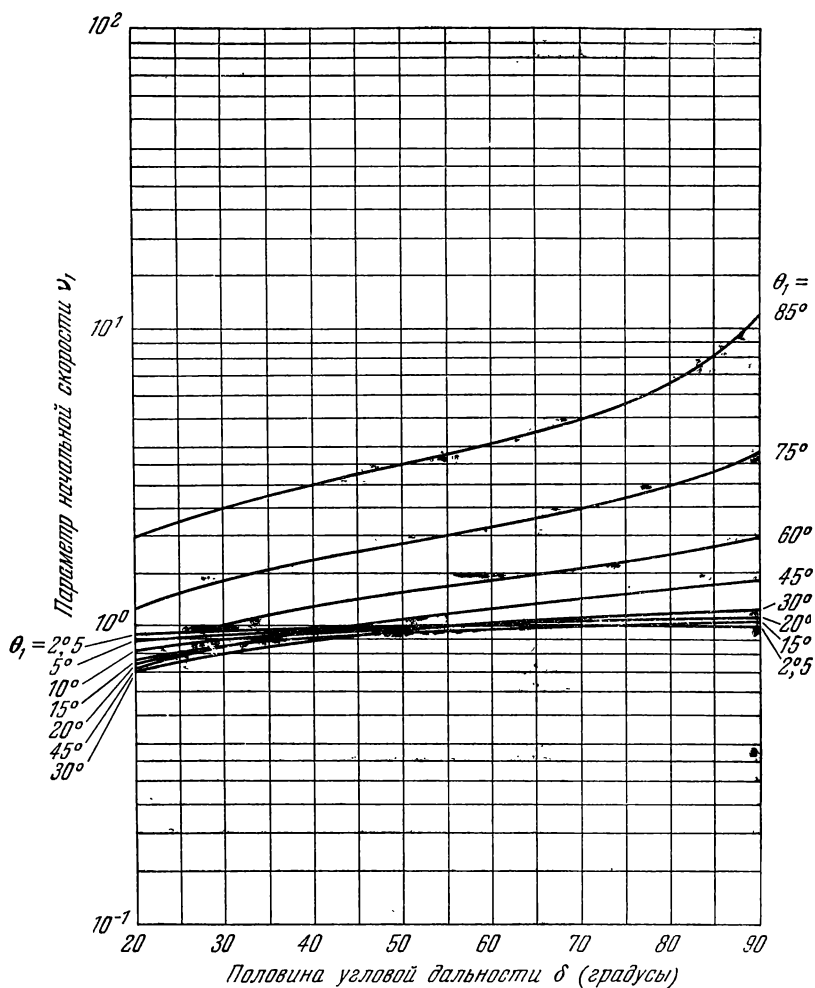


Рис. 1.15. Изменение параметра начальной скорости в зависимости от половины угловой дальности и угла бросания.

для частной производной от дальности по углу бросания в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 2 \frac{v_1^2}{g_{00}} \cos 2\theta_1 = 2x \operatorname{ctg} \theta_1. \quad (1.60)$$

Чтобы избежать неточностей в вычислении и построении графика $\partial x / \partial \theta_1$, связанных с быстрым ростом $\operatorname{ctg} \theta_1$ при

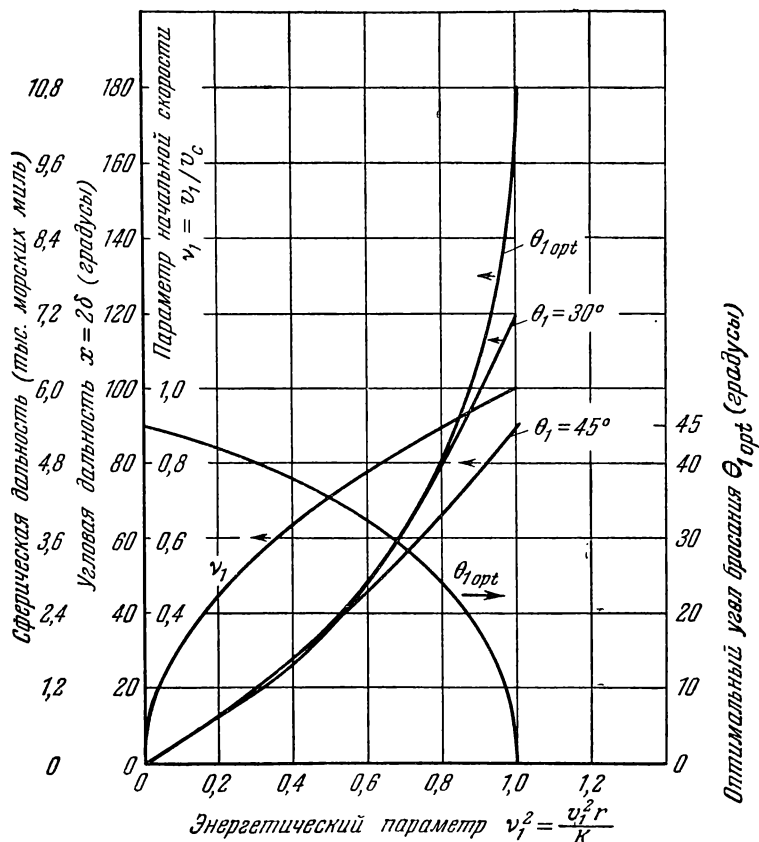


Рис. 1.16. Сравнение дальностей.

приближении θ_1 к нулю, на рис. 1.17 приведен график не $\partial x / \partial \theta_1$, а фактора ошибки угла бросания $(\theta_1/x) (\partial x / \partial \theta_1) = 2\theta_1 \operatorname{ctg} \theta_1$. Как и следовало ожидать, чувствительность в угловой ошибке уменьшается с увеличением угла бросания.

Для больших дальностей путем дифференцирования соотношений (1.33) по θ_1 получим выражение для частной производной

от дальности по углу бросания в следующем виде:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \theta_1} = \frac{v_1^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)(1 - v_1^2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{(1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)^2 + v_1^4 \operatorname{tg}^2 \theta_1}. \quad (1.61)$$

Графики, изображающие эту зависимость, приведены на рис. 1.18. Воспользовавшись равенствами $x = 2r_{00}\delta$ и $\partial x/\partial \delta = 2r_{00}$, можно записать выражение

$$\frac{\theta_1}{x} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1}{x} \frac{\partial x}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \theta_1} = \theta_1 \frac{v_1^2}{\delta} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)(1 - v_1^2 - \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{(1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)^2 + v_1^4 \operatorname{tg}^2 \theta_1}, \quad (1.62)$$

аналогичное выражению, графически представленному на рис. 1.17. Графики, представляющие соотношение (1.62), приведены на рис. 1.19.

При оптимальном угле бросания $\theta_{1\text{opt}}$ выражение $\partial x/\partial \theta_1$ обращается в нуль, поскольку при этом $\operatorname{tg}^2 \theta_{1\text{opt}} = 1 - v_1^2$ и, следовательно, выражения в последних скобках числителей соотношений (1.61) и (1.62) обращаются в нуль. Этого и следовало ожидать, поскольку $\theta_{1\text{opt}}$ соответствует экстремуму функции $x = x(\theta_1)$. Графики, изображенные на рис. 1.9, показывают, что отклонения угла бросания в районе $\theta_{1\text{opt}}$ приводят к незначительным отклонениям в дальности полета. Поэтому можно сделать вывод, что ТМЭ обладает наименьшей чувствительностью к ошибкам в угле бросания, однако при больших дальностях сильно возрастает чувствительность ТМЭ к ошибкам в величине начальной скорости.

Отклонение в дальности полета, являющееся результатом наличия ошибок в величине начальной скорости, высоте начальной точки и начальном угле бросания, приближенно может быть представлено следующим выражением:

$$d\delta \approx \frac{\partial \delta}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \delta}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial \delta}{\partial \theta_1} d\theta_1. \quad (1.63)$$

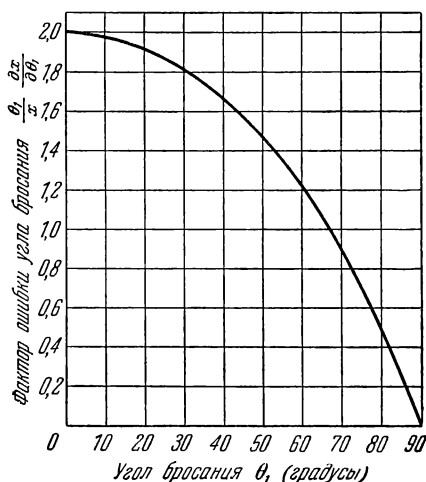


Рис. 1.17. Зависимость фактора ошибки угла бросания от угла бросания для очень малых дальностей.

Это равенство (если считать, что dv_1 , dr_1 , $d\theta_1$ представляют собой малые конечные ошибки Δv_1 и т. д.) является приближенным, поскольку отклонения Δv_1 , Δr_1 и $\Delta \theta_1$ в параметрах движения в действительности не являются независимыми, как это

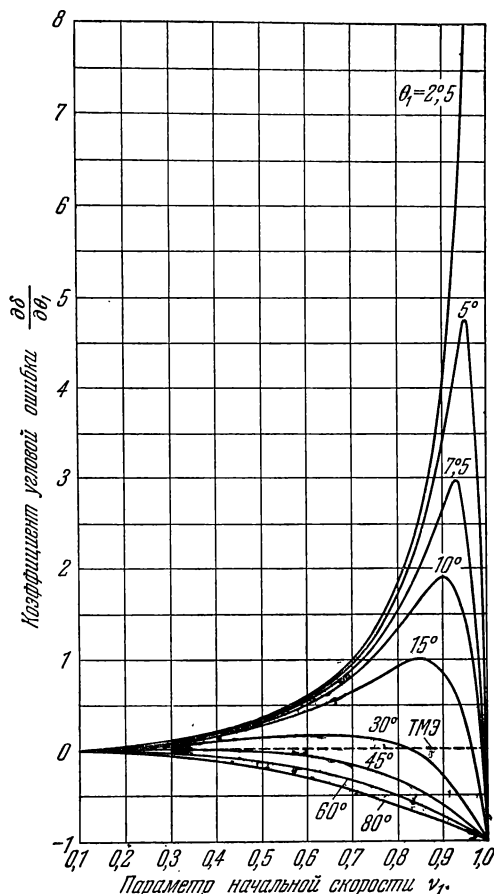


Рис. 1.18. Зависимость коэффициента угловой ошибки от параметра начальной скорости.

учитывая, что полная угловая дальность равна 2δ , получаем:

$$\frac{\partial \delta}{\partial r_1} = \frac{v_1^2 \sin^2 \theta_1}{r_1 (1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1)^2} \cos^2 \delta. \quad (1.64)$$

В заключение рассмотрим влияние отклонения движения от плоскости невозмущенной траектории. Такое отклонение будет

предполагается в соотношении (1.63). Однако если каждое из этих отклонений (или возмущений) является малым, то равенство (1.63) выполняется с достаточной точностью.

В соотношении (1.63) dv_1 , dr_1 , $d\theta_1$ представляют отдельные малые ошибки. Соответствующие частные производные в правой части соотношения (1.63) выражают влияние частной ошибки на угловую дальность.

Величина $\partial \delta / \partial v_1$ дается соотношениями (1.55), величина $\partial \delta / \partial \theta_1$ — соотношением (1.61). Для нахождения величины $\partial \delta / \partial r_1$ можно также получить соответствующее выражение, если воспользоваться соотношением (1.7), которое с учетом равенств $v_1 = \frac{v_1}{v_c}$, $v_c^2 = gr_1$ можно переписать так:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v_1^2 \sin \theta_1}{2gr_1 - 2v_1^2 \cos^2 \theta_1}.$$

Дифференцируя последнее выражение по r_1 и

приводить к боковому отклонению точки падения, то есть к отклонению «влево» или «вправо» от цели. Оно может быть вызвано либо боковой составляющей v_{n1} начальной скорости, либо боковым отклонением начальной точки, или, наконец, обеими этими причинами. Если через x_{13} обозначить дальность между

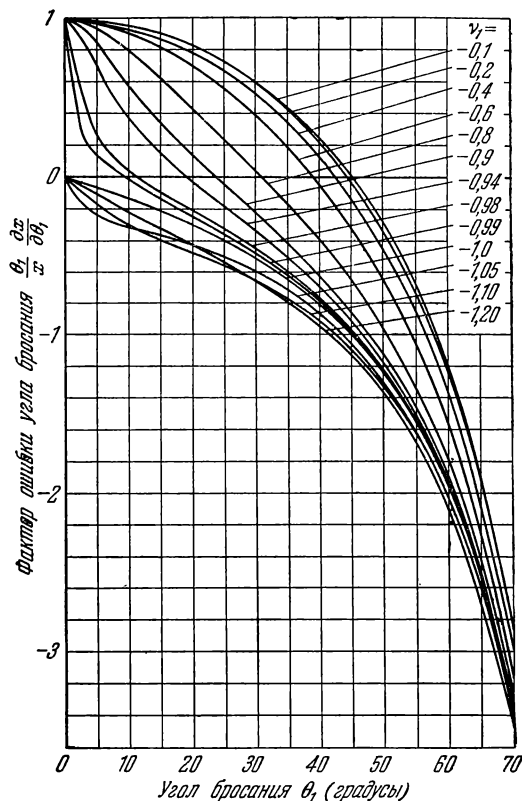


Рис. 1.19. Зависимость фактора ошибки угла бросания от угла бросания для больших дальностей.

точками 1 и 3 (см. рис. 1.1), через Δ_1 — боковое отклонение начальной точки, через Δ_3 — боковое отклонение точки падения, то при неизменных векторе начальной скорости $\mathbf{v}_1$ и высоте начальной точки r_1 можно получить (с использованием формул сферической тригонометрии):

$$\cos\left(\frac{\Delta_3}{r_{00}}\right) = \cos^2\left(\frac{x_{13}}{r_{00}}\right) \left(\cos\frac{\Delta_1}{r_{00}} - 1\right) + 1 \quad (1.65a)$$

или, поскольку при $\Delta_1/r_{00} \ll 1$ величина Δ_3/r_{00} становится очень малой, можно считать, что

$$\Delta_3 = \Delta_1 \cos\left(\frac{x_{13}}{r_{00}}\right) \approx \Delta_1 \cos(2\delta_{13}), \quad (1.65b)$$

где $2\delta_{13}$ — угловая дальность между точками 1 и 3.

Если $\Delta_1=0$ и отсутствуют ошибки в r_1 и θ_1 , но имеет место ошибка в величине начальной скорости v_1 за счет боковой составляющей v_{n1} , то величина начальной скорости v'_1 при наличии такой ошибки будет равна:

$$v'_1 = \sqrt{v_1^2 + v_{n1}^2}, \quad (1.66)$$

а плоскость траектории составит с плоскостью невозмущенной траектории угол i , определяемый соотношением

$$\cos i = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{n1}}{v'_1 \cos \theta_1}\right)^2}, \quad (1.67)$$

где $v'_1 \cos \theta_1$ — горизонтальная проекция новой начальной скорости. Если дополнительно имеется еще ошибка в угле бросания (θ'_1 вместо θ_1), то в соотношение (1.67) необходимо подставить θ'_1 . Боковое отклонение точки падения в этом случае можно рассчитать по следующей формуле:

$$\cos\left(\frac{\Delta_3}{r_{00}}\right) = \cos\left(\frac{x_{13}}{r_{00}}\right) \cos\left(\frac{x'_{13}}{r_{00}}\right) + \sin\left(\frac{x_{13}}{r_{00}}\right) \sin\left(\frac{x'_{13}}{r_{00}}\right) \cos i, \quad (1.68a)$$

где x_{13} — дальность полета при отсутствии отклонений параметров движения в начальной точке, а x'_{13} — дальность полета, соответствующая замене величины v_1 на величину v'_1 и (или) замене величины θ_1 на величину θ'_1 .

При $\theta'_1 \rightarrow \theta_1$ отношение $v_{n1}/v_1 \rightarrow 0$, $v'_1 \rightarrow v_1$ и, следовательно, $x'_{13} \rightarrow x_{13}$, Δ_3 становится сравнительно малой величиной и выражение (1.68a) упрощается и принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 &\approx r_{00} \frac{v_{n1}}{v_1 \cos \theta_1} \sin\left(\frac{x_{13}}{r_{00}}\right) \\ \text{или} \\ \Delta_3 &\approx r_{00} \frac{v_{n1}}{v_1 \cos \theta_1} \sin(2\delta_{13}). \end{aligned} \right\} \quad (1.68b)$$

Из соотношений (1.65b) и (1.68b) следует, что боковое отклонение Δ_3 точки падения, вызванное боковым отклонением Δ_1 начальной точки, обращается в нуль при $2\delta_{13}=90^\circ$ или $2\delta_{13}=270^\circ$

(через одну четверть или три четверти окружности земного радиуса), а отклонение Δ_3 , вызванное боковым отклонением плоскости траектории на угол i , обращается в нуль при дальности $2\delta_{13}=180^\circ$ или $2\delta_{13}=360^\circ$. Наоборот, отклонение Δ_3 , вызванное отклонением Δ_1 , достигает максимума при $2\delta_{13}=180^\circ$ или $2\delta_{13}=360^\circ$, а отклонение Δ_3 , вызванное отклонением плоскости траектории на угол i , достигает максимума при $2\delta_{13}=90^\circ$ или $2\delta_{13}=270^\circ$. Поскольку более вероятным источником ошибок является последняя причина (отклонение на угол i), то следует ожидать,

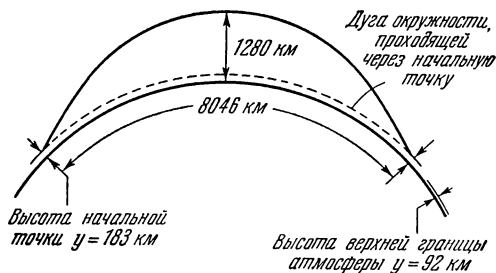


Рис. 1.20. Траектория минимальной энергии для дальности 8046 км.

что максимальное боковое отклонение точки падения для баллистической траектории будет иметь место при дальностях порядка четверти окружности земного радиуса. Указанную различную связь между максимальной ошибкой и дальностью легко объяснить, рассматривая соответствующие большие круги сферы.

При наличии обеих ошибок (Δ_1 и i) можно, если считать их малыми, получить следующее приближенное выражение для Δ_3 :

$$\Delta_3 \approx \sqrt{(x'_{13} - x_{13})^2 + \left[\Delta_1 \cos(2\delta_{13}) + r_{00} \frac{v_{n1}}{v_1 \cos \theta_1} \sin(2\delta_{13}) \right]^2}. \quad (1.69)$$

Чтобы проиллюстрировать требования к точности для типичной траектории большой дальности, рассмотрим (рис. 1.20) отклонения точки падения по дальности для ТМЭ, которая соответствует дальности 8046 км, отсчитываемой по дуге окружности, проходящей через начальную точку ($\theta_1 \text{ opt} = 27^\circ$; $v_1 = 0,75$; $e_{\min} = 0,52$; высота траектории 1280 км). На рис. 1.21 приведен график отклонения точки падения по дальности в зависимости от отклонения величины начальной скорости. На рис. 1.22 приведен график отклонения точки падения по дальности в зависимости от отклонения угла бросания. Из этих графиков видно, что при дальностях рассматриваемого порядка влияние на дальность

полета даже малых отклонений в начальных условиях является значительным. Для рассматриваемой траектории требуемое значение величины начальной скорости равно примерно 5900 м/сек ($\approx 0,75$ от круговой скорости, которая для рассматриваемых условий равна 7880 м/сек). Отклонение величины начальной скорости примерно на 2 м/сек (что составляет $0,034\%$) приводит к отклонению точки падения по дальности примерно на $9,2 \text{ км}$.

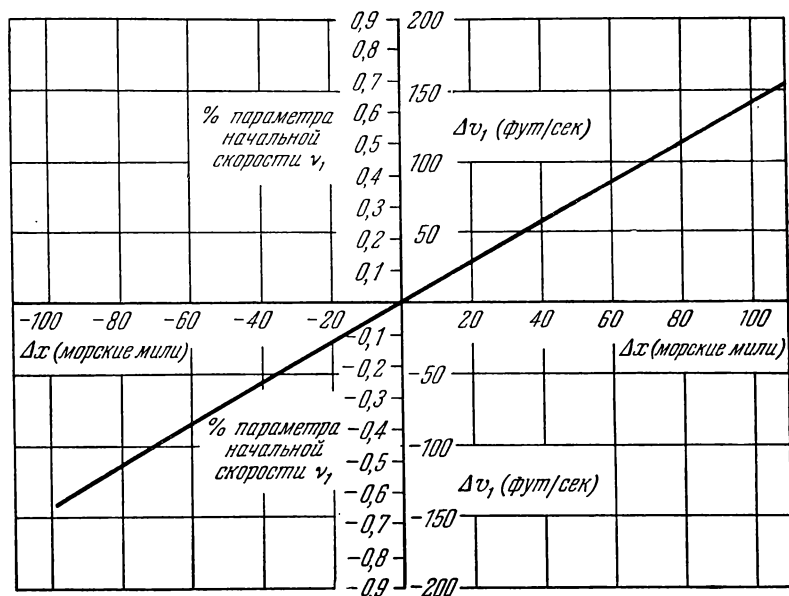


Рис. 1.21. Отклонение дальности, вызываемое отклонением начальной скорости от оптимального значения (дальность 8046 км).

Зависимость отклонения точки падения по дальности от отклонения величины начальной скорости можно считать практически линейной. Выше отмечалась слабая чувствительность ТМЭ к малым отклонениям угла бросания. Однако с увеличением отклонений угла бросания, начиная с $\Delta\theta_1 \approx 0^\circ,5$, влияние $\Delta\theta_1$ на дальность быстро возрастает. Необходимо отметить, что кривая, похожая на параболу (рис. 1.22), не симметрична относительно средней линии, соответствующей значению $\Delta\theta_1 = 0$. Отклонение угла бросания в меньшую сторону от оптимального значения оказывает большее влияние на дальность полета, чем такое же отклонение в большую сторону. С ростом отклонений угла бросания эта асимметрия, подтверждаемая графиками, приводимыми на рис. 1.9, становится более резкой.

Проведенный выше анализ влияния различных отклонений в начальной точке на отклонение точки падения позволяет сделать следующие выводы:

1. Влияние отклонения величины начальной скорости на дальность полета возрастает с увеличением дальности.

2. Для заданной дальности влияние отклонения величины начальной скорости на дальность полета уменьшается с переходом к более крутым траекториям. Поскольку

ТМЭ с ростом дальности становится все более пологой, то чувствительность дальности к отклонению величины начальной скорости возрастает с увеличением дальности. Поэтому с точки зрения управления дальностью полета при дальностях, превышающих 9000—11 000 км, более приемлемым оказывается переход от ТМЭ к более крутым траекториям. Правда, последние энергетически менее выгодны и условия входа в атмосферу и приземления для них являются более трудными.

3. Чувствительность дальности полета к ошибкам в угле бросания в основном является функцией угла бросания. Для угла бросания, соответствующего ТМЭ, эта чувствительность равна нулю. При отходе от оптимального угла бросания степень влияния отклонения угла бросания на дальность полета увеличивается с ростом начальной скорости, хотя и не так сильно, как в случае влияния на дальность полета величины начальной скорости.

В настоящем параграфе мы ограничились рассмотрением частных влияний v_1 и θ_1 на дальность полета. Учет совместного влияния отклонений начальной скорости по величине и направлению на полет баллистической ракеты может быть произведен с использованием зависимостей, приведенных в § 3.3 и § 3.8.

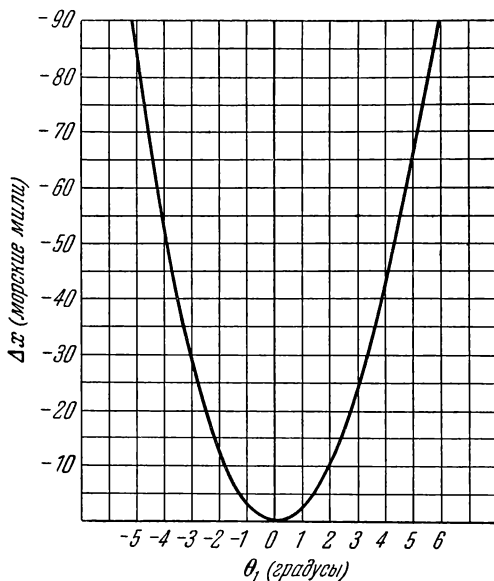


Рис. 1.22. Уменьшение дальности, вызываемое отклонением угла бросания от оптимального значения (дальность 8046 км).

1.8. Баллистический спуск

В § 1.4 были рассмотрены условия пересечения траекторий с поверхностью Земли без учета сопротивления воздуха. Эти траектории, очевидно, можно считать совпадающими с действительными лишь до точек пересечения с некоторой воображаемой «поверхностью», охватывающей земную атмосферу. Ниже этой «поверхности» вследствие влияния аэродинамических сил траекторию нельзя уже считать траекторией безвоздушного пространства. Высота окружности входа, являющейся сечением упомянутой «поверхности» (поверхности входа) плоскостью траектории, зависит от скорости и формы движущегося объекта и в меньшей степени от угла входа. В зависимости от аэродинамических сил после входа в атмосферу либо произойдет спуск объекта на Землю, либо, если торможение окажется недостаточным, объект совершит еще ряд оборотов вокруг Земли, пока его скорость не уменьшится до величины, необходимой для осуществления спуска.

Чтобы познакомить читателя с траекториями баллистического спуска, ниже будет представлен спектр таких траекторий последовательно для ряда начальных скоростей, начиная от величины, равной 70% круговой скорости, и до величины, равной параболической скорости¹⁾. Таким образом, диапазон рассматриваемых скоростей охватывает все случаи, начиная от скоростей входа в атмосферу головных частей баллистических ракет средней дальности до скоростей возвращения космических аппаратов после полетов к Луне и другим планетам (считая, что скорость космического аппарата при возвращении уменьшена до параболической).

Диапазон углов входа относится не к головным частям баллистических ракет, а к объектам, спускаемым с орбиты.

В качестве параметра, характеризующего лобовое сопротивление, принята величина $\frac{C_D A}{W}$, где

$$C_D = \frac{2}{\rho v^2} \frac{D}{A} \quad (1.70)$$

— коэффициент лобового сопротивления, A — площадь поперечного сечения возвращающегося в атмосферу аппарата, W — его вес, ρ — плотность воздуха, v — скорость полета, D — сила лобового сопротивления.

¹⁾ К. А. Ehricke, Astronautical and Space Medical Research with Automatic Satellites, Franklin Institute, Monograph No. 2, June 1956; К. А. Ehricke and H. A. Pence, Re-Entry Characteristics of Recoverable Spherical Satellites, Satteloids, and Lunar Velicles, Convair Rep. AZP-001, June 1957.

Силу торможения, испытываемую аппаратом в любой точке траектории атмосферного участка за счет лобового сопротивления, можно представить в единицах ускорения силы тяжести g следующим образом:

$$\frac{D}{W} = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{C_D A}{W} [g]. \quad (1.71)$$

Следовательно, отношение $C_D A/W$ является параметром спуска. Этот параметр представляет собой отношение силы торможения, возникшей за счет лобового сопротивления (выраженного в единицах g), к скоростному напору:

$$\frac{C_D A}{W} = \frac{D/W}{\frac{\rho}{2} v^2} \left[\frac{\text{площадь}}{\text{сила}} \right]. \quad (1.72)$$

Величина, обратная введенному параметру, при $C_D=1$ представляет собой поперечную нагрузку аппарата и совпадает с его весом, приходящимся на единицу поперечного сечения аппарата.

При расчете траекторий в качестве основного допущения принималось отсутствие подъемной силы, то есть предполагалось, что траектории являются чисто баллистическими. При заданных начальных условиях (начальных значениях скорости входа v_i и угла входа θ_i ; см. рис. 1.23) и заданной атмосфере траектория аппарата, не создающего при полете подъемной силы, однозначно определяется параметром $C_D A/W$.

Прототипом тела, не создающего подъемной силы, является сфера. Однако любое симметричное тело при нулевом угле атаки также может рассматриваться как тело, не создающее подъемной силы. Например, конус, летящий таким образом, что его ось симметрии совпадает с направлением обтекающего его

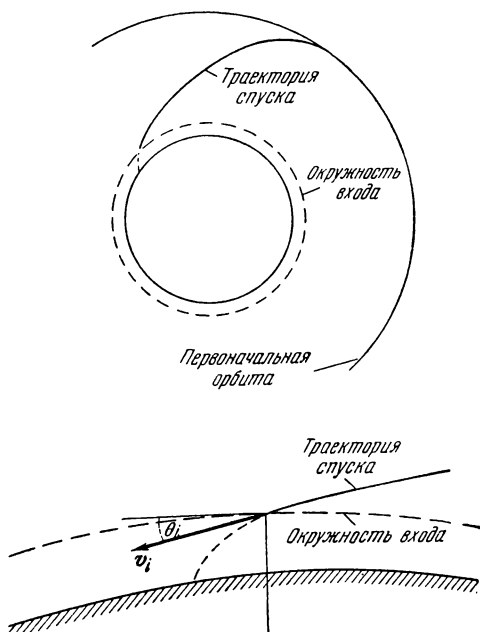


Рис. 1.23. Условия баллистического спуска с орбиты.

воздушного потока, не создает подъемной силы. Для тела, не создающего подъемной силы, параметр $C_D A/W$ в процессе спуска остается постоянным, если коэффициент C_D является постоянным и неизменна поперечная нагрузка W/A . На графиках, приведенных ниже, линии постоянных значений параметра $C_D A/W$ соответствуют реальным траекториям, если выполняются оговоренные выше условия или если отдельные сомножители, входящие в параметр $C_D A/W$, изменяются таким образом, что сам параметр остается постоянным. Можно считать, что при спуске сферы коэффициент C_D большую часть времени остается практически близким к единице, и если потери веса за счет уноса массы атмосферой не очень большие, то приближенно можно принять, что величина W/A также остается примерно постоянной. Если же параметр лобового сопротивления $C_D A/W$ меняется, то линии его постоянных значений можно использовать лишь на участках, где этот параметр можно приближенно считать постоянным. Чтобы подчеркнуть, что приведенные расчеты основаны на допущении постоянства параметра лобового сопротивления, результаты расчетов отнесены к телам сферической формы, так как подобная форма наиболее близко соответствует (с отмеченными выше оговорками) допущению о постоянстве параметра лобового сопротивления.

Двумя основными преимуществами баллистического спуска спутника, оборудованного аппаратурой, являются: 1) простота, а следовательно, и повышенная надежность бортовой аппаратуры и 2) возможность его совершенствования с целью отработки в будущем планирующего спуска с орбиты. Следует также отметить заманчивую возможность использования возвращаемых на Землю спутников для изучения влияния продолжительного воздействия среды (включая воздействие микрометеоритов) на внешнюю поверхность спутника при космических полетах. Однако при спуске в атмосфере поверхность спутника будет подвержена большим температурным и механическим воздействиям со стороны обтекающего потока, в результате чего большая часть следов (если не все) может быть стерта в процессе спуска. Более того, при наличии достаточно больших деформаций от ударов метеоритов космический аппарат может разрушиться на участке спуска в атмосфере. Таким образом, поверхность космического аппарата будет больше свидетельствовать об аэротермохимических и физических процессах при спуске в атмосфере, чем о воздействии космических факторов.

Дальнейшее совершенствование возвращаемых на Землю капсул позволит проводить биологические исследования в космическом пространстве с последующим надежным возвращением опытного материала и его обработкой.

Наконец, представляется возможным в случае аварии космического корабля использовать сферическую капсулу с большим значением параметра $C_D A/W$ в качестве спасательного средства космонавта (аналогично парашюту для пилота). Для предупреждения вращения, а следовательно, для предотвращения воздействия критических перегрузок капсулы с космонавтами или другими высокоорганизованными существами (например, обезьянами) должны снабжаться реактивными и аэродинамическими стабилизаторами.

Таким образом, можно различить три основных типа возвращаемых на Землю капсул: капсулы, оборудованные автоматическими приборами, биокапсулы и капсулы с космонавтами. Капсулы, оборудованные автоматическими приборами, могут быть использованы и для исследования атмосфер других планет.

При проведении расчетов начальные условия спуска задавались на высоте 111 км. Спутники на этих высотах движутся почти горизонтально¹⁾, если только они не слишком легкие и вследствие этого не начали фазу спуска раньше. При $C_D A/W = 0,041$ максимально допустимое значение A/W даже для пустой сферической оболочки составит $0,041 \text{ м}^2/\text{кг}$, если принять $C_D \approx 1$. Величина скоростного напора на этой высоте приблизительно равна $0,5 \text{ кг/м}^2$ при $v_i^2 = 1,0$ (вход с круговой скоростью) и 1 кг/м^2 при $v_i^2 = 2$ (вход с параболической скоростью). При рассматриваемых условиях перегрузки, испытываемые телом, составят $(0,1 \div 0,2)g$ в диапазоне скоростей входа околоземных спутников и лунников. Для реальных конструкций значение $C_D A/W = 0,041$ может оказаться завышенным раз в двадцать.

Углы входа в атмосферу при спуске с эллиптических орбит могут быть различными в зависимости от элементов орбиты. В качестве максимального отрицательного значения угла входа принято значение $\theta_i = -10^\circ$, поскольку даже для орбиты с $r_A/r_P = 1,43$ и $r_P/r_{00} = 1,0$, то есть для орбиты высотой в апогее, равной $0,43$ радиуса Земли (2740 км), и с перигеем, теоретически касающимся земной поверхности, максимальное отрицательное значение угла θ (при истинной аномалии 90°) не превосходит принятого значения. Углы θ измеряются от местного горизонта в направлении к земной поверхности в пределах от 0 до -90° (вертикальное падение).

При возвращении и спуске на Землю лунников, спасательных капсул с космонавтами и при спуске околоземных спутников, движение которых предварительно тормозится тормозными

¹⁾ Движутся горизонтально в том смысле, что вектор скорости в каждый момент времени остается параллельным плоскости местного горизонта. (Прим. ред.)

двигательными установками, могут встретиться почти любые углы входа. Однако, начиная с $\theta_i > -4^\circ$, максимальная величина перегрузки, испытываемой при спуске, быстро возрастает, и для значений $\theta_i > -4^\circ$ достигает¹⁾ 30g при $\theta_i = -10^\circ$. Это обстоятельство исключает использование более крутых траекторий спуска для решения большого числа интересных прикладных задач. Поэтому диапазон рассматриваемых начальных углов входа при расчетах был ограничен неравенствами²⁾ $0 \leq \theta_i \leq -10^\circ$.

Изменение параметра скорости v_i принято в пределах $0,7 \leq v_i \leq \sqrt{2}$. Учитывая, что при высоте 111 км круговая скорость $v_c = 7840$ м/сек, получим следующий диапазон изменения начальных скоростей спуска: $5500 \leq v_i \leq 11\,100$ м/сек.

В расчетах приняты следующие значения параметра лобового сопротивления: 0,041; 0,02; 0,009; 0,002. При коэффициенте лобового сопротивления $C_D = 1$ это соответственно отвечает следующим значениям поперечных нагрузок: 24,5; 49; 111,2; 490 кг/м². Соответствующие максимально допустимые значения веса, приходящегося на единицу площади поверхности оболочки, будут: 6,12; 12,24; 27,8; 122,4 кг/м². Для почти пустых сферических капсул величина параметра лобового сопротивления будет не менее 0,009 м²/кг, а для большинства практических случаев эта величина ближе к 0,002. Для спутника «Вангард» («Vanguard»), который проектировался не как спускаемый с орбиты аппарат, величина $A/W = 0,025$ (диаметр 0,558 м, вес 9,6 кг).

Величина скорости v и угол θ с учетом вращения плоскости местного горизонта в текущей точке определялись интегрированием уравнений

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = - \frac{C_D A}{W} \frac{\rho}{2} v^2 + \sin \theta, \quad (1.73)$$

$$- \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v} \cos \theta (1 - v^2). \quad (1.74)$$

Расчеты проводились на электронной вычислительной машине «1103 Remington Rand» Отделения астронавтики фирмы «Конвэр» («Convair»), при этом использовалась модель атмосферы ICAO.

Основные результаты расчетов изменения скорости в зависимости от высоты при докруговой, круговой и параболической

¹⁾ Запись автора здесь математически не точна, так как он имеет в виду возрастание абсолютной величины; надо было бы написать: «для $\theta_i < -4^\circ$ ». (Прим. ред.)

²⁾ См. предыдущую сноску; надо записать: « $0 \geq \theta_i \geq -10^\circ$ ». (Прим. ред.)

скоростях входа, изменения торможения в зависимости от высоты и параметра $C_D A/W$ представлены на рис. 1.24—1.28. На

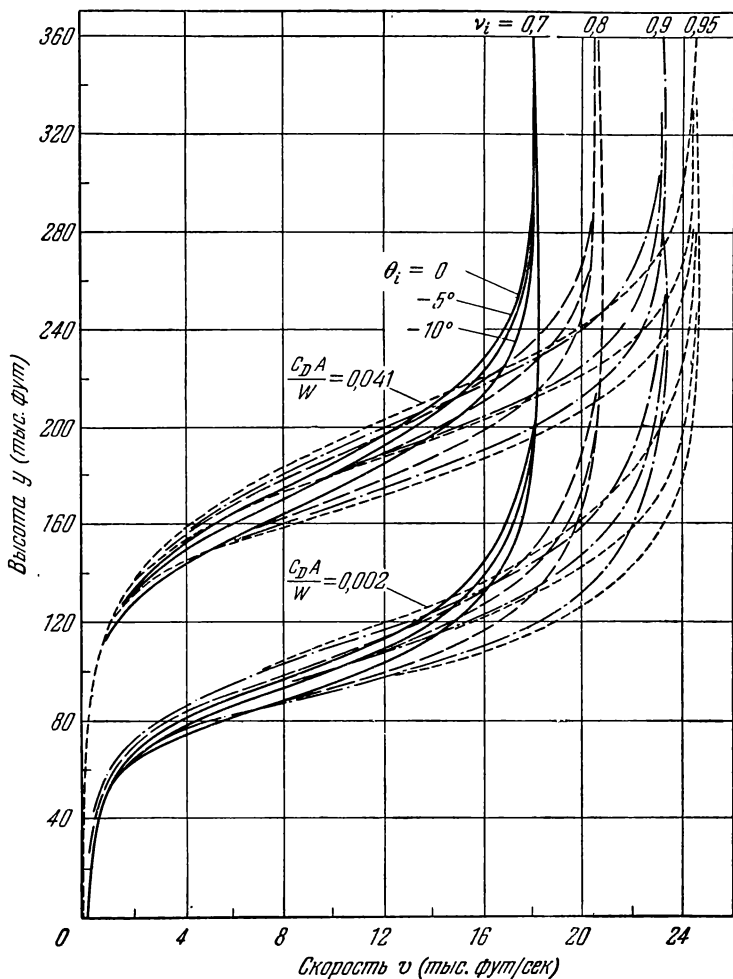


Рис. 1.24. Изменение скорости в зависимости от высоты при скорости входа, меньшей круговой.

рис. 1.24 представлены графики изменения скорости в зависимости от высоты для самой легкой и самой тяжелой сфер (в рассматриваемом диапазоне) для различных скоростей (меньших круговой) при трех различных значениях угла входа. При

$v < 4880$ м/сек (< 16000 фут/сек) независимо от угла входа и скорости входа кривые (рис. 1.24) располагаются достаточно узким пучком для каждого значения параметра $C_D A/W$. При $v = 4880$ м/сек ($16\,000$ фут/сек) кривые семейства, соответствующие $C_D A/W = 0,041$, по высоте занимают полосу шириной $15\,250$ м ($50\,000$ фут) между высотами $54\,900$ м ($180\,000$ фут) и $70\,150$ м ($230\,000$ фут). Средняя линия этого семейства до

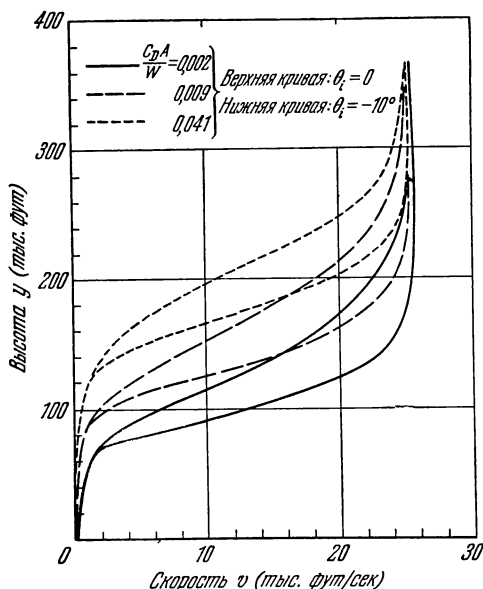


Рис. 1.25. Изменение скорости в зависимости от высоты при круговой скорости входа ($v_i = 1,0$).

значения $v = 1220$ м/сек (4000 фут/сек) следует примерно по прямой линии; при этой скорости семейство кривых сужается, занимая интервал высот $42\,700$ м ($140\,000$ фут) $\leq y \leq 48\,800$ м ($160\,000$ фут). Семейство кривых, соответствующих $C_D A/W = 0,002$, аналогично рассмотренному, но сдвинуто по высоте вниз и более узкое в диапазоне меньших скоростей. При скорости $v = 4880$ м/сек ($16\,000$ фут/сек) кривые расположены в интервале высот от $30\,500$ м ($100\,000$ фут) до $45\,750$ м ($150\,000$ фут). При скорости $v = 1220$ м/сек (4000 фут/сек) — в интервале высот от $22\,600$ м ($70\,000$ фут) до $25\,900$ м ($85\,000$ фут). На рис. 1.25 для сравнения приведены аналогичные кривые при значениях параметра $C_D A/W = 0,041$; $0,009$ и $0,002$ для круговой скорости входа. При $v = 1220$ м/сек (4000 фут/сек) кривые, соответствующие $C_D A/W = 0,009$, проходят в районе высоты $y = 34\,500$ м ($110\,000$ фут). На рис. 1.26 приведены графики зависимости скорости от высоты при параболической скорости входа для тех же трех значений параметра лобового сопротивления. Из этих графиков видно, что все сферы, входящие в атмосферу при $\theta_i \geq -2^\circ$, не захватываются атмосферой и вновь покидают ее. Сфера с параметром лобового сопротивления, равным $0,041$, захватывается атмосферой при $\theta_i = -4^\circ$. Интересно отметить, что район наибольшего торможения приходится на интервал высот

от 91 500 м (300 000 фут) до 61 000 м (200 000 фут). Действительно, как следует из графика, приведенного на рис. 1.63, полет этой сферы на протяжении почти 740 км (400 морских миль) происходит примерно на постоянной высоте, равной 79 300 м (260 000 фут) (кривая С). На самом деле высота полета несколько изменяется, как это можно заключить по характеру поведения кривой перегрузки для этой сферы (кривая С на

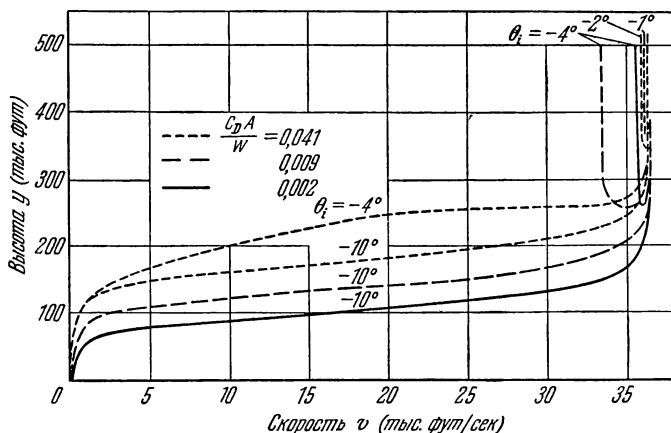


Рис. 1.26. Изменение скорости в зависимости от высоты при параболической скорости входа ($v_i = \sqrt{2}$).

рис. 1.69). При $\theta_i = -10^\circ$ скорости полета при входе с параболической скоростью по сравнению со случаем входа с круговой скоростью (рис. 1.25) на одинаковых высотах оказываются большими. При этом разница в значениях скоростей полета увеличивается с уменьшением величины параметра лобового сопротивления. При $C_D A / W = 0,002$ в интервале высот от 71 000 м (200 000 фут) до 30 500 м (100 000 фут) скорость полета изменяется с 10 970 м/сек (36 000 фут/сек) до 5490 м/сек (18 000 фут/сек) и с 7620 м/сек (25 000 фут/сек) до 3960 м/сек (13 000 фут/сек) для параболической и круговой скоростей входа соответственно.

На рис. 1.50 и 1.29 приведены значения горизонтальной дальности полета при спуске самой тяжелой ($C_D A / W = 0,002$) и самой легкой ($C_D A / W = 0,041$) сфер при скоростях входа, меньших круговой, и углах входа $\theta_i = 0, -5^\circ$ и -10° . Аналогичные графики приведены на рис. 1.59 и 1.38 для случая круговой скорости входа при пяти значениях углов входа. Из этих графиков следует, что дальность примерно от точки начала действия

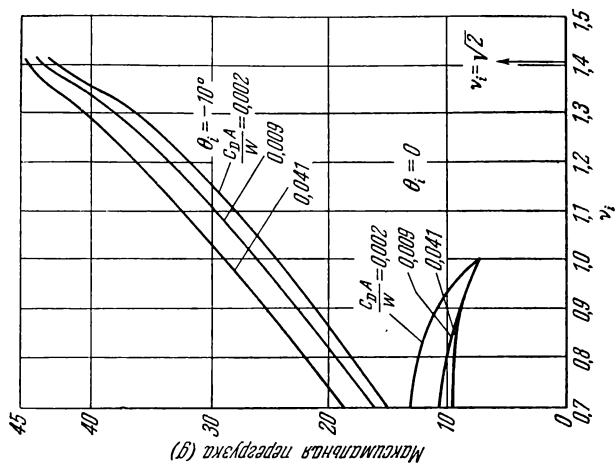


Рис. 1.28. Изменение максимальной перегрузки в зависимости от скорости входа для различных сфер.

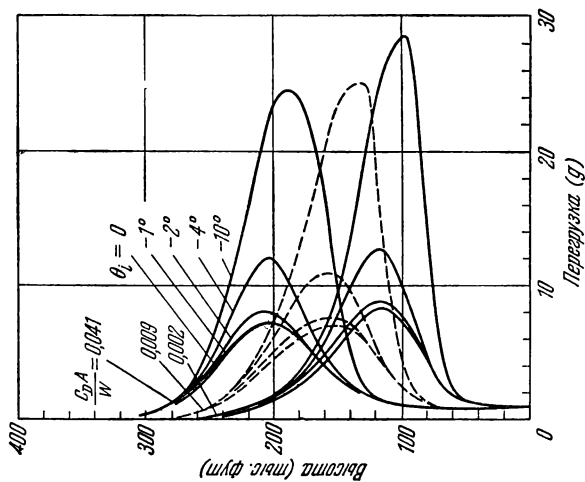


Рис. 1.27. Изменение перегрузки в зависимости от высоты ($v_i = 1, 0$).

лобового сопротивления до точки падения в сильной мере зависит от угла входа, скорости входа и величины параметра лобового сопротивления. Для сферы с величиной параметра лобового сопротивления 0,002 при входе с круговой скоростью и углом входа $\theta_i = 0$ из 15 750 км (8500 морских миль) горизонтальной

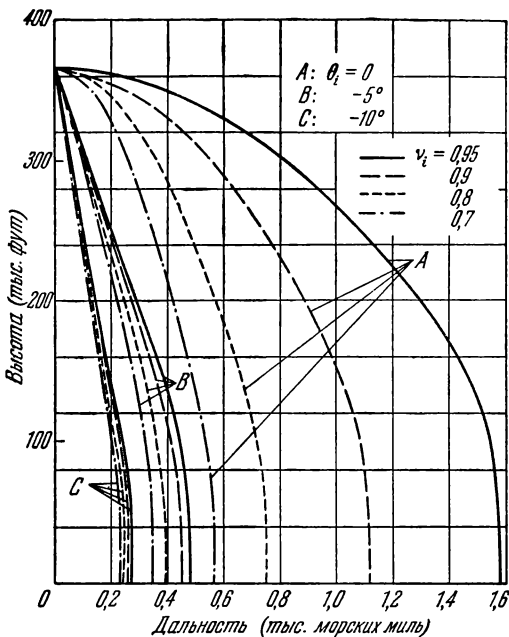


Рис. 1.29. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; началь-

ные условия: $y_i = 111$ км, $v_i < 1, 0$).

дальности до точки падения почти 12 960 км (7000 морских миль) приходится на высоты полета $y \geq 300\,000$ футов (91 500 м) (рис. 1.59). Для сферы с величиной параметра лобового сопротивления 0,041 аналогичная доля составляет 4450 км (2400 морских миль) из 5370 км (2900 морских миль). То обстоятельство, что большую часть пути при спуске с орбиты тело проходит на сравнительно больших высотах, облегчает его радиолокационное сопровождение. После прохождения высоты 91 500 м (300 000 футов) со скоростью, соответствующей $v=0,9$, наружная поверхность тела становится светящейся, что при благоприятных метеорологических условиях позволяет осуществить слежение

за телом оптическими средствами. При спуске в атмосфере сферическое тело вследствие симметричности испытывает лишь влияние лобовой составляющей аэродинамического сопротивления (кроме силы притяжения) и не испытывает действия сил

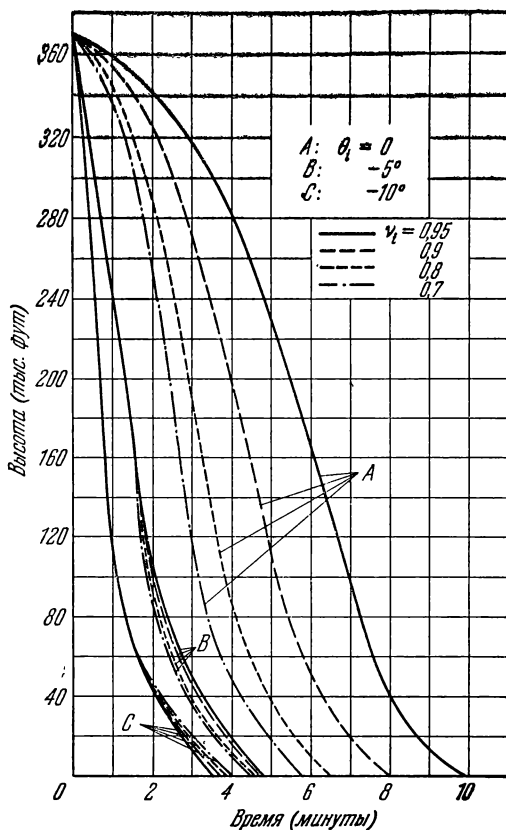


Рис. 1.30. Изменение высоты при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $\nu_i < 1,0$).

в направлении, нормальном к плоскости орбиты. Поэтому проекция орбиты спутника на небесную сферу (прямые восхождения и склонения) может быть заранее вычислена с достаточной точностью. Это обстоятельство в случае управляемого спуска (спуск по команде) позволяет сравнительно просто организовать

радиолокационное сопровождение спускаемой сферы вплоть до точки падения, используя станцию, расположенную в заранее определенной точке и начинающую сопровождение после включения тормозной двигательной установки. В случае неуправляемого спуска (за счет естественного торможения атмосферой)

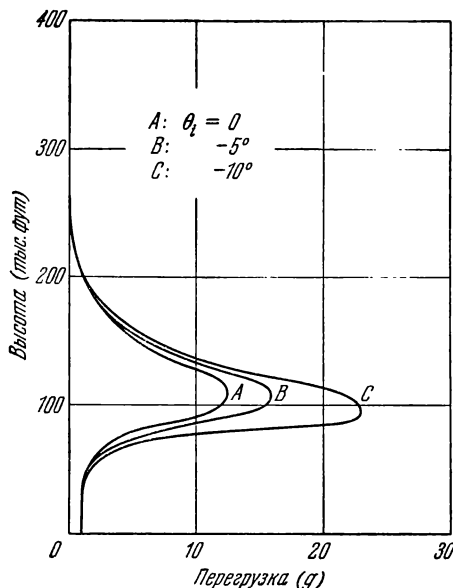


Рис. 1.31. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 0,8$).

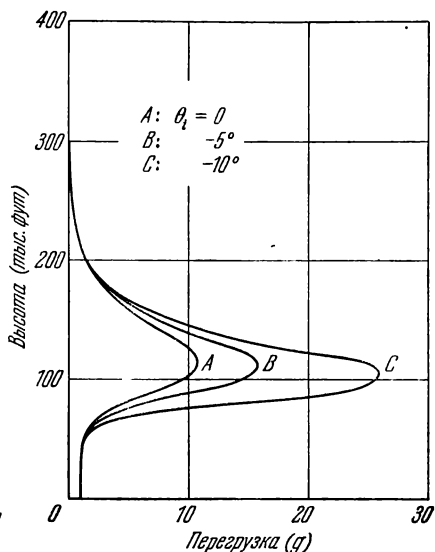


Рис. 1.32. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 0,9$).

возникает необходимость в большом числе станций сопровождения, так как не представляется возможным заранее с достаточной точностью определить начало спуска. В этом случае для определения точки падения спутника имеются две основные возможности: слежение с самолетов или обнаружение по радиосигналам бортового передатчика после прохождения спутником зоны сверхзвуковых скоростей на участке спуска в атмосфере (или после падения на Землю или в воду). Возможность слежения с самолетов основывается на предположении, что наземные стационарные станции сопровождения обеспечивают сопровождение объекта до таких малых высот (около 180—150 км), начиная с которых возможно приближенное

прогнозирование района спуска. На этих высотах сфера успеет совершить по крайней мере еще один виток, так что имеется достаточно времени для отправки в ожидаемый район спуска специальных дежурных самолетов. С накоплением опыта и уточнением знаний о процессах торможения в верхних слоях атмосферы точность прогнозирования точки падения будет возрастать. Графики, приведенные на рис. 1.50, 1.29, 1.59, и 1.38, показывают, что даже малые отрицательные углы входа ($\theta_i = -1^\circ$)

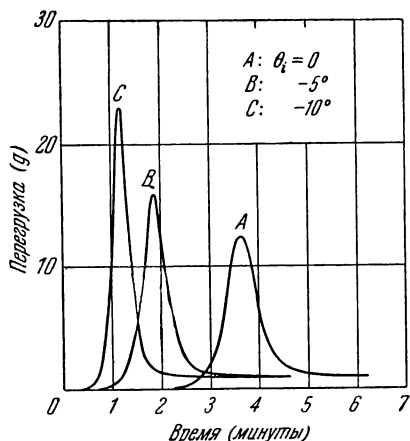


Рис. 1.33. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; $v_i = 0,08$).

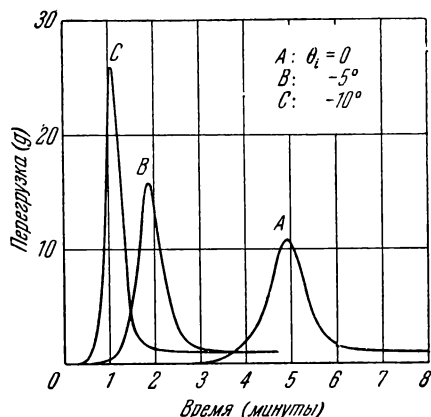


Рис. 1.34. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; $v_i = 0,9$).

значительно уменьшают дальность спуска. Поэтому крайне важно уметь измерять радиальную составляющую скорости и определять углы входа.

В случае спуска с параболической скоростью (рис. 1.63 и 1.41 соответственно для самой легкой и самой тяжелой сфер) диапазон дальностей спуска сравнительно невелик, поскольку при $v_i = \sqrt{2}$ спуск тела возможен лишь при сравнительно больших отрицательных углах входа.

Продолжительность спуска с высоты 111 км на поверхность Земли во всех случаях равна лишь нескольким минутам. Исключение составляет лишь спуск с круговой скоростью при $\theta_i = 0$. В этом случае для сферы с параметром лобового сопротивления, равным 0,009, продолжительность спуска составляет 27 мин, для сферы с параметром лобового сопротивления, равным 0,002, — несколько более 40 мин и для сферы с параметром

лобового сопротивления, равным 0,041, — около 23 мин. При углах входа $\theta_i \approx -1^\circ$ продолжительность спуска уменьшается до 10—12 мин. При угле входа $\theta_i = -10^\circ$ продолжительность спуска при скорости спуска, равной или большей круговой, составляет 6—7 мин независимо от величины параметра лобового сопротивления. При скоростях спуска, меньших круговой, продолжительность спуска составляет 18—12 мин, 12—7 мин

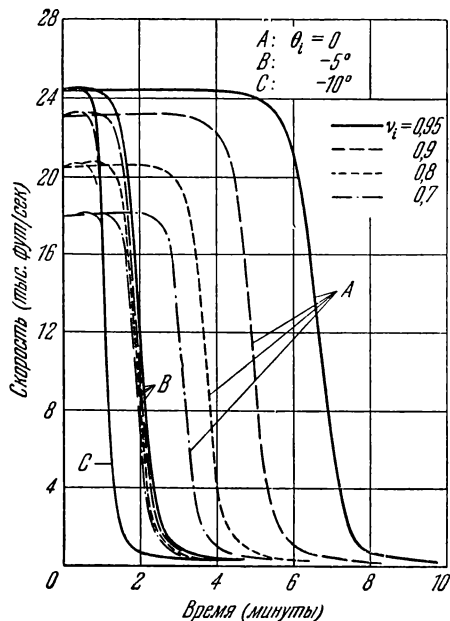


Рис. 1.35. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени

$$\left(\frac{C_D A}{W} = 0,002; \gamma_i < 1,0 \right).$$

и 10—4 мин соответственно для сфер со значениями параметра лобового сопротивления 0,041, 0,009 и 0,002 при углах входа от 0 до -10° и почти не зависит от скорости спуска при $\theta_i < 0$. На рис. 1.27 и 1.28 приведены графики изменения перегрузки в зависимости от высоты и от скорости входа для различных значений параметра лобового сопротивления и угла входа. Графики на рис. 1.27 показывают влияние параметра лобового сопротивления и угла входа на высоту района максимальных перегрузок. Высота района максимальных перегрузок в основном зависит от параметра лобового сопротивления и в гораздо

меньшей степени от угла входа. Величина же максимальной перегрузки, наоборот, в основном определяется углом входа и в меньшей степени — параметром лобового сопротивления. Графики на рис. 1.27 относятся к круговой скорости входа. Однако

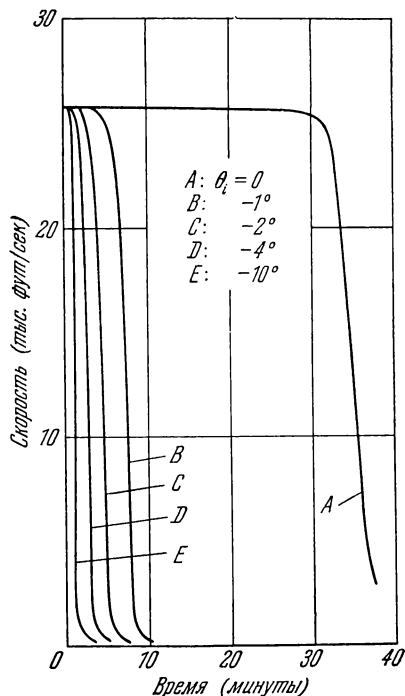


Рис. 1.36. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени

$$\left(\frac{C_D A}{W} = 0,002; \nu_i = 1,0\right).$$

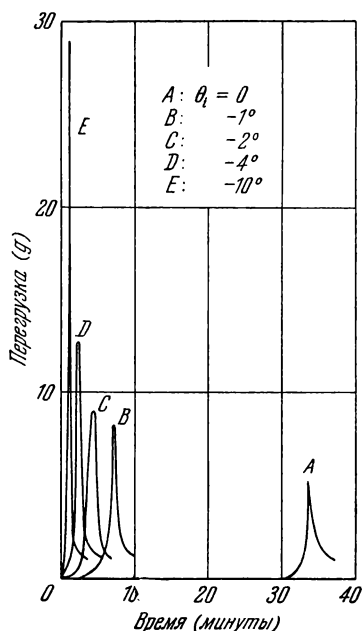


Рис. 1.37. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени

$$\left(\frac{C_D A}{W} = 0,002; \nu_i = 1,0\right).$$

следует отметить, что скорость входа не влияет на высоту района максимальных перегрузок. На рис. 1.28 приведены графики изменения максимальной величины перегрузки в зависимости от скорости входа для $\theta_i = 0$ и $\theta_i = -10^\circ$. Интересно отметить, что при $\theta_i = 0$ максимальная величина перегрузки уменьшается при $\nu_i \rightarrow 1$, тогда как при $\theta_i = -10^\circ$ величина максимальной перегрузки с увеличением ν_i возрастает. Уменьшение величины максимальной перегрузки с ростом ν_i при $\theta_i = 0$ объясняется тем, что при $\nu_i < 1$ траектория спуска становится сравнительно крутой еще до того момента, как скорость тела успеет в достаточной

степени уменьшиться. Поэтому частичное гашение орбитальной скорости тормозной двигательной установкой до начала спуска при близких к нулю углах входа не окупается достигаемым при этом уменьшением величины максимальной перегрузки,

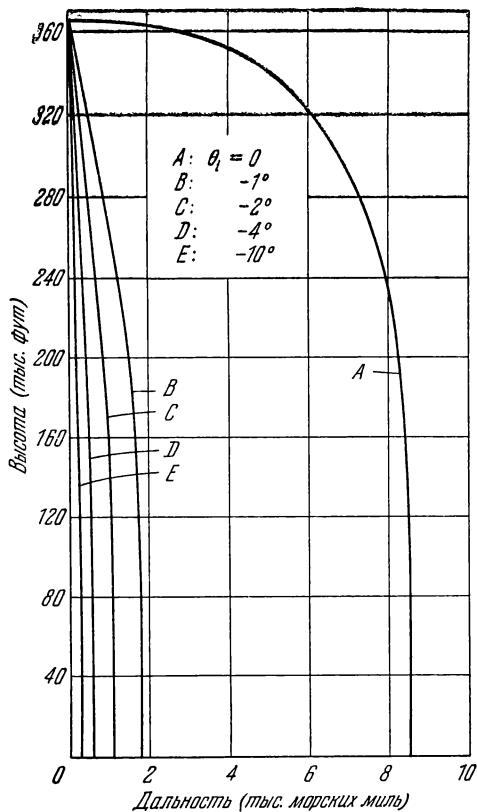


Рис. 1.38. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_D^4}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = v_c = 7843$ м/сек, $v_i = 1,0$).

Следует отметить особое значение продолжительности действия перегрузок на живые организмы. Кривые изменения перегрузки в зависимости от времени полета показывают, что пики перегрузок длятся лишь несколько секунд. Однако в отдельных случаях величины перегрузок оказываются довольно

высокими и становятся критическими даже при отмеченных продолжительностях их действия (см., например, кривую *E* на

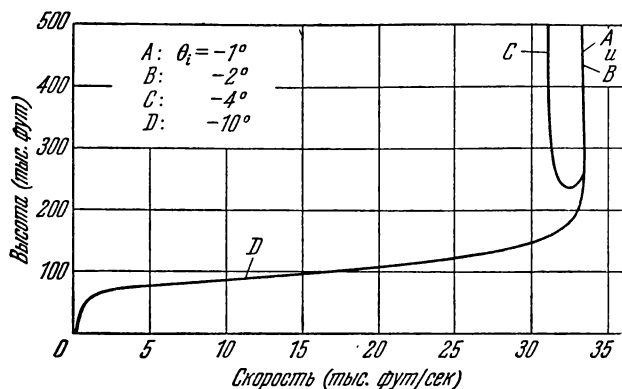


Рис. 1.39. Изменение скорости при спуске в зависимости от высоты $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,002; v_i = 1,3\right)$.

рис. 1.58, соответствующую перегрузкам, большим $20g$, действующим в течение около 17 сек). В этом заключается основной недостаток баллистического спуска по сравнению с

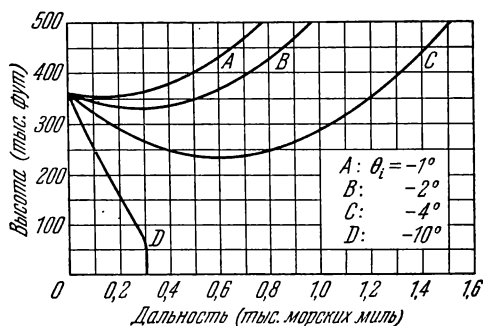


Рис. 1.40. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,002;$ начальные условия: $y_i = 111 \text{ км}, v_i = 1,3$).

планирующим спуском, при котором имеется возможность поддержания перегрузки на достаточно низком уровне. При спуске с параболической скоростью максимальная величина перегрузки достигает примерно $45g$.

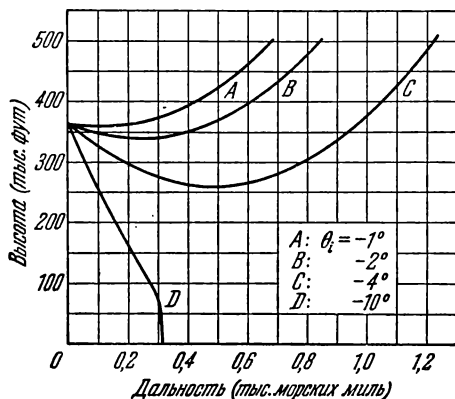


Рис. 1.41. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = \sqrt{2}$).

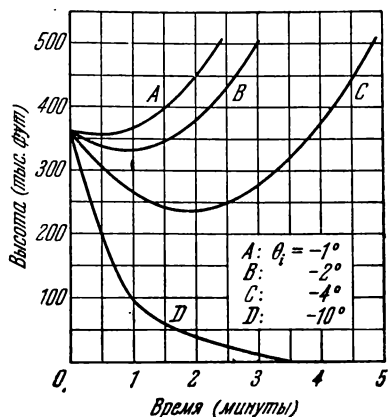


Рис. 1.42. Изменение высоты при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 1,3$).

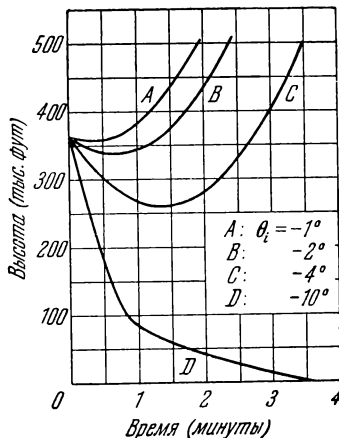


Рис. 1.43. Изменение высоты при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = \sqrt{2}$).

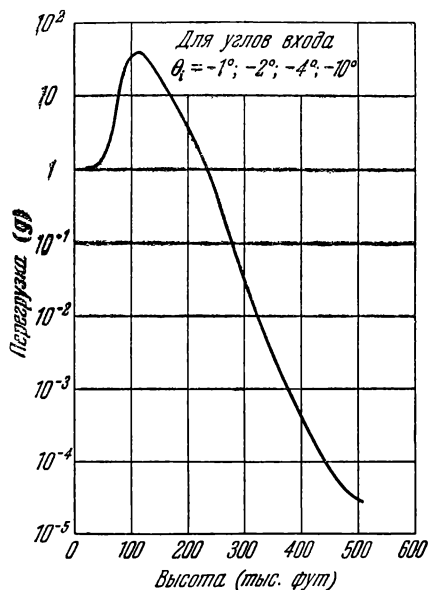


Рис. 1.44. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D^A}{W} = 0,002$; $v_i = 1,3$).

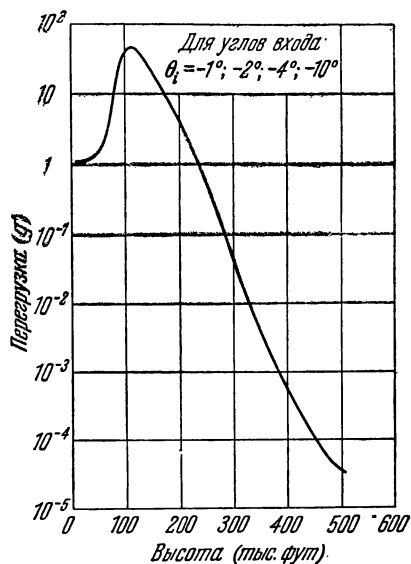


Рис. 1.45. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D^A}{W} = 0,002$; $v_i = \sqrt{2}$).

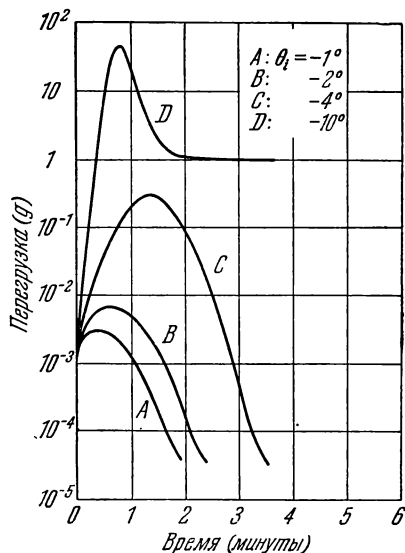


Рис. 1.46. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D^A}{W} = 0,002$; $v_i = 1,3$).

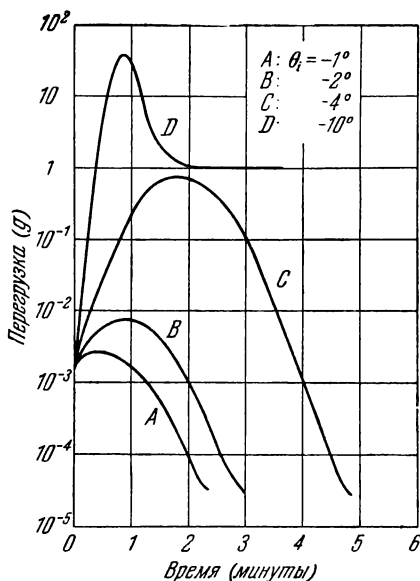


Рис. 1.47. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; $v_i = \sqrt{2}$).

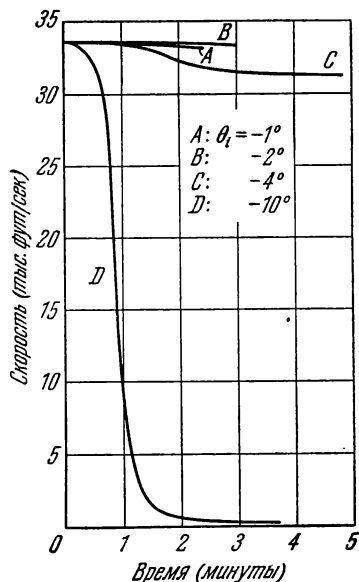


Рис. 1.48. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; $v_i = 1,3$).

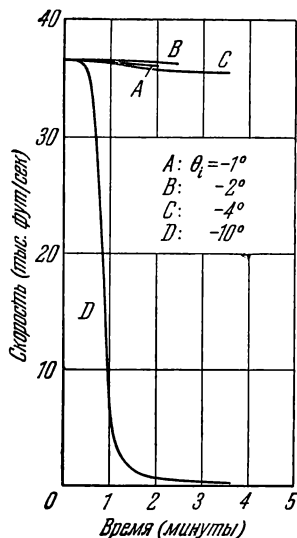


Рис. 1.49. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,002$; $v_i = \sqrt{2}$).

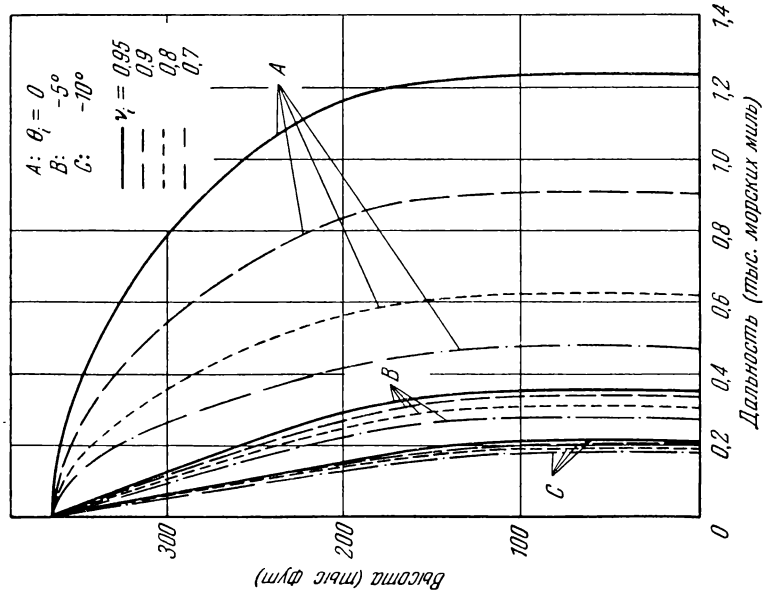


Рис. 150. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($C_D A/W = 0.041$; $y_i = 111$ км, $\nu_i < 1.0$).

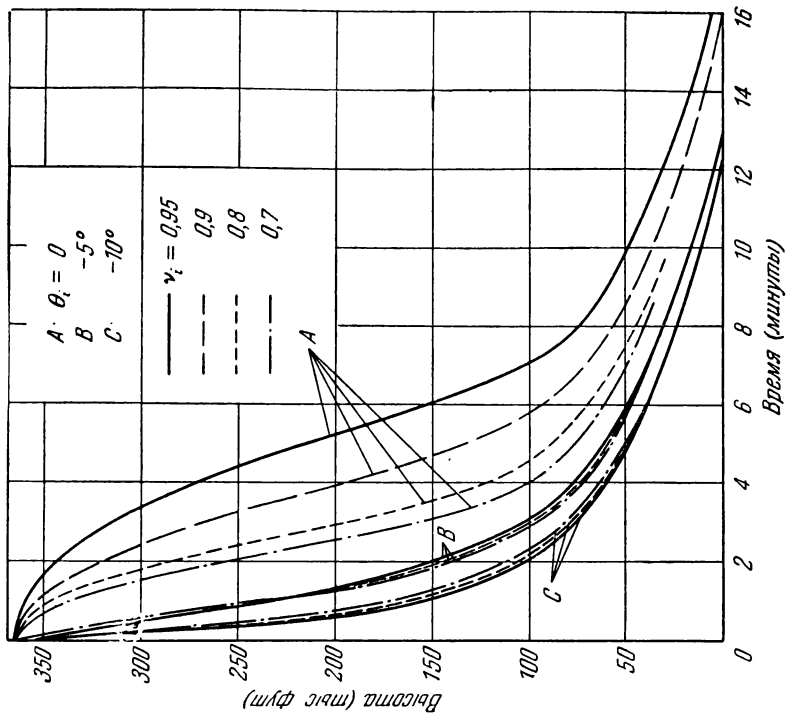


Рис. 151. То же в зависимости от времени (данные рис. 150).

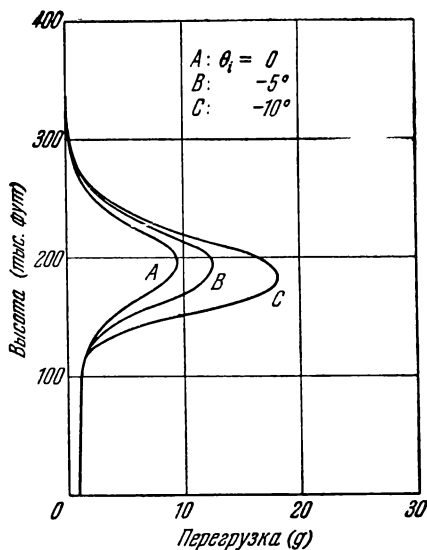


Рис. 1.52. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 0,8$).

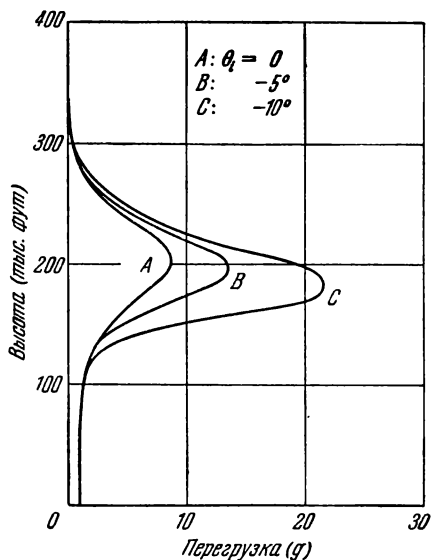


Рис. 1.53. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 0,9$).

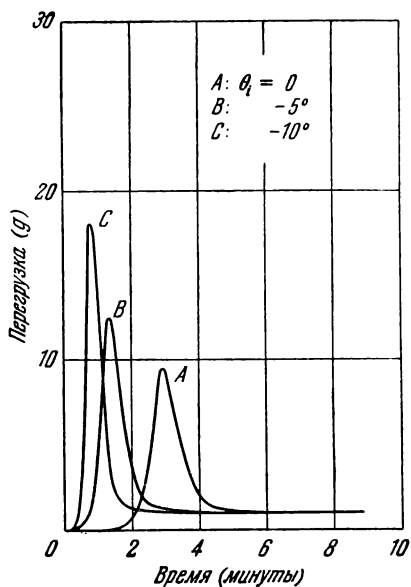


Рис. 1.54. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; $v_i = 0,8$).

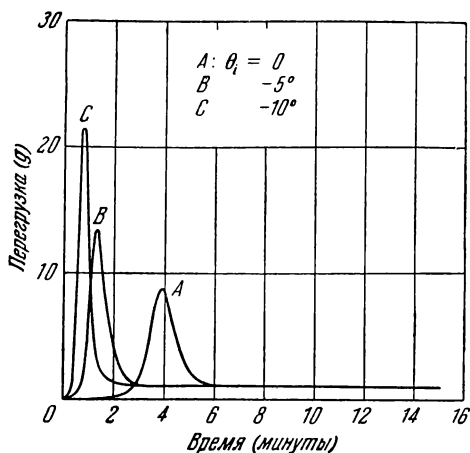


Рис. 1.55. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; $v_i = 0,9$).

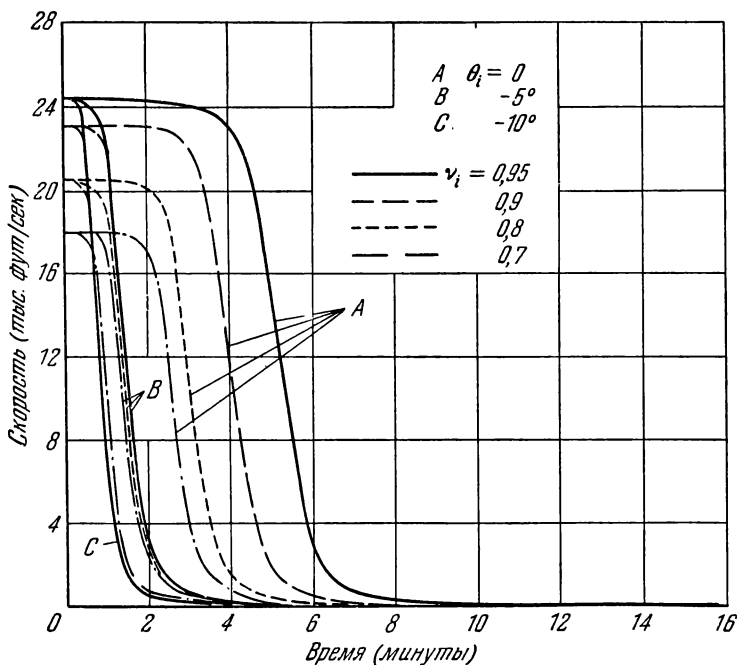


Рис. 1.56. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; $v_i < 1,0$).

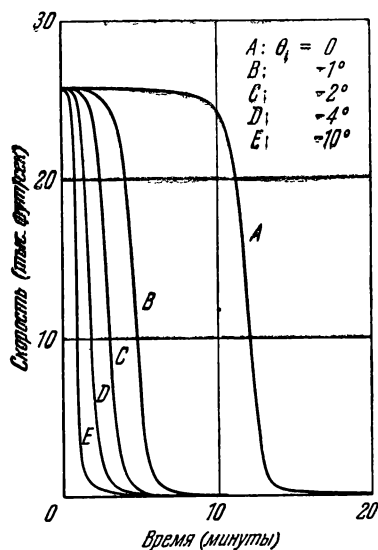


Рис. 1.57. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; $v_i = 1,0$).

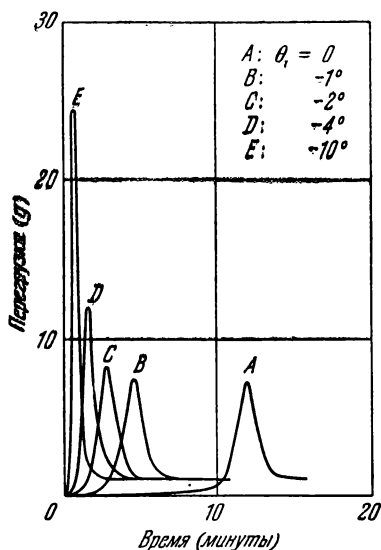


Рис. 1.58. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; $v_i = 1,0$).

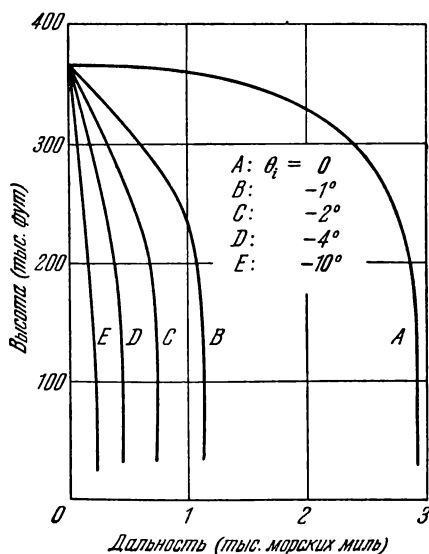


Рис. 1.59. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_D A}{W} = 0,041$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 7843$ м/сек, $v_i = 1,0$).

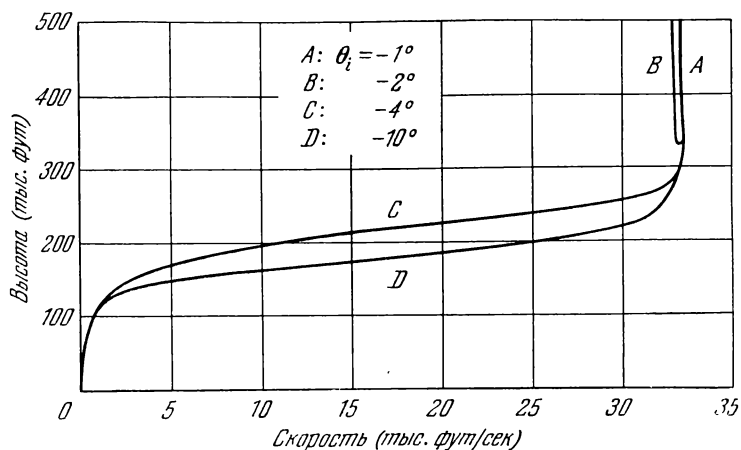


Рис. 1.60. Изменение скорости при спуске в зависимости от высоты $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; v_i = 1,3\right)$.

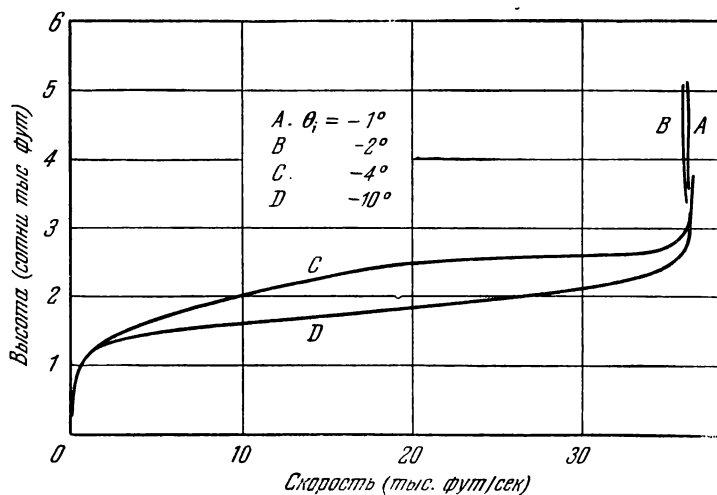


Рис. 1.61. Изменение скорости при спуске в зависимости от высоты $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; v_i = \sqrt{2}\right)$.

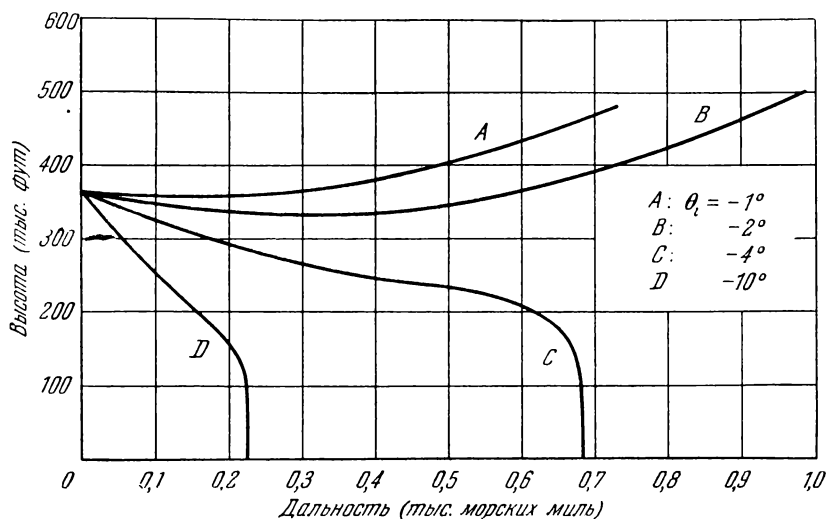


Рис. 1.62. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_{DA}}{W} = 0,041$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = 1,3$).

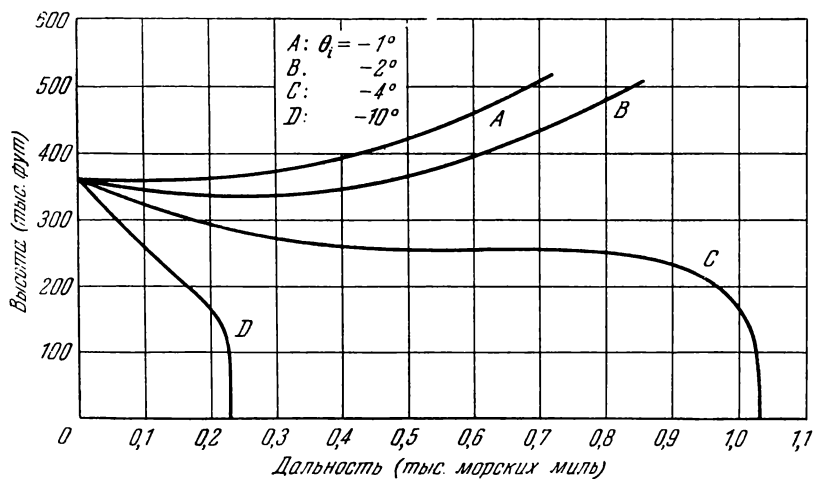


Рис. 1.63. Изменение высоты при спуске в зависимости от дальности ($\frac{C_{DA}}{W} = 0,041$; начальные условия: $y_i = 111$ км, $v_i = \sqrt{2}$).

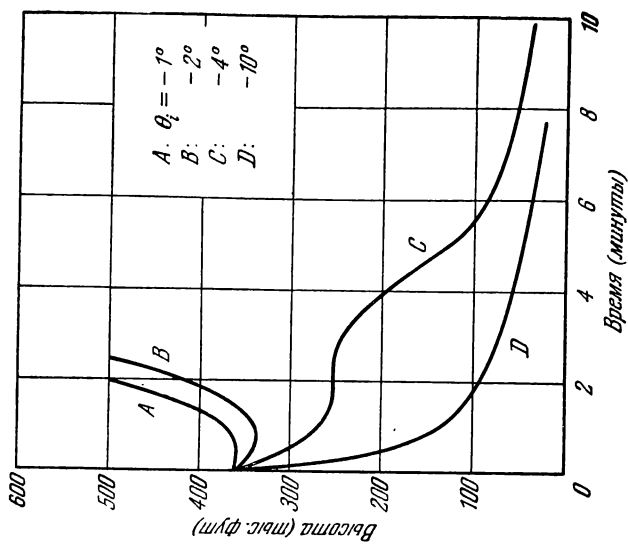


Рис. 1.64. Изменение высоты при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; \text{начальные условия: } y_i = 111 \text{ км, } v_i = 1,3\right)$.

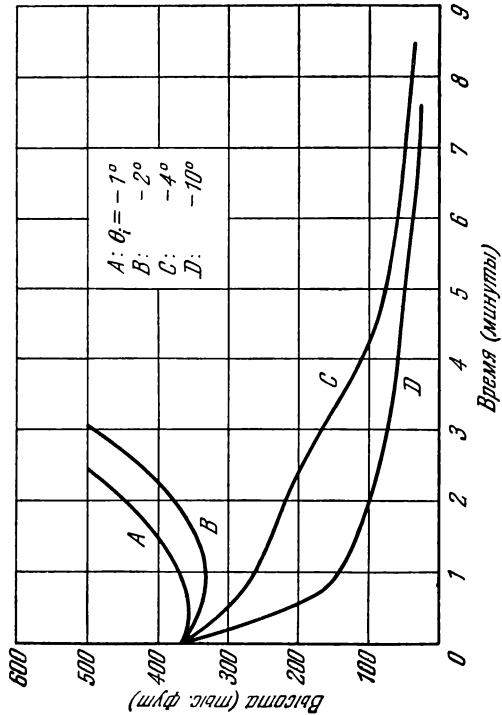


Рис. 1.65. Изменение высоты при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; \text{начальные условия: } y_i = 111 \text{ км, } v_i = \sqrt{2}\right)$.

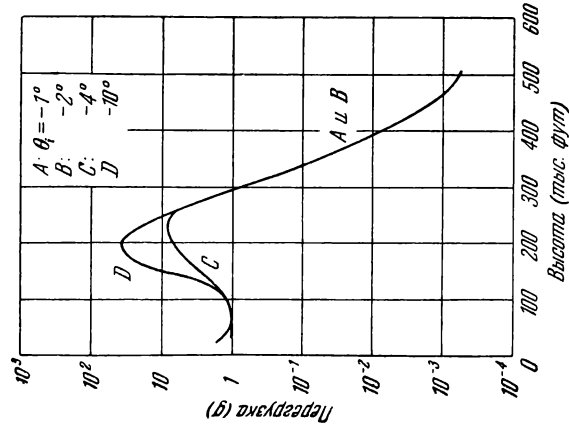


Рис. 1.66. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты $\left(\frac{C_{DA}}{W} = 0,041; \nu_i = 1,3\right)$.

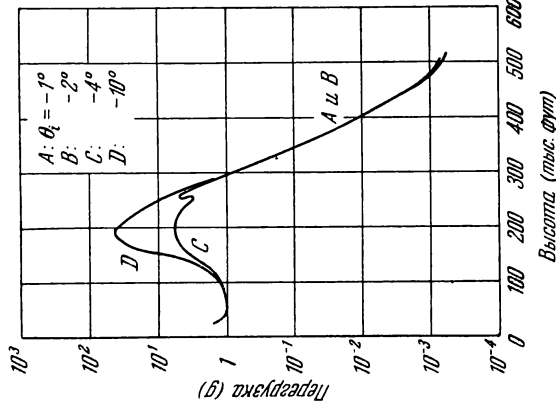


Рис. 1.67. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от высоты $\left(\frac{C_{DA}}{W} = 0,041; \nu_i = \sqrt{2}\right)$.

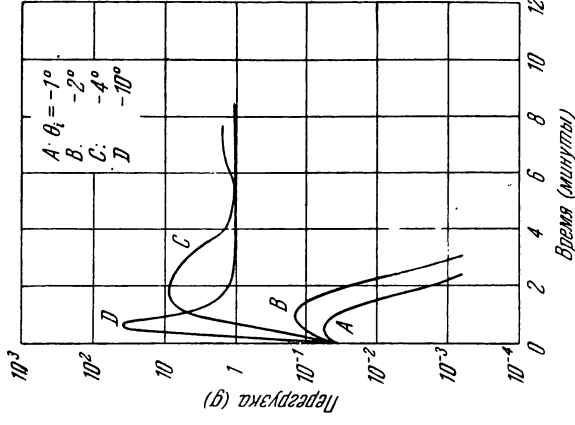


Рис. 1.68. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_{DA}}{W} = 0,041; \nu_i = 1,3\right)$.

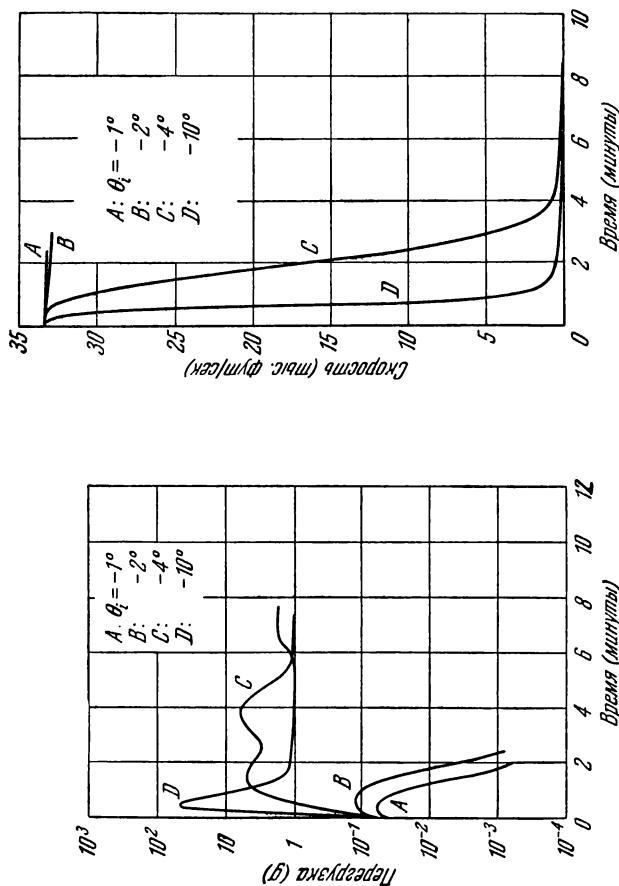


Рис. 1.69. Изменение перегрузки при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; v_i = \sqrt{2}\right)$.

Рис. 1.70. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; v_i = 1,3\right)$.

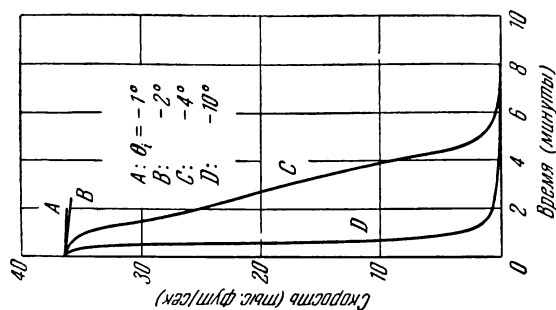


Рис. 1.71. Изменение скорости при спуске в зависимости от времени $\left(\frac{C_D A}{W} = 0,041; v_i = \sqrt{2}\right)$.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось; азимут (географический);
 b — малая полуось;
 C — постоянная закона площадей;
 e — эксцентриситет;
 g — ускорение силы притяжения;
 h — постоянная интеграла энергии;
 i — угол наклона плоскости возмущенной траектории к плоскости невозмущенной траектории;
 K — гравитационный параметр (постоянная центрального поля тяготения);
 p — фокальный параметр эллипса;
 q — параметр трансверсальной («горизонтальной») скорости [квадрат отношения трансверсальной скорости к местной круговой скорости, определяемый равенством (1.3)];
 r — расстояние от центра притяжения;
 t — время;
 t_{r_1} — время полета по кеплеровой орбите от перигея до точки, удаленной от центра притяжения на расстояние r_1 ;
 $t_{r_{00}}$ — время полета по кеплеровой орбите от перигея до точки, удаленной от центра притяжения на расстояние r_{00} ;
 v — скорость полета;
 ω — окружная скорость точки на поверхности Земли;
 x — сферическая дальность;
 x_1^* — сферическая дальность от начальной точки 1 до вершины траектории;
 x_3^* — сферическая дальность от вершины траектории до точки падения;
 x_{12} — сферическая дальность от начальной точки 1 до точки 2 (см. рис. 1.1);
 x_{13} — сферическая дальность от начальной точки 1 до точки 3 (см. рис. 1.1);
 y — высота полета;
 $\gamma = 90^\circ - \theta$;
 Λ — боковое отклонение точки;
 δ — половина угловой дальности баллистической траектории;
 δ_0 — значение δ , соответствующее фиктивной начальной точке на поверхности Земли;
 δ_1 — значение δ , соответствующее точке падения на высоте начальной точки;

δ_3 — значение δ , соответствующее точке падения на поверхности Земли в предположении, что движение до точки падения происходит по эллиптической траектории;

η — истинная аномалия;

θ — угол, образуемый касательной к траектории с местным горизонтом;

φ — географическая широта.

Индексы (нижние):

a — трансверсальный («горизонтальный»);

r — радиальный («вертикальный»);

c — круговой;

p — параболический;

1 — относится к начальной точке (концу активного участка);

2 — относится к точке падения на высоте начальной точки (см. рис. 1.1);

3 — относится к точке падения на невращающейся Земле;

00 — условия на поверхности Земли;

i — относится к точке падения на вращающейся Земле.

Индексы (верхние):

$*$ — значение параметра в вершине траектории;

($^\circ$) — значение в градусах;

($^{\circ}$) — значение в радианах.

ЗАДАЧИ

1. Определите начальную скорость v_1 межконтинентального снаряда при следующих условиях: высота начальной точки $y_1=151\,000$ м; сферическая дальность, измеренная по дуге окружности, проходящей через начальную точку, равна 9266 км; угол бросания $\theta_1=20^\circ$.

2. Для условий задачи 1 определите приращение дальности за счет продолжения траектории с высоты 151 000 м до поверхности Земли.

3. Сравните оптимальные углы бросания для получения дальности 2780 км на Земле, Марсе и Луне.

4. Определите угол бросания, начальную скорость (в предположении, что начальная точка расположена на поверхности), полную высоту траектории и полное время полета для получения дальности 1853 км при полете по ТМЭ в условиях Луны.

5. Определите сферические дальности при следующих условиях: $v_1=4575$ м/сек, $\theta_1=45^\circ$ и $v_1=4725$ м/сек, $\theta_1=35^\circ$ (сопротивлением атмосферы пренебречь; начальная точка расположена на поверхности Земли).

6. Определите для ТМЭ угол бросания и сферическую дальность до точки падения при $v_1=7320$ м/сек и $y_1=183\,000$ м (сопротивлением атмосферы пренебречь).

7. Определите дальность и второй угол бросания, соответствующий этой же дальности, при $v_1=3660$ м/сек и $\theta_1=60^\circ$.

8. Найдите величину частной производной $\partial x/\partial v_1$ (в $\frac{\text{км}}{\text{м/сек}}$) при следующих начальных условиях: $y_1=151\,000$ м, $v_1=7000$ м/сек, $\theta_1=20^\circ$.

9. При условиях задачи 8 рассчитайте величину частной производной $\partial x/\partial \theta_1$.

10. Определите величину частной производной $\partial x/\partial \theta_1$ при $v_1=0,8$ и $\theta_1=31^\circ$.

11. Определите такой угол бросания θ_1 при $v_1=0,96$, чтобы величина частной производной $\partial \delta/\partial v_1$ была бы такой же, как и для траектории с $v_1=0,9$ и $\theta_1=23^\circ,55$, а затем найдите дальность, достигаемую при $v_1=0,91$.

12. При сохранении условий задачи 11 рассчитайте значение v_1 , обеспечивающее дальность полета, равную дальности полета по ТМЭ при $v_1=0,96$ (при этом величина $\partial \delta/\partial v_1$ должна быть такой же, как при $v_1=0,9$ и $\theta_1=23^\circ,55$).

13. Найдите отклонение полной дальности, вызванное совместным действием отклонений начальной скорости $\Delta v_1=0,305$ м/сек и угла бросания $\Delta \theta_1=0,005$ рад, для двух траекторий с полной угловой дальностью полета $2\delta=100^\circ$: а) $\theta_1=30^\circ$; б) ТМЭ. Предполагается, что отклонения дальности, вызываемые отдельными ошибками, можно складывать.

14. Определите боковое отклонение Δ_3 точки падения при следующих условиях: полная дальность полета $x_{13}=9266$ км, боковое отклонение начальной точки $\Delta_1=1853$ м.

15. Определите боковые отклонения Δ_3 точки падения, вызванные боковой составляющей начальной скорости $v_{n1}=1,5$ м/сек, при высоте начальной точки $y_1=151\,000$ м и дальностях 5560, 9266, 14 800 и 19 800 км.

16. Определите полные дальности полета при стрельбе на экваторе строго на восток и строго на запад, если начальная скорость относительно Земли $v_1=7100$ м/сек и угол бросания $\theta_1=20^\circ$.

17. Определите координаты истинной точки падения на вращающейся Земле при следующих условиях: координаты стартовой позиции $\varphi_1=28^\circ,5$, $\lambda_1=82^\circ$ з. д.; координаты начальной точки (конца активного участка) $\varphi_1=27^\circ,5$, $\lambda_1=78^\circ$ з. д.; $v_1=7320$ м/сек, $\theta_1=18^\circ$,

$$a_1 = 90^\circ + \arcsin \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_1)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_1)} = 104^\circ,5.$$

18. С искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите с сидерическим периодом обращения 2 час, в направлении, противоположном скорости движения, выбрасывается некоторое тело со скоростью 91,5 м/сек относительно спутника. Будет ли перигей орбиты брошенного тела по отношению к верхней границе атмосферы находиться: а) выше, б) ниже или будет в) касаться? Высоту верхней границы атмосферы принять равной 91 500 м.

19. С космического корабля, движущегося по круговой орбите около Марса на высоте 1853 км, необходимо послать разведывательную капсулу для исследования атмосферы Марса. Определите необходимый импульс скорости, чтобы перигейр невозмущенной орбиты капсулы находился на высоте 18,5 км над поверхностью планеты.

20. Со спутника Земли, движущегося по полярной круговой орбите с сидерическим периодом обращения 1,5 час, необходимо спустить капсулу на поверхность Земли на широте $\varphi=+40^\circ$. Определите величину необходимого импульса скорости, если известно, что он подается автоматически в момент прохождения спутником широты $\varphi=-30^\circ$ и направлен противоположно скорости движения спутника. Сопротивление воздуха не учитывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. von Eberhardt, Einiges ueber die Ballistik grosser Schussweiten (On the Ballistic of Large Ranges), Artilleristische Monatshefte (1928).
2. P. Schroedinger, Die Grenzen der Ballistischen Leistung grosser R-Geraete (The Performance Limits of Large Ballistic Rocket Vehicles), Peenemuende Archive Rep. No. 62/8 (1940).
3. R. Drenick, The Perturbation Calculus in Missile Ballistics, J. Franklin Institute, vol. 251, pp. 423—436 (1951).
4. W. E. Frye, On the Accuracy of the Long Range Ballistic Rockets, J. Appl. Phys., vol. 22, p. 585 (1951).
5. C. D. Baker and J. J. Hart, Maximum Range of a Projectile in a Vacuum, Amer. J. Phys., vol. 23, pp. 253—255 (1955).
6. L. Blitzer and A. D. Wheelon, Maximum Range of a Projectile in Vacuum on a Spherical Earth, Amer. J. Phys., vol. 25, pp. 21—24 (1957).
7. B. D. Fried and J. M. Richardson, Optimum Rocket Trajectories, J. Appl. Phys., vol. 27, pp. 955—961 (1956).
8. B. E. Kalensher, Equations of Motion of a Missile and a Satellite for an Oblate-Spheroidal Rotating Earth, Calif. Inst. Tech., Jet Propulsion Lab., Memo 20-142, 1957.
9. J. W. Reece, R. D. Joseph and D. Shaffer, Ballistic Missile Performance, Jet Propulsion, vol. 26, pp. 251—255 (April 1956).
10. S. F. Singer and R. C. Wentworth, A Method for Calculating Impact Points of Ballistic Rockets, Jet Propulsion, vol. 27, pp. 407—409 (1957).
11. A. J. Kelly, Effect of Thrust Termination Process Upon Range Dispersion of a Ballistic Missile, ARS Journal, vol. 29, No. 6, pp. 432—440 (June 1959).

ГЛАВА 2

ОРБИТЫ СПУТНИКОВ

2.1. Введение

Настоящая глава посвящена обширной теме — орбитам спутников. Под *спутником* будем понимать тело, движущееся в центральном или квазицентральной поле сил, мало отличающемся от центрального поля. При этом орбита спутника, по существу, определяется центральным силовым полем. Все прочие влияния на движение спутника настолько малы, что могут рассматриваться в качестве возмущений.

В § 2.2, посвященном выводу спутника на орбиту, рассмотрены три основных типа вывода (активный участок траектории вывода рассматривается в главе 6), кинематика встречи спутников, возможность достижения космической станции с наземной стартовой позиции в случае непрерывного вывода и в случае прерываемого вывода с использованием промежуточной орбиты ожидания. Рассмотрению некоторых вопросов задачи перехода между различными точками одной и той же орбиты посвящен § 2.3.

В § 2.4 представлен обзор возможных источников возмущений орбит. При этом особо подчеркивается возмущающее влияние нецентральной поля Земли и сопротивления атмосферы. Влияние сжатия притягивающего тела на движение спутника рассмотрено в § 2.5—2.8. Возмущающее влияние Луны и Солнца на орбиту спутника Земли рассмотрено в § 2.9. Анализ возмущающего влияния атмосферы приведен в § 2.10. Обзор прочих малых источников возмущений (часто не учитываемых) дан в § 2.11.

С § 2.12 начинается рассмотрение движения спутника Земли в долунном пространстве, то есть в пространстве между Землей и Луной. На движение спутника в этом пространстве оказывают значительное влияние оба силовых поля. Особый интерес в этом пространстве представляют точки либрации. После

проведенного в § 2.12 анализа основных характеристик периодического движения в окрестности точек либрации в § 2.13 рассмотрена ограниченная задача трех тел, а ее численное решение применительно к системе «Земля — Луна» дано в § 2.14. Вопросы механики полета в долунном пространстве рассмотрены в § 2.15. Характеристики долунных орбит иллюстрируются специальными примерами в § 2.16. Последние два параграфа посвящены вопросам устойчивости орбит относительно одной из конечных масс в ограниченной задаче трех тел. В § 2.17 рассматривается изолированная система трех тел, тогда как § 2.18 посвящен особым земным условиям, связанным с вопросами взаимного влияния двух систем: «Земля — Луна» и «Солнце — Земля».

2.2. Вывод спутника на орбиту

Будем предполагать, что орбитальный летательный аппарат выводится с Земли на орбиту спутника, которая имеет примерно круговую форму. Механика полета орбитальных аппаратов рассматривает различные методы вывода и их влияние на многие параметры, такие, как требуемая энергия, программа тяги, размер ступеней, условия видимости участка вывода с определенных пунктов, продолжительность вывода и др. Однако до тех пор, пока мы ограничены возможностями двигательных установок, главным требованием, предъявляемым к выводу летательного аппарата, будет оставаться требование минимизации энергии. Хотя и не исключено, что иногда важными могут оказаться также и другие требования, определяющие собой соответствующий тип вывода. Естественно, что в подобных случаях дополнительные потери в энергии по сравнению с выводом, удовлетворяющим требованию минимума энергии, должны быть дополнительно оценены при проектировании аппарата и выборе программы тяги.

а) Типы вывода. В настоящем параграфе мы будем рассматривать не активный участок траектории, а импульсный вывод спутника на орбиту в консервативном поле сил. Весь активный участок траектории сводится к точке, в которой прикладывается импульс скорости. Поэтому расходы энергии на преодоление сопротивления воздуха и действия гравитационных сил не будут рассматриваться подробно. Однако качественная оценка соответствующих расходов энергии будет произведена при обсуждении вопроса о полной требуемой энергии вывода и о программе тяги.

Вообще различают три основных типа вывода (рис. 2.1):
полностью активный вывод,
баллистический вывод,

эллиптический вывод (с участком движения по перигейной круговой орбите радиуса, равного перигейному расстоянию переходной орбиты, или без этого участка).

При полностью активном выводе двигательная установка аппарата работает непрерывно. В этом случае имеется лишь один активный участок, параметры движения в конце которого, по крайней мере теоретически, должны совпадать с требуемыми орбитальными параметрами движения спутника. При этом тяга не обязательно должна быть постоянной. Если не рассматривать очень низкие орбиты, расположенные не слишком высоко за пределами земной атмосферы (на высотах порядка 180—360 км), этот тип вывода по сравнению с двумя последующими является менее экономичным. Это объясняется тем, что с увеличением продолжительности активного участка возрастает расход энергии на преодоление гравитационных сил на активном участке. Для указанного же выше случая вывода на низкие орбиты, для которого первый из рассматриваемых типов вывода может приобретать практический смысл, необходимо выбирать оптимальную программу движения носителя, обеспечивающую минимум этого расхода энергии. В частности, оптимальная программа может выбираться из условия получения максимальной высоты круговой орбиты при заданной энергии всего топлива (или при заданной величине идеальной скорости).

Эта задача выходит за рамки настоящего параграфа, и поэтому полностью активный вывод здесь рассматриваться не будет. Этот тип вывода анализируется в главе 6.

При баллистическом выводе используются траектории, подобные траекториям управляемых снарядов больших дальностей. Траектории вывода в этом случае представляют собой дуги эллиптических траекторий в центральном поле Земли. При этом вершина эллиптической траектории должна касаться орбиты, на которую выводится спутник. В вершине траектории

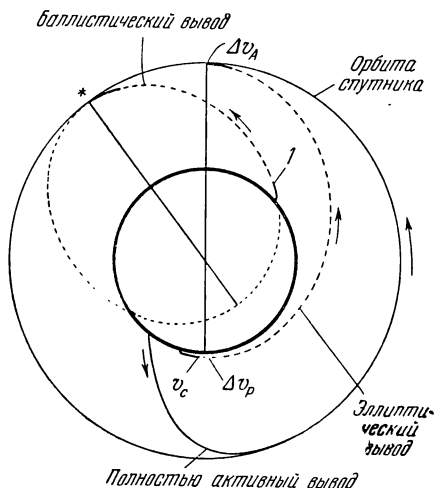


Рис. 2.1. Типы вывода спутника на орбиту.

аппарат разгоняется до требуемой орбитальной скорости (второй активный участок).

При эллиптическом выводе аппарат вначале на сравнительно малой высоте разгоняется до круговой скорости v_c (рис. 2.1). Затем (сразу или спустя некоторое время) аппарат разгоняется (Δv_p) до перигейной скорости переходного эллипса, в апогее которого, касающегося заданной орбиты, аппарат разгоняется (Δv_A) до требуемой орбитальной скорости. Для краткости круговую орбиту высотой, равной перигейному расстоянию переходного эллипса, будем называть *перигейной орбитой*. Символы, указанные на рис. 2.1 для различных точек, будут в дальнейшем использованы в качестве индексов.

Теоретически эллиптический вывод аппарата на заданную орбиту, вообще говоря, требует наименьших затрат энергии. На практике это суждение не всегда оказывается верным [см. ниже п. б)]. Вообще баллистический вывод требует большего расхода энергии, хотя и не очевидно, насколько именно больше потребуются энергии при этом типе вывода. Последнее в большой степени определяется высотой и наклоном вектора скорости к местному горизонту в конце активного участка траектории, которые в свою очередь могут в сильной мере зависеть от требований прямой видимости (при слежении за аппаратом). Но кроме энергетических имеется ряд других соображений, особенно с точки зрения проектирования носителя, говорящих в пользу баллистического вывода. Наконец, баллистический вывод обладает следующими свойствами, способствующими его использованию при решении некоторых задач.

Меньшее время полета. Очевидно, что длина траектории при баллистическом выводе меньше, чем при эллиптическом. Следовательно, и время пассивного полета будет соответственно короче. Вообще говоря, это преимущество может оказаться и не очень значительным, поскольку время полета по переходной эллиптической орбите также не слишком велико. Однако меньшее время полета все же делает более гибким использование этого метода при полетах с Земли на орбитальную станцию.

Прямая видимость во время вывода. Сравнительно более крутая траектория в случае баллистического вывода при определенных условиях позволяет производить радиолокационное или оптическое слежение за аппаратом до самой вершины траектории с пунктов, расположенных на стартовой позиции или вблизи нее. Таким образом, определение действительной траектории и, если потребуется, управление полетом не потребуют специальных пунктов, расположенных вдоль трассы вывода. Это может способствовать значительному увеличению точности вывода искусственных спутников и автоматических станций.

При эллиптическом выводе на низкие орбиты для организации слежения на всем участке вывода возникает необходимость в большом числе измерительных пунктов, расположенных вдоль трассы вывода, так как апогейная точка переходного эллипса по отношению к стартовой позиции находится примерно на противоположной стороне Земли. Однако сеть наземных станций используется и для ведения исследований, связанных с изучением различных процессов в космическом пространстве, и поэтому создание широкой сети измерительных пунктов не следует относить лишь к обеспечению эллиптического вывода. При решении задачи встречи с орбитальной станцией управление сближением лучше производить не с наземных станций, а с самой орбитальной станции. В этом случае эллиптический вывод имеет некоторое преимущество перед баллистическим, так как при эллиптическом выводе относительные параметры движения при сближении меняются медленнее.

Спуск ступеней носителя. Более крутой активный участок траектории при баллистическом выводе, меньшая величина скорости и, следовательно, меньшие размеры ступеней носителя дают ряд преимуществ с точки зрения спуска и спасения ступеней носителя. Дальности полета отработавших ступеней носителя оказываются короче. Поэтому в случае использования тормозных парашютов операции по спасению ступеней упрощаются. Раскрытие парашютов для торможения отработавших ступеней носителя может быть произведено еще до достижения соответствующей ступенью вершины траектории. При этом выбор точки траектории, соответствующей моменту раскрытия парашюта, определяют, исходя из наилучшего удовлетворения как требованиям торможения, так и требованиям максимально возможного уменьшения нагрева парашюта. Условия работы тормозного парашюта по мере продолжения подъема ступени улучшаются, поскольку уменьшается скорость движения ступени, увеличивается высота и уменьшается плотность воздуха. Эффективность действия тормозных парашютов оказывается достаточной для предупреждения чрезмерного увеличения скорости ступени на нисходящей ветви траектории. Чтобы обеспечить спасение последней ступени носителя (которая, если не принять специальных мер, будет сопровождать спутник до вершины траектории вывода), можно отделить последнюю ступень от спутника несколько раньше расчетной точки I конца активного участка траектории вывода, а необходимую добавочную скорость получить за счет двигательной установки самого спутника. После достижения необходимой скорости двигательная установка спутника выключается и включается второй раз в районе

вершины траектории для разгона аппарата до необходимой орбитальной скорости. Естественно, что это вызовет определенные конструктивные усложнения, поскольку возникает необходимость в обеспечении повторного запуска двигателя. К тому же, если требуемая добавочная скорость в районе вершины траектории окажется большой, то указанный метод приведет к увеличению и без того больших размеров космического аппарата. При эллиптическом выводе спасение ступеней, в особенности второй ступени, осложняется из-за больших скоростей полета ступеней, что, вероятно, приведет к практической неприемлемости использования тормозных парашютов.

б) Энергетические требования. С точки зрения механики полета различие рассмотренных трех типов вывода заключается в различном энергетическом уровне перигейных орбит и, следовательно, в различном уровне орбитальных энергий. Если пренебречь сопротивлением атмосферы и предположить, что период работы двигательной установки бесконечно мал, то оптимальное расстояние перигейной орбиты от центра Земли будет равно радиусу Земли. При этом кинетическая энергия, соответствующая требуемой перигейной скорости, приобретает без потерь на преодоление силы притяжения и сопротивления атмосферы на активном участке траектории и используется для вывода аппарата в апогей переходной орбиты. В этом смысле эллиптический вывод идентичен выводу с минимальным расходом энергии. Отступлением от вывода с минимальным расходом энергии являются случаи, когда перигейная орбита либо поднята над поверхностью Земли, либо (теоретически) опущена вниз, «внутрь» Земли.

В первом случае разность высот перигейной орбиты и орбиты спутника уменьшается, но возникает необходимость в первоначальном подъеме аппарата на большую высоту, что связано с дополнительной затратой энергии на подъем топлива. При этом (в случае практически осуществимого отношения тяги к весу аппарата) дополнительный расход энергии превысит ожидаемую ее экономию за счет меньшей разницы в высотах перигейной орбиты и орбиты спутника. В предельном случае, доведя высоту перигейной орбиты до высоты орбиты спутника, получим первый тип вывода — полностью активный вывод. При этом перигейная орбита совпадает с орбитой спутника и расход энергии на поднятие топлива становится максимальным. На практике, вследствие конечной продолжительности работы двигателей на активном участке, наличия сопротивления атмосферы и требований управления и контроля полета, приходится поднимать перигейную орбиту за пределы атмосферы на умеренные высоты (90—150 км).

Уменьшение (теоретическое) высоты перигейной орбиты, при котором ее высота становится отрицательной, ведет к баллистическому типу вывода. При этом все больше увеличивается разница между уровнями энергий перигейной орбиты и орбиты спутника и уровень энергии баллистической траектории вывода оказывается меньшим, чем у переходной эллиптической орбиты¹⁾. При эллиптическом выводе вся энергия, необходимая для осуществления перехода из перигейной точки в апогейную, используется самым эффективным образом: она целиком используется на создание горизонтальной (нормальной к радиусу-вектору) составляющей скорости Δv_P , которая представляет собой разность между требуемым значением перигейной скорости v_P и величиной местной круговой скорости v_c на перигейной орбите, так что $v_P = v_c + \Delta v_P$. При смещении перигейной орбиты ниже поверхности Земли конец активного участка не может совпадать с перигейной точкой. При этом энергия на переход от конца активного участка до орбиты спутника в увеличивающейся степени будет расходоваться на создание вертикальной (радиальной) составляющей скорости, в то время как горизонтальная составляющая скорости станет уменьшаться. Чем круче баллистическая траектория вывода при заданной высоте орбиты спутника и, в меньшей степени, чем больше высота вывода при заданном угле бросания, тем больше должна быть радиальная составляющая скорости. Это соответственно уменьшает ту часть полной кинетической энергии в конце активного участка траектории, которая приходится на создание горизонтальной составляющей скорости.

Не следует смешивать природу потерь кинетической энергии на создание радиальной составляющей скорости при движении по баллистической траектории вывода с природой потерь энергии на преодоление сопротивления воздуха и силы притяжения на активном участке траектории, когда энергия расходуется безвозвратно. Потеря кинетической энергии на создание радиальной составляющей скорости полностью восстанавливается при свободном падении тела до уровня высоты конца активного участка, поскольку это возвратное движение происходит в потенциальном поле только под действием консервативной силы. В рассматриваемом случае речь идет о потере энергии на создание радиальной составляющей скорости, потому что горизонтальная составляющая, которая одна только и нужна для обеспечения круговой орбиты спутника, при наличии радиальной составляющей не оказывается максимальной в момент выключе-

¹⁾ Это утверждение подробно поясняется автором несколько ниже. (Прим. ред.)

чения двигательной установки. Более крутые траектории активного участка при баллистическом выводе вносят дополнительные потери энергии на преодоление силы притяжения. То обстоятельство, что при этом будут уменьшаться потери энергии на преодоление силы сопротивления воздуха, не дает значительной компенсации. Для больших ракет с небольшими отношениями начальной тяги к стартовому весу (в пределах $1,2 \div 1,5$) потери энергии на преодоление силы сопротивления воздуха составляют лишь около 10% от потерь энергии на преодоление силы притяжения. Более важным преимуществом баллистического типа вывода является меньшая по сравнению с эллиптическим выводом величина скорости v_1 в конце активного участка, требующая меньшей продолжительности активного участка и соответственно меньшего расхода энергии на преодоление силы притяжения.

Баллистический вывод с небольшими углами бросания (то есть с малыми величинами радиальной составляющей скорости) по сравнению с выводом с минимальным расходом энергии вызывает только незначительное увеличение требуемой энергии. К тому же последствия использования траектории вывода с несколько большей крутизной, как уже было отмечено выше, компенсируются (и в некоторых случаях даже с избытком) сокращением времени работы двигателей и уменьшением расхода энергии на преодоление силы сопротивления воздуха. С другой стороны, практическое применение эллиптического вывода требует, как подчеркивалось ранее, достаточно высоких перигейных орбит. Поэтому для не слишком высоких орбит баллистический вывод на них оказывается с точки зрения расхода энергии равноценным эллиптическому выводу (а в действительности даже более выгодным). Точная граница высот, начиная с которых более выгодным оказывается эллиптический вывод, зависит от аэродинамической компоновки и программы тяги конкретного носителя. Однако диапазон высот орбит, для которых баллистический тип вывода оказывается более выгодным, сравнительно невелик. Для часто рассматриваемых высот орбит порядка $900 \div 1800$ км более выгодным оказывается эллиптический вывод. Поэтому применение баллистического вывода существенно ограничено и он применяется либо при необходимости вывода спутника с научным оборудованием на малые высоты, либо при необходимости удовлетворения требованию прямой видимости или удовлетворения иным специальным требованиям (например, быстрота подъема спасательного аппарата на борт пилотируемого космического корабля), либо вообще в случаях, когда вопросы минимизации энергии не играют главной роли.

Из соотношения¹⁾ (1.4.32) можно получить выражение для начальной скорости v_1 траектории баллистического вывода

$$v_1 = \sqrt{K \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)},$$

которое с использованием зависимости (1.24) приводится к виду

$$v_1 = \sqrt{K \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1+e}{r^*} \right)}. \quad (2.1)$$

Величину скорости v^* в вершине траектории можно определить из соотношения (1.16). Разделив соотношение (1.16) на зависимость (2.1), получим отношение величины скорости v^* в вершине траектории к величине начальной скорости v_1 :

$$\frac{v^*}{v_1} = \left[\frac{v_1^2 - \frac{K}{r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r^*} \right)}{K \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1-e}{r^*} \right)} \right]^{1/2}. \quad (2.2)$$

Это же отношение можно выразить через величины r_1/r^* и θ_1 , если использовать соотношение (1.14):

$$\frac{v^*}{v_1} = \frac{r_1}{r^*} \cos \theta_1 = \frac{r_1/r^*}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}}. \quad (2.3)$$

Для сравнения запишем выражение этого отношения для ТМЭ, введенной в § 1.3. В этом случае выражения (2.2) и (2.3) приобретают вид

$$\left(\frac{v^*}{v_1} \right)_{\text{ТМЭ}} = \left[\frac{v_1^2 - \frac{K}{r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r^*} \right)}{K \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1 - \sqrt{1 - v_1^2}}{r^*} \right)} \right]^{1/2}, \quad (2.3a)$$

$$\left(\frac{v^*}{v_1} \right)_{\text{ТМЭ}} = \frac{r_1/r^*}{\sqrt{2 - v_1^2}}. \quad (2.3b)$$

Требуемая величина приращения скорости в вершине траектории для перехода на круговую орбиту, касающуюся вершины баллистической траектории, определяется как

$$\Delta v^* = v_c^* - v^*, \quad (2.4)$$

где v_c^* — величина круговой скорости в вершине траектории. Относительное радиальное расстояние r^*/r_1 до вершины

¹⁾ См. «Космический полет», т. I. В дальнейшем ссылки на формулы первого тома даются аналогичным образом. (Прим. ред.)

траектории в зависимости от величин v_1 , θ_1 и e получим из соотношения (1.17):

$$\frac{r^*}{r_1} = \frac{v_1^2}{(1-e)(1+\operatorname{tg}^2 \theta_1)} = \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{1-e} \quad (2.5a)$$

и

$$\left(\frac{r^*}{r_1}\right)_{\text{ТМЭ}} = \frac{v_1^2}{(1-\sqrt{1-v_1^2})(2-v_1^2)}. \quad (2.5b)$$

Это же отношение может быть выражено через половину угловой дальности:

$$\frac{r^*}{r_1} = \left[(1-e)\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \delta}\right)\right]^{-1}. \quad (2.6a)$$

Из уравнения (1.11) можно получить:

$$e = \left(\cos \delta + \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \delta}\right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Для ТМЭ будем иметь:

$$\left(\frac{r^*}{r_1}\right)_{\text{ТМЭ}} = \left[\frac{1}{\sin \delta_{\max}} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \delta_{\max}}\right)\right]^{-1}, \quad (2.6b)$$

где $\delta_{\max}$ — половина угловой дальности ТМЭ [см. соотношения (1.30)].

В отличие от произвольно выбранной эллиптической траектории, для ТМЭ существует однозначная зависимость между начальной скоростью и высотой траектории. Поэтому ТМЭ не может обеспечить вывод на любую высоту. Из анализа общих характеристик этого типа траекторий следует, что малые высоты траекторий соответствуют либо малым величинам начальных скоростей, либо очень большим величинам начальных скоростей ($v_1 \rightarrow 1$), при этом влияние атмосферы не учитывается. Следовательно, в этом диапазоне существует величина начальной скорости, обеспечивающая максимальную высоту траектории, а следовательно, и максимальную высоту орбиты, достигаемую при баллистическом выводе с использованием ТМЭ. Дифференцируя соотношение (2.5b) по v_1^2 , получаем:

$$\frac{d(r^*/r_1)}{dv_1^2} = \frac{(1-\sqrt{1-v_1^2})(2-v_1^2) - \frac{v_1^2}{1-v_1^2} \left(2-v_1^2 - \sqrt{1-v_1^2} \frac{1}{2} v_1^2\right)}{(1-\sqrt{1-v_1^2})^2 (2-v_1^2)^2}. \quad (2.8)$$

Приравнявая нулю числитель последнего выражения, найдем условие экстремума. Это условие после преобразований

запишется в виде следующего уравнения:

$$v_1^4 - 2v_1^2 - 4\sqrt{1 - v_1^2} - 4 = 0.$$

Физически интересным корнем этого уравнения является корень

$$v_1^2 = 0,82884, \quad v_1 = 0,91038.$$

При этом значении v_1

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\max} = 1,2074,$$

то есть максимальная высота ТМЭ составляет примерно 1260 км и зависит от высоты начальной точки.

Энергия, необходимая при баллистическом выводе, пропорциональна сумме начальной скорости v_1 и приращения скорости Δv^* в вершине траектории (если пренебречь потерями энергии во время работы двигателей в районе вершины траектории, что допустимо при создании двигателями больших ускорений). Сумма этих скоростей называется *баллистической скоростью*:

$$v_{\text{ball}} = v_1 + \Delta v^*.$$

На основании равенства (1.31b), которое является просто модификацией уравнения Кеплера, можно записать выражение для времени полета от начальной точки до вершины траектории в следующем виде:

$$\Delta t_{1r^*} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \left[\pi + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r_1}{a} \sin \delta_1 - \arccos \left(\frac{a-r_1}{ae} \right) \right]. \quad (2.9a)$$

Подставляя сюда значение $a = r^*/(1+e)$ и переходя к относительному радиальному расстоянию r^*/r_1 до вершины траектории, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_{1r^*}}{r_1^{3/2}} = \frac{r^*/r_1}{1+e} \sqrt{\frac{r^*/r_1}{K(1+e)}} \left[\pi + \frac{r_1}{r^*} e \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \delta_1 - \right. \\ \left. - \arccos \frac{1-(1+e)r_1/r^*}{e} \right]. \quad (2.9b) \end{aligned}$$

Используя соотношение $r^*/r_1 = v_1^2 \cos^2 \theta_1 / (1-e)$, запишем выражения для определения времени полета для общего случая

баллистического вывода и случая вывода с использованием ТМЭ в такой общей форме:

$$\frac{\Delta t_{1r*}}{r_1^{3/2}} = \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{1 - e^2} \sqrt{\frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{K(1 - e^2)}} \times \\ \times \left[\pi + \frac{e \sqrt{1 - e^2}}{v_1^2 \cos^2 \theta_1} \sin \delta_1 - \arccos \left(\frac{1 - \frac{1 - e^2}{v_1^2 \cos^2 \theta_1}}{e} \right) \right], \quad (2.9c)$$

$$\frac{(\Delta t_{1r*})_{\text{ТМЭ}}}{r_1^{3/2}} = \frac{1}{(2 - v_1^2) \sqrt{K(2 - v_1^2)}} \times \\ \times \left[\pi + \frac{(2 - v_1^2) \sqrt{1 - v_1^2}}{v_1} \sin \delta_{\max} - \arccos \left(\frac{v_1^2 - 1}{\sqrt{1 - v_1^2}} \right) \right] \quad (2.9d)$$

с вспомогательными зависимостями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{v_1^2 \operatorname{tg} \theta_1}{1 - v_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1} = x, \\ \sin \delta &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ \cos \delta &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ e &= \frac{1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1}{\cos \delta}, \\ \operatorname{tg} \delta_{\max} &= \frac{v_1^2}{2 \sqrt{1 - v_1^2}}. \end{aligned}$$

В таблице 2.1 приведены вспомогательные данные для вычисления времени полета. Графики времени полета до вершины траектории приведены на рис. 2.8.

Если пренебречь потерями энергии на активном участке траектории, то можно считать, что минимальная энергия при эллиптическом выводе обеспечивается при $r_A/r_P \leq 11,94$ [см. формулу (3.50)]. Полная энергия космического летательного аппарата после вывода на орбиту представляет собой сумму кинетической энергии и разности потенциальных энергий на высоте орбиты и на поверхности Земли. Эквивалентная этой полной энергии скорость представляет собой минимально необходимую скорость для вывода аппарата с поверхности Земли

на заданную орбиту. Эта энергетическая скорость определяется следующим соотношением:

$$v_E = \sqrt{\frac{K}{r_s} \left(1 + \frac{2y^*}{r_{00}}\right)} = v_c \sqrt{1 + \frac{2y^*}{r_{00}}}. \quad (2.10)$$

Разность между v_{ball} и v_E называется *баллистическим эксцессом* и обозначается через Δv_{ball} .

Т а б л и ц а 2.1

Вспомогательные данные для расчета времени полета

Высота y_1 начальной точки, морские мили	Радиальное расстояние r_1 до начальной точки, морские мили	$r_1^{3/2}$, (морские мили) ^{3/2}	Высота y_1 начальной точки, морские мили	Радиальное расстояние r_1 до начальной точки, морские мили	$r_1^{3/2}$, (морские мили) ^{3/2}
0	3440	201 761,2	60	3500	207 062,8
10	3450	202 641,6	70	3510	207 950,8
20	3460	203 525,3	80	3520	208 840,1
30	3470	204 406,3	90	3530	209 730,7
40	3480	205 290,5	100	3540	210 622,6
50	3490	206 176,0			

На рис. 2.2 приведены графики изменений величин v_c , v_E и v_{ball} для вывода с использованием ТМЭ. Соответствующий график изменения величины баллистического эксцесса приведен на рис. 2.3. Можно заметить, что баллистический эксцесс достигает максимума при $v_1/v_c \approx 0,55$. При этом высота ТМЭ составляет примерно 504 км (280 морских миль), а величина баллистического эксцесса равна 665 м/сек (2180 фут/сек). Такое увеличение Δv_{ball} при уже достаточно большом значении v_E является причиной ощутимого увеличения стартового веса многоступенчатого носителя.

Хотя при больших скоростях баллистический эксцесс уменьшается, величина v_{ball} остается примерно постоянной в диапазоне $0,6 < v_1/v_c < 0,9$. Вследствие этого требуемая начальная скорость быстро уменьшается с приближением условий вывода к условиям эллиптического вывода. Однако при дальнейшем увеличении отношения v_1/v_c ($v_1/v_c > 0,91$) высота также быстро уменьшается. При значениях v_1/v_c , меньших 0,5, величина v_{ball} все еще достаточно большая, примерно $8,25 \div 8,85$ км/сек (27 000 ÷ 29 000 фут/сек), что объясняется возрастанием величины Δv^* , которая (при достаточно малых значениях скорости) превосходит v_1 . При этом большая часть топлива должна быть поднята на большую высоту, чем при эллиптическом выводе.

Следовательно, размеры носителя должны быть соответственно большими и он должен состоять из нескольких ступеней. Однако эти случаи не имеют большого практического значения.

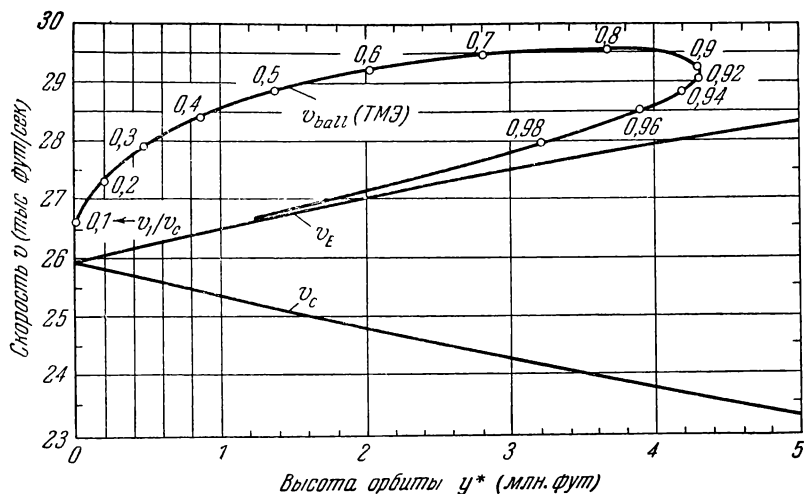


Рис. 2.2. Скорости, необходимые при эллиптическом выводе и при баллистическом выводе по ТМЭ.

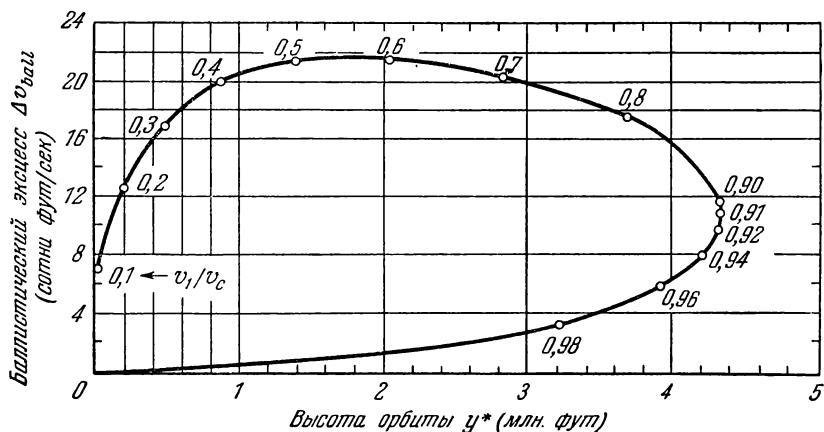


Рис. 2.3. Баллистический эксцесс при выводе по ТМЭ.

На рис. 2.4 представлены сводные графики требуемых скоростей для эллиптического вывода (случай минимальной требуе-

мой энергии) и баллистического вывода, включая вывод с использованием ТМЭ. В правой части рисунка приведен вспомогательный график для перехода от относительного радиального

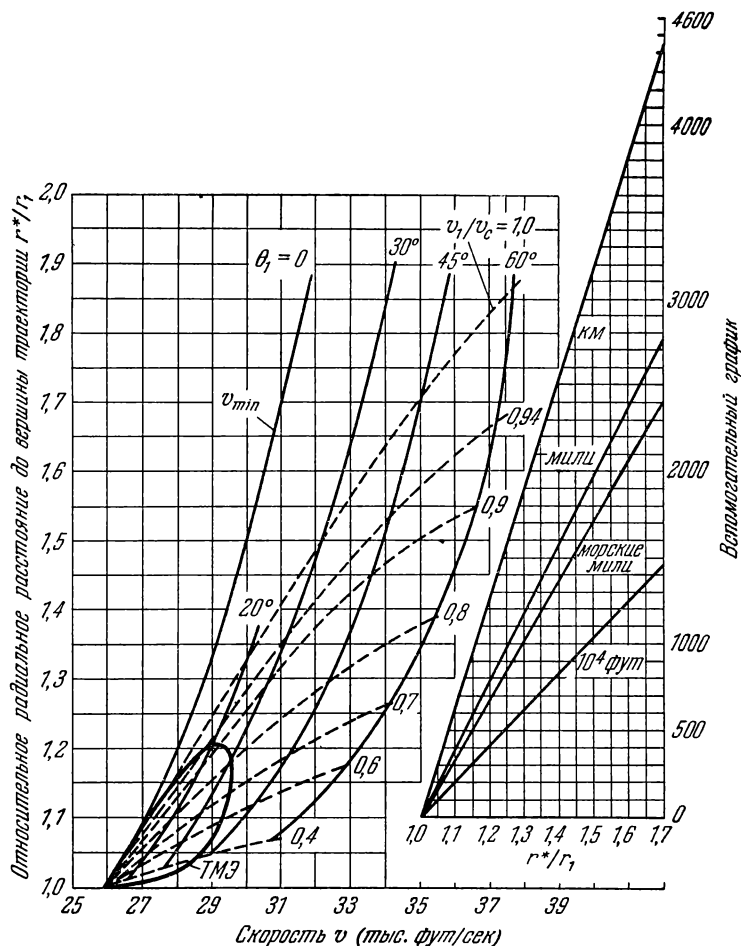


Рис. 2.4. Сводные графики скоростей, требуемых при эллиптическом и баллистическом выводах.

расстояния r^*/r_1 к высоте орбиты y^* (отсчитываемой от поверхности Земли) в различных единицах. При заданной величине радиального расстояния r^*/r_1 увеличение угла бросания вызывает сильное увеличение требуемой начальной скорости. Срав-

нительно меньшее влияние на увеличение скорости оказывает увеличение высоты орбиты при постоянном угле бросания. Пунктирные линии, соответствующие постоянным значениям отношения v_1/v_c , показывают, какую величину от круговой скорости необходимо обеспечить в начальной точке I . Энергетические требования при выводе с использованием ТМЭ сравнительно велики и соответствуют энергетическим требованиям баллистического вывода при углах бросания между 30° и 45° . Это показывает, что при баллистическом выводе ТМЭ в энергетическом отношении не занимает такого особого положения, которое она занимает в семействе баллистических траекторий больших дальностей. Это вполне понятно, так как оптимизация траектории баллистического вывода достигается минимизацией величины не начальной скорости, а величины радиальной составляющей начальной скорости.

в) Программа тяги и размеры ступеней. Анализ полной требуемой энергии вывода не дает картины в целом. Пунктирные линии, соответствующие постоянным значениям отношения v_1/v_c (рис. 2.4), позволяют быстро оценивать величину переходной скорости Δv^* . Эти линии также показывают значительное влияние уменьшения высоты на увеличение Δv^* .

Более подробный анализ этой тенденции иллюстрируется графиками, представленными на рис. 2.5. С уменьшением высоты при заданном угле бросания θ_1 величина Δv^* увеличивается. При этом более резкое увеличение Δv^* происходит в области малых высот. Другим очень важным обстоятельством с точки зрения проектирования является не сам факт увеличения суммы скоростей v_1 и Δv^* при увеличении угла бросания, а большее увеличение Δv^* по сравнению с v_1 . Большое увеличение Δv^* приводит к увеличению веса и размеров ступеней космического аппарата и к необходимости подъема большого количества топлива на высоту заданной орбиты. Если сравнить значения Δv^* , взятые с графиков на рис. 2.5, с величинами Δv_A при эллиптическом выводе, то станет очевидным большее влияние увеличения Δv^* по сравнению с увеличением общей суммы скоростей v_1 и Δv^* на размеры и количество ступеней и требуемые тяги. Например, из рис. 2.4 видно, что при $r^*/r_1 = 1,1$ и $\theta_1 = 10^\circ$ величина скорости v_{ball} лишь на 90 м/сек (300 фут/сек) превышает v_E , и даже этой разницы, вероятно, не будет, если сравнивать баллистический вывод с выводом по практическим эллиптическим орбитам. Однако графики, приведенные на рис. 2.5, показывают, что в рассматриваемом примере величина Δv^* достигает 760 м/сек (2500 фут/сек), тогда как Δv_A составляет всего лишь около 150 м/сек (500 фут/сек). Таким образом, между эллиптическим выводом и баллистическим выводом при

$\theta_1 = 10^\circ$ имеется более глубокое различие, чем можно было бы судить лишь по величине баллистического эксцесса.

Учет указанной особенности, естественно, производится в зависимости от конкретных условий при проектировании. Однако

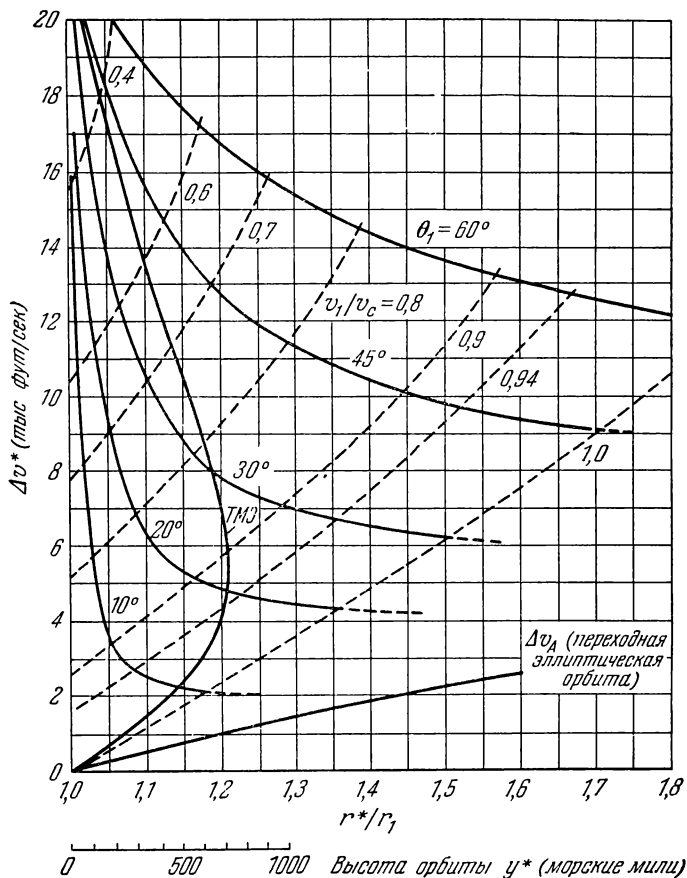


Рис. 2.5. Разность между орбитальной скоростью и скоростью в вершине траектории вывода.

ясно, что для уменьшения веса ступеней большие выгоды сулит эллиптический вывод, даже если при этом будет не очень большой энергетический выигрыш или его вовсе не будет. Уменьшение веса последней ступени играет важную роль, в особенности для пилотируемых планирующих космических аппаратов, так

как оно облегчает решение аэротермодинамических проблем, возникающих при спуске аппарата в атмосфере.

г) **Прямая видимость.** На рис. 2.6 приведены графики, показывающие изменение величины r^*/r_1 при баллистическом

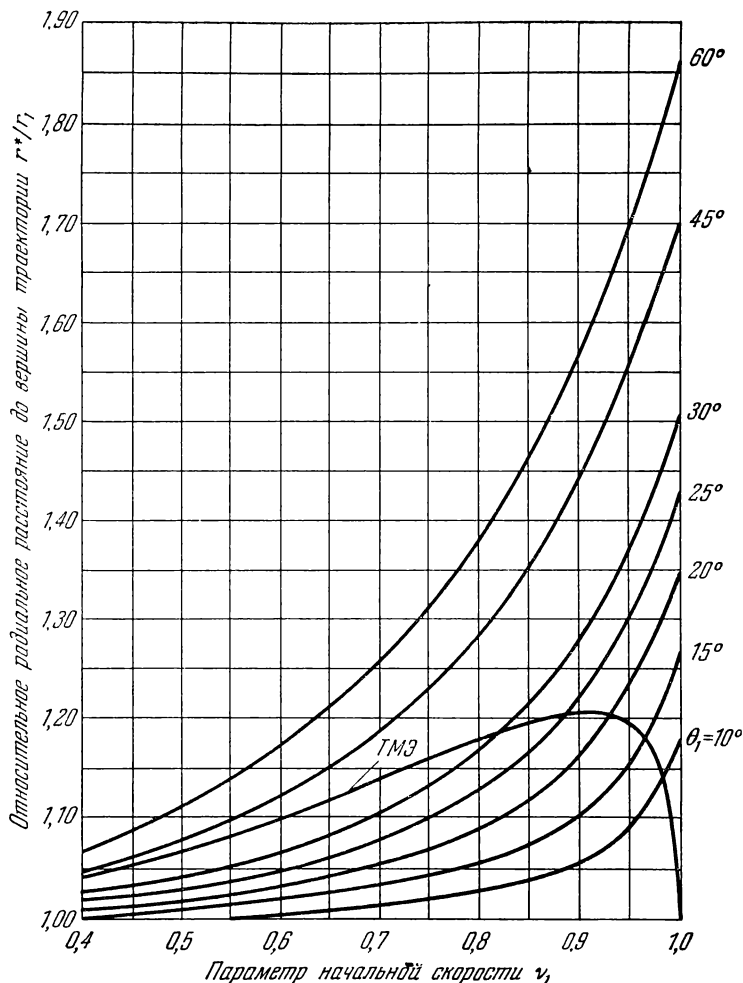


Рис. 2.6. Зависимость высоты траектории от начальной скорости.

выводе на различные орбиты в зависимости от параметра начальной скорости. На рис. 2.7 показано изменение величины r^*/r_1 в зависимости от половины угловой дальности δ_1 траекто-

рии баллистического вывода. Там же приведены две кривые r/r_1 , представляющие собой предельные расстояния видимости точек траектории (на радиальных расстояниях r) с начальной точки 1 при заданных углах возвышения $\beta=10^\circ$ и $\beta=0$, измеряемых вверх от горизонта начальной точки. Случай $\beta=0$ соответствует

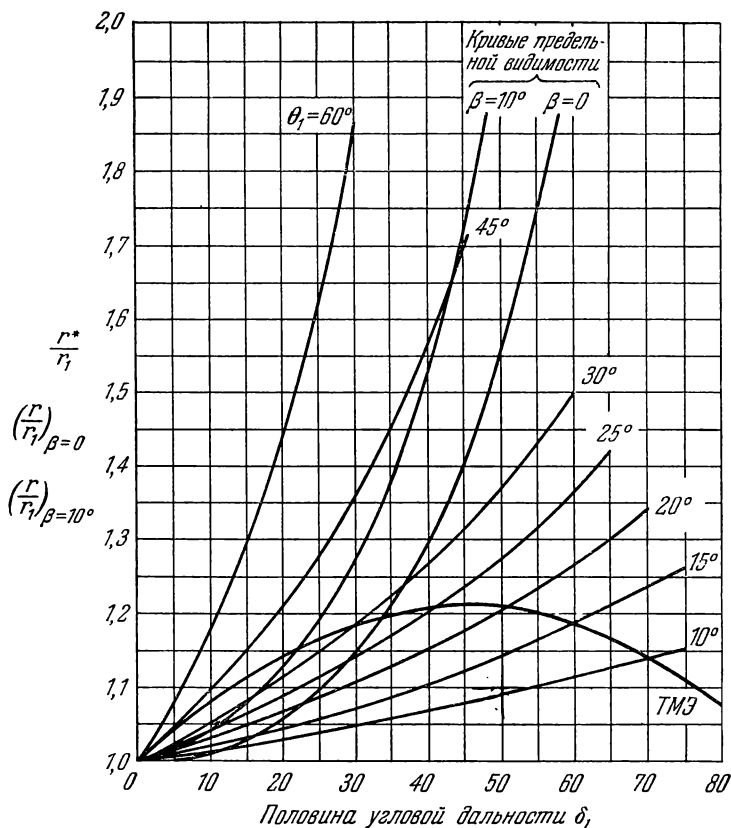


Рис. 2.7. Прямая видимость при баллистическом выводе.

максимальным дальностям прямой видимости точек траектории в предположении, что слежение (оптическое или радиолокационное) за космическим аппаратом возможно до пересечения им линии горизонта. Радиальная дальность r (от центра Земли) и угловая дальность δ_1 при заданном угле возвышения связаны зависимостью

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)_\beta = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + \delta_1)}, \quad (2.11a)$$

которая при $\beta=0$ (максимальная дальность прямой видимости) обращается в равенство

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\beta=0} = \frac{1}{\cos \delta_1}. \quad (2.11b)$$

Приведенные на рис. 2.7 две кривые предельной видимости пересекают семейство кривых *высота — угловая дальность* в различных точках. Все точки, находящиеся справа от заданной кривой предельной видимости, не могут наблюдаться (при заданном угле возвышения) из точки, расположенной на земной поверхности под начальной точкой I . В частности, можно видеть, что для орбиты с относительным радиальным расстоянием около $1,1r_{00}$, представляющей интерес для пилотируемых космических аппаратов, при $\beta=10^\circ$ для обеспечения прямой видимости до вершины траектории вывода угол бросания по меньшей мере должен быть равен 32° ($\delta_1=17^\circ$, и из рис. 2.6 $v_1 \approx 0,7$). При $\beta=0$ минимальный угол бросания при всех остальных прежних условиях уменьшается до 22° ($\delta_1=30^\circ$, $v_1 \approx 0,8$). Так как в действительных условиях угол возвышения линии визирования космического аппарата в вершине траектории должен отличаться от нуля (хотя бы на $5 \div 10^\circ$), то требование прямой видимости траектории вывода из точек, расположенных вблизи стартовой позиции, приводит к чрезмерно большим углам бросания. Поэтому в большинстве случаев приходится отказываться от организации слежения только из района стартовой позиции и переходить на слежение с пунктов, расположенных вдоль трассы вывода.

д) Продолжительность вывода. Результаты расчетов времени вывода в зависимости от параметра начальной скорости представлены в виде графиков на рис. 2.8. На рис. 2.9 представлены графики времени вывода в зависимости от относительного расстояния r^*/r_{00} . Как следует из графиков, время баллистического вывода гораздо меньше по сравнению с временем эллиптического вывода. Однако вследствие того, что время эллиптического вывода сравнительно невелико, уменьшение времени баллистического вывода не будет играть существенной роли при обычных полетных заданиях. Количество же случаев, при которых уменьшение времени вывода будет служить достаточным основанием, чтобы отдать предпочтение баллистическому типу вывода, будет не таким уж большим.

е) Анализ ошибок. Дифференцируя соотношение (2.5а) по v_1^2 , получаем:

$$\frac{\partial \left(\frac{r^*}{r_1}\right)}{\partial v_1^2} = \frac{\cos^2 \theta_1}{1-e} + \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{(1-e)^2} \frac{\partial e}{\partial v_1^2}, \quad (2.12a)$$

а из соотношения (1.17) с использованием равенства $q_1 = v_1^2 \cos^2 \theta_1$ находим:

$$\frac{\partial e}{\partial v_1^2} = \frac{(v_1^2 - 1) \cos^2 \theta_1}{e}, \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial v_1} = 2 \frac{v_1^2}{v_1} \frac{\partial e}{\partial v_1^2}. \quad (2.13b)$$

Влияние ошибки в начальной скорости на отклонение величины r^*/r_1 будем характеризовать фактором ошибки начальной скорости:

$$v_1 \frac{\partial \left(\frac{r^*}{r_1} \right)}{\partial v_1} = 2v_1^2 \frac{\partial \left(\frac{r^*}{r_1} \right)}{\partial v_1^2} = \frac{2v_1^2 \cos^2 \theta_1}{1-e} \left[1 - \frac{v_1^2 (1 - v_1^2) \cos^2 \theta_1}{e(1-e)} \right]. \quad (2.12b)$$

Аналогичным образом получим выражение для фактора ошибки начального угла бросания, характеризующего влияние ошибки в угле бросания на отклонение величины r^*/r_1 :

$$\frac{\partial \left(\frac{r^*}{r_1} \right)}{\partial \theta_1} = \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{(1-e)^2} \frac{\partial e}{\partial \theta_1} - \frac{2v_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1}{1-e}, \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{v_1^2 \sin 2\theta_1 (2 - v_1^2)}{2e}, \quad (2.13c)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{r^*}{r_1} \right)}{\partial \theta_1} = \frac{v_1^2 \sin 2\theta_1}{1-e} \left[\frac{v_1^2 (2 - v_1^2) \cos^2 \theta_1}{2e(1-e)} - 1 \right]. \quad (2.14b)$$

Дифференцируя соотношение (2.3), получаем:

$$v_1 \frac{\partial \left(\frac{v^*}{v_1} \right)}{\partial v_1} = \frac{2v_1^2 \cos^3 \theta_1}{\left(\frac{r^*}{r_1} \right)^2 (1-e)} \left[\frac{v_1^2 (1 - v_1^2) \cos^2 \theta_1}{e(1-e)} - 1 \right], \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{v^*}{v_1} \right)}{\partial \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{r^*/r_1} \left(1 - \frac{2 - v_1^2}{e} \frac{r^*}{r_1} \right). \quad (2.15b)$$

Из соотношения (2.13a) следует, что при $v_1 < 1$ отклонение начальной скорости в большую сторону приводит к уменьшению эксцентриситета. Это объясняется тем, что в этом случае начальная точка располагается ближе к апогейной точке эллиптической траектории, чем к перигейной точке. При $v_1 = 1$ (и $\theta_1 > 0$) начальная точка является точкой пересечения малой полуоси с эллипсом (эксцентрисическая аномалия $E = 90^\circ$; см.

главу 4 тома I). При $v_1 > 1$ начальная точка оказывается ближе к перигею, и в этом случае увеличение начальной скорости приводит к увеличению эксцентриситета. Частная производная

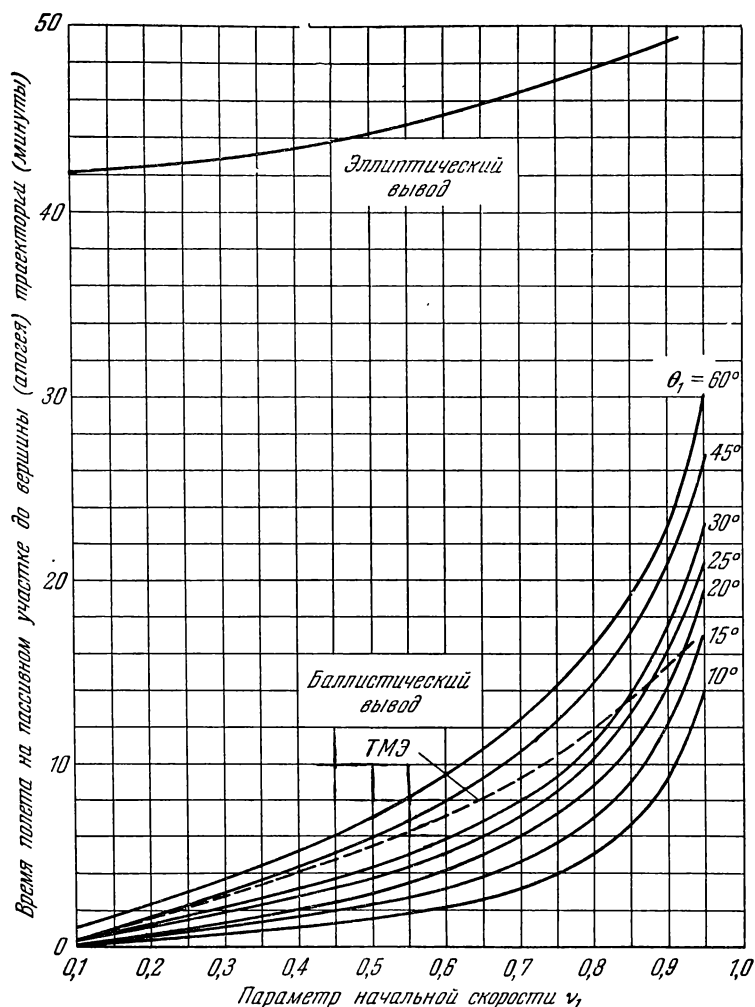


Рис. 2.8. Время полета на пассивном участке до вершины траектории в зависимости от параметра начальной скорости.

$\partial(r^*/r_1)/\partial v_1$ положительна [см. выражение (2.12b)], так как увеличение v_1 всегда приводит к увеличению r^* . Рассматривая кривые, приведенные на рис. 2.6, можно сделать вывод, что с уве-

личением углов бросания касательной к этим кривым образуют большие углы с осью абсцисс, а это в свою очередь

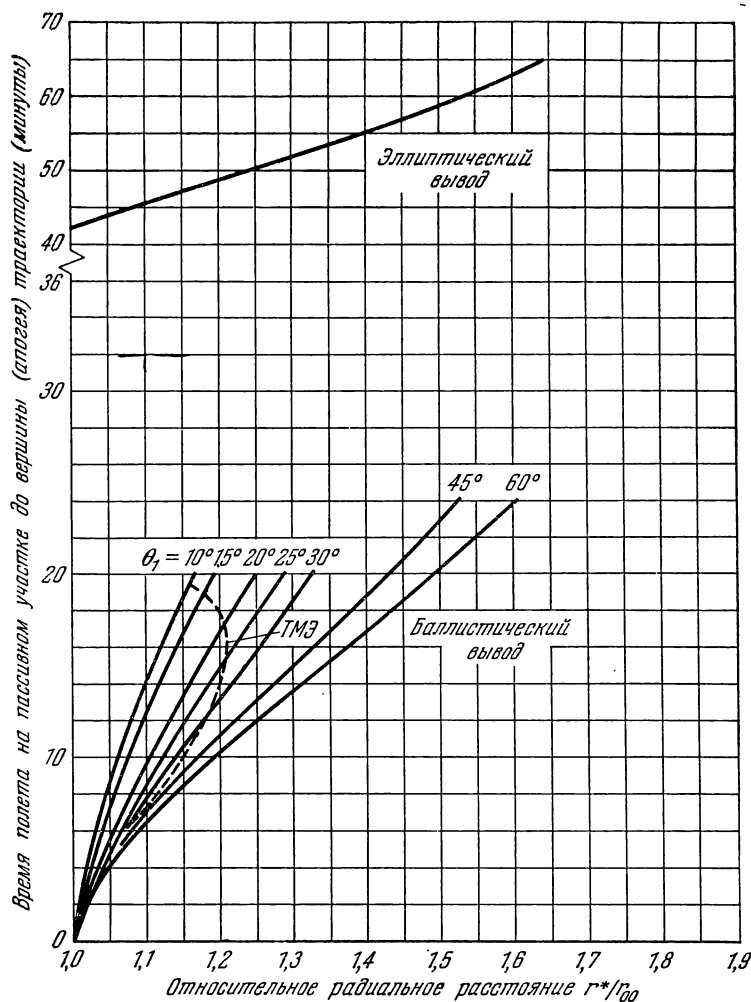


Рис. 2.9. Время полета на пассивном участке до вершины траектории в зависимости от относительного радиального расстояния до вершины траектории r^*/r_{00} .

свидетельствует о большей чувствительности величины r^*/r_1 к ошибкам в начальной скорости при больших углах бросания, особенно при $v_1 < 0,95$.

Выражение (2.14b) показывает, что с увеличением эксцентриситета баллистической траектории вывода, то есть при увеличении угла бросания или при увеличении начальной скорости, когда $v_1 > 1$, возрастает чувствительность относительного радиального расстояния до вершины траектории к ошибкам в угле бросания. Чувствительность относительного радиального расстояния до вершины траектории к ошибкам в угле бросания возрастает с увеличением начальной скорости. Это можно заметить по характеру кривых, приведенных на рис. 2.6. Действительно, с увеличением начальной скорости расстояние по вертикали между соседними кривыми, соответствующими определенным углам бросания, увеличивается.

Из выражения (2.15a) следует, что чувствительность величины скорости в вершине траектории вывода к ошибкам в начальной скорости резко уменьшается при увеличении угла бросания (пропорционально $\cos^5 \theta_1$) и увеличении высоты вывода [пропорционально $1/(r^*/r_1)^2$]. Эта закономерность подтверждается характером кривых семейства графиков, изображенных на рис. 2.5. При малых величинах θ_1 и r^*/r_1 кривые круто поднимаются вверх, становясь более пологими при больших значениях каждой из величин θ_1 и r^*/r_1 или при одновременно больших значениях их обеих. Что касается чувствительности величины скорости в вершине траектории к ошибкам в угле бросания [см. выражение (2.15b)], то она уменьшается с увеличением отношения r^*/r_1 и, в меньшей степени, — с увеличением θ_1 . Эта закономерность также подтверждается характером кривых, приведенных на рис. 2.5. При увеличении отношения r^*/r_1 и увеличении угла θ_1 расстояние по вертикали между соседними кривыми, соответствующими разным углам бросания, уменьшается.

Таким образом, чувствительность относительного радиального расстояния до вершины траектории по сравнению с чувствительностью величины скорости в вершине траектории к ошибкам в величине начальной скорости и в угле бросания обладает противоположной закономерностью. При возрастании величин θ_1 и v_1 (а следовательно, и величины r^*/r_1) чувствительность *относительного радиального расстояния до вершины траектории* к ошибкам в начальной точке увеличивается, тогда как чувствительность *величины скорости в вершине траектории* в этом случае уменьшается.

Изменение относительного радиального расстояния до вершины траектории с учетом одновременного влияния ошибок в величинах начальной скорости и угла бросания, считая ошибки достаточно малыми [см. выражение (1.63)], можно выразить

таким приближенным равенством:

$$d\left(\frac{r^*}{r_1}\right) \approx \frac{\partial\left(\frac{r^*}{r_1}\right)}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial\left(\frac{r^*}{r_1}\right)}{\partial \theta_1} d\theta_1. \quad (2.16)$$

Аналогичное выражение можно получить и для изменения величины скорости в вершине траектории:

$$d\left(\frac{v^*}{v_1}\right) \approx \frac{\partial\left(\frac{v^*}{v_1}\right)}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial\left(\frac{v^*}{v_1}\right)}{\partial \theta_1} d\theta_1. \quad (2.17)$$

ж) Кинематика встречи спутников. Плоскость, в которой в результате суточного вращения Земли происходит движение любой стартовой позиции, не расположенной на экваторе, не может совпадать с плоскостью орбиты спутника, так как последняя плоскость проходит через центр Земли. Поэтому использование компланарной схемы вывода космического аппарата с поверхности Земли для встречи со спутником резко ограничено. Если угол i наклона орбиты больше широты φ_L стартовой позиции или, более строго, больше широты φ_1 начальной точки (конечной точки активного участка траектории при старте с Земли или при орбитальном старте с промежуточной орбиты), то начальная точка будет дважды в сутки пересекать плоскость орбиты спутника. При каждом пересечении начальной точкой плоскости орбиты спутника и при выполнении соответствующих начальных условий можно осуществить совмещение плоскости траектории баллистического вывода (переходной орбиты) с плоскостью орбиты спутника. При этом положение спутника на орбите в момент времени, соответствующий положению космического аппарата в начальной точке, должно обеспечить последующую встречу аппарата со спутником в точке касания переходной орбиты аппарата с орбитой спутника. В случае вывода аппарата по касательной эллиптической орбите, переходная дуга которой равна 180° , координаты точки касания должны быть равны: $\varphi = -\varphi_1$ и $\lambda = 180^\circ + \lambda_1$, где λ — абсолютная долгота точки касания без учета вращения Земли. В случае вывода космического аппарата по баллистической траектории проекция вершины траектории на поверхность Земли должна иметь координаты $\varphi > -\varphi_1$ и $\lambda < 180^\circ + \lambda_1$, зависящие от продолжительности баллистического вывода. Этот случай изображен на рис. 2.10. Линия 1—3 является линией узлов в плоскости широты φ_1 . Если начальная точка совпадает с точкой 1 или 3, то космический аппарат оказывается в плоскости орбиты спутника. Предположим, что начальной точкой траектории баллистического вывода является точка 1 и вершина траектории касается орбиты спутника

где-то между точками 2 и 3. При этом величина половины угловой дальности траектории баллистического вывода будет находиться в пределах между δ_{12} и δ_{13} . Чем меньше значение половины баллистической угловой дальности, тем выше энергетические требования к выводу (см. рис. 2.5 и 2.4), но при этом шире диапазон баллистических траекторий, пригодных для вывода космического аппарата на орбиту. С другой стороны, если

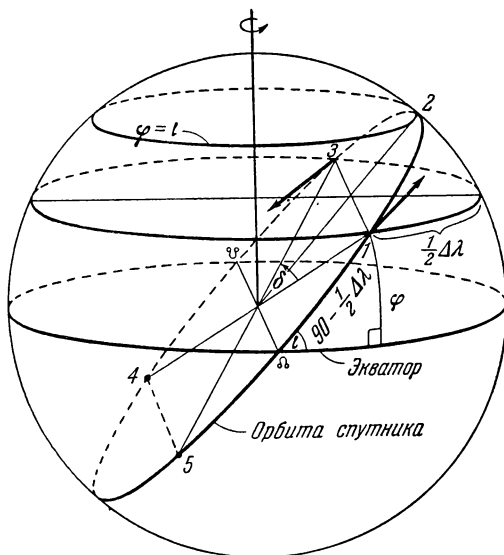


Рис. 2.10. Условия перехода на орбитальную станцию на неэкваториальной орбите.

угловая дальность δ_{13} слишком мала, то аппарат может быть выведен на орбиту, например, по траектории баллистического вывода между точками 1 и 3 или по переходной эллиптической орбите между точками 1 и 4. Такие же возможности существуют и для случая, когда начальная точка совпадает с точкой 3 при условии, что спутник занимает соответствующее положение на своей орбите. Чем больше дальность траектории вывода, тем чаще можно ожидать, что взаимное расположение космического аппарата и спутника окажется приемлемым для их последующей встречи. При $\iota = \varphi_1$ существует только одна точка (точка 2), с которой возможен компланарный переход аппарата на орбиту спутника. При определенных условиях (см. ниже) возможность достижимости спутника при этом может уменьшиться вдвое.

В случае, когда $\varphi_1 < i$, вывод космического аппарата на орбиту спутника не может быть осуществлен без азимутального маневра. Поэтому аппараты класса «Земля — орбита» всегда могут запускаться с той же стартовой позиции, что и спутник, с которым предполагается осуществить встречу на орбите, так как для них $\varphi_1 \leq i$. Однако если по каким-либо причинам стартовая позиция, с которой был запущен спутник, окажется непригодной для последующего пуска аппарата, предназначенного для встречи со спутником, а в наличии имеется лишь стартовая позиция, для которой $\varphi_1 > i$, то осуществление компланарного вывода невозможно. Из этого следует, что использование Атлантического полигона ($\varphi_L = 28^\circ, 5$) для вывода на экваториальные орбиты и орбиты с малыми наклонениями вызывает серьезные трудности. *Экваториальные стартовые позиции (например, на островах Тихого океана), если они к тому же обладают широким диапазоном азимутов пуска, позволяют производить вывод и на экваториальные орбиты и на орбиты с любыми наклонениями.*

Таким образом, возможность достижимости экваториальных орбит и орбит с малыми наклонениями при $\varphi_L > i$ будет зависеть от наличия других стартовых позиций в районе экватора. *При невозможности размещения стартовых позиций на экваторе или вблизи экватора энергетические требования для осуществления встречи со спутником резко возрастают.* В этом случае потребуются большие азимутальные маневры космического аппарата в процессе вывода. Необходимость в большом азимутальном маневре аппарата вызывается малой высотой орбиты спутника и, следовательно, большой величиной орбитальной скорости аппарата (см. § 3.2 и рис. 3.6).

Рассмотрим для примера сравнительно более выгодный с энергетической точки зрения при этих условиях вывод по переходной эллиптической орбите с малой высотой в перигее, равной 185 км, и высотой в апогее (в точке касания с заданной круговой орбитой), равной 637 км. При этом $r^*/r_1 = 1,1$. Из рис. 2.5 следует, что импульсное приращение скорости Δv_A , необходимое в апогее для перехода на круговую орбиту, при *компланарном переходе* составляет примерно 150 м/сек (500 фут/сек). Круговая скорость v_c на высоте 637 км равна примерно 7550 м/сек, скорость v_A в апогее переходной эллиптической орбиты составит, следовательно, 7400 м/сек, то есть отношение v_c/v_A должно быть равно 1,02. Допустим теперь, что плоскость переходной эллиптической орбиты по отношению к плоскости заданной орбиты спутника наклонена на 5° . Поскольку оптимальной (с энергетической точки зрения) точкой приложения импульса скорости для поворота плоскости орбиты является апогейная точка, то в точке поворота плоскости отношение скоростей примем

равным 1,02. Из графиков (рис. 3.4) можно сделать вывод, что рассматриваемому случаю ($\alpha=5^\circ$ и $v''/v'=v_c/v_A=1,02$) соответствует отношение $(\Delta v_A)_\alpha/v' = \frac{(\Delta v_A)_\alpha}{v_A} = 0,094$. Отсюда $(\Delta v_A)_\alpha = 0,094 \cdot 7400 = 685$ м/сек, что в четыре с лишним раза больше величины $\Delta v_A = 150$ м/сек для компланарного перехода. Если иметь в виду вывод на экваториальные орбиты с Атлантического полигона, расположенного в штате Флорида ($\varphi_L = 28^\circ,5$), то отношение $(\Delta v_A)_\alpha/v_A$ составит 0,49, а $(\Delta v)_\alpha \approx 3660$ м/сек. Эти примеры показывают, что при выводе на экваториальные орбиты вынужденное использование стартовой позиции, для которой $\varphi_L > \iota$ (вследствие невозможности использования стартовой позиции в районе экватора), приводит к значительному уменьшению веса полезного груза, выводимого на орбиту, или вообще к невозможности вывода. Последнее обстоятельство может служить веским аргументом против использования экваториальной стартовой позиции в качестве единственной позиции для обеспечения космических полетов пилотируемых аппаратов. Однако это справедливо, если говорить об одной стартовой позиции в строгом смысле слова. Наоборот, приведенные выше рассуждения являются сильным доводом в пользу создания хорошо оборудованных экваториальных стартовых комплексов (состоящих по крайней мере из трех стартовых площадок) или создания хорошо оборудованных стартовых комплексов в районе возможно малых широт, чтобы обеспечить малые углы наклона орбит. В последнем случае можно пойти на создание плавучих стартовых комплексов в Тихом или Атлантическом океане либо на создание стартовых комплексов на Малых Антильских островах. Следует отметить, что неблагоприятное влияние неравенства $\varphi_1 > \iota$ на требуемую энергию вывода уменьшается с увеличением высоты орбиты спутника. Например, для вывода космического аппарата с Атлантического полигона с начальным наклоном плоскости переходной орбиты $\iota = 30^\circ$ на 24-часовую экваториальную орбиту требуемое приращение скорости в апогее переходной орбиты составит 1860 м/сек, а при компланарном переходе — 1650 м/сек.

Хотя при $\iota > \varphi_1$ начальная точка дважды в течение суток пересекает плоскость орбиты спутника, приемлемой может быть лишь одна точка пересечения вследствие ограничений, вызванных взаимным расположением начальной точки и спутника в момент пересечения. Чтобы можно было использовать обе точки пересечения при полностью активном выводе, должно быть выполнено условие кратности промежутка времени, необходимого для перемещения стартовой позиции на широте φ_L в суточном движении из одной точки пересечения в другую, звездному (си-

дерическому) периоду обращения спутника, исправленному на прецессию плоскости орбиты. Например, предположим, пренебрегая прецессией плоскости орбиты, что $T_{\text{sid}}=1,55$ час. Тогда расстояние по долготе между двумя точками пересечения должно быть $\Delta\lambda=1,55; 3,1; 4,65; 6,2; 7,75; 9,3$ или $10,85$ час (то есть $\Delta\lambda=23^\circ,25; 46^\circ,5; 69^\circ,75; 93^\circ; 116^\circ,25; 139^\circ,5; 162^\circ,75$). Для данной стартовой позиции или данной проекции начальной точки на поверхность Земли каждое из этих значений соответствует определенному наклонению плоскости орбиты, увеличивающемуся с увеличением расстояния по долготе между двумя точками пересечения. Случай $\Delta\lambda=0$ соответствует $\iota=\varphi_1$, случай $\Delta\lambda=180^\circ$ соответствует $\iota=90^\circ$, исключая случай $\varphi_1=0$, при котором только одно дуговое расстояние 180° (12 час) является возможным для любого наклонения орбиты. В рассмотренном выше примере конечная точка интервала $\Delta\lambda=180^\circ$ не является кратной точкой (так как $24/T_{\text{sid}}$ не является целым делителем 24 час). Поэтому условие кратности может быть не выполнено при запуске с единственной экваториальной стартовой позиции. С этой точки зрения экваториальная стартовая позиция обладает ограниченной гибкостью при ее использовании. Необходимо помнить об этой особенности экваториальных стартовых позиций, хотя, пожалуй, это и не является серьезным недостатком, если иметь в виду возможность применения вывода с прерываемым активным участком. Этот тип вывода будет рассмотрен ниже. Стартовые позиции на любой другой широте φ_L обладают большей гибкостью. Из рис. 2.10 можно установить зависимость между φ_L , $\Delta\lambda$ и ι :

$$\sin \iota = \frac{\sin \varphi_L}{\cos \frac{1}{2} \Delta\lambda}. \quad (2.18a)$$

Например, если для стартовой позиции, расположенной на Атлантическом полигоне ($\varphi_L \approx 28^\circ,5$), расстояние по долготе $\Delta\lambda$ между двумя точками пересечения с плоскостью орбиты, для которой $T_{\text{sid}}=1,55$ час, составит $3,1$ час $=46^\circ,5$, то подсчет даст $\sin \iota = 0,4772/0,91875$, или $\iota \approx 31^\circ,33$.

Графики (рис. 2.7) показывают, что при выводе космического аппарата по баллистической траектории с угловой дальностью до вершины траектории $\delta_{1,*}=30^\circ$ на круговые орбиты высотой $556 \text{ км} \leq y \leq 640 \text{ км}$ ($1,08 \leq r^*/r_1 \leq 1,1$) угол бросания θ_1 может быть уменьшен до 20° . При этом, как следует из графика (рис. 2.6), соответствующее значение параметра начальной скорости v_1 будет равно $0,825$, что для высоты начальной точки $y_1=185 \text{ км}$ соответствует начальной скорости $v_1 \approx 7800 \cdot 0,825 \approx 6640 \text{ м/сек}$. Апогейный импульс для перехода на круговую

орбиту в рассматриваемом случае составит $\Delta v_A \approx 1900$ м/сек (6250 фут/сек). Таким образом, рассмотренный нами вывод по баллистической траектории требует чрезмерных энергетических затрат. С дальнейшим уменьшением угловой дальности до вершины траектории энергетические требования при баллистическом типе вывода резко увеличиваются. Для достаточно мощного носителя, способного вывести необходимый полезный груз на круговую орбиту высотой около 556 км по более крутой (по сравнению с баллистической) траектории полностью активного участка (полностью активный вывод), угловая дальность до точки перехода на рассматриваемую орбиту может быть уменьшена до 15° . Таким образом, угловую дальность до точки перехода на орбиту можно назначать в достаточно широких пределах. Это обстоятельство сильно увеличивает возможность осуществления орбитальной встречи с космической станцией.

Во всяком случае, имеется целый ряд точек (λ_i, φ_i) , пригодных для перехода на орбиту космической станции. В таблице 2.2 приведены значения синодических периодов между последовательными прохождением спутника над данной точкой поверхности Земли при оговоренных в таблице условиях. Из таблицы 2.2 следует, что синодический период экваториальной орбиты для экваториальной стартовой позиции (столбцы 3 и 6, строки f и g) много меньше синодического периода для наклоненной орбиты. Следовательно, условия осуществления встречи с космической станцией на экваториальной орбите много благоприятнее, чем с космической станцией на наклоненной орбите. Отмеченная значительная разница в периодах и является главной причиной, вызывающей трудности при осуществлении встречи в случае запуска с неэкваториальной стартовой позиции с космическим аппаратом на неэкваториальной орбите. При этом возникает целый ряд трудностей, связанных с влиянием начальных ошибок на траекторию вывода, с жесткими ограничениями на время пуска и энергетическими требованиями. Столбцы 1 и 2 определяют период орбиты, а следовательно, ее высоту. Столбцы 3—5 определяют координаты проекции начальной точки на поверхность и условия пуска (азимут). Столбец 3 относится к случаю плоского движения, когда $\varphi_1 = \varphi = 0$. Для 24-часовой орбиты и угловой дальности 180° между начальной точкой и точкой перехода на орбиту соблюдение указанного условия приводит к постоянному покрытию переходной точкой точки, противоположной начальной точке в инерциальном пространстве (то есть переходная точка все время проектируется в точку, противоположную начальной точке в инерциальном пространстве). При этом продолжительность перехода составляет примерно 5,3 час. Следовательно, по отношению к вращающейся Земле проекция пе-

реходной точки удалена по долготе от начальной точки на $\Delta\lambda = 180^\circ - 5,3 \cdot 15^\circ \approx 80^\circ$.

Кратные точки определяются как точки на поверхности Земли, находящиеся на круге широт $-\iota \leq \varphi \leq +\iota$ и отстоящие друг от друга на постоянных по долготе $\Delta\lambda$ расстояниях, значения которых, будучи выражены в единицах времени, являются целым делителем 24 час. Поэтому кратные точки существуют лишь при условии, что отношение $24/T_{\text{sid}}$ является целым делителем 24 час (без учета прецессии орбиты; учет влияния прецессии орбиты будет рассмотрен ниже). Например, для неэкваториальной орбиты с $T_{\text{sid}} = 12$ час данный круг широт (исключая $\varphi = \iota$) дважды пересекается плоскостью орбиты. При этом спутник проходит над каждой точкой *пересечения* через 12 час. Поэтому каждая точка пересечения имеет две *кратные точки*, отстоящие по долготе на $\Delta\lambda_{\text{res}} = 12 \text{ час} = 180^\circ$. Следовательно, каждый круг широт $\varphi < \iota$ имеет четыре кратные точки: две серии по две точки с расстоянием по долготе между точками одной серии 12 час. При $\varphi = 0$ четыре кратные точки удалены друг от друга на одинаковые расстояния $90^\circ = 6 \text{ час}$. С приближением φ к $\pm \iota$ взаимное расположение одной пары точек по отношению к другой паре точек становится все более несимметричным. При $\varphi = \iota$ обе пары точек сливаются в одну пару и остается лишь одна пара кратных точек, отстоящих по долготе на 12 час. Поэтому временной интервал между двумя парами точек составляет $\Delta\lambda_0 = 12 \text{ час}$ при $\varphi = 0$ и $\Delta\lambda_0 = 0$ при $\varphi = \iota$. Для промежуточных значений угла наклона временной интервал для невращающейся Земли может быть найден из соотношения (2.18a):

$$\cos \frac{1}{2} \Delta\lambda = \frac{\sin \varphi}{\sin \iota}. \quad (2.18b)$$

Например, если по последней формуле получится результат $\frac{1}{2} \Delta\lambda = 15^\circ$, то это означает, что расстояние по долготе между парами точек составляет $30^\circ = 2 \text{ час}$, так что если вести отсчет времени после очередного прохождения спутником широты φ , то временные интервалы соответственно составят 0, 2, 12 и 14 час, что отвечает следующим координатам проекции спутника: (φ, λ) , $(\varphi, \lambda + 30^\circ)$, $(\varphi, \lambda + 180^\circ)$ и $(\varphi, \lambda + 210^\circ)$. Для заданной широты φ только эти точки определяют точки прохождения спутника. В случае неэкваториальной орбиты с 8-часовым периодом обращения имеются три серии кратных точек по три точки в каждой серии. При $\varphi = 0$ расстояние по долготе между сериями составляет 120° . При этом расстояние по долготе между каждыми кратными точками равно 40° . Таким образом, в общем случае количество кратных точек может быть определено как

Периоды между двумя зенитными прохождением спутника над

	Характер орбиты		Начальные точки и условия пуска		
	1	2	3	4	5
a	$n_{\text{sid}},$ <i>об/сут</i>	$T_{\text{sid}},$ <i>час</i>	$\lambda_1, \varphi_1 = 0$ $\iota = 0$	$\lambda_1, \varphi_1 = \iota$ $\iota > 0$	$\lambda_1, \varphi_1 < \iota$ $\iota > 0$
b			$T_{\text{syn}},$ <i>час</i> или <i>сут</i>	$T_{\text{syn}},$ <i>час</i> или <i>сут</i>	$T_{\text{syn}},$ <i>час</i> или <i>сут</i>
c	1	24	нет покрытия при непрерыв- ном выводе	—	—
d	1	24	—	нет покрытия при непрерыв- ном выводе	—
e	1	24	—	—	нет покры- тия при не- прерывном выводе
f	целое число > 1	$< 24; T_{\text{sid}}$ есть целый делитель 24 <i>час</i>	$\frac{360^\circ}{\eta_c - \omega}$ [<i>час</i>] или $\frac{24}{n_{\text{sid}} - 1}$ [<i>час</i>]	24 <i>час</i>	24 <i>час</i>
g	рацио- нальное, но не целое число > 1	$< 24; T_{\text{sid}}$ есть целый делитель 24 <i>час</i>	как [f/3]	$\frac{360^\circ}{\varepsilon}$ [<i>сут</i>] или $\frac{1}{\Delta/24}$ [<i>сут</i>], $\varepsilon = \omega \Delta$ [град/сут], $\Delta = (24 - \sigma T_{\text{sid}})$ [час/сут]	как [g/4]
h	иррацио- нальное число > 1	$< 24; \frac{T_{\text{sid}}}{24}$ не есть целый дели- тель 24 <i>час</i>	как [f/3]	∞	∞

Основные допущения

Орбиты круговые; Земля сферическая (прецессия орбиты отсутствует); непрерываемый вывод «Земля — орбита» (то есть без промежуточной орбиты ожидания, см. текст); ε — избыток над суточным кратным, равным 360° ; Δ — дробная часть от деления 24 *час* на звездный период; σ — любое ближайшее целое число оборотов в сутках.

Синодический период — время между двумя последовательными прохождением спутника над данной точкой поверхности (λ, φ).

Начальная точка — точка конца активного участка (начало свободного полета).

Таблица 2.2

данной точкой поверхности (λ , φ) (плоский синодический период)

Точки перехода на орбиту		Произвольные точки поверхности		Кратные (резонансные) точки	
6	7	8	9	10	11
λ_i, φ_i $\iota = 0$	λ_i, φ_i $\iota > 0$	$\lambda \neq \lambda_i$ $\varphi = 0$	$\lambda \neq \lambda_i$ $-\iota \leq \varphi \leq +\iota$ $\varphi \neq 0$	λ_{res} φ_{res}	$\Delta\lambda_{\text{res}}, \varphi_{\text{res}}$ <i>град</i>
T_{syn} , час или сут	T_{syn} , час или сут				
непрерывное покрытие	нет покрытия	нет покрытия	нет покрытия	не существуют	
—	24 час	нет покрытия	нет покрытия	24 час; $\varphi_{\text{res}} = 0$; 12 час	$0 \leq \Delta\lambda \leq \iota$, $-\iota \leq \varphi \leq +\iota$
—	24 час, $\varphi_i = 0$; 12 час	нет покрытия	нет покрытия	24 час; $\varphi_{\text{res}} = 0$; 12 час	$0 \leq \Delta\lambda \leq \iota$, $-\iota \leq \varphi \leq +\iota$
как [f/3]	24 час	24 час	24 час	24 час	$\frac{360}{n_{\text{sid}}^2} (\varphi \neq \iota)$, $\frac{360}{n_{\text{sid}}} (\varphi = \iota)$, $-\iota \leq \varphi \leq +\iota$
как [g/4]	как [g/4]	как [g/4]	как [g/4]	не существуют	
∞	∞	∞	∞	не существуют	

Точка перехода на орбиту — точка, соответствующая переходу на орбиту цели (точка встречи).

Кратные точки — см. текст.

Покрытие — здесь употребляется для обозначения прохождения спутника над данной точкой (λ , φ).

Условия пуска: [a/3] — пуск с экватора строго на восток, [a/4] — неэкваториальный пуск строго на восток, [a/5] — неэкваториальный или экваториальный пуск в произвольном направлении. [Числитель указывает строку таблицы, а знаменатель — столбец. (Прим. ред.)]

$\left(\frac{24}{T_{\text{sid}}}\right)^2 = n_{\text{sid}}^2$, а количество *серий* (пар, троек, четверок и т. д.) — как $24/T_{\text{sid}} = n_{\text{sid}}$. Друг от друга точки каждой серии находятся на одинаковом расстоянии по долготе: $24/n_{\text{sid}}$ в часах или $360/n_{\text{sid}}$ в градусах. Расстояние по долготе между сериями точек одинаково и равно $\Delta\lambda_0 = 24/n_{\text{sid}}$ или $\Delta\lambda_0 = 360/n_{\text{sid}}$ лишь в случае $\varphi = 0$, когда точки всех серий удалены друг от друга по долготе на расстояние $(24/n_{\text{sid}})^2$ или $(360/n_{\text{sid}})^2$. При $\varphi \geq 0$ (но $\varphi \neq \pm$) симметричность распределения кратных точек нарушается и расстояние по долготе между ними определяется по выражению (2.18b). При этом $\Delta\lambda > \Delta\lambda_0$. При $\varphi = \pm$ все серии точек сливаются в одну серию с числом кратных точек n_{sid} , удаленных друг от друга по долготе на расстояние $24/n_{\text{sid}}$ в часах или $360/n_{\text{sid}}$ в градусах. Условием наличия кратных точек является наклон плоскости орбиты к плоскости экватора ($\pm \neq 0$) и равенство n_{sid} целому числу (то есть T_{sid} является целым делителем 24 час). Особые условия существуют для 24-часовой неэкваториальной орбиты, трасса которой на поверхности Земли представляет собой фигуру восьмерки. При этом точка пересечения линии, образующей фигуру восьмерки, приходится на экватор. Поэтому эта точка на экваторе является точкой прохождения спутника с интервалом в 12 час. Любая другая точка трассы (восьмерки) проходится спутником с интервалом в 24 час.

Если T_{sid} не является целым делителем 24 час, то кратные точки отсутствуют. Если T_{sid} является целым делителем или кратным 24 час, то данная точка земной поверхности будет проходить спутником через интервалы времени, определяемые либо по выражению [f/3] таблицы 2.2, либо по выражению [g/4]. Наконец, если $24/T_{\text{sid}}$ является иррациональным числом (например, $1/\sqrt{3}$), то точек, над которыми спутник прошел бы (строго над ними) дважды, не будет, хотя иногда и будут случаи прохождения спутником, позволяющие с практической точностью считать их за вторичное прохождение через ту же точку.

з) Вывод космического аппарата на орбиту и орбитальная встреча без учета влияния прецессии плоскости орбиты. Предыдущее обсуждение было посвящено вопросам установления связей между стартовой позицией (или начальной точкой) и орбитой спутника для экваториального плоского случая и неплоского случая с наклонениями орбит, большими или меньшими широты стартовой позиции. Обозначим через φ_L широту стартовой позиции, через φ_1 — широту начальной точки. Начало переходной орбиты будем обозначать буквой D , точку встречи — буквой T . Орбитальные параметры движения спутника, с которым предстоит встреча, будем снабжать индексом «s». В таблице 2.3 даны три основных метода вывода. Для обозначения

параметров движения и различных участков при совершении маневра и в процессе свободного полета использованы буквенные индексы. В частности, η_α , η_π , η_δ , η_τ и η_ω представляют собой центральные углы, относящиеся к соответствующим участкам.

Таблица 2.3

Определение различных методов вывода

Метод	Описание метода	Первый маневр	Конечная скорость	Первая фаза пассивного полета	Второй маневр	Конечная скорость	Вторая фаза пассивного полета	Третий маневр	Конечная скорость
Полностью активный вывод	Вывод аппарата со стартовой позиции на орбиту производится одним непрерывным маневром	α	v_{sT}						
Непрерываемый вывод (включает баллистический и эллиптический выводы как частные случаи)	Вывод со стартовой позиции в начальную точку переходной орбиты, свободный полет по переходной орбите и переход на орбиту спутника	α	v_D	τ	ω	$v_{s, T}$			
Прерываемый вывод	Полностью активный вывод на орбиту ожидания, свободный полет по орбите ожидания, старт на переходную орбиту, свободный полет по переходной орбите и переход на орбиту цели	α	v_π	π	δ	v_D	τ	ω	v_s

На рис. 2.11 изображены три основных типа вывода. Рис. 2.11, а относится к простейшему случаю — выводу с экваториальной стартовой позиции на экваториальную орбиту.

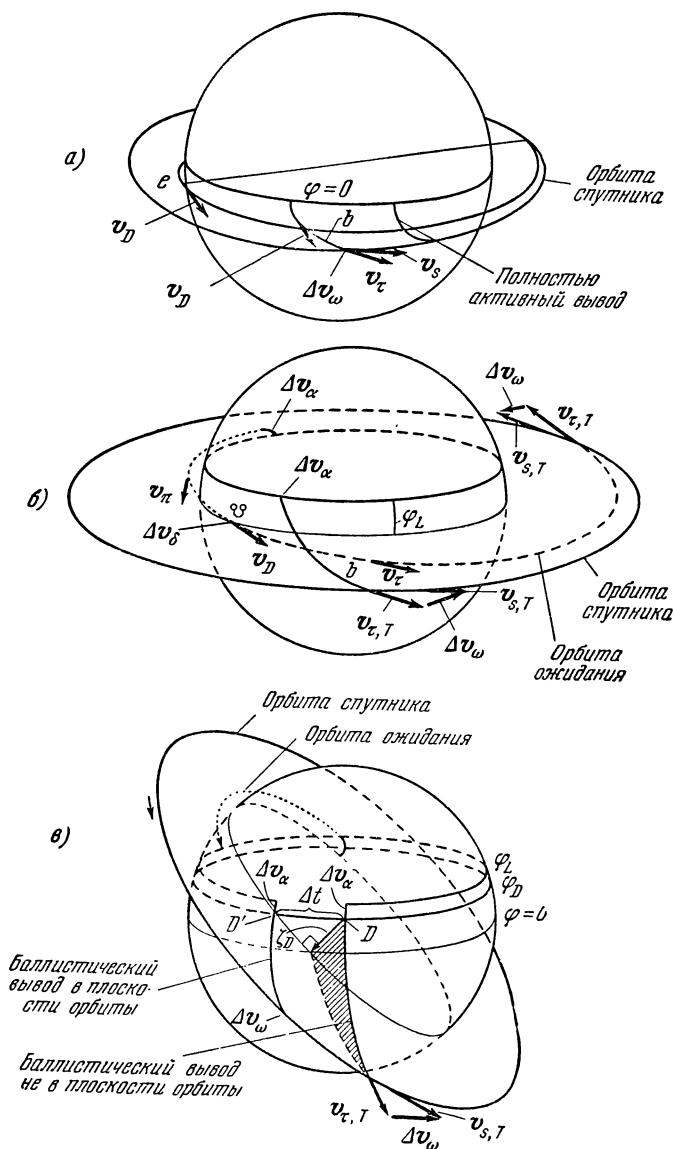


Рис. 2.11. Типы вывода спутника на орбиту.

а) Вывод спутника с экваториальной стартовой позиции на экваториальную орбиту (ϵ — вывод по переходной эллиптической орбите; b — баллистический вывод); б) вывод с экваториальной стартовой позиции при $\varphi_L > \varphi_s$; в) вывод с неэкваториальной стартовой позиции при $\varphi_L < \varphi_s$.

Рис. 2.11, б иллюстрирует вывод со стартовой позиции, для которой широта φ_L превосходит наклонение орбиты (в рассматриваемом примере $i_s = 0$). При этом условии плоский переход принципиально невозможен. Кроме полностью активного вывода (который не рассматривается в настоящей главе) могут быть осуществлены еще три типа вывода: эллиптический с $\eta_T < 180^\circ$, баллистический и прерываемый. Последние два типа вывода приведены на рис. 2.11, б. Рис. 2.11, в иллюстрирует вывод со стартовой позиции, для которой $\varphi_L < i_s$. На этом рисунке показаны три возможных типа вывода: прерываемый вывод, плоский баллистический вывод и баллистический вывод в плоскости, не совпадающей с плоскостью орбиты. При этом возможен и эллиптический вывод с $\eta_T < 180^\circ$ (на рисунке не показан). Возможность использования различных методов вывода при $\varphi_L > i_s$, так же как и при $\varphi_L < i_s$, облегчает осуществление вывода космического аппарата на орбиту спутника и, следовательно, облегчает осуществление встречи со спутником (вывод в определенную точку орбиты спутника — точку встречи) при запуске космического аппарата с заданной стартовой позиции на поверхности Земли. Естественно, что при этом каждый килограмм полезного груза, выводимого носителем на орбиту, должен быть оплачен соответствующим немалым расходом топлива.

Вывод космического аппарата в плоскости орбиты спутника обычно является менее дорогостоящим, но при $\varphi_L \neq i_s$, кроме условия совпадения плоскости траектории вывода с плоскостью орбиты спутника, необходимо еще удовлетворить требованию местонахождения спутника в определенной точке орбиты. Увеличения «окна» пусков можно добиться использованием метода непрерываемого вывода не в плоскости орбиты спутника или использованием метода прерываемого вывода. Пример первой из указанных возможностей приведен на рис. 2.11, в, из которого видно, что баллистический вывод не в плоскости орбиты начинается спустя Δt мин после прохождения плоскости орбиты и начальная точка вывода удалена на расстояние ζ_D по дуге большого круга от плоскости орбиты спутника. Ниже будет показано (см. также рис. 2.13), что чрезмерное увеличение расхода топлива, требуемое при выводе не в плоскости орбиты, до некоторой степени можно ограничить выбором соответствующей угловой дальности участка движения по переходной орбите. Однако даже в этом случае расстояние ζ_D от плоскости орбиты не должно превосходить $4-5^\circ$, поскольку дальнейшее увеличение ζ_D приводит к значительному увеличению требуемой энергии вывода. Принятие величины $\zeta_D \approx 5^\circ$ с целью увеличения «окна» пусков, естественно, определяется наклонением орбиты i_s и отношением φ_L/i_s . Если это отношение равно нулю, что

соответствует положению стартовой позиции на экваторе, то, считая $\Delta t = \Delta \alpha / \omega$, где α — прямое восхождение, измеряемое в плоскости экватора, а ω — угловая скорость вращения Земли, получим:

$$\sin \Delta \alpha = \frac{\sin \zeta_D}{\sin \iota_s},$$

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{\sin \zeta_D}{\sin \iota_s} \right).$$

Если $\varphi_L / \iota_s = 1$, то

$$\cos \Delta \alpha = 1 - \frac{2 \sin \zeta_D}{\sin 2\iota_s},$$

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \arccos \left(1 - \frac{2 \sin \zeta_D}{\sin 2\iota_s} \right).$$

Для промежуточных значений отношения φ_L / ι_s зависимость, связывающая ζ_D , φ_L , ι_s и $\Delta \alpha$, разрешается не относительно $\Delta \alpha$, а относительно ζ_D . Во всяком случае, увеличение «окна» пусков ограничено, если ζ_D ограничено величиной около 5° . Для низкоширотных стартовых позиций (например, на Атлантическом полигоне) и для умеренных наклонений орбиты возможность достижения заданной точки орбиты может быть увеличена даже при $\zeta_D \approx 5^\circ$.

Поскольку использование вывода не в плоскости орбиты требует больших энергетических затрат, то единственной приемлемой возможностью избежания длительных временных интервалов недостижимости спутника является вывод с использованием промежуточной орбиты ожидания. В этом случае космический аппарат выводится на промежуточную орбиту, компланарную с орбитой спутника (независимо от положения спутника на орбите), и находится в пассивном полете до момента соответствующего взаимного расположения со спутником (прерываемый вывод). Метод использования орбиты ожидания, компланарной с орбитой спутника, обладает тем преимуществом, что *кинематика встречи становится эквивалентной кинематике экваториальной системы вывода*. Использование этого метода сопряжено с определенными техническими трудностями, связанными с условиями пребывания аппарата на орбите ожидания и с достаточно жесткими допусками на компланарность орбиты ожидания и орбиты спутника. Трудности, связанные с пребыванием космического аппарата на орбите ожидания, будут рассмотрены в третьем томе настоящей серии, поскольку они в основном относятся к вопросам проектирования космических аппаратов. Трудности, связанные с допусками на компланарность орбит, возникают вследствие прецессии орбит (см. ниже). Указанные трудности

не являются принципиально непреодолимыми, поскольку при проектировании аппаратов, предназначенных для длительных космических полетов, попутно должны будут решаться и вопросы, связанные с пребыванием аппарата на орбите ожидания. Требования же, связанные с точной ориентацией плоскости орбиты ожидания, по точности не превосходят аналогичных требований, возникающих при обеспечении большинства околоземных полетов.

Недостатком использования прерываемого вывода для встречи космического аппарата со спутником на низких орбитах являются сравнительно большие синодические периоды обращения спутника относительно аппарата, движущегося по орбите ожидания. Это объясняется малой разностью угловых скоростей движения аппарата ($\dot{\eta}_\pi$) и спутника ($\dot{\eta}_s$). Однако, как будет показано, эти периоды все же меньше синодических периодов обращения спутника относительно наземной стартовой позиции. Например, отношение угловых скоростей обращения аппарата и спутника, движущихся соответственно на высотах 185 км и 556 км, равно:

$$\frac{\dot{\eta}_\pi}{\dot{\eta}_s} = \frac{T_{\text{sid},s}}{T_{\text{sid},\pi}} = \sqrt{\frac{r_s^3}{r_\pi^3}} = \sqrt{\frac{6926^3}{6556^3}} \approx 1,088,$$

откуда $\dot{\eta}_\pi = 1,088 \cdot 230 = 250$ град/сек. Синодический период обращения спутника относительно аппарата, движущегося по орбите ожидания, составляет $360/(250-230) = 18$ час или $18/1,569 \approx 11,47$ оборота аппарата по орбите ожидания. Это является максимальным временем пребывания космического аппарата на промежуточной орбите (в рассматриваемом примере), соответствующим самому неблагоприятному времени перехода на орбиту спутника. Если аппарат не снабжен небольшим маршевым двигателем (сателлоид; см. главу 7), то с учетом лобового сопротивления воздуха 18-часовое ожидание будет соответствовать несколько большей высоте (200÷240 км). Однако это не изменяет основного вывода, который может быть сделан из приведенного примера: *использованием промежуточной орбиты ожидания в плоскости орбиты спутника можно создать квази-экваториальные условия встречи для неэкваториальных стартовых позиций и орбит, что при $\varphi_L \leq \iota_s$ обеспечивает более высокую степень возможности осуществления компланарного перехода, чем при выводе с наземной стартовой позиции.* С увеличением высоты орбиты спутника время ожидания на промежуточной орбите, естественно, уменьшается. При $\varphi_L \leq \iota_s$ в течение суток существуют один или два момента времени для компланарного вывода космического аппарата на орбиту ожидания.

Таким образом, каждые сутки практически представляется одна возможность для вывода аппарата на орбиту ожидания без азимутального маневра. Хотя это и приемлемо для решения многих задач, связанных с орбитальной встречей космического аппарата со спутником, однако следует помнить, что экваториальные стартовые позиции в этом отношении обладают большими возможностями.

Ниже будет проведен анализ различных методов вывода и требований к орбитальной встрече. Поскольку используемые при этом зависимости являются достаточно простыми для читателя, знакомого с основами небесной механики, и так как большинство из этих зависимостей получено в других главах этой книги или в первом томе настоящей серии, то выводы зависимостей опущены. Здесь будут рассмотрены следующие вопросы: периоды обращения спутника, продолжительность перехода, угловые дальности перехода, требования к взаимному расположению космического аппарата и спутника для обеспечения их последующей встречи и требования к скорости. Различие между круговыми (околокруговыми) и эллиптическими орбитами спутников, там где это необходимо, будет специально оговорено. В качестве основной системы координат принята абсолютная геоцентрическая система (вторая экваториальная система, если специально не оговорено). Положение точки в принятой системе координат определяется радиальным расстоянием r от центра Земли, прямым восхождением α (измеряемым против хода часовой стрелки от точки весеннего равноденствия) и склонением δ (измеряемым от плоскости экватора и совпадающим с широтой φ).

1. Периоды обращения спутника.

Звездный (сидерический) период:

$$T_{\text{sid}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{K/r}} \quad (\text{круговая орбита}),$$

$$T_{\text{sid}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{K/a}} \quad (\text{эллиптическая орбита}).$$

Число звездных оборотов за средние солнечные сутки:

$$n_{\text{sid}} = \frac{86\,400}{T_{\text{sid}} [\text{сек}]} = \frac{24}{T_{\text{sid}} [\text{час}]}.$$

Среднее движение спутника:

$$\dot{\eta}_c = \sqrt{\frac{K}{r^3}} = \frac{2\pi}{T}; \quad \mu = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right] = \frac{360}{T} \left[\frac{\text{град}}{\text{сек}} \right].$$

Местная угловая скорость обращения спутника по эллиптической орбите в момент его нахождения на радиальном расстоянии r :

$$\dot{\eta} = \frac{C}{r^2} = \left(\frac{r_P}{r} \right)^2 \dot{\eta}_P,$$

где индексом « P » снабжены параметры орбиты в перигее, а C — постоянная в законе площадей Кеплера.

Синодический период обращения спутника по отношению к заданному меридиану на вращающейся Земле для экваториальной орбиты:

$$T_{\text{syn}} = \frac{360^\circ}{\mu - \omega},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли:

$$\omega = 4,166 \cdot 10^{-3} \frac{\text{град}}{\text{сек}} = 0,250684 \frac{\text{град}}{\text{мин}} = 15 \frac{\text{град}}{\text{час}}$$

(единицы времени: средние солнечные секунды, минуты, часы).

2. Альфа-маневр.

Поскольку α -маневр является неотъемлемой частью всех трех методов вывода, рассмотрим его отдельно. В течение α -маневра космический аппарат движется от стартовой позиции до точки выключения двигателя (начальной точки, параметры в которой снабжаются индексом «1»). Точка выключения двигателя может совпадать либо с начальной точкой D переходной орбиты, либо с любой точкой орбиты ожидания или орбиты спутника. Продолжительность t_α α -маневра и центральный угол η_α , проходимый космическим аппаратом при α -маневре, определяются на основании расчета активного участка траектории (см. главу 6). При заданных координатах φ_L , λ_L стартовой позиции и азимуте пуска a_L , измеряемом по ходу часовой стрелки от северного направления меридиана стартовой позиции, широта начальной точки φ_1 (совпадающая со склонением δ_1) может быть найдена по теореме синусов для сферических треугольников:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_L \cos \eta_\alpha + \cos \varphi_L \sin \eta_\alpha \cos a_L.$$

Для нахождения прямого восхождения α_1 начальной точки необходимо прежде определить прямое восхождение α_L точки старта. Поскольку долгота точки на поверхности Земли отсчитывается от гринвичского меридиана, а прямое восхождение точки в течение звездных суток может изменяться в пределах от 0 до 360° , то прямое восхождение α_L точки старта будет зависеть от времени старта. Прямое восхождение α_1 начальной

точки можно определить по следующей зависимости:

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{\sin \eta_\alpha \sin a_L}{\cos \varphi_1}\right) + \alpha_L.$$

Таким образом, изменение прямого восхождения в течение α -маневра равно $\alpha_1 - \alpha_L$. Соответствующее изменение долготы при пусках в восточном направлении составит

$$\lambda_1 - \lambda_L = \alpha_1 - \alpha_L - \omega t_\alpha,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, значение которой приведено выше. Если траектория вывода является плоской, то азимут a_1 вектора начальной скорости определяется из равенства

$$\sin a_1 = \frac{\cos \varphi_L}{\cos \varphi_1} \sin a_L.$$

Для типичных активных участков вывода со сферическими дальностями порядка $1600 \div 3300$ км продолжительность t_α активного участка находится в пределах $5 \text{ мин} < t_\alpha < 10 \text{ мин}$, а центральный угол η_α — в пределах $15^\circ < \eta_\alpha < 30^\circ$.

3. Полностью активный вывод.

В этом случае начальная точка (координаты которой были определены выше) будет совпадать либо с точкой перехода на орбиту ожидания, либо с точкой перехода на орбиту спутника. Требуемое количество топлива определяется следующими факторами: высотой активного участка и углом i , составленным вектором скорости в конце активного участка с плоскостью орбиты, на которую выводится космический аппарат. Первый фактор определяет величину энергии, расходуемой на преодоление работы силы притяжения на активном участке траектории, а второй — избыток энергии по сравнению с компланарным переходом. Обычно вывод на орбиту ожидания является компланарным. Необходимо также учесть дополнительный расход энергии на преодоление работы силы лобового сопротивления (см. главы 5 и 6; там же рассмотрены вопросы оптимизации компланарного полностью активного вывода). Дополнительная (по сравнению с компланарным выводом) скорость $\Delta v_1 \leq 2v_1 \sin \frac{i}{2}$ (см. § 3.1). При расчете α -маневра в абсолютной геоцентрической системе координат необходимо помнить, что скорость при старте равна не нулю, а величине $r_{00}\omega \cos \varphi_L$ и направлена параллельно касательной к экватору на меридиане старта, и проекция этой скорости на плоскость траектории вывода (в плоскости местного горизонта) равна $r_{00}\omega \cos \varphi_L \sin a_L$. При определении необходимой тяговооруженности (см. главу 5)

эта скорость либо вычитается из идеальной требуемой скорости вывода (для случая невращающейся Земли) при пусках в восточном направлении, либо прибавляется к ней при пусках в западном направлении. Если через W_P обозначить полный полезный вес топлива, расходуемый при α -маневре, а через W_1 — вес аппарата в точке выключения двигателя, то изменение идеальной скорости $\Delta v_{id, \alpha}$, включающее все расходы энергии, можно определить по следующей зависимости:

$$\Delta v_{id, \alpha} = g_{00} \tilde{I}_{sp} \ln \left(\frac{W_1 + W_P}{W_1} \right),$$

где g_{00} — ускорение силы тяжести на поверхности Земли, $\tilde{I}_{sp}$ — средний эффективный удельный импульс (см. главы 5 и 6).

Взаимное расположение космического аппарата и спутника (или точки орбиты) в момент начала вывода должно быть таким, чтобы в конце вывода произошла встреча аппарата со спутником в точке T . Положение спутника на орбите определяется *углом положения* ψ , образованным радиусом-вектором текущей точки местоположения спутника и проекцией радиуса-вектора центра масс аппарата в момент прохождения им точки отсчета (*радиуса-вектора точки отсчета*) на плоскость орбиты спутника. Если точка отсчета расположена не в плоскости орбиты спутника, то для определения угла положения необходимо спроектировать ее на плоскость орбиты спутника по дуге большого круга, перпендикулярно плоскости орбиты спутника.

При полностью активном выводе точкой отсчета является точка старта (или ее проекция на плоскость орбиты спутника). При этом для угла положения получим:

$$\psi_L = \eta_\alpha - \int_0^{t_\alpha} \dot{\eta}_s dt.$$

Если орбита спутника круговая, то интеграл обращается в $\dot{\eta}_c t_\alpha$, где $\dot{\eta}_c = 2\pi/T = \sqrt{K/r^3}$. Если орбита спутника эллиптическая, то $\dot{\eta}_s$ — мгновенная угловая скорость обращения спутника по орбите. Интеграл может быть вычислен после нахождения эксцентрической аномалии спутника $E_{s, L}$ в момент старта аппарата. Это может быть сделано путем решения уравнения

$$t_\alpha = \mu_s [E_{s, T} - E_{s, L} - e_s (\sin E_{s, T} - \sin E_{s, L})]$$

относительно $E_{s, L}$ методом последовательных приближений (индекс «s» относится к орбите спутника). Величина $E_{s, T}$ определяется для координат точки встречи (α_T, δ_T) по известным параметрам орбиты спутника. Зная $E_{s, T}$, последовательными при-

ближениями изменяя $E_{s, L}$, добиваются получения величины $E_{s, L}$, удовлетворяющей времени t_α . Зная $E_{s, L}$, можно вычислить соответствующее значение истинной аномалии спутника.

4. Непрерываемый вывод.

Полное время движения космического аппарата от старта до окончания ω -маневра равно:

$$t_t = t_\alpha + t_\tau + t_\omega.$$

Выше был рассмотрен α -маневр. В точке D выключения двигателя скорость, угол между касательной к траектории и местным горизонтом, радиальное расстояние от центра Земли, прямое восхождение, склонение и азимут вектора скорости соответственно обозначим v_D , θ_D , r_D , α_D , δ_D и a_D . При *баллистическом выводе* продолжительность t_τ пассивного полета до вершины траектории (апогея) равна величине $\Delta t_{1,*}$, определяемой по одной из формул (2.9a), (2.9b) или (2.9c) совместно с вспомогательными зависимостями, приведенными после формулы (2.9d). Величина центрального угла между точкой старта и точкой встречи равна:

$$\eta_t = \eta_\alpha + \eta_\tau + \eta_\omega,$$

где η_ω — центральный угол, проходимый космическим аппаратом в течение завершающего ω -маневра и определяемый численным интегрированием уравнений, описывающих движение аппарата при ω -маневре. В некоторых случаях этот угол может быть приближенно определен по конечным зависимостям (см. главу 6). Для аппаратов с большой тягой $\eta_\omega \ll \eta_\tau$. Если же ω -маневр рассматривать как импульсный, то $\eta_\omega = 0$. В случае, когда баллистическая траектория в вершине (апогее) касается орбиты спутника, то центральный угол, $\eta_\tau = 180^\circ - \eta_D$, соответствующий пассивной фазе τ , определяется выражениями (1.7), (1.37) или вспомогательными зависимостями, приведенными после формулы (2.9d), если положить в них $\delta_1 = 180^\circ - \eta_1$. Если траектория баллистического вывода пересекает орбиту спутника, то η_τ может быть либо больше, либо меньше 180° . Методика определения величины η_τ будет показана ниже.

При *эллиптическом выводе* (переходная орбита целиком располагается над поверхностью Земли) начальная точка расположена либо в перигее переходной орбиты, либо впереди его (т. е. $\eta_D = 0$ или $\eta_D < 360^\circ$). Точка встречи на переходной орбите может иметь истинную аномалию

$$\eta_\tau \cong 180^\circ.$$

Ниже будет рассмотрен как баллистический, так и эллиптический вывод.

По известным величинам (перечисленным выше) в точке D можно найти истинную аномалию точки D на переходной орбите:

$$\cos \eta_D = \frac{q_D}{q_D - 1} \operatorname{tg} \theta_D,$$

$$q_D = \frac{v_D^2}{K/r_D} \cos^2 \theta_D.$$

Другими элементами орбиты являются:
эксцентриситет

$$e = \sqrt{(1 - q_D)^2 + q_D^2 \operatorname{tg}^2 \theta_D},$$

фокальный параметр

$$p = r_D (1 + e \cos \eta_D),$$

большая полуось

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

перигейное и апогейное расстояния

$$r_P = a(1 - e), \quad r_A = a(1 + e).$$

Продолжительность пассивной фазы полета определяется: при баллистическом выводе ($\eta_D > 0$, $\eta_T = 180^\circ$)

$$t_\tau = \Delta t_{lr^*} - t_\omega,$$

при эллиптическом выводе ($\eta_D = 0$, $\eta_T = 180^\circ$)

$$t_\tau = \pi \sqrt{\frac{a^3}{K}} - t_\omega,$$

где $a = (r_D + r_T)/2$. Для баллистической или эллиптической переходных орбит имеем:

$$t_\tau = \mu [E_T - E_D - e(\sin E_T - \sin E_D)],$$

$$E = \arccos\left(\frac{a-r}{a-r_P}\right) = \arccos\left(\frac{a-r}{ae}\right) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}.$$

Если $E > 130^\circ$, то

$$\eta = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) =$$

$$= \arccos \frac{\frac{a}{r} (1 - e^2) - 1}{e} = \arccos \frac{\frac{r_P}{r} (1 + e) - 1}{e}.$$

Если $E > 180^\circ$, то

$$\eta = 180^\circ + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E - 180^\circ}{2} \right),$$

и, наконец, если $E = 360^\circ - \Delta$ (точка D расположена до перигея),

$$\eta = \eta_D = 360^\circ - 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \right).$$

В этом случае

$$\eta_\tau = (360^\circ - \eta_D) + \eta_\Gamma.$$

Итак, получены зависимости, связывающие продолжительность полета, эксцентрические аномалии и истинные аномалии. Осталось установить зависимости, связывающие аномалии с геоцентрическими координатами спутника. Угловое расстояние перигея от одного из узлов орбиты, то есть аргумент перигея ω или $180^\circ - \omega$, можно найти по любому из следующих равенств:

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \delta_D}{\cos a_D} - \eta_D,$$

$$\omega = \arcsin \frac{\sin \delta_D}{\sin \iota_\tau} - \eta_D.$$

Здесь ι_τ — наклонение плоскости переходной орбиты к плоскости экватора:

$$\cos \iota_\tau = \pm \cos \delta_D \sin a_D \begin{bmatrix} + : & 0 < a_D < 180^\circ \\ - : & 180^\circ < a_D < 360^\circ \end{bmatrix},$$

где знак «минус», стоящий перед правой частью равенства, относится к нижней строке диапазона изменения a_D . Азимут пуска a_L при заданном азимуте a_D определяется из соотношения

$$\sin a_L = \frac{\cos \delta_D}{\cos \varphi_L} \cos a_D,$$

где $\delta_D = \varphi_D$ и φ_L — соответственно известные склонения точки D и точки старта. Зная прямое восхождение α_D , можно определить прямое восхождение Ω_τ восходящего узла переходной орбиты в момент времени, соответствующий нахождению аппарата в точке D (точка выключения двигателя при α -маневре):

$$\sin(\alpha_D - \Omega_\tau) = \frac{\operatorname{tg} \delta_D}{\operatorname{tg} \iota_\tau}.$$

Вследствие прецессии плоскости орбиты (см. § 2.4) линия узлов медленно перемещается. Однако при продолжительностях движения аппарата по переходной орбите в пределах нескольких часов смещение узла невелико. Связь между координатами

точки встречи и истинной аномалией точки встречи на переходной орбите дается следующими выражениями:

$$\sin \delta_T - \sin \iota_\tau \sin (\omega + \eta_T) = 0,$$

$$\sin (\alpha_T - \Omega_\tau) - \frac{\operatorname{tg} \delta_T}{\operatorname{tg} \iota_\tau} = 0.$$

Обычно координаты точки встречи (α_T, δ_T) являются независимыми переменными. Изменение прямого восхождения за время пассивной фазы полета космического аппарата по переходной орбите равно:

$$\alpha_\tau = |\alpha_T - \alpha_D|.$$

Соответствующая величина центрального угла может быть вычислена по следующей зависимости:

$$\eta_\tau = |\eta_T - \eta_D| = \arccos (\sin \delta_D \sin \delta_T + \cos \delta_D \cos \delta_T \cos \alpha_\tau).$$

При предыдущем анализе не понадобились никакие другие параметры орбиты спутника (или цели), кроме координат точки встречи. По прямому восхождению Ω_s восходящего узла орбиты спутника и наклонению ι_s можно вычислить центральный угол η_τ , проходимый космическим аппаратом в пассивной фазе полета по переходной орбите, по следующей зависимости:

$$\begin{aligned} \cos \eta_\tau = & \cos (\alpha_T - \Omega_s - A) \cos (\varphi_D + B) + \\ & + \sin (\alpha_T - \Omega_s - A) \sin (\varphi_D + B) \sqrt{1 - C^2} \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} (\alpha_D - \Omega_s)}{\cos \iota_s},$$

$$\sin B = \sin A \sin \iota_s,$$

$$C^2 = \left[\frac{\sin (\alpha_D - \Omega_s)}{\sin A} \right]^2.$$

Азимут вектора скорости в точке D находится из формулы

$$\sin a_D = \frac{\sin (\alpha_D - \Omega_s) \sin (\alpha_T - \Omega_s - A)}{\sin A \sin \eta_\tau}.$$

По найденной величине η_τ можно вычислить изменение прямого восхождения за время пассивной фазы полета аппарата по переходной орбите:

$$\cos \alpha_\tau = \frac{\cos \eta_\tau - \sin \delta_D \sin \delta_T}{\cos \delta_D \cos \delta_T}.$$

По известным η_T и α_T можно найти a_D и по другой зависимости:

$$\sin a_D = \frac{\sin \alpha_T}{\sin \eta_T} \cos \delta_T.$$

Теперь, после того как определены величины η_D , η_T , r_D , r_T , a и e для переходной орбиты, можно вычислить соответствующие эксцентрисические аномалии E_D и E_T и по ним, как было показано выше, определить время полета t_T по переходной орбите.

Скорость космического аппарата на переходной орбите в точке встречи имеет величину

$$v_{T,T} = \sqrt{v_D^2 + \frac{2K}{r_T} - \frac{2K}{r_D}}.$$

Если переходная орбита компланарна с орбитой спутника, но не касается ее в точке T , то угол между вектором скорости аппарата и вектором скорости спутника в точке встречи определяется равенством

$$\beta_T = |\theta_{s,T} - \theta_{T,T}|,$$

где θ — угол, образованный соответствующим вектором скорости с местным горизонтом в точке встречи T . Для круговых орбит спутников $\theta_{s,T} = 0$. Для эллиптических орбит спутников $\theta_{s,T} \neq 0$. Для эллиптических орбит

$$\cos \theta_{s,T} = \sqrt{\frac{r_P}{r_T} \frac{r_A}{2(a_s - 1)}},$$

где a_s — большая полуось орбиты спутника. Для переходной орбиты можно использовать эту же зависимость, заменив a_s на a , или зависимость

$$\operatorname{tg} \theta_{T,T} = \frac{e \sin \eta_T}{1 + e \cos \eta_T},$$

где η_T — истинная аномалия точки встречи на переходной орбите.

Если плоскость переходной орбиты не компланарна с плоскостью орбиты спутника, то угол i_T между плоскостями этих орбит может быть определен по простой зависимости

$$\sin i_T = \frac{\sin \xi_D}{\sin \eta_T},$$

где ξ_D — «широта» точки D , измеренная от плоскости орбиты спутника, то есть расстояние по дуге большого круга от плоскости орбиты спутника до точки D (см. рис. 2.11, в). Последняя за-

висимость получена в предположении, что $\eta_{\tau} = 180^\circ - \eta_D$, то есть ω -маневр предполагается импульсным. В противном случае ω -маневр должен начаться до подхода космического аппарата к апогейной точке переходной орбиты. Поскольку для аппаратов с большой тягой эта разница невелика, то она здесь не учтена. Обозначим через $\Delta\alpha'$ дугу большого круга между точкой D , расположенной не в плоскости орбиты спутника, и точкой D' , лежащей в плоскости орбиты спутника на той же широте (рис. 2.11, в). Разность прямых восхождений точек D и D' , измеренная по дуге экватора $\Delta\alpha$, найдется из соотношения

$$\Delta\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\Delta\alpha'}{2}}{\cos \delta_D} \right),$$

где склонение δ_D точки D можно заменить широтой φ_L стартовой позиции, если значение $|\varphi_L - \delta_D|$ мало. Углы $\Delta\alpha$, δ_D и наклонение ι_s плоскости орбиты спутника связаны следующим равенством:

$$\sin \zeta_D = \sin \delta_D \cos \iota_s (1 - \cos \Delta\alpha) \pm \sin \Delta\alpha \sqrt{\cos^2 \delta_D - \cos^2 \iota_s},$$

где знак «плюс» относится к случаю, когда точка D прошла плоскость орбиты спутника (случай, изображенный на рис. 2.11, в), а знак «минус» — к случаю, когда точка D еще не прошла плоскость орбиты спутника. Время Δt , в течение которого Земля совершит поворот на величину $\Delta\alpha$, можно найти как

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{\omega},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли. Для определения i_T через α_D , δ_D , ϱ_s , ι_s и η_{τ} можно воспользоваться другой зависимостью:

$$\sin i_T = \frac{\sin(\alpha_D - \varrho_s) \sin(\delta_D + B)}{\sin A \sin \eta_{\tau}},$$

где A и B — величины, определенные выше.

Угол положения спутника относительно стартовой позиции в момент старта определяется следующим выражением:

$$\psi_L = \eta_{\alpha} + \eta_{\tau} + \eta_{\omega} - \int_0^{i_t} \dot{\eta}_s dt.$$

Метод вычисления интеграла в последнем выражении был описан при рассмотрении полностью активного вывода. Полную величину импульсной скорости можно найти как

$$\Delta v_{\text{tot}} = \Delta v_{\alpha} + \Delta v_{\omega}.$$

Величина импульсной скорости α -маневра в абсолютной геоцентрической системе координат определяется следующим выражением:

$$\Delta v_{\alpha} = v_D \pm r_{00} \omega \cos \varphi_L \sin a_L,$$

где r_{00} — радиус Земли, ω — угловая скорость вращения Земли, v_D — скорость аппарата в точке D в абсолютной геоцентрической системе координат (то есть по отношению к невращающейся Земле). Второе слагаемое представляет собой проекцию окружной скорости точки D , возникающей вследствие вращения Земли, на направление пуска. При пусках в восточном направлении Δv_{α} требуемой импульсной скорости для совершения α -маневра вследствие вращения Земли уменьшается, а при пусках в западном направлении ($180^\circ < a_D < 360^\circ$) — увеличивается. Требуемая величина *идеальной скорости* α -маневра равна:

$$\Delta v_{id\alpha} = \Delta v_{\alpha} + \Delta v_g + \Delta v_d,$$

где Δv_g и Δv_d — соответственно величины импульсов скорости, эквивалентные расходам энергии на преодоление работы силы притяжения и работы силы сопротивления воздуха при совершении действительного, неимпульсного α -маневра (см. главу 5). Эти дополнительные слагаемые в величине идеальной скорости, которые определяют дополнительный расход топлива, должны быть вычислены при расчете активного участка вывода (см. главу 6). Если обозначить через $v_{\tau,T}$ величину скорости космического аппарата в точке встречи T переходной орбиты, а через $v_{s,T}$ — величину скорости спутника в точке T орбиты спутника, то необходимое изменение импульсной скорости при ω -маневре будет равно:

$$\Delta v_{\omega} = \sqrt{v_{\tau,T}^2 + v_{s,T}^2 - 2v_{\tau,T}v_{s,T} \cos B_T},$$

где

$$\cos B_T = \cos \beta_T \cos i_T,$$

а β_T и i_T определены выше. При этом, естественно, для определения величины идеальной импульсной скорости при ω -маневре к найденной величине необходимо прибавить величину импульса скорости, эквивалентную расходу энергии на преодоление работы силы притяжения при совершении ω -маневра. При большой тяге (например, если отношение тяги космического аппарата к весу порядка пяти) величина $\Delta v_g \approx 0,1 \Delta v_{\omega}$. При малой тяге (от 0,1 до 0,01 веса аппарата) величина Δv_g может быть значительно больше. Величина Δv_g может быть определена из графиков, приведенных в главе 7,

С увеличением B_T величина импульсной скорости Δv_ω увеличивается. Эта закономерность определяет форму переходной орбиты минимальной энергии. С этой точки зрения представляет интерес рассмотрение влияния угла i_T . С увеличением этого угла менее протяженные переходные орбиты (с меньшим значением η_τ) становятся более выгодными по сравнению с переходными орбитами, приближающимися по протяженности к $\eta_\tau \rightarrow 180^\circ$. Это можно показать на примере баллистического вывода космического аппарата на круговую орбиту спутника (вершина траектории вывода касается или очень близка к орбите спутника). В этом случае

$$\beta_T = 0, \quad B_T = i_T, \quad v_{\tau, T} = v_A, \quad v_{s, T} = \sqrt{K/r_A},$$

$$\Delta v_\omega = \sqrt{v_A^2 + \frac{K}{r_A} - 2v_A \sqrt{\frac{K}{r_A}} \cos i_T}.$$

На рис. 2.12 приведены графики изменения v_D и Δv_ω в зависимости от ξ_D при выводе космического аппарата на круговую орбиту спутника высотой 556 км. Обозначение v_D вместо Δv_α указывает на то, что расчеты проведены для случая невращающейся Земли, так как в противном случае пришлось бы учитывать влияние широты стартовой позиции и азимута пуска на величину Δv_α . Из анализа графиков следует, что минимальная импульсная скорость перехода соответствует компланарному переходу ($\xi_D = 0$) при $\eta_\tau = 180^\circ$. С увеличением угла i_T абсолютная величина требуемой импульсной скорости перехода возрастает, но при этом уменьшается величина Δv_ω вследствие уменьшения η_τ . Как следует из графиков, величина Δv_ω при $i_T \neq 0$ имеет минимум в зависимости от величины η_τ . При углах $i_T > 1^\circ$ и высотах орбит спутника в пределах нескольких сотен километров наименьшие значения Δv_ω соответствуют диапазону $80^\circ \leq \eta_\tau' \leq 120^\circ$. С увеличением высоты орбиты спутника преимущество менее протяженных переходных орбит становится меньшим. С подобной ситуацией приходится встречаться при рассмотрении межпланетных переходных орбит (см. главу 9).

5. Прерываемый вывод.

Полное время движения от старта до окончания ω -маневра в этом случае определяется следующим выражением:

$$t_i = t_\alpha + t_\pi + t_\delta + t_\tau + t_\omega.$$

В этом случае α -маневр представляет собой полностью активный вывод, причем за «орбиту спутника» принимается орбита ожидания (обычно высотой около 160—200 км), на которой космический аппарат находится в пассивном полете до наступления наиболее благоприятного момента времени для начала

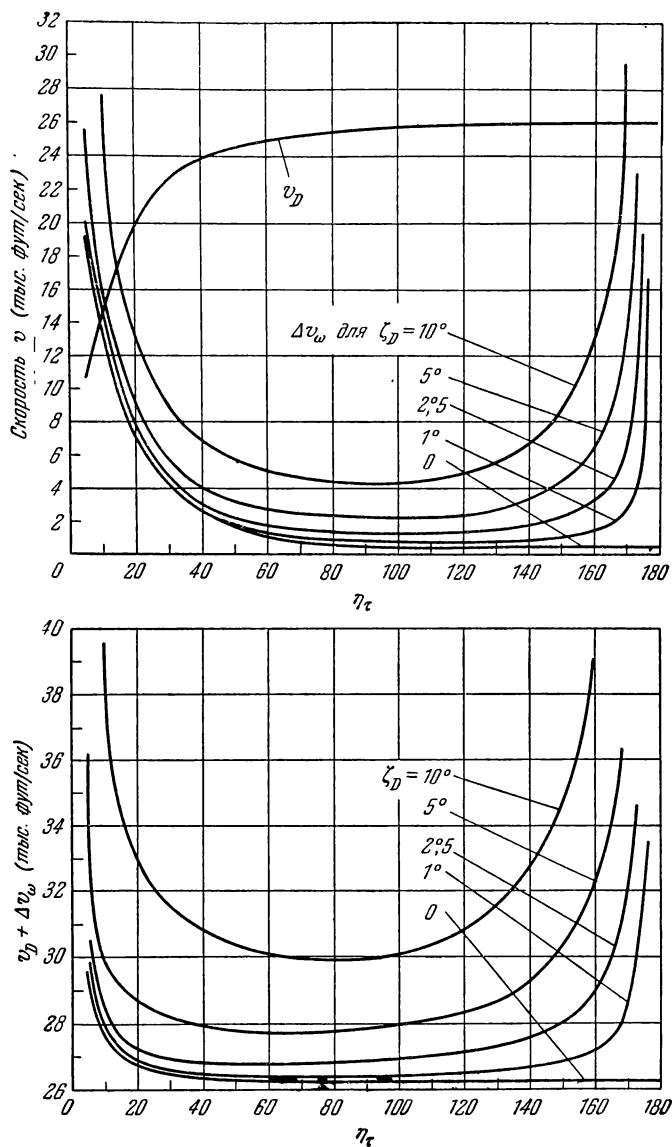


Рис. 2.12. Изменение импульсных скоростей v_D и Δv_ω , необходимых для вывода космического аппарата на круговую орбиту высотой 556 км.

перехода на орбиту спутника. Этот момент определяется в зависимости от положения аппарата по отношению к плоскости орбиты спутника. Поэтому продолжительность пассивной фазы полета t_π на орбите ожидания зависит от конкретных условий, при которых осуществляется встреча. Если переходная орбита и орбита спутника компланарны, то фаза ожидания всегда может быть меньше одного оборота. Одной из основных целей, преследуемых использованием орбиты ожидания, и является достижение этой компланарности. Для этого аппарат выводится на орбиту ожидания, компланарную с орбитой спутника. При $\iota_s < \varphi_L$ это можно осуществить лишь в определенные моменты времени, когда стартовая позиция оказывается близкой к плоскости орбиты спутника ($\zeta_D \rightarrow 0$). Это условие в большей степени, чем условие взаимного расположения аппарата и спутника, определяет время старта. В процессе полета космического аппарата по орбите ожидания достигается необходимое взаимное расположение аппарата и спутника, и аппарат переходит на переходную орбиту для последующей встречи со спутником. Таким образом, если выполнено *условие компланарности*, то

$$t_\pi < 2\pi\sqrt{r_\pi^3/K},$$

где r_π — радиус орбиты ожидания.

При $\iota_s > \varphi_L$ космический аппарат теоретически всегда может быть выведен на компланарную (с орбитой спутника) орбиту. На практике, однако, могут возникнуть ограничения, связанные с соображениями безопасности или возможностями измерительных средств систем сопровождения. Если учитывать прецессии плоскостей орбиты ожидания и орбиты спутника (см. § 2.4), то возникают дополнительные ограничения, налагаемые на время пуска и связанные с обеспечением компланарности орбит при переходе аппарата на переходную орбиту. При $\iota_s < \varphi_L$ орбита ожидания, а следовательно, и переходная орбита не могут быть компланарны с орбитой спутника. При этом возникнет необходимость в маневре изменения плоскости орбиты аппарата либо в начале переходной орбиты, либо в точке встречи. С целью уменьшения требуемой энергии поворот плоскости переходной орбиты может быть произведен по частям: в начале переходной орбиты и в точке встречи [§ 3.10, п. (в)], но большую часть поворота необходимо выполнить в районе апогея переходной орбиты. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы линия апсид переходной орбиты находилась в плоскости орбиты спутника. В этом случае возникают два ограничения: 1) взаимное расположение космического аппарата и спутника и 2) ориентация линии апсид переходной орбиты. Может оказаться, что

потребуется несколько оборотов аппарата по орбите ожидания, прежде чем будут удовлетворены оба условия и аппарат сможет перейти на переходную орбиту. Поэтому при некомпланарном переходе будет иметь место соотношение

$$t_{\pi} \geq 2\pi \sqrt{r_{\pi}^3 / K}.$$

Расчет t_{τ} и t_{ω} аналогичен описанному при рассмотрении непрерываемого вывода.

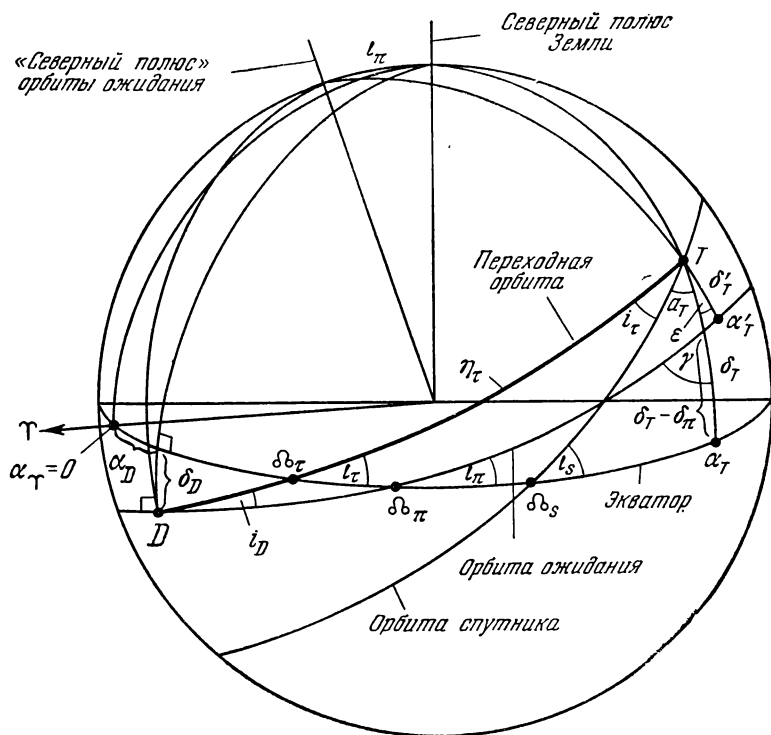


Рис. 2.13. Некомпланарный переход с орбиты ожидания на орбиту спутника.

Склонение δ_D и прямое восхождение α_D точки старта с орбиты ожидания, долгота восходящего узла Ω_{π} и наклонение ι_{π} орбиты ожидания связаны следующей зависимостью:

$$\operatorname{tg} \delta_D - \frac{\sin(\Omega_{\pi} - \alpha_D)}{\operatorname{ctg} \iota_{\pi}} = 0.$$

Азимут вектора скорости космического аппарата в точке D орбиты ожидания (начало переходной орбиты) определяется из следующего выражения:

$$\sin a_{\pi, D} = \frac{\cos \iota_{\pi}}{\cos \delta_D}.$$

Величины i_T , η_{τ} и α_D рассчитываются так же, как и при использовании метода непрерываемого вывода. Если переходная орбита не компланарна с орбитой ожидания, то угол между плоскостями орбит равен:

$$i_D = a_D - a_{\pi},$$

и величину импульса скорости для перехода с орбиты ожидания на переходную орбиту можно рассчитать по формуле

$$\Delta v_D = \sqrt{v_D^2 + v_{\pi, D}^2 - 2v_D v_{\pi, D} \cos i_D},$$

где $v_{\pi, D}$ — величина скорости аппарата в точке D орбиты ожидания.

Компланарный переход с круговой орбиты ожидания на круговую орбиту спутника будет рассмотрен в § 3.5. В § 3.6 рассматривается случай компланарного перехода с круговой орбиты ожидания на эллиптическую орбиту спутника. Там же рассмотрен компланарный переход с эллиптической орбиты ожидания на круговую орбиту спутника. Компланарный переход с эллиптической орбиты ожидания на эллиптическую орбиту спутника будет рассмотрен в § 3.7. Угол i_D между плоскостями переходной орбиты и орбиты ожидания и угол i_T между плоскостями орбиты спутника и переходной орбиты при некомпланарном переходе показаны на рис. 2.13. Будем считать заданными величинами Ω_{π} , Ω_S , α_T , δ_T , α_D , δ_D , ι_{π} и ι_S . Пользуясь рис. 2.13, можно получить следующие зависимости:

$$\operatorname{tg} \delta_{\pi} = \operatorname{tg} \iota_{\pi} \sin (\alpha_T - \alpha_{\pi}),$$

$$\sin \gamma = \frac{\cos \iota_{\pi}}{\cos \delta_{\pi}},$$

$$\sin \delta'_T = \sin \gamma \sin (\delta_T - \delta_{\pi}),$$

$$\alpha_{\tau} = |\alpha_T - \alpha_D|,$$

$$\cos \eta_{\tau} = \cos \delta_D \cos \delta_T \cos \alpha_{\tau} \pm \sin \delta_D \sin \delta_T,$$

где знак «плюс» в последней формуле соответствует случаю одинаковых знаков δ_D и δ_T , а знак «минус» — случаю, когда

один из углов δ_D или δ_T отрицателен. Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\sin \iota_D &= \frac{\sin \delta'_T}{\sin \eta_\tau}, \\ \cos \varepsilon &= \frac{\operatorname{tg} \delta'_T}{\operatorname{tg} (\delta_T - \delta_\pi)}, \\ \sin a_T &= \frac{\cos \iota_s}{\cos \delta_T}, \\ i_T &= \arcsin \left(\frac{\cos i_D}{\cos \delta'_T} \right) - a_T - \varepsilon.\end{aligned}$$

Поскольку взаимным расположением космического аппарата и спутника определяется не момент пуска, а момент старта с орбиты ожидания, то угол положения спутника отсчитывается от точки D :

$$\psi_D = \eta_\delta + \eta_\tau + \eta_\omega - \int_0^{\Sigma t} \dot{\eta}_s dt,$$

где

$$\Sigma t = t_\delta + t_\tau + t_\omega.$$

Требуемые величины импульсов скорости для совершения различных маневров, помимо рассмотренного ранее полностью активного вывода на орбиту ожидания, могут быть вычислены по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}\Delta v_\delta &= \sqrt{v_\pi^2 + v_D^2 - 2v_\pi v_D \cos B_D}, \\ v_\pi^2 &\approx \frac{K}{r_\pi}, \\ v_D^2 &\approx \frac{K}{r_\pi} \left(2 - \frac{r_\pi}{a} \right) = \frac{K}{r_\pi} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \eta_D}, \\ \cos B_D &= \cos \theta_D \cos i_D, \\ \theta_D &= \operatorname{arctg} \frac{e \sin \eta_D}{1 + e \cos \eta_D} = \arccos \sqrt{\frac{r_P}{r_D} \frac{r_A}{2a - r_D}}, \\ \Delta v_\omega &= \sqrt{v_{\tau, T}^2 + v_{s, T}^2 - 2v_{\tau, T} v_{s, T} \cos B_T}, \\ v_{\tau, T}^2 &= \frac{K}{r_{s, T}} \left(2 - \frac{r_{s, T}}{a} \right) = \frac{K}{r_{s, T}} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \eta_T}, \\ v_{s, T}^2 &= \frac{K}{r_{s, T}} \left(2 - \frac{r_{s, T}}{a_s} \right) = \frac{K}{r_{s, T}} \frac{1 - e_s^2}{1 + e_s \cos \eta_{s, T}}.\end{aligned}$$

и) Влияние сжатия Земли. Вследствие отличия потенциала силы притяжения сфероидальной Земли с неоднородным распределением массы от потенциала центрального поля все параметры орбиты спутника будут отличаться от параметров орбиты, получаемых в предположении центрального поля сил, создаваемого идеализированным однородным сферическим телом массы, равной массе сфероида. Эти изменения параметров орбиты будут рассмотрены в § 2.4—2.8. В конце § 2.8 в таблице 2.6 приведен обзор отклонений параметров орбиты и перечень соответствующих зависимостей для их расчета. Полный и точный учет возмущающих факторов, включая и возмущающее влияние Солнца и Луны, если спутник движется по орбите, не очень близкой к Земле (§ 2.9), является очень трудоемким делом. Для приближенного учета влияния возмущающих факторов на параметры орбиты спутника можно поступить следующим образом. Вначале по заданным параметрам орбиты (T_{sid} , i , a , e , μ) в центральном поле сил (невозмущенная орбита) рассчитываются постоянные изменения параметров орбиты (таблица 2.6) и при необходимости вводятся найденные поправки в параметры невозмущенной орбиты. Двумя наиболее важными вековыми возмущениями орбиты являются вращение линии узлов (*прецессия орбиты*) со скоростью $d\Omega/dt$ и вращение линии аписид со скоростью $d\omega/dt$. Особое значение приобретает учет $d\omega/dt$ при определении точных координат точки старта космического аппарата с орбиты ожидания в случаях использования прерываемого вывода. Вековая составляющая прецессии орбиты представляет собой вращение линии узлов с постоянной угловой скоростью в западном направлении (обратная прецессия) для прямых орбит ($0 < i < 90^\circ$) и в восточном направлении (прямая прецессия) для обратных орбит ($90^\circ < i < 180^\circ$). В обоих случаях наклонение орбиты i определяется в восходящем узле. При прецессии орбиты ее точки перемещаются в абсолютном пространстве *параллельно плоскости экватора*, подобно точкам поверхности Земли при ее суточном вращении. Поэтому учет вековой составляющей прецессии орбиты может быть произведен эквивалентным изменением угловой скорости вращения Земли. В случае *обратной*, то есть *в направлении вращения по ходу часовой стрелки* (западной), прецессии вращение плоскости орбиты противоположно вращению Земли, и поэтому эквивалентная угловая скорость вращения Земли больше угловой скорости вращения Земли для непрецессирующей орбиты. *Эквивалентная угловая скорость, или эквивалентная скорость вращения Земли*, ω_{eq} определяется по следующей формуле:

$$\omega_{\text{eq}}^* = \omega \pm \left| \frac{d\Omega}{dt} \right|, \quad (2.19)$$

где знак «плюс» соответствует обратной прецессии, а знак «минус» — прямой прецессии.

Эквивалентный период вращения Земли можно определить как

$$P_{\text{eq}} = \frac{360^\circ}{\omega_{\text{eq}}}. \quad (2.20)$$

Поэтому наиболее простым путем учета влияния прецессии орбиты является замена в уравнениях таблицы 2.2 продолжительности суток в часах на P_{eq} . Экваториальные и полярные орбиты не прецессируют. Для рассмотренного в настоящем параграфе примера $\omega_{\text{eq}} = 15 + 0,273 = 15,273 \text{ град/час}$ и $P_{\text{eq}} = 360/15,273 = 23,6 \text{ час}$. Хотя при точных расчетах параметров движения для осуществления встречи по схеме «Земля — орбита» учет влияния прецессии орбиты является необходимым, основные выводы, относящиеся к компланарному переходу космического аппарата с неэкваториальной стартовой позиции на неэкваториальные орбиты, полученные без учета влияния прецессии орбиты, остаются в силе. Следует, однако, отметить, что поскольку период прецессии $T_{\text{пр}}$ является функцией *высоты* и *угла наклона орбиты*, то угловые скорости прецессии орбиты ожидания (обычно малой высоты) и орбиты спутника будут различными. Это обстоятельство необходимо учитывать при определении времени старта с орбиты ожидания в случае использования прерываемого компланарного вывода. При этом начальное положение плоскости орбиты ожидания должно быть выбрано таким образом, чтобы в конце периода ожидания она совпала с плоскостью орбиты спутника. Это несколько усложняет расчет параметров движения при использовании прерываемого вывода, но отнюдь не уменьшает возможности его осуществления.

2.3. Внутриорбитальные переходы

В первой части настоящей главы рассматривались вопросы, связанные с изучением траекторий, то есть орбит, пересекающих поверхность тела притяжения. В предыдущем параграфе были рассмотрены энергетические характеристики различных переходных траекторий свободного полета космического аппарата с поверхности Земли на орбиту спутника. В настоящем параграфе будут рассмотрены вопросы теории космического полета, связанные с переходом между различными точками, движущимися по одной и той же орбите. *Внутриорбитальные переходы* могут понадобиться при обслуживании системы спутников, движущихся по одной и той же орбите. При заправке, ремонте и решении ряда других эксплуатационных вопросов,

связанных с обслуживанием системы спутников, может возникнуть необходимость в переходе (не обязательно пилотируемом) между различными аппаратами, составляющими систему. Аналогичные задачи возникают и при необходимости коррекции положения спутника (или выводимого для стыковки с ним другого аппарата) на орбите.

Заданную орбиту, по которой движутся спутники, составляющие систему и пребывающие в каждый момент времени в точках с различными истинными аномалиями, будем называть *опорной*. Примем вначале опорную орбиту за круговую. Задача заключается в определении перехода от точки 1, движущейся по заданной орбите, к точке 2, движущейся по той же орбите. На рис. 2.14 показано, что эта задача имеет два принципиально различных решения: переход *по длинной и короткой переходным орбитам*.

В случае использования длинной переходной орбиты рассчитывают интервал времени Δt , необходимый для перемещения точки 1 в точку 2 по опорной орбите в абсолютной системе координат:

$$\Delta t = \frac{s_{12}}{v_c}, \quad (2.21a)$$

где s_{12} — расстояние между точками 1 и 2 по дуге опорной орбиты, а v_c — круговая скорость спутника на опорной орбите. Если точка 2 движется по опорной орбите впереди точки 1 (рис. 2.14, а), то необходимо, чтобы период обращения по длинной переходной орбите был на Δt *меньше* периода обращения по опорной орбите. Поэтому переходная орбита оказывается расположенной внутри опорной орбиты. В момент начала перехода точка 1 совпадает с апогеем переходного эллипса. После того как космический аппарат совершит один оборот по переходной орбите, он встретится с другим аппаратом, который за это же время перейдет из точки 2 в точку 2' по опорной орбите. За это же время точка 1 переместится по опорной орбите в точку 1'.

Обратный переход из точки 2 в точку 1 показан также на рис. 2.14, а (правый рисунок). В этом случае период обращения по переходной орбите должен быть на Δt *больше* периода обращения по опорной орбите. Поэтому переходная орбита оказывается расположенной вне опорной орбиты. Таким образом, механика полета по длинной переходной орбите оказывается чрезвычайно простой. В дальнейшем параметрам опорной орбиты будем приписывать индекс «d». Период обращения по длинной переходной орбите можно определить по следующей зависимости:

$$T = T_d \pm \Delta t, \quad (2.21b)$$

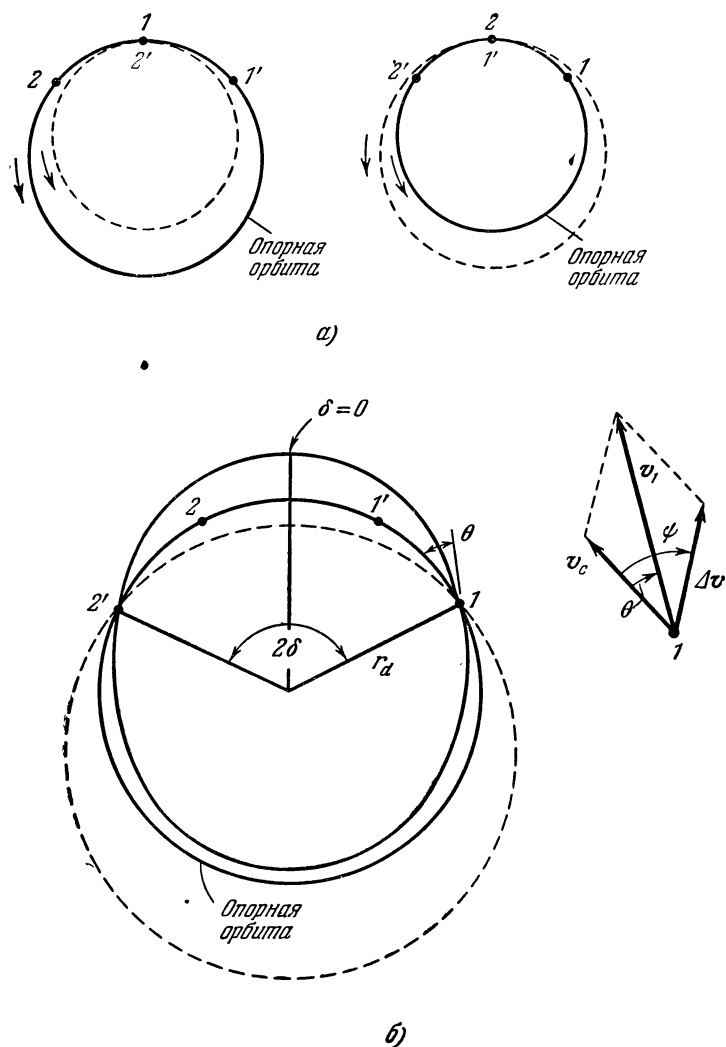


Рис. 2.14. Переходы между различными точками одной и той же орбиты (внутриорбитальные переходы).

а) Длинная переходная орбита; *б)* короткая переходная орбита.

где знак второго слагаемого выбирается в зависимости от того, впереди или сзади по ходу движения находится спутник, с которым предполагается осуществить встречу. Используя третий закон Кеплера [см. формулу (1.4.153)], можно получить выражение для величины большой полуоси переходной орбиты:

$$a^3 = \frac{KT^2}{4\pi^2}.$$

Расстояние от центра Земли до противоположной (по отношению к начальной точке перехода) апсидальной точки определяется по одной из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} r_P &= 2a - r_A, \\ r_A &= 2a - r_P, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

в зависимости от того, как расположена переходная орбита относительно опорной (внутри или вне ее).

Если переходный эллипс расположен вне опорной орбиты, то начальная точка перехода является перигейной точкой переходной орбиты и необходимый положительный импульс скорости можно рассчитать [см. соотношение (1.4.130)] по следующей формуле:

$$\Delta v_P = v_P - v_c = v_c \left(\sqrt{\frac{r_A}{a}} - 1 \right) = v_c \left(\sqrt{2 - \frac{r_P}{a}} - 1 \right). \quad (2.23)$$

В конце переходной орбиты для перехода на опорную орбиту к космическому аппарату необходимо приложить отрицательный импульс скорости такой же величины. Таким образом, в рассматриваемом случае суммарная величина требуемых импульсов скорости составит $2\Delta v_P$.

Если переходный эллипс расположен внутри опорной орбиты, то суммарная величина требуемых импульсов скорости составит $2\Delta v_A$. Первый отрицательный импульс Δv_A прикладывается в начальной точке переходной орбиты, а второй положительный импульс Δv_A — в конечной:

$$\Delta v_A = v_A - v_c = v_c \left(\sqrt{\frac{r_P}{a}} - 1 \right) = v_c \left(\sqrt{2 - \frac{r_A}{a}} - 1 \right). \quad (2.24)$$

Короткие переходные орбиты подобны баллистическим траекториям, рассмотренным в предыдущих параграфах. Действительно, в данном случае мы имеем дело с аналогичной ситуацией, за исключением лишь того, что начальная и конечная точки движутся со значительно большими скоростями в абсолютной системе координат. Обозначим через t время перехода из точки I в точку $2'$, соответствующую положению, в которое

переместится точка 2 по опорной орбите за время перехода (рис. 2.14, б). Через Δt обозначим ранее введенный интервал времени [см. выражение (2.21a)], необходимый для перемещения космического аппарата из точки 1 в точку 2, которые движутся по опорной орбите. Тогда для центрального угла 2δ , описываемого радиусом-вектором при движении аппарата по переходной орбите, имеем:

$$2\delta = \frac{v_c}{r_c} (t + \Delta t), \quad (2.25)$$

а время полета t по переходной орбите между точками 1 и 2' можно найти по формуле (2.9с) или (2.9d), полагая $2\Delta t_{1*} = \Delta t_{12}$.

Для определения переходной траектории задаются желательным временем перехода t и, варьируя эксцентриситет e переходной орбиты, добиваются выполнения равенства (2.25). По найденным значениям δ и e можно определить необходимую величину скорости в начальной точке 1 (которая будет равна скорости в точке 2'):

$$v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{K}{r_d} \left(2 + \frac{e^2 - 1}{1 + e \cos \delta} \right)}. \quad (2.26)$$

Угол между касательными к круговой и эллиптической орбитам в точке пересечения может быть найден из равенства (1.4.41):

$$\cos^2 \theta = \frac{K}{r^2 v^2} p. \quad (2.27)$$

Подставляя сюда выражение для параметра p из (1.4.44)

$$p = r(1 + e \cos \delta)$$

($\delta = \eta$; рис. 2.14, б) получаем:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{K/r}{v^2} (1 + e \cos \delta)}. \quad (2.28)$$

Для рассматриваемого случая движения по опорной орбите последнее выражение принимает вид:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{K/r_d}{v_1^2} (1 + e \cos \delta)}. \quad (2.29)$$

Теперь можно определить необходимый импульс скорости в точке 1 (рис. 2.14, б):

$$\Delta v = \sqrt{v_c^2 + v_1^2 - 2v_c v_1 \cos \theta}. \quad (2.30)$$

Поскольку в точке 2' необходимо приложить к космическому аппарату такой же по величине импульс, то суммарная вели-

чина требуемых импульсов скорости составит $2\Delta v$. Величину угла ψ , определяющего направление вектора импульса скорости Δv по отношению к местному горизонту, можно определить по теореме синусов (рис. 2.14, б):

$$\sin \psi = \frac{v_1}{\Delta v} \sin \theta. \quad (2.31)$$

Из анализа величин требуемых импульсов скорости следует, что при сравнительно близком расположении точек 1 и 2 разница в энергетических потребностях для осуществления перехода между точками 1 и 2 по длинной и короткой переходным орбитам сравнительно невелика. Поскольку при этом короткие переходные орбиты не сильно отличаются от опорной орбиты, то переход можно осуществить за сравнительно небольшой промежуток времени.

Следовательно, в этом случае можно получить преимущество в более коротком времени перехода и, кроме того, иметь большую свободу выбора времени перехода по сравнению с переходом по длинной переходной орбите при сравнительно небольших дополнительных энергетических затратах. Однако, если рассматриваемые точки удалены друг от друга на значительное расстояние, короткая переходная орбита будет сильно отличаться от опорной орбиты и суммарная величина требуемых импульсов соответственно возрастет. К тому же выигрыш во времени перехода по сравнению с длинной переходной орбитой уменьшится. Поэтому в таких случаях предпочтительнее длинные переходные орбиты.

Если опорная орбита сама является эллиптической, то методика расчета в принципе остается прежней. Только расчет времени Δt производится не по выражению (2.21а), справедливому для круговой орбиты, а по более сложной зависимости (1.31а). В остальном методика расчета остается прежней. Траектории перехода по коротким переходным орбитам будут зависеть от того участка опорной эллиптической орбиты, над (или под) которым предполагается осуществить переход, так как движение обеих рассматриваемых точек происходит с различными скоростями на различных участках опорной орбиты. Это обстоятельство в значительной степени затрудняет определение угла δ , поскольку величина δ , соответствующая заданной величине Δt , может быть найдена лишь методом последовательных приближений, включающим варьирование параметров e , t и δ .

Так как в большинстве задач, связанных с орбитальной встречей космических аппаратов, орбиты не сильно отличаются от круговых ($e < 0,2$), то оценка энергетических потребностей

в первом приближении может быть произведена на основе приведенной приближенной методики. При решении же конкретных практических задач необходимые точные расчеты проводят с использованием электронных вычислительных машин.

2.4. Возмущения орбиты спутника

Основными возмущениями, влияющими на движение спутника являются:

1. Несферичность центрального тела притяжения.
2. Сопротивление атмосферы.
3. Электрические и магнитные поля.
4. Релятивистские эффекты.
5. Космическая пыль.
6. Возмущения, создаваемые одним или несколькими спутниками того же центрального тела.

7. Возмущение, создаваемое гравитационным полем Солнца.

Вблизи центрального тела доминирующими являются два первых возмущающих фактора. Последние два фактора необходимо учитывать, если спутник удален на значительное расстояние от центрального тела. Влияние остальных возмущающих факторов сравнительно невелико. В дальнейшем при рассмотрении возмущенного движения спутника в качестве центрального тела принята Земля.

Понятие несферичности центрального тела включает в себя как сжатие тела, так и его отличие от сжатого сфероида вращения (указанное отличие порождается реальным распределением масс и реальной конфигурацией тела). Главным возмущающим фактором несферичности является полярное сжатие Земли, характеризующееся тем, что ее полярный диаметр на 46 км меньше экваториального.

Сжатие центрального тела приводит к следующим возмущениям орбиты спутника:

1. *Прецессия*. Плоскость орбиты, наклоненная к плоскости экватора, вращается относительно полярной оси Земли в сторону, обратную направлению движения спутника (рис. 2.15 и 2.16).

2. *Вращение линии апсид*. Большая ось эллиптической орбиты вращается в орбитальной плоскости. При углах наклона $i < 63^\circ,4$ направление вращения совпадает с направлением движения спутника, а при углах наклона $i > 63^\circ,4$ направление вращения противоположное.

3. *Изменение радиального расстояния*. Для сжатой планеты (двухосный сфероид) принципиально невозможно получить строго круговую орбиту (за исключением экваториальной орбиты), так как при движении по наклоненной орбите радиальное

расстояние от центра планеты до спутника изменяется. При заданном кинетическом моменте орбиты среднее радиальное расстояние полярной орбиты на 22,2 км больше, чем для экваториальной орбиты. В течение каждого оборота (витка) спутника радиальное расстояние дважды достигает как максимального, так и минимального значения. Для околокруговых орбит

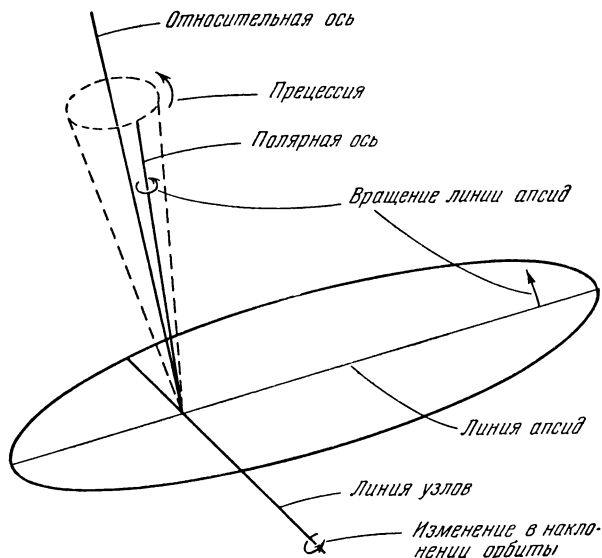


Рис. 2.15. Движение плоскости возмущенной орбиты в пространстве.

амплитуда колебаний величины радиального расстояния является функцией высоты и наклона орбиты.

4. *Изменение периода обращения.* Период между последовательными прохождением аппарата восходящего узла по орбите с наклонением несколько больше периода его обращения по экваториальной орбите.

5. *Изменения параметров орбиты* (см. ниже таблицу 2.6) могут быть: *постоянными*, вызываемыми искажением центрального поля сжатием тела, *монотонно возрастающими* со временем (*вековыми*), вызываемыми неизменным направлением расположения возмущающих масс (экваториальным вздутием) относительно плоскости орбиты, и *колебательными (периодическими)*, вызываемыми изменением положения спутника относительно возмущающих масс.

Рис. 2.16 показывает, что прецессия орбиты вызывает перемещение проекций точек орбиты на экватор (E_1, E_2, E_3) и проекций точек на заданный круг широты (L_1, L_2, L_3). Поэтому влияние прецессии орбиты при построении трассы спутника можно учесть в первом приближении изменением кажущейся угловой скорости вращения Земли [см. выражение (2.20)].

Возмущающее действие сжатия исследовано в классической небесной механике. Эти исследования были начаты Ньютоном и получили дальнейшее развитие в трудах Эйлера, Клеро, Даламбера и Лапласа. В XIX веке Хиллом и Брауном [2] была

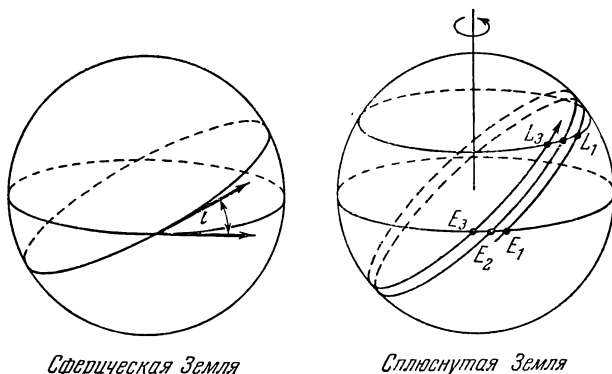


Рис. 2.16. Прецессия орбиты.

разработана современная теория движения Луны. Все эти ранние работы связаны с изучением движения Луны и поэтому имеют ограниченное приложение к случаям, охватывающим движение тел по более наклоненным орбитам, находящимся на меньших расстояниях. Позже возмущающее влияние сжатия привлекло внимание астрономов в связи с изучением движения спутников Юпитера, которые движутся по более близким к планете и более наклоненным к плоскости ее экватора орбитам. Брауэром [3] получено решение с членами высокого порядка для спутника, движущегося в поле сжатого сфероиды. Однако его исследование было ограничено околоэкваториальными орбитами, поскольку главным образом предназначалось для изучения движения пятого спутника Юпитера. Краткий анализ Шпитцера [4] специально посвящен движению искусственных спутников Земли. Им получены решения первого порядка для прецессии орбиты и зависимости второго порядка для изменения радиального расстояния в частном случае полярной орбиты. В работе [5] результаты Брауэра с некоторыми упрощениями были распространены на случай наклоненных орбит. Более по-

дробные исследования были проведены Блитцером и его сотрудниками [6, 7, 8]. В работе [6] рассмотрено решение второго порядка для круговых орбит. Благодаря удачному выбору независимой переменной (географической долготы) были выведены конечные выражения, а также получены выражения для прецессии орбиты и возмущений второго порядка радиального расстояния. В краткой статье [7] эти результаты были распространены на эллиптические орбиты. В работе [8] исследовано влияние сжатия Земли на период обращения спутника. При решении задачи для наклоненных орбит автор пренебрегал отклонением орбиты от круговой. Наиболее полное и строгое исследование, проведенное Краузе [9, 10], основано на методе вариации элементов, в котором рассматриваются круговые и эллиптические орбиты с произвольным наклонением. Краузе рассмотрел также и эффекты второго порядка. Во всех случаях предполагалась симметрия Земли относительно полярной оси. Его исследования будут представлены в § 2.6 и 2.7.

Прецессия орбиты и вращение линии апсид имеют важное значение при анализе работы систем низкоорбитальных спутников, предназначенных для наблюдения земной поверхности. Прецессия орбиты в сочетании с наклоном земной оси к плоскости эклиптики определяет соотношение между освещенной и теневой частями поверхности Земли, доступными для наблюдения со спутника при его движении на различных широтах. Вращение линии апсид в случае эллиптических орбит определяет изменение второго порядка кажущейся угловой скорости движения просматриваемой поверхности (изменение первого порядка вызывается эллиптической орбитой, неизменной в инерциальном пространстве).

Сила лобового сопротивления воздуха, действующая в плоскости орбиты, изменяет все параметры орбиты, за исключением ее наклонения и долготы восходящего узла.

С увеличением расстояния от Земли возмущающее влияние сжатия Земли постепенно уступает место возмущающему влиянию Луны, которое становится доминирующим. Для спутников Земли, движущихся по орбитам, расположенным в плоскости лунной орбиты или близкой к ней, величина радиуса которых больше 10 земных радиусов, возмущающее действие Луны превосходит возмущающее действие сжатия Земли.

При еще больших удалениях становится ощутимым возмущающее действие Солнца. Это объясняется большим изменением гелиоцентрического расстояния до различных точек орбиты очень большого радиуса. На расстояниях от Земли порядка расстояния до Луны возмущающее действие сжатия Земли составляет менее одной миллионной возмущающего действия

сжатия Земли на близкий спутник (на расстоянии нескольких сотен километров), тогда как возмущающее действие Солнца примерно в 10^5 раз сильнее.

В сравнении с рассмотренными факторами релятивистские эффекты пренебрежимо малы. Например, угловая скорость вращения линии апсид близкого спутника Земли почти в миллион раз превышает угловую скорость, вызванную релятивистским смещением перигея. Поэтому оказывается возможным исследовать возмущения, вызванные сжатием центрального тела, независимо от действия возмущающих сил Солнца, Луны, других планет и релятивистских эффектов.

2.5. Прецессия орбиты и движение спутника в поле сфероида

За исключением Меркурия и Венеры, все планеты солнечной системы до Нептуна включительно обладают заметным сжатием. Сжатие всех внешних планет больше, чем сжатие Земли¹⁾.

Сжатие является одной из главных причин, приводящих к искажению гравитационного поля планеты, которое в отличие от поля с центральной симметрией превращается, грубо говоря, в эллипсоидальное силовое поле. Если искажение поля невелико, как в случае планеты Земля, то его можно рассматривать как квазицентрального.

Реализация круговой орбиты спутника в поле центрального тела возможна лишь в плоскости экватора в предположении, что центральное тело является двухосным (а не трехосным) эллипсоидом. В случае трехосного эллипсоида экваториальное сечение тела будет не кругом, а эллипсом, более или менее подобным сечению в плоскости меридиана, вследствие чего на движение спутника по экваториальной орбите будет оказывать влияние возмущающая сила, зависящая от географической долготы текущей точки. Для целей нашего исследования модель Земли может быть представлена в виде двухосного сфероида. Поэтому рассматриваемые возмущения не будут зависеть от географической долготы.

В случае наклоненной орбиты спутник после выхода из плоскости экватора будет подвержен действию поперечной силы. Эта сила, действующая в мгновенной меридиональной плоскости и направленная в сторону экватора, вызвана сосредоточением дополнительных масс по экваториальному поясу планеты

¹⁾ Что касается сжатия планеты Плутон, то в настоящее время оно неизвестно вследствие малой величины планеты и ее большого удаления.

(рис. 2.17). Чтобы нагляднее проиллюстрировать влияние сжатия планеты на ее поле притяжения, представим себе, что вся масса планеты сконцентрирована не в центре масс (как в случае сферического однородного тела), а «размещена» по площади круга, расположенного в плоскости экватора (на рис. 2.17 сечение этого круга по диаметру показано жирной линией).

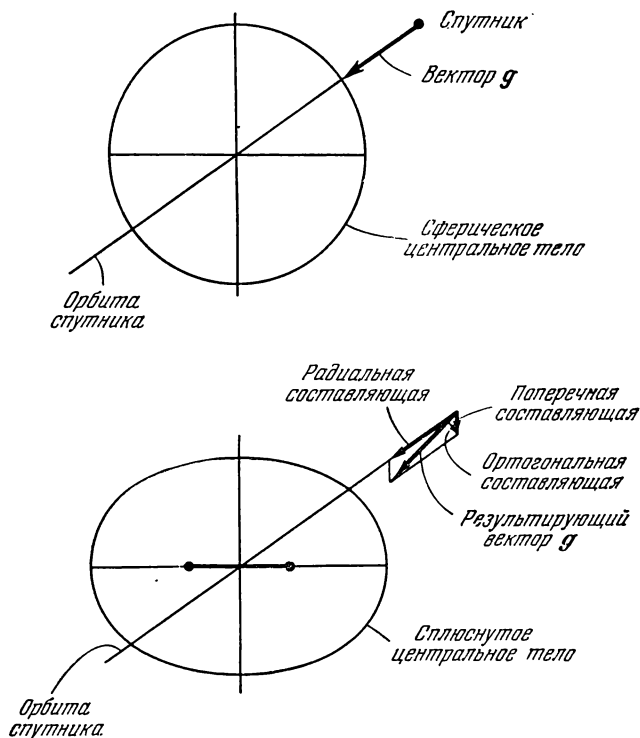


Рис. 2.17. Вектор силы притяжения сферического и сжатого центральных тел.

Вследствие этого направление силы притяжения уже не будет совпадать с направлением к центру тела. В зависимости от диаметра этого круга (то есть в зависимости от сжатия или относительной величины дополнительных экваториальных масс, которые, кроме сжатия, зависят еще и от распределения плотности внутри тела планеты) поперечная сила может иметь различную величину. Поперечная сила может быть разложена на две составляющие: одну в плоскости орбиты и вторую в направлении, нормальном плоскости орбиты. Последнюю

составляющую будем называть *ортогональной*. Позже будет показано (см. главу 3), что ортогональная сила, действующая на спутник в любой точке орбиты, за исключением узлов, всегда приводит к вращению линии узлов. Ясно, что при прохождении спутником плоскости экватора поперечная сила обращается в нуль. Вращение линии узлов является внешним проявлением прецессии орбиты (см. рис. 2.16, где точки E_1, E_2, E_3 изображают различные положения одной из точек узлов орбиты). Таким образом, составляющая силы притяжения g , ортогональная плоскости орбиты, является причиной, вызывающей прецессию орбиты. Из рис. 2.17 видно, что поперечная составляющая силы притяжения становится максимальной на широте $\varphi = 45^\circ$ и обращается в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$.

В первом томе ¹⁾ было показано, что потенциал силы притяжения Земли с учетом ее сжатия можно записать в виде

$$U = \frac{K}{r} (1 + \psi), \quad (2.32)$$

где r — радиальное расстояние до спутника от центра Земли, K — гравитационный параметр, а ψ — потенциал возмущающих сил, вызванных сжатием Земли. Потенциал Земли, форма которой принята за геоид, может быть аппроксимирован в виде суммы ряда (теоретически бесконечного), состоящего из сферических функций. При расчете потенциала на поверхности геоида наиболее подходящей системой координат является система, использующая радиальное расстояние от центра Земли $r_{90^\circ} \leq r \leq r_0$ (r_0 — радиус экватора, r_{90° — полярный радиус), дополнительный угол к широте $\vartheta = 90^\circ - \varphi$ и долготу λ . В наиболее общей форме потенциал записывается в следующем виде:

$$U = \frac{K}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{Mr^m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [A_{nm} \sin(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta) + B_{nm} \cos(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta)] \right\}, \quad (2.33a)$$

где M — масса Земли, n и m — целые положительные числа ($\infty \geq m \geq n \geq 0$), $P_m^n(\cos \vartheta)$ — так называемая присоединенная функция Лежандра, A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты, представляющие собой амплитуды сферических гармоник $\sin(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta)$ и $\cos(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta)$. Использование сферических функций основано на следующем. Если бы Земля имела форму идеальной сферы,

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, § 3.4. (Прим. ред.)

то движение по большому кругу (например, по меридиану) можно было бы представить как гармоническое, то есть как периодическое движение по закону, подобному закону изменения синуса. Движение по меридиану геоида значительно сложнее. Однако это сложное движение может быть представлено как результат суммы гармонических движений различной частоты и амплитуды. В принципе любое движение может быть разложено на гармоники при достаточно большом их количестве. Выражение (2.33а) представляет собой эту сумму гармоник для Земли, и при достаточно большом числе гармоник любая деталь контура земной поверхности может быть подобным образом описана аналитически. Все эти детали теоретически отражаются на отклонении орбиты спутника от кеплеровой орбиты, получающейся в предположении идеального центрального поля. На практике, в силу ограниченной точности определения орбит в настоящее время, достаточно ограничиться рассмотрением четырех первых гармоник, что означает замену геоида некоторой упрощенной его моделью, хотя и более точной, чем сфера (единственная гармоника). Сферические гармоники $\sin(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta)$ и $\cos(n\lambda) P_m^n(\cos \vartheta)$ называются *тессеральными сферическими функциями*. Они изменяют знаки в сферических прямоугольниках, ограниченных в севера и юга m - n параллелями, соответствующими нулевым значениям (n, m) -й зональной гармоники, а с запада и востока меридианами, отстоящими друг от друга на угол, равный $2\pi/n$. Зональная гармоника при $n=0$ является полиномом Лежандра $P_m(\cos \vartheta)$, который изменяет знак n раз между северным и южным полюсами ($0 \leq \vartheta \leq 180^\circ$). Короче говоря, зональные гармоники описывают отклонение меридиана от большого круга сферы, а тессеральные функции определяют отклонение экватора или параллели от окружности. Если геоид рассматривать как тело вращения, то экватор и параллели будут окружностями, и, следовательно, потенциал геоида не будет зависеть от долготы ($n=0$) и тессеральные функции в разложении потенциала будут отсутствовать, за исключением членов с $B_{0m}=B_m$. Наличие тессеральной функции порядка $n=1$, $m>1$ в разложении потенциала должно означать, что центр масс тела расположен не на полярной оси. Наличие тессеральной функции порядка $n=2$, $m=2$ должно указывать на то, что Земля может быть представлена в виде трехосного эллипсоида (то есть ее экватор не является окружностью)¹⁾. До настоящего времени коэффициенты при этих гармониках не могут быть определены с достаточной достоверностью. Для геоида в виде

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, сноску на стр. 195.

тела вращения выражение (2.33a) упрощается и приводится к виду

$$U = \frac{K}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m P_m(\cos \vartheta)}{M r^m} \quad (2.33b)$$

или, если используется экваториальная геоцентрическая система координат, записывается в виде

$$U = \frac{K}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m P_m(\sin \delta)}{M r^m}, \quad (2.33c)$$

где r — радиальное расстояние до точки орбиты, а δ — склонение рассматриваемой точки. Коэффициенты B_m характеризуют распределение масс внутри Земли:

$$B_m = \int_0^m (r')^m P_m(\cos \vartheta) dm', \quad (2.33d)$$

где r' — радиальное расстояние от центра Земли до элемента массы m' внутри Земли. Для полиномов Лежандра $P_m(\sin \delta)$, используя для краткости обозначение $\sin \delta = x$, можно записать:

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m = \\ &= \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)} x^{-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} x^{m-4} \pm \dots \right]. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} U &= \frac{K}{r} \frac{B_{00}}{M} P_0(\sin \delta) + \frac{K}{r} \frac{B_1}{M r} P_1(\sin \delta) + \frac{K}{r} \frac{B_2}{M r^2} P_2(\sin \delta) + \\ &\quad + \frac{K}{r} \frac{B_3}{M r^3} P_3(\sin \delta) + \frac{K}{r} \frac{B_4}{M r^4} P_4(\sin \delta) + \dots, \end{aligned}$$

где $P_0(\sin \delta) = 1$; B_{00} соответствует распределению массы геоида внутри сферы со средним радиусом геоида, то есть $B_{00} = M$; $P_1(\sin \delta) = \sin \delta$; $B_1 = 0$, если начало системы координат совпадает с центром масс Земли, что и имеет место в действительности. Для полинома Лежандра второго порядка, то есть для второй зональной гармоникки, имеем:

$$P_2(\sin \delta) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \delta - 1).$$

Коэффициент B_2 характеризует распределение масс с учетом сжатия Земли:

$$\frac{B_2}{M} = -\frac{2}{3} J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2,$$

где J часто называют коэффициентом второй гармоник:

$$J = \frac{3}{2} \frac{C - A}{Mr_0^2} = (1623,41 \pm 4) \cdot 10^6$$

[численное значение получено из наблюдений за движением спутника «Вангард-1» (см. таблицу 2.4)].

Сжатие (сплюснутость) определяется отношением разности между экваториальным r_0 и полярным r_{90° радиусами к экваториальному радиусу. В первом томе этой серии было приведено значение сжатия Земли $(r_0 - r_{90^\circ})/r_0 = 1/297$, определенное Хейфордом (1909 г.). Если бы Земля была жидким эллипсоидом, находящимся в гидростатическом равновесии, то при существующей угловой скорости вращения ее сжатие было бы равно¹⁾ $1/299,8$. На основании определений угловой скорости прецессии плоскости орбиты спутника «Вангард-1» было получено¹⁾ более точное значение сжатия Земли: $1/(298,2 \pm 0,2)$. Для третьей гармоник имеем:

$$P_3(\sin \delta) = \frac{1}{2} (5 \sin^2 \delta - 3 \sin \delta)$$

с периодом $P = 2\pi/n = 2\pi/3$ и

$$B_3 = -\frac{2}{5} H \left(\frac{r_0}{r} \right)^3,$$

где H часто называют коэффициентом третьей гармоник. Из наблюдений за движением спутника «Вангард-1» (см. таблицу 2.4) получено, что

$$H = (6,04 \pm 0,73) \cdot 10^{-6}.$$

Третья гармоника, как и все нечетные гармоники, характеризует несимметричность формы и распределение масс относительно плоскости экватора. Для эллипсоида эти гармоники равны нулю. Определение коэффициента третьей гармоник для Земли является одним из важных результатов, полученных из наблюдений за движением спутника «Вангард-1». Третья гармоника указывает на различие в форме северного и южного полушарий²⁾ (на «грушевидность» формы Земли). Численное значение коэффициента третьей гармоник указывает, что Северный полюс на 15 м выдается над поверхностью эллипсоида, а Южный полюс находится на 15 м под поверхностью

¹⁾ J. A. O'Keefe, Determination of the Earth's Gravitational Field, p. 448 in «Space Research». N. Kallmann Bijl (ed.), Proc. 1st Intern. Space Science Symposium., North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1960.

²⁾ J. A. O'Keefe, A. Eckels and R. K. Squires, Science, vol. 129. p. 565 (1959) and J. Geophys. Res., vol. 64, p. 2389 (1959).

эллипсоида и что амплитуда изменения расстояний точек «грушевидной» поверхности от поверхности эллипсоида составляет $\pm 7,5$ м при $\varphi = \pm 26^\circ,5$. Для четвертой гармоники имеем:

$$P_4(\sin \delta) = \frac{1}{8} (3 - 30 \sin^2 \delta + 35 \sin^4 \delta)$$

с периодом $2\pi/n = \pi/2$. Как видно, периоды гармоник убывают, указывая на все меньшие отклонения частей поверхности земного шара. Коэффициент B_4 характеризует отклонение в распределении масс в полушариях относительно плоскости экватора:

$$B_4 = \frac{4}{15} D \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \approx \frac{2}{7} D \left(\frac{r_0}{r} \right)^4,$$

где D называют¹⁾ коэффициентом четвертой гармоники. Из наблюдений за спутником «Вангард-1» (см. таблицу 2.4) получено, что

$$D = (6,37 \pm 0,23) \cdot 10^{-6}.$$

Гармоники более высоких порядков к настоящему времени еще не определены с достаточной точностью.

Итак, потенциал силы притяжения Земли в точке, имеющей склонение δ к плоскости экватора и удаленной от центра Земли на радиальное расстояние r , может быть принят приближенно равным:

$$U = \frac{K}{r} \left[1 + \frac{J}{3} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) + \frac{H}{5} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 (3 \sin \delta - 5 \sin^3 \delta) + \right. \\ \left. + \frac{D}{30} \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 (3 - 30 \sin^2 \delta + 35 \sin^4 \delta) \right]. \quad (2.34)$$

В последующем третья гармоника будет отброшена, чтобы использовать полученное выражение для модели Земли, симметричной относительно плоскости экватора, то есть для случая зависимости радиуса фигуры только от широты. Наконец, подставляя

$$\frac{J}{3} r_0^2 \equiv k_2, \quad \frac{D}{10} r_0^4 \equiv k_4,$$

получаем:

$$U = \frac{K}{r} \left[1 + \frac{k_2}{r^2} (1 + 3 \sin^2 \delta) + \frac{k_4}{r^4} \left(1 - 10 \sin^2 \delta + \frac{35}{3} \sin^4 \delta \right) \right]. \quad (2.35)$$

¹⁾ Вместо часто используемой буквы K здесь использовано обозначение D , чтобы не путать с гравитационным параметром $K = GM$.

Радиальная составляющая ускорения силы притяжения на поверхности ($r=r_{00}$) в зависимости от широты определяется выражением

$$-(g_{00})_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{K}{r_{00}^2} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r_{00}} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) + \right. \\ \left. + \frac{D}{6} \left(\frac{r_0}{r_{00}} \right)^4 (35 \sin^4 \delta - 30 \sin^2 \delta + 3) \right]. \quad (2.36a)$$

На экваторе

$$-(g_0)_r = -\frac{K}{r_0^2} \left(1 + J + \frac{1}{2} D \right).$$

Для невращающейся Земли эта величина равна $9,8142 \text{ м/сек}^2$. Поэтому

$$\frac{K}{r_0^2} = -\frac{9,8142}{1 + J + \frac{1}{2} D} = \frac{9,8142}{1,001629} \approx 9,7981 \text{ м/сек}^2.$$

Поперечная составляющая на поверхности определяется выражением

$$(g_{00})_t = \frac{1}{r_{00}} \left(\frac{\partial U}{\partial \delta} \right)_{r_{00}} = \frac{K}{r_{00}^2} \left[-2J \left(\frac{r_0}{r_{00}} \right)^2 \sin \delta \cos \delta + \right. \\ \left. + \frac{D}{30} \left(\frac{r_0}{r_{00}} \right)^4 (140 \sin^3 \delta \cos \delta - 60 \sin \delta \cos \delta) \right]. \quad (2.36b)$$

Графики зависимости радиальной и поперечной составляющих от широты φ (или склонения δ) приведены на рис. 2.18 и 2.19. При их вычислении использовались выражения (2.36a) и (2.36b). При этом зависимость радиуса r_{00} от широты φ принималась в виде

$$(r_{00})_\varphi \approx r_0 (0,99832 + 1,683494 \cdot 10^{-3} \cos 2\varphi - 3,549 \cdot 10^{-6} \cos 4\varphi), \quad (2.37)$$

где $r_0 = 6378388 \text{ м}$ — радиус экватора. На рис. 2.18 и 2.19 радиальное ускорение изменяется по-разному, так как его значение на поверхности определяется контуром сжатой Земли, а значения на высотах, приведенные на рис. 2.19, соответствуют точкам, равноудаленным от центра Земли, и, следовательно, высота над полюсом больше, чем над экватором.

При прецессии плоскости орбиты ее вращение происходит в сторону, обратную направлению движения спутника. Поэтому при запуске спутников в восточном направлении (восточном, северо-восточном, юго-восточном), то есть в тех случаях, когда наклонение орбиты к плоскости экватора находится в пределах $0 < i < 90^\circ$ (прямые орбиты), узлы орбиты перемещаются вдоль экватора в западном направлении (рис. 2.20, а). Для

обратных орбит, получаемых в результате запуска спутников в западном направлении, узлы орбиты перемещаются в восточном направлении (рис. 2.20, б). В астрономии принято измерять наклонение орбиты в восходящем узле от плоскости отсчета до плоскости орбиты против хода часовой стрелки. Таким образом,

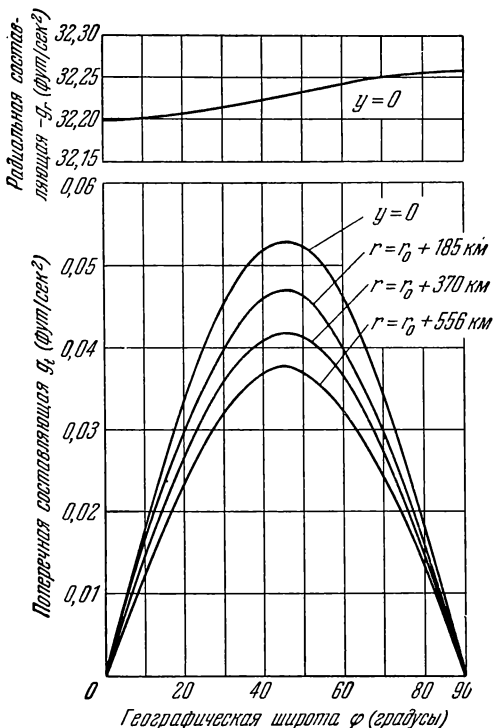


Рис. 2.18. Радиальная и поперечная составляющие ускорения силы притяжения Земли с учетом сжатия на поверхности и в точках, равноудаленных от центра Земли (радиальная составляющая без учета вращения Земли).

сферической Земли в геоцентрической системе координат задается радиальным расстоянием r , прямым восхождением α и склонением δ . Прямое восхождение измеряется от точки весеннего равноденствия против хода часовой стрелки (если смотреть с Северного полюса) и изменяется от 0 до 360° . Склонение δ

при наклонении $i > 90^\circ$ направление угловой скорости прецессии совпадает с направлением угловой скорости вращения Земли; при наклонении $i < 90^\circ$ направление угловой скорости прецессии противоположно направлению угловой скорости вращения Земли (регрессия).

В главе 3¹⁾ получено уравнение движения точки в поле центральной силы. Было показано, что движение является плоским. Однако если плоскость орбиты наклонена к плоскости, принятой за плоскость отсчета, то к радиальной дальности и истинной аномалии добавляется третья координата — угол места точки над или под плоскостью отсчета. Если за плоскость отсчета принята плоскость экватора, то этим углом является склонение δ .

Поэтому положение спутника на небесной сфере в случае однородной

¹⁾ См. «Космический полет», т. I.

измеряется от плоскости экватора и в северном полушарии принимается положительным, а в южном — отрицательным (рис. 2.21). Вектор скорости может быть представлен следующими составляющими: *радиальной*, *широтной* (параллельной плоскости экватора или направленной с запада на восток) и *меридиональной* (касательной к меридиану или параллельной направлению север—юг). Проекция вектора скорости на орбитальную плоскость в свою очередь может быть представлена *радиальной* и *трансверсальной* (под прямым углом к радиальной) составляющими. В поле центральной силы тело испытывает лишь радиальное ускорение, следовательно, трансверсальная, широтная и меридиональная составляющие ускорения равны нулю. Таким образом, для случая плоского движения, рассмотренного в главе 3, имеем для радиальной составляющей ускорения

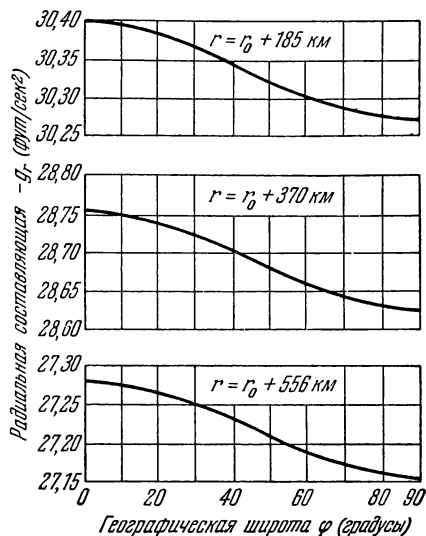


Рис. 2.19. Радиальная составляющая ускорения силы притяжения Земли с учетом сжатия для точек, равноудаленных от центра Земли.

$$\ddot{r} - r\dot{\eta}^2 = -\frac{K}{r^2} \quad (2.38)$$

и для трансверсальной составляющей ускорения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\eta}) = 2\dot{r}\dot{\eta} + r\ddot{\eta} = 0. \quad (2.39)$$

В геоцентрических координатах соответственно имеем:

для радиальной составляющей

$$\ddot{r} - r(\dot{\delta}^2 + \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2) = \ddot{r} - r\dot{\delta}^2 - r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2 = -\frac{K}{r^2}, \quad (2.40)$$

для меридиональной составляющей

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\delta}) + r \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2 = 0 \quad (2.41)$$

и для широтной составляющей

$$\frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha}) = 0. \quad (2.42)$$

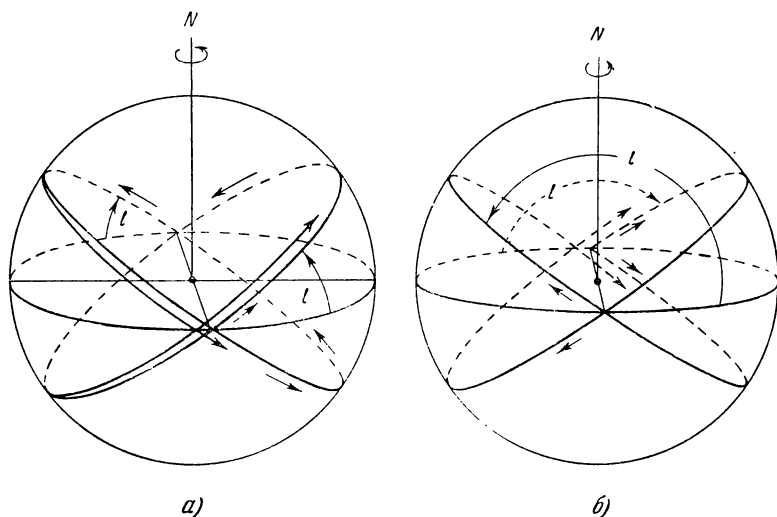


Рис. 2.20. Перемещение узлов прямой и обратной орбит при прецессии.

а) Перемещение узлов орбиты к западу (прецессия прямых орбит; $0 < i < 90^\circ$);
 б) перемещение узлов орбиты к востоку (прецессия обратных орбит; $90^\circ < i < 180^\circ$).

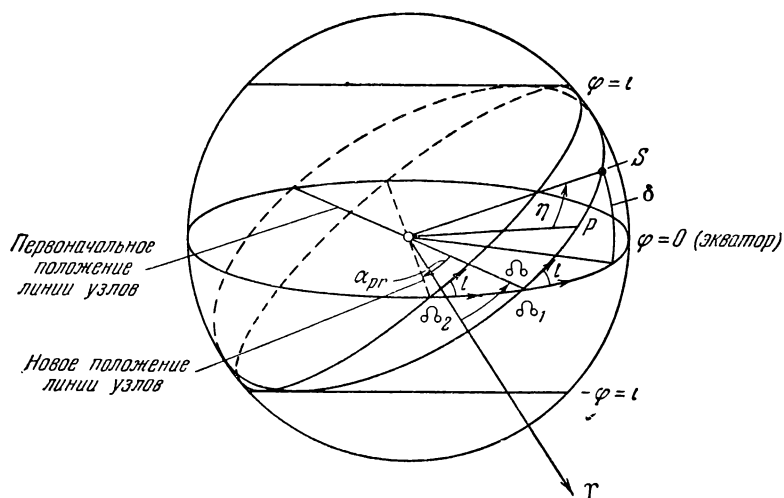


Рис. 2.21. Иллюстрация прецессии орбиты регрессией линии узлов (узел перемещается от Ω_1 к Ω_2 , то есть к западу на угол α_{pr} за данный промежуток времени).

Интегрирование уравнения (2.39) приводит ко второму закону Кеплера, устанавливающему постоянство кинетического момента $r^2\dot{\eta} = C$, где C — постоянная закона площадей Кеплера. Аналогичным образом интегрирование уравнения (2.42) немедленно приводит к равенству

$$r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha} = C_1, \quad (2.43)$$

где C_1 — постоянный кинетический момент орбиты в плоскости экватора. Теперь можно решить уравнение (2.41), содержащее меридиональную составляющую ускорения. Легко показать, что

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \iota \sin \alpha, \quad (2.44)$$

откуда, дифференцируя по времени и учитывая, что $\iota = \text{const}$, получаем:

$$\dot{\delta} \sec^2 \delta = \operatorname{tg} \iota \cos \alpha \dot{\alpha}.$$

Далее, воспользовавшись из соотношения (2.43) зависимостью между производными $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d}{d\alpha}$ в виде

$$\frac{d}{dt} = \frac{C_1}{r^2 \cos^2 \delta} \frac{d}{d\alpha},$$

перепишем уравнение (2.41) таким образом:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{C_1}{r} \frac{\dot{\delta}}{\cos^2 \delta} \right) - \frac{\dot{\alpha} \sin \delta \cos \delta}{r \cos^2 \delta} = 0,$$

где первый член может быть приведен к виду

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{C_1 \dot{\alpha}}{r} \operatorname{tg} \iota \cos \alpha \right) = - \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{C_1 \dot{\alpha}}{r} \operatorname{tg} \iota \sin \alpha \right).$$

Умножая оба члена на $-r/C_1 \dot{\alpha}$, получаем:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} (\operatorname{tg} \delta) + \operatorname{tg} \delta = 0. \quad (2.45)$$

При рассмотрении движения в плоскости орбиты угловая скорость движения по орбите определяется выражением

$$\dot{\eta} = \frac{C}{r^2},$$

а при анализе орбиты в пространстве

$$\dot{\eta} = \frac{C_1/r^2}{\cos \iota}, \quad (2.46)$$

где ι — наклонение орбиты относительно плоскости экватора,

Соответствующие выражения для $\dot{r}$ и $\ddot{r}$ имеют вид:
для орбиты в плоскости

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -r^2 \dot{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) = -C \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.47)$$

$$\ddot{r} = -C \dot{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.48)$$

для орбиты в пространстве

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{C_1}{\cos \iota} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.49)$$

$$\ddot{r} = -\frac{C_1}{\cos \iota} \dot{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{C_1^2/r^2}{\cos^2 \iota} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.50)$$

Наконец, в случае орбиты в пространстве по аналогии с равенством

$$r\dot{\eta}^2 = C^2/r^3,$$

справедливым для рассмотрения орбиты в плоскости, можно записать:

$$r\dot{\delta}^2 + r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2 = \frac{C_1^2/r^3}{\cos^2 \iota}. \quad (2.51)$$

Подставляя соотношения (2.50) и (2.51) в равенство (2.40), получаем выражение

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{K}{C_1^2} \cos^2 \iota, \quad (2.52)$$

интегрирование которого дает:

$$r = \frac{C_1^2/K}{(1 + e \cos \eta) \cos^2 \iota} = \frac{p_1}{1 + e \cos \eta}, \quad (2.53)$$

где, как и прежде, истинная аномалия отсчитывается от перигелия. Выражение (2.53) является общим уравнением орбиты относительно сферического тела в пространственной системе координат.

Движение спутника в поле центрального тела со сжатием уже не является плоским. В случае движения спутника с постоянной плоскостью орбиты относительно центрального тела сферической формы справедливы соотношения

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \iota \sin \alpha, \quad (2.44)$$

$$\cos \eta = \frac{\sin \delta}{\sin \iota}, \quad (2.54)$$

$$\sin \eta = -\cos \delta \cos \alpha, \quad (2.55)$$

Эти соотношения, очевидно, останутся справедливыми и для случая движения спутника относительно центрального тела со сжатием, если вместо α использовать величину $\alpha \pm \alpha_{\text{пр}}$, где $\alpha_{\text{пр}}$ — изменение прямого восхождения, вызванное прецессией орбиты (знак «плюс» соответствует западной, знак «минус» — восточной прецессии). Таким образом, для случая центрального тела со сжатием выражения (2.44), (2.54) и (2.55) следует заменить на такие:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \iota \sin (\alpha + \alpha_{\text{пр}}), \quad (2.56)$$

$$\cos \eta = \frac{\sin \delta}{\sin \iota}, \quad (2.57)$$

$$\sin \eta = -\cos \delta \cos (\alpha + \alpha_{\text{пр}}). \quad (2.58)$$

Запишем уравнения движения в следующей форме:

$$\ddot{r} - r\dot{\delta}^2 - r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\delta}) + r \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \delta}, \quad (2.60)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha}) = \frac{1}{r \cos \delta} \frac{\partial U}{\partial \alpha}. \quad (2.61)$$

Перепишем правую часть уравнения (2.59), используя соотношение (2.36а), в котором заменим r_{00} на r . Получим:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\delta}^2 - r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2 = & -\frac{K}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) + \right. \\ & \left. + \frac{D}{6} \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 (35 \sin^4 \delta - 30 \sin^2 \delta + 3) \right]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Аналогично поступим и с уравнением (2.60):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\delta}) + r \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2 = & \frac{K}{r^2} \left[-2J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sin \delta \cos \delta + \right. \\ & \left. + \frac{D}{30} \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 (140 \sin^3 \delta \cos \delta - 60 \sin \delta \cos \delta) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Третье уравнение после проведения подобной операции приведется к такому же виду, как и уравнение (2.42):

$$\frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha}) = 0, \quad (2.64)$$

так как U [см. соотношение (2.35)] не зависит от α . Это находится в полном согласии с ранее принятым допущением о том, что центральное тело является двухосным сфероидом и, следовательно, U не зависит от долготы (так что широтная составляющая силы, действующей на спутник, равна нулю),

Уравнение (2.64) было проинтегрировано ранее, и решение было приведено в виде (2.43). Уравнение (2.63) приводится к легко интегрируемому виду так же, как было приведено к такому виду уравнение (2.41):

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} (\operatorname{tg} \delta) + \operatorname{tg} \delta = \frac{Kr \cos^2 \delta}{C_1^2} \left[-2J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sin \delta \cos \delta + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 D \sin \delta \cos \delta (7 \sin^2 \delta - 3) \right], \quad (2.65)$$

где член четвертого порядка, содержащий D , является очень малой величиной.

Для центрального тела в виде сжатого сфероида, то есть для тела с осевой симметрией, отношение угла поворота плоскости орбиты к соответствующей величине изменения истинной аномалии является постоянным:

$$\frac{d\alpha_{\text{пр}}}{d\eta} = k. \quad (2.66)$$

Для определения величины k можно поступить следующим образом. Углы $\alpha_{\text{пр}}$ и δ входят в выражения (2.56) и (2.58). Образуем с помощью этих выражений такое уравнение, аналогичное уравнению (2.65), чтобы его левая часть совпадала с левой частью уравнения (2.65), а правая часть была выражена через величину k . Тогда, приравняв правые части этих уравнений, можно определить величину k . Эти преобразования достаточно просты, и поэтому они будут описаны здесь кратко. Дважды дифференцируя уравнения (2.56) по α и прибавляя к результату $\operatorname{tg} \delta$, получаем:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} (\operatorname{tg} \delta) + \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \iota \sin (\alpha + \alpha_{\text{пр}}) \left[1 - \left(1 + k \frac{d\eta}{d\alpha} \right)^2 \right] + \\ + \operatorname{tg} \iota \cos (\alpha + \alpha_{\text{пр}}) k \frac{d^2 \eta}{d\alpha^2}. \quad (2.67)$$

Для исключения производных $d\eta/d\alpha$ и $d^2\eta/d\alpha^2$ найдем из равенств (2.57) и (2.58) выражения для искомых производных, а выражение для $d(\operatorname{tg} \delta)/d\alpha$ найдем из равенства (2.56). В результате запишем:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \left(1 - k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right)^{-1} \approx \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \quad (k \ll 1), \quad (2.68)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\alpha^2} = -2 \sin \delta \cos^3 \delta \cos (\alpha + \alpha_{\text{пр}}) \frac{\sin \iota}{\cos^2 \iota} \left(1 - k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right)^{-3}. \quad (2.69)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.67) и исключая $\cos(\alpha + \alpha_{\text{пр}})$ с помощью соотношения (2.56), после дифференцирования по α получаем:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} (\text{tg } \delta) + \text{tg } \delta = -2k \frac{\sin \delta \cos^3 \delta}{\cos^3 \iota}. \quad (2.70)$$

Отсюда, сравнивая полученное выражение с (2.65), имеем:

$$k = J \frac{K}{C_1^2} \frac{r_0^2}{r} \cos^3 \iota. \quad (2.71)$$

Теперь легко определить угол поворота плоскости орбиты за время прохождения спутником центрального угла η . Интегрируя соотношение (2.66), получаем:

$$\alpha_{\text{пр}} = k\eta. \quad (2.72)$$

Для решения уравнения (2.62) необходимо найти $\dot{\delta}$, $\dot{r}$, $\dot{r}$ и $\dot{\alpha}$. Дифференцируя (2.57) по времени и исключая $\sin \eta$ и $\cos \delta$ с помощью (2.58), получаем:

$$\dot{\delta} = \sin \iota \cos(\alpha + \alpha_{\text{пр}}) \dot{\eta}. \quad (2.73)$$

Далее из (2.68) и (2.43) находим:

$$\dot{\eta} \approx \frac{C_1}{r^2 \cos \iota} \left(1 + k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right) \quad (k \ll 1), \quad (2.74)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = -r^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\eta} = -\frac{C_1}{\cos \iota} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right), \quad (2.75)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\eta} \dot{\eta} = -\frac{C_1}{\cos \iota} \dot{\eta} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\dot{\eta} r^2 \cos \iota}{C_1} - 2k \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\sin \delta \cos \delta}{\cos \iota} \frac{d\delta}{d\eta} \right], \quad (2.76)$$

где величина $\cos \delta \frac{d\delta}{d\eta}$ с помощью соотношения (2.54) может быть представлена так:

$$\cos \delta \frac{d\delta}{d\eta} = -\sin \iota \sin \eta. \quad (2.77)$$

Кроме того, член $(k \cos^2 \delta / \cos \iota) \ll 1$, так что

$$1 + k \cos^2 \delta / \cos \iota \approx 1 \quad \text{и} \quad (1 + k \cos^2 \delta / \cos \iota)^2 \approx 1 + 2k \cos^2 \delta / \cos \iota.$$

Следовательно,

$$\dot{r} \approx -\frac{C_1^2}{r^2 \cos^2 \iota} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + 2k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right) + 2k \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) \sin \delta \text{tg } \iota \sin \eta \right]. \quad (2.78)$$

Итак, выражение для $\ddot{r}$ записано. Выражение для $r\dot{\delta}^2$ можно получить из соотношений (2.73) и (2.74), а выражение для $r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2$ может быть определено с помощью уравнения (2.43), так что

$$r\dot{\delta}^2 + r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2 = \frac{C_1^2}{r^3 \cos^2 \iota} \left(1 + 2k \sin^2 \eta \frac{\sin^2 \iota}{\cos \iota} \right). \quad (2.79)$$

Записав уравнение (2.62) без членов четвертого порядка в виде

$$\ddot{r} - (r\dot{\delta}^2 + r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2) = - \frac{K}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) \right] \quad (2.80)$$

и подставив в его левую часть выражения (2.78) и (2.79), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + 2k \frac{\cos^2 \delta}{\cos \iota} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r} \right) 2k \sin \delta \sin \eta \operatorname{tg} \iota + \\ & + \frac{1}{r} \left(1 + 2k \frac{\sin^2 \iota}{\cos \iota} \sin^2 \eta \right) = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) \right] \end{aligned} \quad (2.81a)$$

или для малых значений k

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \approx \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) \right]. \quad (2.81b)$$

Уравнение (2.81b) отличается от уравнения (2.52) только правой частью. Поэтому интеграл уравнения (2.81b) может быть записан в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} (1 + e \cos \eta + J f_2), \quad (2.82)$$

где величина f_2 является функцией, представляющей собой вариации второго порядка относительно r . Таким образом, проинтегрировав уравнение (2.81b), можно определить величину f_2 . Чтобы проинтегрировать это уравнение, необходимо учесть, что в соответствии с (2.57) δ является функцией η . Следовательно,

$$1 - 3 \sin^2 \delta = 1 - 3 \sin^2 \iota \cos^2 \eta = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \cos 2\eta.$$

Интегрирование сильно упрощается, если в правой части исключить член $1/r^2$. Это можно сделать, если в соответствии с равенством (2.82) принять $1/r \approx K \cos^2 \iota / C_1^2$. Тогда уравнение (2.81b) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \left\{ 1 + J r_0^2 \frac{K^2 \cos^4 \iota}{C_1^4} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \cos 2\eta \right] \right\}. \end{aligned}$$

Полагая теперь

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \chi'', \quad \frac{1}{r} = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \chi,$$

дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\chi'' + \chi = 1 + Jr_0^2 \frac{K^2 \cos^4 \iota}{C_1^4} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) - \frac{3}{2} Jr_0^2 \frac{K \cos^4 \iota}{C_1^4} \sin^2 \iota \cos^2 \eta$$

и после интегрирования получить:

$$\chi = 1 + Jr_0^2 \frac{K^2 \cos^4 \iota}{C_1^4} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) + e \cos \eta + \frac{1}{2} Jr_0^2 \frac{K^2 \cos^4 \iota}{C_1^4} \sin^2 \iota \cos 2\eta.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r} = \frac{K \cos^2 \iota}{C_1^2} \left\{ 1 + e \cos \eta + Jr_0^2 \frac{K \cos^4 \iota}{C_1^4} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) + \frac{1}{2} \sin^2 \iota \cos 2\eta \right] \right\},$$

где третье слагаемое в правой части и есть величина f_2 . Вынеся множитель $1/2$ за квадратные скобки и преобразовав полученное слагаемое $(2 - 3 \sin^2 \iota)$ к виду $(3 \cos^2 \iota - 1)$, получим следующее выражение для величины f_2 :

$$f_2 = \frac{K \cos^4 \iota}{2C_1^4} r_0^2 (3 \cos^2 \iota + \sin^2 \iota \cos 2\eta - 1). \quad (2.83)$$

Таким образом, получим уравнение орбиты относительно центрального тела со сжатием с учетом вариаций второго порядка величины радиуса-вектора в следующем виде:

$$r = \frac{C_1^2 / K \cos^2 \iota}{1 + e \cos \eta + J f_2}. \quad (2.84a)$$

Обозначив, как и в уравнении (2.53),

$$\frac{C_1^2}{K \cos^2 \iota} = p_1 \quad (2.84b)$$

и подставив в выражение для f_2 , перепишем уравнение орбиты так:

$$r = \frac{p_1}{1 + e \cos \eta + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 (3 \cos^2 \iota + \sin^2 \iota \cos 2\eta - 1)}. \quad (2.84c)$$

Для экваториальной орбиты оно принимает вид:

$$r_{i=0} = \frac{C_1^2/K}{1 + e \cos \eta + Jr_0^2 \frac{K^2}{C_1^4}}, \quad (2.84d)$$

а для околополярной орбиты записывается так:

$$r_{i \rightarrow 90} \approx \frac{p_1}{1 + e \cos \eta + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 (\cos 2\eta - 1)}. \quad (2.84e)$$

Для экваториальной орбиты, как следует из уравнения (2.84d), имеет место лишь зависимость изменения радиуса-вектора первого порядка от истинной аномалии, так что для круговых орбит ($e=0$) радиальное расстояние является постоянным. Этот результат находится в полном согласии с первоначально принятой моделью двухосного сфероида, допускающей принципиальную возможность существования строго круговой орбиты только в экваториальной плоскости. На полярной орбите влияние сжатия центрального тела на радиальное расстояние является максимальным.

Рассмотрим околокруговую полярную орбиту, истинную аномалию на которой будем отсчитывать от восходящего узла (то есть $\eta = \varphi$, где φ — широта). Из уравнения (2.84e) следует, что даже при $e \approx 0$ величина радиуса-вектора зависит от истинной аномалии из-за наличия члена второго порядка. Этот член является отрицательным, за исключением случая экваториальной плоскости, что указывает на то, что для орбиты, определяемой центральным телом со сжатием, радиальное расстояние больше, чем для орбиты с тем же кинетическим моментом, но определяемой сферическим телом радиуса, равного экваториальному радиусу тела со сжатием. Наоборот, радиус экваториальной орбиты уменьшается по сравнению с радиусом орбиты, определяемой сферическим телом радиуса, равного полярному радиусу тела со сжатием, вследствие наличия дополнительных экваториальных масс.

Для среднего радиального расстояния от центра Земли имеем:

$$\frac{1}{r^0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta=0}^{2\pi} \frac{1}{r} d\eta, \quad (2.85)$$

где r определяется уравнением (2.84c). В результате интегрирования получаем:

$$r^0 = \frac{p_1}{1 + J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right)} = \frac{p_1}{1 + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1)}, \quad (2.86)$$

откуда

$$p_1 = r^0 \left[1 + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right]. \quad (2.87)$$

Это является вариантом второго порядка для параметра, входящего в уравнение (2.53) и имеющего вид $p_1 = r \cos^2 \iota$ для круговой орбиты радиуса r относительно сферического центрального тела.

Для периода обращения спутника относительно восходящего узла, определяемого как интервал времени между двумя последовательными прохождениями спутником восходящего узла, имеем:

$$T_{\Omega} = \int_{\eta=0}^{2\pi} \frac{d\eta}{\dot{\eta}}, \quad (2.88)$$

где $\dot{\eta}$ определяется из равенства (2.74), а r — из равенства (2.84с). Интегрирование этого уравнения с использованием соотношения (2.84b) дает:

$$T_{\Omega} = 2\pi \frac{C_1^3}{K^2 \cos^3 \iota} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \frac{K^2 \cos^4 \iota}{C_1^4} r_0^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] \quad (2.89a)$$

или

$$T_{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{p_1^3}{K}} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right]. \quad (2.89b)$$

Из равенства (2.87), полагая $\frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \ll 1$, получаем:

$$\left(\frac{p_1}{r^0} \right) \approx 1 + J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \approx 1. \quad (2.90)$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} T_{\Omega} &= 2\pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \sqrt{\frac{p_1}{r^0}} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \left(\frac{r_0}{p_1} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \sqrt{\frac{r^0}{p_1}} \left(\frac{p_1}{r^0} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \left(\frac{r^0}{p_1} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \sqrt{\frac{r^0}{p_1}} \left[1 + J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \left[1 - J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] \right\} \approx \\ &\approx 2\pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \sqrt{\frac{r^0}{p_1}} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right]. \end{aligned}$$

С учетом равенства (2.87) находим:

$$\sqrt{\frac{r_0}{p_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r_0}\right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1)}} \approx 1 - \frac{1}{4} J \left(\frac{r_0}{r_0}\right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1).$$

Пренебрегая членами, содержащими произведение J на e^2 или J на J , запишем:

$$T_{\Omega} \approx 2\pi \sqrt{\frac{(r_0^3)}{K} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{5}{4} J \left(\frac{r_0}{r_0}\right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right]}. \quad (2.91)$$

Отсюда следует, что для экваториальной орбиты ($\cos^2 \iota = 1$) период T_{Ω} (в данном случае совпадающий с периодом T_{sid}) меньше периода, соответствующего такому же орбитальному расстоянию от центра сферической Земли полярного радиуса, так как члены второго порядка не обращаются в нуль. Этот результат находится в согласии с выражением (2.84с).

2.6. Оценка предыдущего анализа

Уравнения движения в силовом поле центрального тела со сжатием были получены в предположении, что расстояние от центра притяжения изменяется на небольшую величину, так как при выводе удерживались лишь полиномы Лежандра второго порядка [член четвертого порядка в уравнении (2.62) был отброшен]. Учет члена только второго порядка позволяет рассматривать орбитальные эксцентриситеты, величина которых имеет порядок $0 \leq J^{1/2} \leq 4 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, уравнения движения с учетом члена второго порядка охватывают влияния, вызывающие изменения эксцентриситета на величину порядка $J \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$. Очевидно, при рассмотрении эксцентриситетов более высокого порядка необходимо учитывать эффекты более высокого порядка, вызываемые разницей между изменениями возмущающего и центрального полей в зависимости от расстояния. Поэтому предыдущий анализ справедлив для околоземных орбит с эксцентриситетом $e \leq 0,04$, что соответствует отношению апогейного расстояния к перигейному расстоянию $r_A/r_P = n = (1+e)/(1-e) \approx 1,0833$. Для орбиты с высотой в перигее $y_P = 556$ км соответствующая этому отношению высота в апогее будет $y_A = 1128$ км или, если $y_A = 556$ км, то $y_P = 46,2$ км.

Величина K при предыдущем анализе была принята на основании уравнения, следующего после выражения (2.36а), а величина экваториального радиуса — на основании уравнения (2.37). При этом $K = 1,40772 \cdot 10^{16}$ фут³/сек², что несколько больше значения $K = 1,40752 \cdot 10^{16}$ фут³/сек² ($3,9858 \cdot 10^5$ км³/сек²), приве-

денного в таблице 3.16¹⁾. Числовые данные, относящиеся к Земле с учетом сжатия, приведены в таблице 2.4.

Т а б л и ц а 2.4

Данные, относящиеся к Земле со сжатием *)

Экваториальный радиус $a = (r_{00})_0 = r_0 =$	$= 6\,378\,388\text{ м} = 3\,444\,058\text{ морских миль} =$
	$= 20\,926\,425,8\text{ фут (США).}$
Полярный радиус $b = (r_{00})_{90^\circ} = 0,996632a =$	$6\,356\,912\text{ м} = 3\,432\,458\text{ морских миль} = 20\,855\,745,6\text{ фут (США)}$
Сжатие $(r_0 - b)/r_0 = 1/298,2 \pm 0,2$ (вычислено по скорости прецессии орбиты спутника «Вангард-1»).	
Полярный момент инерции $C = 0,3339\text{ Mr}_0^2$	
Экваториальный момент инерции $A = (C - 0,0010926)/\text{Mr}_0^2$	
Масса Земли $M = 5,977 \cdot 10^{27}\text{ г.}$	
Отношение моментов инерции $(C - A)/A = 1/305,6$	
Динамическое сжатие $H = (C - A)/C = 0,0032726 \pm 0,00000069$	
Коэффициент второй гармоники $J = (1623,41 \pm 4) \cdot 10^{-6}$ («Вангард-1»).	
Коэффициент третьей гармоники $H = (6,04 \pm 0,73) \cdot 10^{-6}$ («Вангард-1»).	
Коэффициент четвертой гармоники $D = (6,37 \pm 0,23) \cdot 10^{-6}$ («Вангард-1»).	
Коэффициент пятой гармоники	
Объем Земли $V = \frac{4}{3} \pi r_0^2 b = 1,0833198 \cdot 10^{21}\text{ м}^3$	
Радиус сферы равновеликого объема $r_{\text{eq}} = 6\,371\,221,3\text{ м} = 0,9989a$	
Средние солнечные сутки $86\,400\text{ сек} = 24\text{ час.}$	
Звездные сутки $86\,164\text{ сек} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$	
Угловая скорость вращения $\omega = 2\pi/86\,164 = 7,2921 \cdot 10^{-5}\text{ сек}^{-1}$ (звездные) =	
$= 4,17806 \cdot 10^{-3}\text{ град/сек}$ (звездные) =	
$= 360^\circ/24^{\text{h}} = 15\text{ град/час}$ (средние солнечные) =	
$= 4,18 \cdot 10^{-3}\text{ град/сек}$ (средние солнечные).	

Окружная скорость:

на экваторе: $2\pi a/86\,164 = 465,12\text{ м/сек} = 1526\text{ фут/сек.}$

на широте φ : $2\pi (r_{00}) \varphi/86\,164 \approx 465,12 \cos \varphi\text{ м/сек} \approx 1526 \cos \varphi\text{ фут/сек.}$

Радиус Земли на широте φ

$$(r_{00})_\varphi \approx r_0 (0,998320047 + 0,001683494 \cos 2\varphi).$$

*) Коэффициенты гармоник, полученные на основании наблюдений за изменением орбиты спутника «Вангард-1», заимствованы из: J. A. O'Keefe, A. Eskels, R. K. Squires, Astron. J., vol. 64, No. 7, p. 245. См. также: L. G. Jacchia, Специальный отчет № 19 Астрофизической обсерватории Смитсоновского института (6 декабря 1958). Величину пятой гармоники следует проставить в таблице после получения достаточно точного ее значения. Данные, не имеющие ссылок на спутник «Вангард-1», получены до запуска спутников и могут быть заменены более точными данными.

Если упростить равенство (2.86), полагая $p_1 \approx r^0$, то радиальное расстояние, определяемое равенством (2.86), может быть

¹⁾ См. «Космический полет», т. I.

выражено через среднее радиальное расстояние r^0 следующим образом:

$$r = \frac{r^0}{1 + e \cos \eta + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota + \sin^2 \iota \cos 2\eta - 1)} \quad (2.92)$$

Воспользовавшись разложением $1/(1+x) \approx 1 - x + x^2 - \dots$ для $x \ll 1$, уравнение (2.53) можно переписать в виде

$$r^{(1)} = p_1 (1 - e \cos \eta), \quad (2.93)$$

где $r^{(1)}$ обозначает первое приближение для радиального расстояния. Используя другое выражение для p_1 , а именно выражение (2.87), получаем:

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= r^0 \left[1 + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right] (1 - e \cos \eta), \\ r^{(1)} &= r^0 \left[1 - e \cos \eta + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Записывая выражение (2.92) в такой же форме, как и выражение (2.94), и используя зависимость $r^{(2)} \equiv r$ для обозначения второго приближения для r , получаем:

$$r^{(2)} = r^0 \left[1 - e \cos \eta - \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota + \sin^2 \iota \cos 2\eta - 1) \right]. \quad (2.95)$$

Вычитая, найдем разницу между радиальными расстояниями, определяемыми зависимостями второго и первого приближений:

$$r^{(2)} - r^{(1)} = -\frac{1}{2} r^0 J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (6 \cos^2 \iota + \sin^2 \iota \cos 2\eta - 2). \quad (2.96)$$

Отсюда следует, что для экваториальной орбиты $r^{(2)} < r^{(1)}$:

$$r^{(2)} - r^{(1)} = -2r^0 J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2. \quad (2.97)$$

Для полярной орбиты $r^{(2)} > r^{(1)}$:

$$r^{(2)} - r^{(1)} = -\frac{1}{2} r^0 J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (\cos 2\eta - 2). \quad (2.98)$$

На рис. 2.22 сплошными линиями представлены графики, рассчитанные по зависимостям (2.96) — (2.98) для круговой орбиты ($e=0$) среднего радиуса $r^0 = 1,1r_0$ (r_0 — экваториальный радиус), что соответствует средней высоте орбиты $y^0 = 637$ км. Расчеты проведены для трех значений наклона: $\iota = 0; 45^\circ; 90^\circ$. Для сравнения пунктирными линиями показаны графики величины разности между экваториальным радиусом r_0 и радиусом поверхности r_{00} на широте φ . Если спутник движется по строго круговой полярной орбите, то его высота над полюсом будет на 21,5 км больше, чем над экватором. В действительности, для

решения второго порядка эта разница уменьшается с 21,5 км до 14,3 км. Подобное явление наблюдается и при $\iota=45^\circ$. В данном случае связь между истинной аномалией η и широтой φ будет

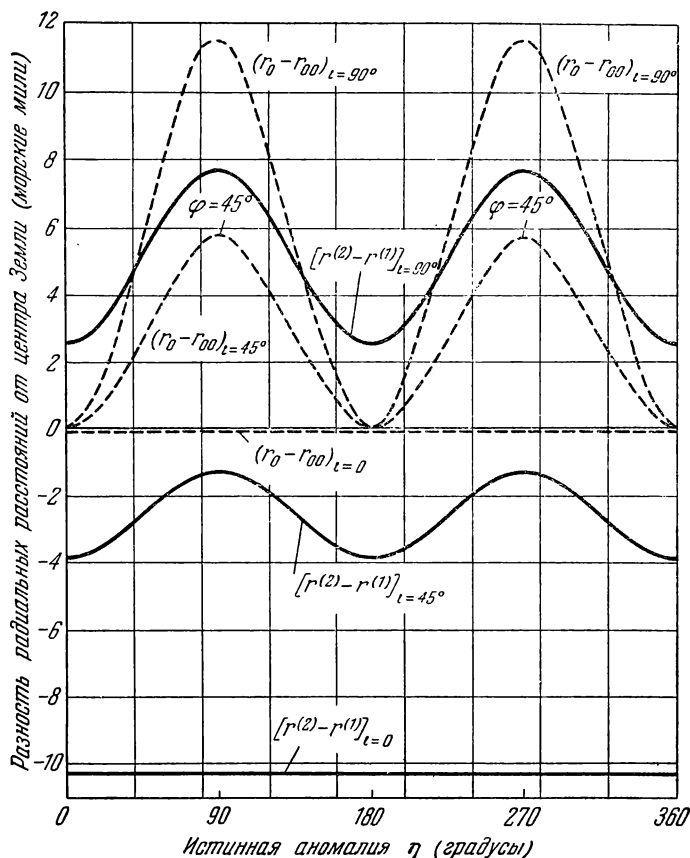


Рис. 2.22. Разность между экваториальным радиусом r_0 и радиусом поверхности r_{00} (пунктирные линии) и разность $[r^{(2)} - r^{(1)}]$ между радиальными расстояниями из решения второго порядка и решения первого порядка (сплошные линии) для круговой орбиты ($e=0$) при $r^0/r_0=1,1$ и средней высоте $y^0=637$ км.

не такой простой, как для полярной орбиты ($\eta=\varphi$), а $\varphi=45^\circ \sin \eta$, считая $\eta=0$ в перигентре орбиты, лежащем в плоскости экватора. Опорные данные для графиков, приведенных на рис. 2.22, сведены в таблицу 2.5.

Т а б л и ц а 2.5

Данные, относящиеся к рис. 2.22

$(r_{00})_{\varphi} = r_0 (0,99832 + 0,0016835 \cos 2\varphi)$					
$\varphi, \text{град}$	0	30	45	60	90
$(r_{00})_{\varphi}/r_0$	1,0	0,9991618	0,998320	0,997478	0,996636
$(r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	3444	3441	3438	3435	3432
$r_0 - (r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	0	2,9	5,8	8,7	11,6
$\eta, \text{град}$	0	30	45	60	90
$\varphi = 45^\circ \sin \eta$	0	22,5	31,8	39,0	45,0
$r_0 - (r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	0	1,5	3,1	4	5,8
$\varphi, \text{град}$	120	135	150	180	
$(r_{00})_{\varphi}/r_0$	0,997478	0,998320	0,9991618	1,0	
$(r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	3435	3438	3441	3444	
$r_0 - (r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	8,7	5,8	2,9	0	
$\eta, \text{град}$	120	135	150	180	
$\varphi = 45^\circ \sin \eta$	39,0	31,8	22,5	0	
$r_0 - (r_{00})_{\varphi}, \text{морские мили}$	4	3,1	1,5	0	

Период обращения между двумя последовательными прохождениями восходящего узла T_{Ω} определяется выражением (2.91). Разность между T_{Ω} и звездным периодом обращения T_{sid} для орбиты с большой полуосью, равной r^0 , в поле центральной силы при одинаковых значениях K определяется выражением

$$T_{\Omega} - T_{\text{sid}} = 2\pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \left[\frac{3}{2} e^2 - \frac{4}{5} J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 (3 \cos^2 \iota - 1) \right], \quad (2.99)$$

которое для экваториальной орбиты имеет вид:

$$(T_{\Omega} - T_{\text{sid}})_{\iota=0} = \pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \left[3e^2 - 5J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \right], \quad (2.100)$$

а для полярной орбиты записывается в виде

$$(T_{\Omega} - T_{\text{sid}})_{\iota=90^\circ} = \pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \left[12e^2 + 10J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \right]. \quad (2.101)$$

Таким образом, для полярной орбиты $T_{\Omega} > T_{\text{sid}}$ (при допущении, что $a=r^0$ и значение K одинаково в обоих сравниваемых слу-

чаях), тогда как для экваториальной орбиты $T_{\Omega} \geq T_{\text{sid}}$ в зависимости от величин e и r^0 . В предельном случае, когда $r^0 = r_0$, разность $T_{\Omega} - T_{\text{sid}}$ для экваториальной орбиты обращается в нуль при эксцентриситете $e = \sqrt{J} \approx 4 \cdot 10^{-2}$, который, в соответствии с данным в начале настоящего параграфа определением, приближенно является верхним пределом эксцентриситетов рассматриваемых здесь орбит. Для случая, когда $r^0 > r_0$, эксцентриситеты, для которых $T_{\Omega} - T_{\text{sid}} = 0$, уменьшаются. Для круговых орбит $T_{\Omega} < T_{\text{sid}}$ при всех расстояниях, удовлетворяющих неравенству $r^0/r_0 < \infty$. При этом разница составляет $1,5J(r_0/r^0)^2$. Для орбитальных расстояний $r^0 > r_0$ и эксцентриситетов порядка $4 \cdot 10^{-2}$ имеет место неравенство $T_{\Omega} < T_{\text{sid}}$.

Для экваториальной орбиты выражение (2.91) приобретает вид:

$$(T_{\Omega})_{i=0} = \pi \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \left[2 + 3e^2 - 5J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \right]. \quad (2.102)$$

Поэтому период обращения $(T_{\Omega})_i$ по наклонной орбите больше, чем период обращения по экваториальной орбите:

$$(T_{\Omega})_i - (T_{\Omega})_{i=0} = \frac{15}{2} \pi J \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \sqrt{\frac{(r^0)^3}{K}} \sin^2 i. \quad (2.103)$$

Для периода прецессии орбиты имеем:

$$T_{\text{pr}} = \frac{T_{\Omega}}{d\alpha_{\text{pr}}/d\eta}, \quad (2.104)$$

где из выражений (2.66) и (2.71)

$$d\alpha_{\text{pr}}/d\eta = k = J \frac{K}{C_1^2} \frac{r_0^2}{r} \cos^2 i = \frac{J r_0^2 \cos i}{\rho_1 r}. \quad (2.105)$$

Используя соотношения (2.84b) и (2.87), выражение для k можно записать в виде

$$k = J \cos i \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2 \left[1 + e \cos \eta + \frac{1}{2} J \left(\frac{r_0}{\rho_1} \right)^2 (3 \cos i + \sin^2 i \cos 2\eta - 1) \right]$$

или, пренебрегая членами старше второго порядка, в виде

$$k \approx J \cos i \left(\frac{r_0}{r^0} \right)^2. \quad (2.106)$$

Отсюда

$$T_{\text{pr}} \approx \frac{T_{\Omega}}{J \cos i} \left(\frac{r^0}{r_0} \right)^2 \approx \frac{T_{\text{sid}}}{J \cos i} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2. \quad (2.107a)$$

Для экваториальной орбиты это выражение принимает вид:

$$T_{\text{пр}} \approx \frac{T_{\delta\Omega}}{J} \left(\frac{r^0}{r_0} \right)^2 \approx \frac{T_{\text{sid}}}{J} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2, \quad (2.107b)$$

где $a = r_p / (1 - e)$ — большая полуось эллиптической орбиты, r_p — перигейное расстояние. Другие приближенные выражения

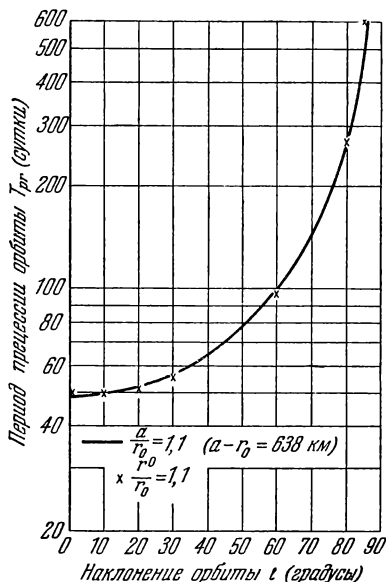


Рис. 2.23. Сравнение периодов прецессии орбиты по решениям второго [уравнение (2.107а)] и первого порядков (околокруговые орбиты).

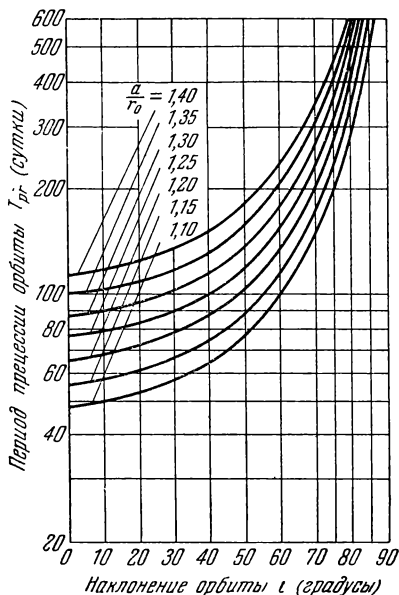


Рис. 2.24. Период прецессии орбиты $T_{\text{пр}}$ в зависимости от наклона орбиты (решение первого порядка; орбита околокруговая; a — большая полуось).

для правых частей выражений (2.107) можно получить, используя данные, относящиеся к полю центральной силы, и заменяя $T_{\delta\Omega}$ на T_{sid} и r^0 на a . Эти приближенные выражения были приведены в первом томе¹⁾ и для многих целей являются достаточно точными. О точности замены решения второго приближения решением первого приближения можно судить по графику, приведенному на рис. 2.23. На рис. 2.24 приведены графики изменения периода прецессии орбиты в зависимости от наклона

¹⁾ См. «Космический полет», т. I.

орбиты, полученные на основании решения первого приближения [то есть с приближенным выражением правой части равенства (2.107а)]. В качестве параметра выбрано отношение среднего радиального расстояния первого приближения (то есть большой полуоси a) к экваториальному радиусу r_0 Земли. Необходимо помнить, что графики, изображенные на рис. 2.24, справедливы лишь для околокруговых орбит ($e \leq 0,04$), хотя ими можно пользоваться для приближенного определения периода прецессии орбит и с большими эксцентриситетами. Для круговых орбит вместо большой полуоси a берется радиус орбиты r .

Таким образом, период прецессии орбиты в первую очередь зависит от наклона орбиты и в меньшей степени от радиального расстояния, если влияние последнего учитывается, как в случае, приведенном на рис. 2.24. Равенство (2.107а) показывает, что в случае полярной орбиты $T_{\text{пр}}$ обращается в бесконечность. При очень малых наклонениях (околоэкваториальные орбиты) период прецессии приближается к своему наименьшему значению и зависит, по существу, только от радиального расстояния.

Период прецессии орбиты, определяемый равенствами (2.107), относится к координатной системе, фиксированной в абсолютном пространстве (то есть в инерциальном пространстве), а не к системе, связанной с некоторой точкой на поверхности вращающейся Земли. В качестве такой точки на поверхности Земли выберем точку, над которой в данный момент расположено Солнце, или, другими словами, точку, через которую проходит прямая «Земля — Солнце». Выбор этой точки, являющейся центром освещенной части Земли, дает определенные преимущества при оценке условий оптического наблюдения и освещенности спутника. Таким образом, плоскостью отсчета становится плоскость, проходящая через центр Земли и расположенная нормально к гелиоцентрическому радиусу-вектору Земли. Эта плоскость вследствие движения Земли вокруг Солнца совершает один полный оборот за один год. Если бы Солнце было удалено на бесконечно большое расстояние, позволяющее считать движение Земли прямолинейным практически для любого отрезка времени, то $T_{\text{пр}}$ определяло бы изменение солнечной радиации, проходящей на спутник, при данных значениях наклона орбиты и радиального расстояния. Однако поскольку Земля движется относительно Солнца по околокруговой орбите и совершает полный оборот относительно Солнца за 365,25 сут, то период прецессии относительно плоскости, нормальной к гелиоцентрическому радиусу-вектору Земли, должен отличаться от периода прецессии в абсолютном пространстве. Это можно уяснить

из рис. 2.25, на котором схематически показаны движение Земли вокруг Солнца (против хода часовой стрелки) и прецессия плоскости орбиты спутника (также против хода часовой стрелки). Поворот плоскости отсчета, которая названа *терминатором* (так же, как и линия, разграничивающая дневную и ночную части Земли), вследствие движения Земли должен происходить

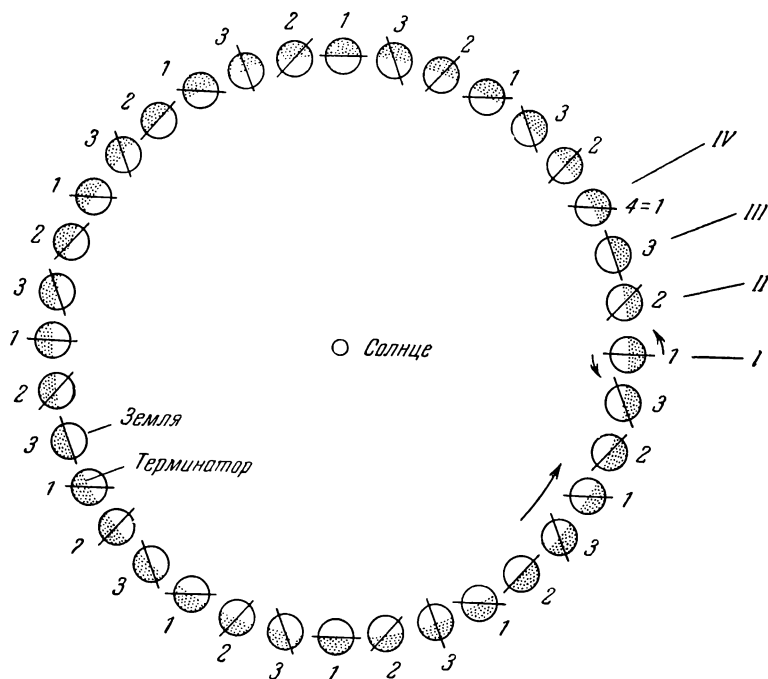


Рис. 2.25. Влияние движения Земли вокруг Солнца на солнечную радиацию, приходящуюся на спутник, и условия наблюдения за освещенной частью земной поверхности со спутника с учетом прецессии орбиты.

против хода часовой стрелки. Следовательно, плоскость отсчета и плоскость орбиты поворачиваются в одинаковом направлении — против хода часовой стрелки. Поэтому период прецессии орбиты относительно выбранной плоскости отсчета будет больше, чем период прецессии относительно абсолютного пространства. Наоборот, для орбит с наклонением $i < 90^\circ$, обладающих противоположной, чем указано на рис. 2.25, прецессией, период прецессии относительно выбранной плоскости отсчета будет меньше.

На рис. 2.25 последовательные положения Земли показаны через интервал в $1/3$ среднего месяца ($365,25/12=30,42$ сут), то есть с интервалом в $10,14$ сут. Прецессия происходит против хода часовой стрелки ($90^\circ < \iota < 180^\circ$) с периодом $T_{\text{пр}}=30,42$ сут. В начале первого месяца (1) орбита занимает положение 1, через $10,14$ сут — положение 2, через $20,28$ сут — положение 3 и в конце месяца (начало следующего месяца) — положение 4. В этом положении плоскость орбиты параллельна плоскости орбиты в положении 1, но орбита теперь уже не расположена в плоскости, нормальной к терминатору, так как положение Земли относительно Солнца отличается от первоначального положения на 30° . Плоскость орбиты окажется опять нормальной к принятой плоскости отсчета не раньше, чем через десять суток (примерно), что указывает на то, что период прецессии относительно плоскости терминатора примерно на десять суток больше, чем в абсолютном пространстве. Период прецессии по отношению к освещенной стороне Земли можно выразить в следующем виде:

$$\frac{1}{T'_{\text{пр}}} = \frac{1}{T_{\text{пр}}} \pm \frac{1}{365,25}, \quad (2.108)$$

где знак «минус» соответствует диапазону $90^\circ < \iota < 180^\circ$, знак «плюс» — значениям $\iota < 90^\circ$.

Если плоскость орбиты совпадает с плоскостью терминатора, то есть нормальна к гелиоцентрическому радиусу-вектору Земли, то при $90^\circ < \iota < 180^\circ$ и $1/T_{\text{пр}}=1/365,25$ вся орбита всегда остается в освещенной части. Для круговой орбиты высотой около 1925 км при $\iota=180^\circ-75^\circ=105^\circ$ период прецессии равен $T_{\text{пр}} \approx 365,25$ сут. В этом случае $T'_{\text{пр}} = \infty$, тогда как при той же

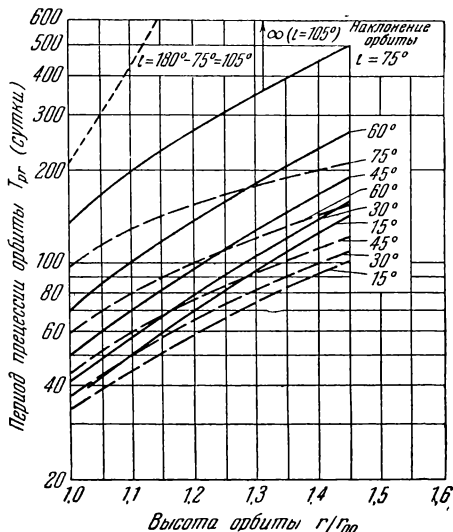


Рис. 2.26. Период прецессии орбиты в зависимости от величины большой полуоси для околокруговых орбит (решение первого порядка). Сплошные линии — $T_{\text{пр}}$, пунктирные — $T'_{\text{пр}}$.

высоте орбиты, но при $i=75^\circ$ период прецессии $T'_p = 185,5$ сут. На рис. 2.26 приведены графики периодов T_{pg} и T'_{p1} прецессии

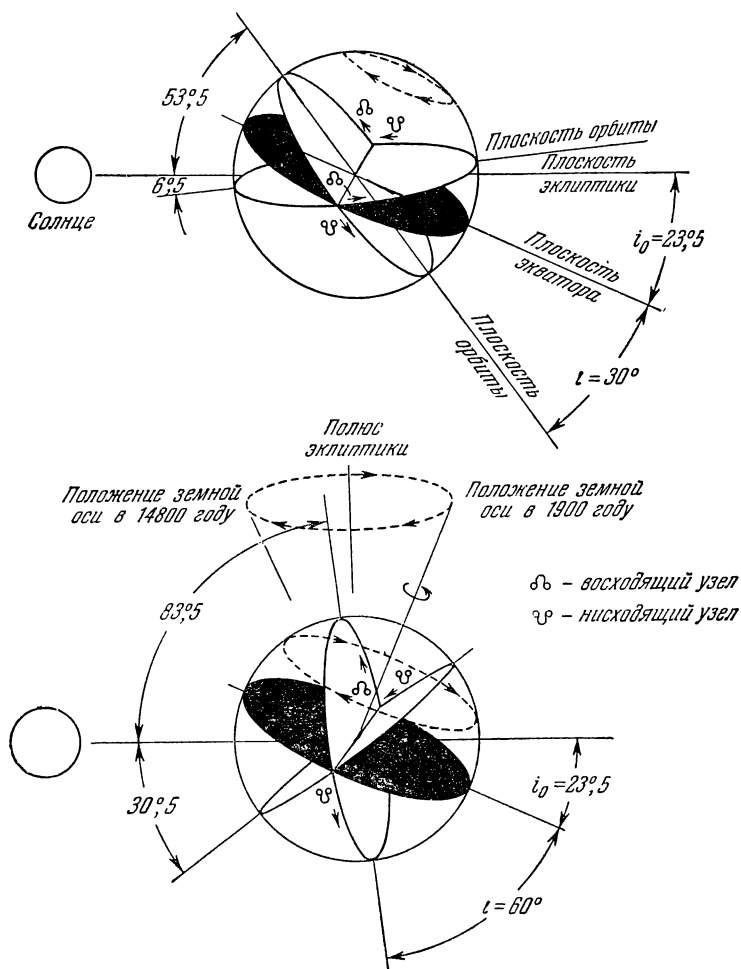


Рис. 2.27. Регрессия узлов, вызванная прецессией оси вращения Земли.

орбиты в зависимости от высоты орбиты. Параметром семейства является наклонение i плоскости орбиты.

Рис. 2.25 иллюстрирует эффекты первого порядка. Существуют еще эффекты второго и третьего порядка, вызываемые соответственно изменением наклонения i относительно плоскости

эклиптики и эллиптичностью орбиты Земли. Наклонение плоскости прецессирующей орбиты относительно плоскости экватора меняется периодически, а не монотонно (см. § 2.8). Однако имеет место и монотонное (вернее, долгопериодическое) изменение плоскости орбиты относительно плоскости эклиптики или относительно любой другой фиксированной в абсолютном пространстве плоскости. Наклонение прецессирующей орбиты относительно плоскости, фиксированной в абсолютном пространстве, изменяется в пределах между $i = i_0 + \iota$ и $i = i_0 - \iota$, где i_0 — наклонение плоскости экватора к фиксированной плоскости отсчета, а ι — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора. Это показано на рис. 2.27 для двух значений наклона плоскости орбиты: $\iota = 30^\circ$ и $\iota = 60^\circ$. В качестве фиксированной плоскости отсчета выбрана плоскость эклиптики. В нижней части рисунка показана прецессия оси вращения Земли относительно полярной оси эклиптики. Прецессия оси вращения Земли называется *лунно-солнечной*, ибо она вызвана как наклоном плоскости лунной орбиты, так и наклоном плоскости эклиптики к плоскости экватора. Однако поскольку период этой прецессии достаточно велик (25 800 лет), то для многих задач астронавтики лунно-солнечную прецессию можно не учитывать и считать, что плоскость экватора жестко фиксирована относительно плоскости эклиптики.

2.7. Вековые возмущения орбиты спутника, вызванные сжатием планеты

На основании соотношения (2.35) возмущающий потенциал Земли может быть записан в следующем виде:

$$\psi = K \left[\frac{k_2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) + \frac{k_4}{r^5} \left(1 - 10 \sin^2 \delta + \frac{35}{3} \sin^4 \delta \right) \right]. \quad (2.109)$$

Из рис. 2.28 следует, что

$$\sin \delta = \sin \iota \sin u, \quad (2.110)$$

где u — аргумент широты. Наклонение ι не подвержено вековым изменениям. Для $\sin^2 u$ и $\sin^4 u$ справедливы выражения

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u, \\ \sin^4 u &= \frac{1}{8} \cos 4u - \frac{1}{2} \cos 2u + \frac{3}{8} \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

с постоянными непериодическими частями $1/2$ и $3/8$ соответственно и периодическими частями, состоящими из тригонометрических функций. Введем в слагаемые правой части выражения

(2.109) величину большой полуоси орбиты a , поделив и помножив эти слагаемые на соответствующие степени a , чтобы получить степени $(a/r)^3$ и $(a/r)^5$. Определим неперiodические части

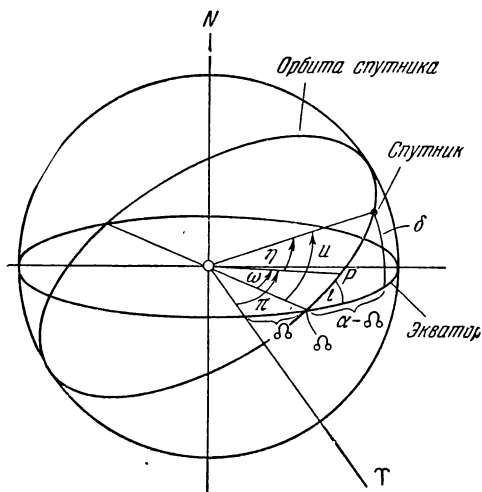


Рис. 2.28. Геоцентрическая система координат, используемая при изучении возмущений спутника.

для $(a/r)^3$ и $(a/r)^5$. Используя среднюю аномалию M , разложим $(a/r)^m$ в ряд Фурье:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^m = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos M + c_2 \cos 2M + \dots + c_n \cos nM + \dots, \quad (2.112)$$

где коэффициенты

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^m \cos nM dM \quad (2.113)$$

являются функциями эксцентриситета e . Дифференцируя уравнение Кеплера $E - e \sin E = M$, где E — эксцентрисическая аномалия, получаем: $dE(1 - e \cos E) = dM$. В сводке формул, приведенных в главе 4 тома I (см. «Космический полет», т. I, стр. 390, п. 12), имеем: $1 - e \cos E = r/a$. Дифференцируя E по истинной аномалии в уравнении

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\eta}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}$$

(приведено там же, стр. 396, п. 22) и используя равенство

$$r \cos^2 \frac{\eta}{2} = a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}$$

[приведено там же, стр. 388, п. 5, в виде

$$E = 2 \arccos \frac{\sqrt{r \cos(\eta/2)}}{\sqrt{a(1-e)}},$$

получаем: $dE = (r/b) d\eta$. Отсюда

$$dM = \frac{r^2}{ab} d\eta \quad (2.114)$$

или, так как $b/a = \sqrt{1-e^2}$ и $b^2/a = p$,

$$dM = \left(\frac{r}{p}\right)^2 (1-e^2)^{3/2} d\eta. \quad (2.115)$$

Необходимая связь между a/r , p/r и η устанавливается уравнением орбиты

$$\frac{a}{r} = \frac{p/r}{1-e^2} = \frac{1+e \cos \eta}{1-e^2}, \quad (2.116)$$

откуда

$$\left(\frac{a}{r}\right)^m dM = \left(\frac{p}{r}\right)^{m-2} (1-e^2)^{(3/2)-m} d\eta.$$

Непериодической частью отношения a/r является величина c_0 . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} (1-e^2)^{(3/2)-m} \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{r}\right)^{m-2} d\eta = \\ &= \frac{(1-e^2)^{(3/2)-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+e \cos \eta)^{m-2} d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда для *непериодических*, или *вековых*, частей функции a/r находим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 &= \frac{(1-e^2)^{-3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+e \cos \eta) d\eta + \dots = (1-e^2)^{-3/2}, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^5 &= \frac{(1-e^2)^{-7/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+e \cos \eta)^3 d\eta + \dots = (1-e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

а для вековой составляющей возмущающего потенциала получаем:

$$\psi_{\text{secular}} = K \left[\frac{k_2}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) + \frac{k_4}{a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(1 - 5 \sin^2 \iota + \frac{35}{8} \sin^4 \iota + \dots \right) \right]. \quad (2.118a)$$

Теперь можно определить вековые возмущения элементов орбиты. Элементы a , e и ι не испытывают вековых возмущений, так как функция ψ_{secular} является функцией этих элементов. Вековым возмущениям подвержены (см. рис. 2.28) долгота восходящего узла Ω , аргумент перигея ω и средняя аномалия σ эпохи, то есть интервал времени, необходимый для перемещения точки из перицентра в восходящий узел со средним движением невозмущенной орбиты $\mu = K/a^3 = 2\pi/T_{\text{sid}}$. Изменение σ главным образом (но не исключительно) объясняется изменением аргумента перицентра вследствие вращения линии узлов. Из выражений (I. 6.104) и (I. 6.105) имеем:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\mu a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin \iota} \frac{\partial \psi}{\partial \iota} = \frac{1}{C \sin \iota} \frac{\partial \psi}{\partial \iota}, \\ \mu a^2 \sqrt{1 - e^2} = C = \sqrt{K p} = r^2 \dot{\eta},$$

откуда

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{C \sin \iota} \frac{\partial \psi}{\partial \iota}. \quad (2.119)$$

Дифференцируя соотношение (2.118a) по ι , получаем:

$$\frac{\partial \psi_{\text{secular}}}{\partial \iota} = -K \sin \iota \cos \iota \left[\frac{k_2}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} + \right. \\ \left. + 10 \frac{k_4}{a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 \iota \right) \right]. \quad (2.118b)$$

Подставляя соотношение (2.118b) в выражение (2.119), находим:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\mu \cos \iota \left[3 \frac{k_2}{a^2 (1 - e^2)^2} + \right. \\ \left. + 10 \frac{k_4}{a^4} \frac{1 + \frac{3}{2} e^2}{(1 - e^2)^4} \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 \iota \right) + \dots \right]. \quad (2.120a)$$

Это уравнение содержит члены более высокого порядка, чем уравнения, рассмотренные в § 2.5 и § 2.6. В соответствии с определением, приведенным в начале § 2.6, величину эксцентриситета рассматриваемых орбит можно увеличить до значений, соот-

ветствующих $J^{1/4} \approx 0,2$, и с хорошим приближением до $e \approx 0,4$. Это уже достаточно большие значения эксцентриситетов, охватывающие орбиты большинства спутников, исключая лишь орбиты, далеко простирающиеся в долунном пространстве. Если рассматривать орбиты со значениями эксцентриситета $e \leq 0,04$, то необходимо удерживать члены с e^2 . Таким образом, уравнение (2.120a) можно записать в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx -\mu \cos \iota \left[3 \frac{k_2}{a^2} (1 + 2e^2) + 10 \frac{k_4}{a^4} (1 + 5,5e^2) \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 \iota \right) \right]. \quad (2.120b)$$

Подставив в уравнение (I.6.106)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a^2 e} \frac{\partial \psi}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} \iota}{Kp} \frac{\partial \psi}{\partial \iota} \quad (2.121)$$

выражение (2.118b), частную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\text{secular}}}{\partial e} = & \frac{Ke}{a \sqrt{1-e^2}} \left[3 \frac{k_2}{a^2 (1-e^2)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) + \right. \\ & \left. + 10 \frac{k_4}{a^4} \frac{1 + \frac{3}{4} e^2}{(1-e^2)^4} \left(1 - 5 \sin^2 \iota + \frac{35}{8} \sin^4 \iota \right) \right] \end{aligned} \quad (2.118c)$$

и используя выражение (2.120a) для записи равенства

$$\frac{\partial \psi_{\text{secular}}}{\partial \iota} = C \sin \iota \frac{d\Omega}{dt}, \quad (2.118d)$$

получим уравнение, определяющее изменение аргумента перигея, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \mu \left[3 \frac{k_2}{a^2} \frac{1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota}{(1-e^2)^2} + \right. \\ & \left. + 10 \frac{k_4}{a^4} \frac{1 + \frac{3}{4} e^2}{(1-e^2)^4} \left(1 - 5 \sin^2 \iota + \frac{35}{8} \sin^4 \iota + \dots \right) \right] - \cos \iota \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \quad (2.122a)$$

Используя соотношение (2.120b), можно получить упрощенное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \mu \left[6 \frac{k_2}{a^2 (1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 \iota \right) + \right. \\ & \left. + 10 \frac{k_4}{a^4} \frac{2 + \frac{1}{4} e^2}{(1-e^2)^4} \left(1 - \frac{7}{2} \sin^2 \iota + 3 \sin^4 \iota \right) \right] \end{aligned} \quad (2.122b)$$

или в еще более простой форме:

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \mu \left[6 \frac{k_2}{a^2} (1 + 2e^2) \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 \iota \right) + 10 \frac{k_4}{a^4} \left(2 + \frac{33}{4} e^2 \right) \left(1 - \frac{7}{2} \sin^2 \iota + 3 \sin^4 \iota \right) \right]. \quad (2.122c)$$

Наконец, воспользовавшись соотношением (1.6.109)

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\mu a^2} \left[\frac{1-e^2}{e} \frac{\partial \Psi}{\partial e} + 2a \frac{\partial \Psi}{\partial a} \right], \quad (2.123)$$

соотношением (1.6.110)

$$\frac{1}{\mu a^2} = \frac{V \sqrt{1-e^2}}{V K p} \approx \frac{1}{V K a} \quad (2.124)$$

и выражением (2.118с), получим уравнение для определения параметра σ :

$$\frac{d\sigma}{dt} = -3\mu V \sqrt{1-e^2} \left[\frac{k_2}{a^2} \frac{1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota}{(1-e^2)^2} + \frac{5}{2} \frac{k_4}{a^4} \frac{e^2}{1-e^2} \left(1 - 5 \sin^2 \iota + \frac{35}{8} \sin^4 \iota \right) \right], \quad (2.125)$$

которое может быть упрощено так же, как и соотношение (2.122а).

Из выражений (2.120) следует, что *линия узлов всегда перемещается в сторону, противоположную направлению движения спутника*. Иными словами, при $\iota < 90^\circ$ перемещение линии узлов является обратным, то есть с востока на запад, или по ходу часовой стрелки, если смотреть с Северного полюса. При $\iota > 90^\circ$ орбита является обратной и перемещение линии узлов происходит в прямом направлении, то есть с запада на восток. Пренебрегая членами, содержащими k_4 , можно записать следующие приближенные равенства:

для эллиптических орбит

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx -3\mu \cos \iota \frac{k_2}{a^2} (1 + 2e^2) \approx -\mu J \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 (1 + 2e^2) \cos \iota, \quad (2.126)$$

для околокруговых орбит

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx -\mu J \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \cos \iota. \quad (2.127)$$

Для периода прецессии орбиты имеем:

$$T_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{d\Omega/dt} = \frac{360^\circ}{d\Omega/dt}, \quad (2.128)$$

где размерность знаменателя берется в зависимости от размерности числителя. Учитывая, что $T_{\text{sid}} = 2\pi/\mu$, или $360^\circ/\mu$, из соотношения (2.127) для околокруговых орбит можно получить выражение для T_{pr} , совпадающее с выражением (2.107а), если последнее записать для поля центральной силы.

Пренебрегая в соотношении (2.122с) членом, содержащим k_4 , можем записать:

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{3}{2} \mu \frac{k_2}{a^2} (1 + 2e^2) (5 \cos^2 \iota - 1) \approx \frac{1}{2} \mu J \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 (1 + 2e^2) (5 \cos^2 \iota - 1). \quad (2.129)$$

Приравнявая правую часть полученного равенства нулю, найдем, что при $\cos \iota = \sqrt{0,2}$, или при $\iota = 63^\circ 26'$, вращения линии апсид не происходит, то есть перигей и апогей орбиты будут оставаться на своих неизменных широтах в геоцентрической системе координат. В действительности, как следует из равенства (2.122с), при таком наклонении орбиты вращение линии апсид будет сведено к минимуму. При $\iota > 63^\circ 26'$ линия апсид будет поворачиваться навстречу движения спутника.

При изменении $\mathcal{Q}$, ω и σ изменения долготы перицентра π (см. рис. 2.28) и средней долготы ε при средней аномалии σ (то есть средней долготы для момента прохождения точки восходящего узла), связанных равенством

$$\varepsilon = \pi + \sigma = \mathcal{Q} + \omega + \sigma,$$

будут известными, так как

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\mathcal{Q}}{dt} + \frac{d\omega}{dt}, \quad (2.130)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}. \quad (2.131)$$

Если ε' — средняя долгота спутника в момент времени t , то ее изменение характеризуется следующей зависимостью:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + \mu = \mu \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}}{\mu} \right) = \mu_{\text{pr}}, \quad (2.132a)$$

где $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$, а μ_{pr} — среднее движение для прецессирующей орбиты. Изменение средней аномалии эпохи, характеризуемое величиной $\dot{\varepsilon}$, отнесенной к среднему движению для невозмущенной орбиты, определяется равенством

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\mathcal{Q}}{dt},$$

то есть

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\mu} = \frac{\mu_{\text{pr}} - \mu}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\mathcal{Q}}{dt} \right),$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\dot{e}}{\mu} = & 3 \frac{k_2}{a^2 (1-e^2)^2} \left[2 - \sqrt{1-e^2} - \cos \iota - \frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{1-e^2}) \sin^2 \iota \right] + \\ & + 5 \frac{k_4}{a^4 (1-e^2)^4} \left[-\frac{3}{2} e^2 \sqrt{1-e^2} \left(1 - 5 \sin^2 \iota + \frac{35}{8} \sin^4 \iota \right) + \right. \\ & + \left(4 + \frac{1}{2} e^2 \right) \left(1 - \frac{7}{2} \sin^2 \iota + 3 \sin^4 \iota \right) - \\ & \left. - (2 + 3e^2) \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 \iota \right) \cos \iota \right]. \quad (2.132b) \end{aligned}$$

Звездный период обращения по невозмущенной орбите определяется выражением $T_{\text{sid}} = 2\pi/\mu$, период между двумя последовательными прохождениями

восходящего узла — выражением $T_{\Omega} = 2\pi/\mu_{\text{pr}}$.

На рис. 2.29 приведены графики прецессии орбиты $(d\Omega/dt)/T_{\text{sid}}$ и поворота линии апсид $(d\pi/dt)/T_{\text{sid}}$, приходящие на один оборот, в зависимости от величины большой полуоси (от расстояния a/r_0) при наклонении $\iota = 28^\circ,5$, соответствующем пуску с Атлантического полигона строго на восток.

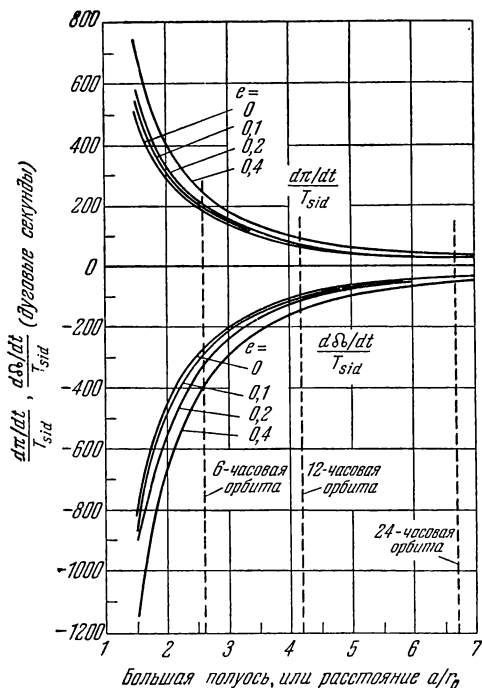


Рис. 2.29. Прецессия орбиты и поворот линии апсид, приходящие на один оборот и вызванные сжатием Земли, в функции расстояния a/r_0 и эксцентриситета для орбит с наклонением $\iota = 28^\circ,5$.

2.8. Периодические возмущения первого порядка орбиты спутника, вызванные сжатием планеты

Пренебрегая членами с k_4 , из выражения для возмущающего потенциала (2.109) получим:

$$\psi = K \frac{k_2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 u). \quad (2.133)$$

Отсюда можно определить радиальную, трансверсальную и ортогональную составляющие возмущающей силы [см. также

выражения (I. 6.129), (I. 6.130) и (I. 6.131)]:

$$R = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -3K \frac{k_2}{r^4} (1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 u), \quad (2.134)$$

$$S = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = -3K \frac{k_2}{r^4} \sin^2 \iota \sin 2u, \quad (2.135)$$

$$W = \frac{1}{r \sin u} \frac{\partial \Psi}{\partial \iota} = -3K \frac{k_2}{r^4} \sin 2i \sin u. \quad (2.136)$$

Эти выражения определяют составляющие первого порядка возмущающей силы, так как мы пренебрегли членами, содержащими k_4 , и членами более высокого порядка. Поскольку периодические возмущения орбиты значительно меньше вековых (хотя они и не пренебрежимо малы), то анализ периодических возмущений первого порядка вообще является достаточным для целей астронавтики (но не геофизических исследований!).

Подставив найденные составляющие возмущающей силы в уравнения¹⁾ Лагранжа [см. уравнения (I. 6.136)—(I. 6.141)] и перейдя от dt и $d\eta$ с помощью закона площадей

$$r^2 \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{Kp}$$

и уравнения орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \eta},$$

Краузе [10] получил уравнения для *периодических возмущений* первого порядка элементов орбиты в следующем виде:

$$\frac{da}{d\eta} = -\frac{6a^2 k_2}{p^3} (1 + e \cos \eta)^2 \{e \sin \eta [1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 (\eta + \omega)] + \\ + (1 + e \cos \eta) \sin^2 \iota \sin (2\eta + 2\omega)\}, \quad (2.137)$$

$$\frac{de}{d\eta} = -\frac{3k_2}{ep^2} \{e \sin \eta (1 + e \cos \eta)^2 [1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 (\eta + \omega)] + \\ + [(1 + e \cos \eta)^3 - (1 - e^2)(1 + e \cos \eta)] \sin^2 \iota \sin 2(\eta + \omega)\}, \quad (2.138)$$

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{3k_2}{ep^2} \{\cos \eta (1 + e \cos \eta)^2 [1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 (\eta + \omega)] - \\ - [(1 + e \cos \eta)^2 + (1 + e \cos \eta)] \sin \eta \sin^2 \iota \sin (2\eta - 2\omega)\} - \\ - \cos \iota \frac{d\Omega}{dt} \frac{dt}{d\eta}, \quad (2.139)$$

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = -\sqrt{1 - e^2} \frac{3k_2}{ep^2} \{[\cos \eta (1 + e \cos \eta)^2 - 2e(1 + e \cos \eta)] \times \\ \times [1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2 (\eta + \omega)] - \\ - [(1 + \cos \eta)^2 + (1 + e \cos \eta)] \sin \eta \sin^2 \iota \sin (2\eta + 2\omega)\}, \quad (2.140)$$

¹⁾ Полагая $i = \iota$, (Прим. перев.)

$$\frac{d\iota}{d\eta} = -\frac{3}{2} \frac{k_2 \sin 2\iota}{p^2} (1 + e \cos \eta) \sin (2\eta + 2\omega), \quad (2.141)$$

$$\frac{d\delta\mathcal{L}}{d\eta} = -6 \frac{k_2 \cos \iota}{p^2} (1 + e \cos \eta) \sin^2(\eta + \omega), \quad (2.142a)$$

$$\cos \iota \frac{d\delta\mathcal{L}}{d\iota} \frac{d\iota}{d\eta} = -\frac{6k_2}{p^2} (1 + e \cos \eta) \cos^2 \iota \sin^2(\eta + \omega), \quad (2.142b)$$

$$\frac{dp}{d\eta} = -\frac{6k_2 \sin^2 \iota}{p} (1 + e \cos \eta) \sin (2\eta + 2\omega), \quad (2.143)$$

где в качестве независимой переменной вместо t принята переменная η .

Краузе проинтегрировал эти уравнения, предварительно преобразовав их к уравнениям, содержащим произведения синусов и косинусов углов. В результате им были получены решения для *периодических возмущений* орбиты в такой форме:

$$\Delta a = -\frac{6k_2 a^2}{p^3} \left\{ -\frac{(1 + e \cos \eta)^3}{3} [1 - 3 \sin^2 \iota \sin^2(\eta + \omega)] \right\} \quad (2.144a)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta a = & \frac{2a^2 k_2}{p^3} \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) \times \right. \\ & \times \left[\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + 3e \left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \cos \eta + \frac{3}{2} e^2 \cos 2\eta + \frac{e^3}{4} \cos 3\eta \right] + \\ & + \frac{3}{2} \sin^2 \iota \left[\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos (2\eta + 2\omega) + \frac{3}{2} e \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \times \right. \\ & \times [\cos (\eta + 2\omega) + \cos (3\eta + 2\omega)] + \frac{3}{4} e^2 [\cos 2\omega + \cos (4\eta + 2\omega)] + \\ & \left. \left. + \frac{e^3}{8} [\cos (\eta + 2\omega) + \cos (5\eta + 2\omega)] \right] \right\}, \quad (2.144b) \end{aligned}$$

$$\Delta p = \frac{3k_2 \sin^2 \iota}{p} \left[\cos (2\eta + 2\omega) + e \cos (\eta + 2\omega) + \frac{e}{3} \cos (3\eta + 2\omega) \right], \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \Delta e = & \frac{k_2}{p^2 e} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) \left[\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + 3e \left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \cos \eta + \right. \right. \\ & + \frac{3}{2} e^2 \cos 2\eta + \frac{e^3}{4} \cos 3\eta \left. \right] + \frac{3}{2} \sin^2 \iota \left[\frac{7}{6} e \left(1 + \frac{17}{28} e^2 \right) \cos (3\eta + 2\omega) + \right. \\ & + \frac{e}{2} \left(1 + \frac{11}{4} e^2 \right) \cos (\eta + 2\omega) + \\ & + \frac{5}{2} e^2 \cos (2\eta + 2\omega) + \frac{3}{4} e^2 [\cos 2\omega + \cos (4\eta + 2\omega)] + \\ & \left. \left. + \frac{e^3}{8} [\cos (\eta - 2\omega) + \cos (5\eta + 2\omega)] \right] \right\}, \quad (2.146) \end{aligned}$$

$$\Delta\omega = \frac{3k_2}{p^2} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) \left[\eta + \frac{1 + \frac{3}{4} e^2}{e} \sin \eta + \frac{1}{2} \sin 2\eta + \frac{e}{12} \sin 3\eta \right] + \right. \\ \left. + \sin^2 \iota \left[\frac{7}{12} \frac{1 + \frac{11}{28} e^2}{e} \sin (3\eta + 2\omega) - \frac{1 - \frac{7}{4} e^2}{4e} \sin (\eta + 2\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} [2 \sin (2\eta + 2\omega) + \sin (4\eta + 2\omega)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e}{16} [\sin (\eta + 2\omega) + \sin (5\eta + 2\omega)] \right] \right\} - \cos \iota \Delta\Omega, \quad (2.147)$$

$$\Delta\sigma = \frac{3k_2}{p^2} \sqrt{1 - e^2} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota \right) \times \right. \\ \times \left[\eta + \frac{1 - \frac{5}{4} e^2}{e} \sin \eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta - \frac{e}{12} \sin 3\eta \right] + \\ \left. + \sin^2 \iota \left[\frac{1 + \frac{17}{4} e^2}{4e} \sin (\eta + 2\omega) - \frac{7}{12} \frac{1 - \frac{13}{28} e^2}{e} \sin (3\eta + 2\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} [2 \sin (2\eta + 2\omega) - \sin (4\eta + 2\omega)] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e}{16} [\sin (\eta - 2\omega) + \sin (5\eta + 2\omega)] \right] \right\}, \quad (2.148)$$

$$\Delta\iota = \frac{3k_2 \sin \iota \cos \iota}{p^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos (2\eta + 2\omega) + \right. \\ \left. + \frac{e}{2} \left[\cos (\eta + 2\omega) + \frac{1}{3} \cos (3\eta + 2\omega) \right] \right\}, \quad (2.149)$$

$$\Delta\Omega = \frac{3k_2 \cos \iota}{p^2} \left\{ \eta - \frac{1}{2} (2\eta + 2\omega) + \right. \\ \left. + \frac{e}{2} \left[2 \sin \eta - \sin (\eta + 2\omega) - \frac{1}{3} \sin (3\eta + 2\omega) \right] \right\}, \quad (2.150)$$

$$\Delta\pi = \Delta\Omega + \Delta\omega, \quad (2.151)$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\pi + \Delta\sigma. \quad (2.152)$$

Можно заметить, что решения для ω , σ и Ω содержат такие же члены, как и члены первого порядка для вековых возмущений. Этого и следовало ожидать, так как возмущения, подобные η , монотонно возрастают со временем. Периодические решения не содержат вековых членов второго порядка, так как они были отброшены в исходных уравнениях. Поэтому для расчета только вековых возмущений более точными являются уравнения

(2.120a), (2.122a) и (2.125). Наличие вековых членов первого порядка в периодических решениях указывает на то, что с каждым периодом (то есть за каждый цикл изменения истинной аномалии в пределах $0 \leq \eta \leq 360^\circ$) Δ (элемент орбиты) изменяется на соответствующую величину (если пренебречь членами второго порядка); в действительности Δ (элемент орбиты) изменяется на большую величину, то есть по крайней мере на величину, определяемую уравнениями вековых возмущений. Избытки над этими вековыми возмущениями и являются периодическими возмущениями, определяемыми периодическими членами в уравнениях (2.147), (2.148) и (2.150).

Таблица 2.6

Возмущения спутника, обращающегося относительно планеты со сжатием

Параметр или элемент	Возмущения		
	постоянные (номер формулы)	вековые (номер формулы)	периодические (номер формулы)
Орбитальный период T_Ω	(2.91)	—	—
Период прецессии $T_{\text{пр}}$	(2.107), (2.128)	—	—
Относительный период прецессии $T'_{\text{пр}}$	(2.108)	—	—
Большая полуось a	(2.153)	—	(2.144)
Эксцентриситет e	(2.154)	—	(2.146)
Угол Ω	—	(2.120a, b), (2.126)	(2.150)
Угловое расстояние перигея ω	—	(2.122a, c), (2.129)	(2.139)
Угол $\pi = \Omega + \omega$	—	(2.130)	(2.151)
Средняя аномалия σ	—	(2.125)	(2.148)
Средняя долгота ε при средней аномалии	—	(2.131)	(2.152)
Фокальный параметр p	—	—	(2.145)
Среднее движение $\mu_{\text{пр}}$	(2.132a)	—	—
Наклонение орбиты ι	—	—	(2.149)

В дополнение к сказанному можно заметить, что каждый из элементов a и e содержит постоянный член, не зависящий от времени и, следовательно, не представляющий собой периодического или векового возмущения:

$$(\Delta a)_{\text{const}} = \frac{2a^2 k_2}{p^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right), \quad (2.153)$$

$$(\Delta e)_{\text{const}} = \frac{k_2}{ep^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \iota\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right). \quad (2.154)$$

Эти постоянные члены отражают влияние искажения поля центральной силы (превращения поля в квазицентральное) на форму орбиты и ее энергию.

Итак, возмущения орбиты спутника, вызванные сжатием планеты, можно разбить на

1) *постоянные*, вызванные искажением поля центральной силы (превращением поля в квазицентральное);

2) *вековые*, то есть монотонно изменяющиеся со временем, вызванные дополнительными экваториальными массами, создающими возмущающие силы, которые стремятся повернуть орбиту к плоскости экватора;

3) *периодические*, то есть колебательные, вызванные периодическим изменением положения спутника относительно плоскости экватора.

Номера формул с обзором всех возмущений приведены в таблице 2.6.

2.9. Возмущение спутника Земли Луной и Солнцем

Кроме искажений геоцентрического поля, вызванных сжатием Земли, существуют дополнительные возмущения, обусловленные гравитационными полями Луны и Солнца. Однако вследствие слабости этих полей вблизи Земли вызываемые ими возмущения спутника очень малы. Действительно, как было подсчитано Шпитцером [4], изменение большой полуоси составляет несколько дюймов, а прецессия линии узлов — тысячи лет из-за влияния Луны и десятки тысяч лет из-за влияния Солнца. Грубо говоря, влияние Солнца в два раза меньше влияния Луны. Краузе [10] также исследовал эти возмущения для заданного спутника на основании работ Брауна, посвященных задаче трех тел. Браун [2] исследовал вековые и периодические возмущения элементов орбиты с произвольными эксцентриситетом и наклоном применительно к системе двойной звезды, возмущаемой третьей удаленной звездой. Между массой m' возмущающей звезды и массами M и m звезд, составляющих двойную звезду, Браун установил следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{m'}{M + m' + m}, \\ \lambda_1 &= \frac{3}{8} \lambda \left(\frac{\mu'}{u} \right)^2 (1 - e'^2)^{-3/2} \mu, \\ \lambda_2 &= \frac{9}{64} \lambda^2 \left(\frac{u'}{u} \right)^3 \left(1 + \frac{2}{3} e'^2 \right) (1 - e'^2)^{-3} \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.155)$$

Далее, обозначая через i наклонение орбиты одной из звезд, образующих двойную, и полагая $\iota = \sin i/2$, для вековых

возмущений положений узлов и перигея Браун получил:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = & -\lambda_1 \left(2 + 4e^2 - 4\iota^2 - \frac{7}{8}e^4 + 17e^2\iota^2 + \frac{31}{32}e^6 - \frac{261}{8}e^4\iota^2 + 50e^2\iota^4 \right) + \\ & + \lambda_2 \left(2 - 42e^2 - 12\iota^2 - \frac{75}{4}e^4 + 252e^2\iota^2 + 12\iota^4 + \frac{1275}{32}e^6 - \right. \\ & \left. - \frac{7575}{8}e^4\iota^2 + 1173e^2\iota^4 \right), \quad (2.156) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} = & \lambda_1 \left(2 - e^2 16\iota^2 - \frac{1}{4}e^2 + 23e^2\iota^2 - 30\iota^4 - \frac{1}{4}e^6 - 37e^4\iota^2 + \right. \\ & + \frac{345}{2}e^2\iota^4 - 150\iota^6 \left. \right) + \lambda_2 \left(50 - 75e^2 - 168\iota^2 18e^2\iota^2 492\iota^4 + \right. \\ & + \frac{1425}{4}e^4\iota^2 - \frac{7179}{2}e^2\iota^4 + 2430\iota^6 \left. \right). \quad (2.157) \end{aligned}$$

Применительно к нашему случаю M — масса Земли, $m \approx 0$ — масса спутника, а m' — масса Луны или Солнца. Если m' — масса Луны, то $m'/M = 1/81,5$; $\lambda = 1/82,5$; $\mu' = 2\pi/T'$ (T' — звездный период обращения); $\mu = 2\pi/T$ (T — период обращения спутника), e — эксцентриситет орбиты Луны. Если же m' — масса Солнца, то используются соответствующие данные, относящиеся к движению Земли вокруг Солнца (см. таблицу 2.7).

Таблица 2.7

Данные для расчета возмущений орбиты спутника Земли, вызванных Луной и Солнцем

M — масса Земли, $m \approx 0$ — масса спутника,
 m' — масса Луны (m_L) или Солнца ($m_\odot$).

1. Источник возмущений — Л у н а:

$$m'/M = 1/81,5;$$

$$\lambda = 1/82,5;$$

$$\mu'/\mu = T_{\text{sid}}(\text{сут})/27,321661 \quad (\text{сут}) = \text{звездный период обращения спутника/звездный месяц};$$

$$e' = e_\zeta = 0,05490.$$

2. Источник возмущений — С о л н ц е:

$$m'/M = 332\,488;$$

$$\lambda = 0,999996;$$

$$\mu'/\mu = T_{\text{sid}}(\text{сут})/[365,25636042 + 0,000000001 \quad (t - 1900)] \quad (\text{сут}) = \text{звездный период обращения спутника/звездный год};$$

$$e' = e_\oplus = 0,0167272.$$

Таким образом, можно вычислить отдельно возмущающее влияние Луны и Солнца. Поскольку эти отдельные возмущения достаточно малы, то их можно присовокупить к возмущениям, вызываемым членами высоких порядков. Возможность этого доказывается с помощью замечательного обобщения теоремы существования Коши, установленного Пуанкаре. На основании этого обобщения Пуанкаре исследовал периодические решения

в задаче трех тел. Теорема Коши устанавливает: если задано дифференциальное уравнение $dx/dt=f(x, t)$ и если функция f в окрестности $t=t_0$, $x=x_0$ может быть разложена в ряд по степеням $(t-t_0)$ и $(x-x_0)$, то решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$x=x_0+c_1(t-t_0)+c_2(t-t_0)^2+\dots$$

Для заданного конечного интервала в окрестности $t=t_0$ этот ряд является сходящимся. Коэффициенты c_1 , c_2 и т. д. определяются однозначно, и указанный ряд является единственным аналитическим решением, которое удовлетворяет условию $x=x_0$ при $t=t_0$.

Обобщение Пуанкаре теоремы существования Коши кратко заключается в следующем утверждении: если задана функция $f(x, t, \mu)$, которая может быть представлена сходящимся рядом по положительным степеням μ для всех значений на интервале $0 \leq t \leq t'$, то решение дифференциального уравнения $dx/dt=f(x, t, \mu)$ на том же интервале также может быть представлено рядом по положительным степеням μ , если μ достаточно мало и, кроме того, если функция $f(x, t, \mu)$ допускает разложение по положительным степеням $[x-x_0(t)]$ для всех значений $0 \leq t \leq t'$.

Можно доказать справедливость этой теоремы для системы двух и более дифференциальных уравнений и показать возможность ее использования для определения возмущений высоких порядков.

Результаты расчета движения спутника Земли с учетом возмущающего влияния гравитационных полей Земли, Луны и Солнца будут рассмотрены в § 2.16.

2.10. Атмосферные возмущения спутника

Наиболее общий случай (орбита не круговая, спутник не сферической формы) возмущения спутника силами сопротивления воздуха представлен на рис. 2.30. Текущий угол траектории обозначен через θ , текущий угол атаки — через α . Возмущающее ускорение (возмущающая сила, приходящаяся на единицу массы аппарата) может быть представлено либо касательной T и нормальной N составляющими, либо радиальной R и трансверсальной S составляющими. Третья ортогональная составляющая W отсутствует¹⁾, так как сила сопротивления воздуха

¹⁾ В действительности вследствие прецессии орбиты возникает незначительная третья ортогональная составляющая. Однако ее влияние по сравнению с другими возмущающими силами пренебрежимо мало.

действует в плоскости орбиты¹⁾. Зная силу аэродинамического сопротивления F , эти составляющие можно рассчитать по следующим зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} T &= -F \cos \alpha, & N &= F \sin \alpha, \\ R &= F \sin(\alpha - \theta), & S &= -F \cos(\alpha - \theta). \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

В рассматриваемом случае составляющие T и S оказались отрицательными в соответствии с определениями, приведенными в

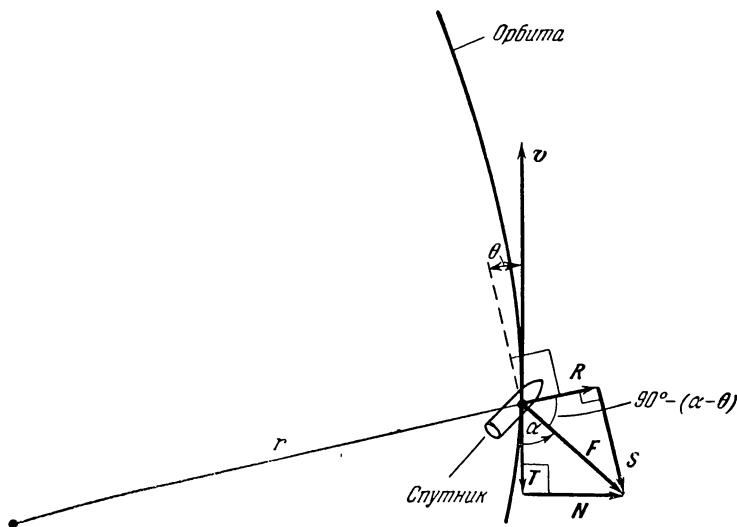


Рис. 2.30. Возмущение спутника сопротивлением атмосферы.

главе 6²⁾ (составляющая T положительна в направлении движения; составляющая S положительна, если ее направление с направлением вектора скорости образует угол меньше 90°). Составляющая N положительна, если $\alpha > 0$; составляющая R отрицательна при $\alpha - \theta < 0$ или при $\alpha < \theta$. Для сферического спутника $\alpha = 0$ и, следовательно, $T = F$, $N = 0$,

$$\left. \begin{aligned} R &= -F \sin \theta \text{ (направлено к центру притяжения),} \\ S &= F \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

Если к тому же орбита близка к круговой, то $\theta \rightarrow 0$ и $S = F = T$, а остальные составляющие оказываются близкими к нулю.

¹⁾ Вращение атмосферы (вместе с Землей) приводит к появлению гораздо большей ортогональной составляющей, чем та, о которой упоминает автор. (Прим. перев.)

²⁾ См. «Космический полет», т. I.

Тангенциальная составляющая силы сопротивления воздуха по величине равна силе лобового сопротивления:

$$T = F \cos \alpha = -\dot{D} = -C_D A \rho^* \frac{\rho_{00}}{2} v^2, \quad (2.160)$$

где C_D — коэффициент лобового сопротивления, A — площадь поперечного сечения, $\rho^* = \rho/\rho_{00}$ — отношение плотности воздуха на заданной высоте к плотности воздуха на поверхности Земли, v — скорость. Таким образом, тангенциальная составляющая ускорения, обусловленная силой сопротивления воздуха, будет равна:

$$T = -\frac{D}{m} = -D^* c' \rho^* v^2, \quad (2.161)$$

где $D^* = C_D A/W$ — параметр лобового сопротивления, W — вес спутника, $c' = g_{00} \rho_{00}/2$, где $g_{00} \rho_{00}$ — удельный вес воздуха на поверхности Земли на уровне моря. Для нормальной составляющей ускорения силы сопротивления воздуха можно записать аналогичное выражение:

$$N = -\frac{L}{m} = -L^* c' \rho^* v^2, \quad (2.162)$$

где $L^* = C_L S/W$ — параметр подъемной силы. Для сферического спутника $N=0$. Для радиального и трансверсального ускорений аналогично получим:

$$R = T \sin \theta = -D^* c' \rho^* v^2 \sin \theta = F \sin (\alpha - \theta), \quad (2.163)$$

$$S = T \cos \theta = -D^* c' \rho^* v^2 \cos \theta = F \cos (\theta - \alpha). \quad (2.164)$$

Для сферического спутника, двужущегося по околокруговой орбите, касательное ускорение T можно определить путем обработки результатов наблюдений за движением спутника, а плотность воздуха на высоте полета — непосредственно по ρ^* с помощью соотношения (2.161), считая в нем C_D известной величиной. В действительности величина C_D не является точно известной даже для сферы, и поэтому с помощью соотношения (2.161) можно определить лишь произведение $C_D \rho^*$.

Итак, имеем следующие уравнения движения космического аппарата:

$$a_t = -\frac{K}{r^2} \sin \theta + T = -\frac{K}{r^2} \sin \theta - D^* c' \rho^* v^2 \quad (2.165)$$

(касательное ускорение),

$$a_n = \frac{K}{r^2} \cos \theta + N = \frac{K}{r^2} \cos \theta + L^* c' \rho^* v^2 \quad (2.166)$$

(нормальное ускорение),

$$a_r = \dot{r} = -\frac{K}{r^2} + R = -\frac{K}{r^2} - D^*c'\rho^*v^2 \sin \theta \quad (2.167)$$

(радиальное ускорение),

$$a_a = r\dot{\eta}^2 = S = -D^*c'\rho^*v^2 \cos \theta \quad (2.168)$$

(трансверсальное ускорение).

Используя уравнения Лагранжа с правыми частями, выраженными через T , N , W [см. формулы (I. 6.150) — (I. 6.163)], для нашего случая получаем:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad (2.169)$$

$$\frac{d\iota}{dt} = 0, \quad (2.170)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{v}{e} \left[L^*c'\rho^* \left(\frac{2}{e} + \frac{r}{a} \cos \eta \right) - 2D^*c'\rho^* \sin \eta \right], \quad (2.171)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{rv_a} D^*c'\rho^*v^2 \sqrt{1 + 2e \cos \eta + e^2} = -2avD^*c'\rho^* \left(2\frac{a}{r} - 1 \right), \quad (2.172)$$

$$\frac{de}{dt} = -v \left[2D^*c'\rho^* (\cos \eta + e) + \frac{L^*c'\rho^*r}{a} \sin \eta \right], \quad (2.173)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = v \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[L^*c'\rho^* \frac{r}{a} \cos \eta - 2D^*c'\rho^* \sin \eta \left(1 + \frac{re^2}{p} \right) \right], \quad (2.174)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{v}{e} \left[L^*c'\rho^* \left(2e - \frac{r \cos \eta}{a} \right) - 2D^*c'\rho^* \sin \eta \right], \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{e} \left\{ L^*c'\rho^* \left[2e + \frac{r \cos \eta}{a} (1 - \sqrt{1-e^2}) \right] - \right. \\ \left. - 2D^*c'\rho^* \sin \eta \left[1 - \sqrt{1-e^2} \left(1 + \frac{r}{p} e^2 \right) \right] \right\}, \quad (2.176) \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dt} = 2pv \left(L^*c'\rho^* \frac{re}{p} \sin \eta - D^*c'\rho^* \right), \quad (2.177)$$

$$\frac{dC}{dt} = v \sqrt{Kp} \left(\frac{L^*c'\rho^*re}{p} \sin \eta - D^*c'\rho^* \right), \quad (2.178)$$

$$\frac{dr_P}{dt} = 2vr_P \left[L^*c'\rho^* \frac{r \sin \eta}{2r_P} - D^*c'\rho^* \left(\frac{r-r_P}{er} \right) \right], \quad (2.179)$$

$$\frac{dr_A}{dt} = -2vr_A \left[L^*c'\rho^* \frac{r \sin \eta}{2r_A} + D^*c'\rho^* \left(\frac{r_A-r}{er} \right) \right]. \quad (2.180)$$

Эти уравнения показывают, что сопротивление воздуха при отсутствии третьей ортогональной составляющей (спутник представляет собой осесимметричное тело с осью симметрии в пло-

скости орбиты) не оказывает влияния на положение линии узлов и наклонение орбиты. Прочие элементы испытывают периодические возмущения в функции истинной аномалии и вековые возмущения. Вследствие отсутствия точного выражения для изменения плотности воздуха с высотой и невозможности выразить силу лобового сопротивления и подъемную силу аналитическими функциями, точного решения для полученных уравнений не существует. Поэтому эти уравнения обычно решают методами численного интегрирования, как правило, с использованием

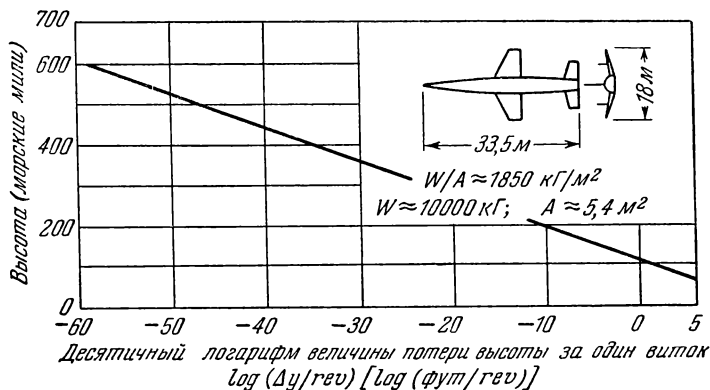


Рис. 2.31. Потеря высоты сверхзвуковым орбитальным бомбардировщиком за один оборот в зависимости от высоты полета [16].

электронных вычислительных машин (см. «Космический полет», т. I, § 6.10).

Особый интерес представляет изменение большой полуоси, определяющее время существования спутника. В частности, этот вопрос становится особенно важным при проектировании космических аппаратов, рассчитанных на малое время существования, например при проектировании глобальных ракетопланов, выводимых на орбиту спутника в верхние слои атмосферы для совершения одного или нескольких витков с последующим планирующим спуском. Е. Зенгер, создавший проект современного гиперзвукового планирующего бомбардировщика (см. «Космический полет», т. I, рис. 1.15), произвел оценку потери высоты спроектированным аппаратом за один орбитальный виток [16]. Другим примером, в котором изменение высоты орбиты за ограниченный промежуток времени играет важную роль, является доставка грузов с крылатого орбитального носителя, движущегося в верхних слоях атмосферы, на орбитальную станцию [17].

На рис. 2.31 представлен рассчитанный Зенгером график потери высоты гиперзвуковым орбитальным бомбардировщиком

за один оборот в предположении, что орбита является круговой. Благодаря удобообтекаемой форме космического аппарата, при нулевых и малых углах атаки он обладает очень высокой поперечной нагрузкой (отношением веса к площади поперечного сечения). Поэтому потеря высоты за один виток очень мала. Даже на высоте 185 км потеря высоты за один виток составляет лишь около 10 м. Потеря высоты вычислялась на основании интеграла энергии с учетом работы силы лобового сопротивления воздуха. При уменьшении скорости ниже круговой космический аппарат теряет высоту (потенциальную энергию), а его кинетическая энергия начинает возрастать. Однако это увеличение кинетической энергии меньше, чем в аналогичной ситуации в консервативном силовом поле. Различие обусловлено работой силы лобового сопротивления воздуха. В соответствии с законом сохранения энергии сумма изменений потенциальной энергии ΔE_{pot} , кинетической энергии ΔE_{kin} и энергии ΔE_D рассеивания в результате работы силы лобового сопротивления должна равняться нулю:

$$\Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_D = 0. \quad (2.181)$$

Если за поверхность отсчета принять поверхность Земли, то потенциальная энергия единичной массы по отношению к сфере радиуса r_{00} на расстоянии $r = r_{00} + y$ будет равна:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{K}{r} - \left(-\frac{K}{r_{00}} \right) = K \frac{r - r_{00}}{r_{00}r} = \frac{K}{r_{00}} \frac{y}{r}. \quad (2.182)$$

Кинетическая энергия единичной массы для круговой орбиты радиуса r равна:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} v_c^2 = \frac{K}{2r}. \quad (2.183)$$

Сумма потенциальной и кинетической энергий будет:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{K}{2r_{00}} \left(\frac{r_{00} + 2y}{r} \right). \quad (2.184)$$

Выражение для ускорения силы лобового сопротивления может быть представлено в виде

$$a_D = \frac{D}{m} = D^* c' \rho^* v^2 \quad [\text{путь/время}^2],$$

после чего выражение для энергии, рассеянной единичной массой на одном витке в результате работы силы лобового сопро-

тивления, запишется так ¹⁾:

$$\frac{E_D}{\text{rev}} = (D^* c' \rho^* v^2 T \text{ sid})^2 = \frac{2\pi r^3}{K} (D^* c' \rho^* v^2)^2. \quad (2.185)$$

После совершения n витков потеря энергии будет равна:

$$\Delta E_D = \frac{n E_D}{\text{rev}}. \quad (2.186)$$

В соответствии с равенством (2.181) эта потеря энергии должна быть равна сумме изменений кинетической и потенциальной энергий:

$$\Delta E_{\text{kin+pot}} = \frac{\Delta y/r}{1 - (\Delta y/r)} \frac{K}{2r}, \quad (2.187)$$

то есть

$$\Delta E_{\text{kin+pot}} = \Delta E_D = \frac{n E_D}{\text{rev}}. \quad (2.188)$$

Отсюда легко получить выражение для количества оборотов n , за которые при заданных начальных условиях произойдет изменение высоты на величину Δy :

$$n = \frac{\Delta E_{\text{kin+pot}}}{E_D/\text{rev}} = \frac{\Delta y/r}{1 - (\Delta y/r)} \frac{K}{2r E_D/\text{rev}}. \quad (2.189)$$

Это равенство было бы справедливым, если бы ρ^* не зависело от высоты, а D^* — от скорости. При больших скоростях движения и свободномолекулярном потоке коэффициент лобового сопротивления при малых изменениях скорости движения можно считать постоянным. В рассматриваемом случае изменения скорости невелики, так как по мере снижения космического аппарата скорости возрастают до тех пор, пока аппарат не войдет в плотные слои атмосферы, где уже неприменимы орбитальные закономерности. Эта фаза полета была рассмотрена в главе 1. При анализе малых изменений высоты или вообще изменений высоты в диапазоне высот с малым изменением плотности выражение (2.189), основанное на рассуждениях Зенгера [16], оказывается весьма полезным. Точность результатов, получаемых с использованием выражения (2.189), можно повысить, вводя среднее значение функции плотности $\rho^* = \rho/\rho_{00}$ между значениями ρ_y и $\rho_{y-\Delta y}$. Для определения потери высоты Δy при

¹⁾ Неясно, из каких соображений автор вместо очевидного выражения $E_D/\text{rev} = 2\pi r a_D = 2\pi r (D^* c' \rho^* v^2)$ предпочел записать выражение (2.185). (Прим. ред.)

заданном числе оборотов n выражение (2.189) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\Delta y}{r} = \frac{n}{n + \frac{K}{2rE_D/\text{rev}}} \quad (2.190)$$

В данном случае необходимо уметь рассчитать величину ρ^* и при необходимости уточнить ее методом последовательных приближений после получения $\Delta y/r$ в первом приближении.

Если время нахождения космического аппарата на орбите очень мало (1—3 витка), как в случае крылатого орбитального носителя [17], то можно получить еще более простые зависимости, основанные на уменьшении скорости за один виток вследствие лобового сопротивления воздуха. На рис. 2.32 приведены графики величины торможения и соответствующего уменьшения скорости, выраженного в единицах средней круговой скорости. Расчеты производились для упомянутого крылатого носителя весом 4980 кг по формуле

$$\frac{\Delta v_D}{\sqrt{\frac{K}{r}}} = \frac{a_D T_{\text{sid}}}{\sqrt{\frac{K}{r}}} \quad (2.191)$$

При этом величина торможения на одном витке принималась равной среднему постоянному значению.

Из равенства (2.187) следует, что

$$\frac{\Delta y}{r} = \frac{\frac{2 \Delta E_{\text{kin+pot}}}{K/r}}{1 + \frac{2 \Delta E_{\text{kin+pot}}}{K/r}} \quad (2.192)$$

Положив, что за один виток $\Delta E_D = \frac{1}{2} \Delta v_D^2$, можно величину $\frac{2 \Delta E_{\text{kin+pot}}}{K/r}$ представить в виде $\frac{2 \Delta E_{\text{kin+pot}}}{K/r} = \frac{2 \Delta E_D}{K/r} = \left(\frac{\Delta v_D}{\sqrt{K/r}} \right)^2$, после чего, подставив полученный результат в правую часть формулы (2.192), получим выражение для потери высоты за один виток в таком виде:

$$\frac{\Delta y}{r} = \frac{\frac{\Delta v_D}{\sqrt{K/r}}}{1 + \left(\frac{\Delta v_D}{\sqrt{K/r}} \right)^2} \approx \left(\frac{\Delta v_D}{\sqrt{K/r}} \right)^2 \quad (2.193)$$

Полученное выражение можно использовать для высот, превосходящих примерно 165 км, для которых знаменатель

$1 + (\Delta v_D / (\sqrt{K/r})^2) \rightarrow 1,0$. На кривой (рис. 2.32) для некоторых численных значений $\frac{\Delta v}{v_c} = \frac{\Delta v_D}{\sqrt{K/r}}$, например для $\Delta v/v_c = 0,125$

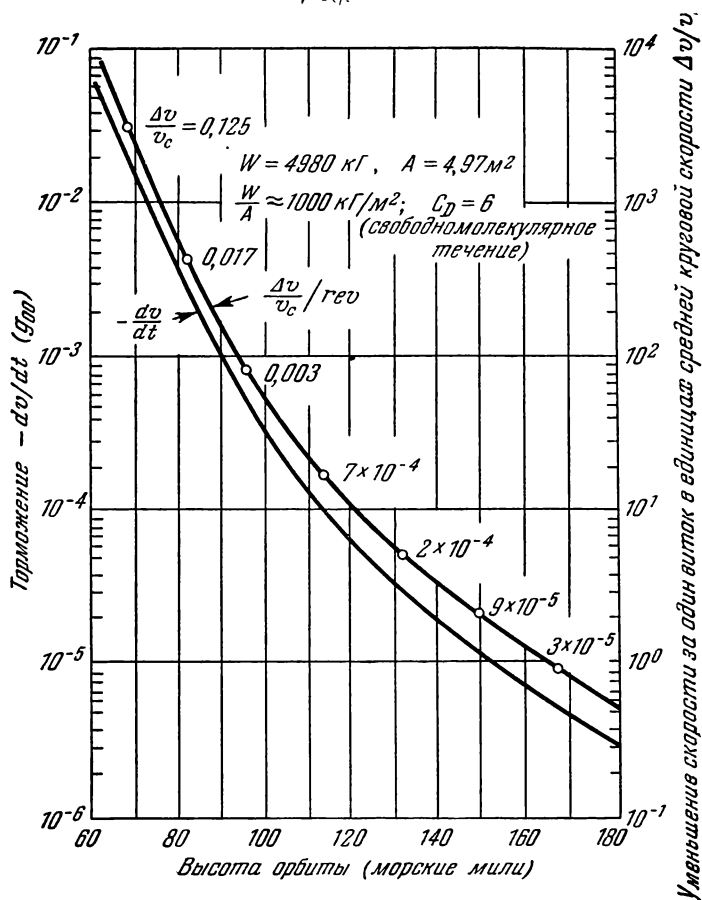


Рис. 2.32. Величина торможения и соответствующая потеря скорости за один виток в зависимости от высоты при отсутствии угла атаки ($\alpha = 0$) для крылатого орбитального носителя [17] ($g_{00} = 9,81 \text{ м/сек}^2$).

($y = 69$ морских миль ≈ 128 км), имеет место неравенство $\Delta y > y$, то есть космический аппарат не сделает и одного витка. На больших высотах с увеличением высоты потеря высоты за один виток резко уменьшается, что можно проиллюстрировать

следующими данными:

<i>y</i> , морские мили	82	95	113
$\Delta v/v_c$ за виток	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
Δy , фут	6150	176	10,6

Результаты, приведенные в таблице и на рис. 2.32, основаны на модели атмосферы Гриммингера (см. «Космический полет», т. 1, рис. 3.18 и 3.19).

Для рассмотренных выше практических приложений время играет второстепенную роль. С достаточной точностью время может быть определено по периоду обращения. Однако при больших продолжительностях, в особенности в случае определения времени существования спутника, этот метод становится громоздким и утомительным.

Одним из возможных подходов к задаче определения времени существования спутника является интегрирование точных уравнений при допущении о малости возмущений. Если через m обозначить массу спутника, а через D — силу лобового сопротивления, то утверждение, что возмущения малы, означает, что $(D/m)\Delta t/v \ll 1$. При малых возмущениях интервал интегрирования может быть очень большим. Наоборот, чем больше отношение D/m , тем меньше должен быть интервал интегрирования для обеспечения соответствующей точности расчета. Метод, использованный здесь, изложен в главе 7 применительно к случаю движения с малой тягой. Применение этого метода к изучению влияния лобового сопротивления на движение спутника дает следующие результаты:

изменение угловой скорости движения за время Δt

$$\Delta \dot{\eta} \approx \dot{\eta}_c - \dot{\eta}_{\Delta t} = -\frac{D}{m} \frac{\Delta t}{r_c}, \quad (2.194)$$

изменение величины скорости за время Δt

$$\Delta v = \frac{D/m}{\dot{\eta}_c} [\dot{\eta}_c \Delta t - 2 \sin(\dot{\eta}_c \Delta t)], \quad (2.195)$$

изменение радиального расстояния за время Δt

$$\Delta r = -\frac{2D/m}{\dot{\eta}_c^2} [\dot{\eta}_c \Delta t - \sin(\dot{\eta}_c \Delta t)], \quad (2.196)$$

где $\dot{\eta}_c = 2\pi/T_{\text{sid}}$ — угловая скорость движения на начальной круговой (или околокруговой) орбите, r_c — радиус начальной орбиты и $\dot{\eta}_{\Delta t}$ — угловая скорость после интервала времени Δt , в течение которого действовало ускорение силы сопротивления воздуха D/m .

Можно заметить, что $\Delta\dot{\eta}$ монотонно возрастает со временем, а изменения величины скорости и радиального расстояния содержат вековые и периодические члены. Поэтому как только спутник начинает испытывать торможение, то скорость вначале (когда Δt очень мало) уменьшается, так как $\sin(\dot{\eta}_c \Delta t) \approx \dot{\eta}_c \Delta t$, затем при $\dot{\eta}_c \Delta t = 107^\circ 31' = 1,894$ ($\sin \dot{\eta}_c \Delta t = 0,94822$) первое и второе слагаемые внутри скобок в равенстве (2.195) сравниваются, то есть Δv обращается в нуль, далее второе слагаемое по сравнению с первым становится меньше, что приводит к $\Delta v > 0$. Это наступает после интервала времени

$$\Delta t = \frac{2 \sin(\Delta \dot{\eta}_c t)}{\dot{\eta}_c}. \quad (2.197)$$

Следовательно, после этого интервала времени величина скорости будет увеличиваться со все возрастающей скоростью, так как после $\dot{\eta}_c \Delta t = 180^\circ$ (то есть за точкой, противоположной точке, принятой за начало действия лобового сопротивления) периодическое слагаемое становится положительным. С помощью соотношения (2.196) можно подсчитать время, необходимое для заданного изменения Δr . Затем можно рассчитать соответствующее изменение величины скорости, воспользовавшись равенством (2.195). Эти два равенства основаны на допущении, что $\dot{\eta} \approx \dot{\eta}_c$. Это легко проверить с помощью соотношения (2.194). Как только $\dot{\eta}$ начинает сильно отличаться от $\dot{\eta}_c$, то есть орбита начинает сильно отличаться от круговой, можно, приняв новые значения $\dot{\eta}$ и r за исходные значения $\dot{\eta}_c$ и r_c , продолжить расчет с новыми начальными условиями. Однако с увеличением времени ошибки будут увеличиваться, так как отношение D/m сильно возрастает с уменьшением высоты, в особенности начиная¹⁾ примерно с 165 км. Другим важным результатом, следующим из полученных зависимостей, является то, что время существования спутника обратно пропорционально отношению D/m , то есть при заданном значении S_D время существования прямо пропорционально поперечной нагрузке W/A , или «плотности» спутника. Таким образом, если удалось получить зависимость времени существования от высоты для спутника с заданной «плотностью», то ее легко пересчитать для спутника с другой «плотностью». Например, если «плотность», или W/A , одного из геометрически подобных спутников в два раза больше другого, то при одинаковых начальных условиях на круговых орбитах время существования первого спутника будет в два раза больше.

Кроме рассмотренного выше, существует много других аналитических подходов к решению задачи о времени существования

¹⁾ Для модели атмосферы Гриммингера (см. «Космический полет», т. I, гл. 3),

спутника. Петерсен [18] предложил приближенное решение для специального случая диффузного отражения в свободномолекулярном течении. Им получено следующее выражение для расчёта времени Δt , за которое величина начального радиального расстояния круговой орбиты r_0 изменится до величины r_1 :

$$\Delta t = \frac{r_0 - r_1}{2Br_0v_0}, \quad (2.198)$$

где $B = C_D A \rho_{\text{ave}} / m$, ρ_{ave} — средняя плотность в интервале высот, соответствующих r_0 и r_1 . Это решение основано на допущении, что величина орбитальной скорости незначительно изменяется в интервале $\Delta r = r_0 - r_1$. Разбивая заданный интервал Δr на малые шаги, можно по формуле (2.198) рассчитать время существования спутника на всем заданном интервале. Соответствующая величина угловой скорости движения определяется по следующему выражению:

$$\dot{\eta}_1 = \left[k_1 \frac{K}{r_1^3} (1 - 4B_1^2 r_1^2) \right]^{1/2} \quad [1/\text{время}], \quad (2.199)$$

где K — гравитационный параметр,

$$k_1 = \frac{1}{1 - 6B_1^2 r_1^2}, \quad (2.200)$$

$$B_1 = \frac{C_D A \rho_1}{m} \quad [1/\text{длина}]. \quad (2.201)$$

Величина скорости определяется выражением

$$v_1 = \left(\frac{k_1 K}{r_1} \right)^{1/2}. \quad (2.202)$$

Для больших высот значение $k_1 \approx 1$, при котором и получено упрощенное выражение (2.198). Более точное выражение имеет вид:

$$\Delta t = \frac{r_0 - r_1}{2Br_0 \left(k_1 \frac{K}{r_1} \right)^{1/2}}, \quad (2.203)$$

где величина $\sqrt{K/r_1}$ для круговой или околоскруговой орбиты является просто местной круговой скоростью. Петерсен произвел расчеты по формуле (2.198) для небольших спутников с отношением массы к площади поперечного сечения $1,6 \text{ кг/м}^2$, 16 кг/м^2 , 160 кг/м^2 и свои результаты сравнил с расчетами Сингера для небольшого спутника MOUSE [19] с отношением $m/A = 20,35 \text{ кг/м}^2$ и с расчетами Эрике для спутника с отношением $m/A = 40 \text{ кг/м}^2$, произведенными по формулам (2.194) — (2.196). Полученные графики для сравнения приведены на

рис. 2.33. Левая часть графиков относится к модели атмосферы, приведенной в журнале геофизических исследований [23] (см. «Космический полет», т. I, рис. 3.18 и 3.19), а правая — к модели атмосферы Гриммингера [25]. Следует помнить, что величины плотности и давления по модели атмосферы Гриммингера, начиная с высот порядка 80 км, больше, чем по модели атмосферы, приведенной в работе¹⁾ [23]. Графики, приведенные на рис. 2.33,

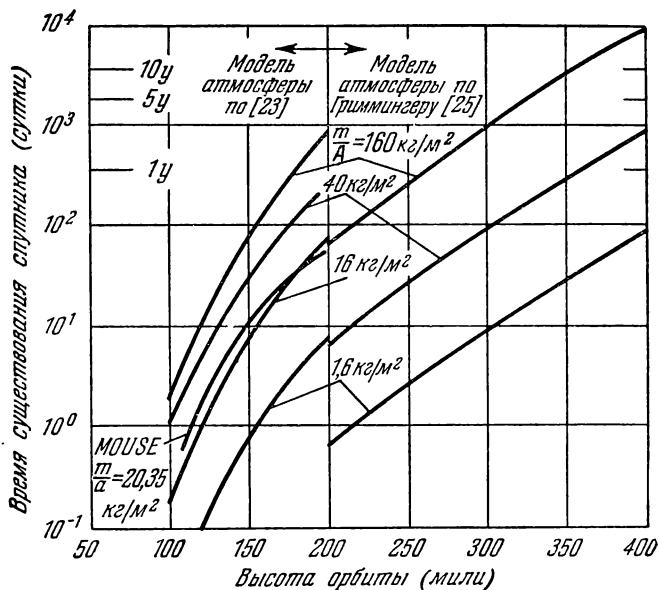


Рис. 2.33. Время существования спутника в зависимости от высоты для круговых орбит [15].

показывают хорошее согласование между результатами, полученными различными методами²⁾ [18, 19, 20]. Метод Сингера [19] определения потери высоты по существу является разновидностью метода, основанного на приравнивании расхода энергии на преодоление лобового сопротивления изменению орбитальной энергии (кинетической и потенциальной), то есть разновидностью метода, использованного Зенгером для гиперзвукового орбитального бомбардировщика. Этот подход настолько логичен, что он обычно сразу приходит на ум почти каждому, кто сталкивается

¹⁾ Данные, полученные при помощи спутников, показывают, что модель атмосферы Гриммингера дает хорошее согласование для больших высот.

²⁾ В источнике [20] не приведено описание метода расчета. Эта методика изложена здесь при получении формул (2.194) — (2.196).

с этой задачей. Ниже (в принятых здесь обозначениях) приводится графо-аналитический метод Сингера.

Запишем выражение для полной энергии тела на круговой орбите:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{K}{r_{00}} \left(\frac{y}{r_{00} + y} + \frac{1}{2} \frac{r_{00}}{r_{00} + y} \right), \\ E_{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \frac{K}{r_{00}} \left(1 + \frac{y}{r_{00} + y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.204)$$

Последнее уравнение можно представить графиком в функции от высоты. Этот график эквивалентен приведенному на рис. 2.2 графику энергетической скорости в зависимости от высоты. Запишем выражение для расхода энергии за один виток, вызванного действием силы лобового сопротивления:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta E &= 2\pi r D = 2\pi(r_{00} + y) \frac{1}{2} C_D A \rho(y) v_c^2 = \pi C_D A K \rho(y), \\ \text{или} \quad -\frac{\Delta E}{A} &= \pi C_D K \rho(y). \end{aligned} \right\} \quad (2.205)$$

Если принять $C_D = \text{const}$ ($C_D = 2$), то правая часть последнего выражения, за исключением $\rho(y)$, будет представлять собой постоянный коэффициент. Выражая расход энергии за один оборот в $\partial \mathcal{E}/m^2$, Сингер получил:

$$-\frac{\Delta E}{A} = 2,5 \cdot 10^{15} \rho(y) [\partial \mathcal{E}/m^2],$$

что соответствует $2,54 \cdot 10^{14} \rho(y) \text{ кгм}/m^2$. В отличие от равенства (2.185) потеря энергии здесь выражена не в единицах кинетической энергии. Если построить график для второго выражения (2.204) в функции высоты и разделить ΔE на массу спутника, чтобы получить удельную потерю энергии за один виток, то по этому графику можно найти влияние $\Delta E/m$ на потерю высоты за один или несколько витков. Сущность аналитической методики Сингера заключается в следующем.

Дифференцируя второе равенство (2.204) по высоте, получаем:

$$\frac{\Delta E_{\text{tot}}}{\Delta y} = \frac{1}{2} g_{00} \left(\frac{r_{00}}{r_{00} + y} \right)^2, \quad (2.206)$$

$$\frac{\Delta y}{\text{rev}} = \Delta E_{\text{tot}} \left[\frac{1}{2} g_{00} \left(\frac{r_{00}}{r_{00} + y} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (2.207)$$

Учитывая, что $\Delta E_{\text{tot}} = \Delta E/m$ и имея в виду первое равенство (2.205), находим:

$$\frac{\Delta y}{\text{rev}} = 2\pi C_D \frac{A}{m} (r_{00} + y)^2 \rho(y). \quad (2.208)$$

Используя выражение для периода обращения по круговой орбите $T = 2\pi K^{-1/2} (r_{00} + y)^{3/2}$ и полагая $K \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2$, $C_D = 2$, получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = C_D K^{1/2} \frac{A}{m} (r_{00} + y)^{1/2} \rho(y) = 4 \cdot 10^7 \left(\frac{A}{m} \right) (r_{00} + y)^{1/2} \rho(y) [\text{м/сек}]. \quad (2.209)$$

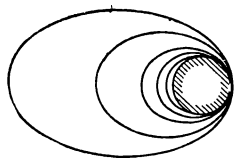
Отсюда можно получить выражение для времени, необходимого для снижения спутника с высоты y_1 до высоты y_2 :

$$\Delta t_{12} = 2,5 \cdot 10^{-8} \frac{m}{A} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{(r_{00} + y)^{1/2} \rho(y)}. \quad (2.210)$$

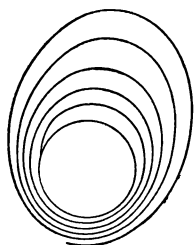
Этим интегральным соотношением необходимо пользоваться при малых высотах, когда изменение высоты за один виток настолько значительно, что не представляется возможным с достаточной точностью осреднить плотность воздуха за один виток.

При рассмотрении эллиптических орбит наиболее распространенные подходы к определению времени существования (например, в работах [18 и 19]) основаны на упрощающем допущении, что высота в перигее (на который приходится большая часть торможения) остается примерно постоянной, а высота в апогее быстро убывает. Это допущение в достаточной мере является справедливым для эллиптических орбит с большими эксцентриситетами и малыми высотами в перигее. Для подобных орбит потеря высоты в перигее за один виток по сравнению с соответствующей потерей высоты в апогее пренебрежимо мала (рис. 2.34). Однако в большинстве практических случаев эксцентриситеты эллиптических орбит не очень велики и высоты в перигее достаточно большие (примерно $220 \div 370 \text{ км}$). В таких случаях постепенное превращение орбиты в околосферную происходит за большое число витков и упрощенная методика является неоправданной, так как пренебрежение потерей высоты в перигейной точке, на район которой приходится основная доля торможения, вызовет серьезные ошибки, приводящие к завышенным оценкам времени существования космического аппарата. Сингер [19] для ряда эллиптических орбит численным интегрированием определил величину $\Delta E/A$ работы силы сопротивления воздуха на одном витке, приходящуюся на единицу

площади поперечного сечения спутника. Его результаты приведены на графиках (рис. 2.35). Из графиков видно, что при заданной высоте y_P величина $-\Delta E/A$ сравнительно слабо зависит от высоты в апогее для больших значений y_A , тогда как при $y_A \leq 2y_P$ высота в апогее оказывает значительное влияние на величину $-\Delta E/A$. При $y_A \leq 2y_P$ упомянутый выше упрощенный метод не подходит. Рис. 2.35 показывает, что при достаточно больших высотах в перигее ($y \geq 200$ км) метод неприемлем для больших значений высот в апогее, то есть для большинства практических случаев.



а)



б)

Рис. 2.34. Превращение эллиптической орбиты в околокруговую орбиту вследствие влияния сопротивления воздуха.

а) Изменение формы эллиптической орбиты с большим эксцентриситетом и малой высотой в перигее (изменение высоты в перигее пренебрежимо мало по сравнению с изменением высоты в апогее); б) изменение формы эллиптической орбиты с умеренной величиной эксцентриситета (изменением высоты в перигее пренебрегать уже нельзя).

Перкинс в работе [21] провел оригинальное и полезное исследование для круговых эллиптических орбит. Поскольку при исследовании эллиптических орбит им учитывались изменения высоты в перигее для всех значений эксцентриситетов, то мы рассмотрим методику Перкинса, используя обозначения, принятые в настоящей книге.

Для околокруговых орбит можно принять следующую зависимость для радиального ускорения:

$$\ddot{r} = \frac{v^2}{r} - \frac{K}{r^2}. \quad (2.211)$$

Поскольку для большей части времени существования космического аппарата $\Delta v/v \ll 1$ и $\Delta r/r \ll 1$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{r} = \frac{v_0^2}{r_0} \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right) - \frac{K}{r_0^2} \left(1 - 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right) \quad (2.212)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{v_0^2}{r_0} \left(2 \frac{\Delta v}{v_0} + \frac{\Delta r}{r_0} \right), \\ \ddot{r} &= 2\dot{\eta}_0 \Delta v + \dot{\eta}_0^2 \Delta r \quad (\dot{\eta}_0 = v_0/r_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.213)$$

так как для околокруговых орбит $v_0^2/r_0 \approx K/r_0^2$ (индекс «0» относится к начальным условиям).

Изменение орбитальной скорости можно разбить на две части: изменение скорости, вызванное действием силы сопротив-

ления воздуха, и изменение скорости, вызванное потерей высоты:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v &= \Delta v_D + \Delta v_g, \\ \Delta v_D &= -\frac{g}{W} \int_0^t D dt \\ \text{или для малых значений } \Delta v_D \\ \Delta v_D &= -\frac{\kappa \dot{\eta}_0^2}{2\rho_0} \int_0^t \rho dt, \\ \kappa &= g_{00} D^* \rho_0^2 r_0^2, \\ \Delta v_g &= -\dot{\eta}_0 \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (2.214)$$

С учетом этого второе уравнение¹⁾ (2.213) можно записать в виде

$$\Delta \ddot{r} = -\frac{\kappa \dot{\eta}_0^3}{\rho_0} \int_0^t \rho dt - \dot{\eta}_0^2 \Delta r. \quad (2.215)$$

Приняв теперь $\rho = \text{const}$ и перейдя от t к новой переменной $\eta = \dot{\eta}_0 t$, получим:

$$\Delta \ddot{r} = -\kappa \eta - \Delta r. \quad (2.216)$$

После интегрирования найдем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{r} &= -\kappa(1 - \cos \eta), \\ \Delta r &= -\kappa(\eta - \sin \eta). \end{aligned} \right\} \quad (2.217)$$

Последнее уравнение идентично уравнению (2.196).

При большом числе витков удельный вес периодического члена в изменении высоты становится малым и можно принять $\Delta r = -\kappa \eta$, где $\kappa = g_{00} D^* \rho_0^2 r_0^2$. Введя переменную плотность $\kappa \rho / \rho_0$ вместо κ , Перкинс получил:

$$\frac{d \Delta r}{d \eta} = -\kappa \frac{\rho}{\rho_0}$$

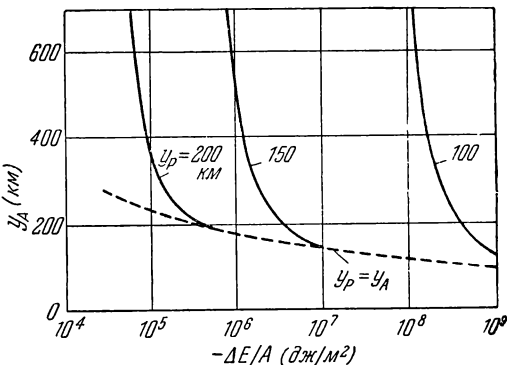


Рис. 2.35. Расход энергии на единицу площади поперечного сечения спутника за один виток по эллиптической орбите в зависимости от высоты в апогее для различных высот в перигее [16].

¹⁾ Изменение радиального ускорения за время t . (Прим. ред.)

и после интегрирования

$$t\dot{\eta}_0 = \frac{\rho_0}{\kappa} \int_y^{y_0} \frac{dy}{\rho}, \quad (2.218a)$$

или

$$t = \frac{\rho_0}{\dot{\eta}_0 \kappa} \int_y^{y_0} \frac{dy}{\rho} \text{ [время]}. \quad (2.218b)$$

Полученное выражение является основным уравнением для определения времени существования спутника на орбите. Оно

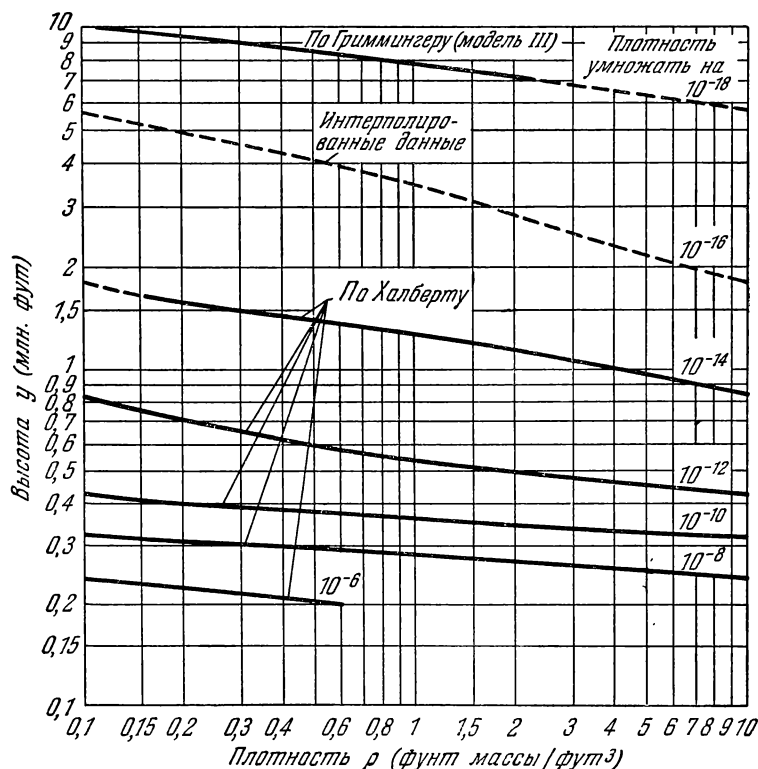


Рис. 2.36. Зависимость высоты от плотности (обе шкалы логарифмические).

может быть проинтегрировано графически для любой зависимости *плотность — высота* построением графика в зависимости от высоты. Принимая зависимость

$$\rho \sim y^{\beta}, \quad (2.219)$$

где β — отрицательная константа, получим зависимость между высотой и плотностью, которой можно пользоваться в достаточно широком диапазоне высот. Используя графики зависимости

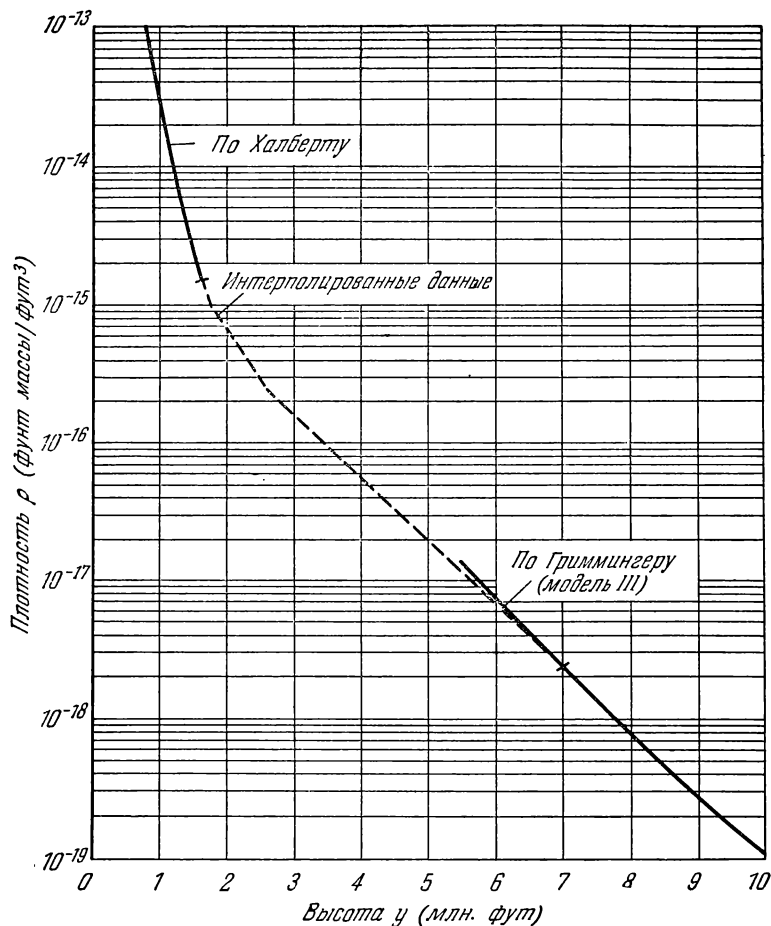


Рис. 2.37. Зависимость плотности от высоты (шкала плотности логарифмическая).

плотности от высоты (рис. 2.36 и 2.37), полученные сопряжением данных Халберта¹⁾ (Е. О. Hulburt) и Гриммингера, Перкинс нашел значение $\beta = -5,05$, справедливое для высот, начиная примерно с $y > 91,5$ км.

¹⁾ Naval Research Laboratory (NRL),

Подставляя выражение (2.219) в соотношение (2.218b), после интегрирования получаем:

$$t = \frac{y_0^{(1-\beta)}}{\dot{y}_0 \kappa (1-\beta)} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{1-\beta} \right] \text{ [время]}. \quad (2.220)$$

На рис. 2.38 приведен график изменения высоты для круговой орбиты с течением времени, рассчитанный при $\beta = -5,05$. Исходные данные принимались следующими:

$$y_0 = 800\,000 \text{ фут (240 км)},$$

$$1/D^* = W/C_D A = 9,74 \text{ кг/м}^2,$$

$$v_0 = 7760 \text{ м/сек},$$

$$\dot{y}_0 = v_0/r_0 = 1,177 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1},$$

$$\kappa = g_0 D^* \rho_0 r_0^2 = 280 \text{ м}.$$

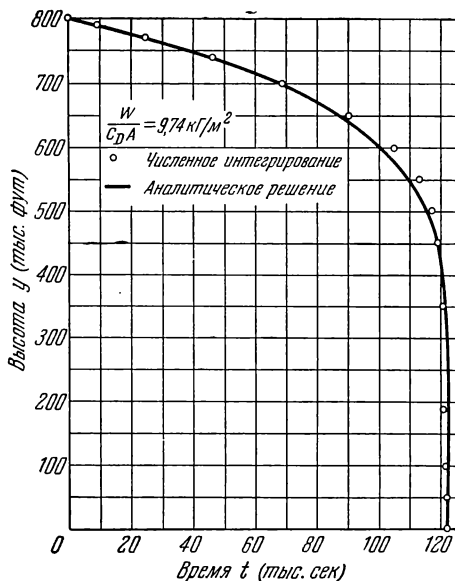


Рис. 2.38. Зависимость высоты от времени для круговой орбиты.

(300 000 фут) согласование вполне удовлетворительное. На более низких высотах рассогласование становится значительным, что, как и следовало ожидать, свидетельствует о непригодности принятого значения β для этих высот. Однако рассогласование на этих высотах не имеет практического значения, так как с высоты 90÷100 км круговая орбита вырождается в траекторию спуска (см. главу 1). Таким образом, соотношение (2.218b) дает хорошие результаты для большей части времени существования спутника в верхних слоях атмосферы (выше 90÷100 км).

Точность результатов в основном зависит от точности знания коэффициента лобового сопротивления C_D и принятой зависимости плотность — высота,

Полное время существования спутника, определяемое как время спуска с начальной круговой орбиты до точки падения, может быть определено из соотношения (2.220):

$$t\dot{\eta}_0 = \eta = \frac{y_0}{\kappa} \left(\frac{1}{1-\beta} \right). \quad (2.221)$$

Перкинс построил график этого уравнения в виде зависимости

$$\eta \left(\frac{C_D A}{W} \right) = \frac{y_0}{g_{00} \rho_0 r_0^2} \left(\frac{1}{1-\beta} \right)$$

и сравнил с результатами численного интегрирования (рис. 2.39). Как следует из сравнения, имеет место хорошее

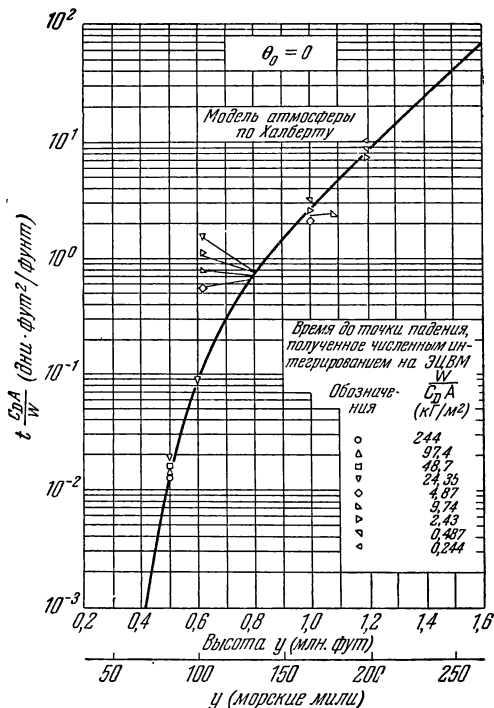


Рис. 2.39. Обобщенный график времени существования спутника в зависимости от высоты начальной точки для круговой орбиты.

согласование для широкого диапазона значений $C_D A/W$. Основанный на этих результатах график времени существования спутника на круговых орбитах с высотами до 650 км (350 морских миль) приведен на рис. 2.40.

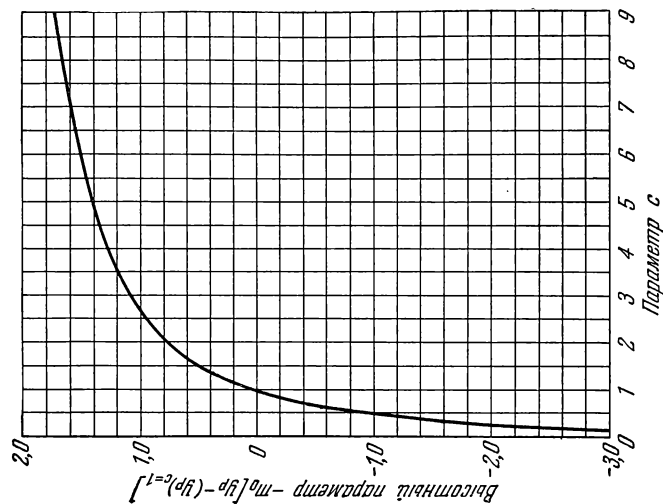


Рис. 2.41. Зависимость высотного параметра от коэффициента c для определения времени существования спутника на эллиптической орбите.

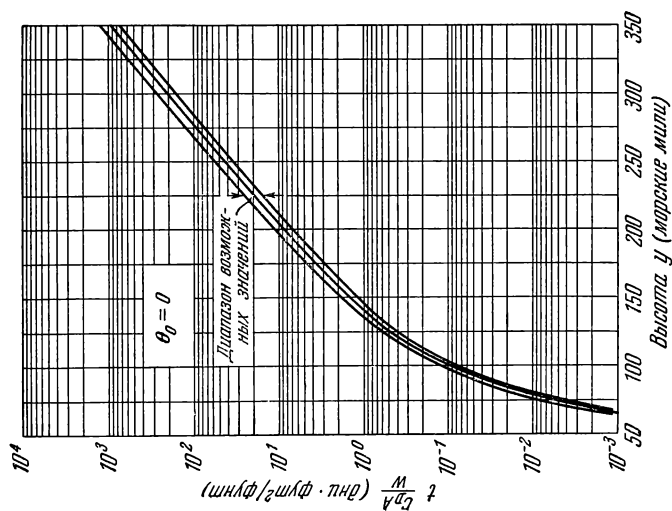


Рис. 2.40. Приближенное время существования спутника при заданной высоте начальной круговой орбиты для среднего значения параметра лобового сопротивления $C_D A/W$.

Исследуя эллиптические орбиты и учитывая, что в данном случае в отличие от круговых орбит $v_0^2 r_0 \neq K/r_0^2$, Перкинс получил:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{r} &= \dot{r}_0^2 Q - \dot{r}_0^2 \Delta r - \frac{\kappa \dot{r}_0^3}{\rho_0} \int_0^t \rho dt, \\ Q &= r_0 - \frac{K}{v_0^2} = r_0 \left[1 - \left(\frac{v_c}{v_0} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.222)$$

где Q учитывает начальное значение радиального ускорения $\Delta \ddot{r}_0$ в зависимости от η . Принимая для малых изменений скорости

$$Q \approx 2r_0 \left(\frac{\Delta v_c}{v_c} \right)_0 \quad (2.223)$$

и переходя, как и прежде, к новой переменной $\eta = \dot{r}_0 t$, получаем:

$$\Delta \ddot{r} = Q - \Delta r - \frac{\kappa}{\rho_0} \int_0^\eta \rho d\eta. \quad (2.224)$$

Величина интеграла в правой части зависит от принятой функции плотности от высоты. С целью упрощения задачи Перкинс принял

$$\rho \sim e^{m\eta}, \quad (2.225)$$

где m [1/длина] — отрицательный коэффициент, график которого приведен на рис. 2.41 (на основании кривой *плотность — высота*; см. рис. 2.36 и 2.37). При этом он получил:

$$\Delta \ddot{r} = Q - \Delta r - \kappa \int_0^\eta e^{m\Delta r} d\eta. \quad (2.226)$$

Чтобы найти интеграл, Перкинс в подынтегральном выражении подобрал для Δr приближенное решение в функции η , исходя из того, чтобы это решение соответствовало определению плотности с приемлемой точностью. Путь решения при этом был следующий. В случае отсутствия сопротивления воздуха уравнение (2.226) имеет вид:

$$\Delta \ddot{r} = Q - \Delta r. \quad (2.227)$$

Интегрируя с использованием преобразования Лапласа, получаем приближенное решение в виде¹⁾

$$\Delta r = Q (1 - \cos \eta). \quad (2.228)$$

¹⁾ Ср. также с дифференциальной формой (I. 4.141).

Подставляя это решение в подынтегральное выражение (2.226) и дифференцируя, находим:

$$\Delta \ddot{r} + \Delta \dot{r} = -K e^{-c} e^{c \cos \eta}, \quad (2.229)$$

где $c = -mQ$. Раскладывая последний сомножитель в ряд по степеням косинуса, получаем:

$$\Delta \ddot{r} + \Delta \dot{r} = -K e^{-c} \left(1 + c \cos \eta + \frac{c^2 \cos^2 \eta}{2!} + \frac{c^3 \cos^3 \eta}{3!} + \dots \right). \quad (2.230)$$

Воспользуемся известным выражением

$$\cos^n \eta = \left(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2} \right)^n$$

для замены степеней косинуса суммами произведений косинусов кратных углов на постоянные коэффициенты:

$$\cos^n \eta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\eta + n \cos (n-2)\eta + \frac{n(n-1)}{2!} \cos (n-4)\eta + \dots \right]. \quad (2.231)$$

При нечетном n суммы должны оканчиваться соответствующим членом с $\cos \eta$ (например, если $n=3$, то членом с $\cos (n-2)\eta$). При четном n суммы должны оканчиваться выражением с косинусом, аргумент которого обращается в нуль и последний член делится на два. Подставляя соответствующие суммы (2.231) для степеней косинусов, входящих в уравнение (2.230), и интегрируя это уравнение с использованием преобразования Лапласа¹⁾, окончательно получаем:

$$\Delta r = Q(1 - \cos \eta) - K e^{-c} \left[a(\eta - \sin \eta) + \frac{b}{2}(\sin \eta - \eta \cos \eta) + \frac{d}{2^2 - 1} \left(\sin \eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta \right) + \frac{f}{3^2 - 1} \left(\sin \eta - \frac{1}{3} \sin 3\eta \right) + \dots \right], \quad (2.232)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}, \\ b &= c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2 (n+1)}, \\ d &= c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! (n+2)!}, \end{aligned} \right\} \quad (2.233)$$

а

$$x = \left(\frac{c}{2} \right)^2.$$

¹⁾ Подробности вывода см. в [21].

Особый интерес представляет скорость изменения высоты в точках апсид, где $\eta=0$ или $\eta=\pi$. В перигее $\sin \eta=0$ и $\cos \eta=1$; в апогее $\sin \eta=0$, $\cos \eta=-1$. Подставив эти значения в решение (2.232) и продифференцировав по η , получим следующие выражения для скорости изменения высоты в точках апсид:

$$\dot{r}_P = -\kappa e^{-c} \left(a - \frac{b}{2} \right), \quad (2.234)$$

$$\dot{r}_A = -\kappa e^{-c} \left(a + \frac{b}{2} \right). \quad (2.235)$$

Из этих формул легко получить выражение для скорости изменения величины большой полуоси эллиптической орбиты в процессе превращения эллиптической орбиты в круговую:

$$\dot{r}_A - \dot{r}_P = -\kappa e^{-c} b, \quad (2.236)$$

где a и b определяются по формулам (2.233). Постоянные a , b и κ должны быть вычислены для перигея, так как последние три выражения были получены только для одного витка. Из решения (2.228) следует, что $Q = (r_A - r_P)/2$. Отсюда имеем:

$$r_A - r_P = 2Q = -\frac{2c}{m_0}, \quad (2.237)$$

где m_0 — показатель степени m в выражении (2.225) при начальной высоте y_0 . Считая этот показатель m постоянным и дифференцируя последнее выражение, получаем:

$$\dot{r}_A - \dot{r}_P = -\frac{2}{m_0} \dot{c}. \quad (2.238)$$

Подставляя соотношение (2.236) в левую часть выражения (2.238), находим:

$$\dot{c} = \frac{m_0 \kappa}{2} e^{-c} b. \quad (2.239)$$

Разделив (2.234) на (2.239) и имея в виду, что $r_P = r_{00} + y$, получим:

$$\frac{dy_P}{dc} = -\frac{1}{m_0} \left(2 \frac{a}{b} - 1 \right). \quad (2.240)$$

Последнее выражение и является искомой зависимостью, связывающей изменение высоты с коэффициентом $c = -mQ = -m \times \times \left(r_0 - \frac{K}{v_0^2} \right)$. Подходящей начальной точкой для интегрирования уравнения является $c=1$. Тогда $Q = -1/m_0$ и

$$-m_0 [y_P - (y_P)_{c=1}] = \int_1^c \left(2 \frac{a}{b} - 1 \right) dc. \quad (2.241)$$

При $c=1$ левая часть равенства (2.241) обращается в нуль. При $c<1$ левая часть становится отрицательной, стремясь к $-\infty$ при $c \rightarrow 0$, тогда как при $c>1$ левая часть положительна. Перкинс проинтегрировал уравнение графически. Результаты приведены на рис. 2.42 и 2.43. Более подробные графики приведены в работе [21]. То обстоятельство, что высота в перигее безгранично уменьшается с приближением величины κ к нулю,

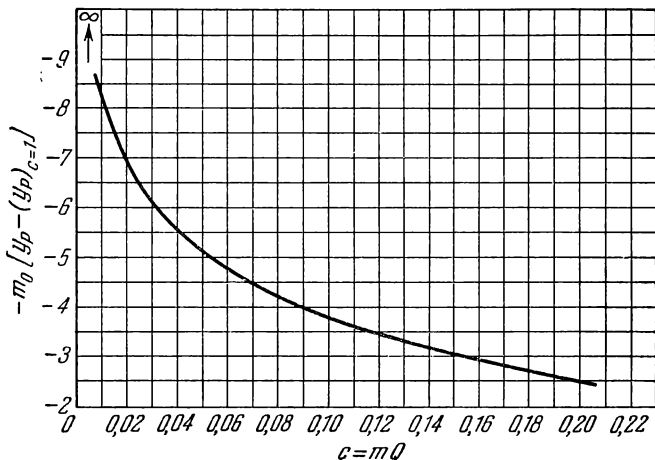


Рис. 2.42. Высотный параметр эллиптической траектории в зависимости от коэффициента c .

указывает на то, что в действительности орбита приближается к круговой асимптотически и никогда не достигает ее. Подобное представление более верно отражает реальные условия, чем упрощенная схема, основанная на предположении об изменении высоты только в апогее при неизменной высоте в перигее с последующим спиральным спуском в атмосфере.

В свое время мы перешли от аргумента t к новой переменной $\eta = \dot{\eta}t$. Теперь необходимо установить связь между высотой в перигее y_p и углом η (то есть параметром времени):

$$\eta_2 - \eta_1 = \int_1^2 \frac{dy_p}{\dot{y}_p}. \quad (2.242)$$

Возможны два решения этого уравнения. Если считать, что выражение (2.225) с достаточной степенью точности пригодно для расчета плотности на высотах до точки падения включительно, то возможно общее решение. Если же с целью повышения точ-

ности решения необходимо учитывать изменение плотности в перигейной точке по мере ее понижения, то решение требует графического интегрирования. Оба решения были рассмотрены Перкинсом.

а) Решение с графическим интегрированием.

Так как $\dot{r}_P = \dot{y}_P$, то, полагая κ при плотности ρ удовлетворяющим соотношению $\kappa\rho/\rho_0 = g_{00} D^* \rho_0 r_0^2 \rho/\rho_0$, уравнение (2.234) можно записать в виде

$$-\frac{\kappa}{\dot{y}_P} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{e^c}{a - \frac{b}{2}}. \quad (2.243)$$

Таким образом, левая часть является функцией лишь c . Так как параметр $\{-m_0[y_P - (y_P)_{c=1}]\}$ также известен в функции коэффициента c (рис. 2.41), то можно построить график величины $(-\kappa\rho/\dot{y}_P\rho_0)$ в функции высотного параметра (рис. 2.43). Параметр времени η можно получить из формулы (2.242), которая может быть переписана в виде

$$\frac{\kappa\rho}{\rho_0} \eta = \int_{y_P}^{(y_P)_0} \left(\frac{-\rho}{\rho_0 \dot{y}_P} \right) \frac{dy_P}{\rho}. \quad (2.244)$$

Это уравнение решается следующим образом. Сначала отыскивается начальное значение коэффициента $c = -mQ$ из второй формулы (2.222):

$$c_0 = m_0 \left(r_0 - \frac{K}{v_0^2} \right). \quad (2.245)$$

По найденному значению c_0 определяют из графиков (рис. 2.41 или рис. 2.43) начальное значение высотного параметра. Затем, задаваясь различными значениями y_P от $(y_P)_0$ до 0, определяют соответствующие значения $\{-m_0[y_P - (y_P)_{c=1}]\}$, находя разности по графикам на рис. 2.44—2.46. Это позволяет определить и значения $(-\kappa\rho/\dot{y}_P\rho_0)$. Эти данные вместе со значением плотности, входящей в выражение (dy_P/ρ) , подставляются в (2.244), и величина интеграла определяется графически. Для круговой

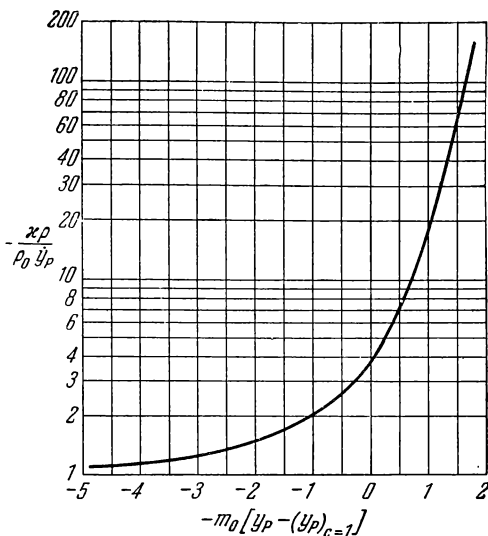


Рис. 2.43. Эллиптические траектории.

орбиты ($c_0=0$) отношение $(-\kappa\rho/\dot{y}_P\rho_0)$ обращается в единицу и формула (2.244) упрощается.

б) Общее решение. Используя зависимость (2.225), можно получить общее решение. Подставляя в уравнение (2.242) dy_P

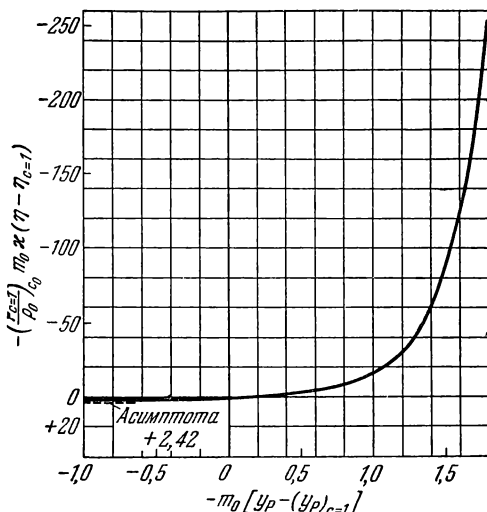


Рис. 2.44. Параметр времени эллиптической траектории в зависимости от высотного параметра.

из выражения (2.240) и $\dot{y}_P$ из соотношения (2.234) и интегрируя от произвольной точки $c=1$, получаем:

$$\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} m_0 \kappa (\eta - \eta_{c=1}) = -2 \int_1^c \frac{\rho_{c=1}}{\rho} \frac{e^{-c}}{b} dc, \quad (2.246)$$

где [см. выражение (2.225)]

$$\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} = e^{-m_0 [y_P - (y_P)_{c=1}]}. \quad (2.247)$$

Показатель степени в правой части полученного выражения зависит лишь от c [см. формулу (2.241)]. Таким образом, правая часть выражения (2.246) является функцией лишь c и при использовании (2.241) может быть вычислена графическим интегрированием. Подставляя (2.241) в (2.247) и (2.247) — в правую часть (2.246), получаем:

$$-2 \int_1^c e^{\int_1^c \left(2 \frac{a}{b} - 1\right) dc} \frac{e^c}{b} dc,$$

что эквивалентно величине

$$\int_1^c \left(\frac{2a}{b} - 1 \right) dc \int_1^c \frac{e^c}{a - \frac{b}{2}} d \left[\int_1^c \left(\frac{2a}{b} - 1 \right) dc \right]. \quad (2.248)$$

Равенство (2.246) теперь примет вид:

$$\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} m_0 \kappa (\eta - \eta_{c=1}) = \int_1^{\rho_{c=1}/\rho} \left(\frac{-\kappa}{\dot{y}} \right)_c d \left(\frac{\rho_{c=1}}{\rho} \right)_c. \quad (2.249)$$

Поскольку правые части равенств (2.241) и (2.247) зависят лишь от c , то можно построить график зависимости левых частей друг от друга. На рис. 2.44—2.46 представлены графики основной функции общего решения

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} \right)_{c_0} m_0 \kappa (\eta - \eta_{c=1}) = \\ = f \{ -m_0 [y_P - (y_P)_{c=1}] \}. \end{aligned} \quad (2.250)$$

Методика использования общего решения заключается в следующем:

а) по выражению (2.245) определяют c_0 ;

б) по графику (рис. 2.41) находят значение высотного параметра $\{ -m_0 [y_P - (y_P)_{c=1}] \}$, соответствующего начальной высоте;

в) вычитают $(-m_0 y_0)$ из высотного параметра, соответствующего начальной высоте, чтобы найти высотный параметр, отвечающий точке падения, — при этом используют график, приведенный на рис. 2.47, для нахождения значения m_0 , соответствующего заданному значению y_0 ;

г) используя графики, приведенные на рис. 2.44—2.46, по значениям высотного параметра, соответствующим начальной

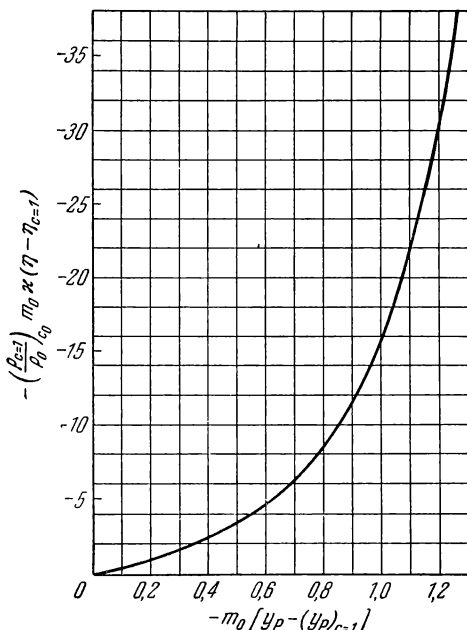


Рис. 2.45. Параметр времени эллиптической траектории в зависимости от высотного параметра.

высоте и точке падения, определяют начальное и конечное значения параметра времени:

$$-\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} m_0 \kappa (\eta - \eta_{c=1});$$

д) вычитая начальное значение параметра времени из его конечного значения, определяют параметр полного времени

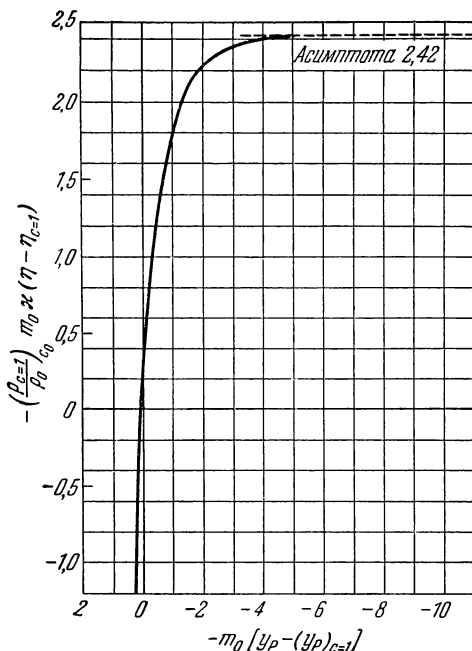


Рис. 2.46. Параметр времени эллиптической траектории в зависимости от высотного параметра.

существования спутника с помощью формулы

$$\Delta \eta_{\text{param}} = -\frac{\rho_{c=1}}{\rho_0} \kappa m_0 \eta; \quad (2.251)$$

е) используя выражения для $\rho_{c=1}/\rho$ и K_0 , полученные ранее, можно записать выражение для времени в обобщенной форме:

$$tD^* = \frac{\Delta \eta_{\text{param}}}{v_0 m_0 \frac{K}{r_{00}} \frac{r_0}{r_{00}} \rho_0 \frac{\rho_{c=1}}{\rho_0}} \left[\frac{\text{время} \cdot \text{вес}}{\text{площадь}} \right], \quad (2.252)$$

где $\rho_{c=1}/\rho_0 = \exp \{ -m_0 [y_P - (y_P)_{c=1}]_0 \}$, а $D^* = C_D A / W$ — параметр

лобового сопротивления спутника; в случае круговой орбиты можно показать, что выражение (2.252) упрощается и приобретает вид

$$t_c D^* = \frac{1 - e^{m_0 y_0}}{m_0 \left(\frac{K}{r_{00}} \right)^{3/2} \frac{r}{r_{00}} \rho_0} \left[\frac{\text{время} \cdot \text{вес}}{\text{площадь}} \right]. \quad (2.253)$$

Таким образом, по методике, изложенной в пп. а) — е), сразу определяется полное время существования спутника, без нахождения промежуточных высот в зависимости от времени. Если все же желательно иметь кривую высоты в зависимости от времени, то в п. в) вместо вычитаемого $(-m_0 y_0)$ необходимо использовать промежуточное значение $[-m_0(y_0 - y)]$, что и было сделано Перкинсом для ряда примеров, приведенных на рис. 2.48. Это позволило получить полное время существования спутника для различных начальных высот и скоростей. На рис. 2.49 приведены графики полного времени существования спутника на эллиптической орбите в зависимости от $t(C_D A/W)$ для различных постоянных значений параметра $(\Delta v/v_c)_0$.

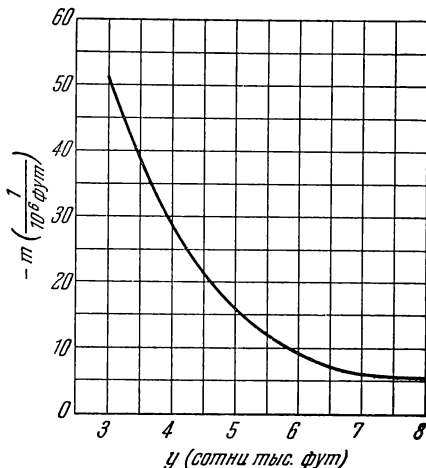


Рис. 2.47. Зависимость показателя степени в выражении для плотности от высоты.

Эксцентриситет рассмотренных орбит характеризуется параметром скорости $(v_0 - \sqrt{K/r_0})/\sqrt{K/r_0}$ (на рис. 2.48 отложен по оси абсцисс). Сравнение результатов аналитического решения с данными точных расчетов на электронных цифровых машинах показывает отличное согласование. Исключение составляет высоты в районе $1,83 \cdot 10^5$ м, где функция плотности (2.225) очень неточная. На меньших высотах аналитическое решение дает завышенное время существования по сравнению с данными, рассчитанными на ЭВМ с использованием действительной функции изменения плотности с высотой. Интересно отметить, что для орбит с очень большим апогейным расстоянием аналитическое решение дает заниженное время существования по сравнению с рассчитанным на ЭВМ. Это объясняется тем, что принятая

в аналитическом методе функция изменения плотности с высотой (2.225) на больших высотах дает завышенное значение

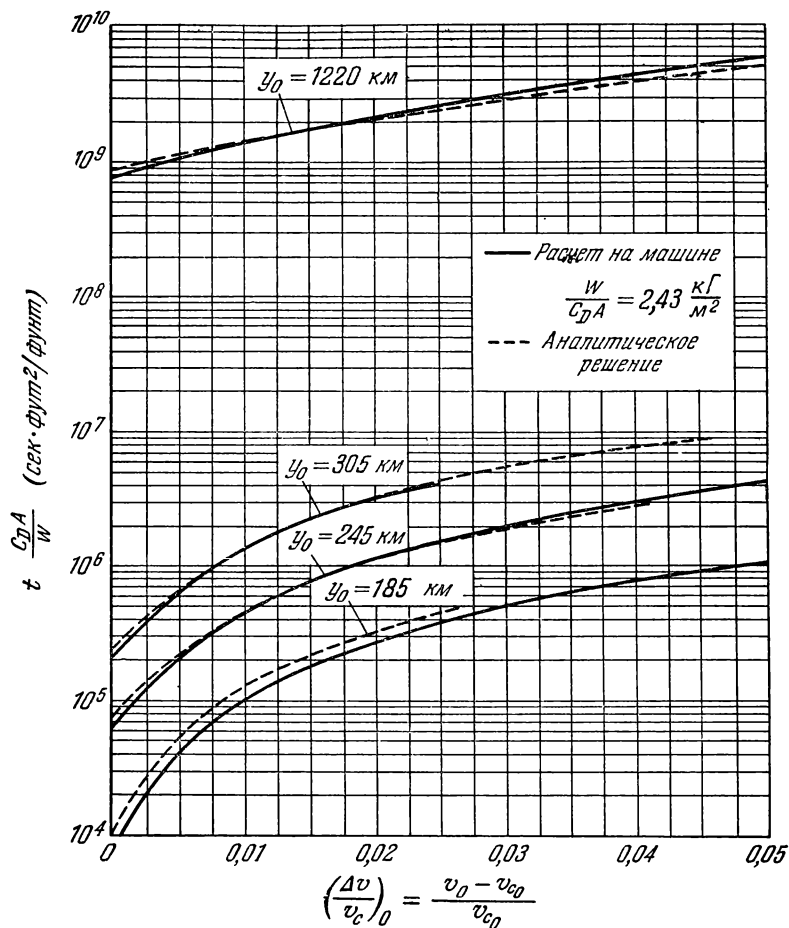


Рис. 2.48. Полное время существования спутника на эллиптической орбите по результатам аналитического решения и численного интегрирования на электронной вычислительной машине.

плотности, что приводит к уменьшению времени существования спутника.

По сравнению с аналитическим решением графическое решение, использующее для всех точек орбиты начальное значение m_0 (за исключением перигейной точки, где подставляется «дей-

ствительное» значение плотности), дает заниженное время существования.

Несмотря на значительные усилия, направленные на получение приемлемых аналитических или графических методов

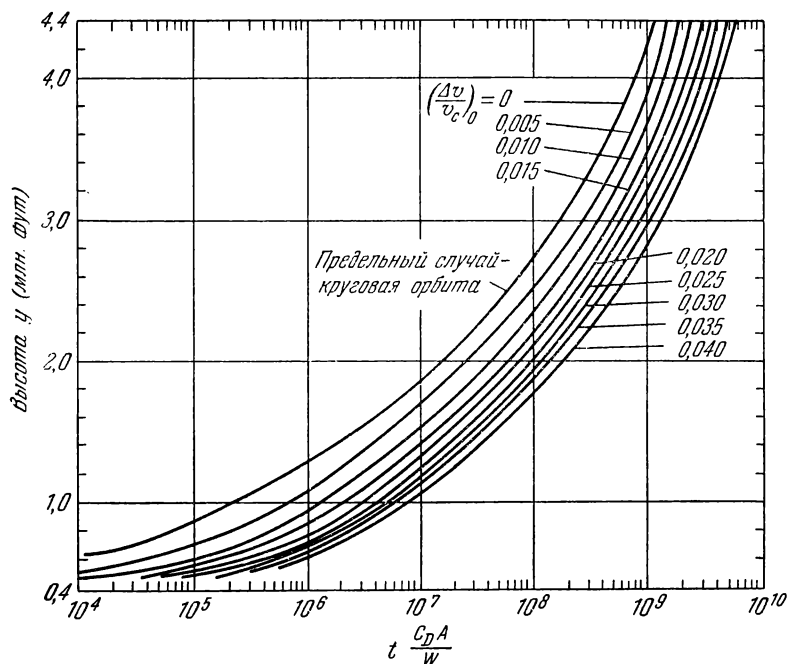


Рис. 2.49. Полное время существования спутника на эллиптической орбите для различных значений параметра $(\Delta v/v_c)_0$ (расчет на электронной вычислительной машине).

решения задачи определения времени существования спутника, этим методам присущи следующие две основные группы недостатков:

1. Принятие упрощающих допущений о зависимости плотности от высоты, об изменении коэффициента лобового сопротивления с высотой и пренебрежение подъемной и боковой аэродинамическими силами.

2. Недостаточное знание истинного изменения плотности с высотой, а также коэффициента лобового сопротивления и его изменения.

Большинства недостатков первой группы можно избежать, используя численное интегрирование либо более полных

уравнений движения (§ 1.8), либо уравнений (2.171) — (2.180) с целью определения не только высоты, но и изменения всех орбитальных элементов в функции времени. Последнее позволило бы рассчитывать эфемериды спутника для последующей организации наблюдений и использования получаемых параметров для прогнозирования. Для спутника несферической формы при условии, что его положение в полете фиксировано, можно вычислить нормальную [выражение (2.162)] и, возможно, ортогональную составляющие аэродинамической силы. Эти величины будут периодически меняться при движении спутника по орбите. Если же спутник в полете не стабилизирован, то можно принять гипотезу о случайном движении оси космического аппарата, приводящую к средним величинам аэродинамических коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления.

Метод решения задачи с использованием ЭВМ, как и другие методы, не свободен от второй группы недостатков. Здесь может помочь лишь использование непосредственных результатов измерений, полученных с помощью спутников. Плотность, так же как и коэффициент лобового сопротивления, может изменяться с высотой и вследствие действия электрических сил, не учитываемых принятыми газодинамическими теориями. Быть может, было бы более правильным говорить о лобовом сопротивлении плазмы, нежели об аэродинамическом лобовом сопротивлении. Лобовое сопротивление плазмы определяется магнито-гидродинамическими силами, а не только гидродинамическими (газодинамическими) силами. Изменение характеристик плазмы будет влиять на лобовое сопротивление плазмы не только через изменение плотности, но более сложным образом. Поскольку характеристики плазмы в известной мере зависят от солнечной радиации, то в достаточно узком диапазоне высот лобовое сопротивление плазмы может изменяться в гораздо больших пределах, чем этого можно было бы ожидать, судя по изменению только плотности. На очень больших высотах этого эффекта не будет из-за большой длины свободного пробега молекул, соответствующей большому времени релаксации. Последнее обстоятельство уменьшает влияние солнечной радиации на характеристики плазмы. Аналогичным образом на плотность оказывают влияние электрические свойства атмосферы, зависящие от магнитного поля Земли. Таким образом, проблема точного определения времени существования спутника зависит от не менее сложных геофизических задач, еще не решенных в настоящее время.

После первых запусков спутников появились опытные данные относительно действительного времени существования спутника. К настоящему времени имеются данные о действительном времени существования только одного спутника почти сферической

формы — «Спутника-1». Высота его начальной орбиты равнялась примерно 550 км. Интересно сравнить действительное время существования «Спутника-1» с результатом расчета параметра $t(C_D A/W)$, полученным Перкинсом:

площадь поперечного сечения (включая антенны) $A \approx 0,285 \text{ м}^2$,
вес спутника $W = 83,6 \text{ кг}$,

отношение веса к площади поперечного сечения $W/A = 293 \text{ кг/м}^2$,

коэффициент лобового сопротивления (с учетом антенн) $C_D = 2,5$,

параметр лобового сопротивления $W/C_D A = 117$,

время существования $t \approx 90 \text{ сут} \approx 7,8 \cdot 10^6 \text{ сек}$,

скорость в перигее (по сообщениям печати) $v_P = 7980 \text{ м/сек}$,

Δv в перигее $= 7980 - 7787 = 193 \text{ м/сек}$,

$(\Delta v/v_c)_P = 193/7787 = 0,0247$,

экспериментальное значение $t(C_D A/W) = \frac{7,8 \cdot 10^6}{117} = 6,66 \cdot 10^4$,

расчетное значение $t(C_D A/W) \approx 3,28 \cdot 10^5$ ($\approx 1,6 \cdot 10^6$ в единицах, принятых при построении графика на рис. 2.49).

Поэтому кажущееся значение C_D будет равно:

$$C_D = \frac{3,28 \cdot 10^5}{6,66 \cdot 10^4} \approx 4,9.$$

Меньшее фактическое время существования спутника объясняется не только большим коэффициентом лобового сопротивления плазмы, но и большей величиной действительной плотности атмосферы по сравнению с принятой в расчетах Перкинса. Так как ожидаемое действительное значение коэффициента лобового сопротивления может быть в два раза больше его теоретической величины, рассчитываемой по свободномолекулярной теории (2,2 для сферы и 2,5 для спутника с антеннами), то теоретическое время существования спутника будет:

$$t = 3,28 \cdot 10^5 \cdot 293/5 = 1,92 \cdot 10^7 \text{ сек} \approx 222 \text{ сут},$$

то есть почти в два с половиной раза больше, чем действительное время существования «Спутника-1». Если предположить, что принятое значение C_D является правильным, то указанное расхождение во времени существования можно объяснить лишь различием в плотности атмосферы. Для определения раздельного влияния C_D и плотности атмосферы на время существования спутника необходимы экспериментальные измерения лобового сопротивления в плазменной аэродинамической трубе. В таблице 2.8 представлено время существования некоторых искусственных спутников Земли.

Т а б л и ц а 2.8

Фактическое время существования различных искусственных спутников

наименование	вес, кг	Спутник	Высота *), км		Дата запуска	Звездный период, мин	Время существования **)
			в перигее	в апогее			
«Спутник-1»	83,6	Сфера диаметром 57,9 см с выступающими прутковыми антеннами	231 ¹⁾	940 ¹⁾	4.10.57	96,17	96,2 сут
«Спутник-2»	508,5	Конус; длина примерно 9 м	206 ¹⁾	1700 ¹⁾	3.11.57	103,7	162 сут
«Эксплорер-1»	14	Почти цилиндр (как снаряд); диаметр 15,2 см, длина 2,03 м	360 ¹⁾	2351 ¹⁾	1.2.58	114,7	(≥ 4 года)
«Вангард-1»	1,48	Почти сфера; диаметр 16,3 см	350,6 ¹⁾	2013 ¹⁾	3.2.59		(> 200 лет)
«Эксплорер-3»	14,4	Как у спутника «Эксплорер-1»	350,6 ¹⁾	3965 ²⁾	4.2.60		
«Спутник-3»	1323,4	Конус; диаметр основания 1,73 м, длина 3,56 м	652 ²⁾	3946 ²⁾	17.3.58		
«Эксплорер-4»	16,8	Как у спутника «Эксплорер-1»	654,5 ²⁾	3948 ²⁾	19.3.59		
«Скор»	3995,2	Почти цилиндр (ракета «Атлас»); диаметр 30,6 м, длина 26 м	646,9 ²⁾	2801 ²⁾	17.3.60		
«Вангард-2»	9,76	Сфера диаметром 50,8 см	188 ²⁾	1896,5 ¹⁾	26.3.58	114,7	93 сут
«Эксплорер-6»	65	Почти сфера с большими выступающими панелями солнечных батарей; длина 73,7 см, диаметр 66 см	262 ²⁾	2210 ²⁾	15.5.58	105,8	693 сут
«Вангард-3»	22,7	Сфера диаметром 50,8 см с выступающей легка конической трубой длиной 66 см	185 ²⁾	1472 ²⁾	26.7.58	110,27	455 сут
«Эксплорер-7»	42	Два конуса, соединенные короткой цилиндрической частью; длина 76,2 см, максимальный диаметр 76,2 см	558,4 ³⁾	3323,1 ³⁾	18.12.58	101,5	34 сут
«Тайрос-1»	122,6	Цилиндр; диаметр 106,7 см, длина 48,3 см	554,8 ³⁾	3304,2 ³⁾	17.2.59	125,86	(≈ 100 лет)
«Транзит-1В»	120,2	Почти сфера; диаметр 91,4 см	552,7 ³⁾	4245,7 ³⁾	17.2.60	768	(≈ 2 года)
			553,2 ³⁾	4231,8 ³⁾	7.8.59		
			701,2	4218,3 ³⁾	8.9.59		
			373,8 ³⁾	3727 ³⁾	28.10.59	130,19	(≈ 40 лет)
			366,6 ³⁾	1069,9 ³⁾	18.9.59	101,16	(≈ 20 лет)
			382,5 ³⁾	1080,3 ³⁾	13.10.59		
			382,6 ³⁾	742,3	1.4.60	99,15	(≈ 75 лет)
				736,2 ³⁾	13.4.60	95,78	($\approx 1,5$ года)
				711,7 ³⁾	20.6.60		
				686 ³⁾	19.8.60		
					1.12.60		

*) Величины относятся к начальной орбите.

**) В скобках приведено ожидаемое время существования спутников, которые еще находятся на орбитах.

1) По данным Астрофизической обсерватории Смитсоновского института. 2) По данным вычислительного центра NASA. 3) По данным Space Track.

На рис. 2.50 дана зависимость времени существования спутников от начального звездного периода, то есть от величины, пропорциональной $a^{3/2}$, где a — средний радиус начальной орбиты.

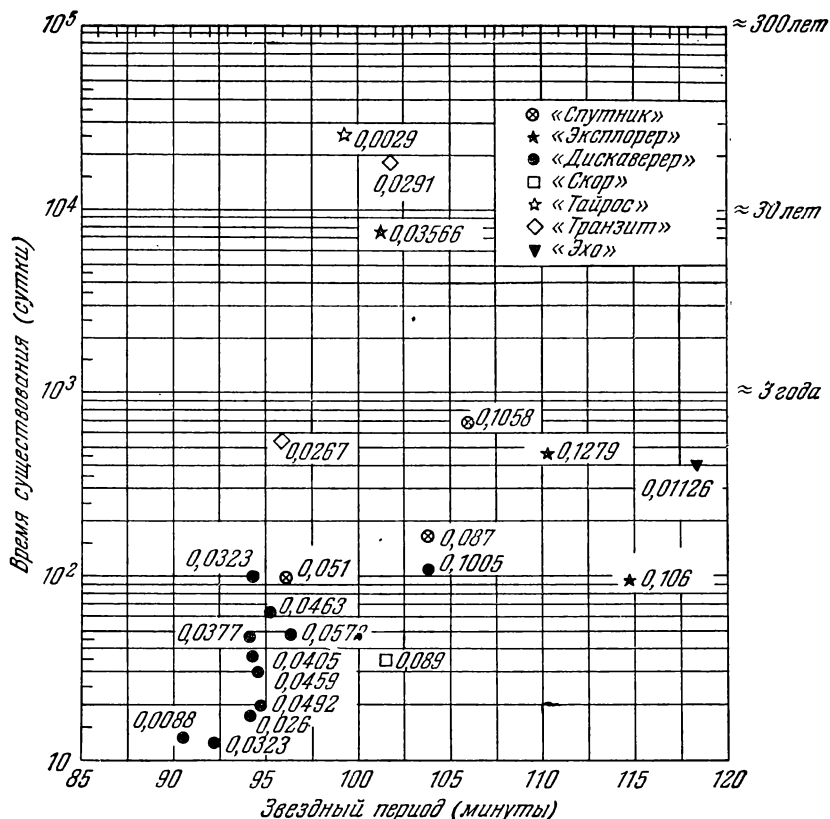


Рис. 2.50. Обзор времени существования искусственных спутников в зависимости от звездного периода. (Около условных знаков указаны величины начальных эксцентриситетов орбит.)

Эти данные не позволяют сделать определенных выводов вследствие большого числа неучтенных параметров, влияющих на время существования спутника. Орбиты спутников отличаются не только эксцентриситетами, но и высотами в перигее. Сами спутники отличаются друг от друга по форме, плотности и материалу (например, лобовое сопротивление спутника с фибerglassовым покрытием менее зависит от электрической проводимости верхних слоев атмосферы, чем лобовое сопротивление

спутника с металлическим покрытием). Все же данные, приведенные в таблице 2.8 и на рис. 2.50, позволяют сделать вывод, что время существования спутника возрастает с увеличением среднего радиуса начальной орбиты и увеличением плотности спутника (отношения массы к площади поперечного сечения). Получение более точных данных о плотности верхних слоев атмосферы потребует уменьшения количества параметров, влияющих на время существования спутника, при проведении систематических опытов.

Для исследования верхней атмосферы спутники представляют собой идеальный инструмент, если их проектировать специально для этой цели. Идеальным спутником для исследования атмосферы является сферическое тело, плотность которого должна быть тем меньше, чем для более высоких слоев атмосферы этот спутник предназначен. Плотность запущенных до сих пор спутников слишком велика, чтобы они могли быть использованы для определения плотности атмосферы на высотах, превышающих $100 \div 200$ км. Исключение составляет спутник «Эхо-1», представляющий собой надутую алюминизированную миларовую оболочку диаметром 30,5 м и весом 75,8 кг (милар — 60 кг, алюминиевое покрытие — 1,7 кг, состав для надувания оболочки — 13,5 кг, радиомаяк для слежения — 0,6 кг). Это соответствует $A/W = 9,63 \text{ м}^2/\text{кг}$ или $W/A = 0,104 \text{ кг}/\text{м}^2$. При улетучивании газа через отверстия, образованные метеоритами, отношение A/W приближается к величине $11,3 \text{ м}^2/\text{кг}$. Подобный спутник может быть использован для исследования весьма разреженных слоев атмосферы. По эволюции его движения можно судить об очень малых изменениях плотности атмосферы, вызванных, например, влиянием солнечной радиации: он оказывается чувствительным даже к давлению солнечного излучения (см. § 2.11).

На рис. 2.51 приведены графики изменения периода между последовательными прохождением восходящего узла орбиты, высоты в апогее и высоты в перигее для спутника «Эхо-1» по данным NASA за четыре месяца 1960 г. На высокую чувствительность надувного спутника к воздействию лобового сопротивления указывает сравнительно высокая скорость изменения периода прохождения узла орбиты (см. § 2.5 и § 2.6). Неравномерность в изменении высот точек аписид объясняется изменением плотности атмосферы, вызванным влиянием солнечного излучения. Резкое увеличение лобового сопротивления в ноябре соответствует хромосферным вспышкам, имевшим место в то же время. Начальная орбита спутника была почти круговой ($e = 0,01126$), с разницей между высотами в апогее и перигее около 180 км. Следовало ожидать, что обе точки аписид вследствие действия лобового сопротивления атмосферы будут пони-

жаться. Однако этот эффект был несколько искажен влиянием давления солнечного излучения. В течение осени 1960 г. перигей орбиты был обращен в сторону Солнца. При этом давление солнечного излучения уменьшало перигейное расстояние и увеличивало апогейное расстояние. Уменьшение перигейного расстояния вследствие влияния давления солнечного излучения превосходило уменьшение перигейного расстояния, вызванного влиянием лобового сопротивления, что для орбиты заданной энергии означало соответствующее увеличение апогейного расстояния. В середине сентября эксцентриситет орбиты достиг 0,031. По мере смещения апогейной точки в сторону Солнца давление солнечного излучения стало уменьшать апогейное расстояние, изменяя орбиту в сторону круговой. Этот цикл будет со временем повторяться. Подобный процесс, конечно, влияет на изменение орбиты, вызванное лобовым сопротивлением. Всякий раз при понижении перигейной точки влияние сопротивления атмосферы становится более выраженным, сильно уменьшая время существования спутника «Эхо-1».

Искусственные спутники, предназначенные для изучения плотности атмосферы, должны быть нескольких стандартных размеров (например, диаметром 15 м, 30 м и 60 м), позволяющих их оптическое слежение в глобальном масштабе. К тому же подобные размеры являются вполне достаточными для размещения на спутнике легкого радиомаяка для обеспечения слежения за спутником радиотехническими средствами и небольшого количества солнечных батарей. Распределение солнечных батарей по поверхности сферической оболочки должно обеспечивать

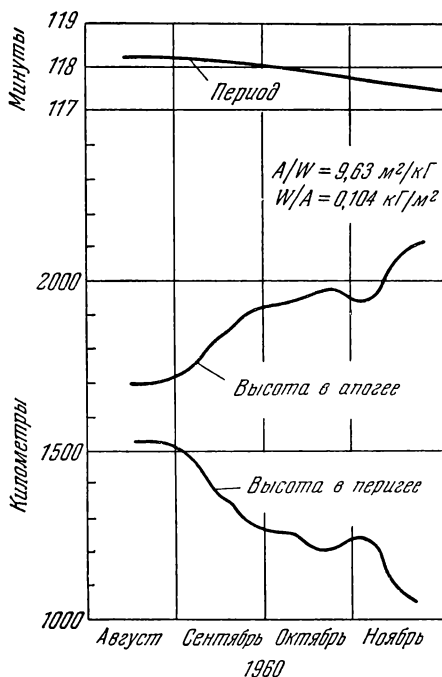


Рис. 2.51. Изменения периода между последовательными прохождениемми восходящего узла, высоты в апогее и высоты в перигее для надувного спутника «Эхо-1» (1960 г.).

преобразование солнечной энергии при освещении произвольно ориентированного спутника. Солнечные батареи можно использовать для подзарядки аккумуляторных батарей, питающих радиомаяк. Потребляемая мощность бортовой радиоаппаратуры составляет несколько милливатт. Наличие радиомаяка диктуется необходимостью слежения за спутником в ночное время, а также при длительной облачности. Плотность спутника стандартного размера можно изменять в достаточно широких пределах за счет изменения толщины оболочки, тем самым позволяя использовать спутник заданных размеров для исследования плотности атмосферы в широком диапазоне высот. После наполнения оболочка должна приобрести определенную жесткость (достигаемую химическими средствами), чтобы с самого начала и до конца эксперимента обеспечить определенные параметры спутника.

При этом необходимо предусмотреть возможность выпуска газа, что позволит по результатам обработки данных наблюдения исключить ошибки, которые могут возникнуть вследствие изменения формы и размеров спутника из-за утечки газа (например, при пробое метеоритом).

Приемлемыми можно считать лишь точные орбиты с небольшим числом стандартных величин эксцентриситета. Этого можно достичь при наличии командного управления с Земли механизмом управления наполнения оболочек газом. Оболочки, выведенные на орбиты с недопустимыми отклонениями, не наполняются, чтобы не затруднять наблюдения за спутниками, выведенными на расчетные орбиты. Оболочки, выведенные на слишком низкие орбиты, можно, подав команду на их наполнение, быстро спустить с орбиты. Для наиболее эффективного исследования атмосферы надувными спутниками необходима организация глобальной системы слежения за их полетами. Вследствие того, что такие спутники не представляют никакой военной опасности, организация подобных работ представляет исключительно благоприятную возможность для развития международного сотрудничества в области космических исследований.

2.11. Дополнительные возмущения

Кроме гравитационных возмущений Земли, Луны, Солнца и лобового сопротивления атмосферы, на спутник действуют следующие дополнительные возмущения:

- небольшие неправильности в фигуре геоида,
- электрическое и магнитное поля,
- релятивистские эффекты,
- космическая пыль,
- давление солнечного излучения.

Все эти возмущения очень малы. На рис. 2.52 показаны отклонения геоида от эллипсоида с учетом второй, третьей и четвертой гармоник. Необходимо помнить, что вторая гармоника, вообще говоря, определяет полярное сжатие по отношению к идеальной сфере. Кривая же, приведенная на рис. 2.52, показывает отличие значения второй гармоники для геоида от ее значения для идеального сфероида. Третья гармоника, полученная

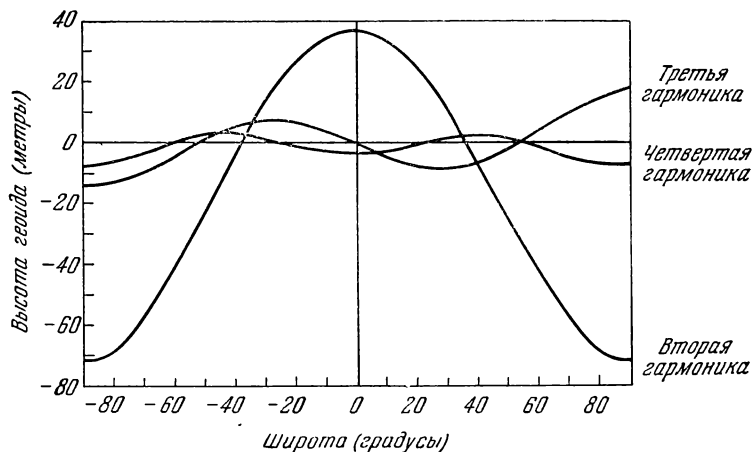


Рис. 2.52. Вторая, третья и четвертая гармоники отклонения действительного геоида от фигуры жидкого эллипсоида с такими же массой и периодом вращения в зависимости от широты (на основании современных данных).

на основании изучения орбиты спутника «Вангард-1», имеет положительную амплитуду 15 м на Северном полюсе и отрицательное значение амплитуды на Южном полюсе. Два других амплитудных значения третьей гармоники по 7,5 м приходятся на широты $+26,5^\circ$ и $-26,5^\circ$. Эти амплитудные значения отклонений указывают на слегка грушевидную форму геоида. Четвертая гармоника определяет отклонения геоида от эллипсоида, симметричные относительно плоскости экватора.

Отличие значения второй гармоники геоида от ее значения для эллипсоида указывает на то, что полярное сжатие Земли и ее экваториальное «вздутие» несколько больше, чем у жидкого эллипсоида с той же массой и той же угловой скоростью вращения. Поскольку, как известно, приливные силы Солнца и Луны чрезвычайно мало уменьшают скорость вращения Земли (в настоящее время скорость убывания угловой скорости вращения составляет 10^{-3} сек за столетие), то современная

форма Земли соответствует равновесному состоянию, имевшему место много миллионов лет назад. Это отставание в изменении формы Земли служит причиной значительных напряжений в ее коре. В далеком будущем с дальнейшим увеличением продолжительности суток эти напряжения возрастут настолько, что наступит новая эра сейсмической активности, которая приведет к бурному горообразованию и, быть может, изменению формы континентов.

Хотя третья и четвертая гармоники играют важную роль в геодезии, влияние их в астронавтике незначительно. Абсолютные величины вызываемых ими возмущающих сил очень малы и быстро убывают с расстоянием. Например, возмущения, вызываемые третьей гармоникой, убывают пропорционально $1/r^3$, а вызываемые четвертой гармоникой — пропорционально $1/r^4$.

Силы и моменты, действующие на спутник, могут возникнуть и вследствие его движения в магнитном и электрическом полях Земли. Электрическое поле Земли изменяется в зависимости от интенсивности потоков заряженных частиц, испускаемых Солнцем. Магнитное поле Земли изменяется слабо (0,63 гаусса на полюсах и 0,31 гаусса на экваторе). Сила магнитного поля уменьшается пропорционально $1/r^3$, то есть быстро убывает с высотой. Влияние этих полей на орбитальное движение (в отличие от влияния на ориентацию спутника и его движение относительно центра масс) ограничено околоземным пространством, примыкающим к поверхности Земли, и оценки показывают, что оно весьма мало по сравнению с гравитационными эффектами.

Релятивистские эффекты для смещения перигелия могут быть легко оценены по формуле Эйнштейна (полученной в 1915 г. [11]), дающей для смещения перигелия по долготе за один оборот следующую зависимость:

$$\Delta\omega = \frac{6\pi K}{a(1-e^2)c^2}, \quad (2.254)$$

где $K=U/r$, a — большая полуось эллиптической орбиты, e — эксцентриситет орбиты, c — скорость света.

Эту формулу можно преобразовать к виду [15]

$$\Delta\omega = \frac{2,6146 \cdot 10^{-8}}{(r_A^* + r_P^*) \left[1 - \left(\frac{r_A^* - r_P^*}{r_A^* + r_P^*} \right)^2 \right]}, \quad (2.255)$$

где числитель равен величине $12\pi K/r_{00}c^2$, $r_A^* = r_A/r_{00}$, $r_P^* = r_P/r_{00}$, r_A и r_P — соответственно радиальные расстояния до апогея и перигея орбиты, r_{00} — радиус Земли. На рис. 2.53 показан гра-

фик смещения перигея $\Delta\omega$ в зависимости от относительного апогейного расстояния r_A^* при $r_P^* = 1,1$. В долунном пространстве, как следует из графика, этот эффект, грубо говоря, в два раза меньше, чем для орбит, расположенных в непосредственной близости к Земле, а сама величина смещения во всей рассматриваемой области чрезвычайно мала.

Влияние космической пыли на орбиту спутника оценить точно в настоящее время не представляется возможным, так

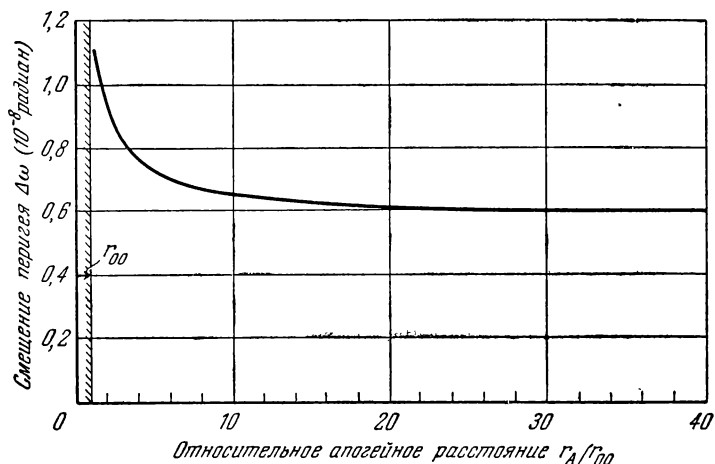


Рис. 2.53. Релятивистский эффект смещения перигея орбиты спутника Земли в околоземном и долунном пространствах ($r_P/r_{00} = 1,1$).

как пока ни одно из естественных тел необходимой плотности не представляло возможности достаточно длительного наблюдения для получения суждений о возмущающем влиянии космической пыли¹⁾. Однако все оценки показывают, что в силу

¹⁾ Когда было замечено увеличение среднего движения кометы Энке после ее прохождения перигелия, Энке в качестве возможной причины этого явления указал на газообразное вещество, окружающее Солнце. Однако от этого предположения пришлось отказаться после того, как Тиссеран показал, что в этом случае газ должен был бы обладать намного большей плотностью, чем это можно судить по зодиакальному свету. Недавно Уиппл выдвинул новое объяснение этому явлению. Он считает, что причиной является реактивная сила, вызванная испарением кометного льда при прохождении кометы вблизи Солнца (The Acceleration of Comet Encke, *Astrophys. J.*, 111: pp. 375—394, 1950; 113: pp. 464—474, 1951). Наличие свободных радикалов в кометах является дополнительным аргументом в пользу объяснения, выдвинутого Уипплом.

значительной разреженности и малой плотности космической пыли ее влияние намного меньше влияния гравитационных сил.

Таким образом, за пределами земной атмосферы, то есть по крайней мере на радиальных удалениях, превышающих $2r_{00}$, можно считать, что определяющей силой является сила притяжения. Источниками гравитационных сил являются Земля,

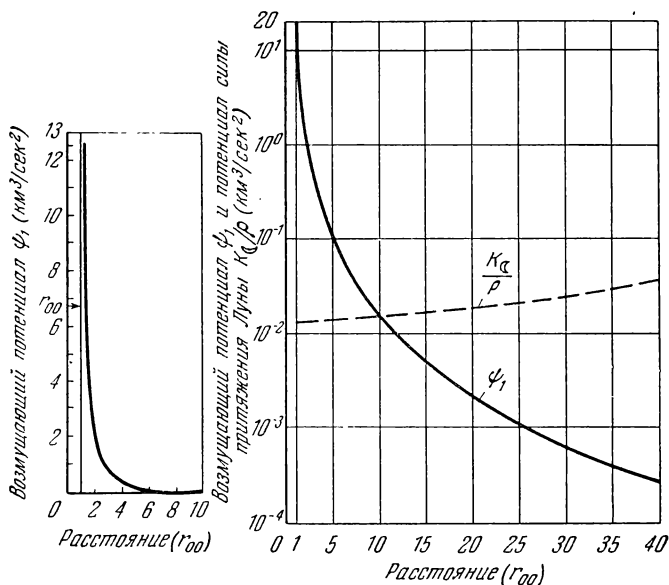


Рис. 2.54. Возмущающий потенциал вследствие сжатия Земли. Для сравнения приведен потенциал силы притяжения Луны (плоскость орбиты спутника совпадает с плоскостью лунной орбиты; $\delta = 28^\circ 36'$).

приближенно принимаемая в виде сжатого сфероида или материальной точки, Луна и Солнце, принимаемые за материальные точки.

Используя соотношение (2.33а), первый член возмущающего потенциала можно записать в виде

$$\psi_1 = \frac{1}{3} \frac{K}{r} J \left(\frac{r_{00}}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \delta - 1). \quad (2.256)$$

Возмущающий потенциал ψ_1 представлен графиками на рис. 2.54. График, приведенный на левой стороне рисунка, показывает изменение ψ_1 в зависимости от радиального удаления рассматриваемой точки в диапазоне от одного до 10 земных радиусов. Он показывает быстрое убывание ψ_1 с увеличением рас-

стояния. Правый график, где ось ординат имеет логарифмическую шкалу, дает более точные величины. Там же для сравнения приведен график потенциала силы притяжения Луны в рассматриваемых точках указанного диапазона. В данном частном случае, когда плоскость орбиты спутника рассматривается лежащей в плоскости системы «Земля — Луна», оба рассматриваемых потенциала оказываются равными на радиальном удалении приблизительно $10r_{00}$. Сама по себе точка пересечения не представляет какого-либо практического значения в астронавтике. Однако она указывает на область, в которой эти возмущающие влияния оказываются сравнимыми. При больших наклонениях точка пересечения между двумя кривыми приближается к значению $14r_{00}$. При радиальных удалениях, превышающих примерно $10r_{00}$, по сравнению с возмущающим влиянием сжатия Земли все более преобладающими становятся возмущения, вызываемые силами притяжения Луны и Солнца.

Влияние давления солнечного излучения может быть значительным в зависимости от плотности рассматриваемого спутника. Как было показано (§ 2.10), для спутника «Эхо-1» (с отношением $A/W = 11,3 \text{ м}^2/\text{кг}$) это влияние было значительным. Для спутника «Вангард-1», который имел в 800 раз большую плотность, изменение высоты в перигее вследствие давления солнечного излучения составило всего 3 км^1 , тогда как для спутника «Эхо-1» эта величина равнялась 500 км (или, если сравнивать скорости понижения перигейной точки, то 2 км за год для спутника «Вангард-1» и 2 км за день для спутника «Эхо-1»). Влияние светового давления центрального тела на орбиту его спутника будет рассмотрено в § 9.16. Влияние светового давления Солнца на движение спутника было рассмотрено Мюзоном²⁾.

2.12. Точки либрации и центры периодических движений в системе «Земля — Луна»

В § 6.3 («Космический полет», т. I) было указано на отсутствие общих методов интегрирования уравнений движения в задаче трех тел. Там же отмечалось, что в двух специальных случаях Лагранжем были получены периодические решения. В этих специальных случаях предполагалось, что тела определенным образом расположены относительно друг друга в одной плоскости так, что равнодействующая сила, приложенная к каждому телу, проходит через барицентр (центр масс) системы и

¹⁾ P. Musen, R. Bryant and A. Bailie, Science, vol. 131, p. 935 (1960).

²⁾ P. Musen, J. Geophys. Res., vol. 65, p. 1391 (1960).

пропорциональна расстоянию от рассматриваемой точки до барицентра. Эти точки, соответствующие решениям Лагранжа, называются точками либрации. При рассмотрении системы «Земля—Луна—частица» одна из этих точек либрации находится в долунном пространстве, три — лежат на лунной орбите или близко

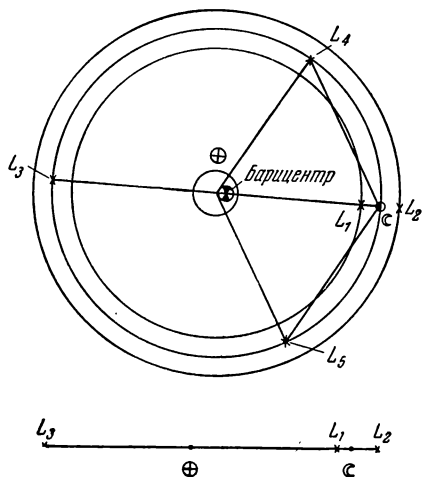


Рис. 2.55. Расположение точек либрации в системе «Земля—Луна».

Луна». Если обозначить через r и D соответственно расстояние между телом бесконечно малой массы и телом массы M и расстояние между телом массы m и телом массы M (рис. 2.56), то можно получить [см. формулы (1.6.65)—(1.6.67)]:

$$\frac{r_1}{D} \approx 1 - \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} = L_1, \quad (2.257)$$

$$\frac{r_2}{D} \approx 1 + \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} = L_2, \quad (2.258)$$

$$\frac{r_3}{D} \approx 1 - \frac{7}{12} \frac{m}{M} = L_3. \quad (2.259)$$

На рис. 2.55 видно, что точка либрации L_1 располагается в долунном пространстве.

Кроме решений, определяющих точки либрации, были получены другие частные решения, содержащие уменьшенное число произвольных постоянных. Особый интерес среди них представляют так называемые периодические решения. Эти решения характеризуются периодическим возвращением взаимного рас-

к ней. При выводе зависимостей для периодического движения частицы около точек либрации мы воспользуемся методикой, разработанной знаменитым шведским астрономом Шарлье [11].

Особое теоретическое и практическое значение для астронавтики представляет случай, когда масса одного из рассматриваемых тел может быть принята за бесконечно малую величину, а из двух других тел масса одного значительно больше массы другого тела, то есть $M \gg m$. К такому случаю можно отнести движение космического аппарата в долунном пространстве внутри изолированной системы «Земля—

положения системы в исходное положение. Периодические решения были получены Хиллом¹⁾. Позже их общая теория была разработана Пуанкаре²⁾.

Периодические орбиты (или колебания) могут быть разбиты на две группы. К первой группе относятся движения, приводящие к бесконечно малым изменениям во взаимном расположении тел системы, то есть движения, при которых изменения во взаимном расположении тел системы пренебрежимо малы по сравнению с размерами самой системы. Вторая группа включает в себя движения, приводящие к конечным изменениям.

Периодические решения первой группы, очевидно, должны соответствовать специальному взаимному расположению тел в системе. Действительно, центры периодических движений этой группы должны совпадать с точками либрации.

Задача определения движения тела бесконечно малой массы (частицы) в поле двух тел конечной массы известна как ограниченная задача трех тел. Эта задача была исследована Якоби (Jacobi), Хиллом, Дарвином (Darwin) и Пуанкаре.

Пусть отношение конечных масс будет $\frac{m^*}{M} = \frac{m}{M} < 1$. Положим далее (рис. 2.56), что оба тела m и M описывают круговые орбиты относительно барицентра. Поместим в барицентр начало прямоугольной вращающейся системы координат $\xi \eta$, ось ξ которой направлена по линии mM (положительное направление оси ξ в сторону M), а ось η повернута относительно оси ξ на 90° по направлению вращения системы. Обозначив расстояния от частицы до тел M и m соответственно через r и ρ , расстояния

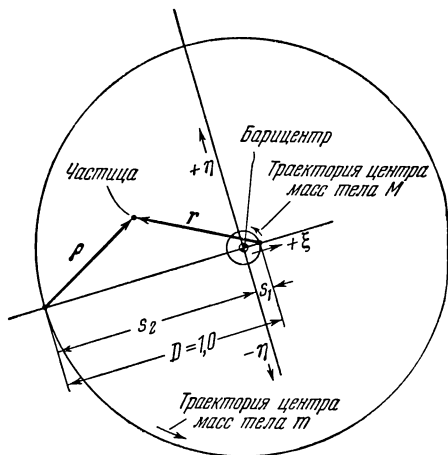


Рис. 2.56. Координатная система, используемая для изучения движения частицы в ограниченной задаче трех тел в системе «Земля — Луна».

¹⁾ G. W. Hill, Researches in Lunar Theory, National Academy of Sciences, April Session (1877); also American Journal of Mathematics, vol. 1, p. 16 (1878).

²⁾ Poincaré, Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique, Stockholm, 1889.

от барицентра до тел M и m — через s_1 и s_2 и приняв расстояние D между телами M и m равным единице, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (\xi - s_1)^2 + \eta^2 = \left(\xi - \frac{m^*}{1+m^*} \right)^2 + \eta^2, \\ \rho^2 &= (\xi + s_2)^2 + \eta^2 = \left(\xi + \frac{1}{1+m^*} \right)^2 + \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.260)$$

Система вращается с постоянной¹⁾ угловой скоростью

$$\omega = \sqrt{K_M(1+m^*)}/D^3$$

и периодом обращения

$$\tau = 2\pi/\sqrt{K_M(1+m^*)}/D^3.$$

Если $D=1$, а единицу времени выбрать так, чтобы гравитационный параметр $K_M = k^2 M = 1$, то

$$\omega = \sqrt{1+m^*}, \quad \tau = 2\pi/\sqrt{1+m^*}.$$

Для потенциала в любой точке (ξ, η) системы имеем:

$$U = \frac{1}{\sqrt{(\xi - s_1)^2 + \eta^2}} + \frac{m^*}{\sqrt{(\xi + s_2)^2 + \eta^2}} = \frac{1}{r} + \frac{m^*}{\rho}. \quad (2.261)$$

Уравнения движения частицы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta &= \frac{\partial U}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.262)$$

Эти уравнения были преобразованы Дарвином [см. уравнения (I.6.75)] в более удобную форму:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.263)$$

где с учетом соотношений (2.260)

$$\Phi = U + \frac{1}{2}(r^2 + m^*\rho^2) = U + \frac{1}{2} \left[\frac{m^*}{1+m^*} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) \right]. \quad (2.264)$$

Теперь найдем координаты $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ центра периодического движения и покажем, что центрами периодического движения являются точки либрации. Поскольку сейчас мы рассматриваем первую группу периодических движений (периодические орбиты), то будем считать, что частица должна оставаться вблизи центра периодического движения. Обозначим через ξ' , η' коор-

¹⁾ Круговая ограниченная задача. (Прим. перев.)

динаты частицы в системе координат с началом в центре периодического движения и осями, соответственно параллельными осям ξ и η (рис. 2.57). Если точка (ξ, η) не совпадает с центром масс (ξ_1, η_1) тела M или с центром масс (ξ_2, η_2) тела m ,

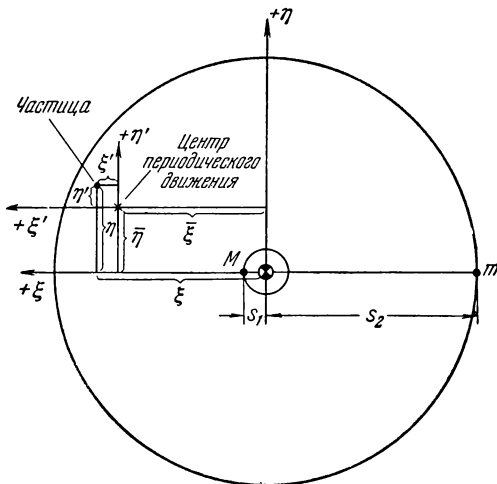


Рис. 2.57. Определение центров периодического движения в ограниченной задаче трех тел.

то функцию Φ и ее производные $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$ можно разложить в ряды по положительным степеням $\xi' = \xi - \xi_1$ и $\eta' = \eta - \eta_1$. Если эти разности достаточно малы, то последний удерживаемый член ряда будет больше суммы всех отброшенных членов. На основании соотношений (2.262) можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \xi' - 2\omega\eta' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \xi' \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \eta' \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + \dots, \\ \eta' + 2\omega\xi' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \eta' \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \xi' \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.265)$$

Так как ξ' и η' остаются малыми, то можно положить

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 0. \quad (2.266)$$

При решении этих уравнений необходимо подставить значения $r^2 = (\xi - s_1)^2 + \eta^2$ и $\rho^2 = (\xi + s_2)^2 + \eta^2$. Отсюда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\xi - s_1}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \frac{\xi + s_2}{\rho} = 0, \quad (2.267)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\eta}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \frac{\eta}{\rho} = 0. \quad (2.268)$$

Поэтому должно иметь место или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0, \quad (2.269)$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\xi - s_1}{r} & \frac{\xi + s_2}{\rho} \\ \frac{\bar{\eta}}{r} & \frac{\bar{\eta}}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{\bar{\eta}}{r\rho} (s_1 + s_2) = \frac{\bar{\eta}}{r\rho} = 0. \quad (2.270)$$

Условие (2.269) приводит к определению эквидистантных точек либрации L_4 и L_5 , а именно:

$$\left. \begin{aligned} r = \rho = 1, \\ \xi_4 = \xi_5 = \frac{s_1 - s_2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1 - m^*}{1 + m^*}, \\ \bar{\eta}_4 = -\bar{\eta}_5 = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.271)$$

где $\bar{\xi}_4$, $\bar{\eta}_4$ и $\bar{\xi}_5$, $\bar{\eta}_5$ являются соответственно координатами точек либрации L_4 и L_5 .

Условие (2.270) требует, чтобы $\eta=0$ и поэтому относится к коллинеарным точкам либрации, которые лежат на оси ξ . Величина ξ определяется из уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\xi - s_1}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\xi + s_2}{\rho} = 0. \quad (2.272)$$

При этом возможны три случая:

$$\left. \begin{aligned} \xi - s_1 = -r, \quad \xi + s_2 = \rho; \\ \xi - s_1 = -r, \quad \xi + s_2 = -\rho; \\ \xi - s_1 = r, \quad \xi + s_2 = \rho. \end{aligned} \right\} \quad (2.273)$$

Для этих случаев, соответствующих точкам либрации L_1 , L_2 , L_3 , уравнения (2.272) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} L_1: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0, \quad r = 1 - \rho; \\ L_2: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0, \quad r = 1 + \rho; \\ L_3: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0, \quad r = \rho - 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.274)$$

Для определения r или ρ можно получить три уравнения¹⁾ пятой степени типа уравнения (I.6.55). Каждое из этих урав-

¹⁾ $(1 + m^*)\rho^5 \pm (3 + 2m^*)\rho^4 + (3 + m^*)\rho^3 - m^*\rho^2 \pm 2m^*\rho - m^* = 0$, где верхний знак относится к точке либрации L_1 , а нижний знак — к точке либрации L_2 ; для точки либрации L_3 имеем: $(1 + m^*)r^5 + (2 + 3m^*)r^4 + (1 + 3m^*)r^3 - r^2 - 2r - 1 = 0$.

нений имеет только один действительный положительный корень. Для коллинеарных точек либрации во вращающейся системе координат окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} L_1: \quad \rho &= \left(\frac{m^*}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{m^*}{3}\right)^{2/3}, \\ \xi_1 &= -\frac{1}{1+m^*} + \rho, \\ \bar{\eta}_1 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.275)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2: \quad \rho &= \left(\frac{m^*}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{m^*}{3}\right)^{2/3}, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{1+m^*} - \rho, \\ \bar{\eta}_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.276)$$

$$\left. \begin{aligned} L_3: \quad r &= 1 - \frac{7}{12} m^* + \frac{7}{12} (m^*)^2, \\ \xi_3 &= \frac{m^*}{1+m^*} + r, \\ \bar{\eta}_3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.277)$$

Выражения (2.271) и (2.274)–(2.277) определяют положение точек либрации в ограниченной задаче трех тел. Проведенный анализ показывает, что точки либрации совпадают с точками, в непосредственной близости которых возможны периодические движения.

Используя соотношение (2.269), уравнения движения (2.265) в непосредственной близости точки либрации можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi' - 2\omega\eta' &= \xi' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \eta' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \dots, \\ \ddot{\eta}' + 2\omega\xi' &= \eta' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \xi' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.278)$$

Эти уравнения образуют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как известно, решение подобных систем отыскивается в виде

$$\xi' = \alpha e^{\gamma t}, \quad \eta' = \beta e^{\gamma t}, \quad (2.279a)$$

где α и β определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\gamma^2 - \partial^2 \Phi / \partial \xi^2) - \beta(2\omega\gamma + \partial^2 \Phi / \partial \xi \partial \eta) &= 0, \\ \alpha(2\omega\gamma - \partial^2 \Phi / \partial \xi \partial \eta) + \beta(\gamma^2 - \partial^2 \Phi / \partial \eta^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.279b)$$

Записывая множители (в скобках) у α и β в виде детерминанта в том же порядке, как в уравнениях (2.279b), и приравнявая этот детерминант нулю, получаем уравнение для определения γ в следующем виде:

$$\gamma^4 - \gamma^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{\eta}^2} - 4(1 + m^*) \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} \right)^2 = 0. \quad (2.280)$$

Корни этого уравнения определяют тип движения частицы. Если γ^2 является действительным и отрицательным, то имеет место периодическое движение. Для прочих значений γ^2 движение таково, что частица не может неограниченно долго оставаться вблизи центра с координатами ξ , $\bar{\eta}$. Используя выражение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma^2},$$

где σ — либо ξ , либо $\bar{\eta}$, и выражение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} = \sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_n^2} \frac{\partial R_n}{\partial \xi} \frac{\partial R_n}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \Phi}{\partial R_n} \frac{\partial^2 R_n}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} \right),$$

где $R_1 = r_1$, $R_2 = \rho$, для каждой из трех коллинеарных точек либрации L_1 , L_2 , L_3 получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{\eta}^2} &= 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.281)$$

Для эквидистантных точек L_4 и L_5 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= \frac{3}{4}(1 + m^*), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{\eta}^2} = \frac{9}{4}(1 + m^*), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} &= \mp \frac{3}{4} \sqrt{3}(1 - m^*), \end{aligned} \right\} \quad (2.282)$$

где отрицательный знак относится к точке L_4 . Если положить $r^{-3} + m^* \rho^{-3} = 2u$, то γ для периодических решений вблизи *коллинеарных* точек либрации будет определяться из уравнения

$$\gamma^2 = -(1 + m^* - u) \pm \sqrt{9u^2 - 4u(1 + m^*)}. \quad (2.283)$$

Пламмер¹⁾ доказал, что корни этого уравнения являются действительными, причем один из корней положительный,

¹⁾ H. C. Plummer, Monthly Notices of the Royal Astr. Soc., vol. 62 (1901).

а другой отрицательный. Периодические решения имеют место при отрицательном корне уравнения (2.283), и Пламмер показал, что для всех трех точек либрации имеют место именно отрицательные корни. Поэтому периодические решения существуют в непосредственной близости около точек либрации для всех отношений масс m^* . Граничные значения для коллинеарных точек соответствуют значениям

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= 1 \pm \sqrt{28} & (L_1, L_2), \\ \gamma^2 &= -0,5 \pm 0,5 & (L_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.284)$$

Для периодических решений около эквидистантных точек можно получить:

$$4\gamma^4 + 4(1 + m^*)\gamma^2 + 27m^* = 0. \quad (2.285)$$

Корни уравнения (2.283) действительные, если $(1 + m^*) > 27m^*$, то есть при $m^* < 0,04$. Таким образом, если $m > 0,04M$, то периодические решения вблизи точек L_4 и L_5 отсутствуют. Для системы «Земля — Луна» $m^* = 0,01227$, и, следовательно, принципиально возможно вывести и поместить космический аппарат в точках L_4 или L_5 . Для $m^* < 0,04$ оба решения для γ^2 являются отрицательными, то есть существуют два типа периодических движений. Поскольку m^* всегда очень мало, то, разложив решения (2.285) для γ^2 в ряд, получим для двух периодических решений:

$$\left. \begin{aligned} \text{случай 1: } \gamma^2 &= -6,75m^* - 38,812m^{*2} & (L_4), \\ \text{случай 2: } \gamma^2 &= -6,75m^* - 38,812m^{*2} - 1 & (L_5). \end{aligned} \right\} \quad (2.286)$$

Каждому корню γ соответствует свое отношение α/β . Поэтому общим решением уравнений (2.278) будет:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i e^{\gamma_i t}, \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i e^{\gamma_i t}, \quad (2.287a)$$

$$\alpha_i = \beta_i \frac{2\omega\gamma_i + \ddot{\Phi}_{\xi\eta}}{\gamma_i^2 - \ddot{\Phi}_{\xi}}, \quad (2.287b)$$

где с целью сокращения записи приняты обозначения:

$$\ddot{\Phi}_{\xi\eta} \equiv \partial^2 \Phi / \partial \xi \partial \eta \equiv t, \quad \ddot{\Phi}_{\xi} = \partial^2 \Phi / \partial \xi^2.$$

В дальнейшем с той же целью будет использовано обозначение $\ddot{\Phi}_{\eta} = \partial^2 \Phi / \partial \eta^2$. Четыре из восьми коэффициентов α_i и β_i могут быть выбраны произвольно. Если в качестве этих коэффициентов выбраны β_i , то α_i определяются по уравнениям (2.287b). Если γ_1 и γ_2 являются комплексными сопряженными корнями,

так что $\varepsilon^2 = -\gamma^2$, и соответствующие значения ε_1 и ε_2 являются действительными, то из уравнений (2.287) можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\beta_1} &= -\frac{\ddot{\Phi}_{\xi\eta}}{\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2} - \frac{2\omega}{\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2} \varepsilon_1 i, \\ \frac{\alpha_2}{\beta_2} &= -\frac{\ddot{\Phi}_{\xi\eta}}{\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2} - \frac{2\omega}{\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2} \varepsilon_2 i, \end{aligned} \right\} \quad (2.288)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Разделяя действительные и мнимые части у α и β и записывая их в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \kappa_1 + \kappa_2 i, & \beta_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 i, \\ \alpha_2 &= \kappa_1 - \kappa_2 i, & \beta_2 &= \lambda_1 - \lambda_2 i, \end{aligned}$$

можно соотношения (2.279a) представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \alpha_1 e^{\gamma_1 t} + \alpha_2 e^{\gamma_2 t}, \\ \eta' &= \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.289)$$

Пусть двумя (произвольно получаемыми) коэффициентами будут $\beta_3 = \beta_4 = 0$, тогда из уравнений (2.287) следует, что $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, и, следовательно, существует периодическое решение, которое можно получить, подставляя в соотношения (2.289) приведенные выше выражения для α и β через κ и λ и считая, что $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, то есть что $\cos \varepsilon_1 t = \cos \varepsilon_2 t$, $\sin \varepsilon_1 t = -\sin \varepsilon_2 t$:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= 2\kappa_1 \cos \varepsilon_2 t + 2\kappa_2 \sin \varepsilon_2 t, \\ \eta' &= 2\lambda_1 \cos \varepsilon_2 t + 2\lambda_2 \sin \varepsilon_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.290)$$

Из уравнений (2.279b) можно получить:

$$\begin{aligned} (\gamma^2 - \ddot{\Phi}_{\xi}) \alpha &= 2\omega \gamma \beta + t \beta, \\ (\gamma^2 - \ddot{\Phi}_{\eta}) \beta &= -2\omega \gamma \alpha + t \alpha. \end{aligned}$$

С учетом $\gamma^2 = -\varepsilon^2$ и приведенных выше выражений для α и β через κ и λ , а также используя первое из двух предыдущих уравнений для $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$, получаем:

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_{\xi})(\kappa_1 + \kappa_2 i) &= -2\omega \varepsilon_1 i (\lambda_1 + \lambda_2 i) - t (\lambda_1 + \lambda_2 i), \\ (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_{\eta})(\kappa_1 - \kappa_2 i) &= -2\omega \varepsilon_2 i (\lambda_1 - \lambda_2 i) - t (\lambda_1 - \lambda_2 i). \end{aligned}$$

Из последних уравнений с учетом $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ после преобразований, отбрасывая мнимые части, находим:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_{\xi}) \kappa_1 &= -t \lambda_1 - 2\omega \varepsilon_2 \lambda_2, \\ (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_{\eta}) \kappa_2 &= 2\omega \varepsilon_2 \lambda_1 - t \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.291)$$

Из уравнений (2.279b) также можно получить:

$$(\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)(\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\eta) = 4\omega^2\varepsilon^2 + t^2. \quad (2.292)$$

Используя соотношения (2.291) и соотношения (2.292), можно получить:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)(\kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2) &= -t(\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \\ (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)(\kappa_1\lambda_2 - \kappa_2\lambda_1) &= -2\omega\varepsilon_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \\ (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) &= (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\eta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.293)$$

Теперь можно получить уравнение орбиты частицы относительно центра периодического движения, определяя ξ' и η' в выражениях (2.290) через коэффициенты κ_1 , κ_2 , λ_1 , λ_2 , которые не зависят от времени:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\xi'^2 + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\eta'^2 - 2\xi'\eta'(\kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2) = 4(\kappa_1\lambda_2 - \kappa_2\lambda_1)^2.$$

Разделив на $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$ и используя соотношения (2.293), запишем следующие выражения для коэффициентов уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{4(\kappa_1\lambda_1 - \kappa_2\lambda_2)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} &= \frac{16\omega^2\varepsilon^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{(\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)^2}, \\ \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} &= \frac{\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\eta}{\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi}, \\ \frac{\kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} &= -\frac{\ddot{\Phi}_{\xi\eta}}{\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее уравнение орбиты частицы:

$$(\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi)\xi'^2 + (\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\eta)\eta'^2 + 2\ddot{\Phi}_{\xi\eta}\xi'\eta' = \frac{16\omega^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \ddot{\Phi}_\xi}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = A^2. \quad (2.294)$$

Из уравнений (2.281) и (2.282) видно, что орбитой частицы около любой точки либрации является эллипс. В частности, для коллинеарных точек $\Phi_{\xi\eta}=0$, что свидетельствует о том, что одна из осей эллипса совпадает с осью ξ' , то есть с осью «Земля — Луна».

При рассмотрении орбит около эквилибральных точек либрации, чтобы совместить оси ξ' и η' с осями эллипса, необходимо повернуть систему координат $\xi'\eta'$ относительно системы координат $\xi\eta$ на угол δ . При этом имеем:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \xi \cos \delta - \eta \sin \delta, \\ \eta' &= \xi \sin \delta + \eta \cos \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.295)$$

что с учетом уравнений (2.282) приводит к равенству

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\ddot{\Phi}_{\xi\eta}}{\ddot{\Phi}_{\xi} - \ddot{\Phi}_{\eta}} = \pm \frac{1 - m^*}{1 + m^*} \sqrt{3}, \quad (2.296)$$

где положительный знак относится к точке L_4 .

Поскольку $m^* \leq 0,04$, то $(1 - m^*)/(1 + m^*) \approx 1$, и, следовательно, оси эллипсов около эквидистантных точек либрации повернуты относительно осей ξ, η на $\pm 30^\circ$. Это означает, что одна

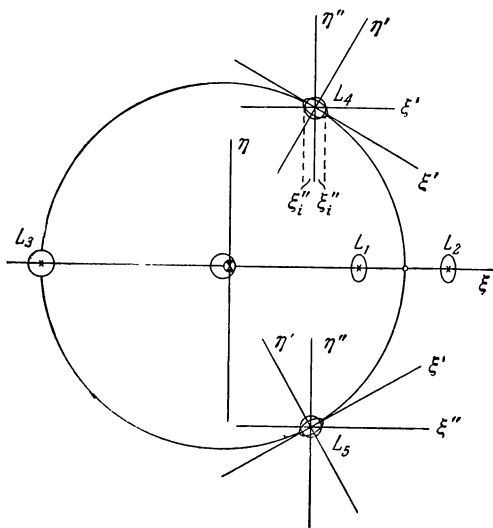


Рис. 2.58. Схематическое представление периодических движений около точек либрации в ограниченной задаче трех тел.

из осей (малая ось) направлена на главное тело M системы (рис. 2.58). Для величин полуосей этих эллипсов можно получить следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{A^2 \cos 2\delta}{(\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2) \cos^2 \delta + (\ddot{\Phi}_{\eta} + \varepsilon^2) \sin^2 \delta}, \\ b^2 &= \frac{A^2 \cos 2\delta}{(\ddot{\Phi}_{\eta} + \varepsilon^2) \cos^2 \delta - (\ddot{\Phi}_{\xi} + \varepsilon^2) \sin^2 \delta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.297)$$

По этим выражениям легко вычислить a и b . Поскольку $m^* \leq 0,04$, то можно использовать приближенные выражения для

тригонометрических функций:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\delta &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} m^*, & \sin 2\delta &= \frac{1}{2} \sqrt{3 - 5,25 m^*}, \\ \cos^2 \delta &= \frac{3}{4} + \frac{3}{8} m^*, & \sin^2 \delta &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8} m^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.298)$$

Аналогично можно принять:

$$\ddot{\Phi}_{\xi} = \frac{3}{4} (1 + m^*) \quad \text{и} \quad \ddot{\Phi}_{\eta} = \frac{9}{4} (1 + m^*).$$

Поскольку уравнение (2.292) имеет два корня, то имеют место два случая [см. выражения (2.286)]. Вследствие малости m^* , пренебрегая членами, содержащими малые выше первого порядка, получаем:

Группа 1: $\epsilon^2 = 6,75 m^*$.

В данном случае

$$\begin{aligned} A^2 &= 144 m^* (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \\ a^2 &= 16 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \quad b^2 = 48 m^* (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3 m^*}. \quad (2.299)$$

Таким образом, для точек L_4 и L_5 отношение величин полуосей эллипса является функцией m^* . Максимально возможное значение этого отношения $b/a = \sqrt{3 \cdot 0,04} = 0,346$, а минимальное равно нулю для $m^* = 0$. В этом случае либо $b = 0$ (движение отсутствует), либо $a = \infty$.

Группа 2: $\epsilon^2 = 1 - 5,75 m^*$.

В данном случае

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{64}{7} - \frac{848}{49} m^* = \frac{448}{49} \left(1 - \frac{848}{448} m^* \right), \\ a^2 &= \frac{64}{7} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \quad b^2 = \frac{16}{7} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}. \quad (2.300)$$

В данном случае форма эллипса не зависит от m^* и эллипс имеет конечные размеры даже при $m^* \rightarrow 0$.

Используя равенство $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, получим выражение для эксцентриситета: в первом случае $e = \sqrt{1 - 3m^*}$, во втором $e = 0,866$. Таким образом, эллипсы около точек либрации L_4 и L_5 всегда являются очень вытянутыми.

Если одну из эквидистантных точек либрации принять за начало системы координат, вращающейся вместе с системой так, что ось ξ'' всегда параллельна оси ξ , а ось η'' параллельна оси η , и если координатами точки пересечения эллипса с осью ξ'' являются координаты $(\xi_i'', 0)$ (см. рис. 2.58), то из уравнений (2.292) и (2.294) для $\xi' = \xi_i''$ и $\eta' = 0$ получим:

$$16\omega^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = (\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2)\xi_i''^2. \quad (2.301)$$

Отсюда

$$\text{для группы 1: } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{192} \frac{1}{m^*} \xi_i''^2,$$

$$\text{для группы 2: } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{49}{256} \xi_i''^2,$$

так что для величин полуосей эллипса получим:

$$\text{группа 1: } a^2 = \frac{1}{12} \frac{1}{m^*} \xi_i''^2, \quad b^2 = \frac{1}{4} \xi_i''^2, \quad (2.302a)$$

$$\text{группа 2: } a^2 = \frac{7}{4} \xi_i''^2, \quad b^2 = \frac{7}{16} \xi_i''^2. \quad (2.302b)$$

Для периода обращения θ частицы по эллиптической орбите около одной из эквидистантных точек либрации находим:

$$\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\omega}{\varepsilon} \tau = \frac{V1+m^*}{\varepsilon} \tau, \quad (2.303)$$

где $V1+m^* = \omega$ — угловая скорость вращения оси ξ ; τ — период вращения оси ξ (оси «Земля — Луна»). В соответствии с двумя решениями для этих точек имеем следующие значения периодов для двух типов эллипсов:

$$\left. \begin{aligned} \text{группа 1: } \theta'_{4,5} &= \tau \sqrt{\frac{1+m^*}{6,75m^*}} \approx \frac{\tau}{\sqrt{6,75m^*}} = \frac{\tau}{\varepsilon}, \\ \text{группа 2: } \theta''_{4,5} &= \tau \sqrt{\frac{1+m^*}{1-5,75m^*}} \approx \tau(1+3,375m^*). \end{aligned} \right\} \quad (2.304)$$

Уравнение орбиты около коллинеарных точек либрации можно получить из уравнения (2.294), полагая в данном случае $\ddot{\Phi}_{\xi\eta} = 0$. Величины полуосей этих эллипсов можно найти из уравнения (2.292):

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{16\omega^2\varepsilon^2}{(\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2)^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \\ b^2 &= \frac{16\omega^2\varepsilon^2}{(\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2)(\ddot{\Phi}_\eta + \varepsilon^2)} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.305)$$

Сравнение $\ddot{\Phi}_\xi$ и $\ddot{\Phi}_\eta$ в уравнениях (2.281) показывает, что $\ddot{\Phi}_\xi > \ddot{\Phi}_\eta$. Следовательно, b в данном случае является большой полуосью. Изменяя обозначения так, чтобы a обозначало большую полуось, а b — малую, и исключая $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$ с помощью уравнения (2.301), получаем:

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= \xi_i''^2, \\ a^2 &= \frac{(\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2)^2}{4\omega^2 \varepsilon^2} \xi_i''^2 = \frac{\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2}{\ddot{\Phi}_\eta + \varepsilon^2} \xi_i''^2, \\ \frac{b^2}{a^2} &= \frac{\ddot{\Phi}_\eta + \varepsilon^2}{\ddot{\Phi}_\xi + \varepsilon^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.306)$$

где ε является функцией γ , то есть зависит от m^* . Для заданной величины m^* (то есть для заданной системы трех тел) $\ddot{\Phi}_\xi$ и $\ddot{\Phi}_\eta$ являются постоянными. Поэтому отношение b^2/a^2 , а следовательно, и эксцентриситет эллипсов около коллинеарных точек имеют постоянные значения для всех орбит в данной системе тел $(1+m^*)$.

Период обращения около коллинеарных точек определяется по соотношению (2.303), где $\varepsilon = \sqrt{1 - \gamma^2}$. В таблице 2.9 приведены величины γ^2 для системы «Земля — Луна».

Заметим, что движение частицы около всех точек либрации происходит в сторону, противоположную вращению системы. Если смотреть с северного полюса эклиптики, система «Земля — Луна» вращается против хода часовой стрелки, а движение частицы происходит по ходу часовой стрелки. Результаты вычислений орбит по приведенным выше уравнениям для системы «Земля — Луна» будут даны в § 2.14.

2.13. Общий случай плоского движения в ограниченной задаче трех тел

В предыдущем параграфе мы рассмотрели периодические движения частицы около точек либрации, впервые исследованные Хиллом, Дарвином, Пуанкаре, Пламмером, Шарлье и другими. Перейдем к изучению общих характеристик движения в ограниченной задаче трех тел.

Интегрирование уравнений (2.263) приводит к интегралу Якоби [см. формулу (I.6.78)]

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = v^2 = 2\Phi - C, \quad (2.307)$$

где C — постоянная Якоби. Интеграл Якоби выражает закон сохранения энергии при движении относительно барицентра.

Это уравнение играет важную роль в изучении траектории частицы в изолированной системе трех тел, так как оно определяет траекторию постоянной энергии.

Для реальной траектории необходимо, чтобы всегда соблюдалось условие $2\Phi \geq C$. Поэтому особое значение приобретают траектории, определяющие линии нулевых относительных скоростей:

$$2\Phi = C = r^2 + \frac{2}{r} + m^* \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right), \quad (2.308)$$

так как они характеризуют области возможного движения. Эти кривые, впервые введенные Хиллом, называются граничными кривыми Хилла. При заданной величине m^* форма граничных кривых зависит только от величины C . Эта величина может меняться, но не может стать меньше определенного положительного минимума, отвечающего условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0,$$

которое относится к случаю $r = \rho$ [см. уравнение (2.269)] и определяет эквидистантные точки либрации L_4 и L_5 . Для этих точек, в соответствии с соотношениями (2.271), имеют место равенства $r = \rho = 1$, откуда следует, что

$$C_{\min} = 3(1 + m^*). \quad (2.309)$$

При $C = C_{\min}$ граничные кривые стягиваются в точки L_4 и L_5 (рис. 2.59).

Для очень больших значений C уравнение (2.308) удовлетворяется либо при очень малых r или ρ , либо если сумма $r^2 + m^*\rho^2$ становится очень большой. Соответственно существуют три граничные кривые (рис. 2.59): одна вокруг тела M , другая вокруг тела m и третья, окружающая оба тела. Соответствующими значениями C являются:

$$\left. \begin{aligned} C_a &= \frac{2}{r}, \\ C_b &= \frac{2m^*}{\rho}, \\ C_c &= r^2 + m^*\rho^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.310)$$

С уменьшением C линейные размеры кривых C_a и C_b увеличиваются, а кривой C_c — уменьшаются. Для определенного значения C кривые C_a и C_b касаются друг друга и образуют фигуру лемнискаты (рис. 2.59). Одной из координат точки касания является координата $\eta = 0$, а другая координата должна

удовлетворять уравнению $\partial\Phi/\partial x=0$, или уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\xi-s_1}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial \rho} \frac{\xi+s_2}{\rho} = 0, \quad (2.311)$$

или уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\Phi}{\partial \rho}, \quad (2.312)$$

так как в данном случае $\xi-s_1=r$, $\xi+s_2=\rho$ и $r=1-\rho$. Эти

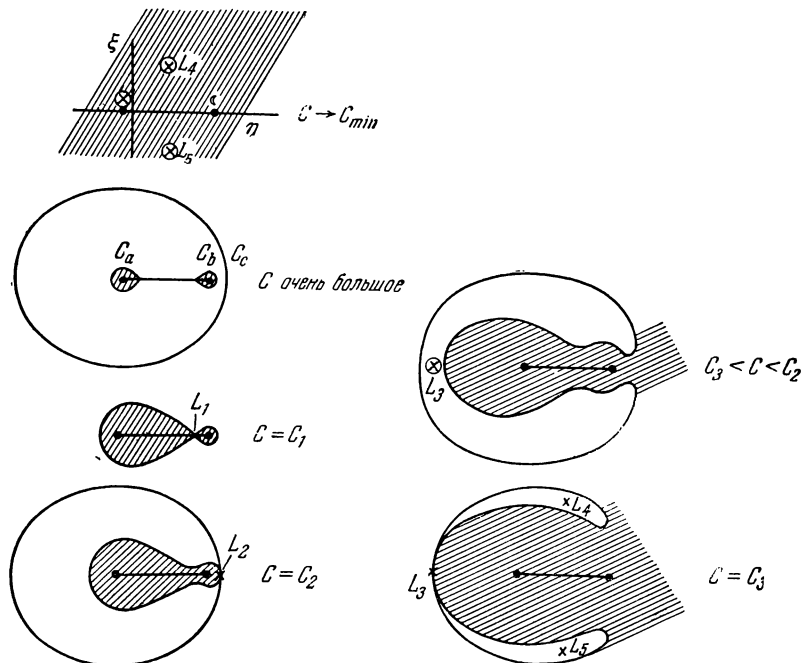


Рис. 2.59. Граничные кривые Хилла для определенных значений постоянной Якоби (области возможного движения заштрихованы).

условия выполняются для точки L_1 . При дальнейшем уменьшении C лемниската становится все более овальной и при $C=C_2$ (рис. 2.59) охватывает обе точки системы. При этом $\eta=0$, а $r=1+\rho$ и уравнение (2.311) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = - \frac{\partial\Phi}{\partial \rho}. \quad (2.313)$$

Это условие выполняется для точки L_2 . При дальнейшем уменьшении C контур, ограничивающий область возможных движений

около точки L_2 , оказывается открытым и приобретает форму подковы (рис. 2.59). Наконец, при $C=C_3$ остается лишь одна точка касания L_3 . В этом случае $\eta=0$, $r=\rho=1$ и $\partial\Phi/\partial r = -\partial\Phi/\partial\rho$. Эти условия выполняются для точки L_3 . При дальнейшем уменьшении C области, ограниченные кривыми, стягиваются к точкам L_4 и L_5 , обращаясь в эти точки при $C=C_{\min}$. Значения C , соответствующие случаям C_1 , C_2 и C_3 , можно вычислить по равенствам (3.308) с помощью второго уравнения (2.274) и уравнений (2.275) — (2.277).

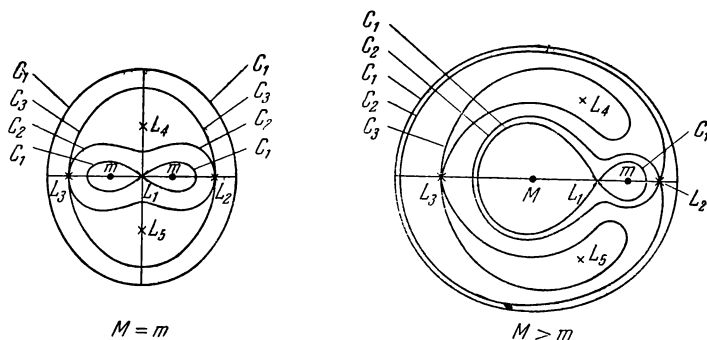


Рис. 2.60. Основные граничные кривые для случаев $M = m$ и $M > m$.

Общий вид основных граничных кривых C_1 , C_2 и C_3 , относящихся к пяти точкам либрации, для случаев $m^*=1$ ($M=m$) и $m < M$ показан на рис. 2.60. Для r и ρ имеем следующие выражения во вращающейся системе координат:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (\xi - s_1)^2 + \eta^2 = \left(\xi - \frac{m^*}{1+m^*} \right)^2 + \eta^2, \\ \rho^2 &= (\xi + s_2)^2 + \eta^2 = \left(\xi + \frac{1}{1+m^*} \right)^2 + \eta^2; \end{aligned} \right\} \quad (2.314)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 + s_2 &= 1, \\ s_1 - m^* s_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.315)$$

$$2\Phi = r^2 + \frac{2}{r} + m^* \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right), \quad (2.316)$$

где обозначения и единицы совпадают с введенными в § 2.12.

Вычисление координат ξ и η для кривой с заданной величиной C является достаточно трудоемкой операцией. Метод вычисления был предложен Мультином [12]. Этот метод базируется на том, что кривые, описываемые первыми двумя уравнениями (2.310), приближенно можно считать окружностями. Кривая, описываемая третьим уравнением, имеет овальную форму.

Каждому значению C соответствует своя орбита частицы около каждой из точек либрации. По аналогии с выражением (2.307) постоянную Якоби можно выразить через координаты ξ' и η' :

$$\left(\frac{d\xi'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta'}{dt}\right)^2 = \lambda\Phi - C, \quad (2.317)$$

где $t = \partial^2\Phi/\partial\xi\partial\bar{\eta}$. Из уравнений (2.290) можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -2\chi_1\epsilon_2 \sin \epsilon_2 t + 2\chi_2\epsilon_2 \cos \epsilon_2 t, \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -2\lambda_1\epsilon_2 \sin \epsilon_2 t + 2\lambda_2\epsilon_2 \cos \epsilon_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (2.318),$$

где $t=0$ для точек L_1, L_2, L_3 . С учетом уравнений (2.266) получим следующую зависимость Φ от ξ' и η' (координат частицы относительно данного центра периодического движения):

$$2\Phi = 2\Phi_{LP} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\xi^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{\eta}^2}\bar{\eta}^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\bar{\eta}} + \dots, \quad (2.319)$$

где Φ_{LP} есть значение Φ в рассматриваемой точке либрации. Выразив C через ξ'' и η'' и выбрав опять точку (ξ_i'', η_i'') так, чтобы $\eta'' = \eta_i'' = 0$, получим следующее уравнение для C :

$$\left\{ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\bar{\eta}} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \epsilon^2 \right)^2 \right] \right\} (\xi_i'')^2 = C'' - 2\Phi_{LP}, \quad (2.320)$$

где $\partial^2\Phi/\partial\xi\partial\bar{\eta} = 0$. Следовательно, для коллинеарных центров $\xi_i'' = \xi_i'$.

По определению, положение точек либрации во вращающейся системе координат является фиксированным. Следовательно, для точек либрации уравнение (2.307) обращается в равенство $C_{LP} = 2\Phi_{LP}$. Поэтому будем иметь:

$$C'' = C_{LP} + \left\{ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\bar{\eta}} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \xi^2 \right)^2 \right] \right\} (\xi_i'')^2. \quad (2.321)$$

Для точек L_4 и L_5 выражение для константы C принимает вид:

$$\text{группа 1: } C'' = 2\Phi_{LP} + \frac{3}{16} (\xi_i'')^2, \quad (2.322a)$$

$$\text{группа 2: } C'' = 2\Phi_{LP} - \frac{7}{16} (\xi_i'')^2. \quad (2.322b)$$

Отсюда легко заметить, что $C'' > 2\Phi_{LP}$ принадлежит к ранее определенным эллипсам группы 1 [см. соотношение (2.299)], а $C'' < 2\Phi_{LP}$ — к орбитам группы 2 [см. соотношение (2.300)].

2.14. Численные результаты для системы «Земля—Луна»

При выполнении операций в долунном пространстве определенный интерес представляют величины постоянных Якоби и параметры орбит периодических движений около точек либрации в системе «Земля—Луна».

Основными данными системы являются:

$$m^* = \frac{m_{\zeta}}{m_{\oplus}} = \frac{1}{81,5} = 0,01227,$$

$$D = 60,267 r_{00} = 221,2 \rho_{00} = 384\,400 \text{ км},$$

$$\text{радиус Земли } r_{00} = 6371 \text{ км},$$

$$\text{радиус Луны } \rho_{00} = 1738 \text{ км},$$

$$K_{\oplus} = 3,9858 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{сек}^2,$$

$$K_{\zeta} = 4,89 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{сек}^2.$$

Величина γ^2 для коллинеарных точек либрации вычисляется по уравнению (2.283), а для эквидистантных — по уравнениям (2.286). Результаты вычислений сведены в таблицу 2.9. В таблице 2.10 приведены критические значения постоянных Якоби C_1, C_2, C_3 и $C_{4,5}$, отвечающие точкам либрации. Соответствующие расстояния от Земли и от Луны (r и ρ), отнесенные к величине D расстояния между Луной и Землей, вычислены по равенствам (2.271) и по соотношениям (2.275)—(2.277); величина C_2 вычислена по соотношению (2.308). В этом случае C имеет размерность $D^2/\text{сек}^2$, так как расстояние D , масса Земли $m_{\oplus}$ и постоянная Гаусса k^2 , а следовательно, и гравитационный параметр $K_{\oplus} = k^2 m_{\oplus}$ оказываются равными единице.

Т а б л и ц а 2.9

Величина γ^2 для системы «Земля — Луна» *)

Точки либрации	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
γ^2	+9,54913 −5,94087	+4,36863 −3,18817	≈ 0 −1,0335	−0,0886	−1,0886

*) Для точек L_1, L_2, L_3 — по уравнению (2.283), для точек L_4 и L_5 — по уравнениям (2.286).

Период вращения оси «Земля — Луна» равен: $\tau = 2\pi/\sqrt{1+m^*} = 6,25$. Разделив τ на $\sqrt{K_{\oplus}/D^3} = 2,652 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$, получим величину периода вращения в секундах: $T = 2,36 \cdot 10^6 \text{ сек}$, что со-

ставляет примерно 27,3 *сут.* Соответствующее значение ω равно 0,233 *рад/сут.*, или $2,662 \cdot 10^{-6}$ *рад/сек.*

Т а б л и ц а 2.10

Критические значения постоянных Якоби для системы «Земля — Луна»

Точки либрации	L_1	L_2	L_3	$L_{4,5}$
r/D	0,8551	1,1682	0,9929	1,0
ρ/D	0,1449	0,1682	1,9929	1,0
$C \begin{cases} D^2/\text{сек}^2 \\ \text{км}^2/\text{сек}^2 \end{cases}$	3,2412	3,2232	3,0602	3,0368
	3,360	3,341	3,174	3,149
$v, \text{км/сек}^*)$	10,258	10,529	10,537	10,538

*) Для орбитального старта с круговой орбиты высотой 600 км над Землей при расположении начальной точки на оси «Земля — Луна» на противоположной стороне от цели.

Чтобы получить постоянные Якоби в $(\text{км/сек})^2$, необходимо найденные выше значения констант умножить на $K_{\oplus}/D = 1,036$. Полученные таким образом численные значения постоянных Якоби будут весьма близки к ранее вычисленным. В дополнение можно заметить, что численные значения постоянных Якоби для различных точек либрации мало отличаются друг от друга, что указывает на малое отличие в полной энергии между этими точками. Этого следовало ожидать, так как все точки находятся на значительном расстоянии от Земли, где градиент силы притяжения очень мал. К тому же эти точки относительно далеко расположены и от Луны.

В последней строке таблицы 2.10 приведены величины скоростей, необходимых для достижения соответствующих точек при орбитальном старте космического аппарата с круговой орбиты высотой 600 км. При этом предполагается, что в момент начала движения космический аппарат находится на диаметрально противоположной стороне по отношению к рассматриваемой точке цели. Например, для точки L_1 или точки L_2 имеем:

$$r = 6971 \text{ км}, s_{\oplus} = 4650 \text{ км}, \xi = r + s_{\oplus} = 11\,621 \text{ км}, \\ \eta = 0 \text{ и } \rho = D + r_{00} + r = 397\,742 \text{ км}.$$

Необходимая величина скорости в этой точке следует из уравнений (2.264):

$$v^2 = \frac{m^*}{1 + m^*} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) + 2\left(\frac{K_{\oplus}}{r} + \frac{K_{\text{л}}}{\rho}\right) - C. \quad (2.323a)$$

Траектории в долунном пространстве обладают большой чувствительностью к отклонениям в начальной скорости.

В таблице 2.11 приведены характеристики периодических орбит около точек либрации.

Таблица 2.11

Характеристики семейства периодических орбит около точек либрации в системе «Земля — Луна»

Точки либрации	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
$\partial^2\Phi/\partial\xi^2$	11,2711	7,4220	3,05859	0,7592	0,7592
$\partial^2\Phi/\partial\eta^2$	-4,62171	-2,19272	-0,01089	2,2776	2,2776
$\partial^2\Phi/\partial\xi\partial\eta$	0	0	0	-1,2831	1,2831
e^2	5,94087	3,1887	1,03348	0,08282 0,92945	
b/a	0,2768	0,306	0,49989	0,19186 0,5	
e	0,9608	0,9518	0,866	0,98142 0,866	
θ/τ (в оборотах оси ξ)	0,41279	0,56348	0,98969	3,49602 1,0436	
$\omega\theta$, град	148,60	202,85	356,288	$3 \cdot 360^\circ + 178^\circ,57$ $1 \cdot 360^\circ + 15^\circ,7$	
θ , сут	11,269	15,383	27,018	95,44 28,49	

Движение частицы около любой коллинеарной точки либрации является неустойчивым, то есть под действием возмущения (например, Солнца или отклонения в тяге, если речь идет о космическом аппарате, и т. п.) частица будет совершать колебания вдоль оси ξ со все возрастающей амплитудой, постепенно удаляясь от точки либрации. Наибольшая неустойчивость движения имеет место около точки либрации L_1 — единственной точки либрации в долунном пространстве. Наоборот, движение частицы около любой эквидистантной точки либрации является устойчивым, то есть частица даже после воздействия возмущения продолжает оставаться вблизи точки либрации. В солнечной системе обе эквидистантные точки либрации системы «Солнце — Юпитер» заняты астероидами Троянской группы. Некоторые из их орбит имеют значительные амплитуды колебаний. Точки L_4 и L_5 в системе «Земля — Луна» представляют интерес с точки зрения выведения в них специальных спутни-

ков-ретрансляторов для обеспечения слежения за космическими кораблями при межпланетных полетах.

Приведенная в таблице-2.11 величина θ/τ представляет собой период обращения частицы около точки либрации, выраженный в периодах обращения оси ξ (звездный период обращения системы «Земля — Луна»), а величина $\omega\theta$ является угловым поворотом оси ξ за период θ .

Около каждой из коллинеарных точек либрации можно расположить лишь одну орбиту первой группы. Постоянная Якоби

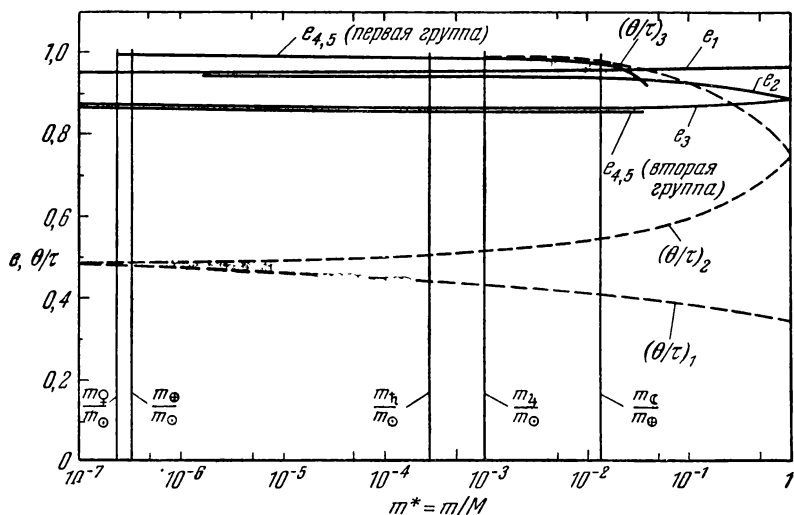


Рис. 2.61. Изменение эксцентриситета орбит около всех точек либрации и изменение величины θ/τ для коллинеарных точек либрации в функции m^* .

C'' [см. уравнение (2.317)] этой орбиты всегда меньше, чем значение C_{LP} для соответствующей точки либрации (табл. 2.10), так как $\partial^2\Phi/\partial\bar{\xi}\partial\bar{\eta}=0$. С уменьшением m^* величина большой полуоси уменьшается, а величина малой полуоси остается постоянной. Поэтому при уменьшении m^* эксцентриситет этих орбит уменьшается.

Около эквидистантных точек всегда (при $m^* < 0,04$) можно расположить две орбиты: одну первой группы [см. уравнения (2.302a), (2.322a)] с большим эксцентриситетом, который увеличивается с ростом m^* , другую — второй группы [см. уравнения (2.302b), (2.322b)] с несколько меньшим эксцентриситетом и слегка большим периодом вращения оси ξ , который

уменьшается с уменьшением m^* , приближаясь к периоду вращения оси ξ при $m^* \rightarrow 0$. Как следует из уравнений (2.322), постоянная Якоби первой группы $C'' = C_{LP} + [3(\xi_i'')^2/16]$, а для второй группы $C'' = C_{LP} - [7(\xi_i'')^2/16]$.

На рис. 2.61 приведены графики изменения эксцентриситета орбит частицы около точек либрации и изменения величины

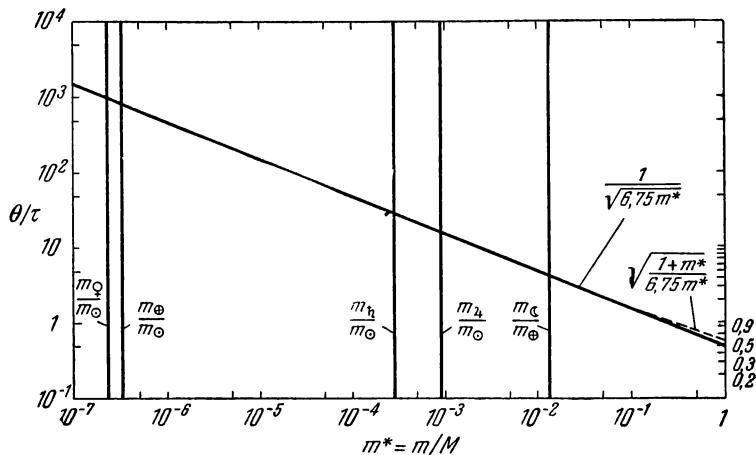


Рис. 2.62. Изменение величины θ/τ для орбит первой группы около эквидистантных точек либрации в зависимости от m^* .

θ/τ в широком диапазоне изменения величины m^* . На рис. 2.62 приведен график изменения величины θ/τ для орбит первой группы около точек либрации L_4 и L_5 в зависимости от m^* .

2.15 Общее рассмотрение механики полета в долунном пространстве

Слово «долунный»¹⁾ в буквальном смысле означает «по эту сторону Луны». Оно будет использоваться здесь применительно к пространству, расположенному вне непосредственной близости к Земле (околосемное пространство) и включающему в себя орбиты, апогей которых могут почти достигать лунной орбиты. Орбиты в долунном пространстве определяются гравитационными силами, действующими в долунном пространстве.

Определить четкую границу между околосемным и долунным пространствами не представляется возможным, поскольку опре-

¹⁾ В тексте оригинала «cislunar». (Прим. перев.)

деление этой границы в сильной степени зависит от требований, предъявляемых к конкретным орбитам космических аппаратов. На расстоянии примерно двух земных радиусов от центра Земли (на высоте около 6370 км) космический аппарат, по существу, не испытывает влияния земной атмосферы и электрического поля Земли. Ускорение силы притяжения Луны на поверхности Земли составляет $3 \cdot 10^{-6} g_{00}$. На расстоянии $2r_{00}$ отношение ускорения силы притяжения Луны к местному ускорению силы притяжения Земли составляет $1,53 \cdot 10^{-5}$, то есть очень мало (хотя и в пять раз больше, чем на поверхности Земли). Поэтому орбиты спутников на таком удалении от Земли в ничтожной степени подвержены возмущениям со стороны Луны. Кинетическую энергию, необходимую для ухода единичной массы из данной точки в бесконечность, можно вычислить по следующей формуле:

$$\frac{1}{2} v_p^2 = \frac{K}{r}.$$

На оси «Земля — Луна» на расстоянии

$$r = D \frac{\left(\frac{K_{\oplus}}{K_{\zeta}}\right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{K_{\oplus}}{K_{\zeta}}\right)^{1/2}} = 0,9D$$

сила притяжения Земли уравнивается силой притяжения Луны. Эта точка, часто называемая *нейтральной точкой*, не имеет практического значения в астронавтике, хотя она и дает некоторое представление о районе долунного пространства, где результирующее гравитационное поле крайне слабое.

При рассмотрении механики полета в долунном пространстве можно различить следующие случаи:

- а) учет только притяжения Земли,
- б) учет притяжения Земли и Луны,
- в) учет вековых возмущений долунных орбит с длительным временем существования.

Первый случай является самым простым. При этом в достаточно широкой области долунного пространства на радиальных удалениях, не превышающих 45 земных радиусов, этот подход дает весьма хорошее приближение к реальным траекториям. Этот подход можно использовать для разработки технических требований при проектировании.

На рис. 2.63—2.66 приведены некоторые характеристики круговых и эллиптических (с различными апогейными расстояниями) орбит спутников Земли в долунном пространстве. Расстояния даны в единицах земного радиуса r_{00} . Расчеты проводились в

стым, если рассматривать лишь величины скоростей и принять, что отклонения от первоначальной орбиты пренебрежимо малы и, наконец, что большая ось орбиты все время совпадает с осью «Земля — Луна». В этом случае достаточно просто продемонстрировать влияние лунного притяжения. Если известна величина перигейной скорости v_i (принимаемая за начальную)

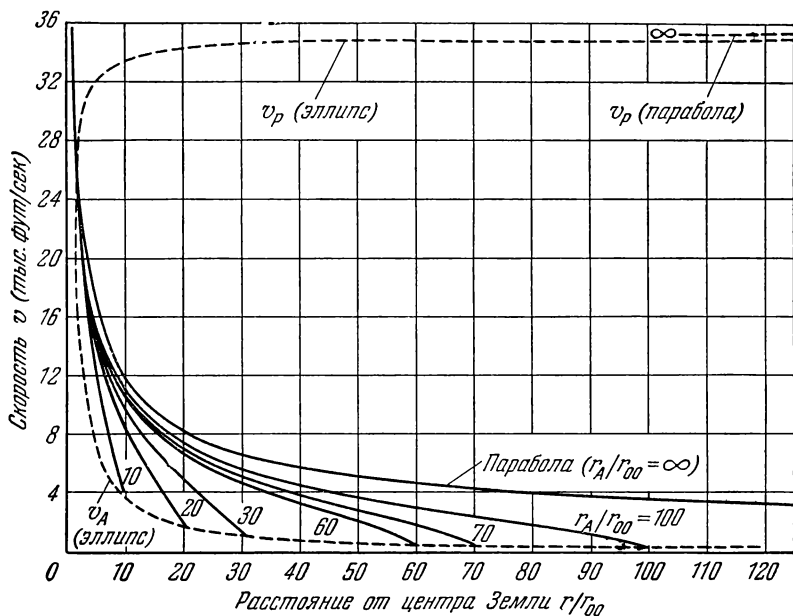


Рис. 2.64. Связь между величиной скорости и радиальным расстоянием для геоцентрических орбит.

v_p — перигейная скорость; v_A — апогейная скорость; r_A — апогейное расстояние; r_{00} — радиус Земли.

на радиальном расстоянии r_i от Земли и радиальном расстоянии ρ_i от Луны, то, согласно закону сохранения энергии, величина скорости v в произвольной точке, отстоящей от Земли и Луны соответственно на r и ρ , может быть определена из следующего выражения:

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_i^2) = \frac{K_{\oplus}}{\rho_i} \left(\frac{\rho_i}{\rho} - 1 \right) - \frac{K_{\oplus}}{r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right). \quad (2.323b)$$

Для эллиптических орбит имеем следующую связь между истинной аномалией и радиальным расстоянием:

$$\cos \eta = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{r} \frac{v^2}{K/r} - 1 \right), \quad (2.324)$$

где для параболы $e=1$. Далее, если расстояние между Землей и Луной обозначить через D , то для радиального расстояния ρ получим:

$$\rho = \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos(180^\circ - \eta)}.$$

Истинная аномалия отсчитывается от перигейной точки в направлении полета. На рис. 2.67 приведены сравнительные результаты. Сплошные линии идентичны линиям графика на

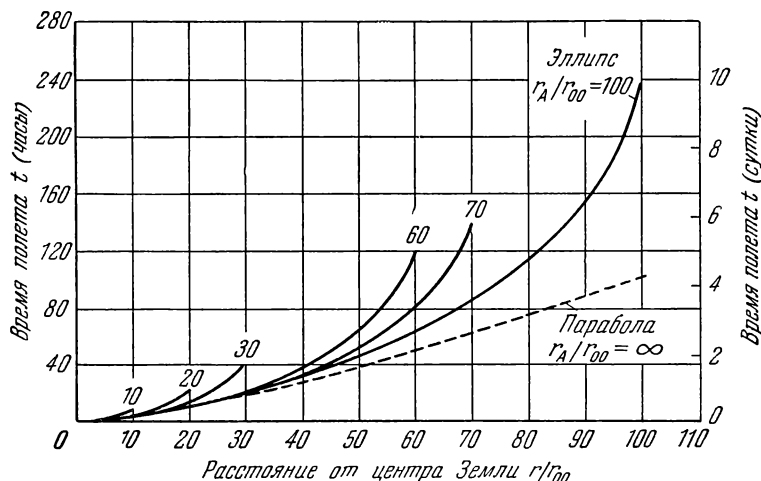


Рис. 2.65. Связь между временем полета и радиальным расстоянием для геоцентрических орбит.

r_A — апогейное расстояние, r_{00} — радиус Земли.

рис. 2.64, а пунктирные линии соответствуют результатам, полученным по уравнению (2.323b). Даже при $r_A/r_{00}=30$ орбита достаточно удалена от Луны, чтобы испытывать большие возмущения от силы притяжения Луны. Апогейная точка орбиты при $r_A/r_{00}=60$ оказывается расположенной на 762 км ближе к Земле, чем центр Луны, то есть апогей этой орбиты оказывается внутри тела Луны. Этим объясняется особо сильное влияние силы притяжения Луны для этой орбиты.

Для более протяженных эллиптических орбит и параболической орбиты радиальное расстояние от космического аппарата до Луны после пересечения аппаратом лунной орбиты быстро увеличивается вследствие принятого допущения о совпадении большой оси переходной орбиты с осью «Земля — Луна». Этим изменением радиального расстояния от Луны и объясняется

(рис. 2.68) уменьшение силы притяжения Луны для орбит с отношением $r_A/r_{00} > 60$. Графики скорости для параболической орбиты (например, для пролета космического аппарата вблизи Луны) оказываются подобными графикам скорости для эллиптической орбиты с $r_A/r_{00} = 60$.

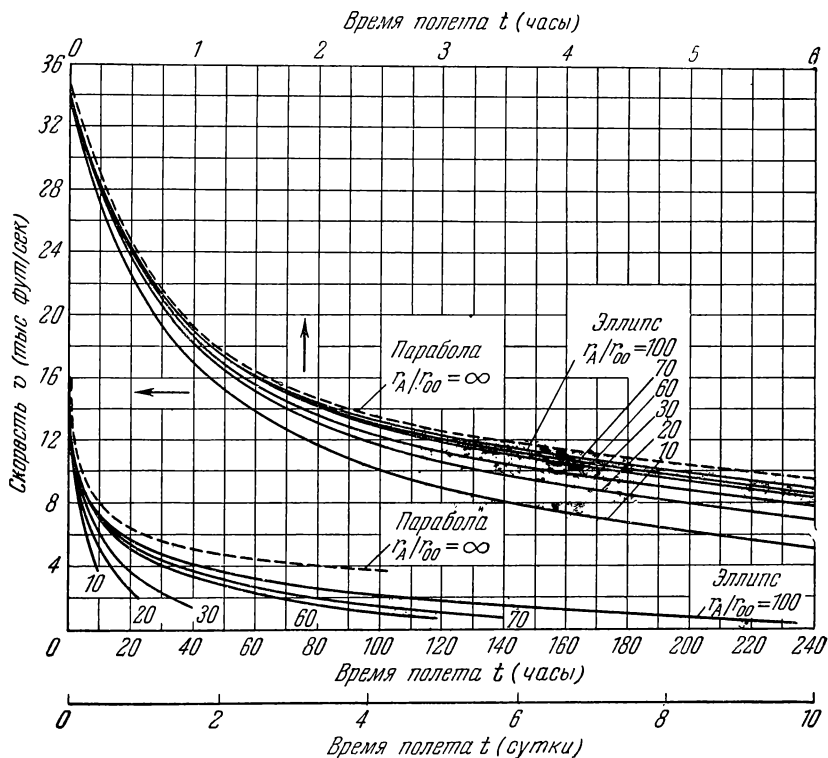


Рис. 2.66. Связь между скоростью и временем полета для геоцентрических орбит.

r_A — апогейное расстояние, r_{00} — радиус Земли.

Отдельное изучение изменения направления результирующего вектора силы притяжения при совместном учете сил притяжения Земли и Луны также является достаточно простым. Это можно сделать, определяя мгновенные положения кажущегося центра притяжения (ЦП). При движении космического аппарата от перигея к апогею по заданной орбите точка ЦП колеблется между центром Земли и максимально удаленной от центра Земли точкой своего местоположения. Точка ЦП всегда лежит на оси «Земля — Луна», так как пренебрежимо малая

масса космического аппарата не может вызвать ее смещения с этой линии.

Положение ЦП, соответствующее точке C , легко определить [15], используя схему, приведенную на рис. 2.69. Пусть буквами

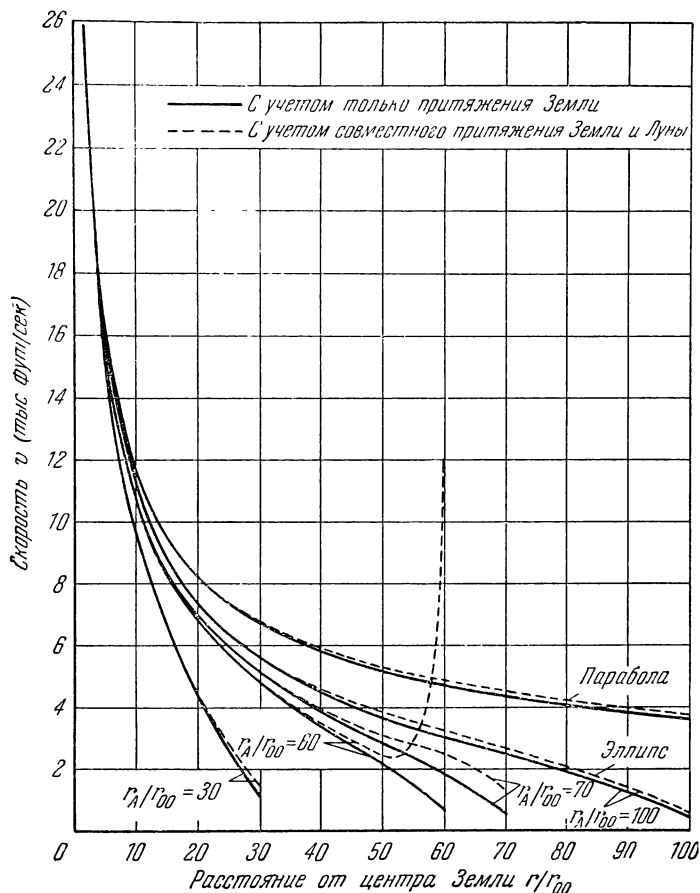


Рис. 2.67. Связь между скоростью и радиальным расстоянием для долунных орбит.

E , M и B соответственно обозначены Земля, Луна и спутник, движущийся по заданной орбите. Спутник испытывает ускорения a_e в направлении Земли и a_m в направлении Луны. Результирующая сила притяжения a_{me} , действующая на единичную массу, направлена в мгновенное положение C кажущегося центра притяжения ЦП на оси «Земля — Луна». Используя обо-

значения, приведенные на рис. 2.69, можно найти: $d/r = \sin \beta / \sin \gamma$, $a_m/a_e = \sin \beta / \sin \delta$, $(D - d)/\rho = \sin \delta / \sin (180^\circ - \gamma) = \sin \delta / \sin \gamma$. Таким образом, можно получить: $d/r = (a_m/a_e)[(D - d)/\rho]$.

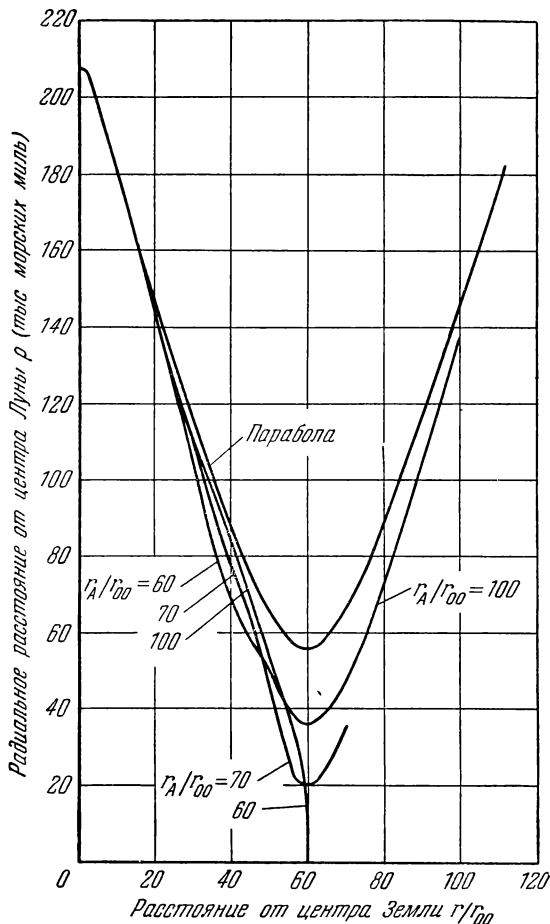


Рис. 2.68. Изменение радиального расстояния от центра Луны до точек орбит спутника Земли, большие оси которых проходят через центр Луны.

Учитывая, что $a_e = K_\oplus / r^2$ и $a_m = K_\zeta / \rho^2$, для определения положения ЦП окончательно получаем:

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{1 + \frac{K_\oplus}{K_\zeta} \left(\frac{\rho}{r} \right)^3}. \quad (2.325)$$

Таким образом, в результате возмущающей силы притяжения Луны на единичную массу действуют радиальная сила (радиальное ускорение)

$$a_r = a_m \cos \varepsilon = - \frac{K_{\zeta}}{\rho^2} \cos \left(\arctg \frac{D \sin \eta}{r + D \cos \eta} \right) \quad (2.326)$$

и трансверсальное ускорение

$$a_a = \frac{K_{\zeta}}{\rho^2} \sin \left(\arctg \frac{D \sin \eta}{r + D \cos \eta} \right). \quad (2.327)$$

В более общем случае, когда ось «Земля — Луна» образует с большой осью орбиты спутника угол Φ , в равенства (2.326) и (2.327) вместо истинной аномалии η необходимо подставить величину $(\eta - \Phi)$.

Найденные выше две компоненты ускорения определяют величины возмущений орбиты спутника Земли Луной (или, наоборот, величины возмущений спутника Луны Землей). Если точка C расположена очень близко к точке E , то возмущение орбиты Луной будет малым и совсем исчезнет при совпадении точки C с точкой E . Поэтому по смещению ЦП для данной орбиты можно судить о величине ошибки, возникающей в результате пренебрежения притяжением Луны. На рис. 2.70 приведены смещения ЦП для параболической ($r_A/r_{00} = \infty$) и некоторых эллиптических орбит в диапазоне $60 \leq r_A/r_{00} \leq 100$, полученные в предположении, что большая ось переходной орбиты совпадает с осью «Земля — Луна».

Расчеты показывают, что даже для эллиптической орбиты с отношением $r_A/r_{00} = 30$ максимальное смещение точки ЦП от центра Земли составляет $1,18 \cdot 10^{-2} D$, или около $0,71 r_{00}$, то есть точка ЦП продолжает оставаться в теле Земли. Естественно, что подобное смещение ЦП нельзя считать пренебрежимо малым в случае орбит с продолжительным временем существования. Однако для переходных орбит этим эффектом можно пренебречь.

По графикам, приведенным на рис. 2.70, можно сделать вывод, что при предварительных расчетах переходных орбит при $r < 25r_{00}$ притяжением Луны можно пренебречь. Далее, начиная с $r = 25r_{00}$, необходимо учитывать возмущающее действие силы притяжения Луны, используя метод оскулирующих элементов. При возвращении космического аппарата после его прохождения радиального расстояния $r = 25r_{00}$ вновь можно не учитывать возмущающего действия силы притяжения Луны, используя для дальнейшего расчета оскулирующие элементы в точке $r = 25r_{00}$.

Если орбита спутника удалена на достаточно большое расстояние и от Земли и от Луны, то может возникнуть необходимость в исследовании устойчивости орбиты спутника. Если орбита спутника продолжает сколь угодно долго оставаться около своего центрального тела, то ее называют *устойчивой*. Спутник, движущийся по орбите, энергия которой близка к предельной для данного гравитационного поля, под воздействием возмущающих сил рано или поздно покинет центральное поле. Орбиты подобных спутников называются *неустойчивыми*. Орбиты

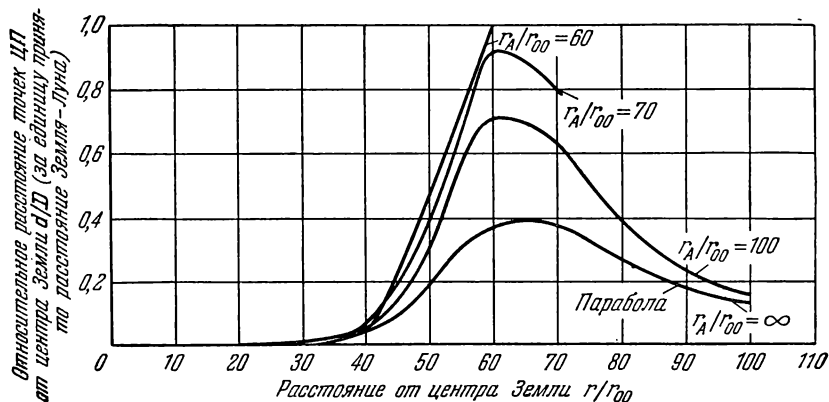


Рис. 2.70. Смещение кажущегося центра притяжения (ЦП) для параболической и эллиптических орбит с $r_A/r_00 = 60, 70$ и 100 .

частицы около коллинеарных точек либрации являются неустойчивыми, то есть если частица приблизится к одной из этих точек с соответствующей скоростью, то она совершит не более нескольких оборотов. Действительно, Абхианкар¹⁾ рассчитал, что около точки L_2 или L_3 частица сделает не более двух оборотов. Неустойчивые орбиты могут иметь место также и около тел с конечными массами. Если орбита спутника расположена достаточно далеко от планеты, то в результате действия давления солнечного излучения спутник может покинуть центральное тело. Внешние спутники Юпитера, движущиеся по обратным орбитам, не будут вечно спутниками Юпитера. Условия устойчивости орбит около тел конечной массы будут рассмотрены в § 2.17 и § 2.18. В следующем параграфе приведены примеры долунных орбит.

¹⁾ K. D. Abhyankar, Stability of Straight-line Solutions in the Restricted Problem of Three Bodies, Astron. J., vol. 64 (5), p. 163 (June 1959).

2.16 Долунные орбиты спутников

В предыдущих параграфах было показано, что с увеличением расстояния возмущающий потенциал Земли, а с ним и два его главных возмущающих влияния на орбиту спутника (прецессия орбиты и вращение линии апсид) быстро убывают.

Два других возмущающих воздействия, обычно пренебрежимо малые вблизи Земли, с удалением от Земли начинают приобретать важную роль. Этими возмущениями являются сила притяжения Луны и, в меньшей степени, возмущающее действие гравитационного момента поля притяжения Солнца.

Образование солнечного гравитационного момента происходит следующим образом. Спутник, как составная часть геоцентрической системы, участвует в свободном движении вокруг Солнца со скоростью, которая является функцией расстояния от Солнца. До тех пор, пока спутник движется вблизи геоцентрического барицентра, скорость его свободного движения относительно Солнца равна скорости барицентра. С увеличением геоцентрического радиуса орбиты увеличивается максимальная разность радиальных расстояний спутника от Солнца. В точках, соответствующих максимальному и минимальному радиальным расстояниям спутника от Солнца, разность в ускорениях силы притяжения Солнца, испытываемых спутником и барицентром, достигает максимума. Эта разность и приводит к образованию гравитационного момента, заставляющего спутник перемещаться относительно барицентра¹⁾. Это движение накладывается на собственное движение спутника относительно барицентра в изолированной системе «Земля — Луна». Расстояние системы «Земля — Луна» от Солнца настолько велико, что изменение силы притяжения Солнца в зависимости от изменения расстояния чрезвычайно мало, следовательно, и гравитационный момент также сравнительно мал. Поэтому влиянием солнечного гравитационного момента на скорость спутника на расстояниях от Земли до $10r_{00}$ можно всегда пренебречь. Даже на больших удалениях этот момент остается достаточно малым, но в некоторых случаях при окололунных полетах он приобретает важную роль. Эти случаи влияния солнечного гравитационного момента будут рассмотрены отдельно в § 8.8.

На удалениях, превышающих десять земных радиусов, возмущающее действие Солнца или Луны с точки зрения их влияния на прецессию орбиты и вращение линии апсид становится того же порядка, что и возмущающее действие сжатия Земли.

¹⁾ Подобно тому, как удаленные частицы в хвосте кометы перемещаются относительно головы кометы.

Для иллюстрации возмущающего влияния Луны и Солнца на долунные орбиты на рис. 2.71 приведены графики регрессии

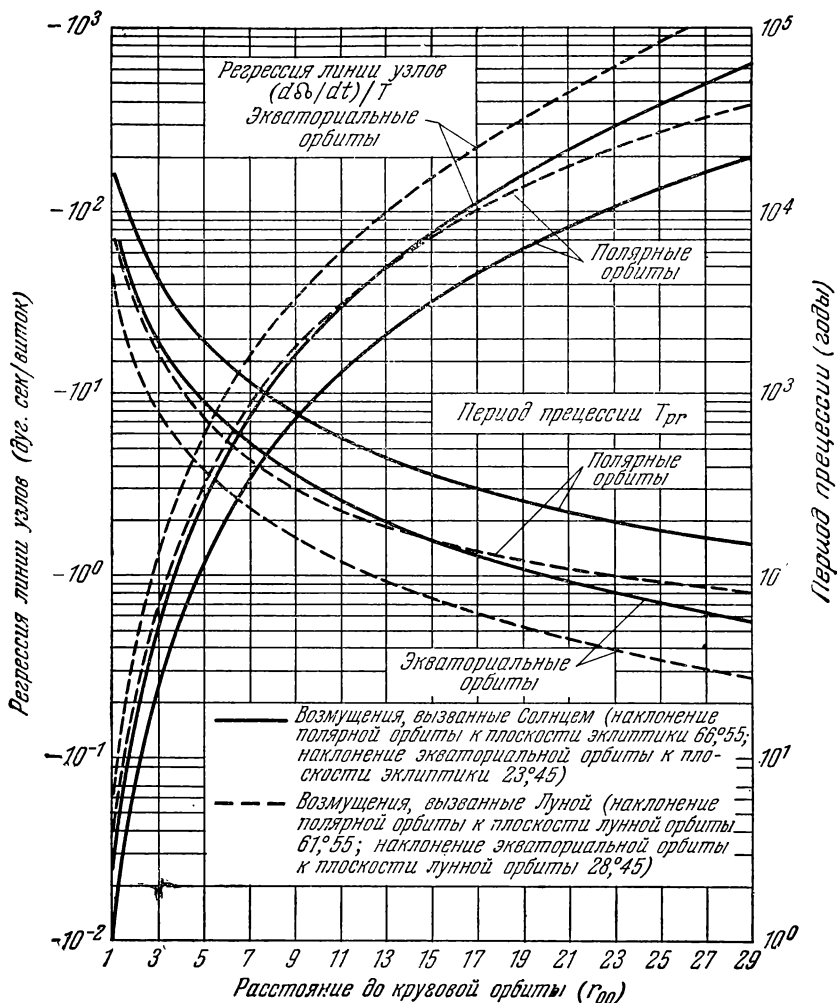


Рис. 2.71. Угловая скорость и период прецессии круговых полярных и экваториальных орбит, вызванные влиянием Луны и Солнца.

линии узлов (вращение линии узлов по часовой стрелке) в функции расстояния от Земли для полярных и экваториальных круговых орбит. На том же рисунке приведены величины периода прецессии. Для околоземных орбит этот период имеет

порядок тысяч лет, то есть прецессия настолько медленная, что ею можно пренебречь. Однако для достаточно удаленных орбит период прецессии может уменьшиться до нескольких десятков или даже нескольких лет. На рис. 2.71 сплошные линии соответствуют возмущающему действию Солнца, а пунктирные — возмущающему действию Луны. При рассмотрении влияния

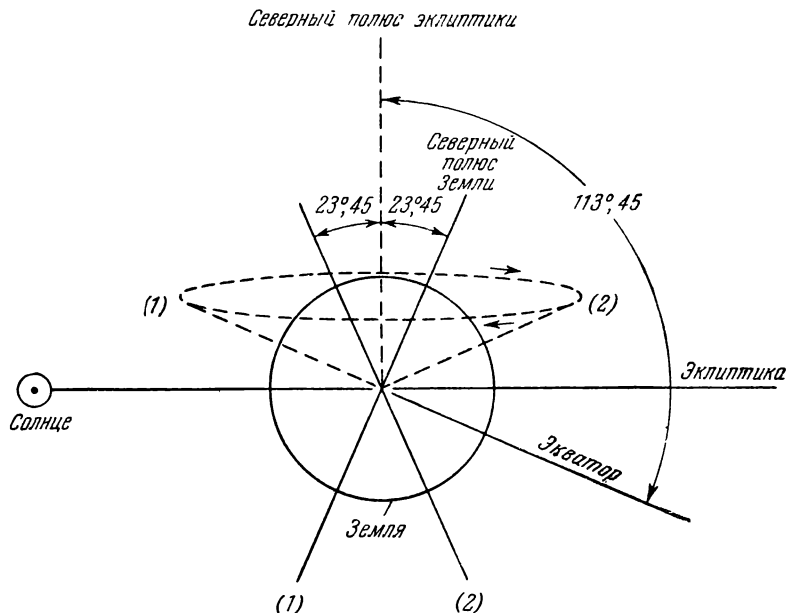


Рис. 2.72. Прецессия долунной орбиты, вызванная возмущающим действием Солнца («первоначальная» орбита — полярная).

Солнца наклонение экваториальной орбиты к плоскости эклиптики (плоскости отсчета) принималось равным $23^{\circ}45'$, а полярной орбиты — равным $90^{\circ} - 23^{\circ}45' = 66^{\circ}55'$. При рассмотрении влияния Луны наклонения тех же орбит к плоскости лунной орбиты (плоскости отсчета) принимались равными соответственно $28^{\circ}45'$ и $90^{\circ} - 28^{\circ}45' = 61^{\circ}55'$. Графики рассчитывались с использованием метода, приведенного в § 2.9.

Определение действительных движений линии узлов и линии аписид, так же как и других возмущений долунных орбит, для которых пренебрегать возмущающим влиянием Солнца и Луны уже нельзя, является чрезвычайно сложной задачей, так как прецессия орбиты изменяет положение плоскости орбиты относительно плоскости отсчета (плоскости экватора). Это иллюстрируется рис. 2.72, показывающим прецессию

«первоначальной» полярной орбиты вследствие возмущающего действия Солнца. «Первоначальное» положение орбиты и ее северного полюса обозначено (1), положение орбиты после половины оборота линии узлов обозначено (2). Северный полюс орбиты вращается вокруг северного полюса эклиптики, как показано на рисунке. Если за плоскость отсчета принять плоскость земного экватора, то северный полюс эклиптики образует с ней угол $113^{\circ},45$. За один полный оборот линии узлов наклонение плоскости орбиты изменится от «начального» значения $113^{\circ},45$ — $23^{\circ},45 = 90^{\circ}$ [полярная орбита, положение (1)] до значения $113^{\circ},45 + 23^{\circ},45 = 136^{\circ},9$ через пол-оборота [положение (2)] и вновь до 90° . Таким образом, почти все время наклонение плоскости орбиты $i > 90^{\circ}$. С учетом объяснений к выражению (2.34) это означает, что в данном случае сжатие Земли вызывает прецессию в восточном направлении, тогда как возмущающее действие Солнца вызывает прецессию орбиты в западном направлении. Таким образом, возмущающее влияние сжатия Земли всегда (за исключением случая, когда $i = 90^{\circ}$) противоположно возмущающему влиянию Солнца. Что касается возмущающего влияния Луны, то оно зависит от положения лунной орбиты. Орбита Луны прецессирует относительно плоскости эклиптики с периодом 18,6 года. В течение этого промежутка времени наклонение орбиты Луны по отношению к плоскости экватора колеблется между $113^{\circ},45 + 85^{\circ} = 198^{\circ},45$ (что соответствует максимальной земной широте $18^{\circ},45$) и $113^{\circ},45 - 85^{\circ} = 28^{\circ},45$ (что соответствует максимальной земной широте $28^{\circ},45$). Поэтому возмущающее влияние Луны, которое оказывает более сильное воздействие на орбиту спутника, чем возмущающее влияние Солнца, может либо усиливать, либо ослаблять возмущающее влияние Солнца или сжатия Земли. Следует отметить, что нутация земной оси в прецессионном движении относительно полюса эклиптики вызвана совместным влиянием лунной прецессии и солнечной регрессии на движение оси Земли. Таким же образом и система трех возмущающих факторов (сжатие Земли, притяжение Луны, притяжение Солнца) вызывает сложный характер прецессии долунной орбиты. Так что приведенные на рис. 2.71 графики отражают упрощенную картину, так как рассматриваются лишь два из трех возмущающих факторов, да и те раздельно. Однако, как было разъяснено в конце § 2.7, если рассматриваемые возмущения малы (а это имеет место для орбит в районе примерно от $7r_{00}$ до $15r_{00}$), то их можно просто суммировать.

Для иллюстрации ниже будут приведены примеры околоспутниковых долунных орбит. Поскольку для учета возмущений аналитические выражения и даже разложения в ряды не являются

пригодными, то необходимо использовать специальные методы расчета возмущенного движения.

Движение космического аппарата (материальной точки) в прямоугольной системе координат можно определить численным интегрированием следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\ddot{X} - K_i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{r_i^3}, \\ \ddot{y} &= -\ddot{Y} - K_i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta y_i}{r_i^3}, \\ \ddot{z} &= -\ddot{Z} - K_i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta z_i}{r_i^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.328)$$

где $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ — составляющие центробежного ускорения начала системы координат, если считать, что оно находится не в барицентре системы, а в центре одного из n тел (в нашем случае в центре Земли); K_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) — гравитационный параметр соответствующего тела; $r_i = (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2)^{1/2}$; $\Delta x_i = x - x_i, \dots; x, y, z$ — текущие координаты космического аппарата; x_i, y_i, z_i — текущие координаты любого из $(n-1)$ возмущающих тел.

В рассматриваемом случае, включающем четыре тела (Земля, Луна, Солнце и спутник), имеются четыре группы координат: (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) ; гравитационные параметры $K_1 = k^2 m_1$, $K_2 = k^2 m_2$, $K_3 = k^2 m_3$; радиальные расстояния $r_1 = (\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2)^{1/2}$ и т. д. Предполагается, что центробежные ускорения $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ вызваны только ускорением барицентра системы «Земля — Луна» и ускорением Земли относительно этого барицентра, а влияние барицентра системы «Земля — Луна — Солнце» не учитывается.

Тремя телами с конечными массами являются Земля, Луна и Солнце. Начало системы координат поместим в центр Земли, оси x и y — в плоскости лунной орбиты, ось z дополнит систему до правой. Координаты Земли будут

$$x_1 = x_e = 0, \quad y_1 = y_e = 0, \quad z_1 = z_e = 0. \quad (2.329)$$

Координаты Луны:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_m = D \cos \psi, \\ y_2 &= y_m = D \sin \psi, \\ z_2 &= z_m = 0, \\ \psi &= \psi_0 + \mu_m t, \end{aligned} \right\} \quad (2.330)$$

где ψ — центральный угол лунной орбиты (так как предполагается, что орбита Луны является круговой), μ_m — средняя угловая скорость движения Луны, D — расстояние от Земли до Луны и t — время. Наконец, для координат Солнца имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_s = R \cos \Phi \cos i + s_e \cos \psi, \\ y_3 &= y_s = R \sin \Phi - s_e \sin \psi, \\ z_3 &= z_s = R \cos \Phi \sin i, \\ \Phi &= \Phi_0 + \mu_s t, \end{aligned} \right\} \quad (2.331)$$

где R — расстояние от Земли до Солнца, Φ — центральный угол земной орбиты (предполагается также круговой), i — наклонение плоскости орбиты относительно плоскости эклиптики, s_e — расстояние между центром Земли и барицентром системы «Земля — Луна», а μ_s — средняя угловая скорость оси «Земля — Солнце». Для X, Y, Z можно получить следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} X &= \mu_m^2 s_e \cos \psi + \mu_s^2 R' \cos \Phi \cos i, \\ Y &= \mu_m^2 s_e \sin \psi - \mu_s^2 R' \sin \Phi, \\ Z &= -\mu_s^2 R' \cos \Phi \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.332)$$

где R' — расстояние от Солнца до барицентра системы «Земля — Луна».

Найдя проекции скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и координаты космического аппарата x, y, z , можно определить соответствующие оскулирующие элементы для заданного времени. Затем можно рассчитать величины:

мгновенной скорости:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (2.333)$$

радиального расстояния:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.334)$$

постоянной энергии орбиты по отношению к Земле (начало системы координат):

$$h = v^2 - \frac{2K_{\oplus}}{r}, \quad (2.335)$$

большой полуоси:

$$a = -\frac{K_{\oplus}}{h}. \quad (2.336)$$

Для долготы восходящего узла Ω и наклонения орбиты α , отсчитываемого от плоскости орбиты Луны (плоскости xy), имеем:

$$\left. \begin{aligned} -\cos \Omega \operatorname{tg} \alpha &= \frac{z\dot{x} - x\dot{z}}{x\dot{y} - y\dot{x}}, \\ \sin \Omega \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{x\dot{y} - y\dot{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2.337)$$

и, наконец, для постоянной закона площадей Кеплера

$$C = \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\cos \alpha}. \quad (2.338)$$

Имея эти данные, можно рассчитать все прочие параметры орбиты.

Если $h < 0$, то оскулирующей орбитой будет эллипс и эксцентрическую аномалию можно рассчитать, воспользовавшись выражением

$$\cos E = \frac{a-r}{ae}, \quad (2.339)$$

а время после прохождения перигея — по формуле

$$t - t_0 = \frac{E - e \sin E}{\mu}. \quad (2.340)$$

Если $h > 0$, то оскулирующей орбитой является гипербола и вспомогательный угол для расчета времени после прохождения перигея определяется по формуле

$$\cos H = \frac{ae}{a+r}, \quad (2.341)$$

а время — по формуле

$$t = \frac{e \operatorname{tg} H - \ln \left(45^\circ + \frac{H}{2} \right)}{\mu}. \quad (2.342)$$

Смысл вспомогательного угла и прочих обозначений разъяснен в главе 4 первого тома книги «Космический полет».

Следует отметить, что исходные уравнения являются уравнениями пространственного движения (пространственная ограниченная система четырех тел), но в них не учитывается несферичность геоцентрического поля притяжения, а следовательно, не учитывается влияние сжатия Земли на орбиту спутника.

Чтобы выделить возмущающие влияния сил притяжения Солнца и Луны, рассматриваемые ниже долунные орбиты рассчитывались без учета влияния сжатия Земли. Кроме того, начальная плоскость орбит располагалась в плоскости лунной орбиты и орбита Луны принималась круговой.

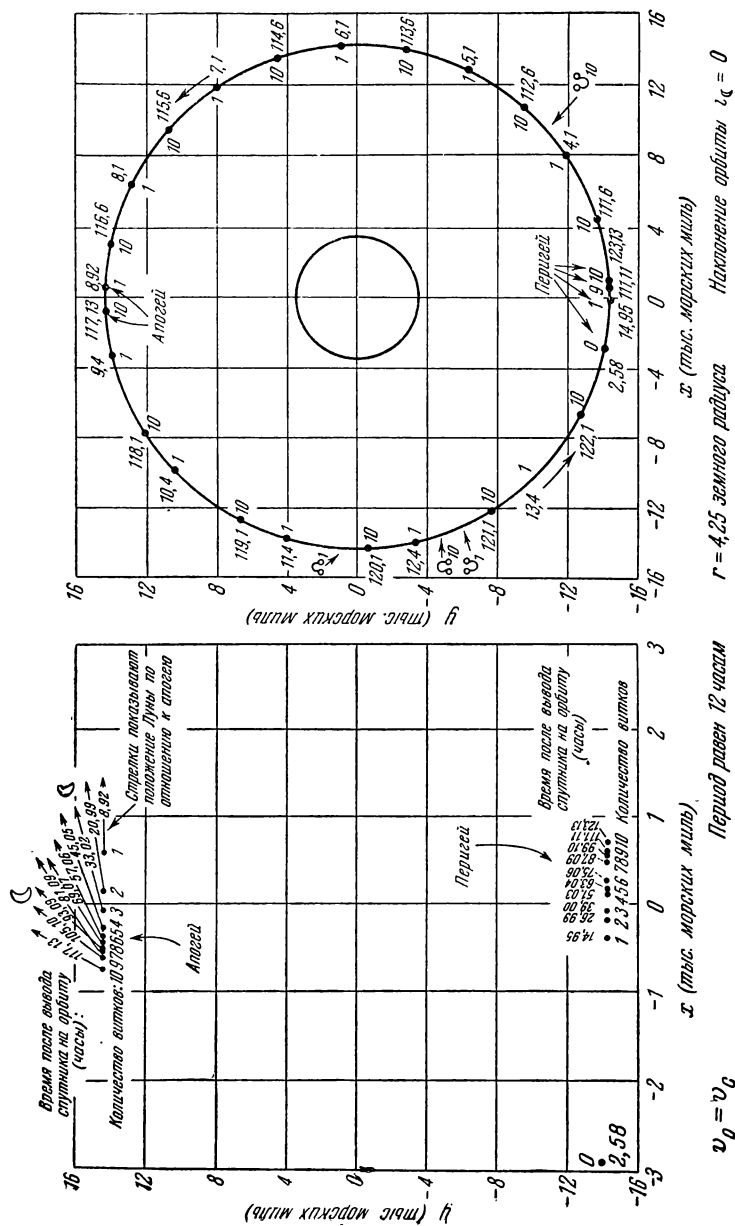


Рис. 2.73. 12-часовая орбита (анализ системы четырех тел).

На рис. 2.73 приведен пример расчета для системы четырех тел со звездным периодом обращения спутника, равным 12 часам. Приведенные результаты относятся к десяти оборотам спутника по круговой орбите радиуса, равного 4,25 земного радиуса (точками указаны первый и десятый обороты). Начальное положение Солнца предполагается на продолжении положительной оси x (вправо). Орбита располагается в плоскости лунной орбиты. Хотя при выводе на орбиту предполагалось достижение круговой скорости, под действием возмущений орбита деформировалась. Цифры снаружи орбиты обозначают время (в часах) после вывода спутника на орбиту. Цифры внутри орбиты обозначают первый и десятый виток. Там же показано положение узлов и точек апсид. Смещение перигея происходит не с постоянной угловой скоростью. За рассматриваемый промежуток времени перигей в среднем смещался на 66 дуговых секунд за один виток. Эта величина очень близка к величине поворота линии апсид за один виток вследствие влияния сжатия Земли. Смещение апогея происходит по-иному и носит менее выраженный характер (по крайней мере за первые десять витков). Эта разница в смещении перигея и апогея указывает на то, что здесь имеет место не просто вращение линии апсид, как в случае влияния сжатия Земли. Орбитальная энергия (а следовательно, и большая полуось), так же как и эксцентриситет, меняется. Это показано на рис. 2.74, где приведены графики величины $h/2$, движения Луны и изменения эксцентриситета e в зависимости от количества витков, совершенных спутником. За время, когда Луна совершит 0,2 оборота, Солнце пройдет лишь 0,0137 часть окружности в кажущемся движении вокруг Земли. Изменение орбитальной энергии чрезвычайно мало, что свидетельствует о крайней слабости лунно-солнечного возмущения.

Ранее нами было получено выражение для отношения перигейного расстояния к апогейному расстоянию в зависимости от эксцентриситета:

$$\frac{r_P}{r_A} = \frac{1 - e}{1 + e}. \quad (2.343)$$

После десяти витков $r_P/r_A = 0,98$, что приводит к незначительному изменению высоты орбиты, первоначально равной 20 754 км.

Как следует из рис. 2.74, изменения h и e имеют монотонный характер. В действительности изменения являются периодическими с периодом, равным лунному циклу. Плоскость орбиты спутника наклонена примерно на 5° к плоскости эклиптики. Поэтому влияние возмущающего действия Солнца на прецессию орбиты очень мало. Из рис. 2.75, на котором приведено движение

орбиты в плоскости xz , видно, что изменение z крайне мало (порядка долей километра).

В заключение можно отметить, что для орбиты с 12-часовым звездным периодом, расположенной в плоскости лунной орбиты, средняя лунно-солнечная прецессия перигея и прецессия перигея, вызванная сжатием Земли, одинаковы. Уход по оси z вследствие регрессии линии узлов, вызванной сжатием Земли, естественно, больше, чем вследствие возмущений, вызванных Солнцем, так как наклонение орбиты почти в шесть раз больше, чем

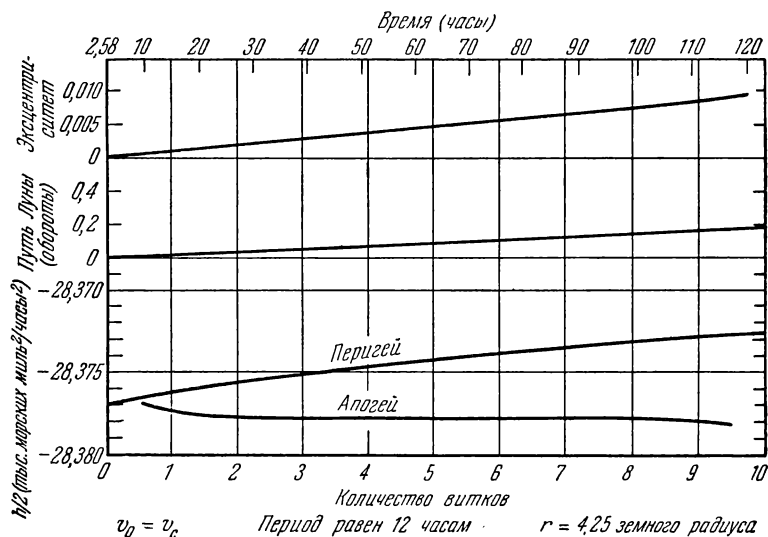


Рис. 2.74. Изменения эксцентриситета и орбитальной энергии в перигее и апогее 12-часовой орбиты, вызванные возмущающим действием Луны и Солнца ($t = 0$).

в первом случае. Вековые возмущения первого порядка из-за сжатия Земли не изменяют форму орбиты ($da/dt=0$, $de/dt=0$), а лунно-солнечные возмущения, хотя и слабые, изменяют форму орбиты по крайней мере с $e=0$ до $e=0,01$. Подобное изменение эксцентриситета примерно лишь на 370 км изменяет диаметр орбиты, равный 54 260 км. Таким образом, если изменения будут даже в три раза большими, чем приведенное (вряд ли следует ожидать еще больших изменений), то все равно они оказываются пренебрежимо малыми. Изменение формы орбиты будет происходить также за счет различия в угловых скоростях апогея и перигея и различия в угловых скоростях восходящего и нисходящего узлов.

На рис. 2.76 приведена околосферическая орбита ($r_P = 7r_{00}$, $r_A = 8r_{00}$, $e = 0,07197$, $T = 29^h, 2$) в сравнительно близкой к Земле области долунного пространства. В этой области возмущающее действие Луны еще очень мало ($K_{\odot}/\rho \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ км}^2/\text{сек}^2$), возмущающий потенциал от сжатия Земли имеет величину того же

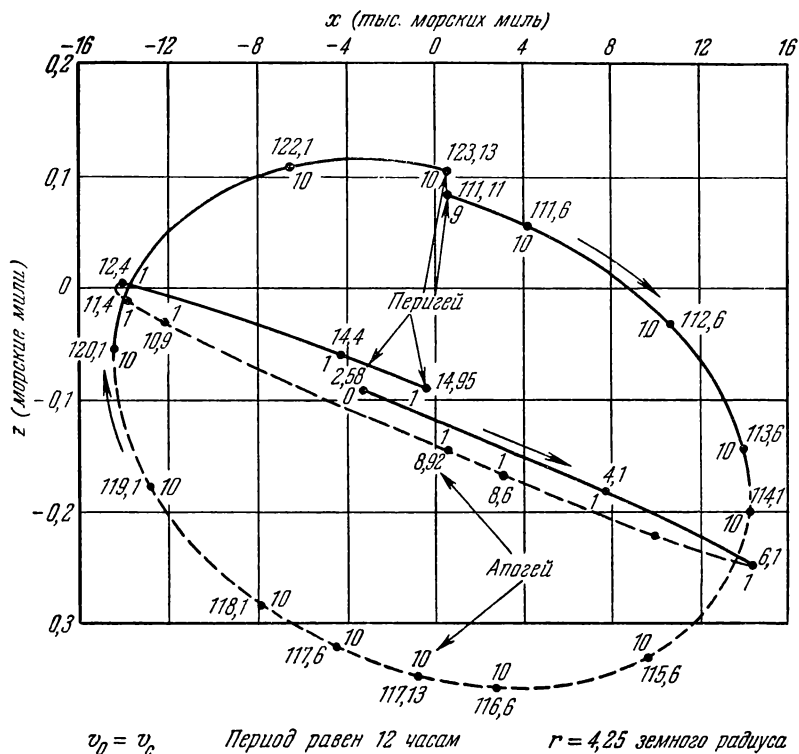


Рис. 2.75. Проекция 12-часовой орбиты на плоскость xz .

порядка, что и потенциал Луны. Круговая орбита на таком расстоянии испытывает пренебрежимо малые деформации. Орбиты с небольшими эксцентриситетами, которые характерны для орбит, получаемых с использованием ракет-носителей, подвержены более заметным возмущениям. На рисунке указаны положения, занимаемые спутником в течение десяти витков. Стрелки показывают направление на текущее положение Луны. Максимальные отклонения от первоначального эллипса порядка нескольких сотен километров. В большинстве практических задач этими отклонениями можно пренебречь. Однако если речь

идет об осуществлении встречи, то естественно, что подобные отклонения необходимо учитывать. На рис. 2.76 приведена прецессия перигея. Движение спутника в плоскости xz показано на рис. 2.77, из которого явствует, что наклон орбиты к плоскости xy (плоскости лунной орбиты) очень мал, но им нельзя пренебрегать при решении определенных задач

$$r_p = 7r_{00}; \quad r_A = 8r_{00}; \quad e = 0,07197; \quad i_c = 0; \quad T = 29^h, 2$$

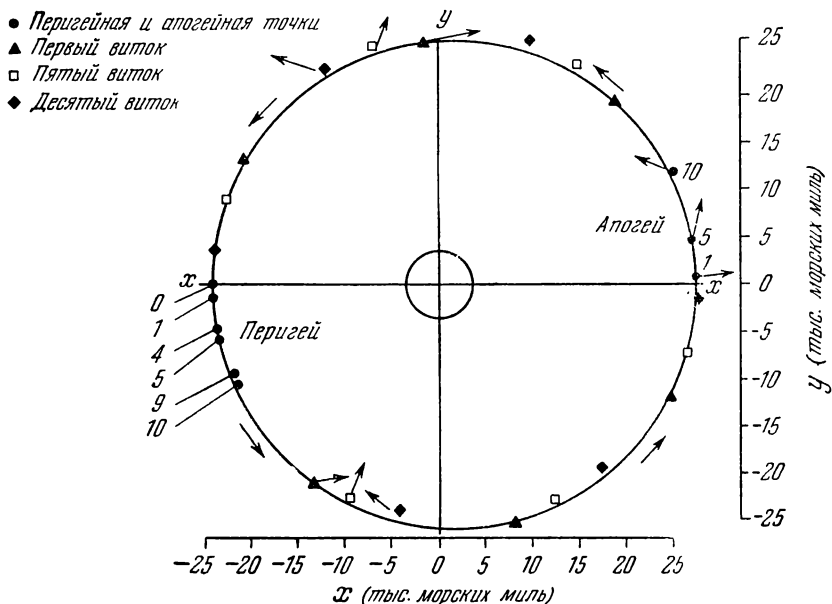


Рис. 2.76. Околокруговая долунная орбита.

Околокруговая орбита, приведенная на рис. 2.78, удалена от Земли на большее расстояние. Апогей этой орбиты близок к орбите захвата космического аппарата, возвращающегося к Земле по переходной орбите с Венеры или Марса (см. § 4.3); орбита захвата лежит примерно на удалении $15r_{00}$. Сплошной линией на правом рисунке 2.78 показана расчетная орбита с перигейным расстоянием 57 260 км (30 900 морских миль) и апогейным расстоянием 63 740 км (34 400 морских миль). Значения $r_{\max}$ и $r_{\min}$ соответственно отвечают максимальному и минимальному отклонениям положения произвольной точки орбиты. По сравнению с предыдущей орбитой, где отклонения положения точек орбиты составляли несколько сотен километров, в данном

случае отклонения достигают нескольких тысяч километров. Кроме того, эксцентриситет рассматриваемой орбиты (0,0525) меньше, чем у предыдущей орбиты. Это указывает на сравнительно более высокий уровень возмущающей силы, так как

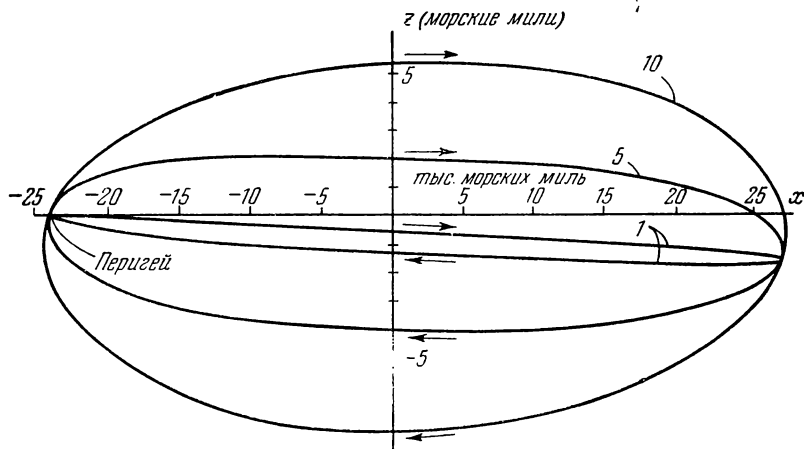


Рис. 2.77. Околокруговая долунная орбита ($r_P = 7r_{00}$, $r_A = 8r_{00}$). Проекция на плоскость xz .

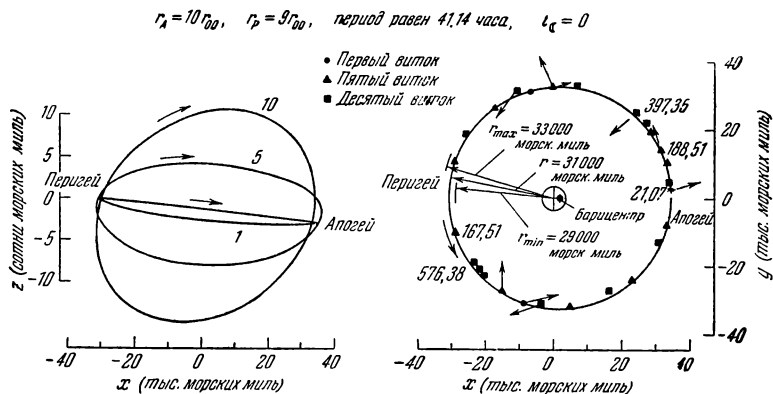


Рис. 2.78. Околокруговая долунная орбита спутника. (На правом рисунке стрелки указывают направление на Луну.)

отклонения орбиты в поле центральной силы для заданного уровня возмущающей силы уменьшаются с эксцентриситетом.

В качестве примера удаленной долунной орбиты на рис. 2.79 и 2.80 приведена околокруговая орбита ($e=0,0256$, $r_P=19r_{00}$,

$$r_A = 20 r_{00}, \quad r_p = 19 r_{00}, \quad T = 121^h, \quad e = 0,0256, \quad i_q = 0$$

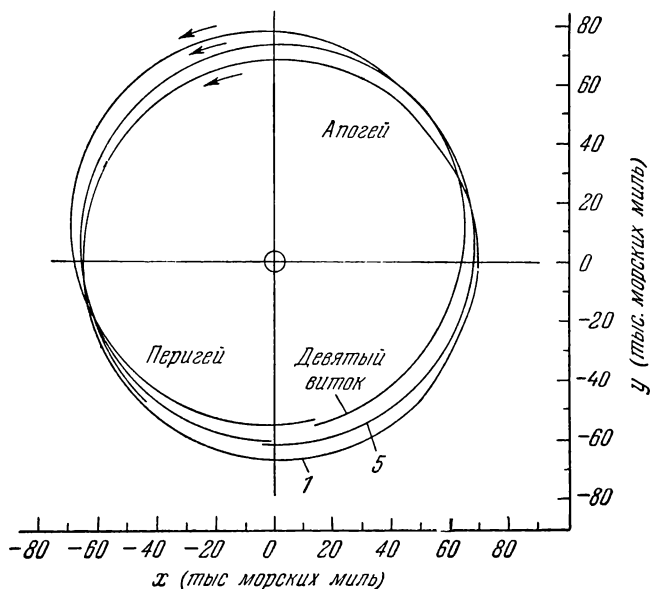


Рис. 2.79. Околокруговая долунная орбита.

$$r_A = 20 r_{00}; \quad r_p = 19 r_{00}; \quad T = 121^h; \quad e = 0,0256$$

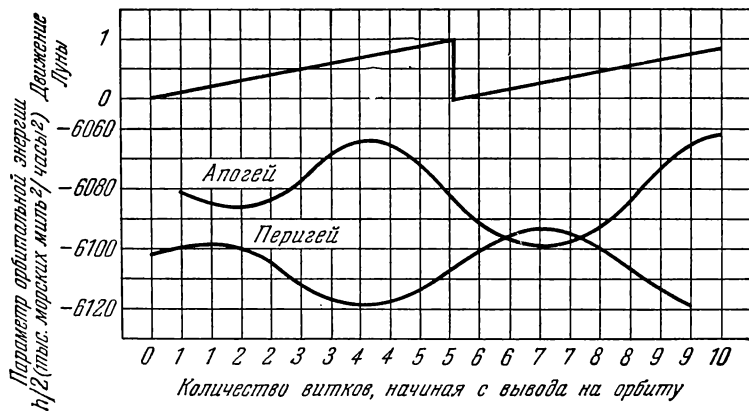


Рис. 2.80. Околокруговая долунная орбита.

$r_A = 20r_{00}$) со звездным периодом обращения 121 час, то есть почти точно пять суток [3]. Были рассчитаны полные десять витков. Начальное положение Солнца — опять на положительной оси x . В рассматриваемом примере изменение орбитальной энергии носит явно периодический характер (рис. 2.80). Относительное изменение орбитальной энергии даже в этом случае

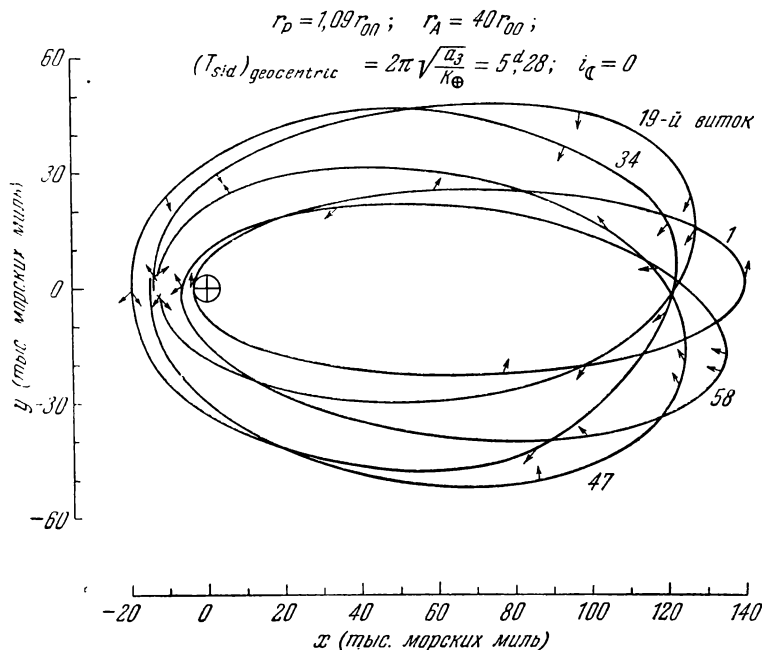


Рис. 2.81. Долунная орбита. (Система четырех тел.)

очень мало. Как и следовало ожидать, деформация орбиты в этом случае значительно увеличилась, но не настолько, чтобы исключить возможность использования автоматических космических аппаратов для некоторых целей.

Наконец, на рис. 2.81 и 2.82 представлена сильно вытянутая долунная орбита ($e=0,95$, $r_p=1,09r_{00}$, $r_A=40r_{00}$). Как и следовало ожидать, орбита сильно возмущена. Апогей и перигей орбиты совершают своеобразные колебания около оси x , как показано на рис. 2.82. Движение точек апсид указывает на периодический характер главной возмущающей силы — силы притяжения Луны. Кроме того, должны иметь место вторичные

эффекты, вызываемые возмущающим действием Солнца, которые, очевидно, приведут к наложению вековых возмущений на долгопериодические возмущения при движении Земли вокруг Солнца. Однако важно отметить, что быстропериодическое движение точек апсид позволяет примерно прогнозировать поведение орбиты. Как следует из приведенных рисунков, орбита

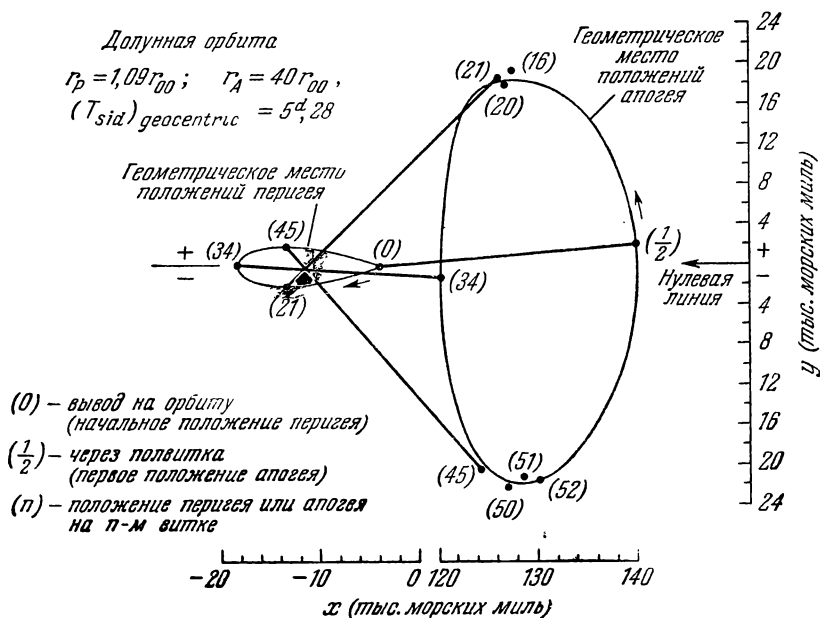


Рис. 2.82. Движение точек апсид.

периодически сжимается и растягивается. На электронной цифровой вычислительной машине был проведен расчет орбиты для отрезка времени в один год. В течение этого отрезка времени перигей переместился из точки, очень близко расположенной к Земле, в точку, удаленную почти на 35 200 км, и затем опять приблизился к Земле. За это же время апогейные расстояния претерпело примерно такое же абсолютное изменение. Полный цикл движения апогея или перигея происходит за 1,1 года.

Последняя из приведенных орбит простирается примерно на две трети расстояния до Луны. Еще более удаленные долунные орбиты будут в сильной степени подвержены притяжению Луны, и их (невозмущенная) форма будет полностью искажена.

2.17. Орбиты спутников около других планет с учетом возмущающего влияния Солнца и окололунные орбиты с учетом возмущающего влияния Земли

Гравитационное поле в долунном пространстве является более сложным, чем около любой из планет солнечной системы. Это объясняется сравнительно большим отношением массы Луны к массе Земли, которое делает систему «Земля — Луна» наиболее похожей на систему двойной звезды среди всех других комбинаций в солнечной системе. Следующее по величине отношение масс принадлежит комбинации «Юпитер — Солнце» (примерно 10^{-3}). Околопланетные пространства Меркурия, Венеры и Марса не содержат сколько-нибудь значительных по массе спутников. В этих случаях основными источниками возмущений орбит спутников являются: 1) отклонение поля притяжения центрального тела от поля центральной силы, 2) возмущающее действие гравитационного поля Солнца. При рассмотрении окололунных орбит спутников изменение радиального расстояния точек орбиты от Солнца настолько мало, что соответствующей разницей в силе притяжения можно пренебречь. Поэтому спутники Луны главным образом подвержены возмущениям вследствие асимметрии лунного гравитационного поля и гравитационного поля Земли. Таким образом, условия в окололунном пространстве, грубо говоря, аналогичны околопланетным условиям солнечной системы, если Солнце заменить Землей. Что касается первого фактора, то наблюдениями с Земли можно установить лишь сжатие планет. Значения сжатия планет приведены в таблице 3.16 первого тома книги «Космический полет». Сжатия Меркурия и Венеры настолько малы, что в настоящее время не могут быть обнаружены. На основании обработки результатов оптических измерений диска Марса, проведенных с 1837 г. по 1952 г., Ванкулер¹⁾ получил величину сжатия для Марса $0,013 \pm 0,001 \approx 1/76,9$. Это значение совершенно отлично от значения *динамического сжатия*, определенного на основании закономерностей движения спутников Марса и равного $\epsilon = 0,005215 = 1/191,8$. Разница превышает величину, которую можно было бы объяснить погрешностями измерений. Это обстоятельство может служить указанием на большую концентрацию масс в экваториальных областях по сравнению с полярными областями²⁾. Что касается Луны, то она представляет собой трехосный *селеноид* (используем такой термин по аналогии

¹⁾ G. de Vancouleurs, Physics of the Planet Mars, The Macmillan Company, New York, 1954.

²⁾ Подробности см. в упомянутом труде G. de Vancouleurs, часть 5.

с термином *геоид*). В таблице 3.9 («Космический полет», т. 1) приводятся две величины сжатия — полярное и экваториальное (обе величины по Джеффрейсу¹⁾). Последняя величина для экваториального сжатия, полученная Джеффрейсом на основании измерений Якоукина²⁾, более надежная, и поэтому здесь приводится именно она. Если обозначить через c полярный радиус, через a экваториальный радиус по направлению к Земле, через b экваториальный радиус, нормальный к плоскости ac , а соответствующие моменты инерции обозначить через C , A и B , то

$$\frac{C-A}{C} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + b^2} = 0,0006269 \pm 0,0000027,$$

$$\frac{B-A}{C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0,000209 \pm 0,000001.$$

Отсюда, обозначив $(C-A)/C=x$ и $(B-A)/C=y$, получим:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0,999793,$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - y \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = 0,997653.$$

С Земли могут быть измерены лишь величины b и c . Их точное определение затруднено неправильностями лунного рельефа. С достаточной точностью можно считать $b=1738$ км, тогда для a и c будем иметь: $a \approx 1738,3$ км и $c \approx 1738,5$ км. К настоящему времени мы не располагаем подробными данными о полях притяжения Луны и планет. Такое положение сохранится, очевидно, до тех пор, пока не удастся послать в окрестности Луны и планет (а еще лучше на орбиты около них) автоматические космические станции с соответствующей аппаратурой.

Возмущения центрального тела, действующие на орбиту спутника, если речь идет о спутниках Луны либо спутниках Меркурия, Венеры или Марса, можно рассматривать как движение частицы относительно тела с меньшей массой в рамках ограниченной задачи трех тел, которая в первом приближении может рассматриваться как изолированная. При этом масса одного из тел M во много раз больше массы другого тела m , вокруг которого движется частица (искусственный спутник).

¹⁾ H. Jeffreys, Dynamics of the Earth-Moon System, Chap. 2 of «The Earth as a Planet», G. P. Kuiper (ed.), The University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1954.

²⁾ A. A. Yakoukin, General Characteristics of the Contour of the Moon. The Free Libration of the Moon, Transactions of the International Astronomical Union, VIII, P. T. Oosterhoff (ed.), p. 218, Cambridge University Press, 1952.

Помещая, как и прежде, центр вращающейся системы координат $\xi\eta$ в барицентр, направляя ось ξ по линии Mm , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω , и обозначая (постоянное) расстояние $M - m$ буквой D , запишем в общем виде уравнения движения частицы:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta &= \frac{\partial U}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.344)$$

Не определяя пока единиц массы и расстояния, положим гравитационную постоянную $k^2 = G$ равной единице, так что $K_M = M$ и $K_m = m$. Тогда можно записать:

$$\omega = \frac{M+m}{D^3}, \quad U = \frac{M}{r} + \frac{m}{\rho},$$

где r и ρ — соответственно расстояния частицы от центров M и m :

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \left(\xi - \frac{m}{M+m} D \right)^2 + \eta^2, \\ \rho^2 &= \left(\xi + \frac{M}{M+m} D \right)^2 + \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.345)$$

Отсюда находим:

$$Mr^2 + m\rho^2 = (M+m)(\xi^2 + \eta^2) + \frac{Mm}{M+m} D^2. \quad (2.346)$$

На основании равенств (2.264) потенциал Φ для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$2\Phi = M \left(\frac{r^2}{D^3} + \frac{2}{r} \right) + m \left(\frac{\rho^2}{D^3} + \frac{2}{\rho} \right). \quad (2.347)$$

Тогда уравнения (2.344) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.348)$$

Если положить $D=1$, $M=1$, то эти уравнения становятся идентичными с уравнениями (2.263). Чтобы исследовать движение спутника относительно m , перенесем начало системы координат в точку m :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{M}{M+m} D + \xi', \\ \eta &= \eta', \end{aligned} \right\} \quad (2.349)$$

где ξ' и η' — оси селеноцентрической вращающейся системы координат. Уравнения движения теперь примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}' - 2\omega\dot{\eta}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\xi'}, \\ \ddot{\eta}' + 2\omega\dot{\xi}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\eta'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.350)$$

Выразим необходимые величины через селеноцентрические координаты:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (\xi' + D)^2 + \eta'^2, \\ \rho^2 &= \xi'^2 + \eta'^2, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{(D^2 + \rho^2 + 2D\xi')^{1/2}} \approx \frac{1}{D} \left[1 - \frac{\xi'}{D} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{D} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi'}{D} \right)^2 + \dots \right], \\ \frac{r^2}{D^3} + \frac{2}{r} &= \frac{3}{D} + \frac{3}{D} \left(\frac{\xi'}{D} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.351)$$

Тогда равенство (2.347) обратится в следующее:

$$2\Phi = 3M \frac{\xi'^2}{D^3} + m \left(\frac{\rho^2}{D^3} + \frac{2}{\rho} \right) = 3\omega^2 \xi'^2 - 2m \frac{\xi'^2}{D^3} + m \frac{\eta'^2}{D^3} + \frac{2m}{\rho}. \quad (2.352)$$

Теперь определим единицу массы. Положим $m=1$ и $M^*=M/m$. Примем угловую скорость вращения оси Mm равной единице, то есть $\omega=1$. Тогда

$$D = 1 + M^*. \quad (2.353)$$

Отсюда

$$2\Phi = 3\xi'^2 + \frac{2}{\rho} - 2\frac{\xi'^2}{D^3} + \frac{\eta'^2}{D^3} = \frac{2}{\rho} + 3\xi'^2 - \frac{2}{1+M^*} \xi'^2 + \frac{1}{1+M^*} \eta'^2. \quad (2.354)$$

Наконец, получим дифференциальные уравнения движения спутника вблизи тела m :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}' - 2\dot{\eta}' + \left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{2}{1+M^*} - 3 \right) \xi' &= 0, \\ \ddot{\eta}' + 2\dot{\xi}' + \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{1+M^*} \right) \eta' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.355)$$

Запишем выражения для интеграла Якоби этих уравнений:

$$v'^2 = \dot{\xi}'^2 + \dot{\eta}'^2 = 2\Phi - C, \quad (2.356a)$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \frac{2}{\rho} + \left(3 - \frac{2}{1+M^*} \right) \xi'^2 + \frac{1}{1+M^*} \eta'^2 - C, \quad (2.356b)$$

где v' — орбитальная скорость спутника в системе координат $\xi'\eta'$. Поэтому уравнением граничных кривых Хилла будет уравнение

$$\frac{2}{\rho} + \left(3 - \frac{2}{1+M^*} \right) \xi'^2 + \frac{1}{1+M^*} \eta'^2 - C = 0. \quad (2.357)$$

Приведенные выше уравнения получены в предположении, что $M \gg m$, поэтому в уравнениях движения (2.355) членами второго порядка и старше можно пренебречь. При том же допущении можно пренебречь членами $2\xi'/(1+M^*)$ и $\eta/(1+M^*)$, которые для больших отношений M^* сравнимы с величинами ξ'^2 и η'^2 . При этом уравнения движения (2.355) допускают дальнейшее упрощение:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}' - 2\dot{\eta}' + \left(\frac{1}{\rho^3} - 3\right) \xi' &= 0, \\ \ddot{\eta}' + 2\dot{\xi}' + \frac{1}{\rho^3} \eta' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.358)$$

Эта форма впервые была предложена Хиллом. Полученные уравнения не содержат иных параметров, кроме расстояний, скоростей и ускорений, и поэтому их также называют каноническими уравнениями Хилла, основанными на специальном выборе единиц и допущении, что $M \gg m$. Интегралом уравнений (2.358) является

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \frac{2}{\rho} + 3\xi'^2 - C. \quad (2.359)$$

Для предельной кривой Хилла имеем:

$$\frac{2}{\rho} + 3\xi'^2 - C = 0. \quad (2.360)$$

Отсюда следует, что каждому значению ξ' соответствует одно значение ρ , а каждому значению ρ соответствуют либо два значения ξ' , то есть $\pm \xi'$, либо ни одного. Поэтому граничная кривая является симметричной относительно оси η' . Величина ξ' ограничена пределами:

$$-\sqrt{\frac{C}{3}} < \xi' < \sqrt{\frac{C}{3}}. \quad (2.361)$$

При $\eta' \rightarrow \infty$ величина $\xi' \rightarrow \infty$. Граничная кривая пересекает ось η' в точках

$$\eta' = \pm \frac{2}{C}. \quad (2.362)$$

Точки пересечения оси ξ' граничной кривой определяются из решения кубического уравнения

$$\xi'^3 - \frac{1}{3} C \xi' + \frac{2}{3} = 0. \quad (2.363)$$

Если C очень велико, то есть величина $v'^2 = \xi'^2 + \eta'^2$ мала, то граничная кривая состоит из замкнутой кривой около тела m и двух ветвей, приближающихся к асимптотам, определяемым

неравенством (2.361) (рис. 2.83, а). По мере уменьшения C (v' увеличивается) замкнутая внутренняя кривая расширяется (то есть все большая область около m становится разрешенной для движения спутника), а внешние ветви перемещаются к m (то есть граница устойчивости орбиты уменьшается). Наконец, внутренняя и внешняя кривые сливаются при $C_1 = 3(3)^{1/3} = 4,326$. Соответствующими корнями уравнения (2.363) будут:

$$\xi'_{1,2} = \pm \frac{1}{3^{1/3}} = \pm 0,6934. \quad (2.364)$$

Эти точки пересечения совпадают с точками либрации L_1, L_2 системы тел $M - m$ (рис. 2.83, б). При дальнейшем уменьшении

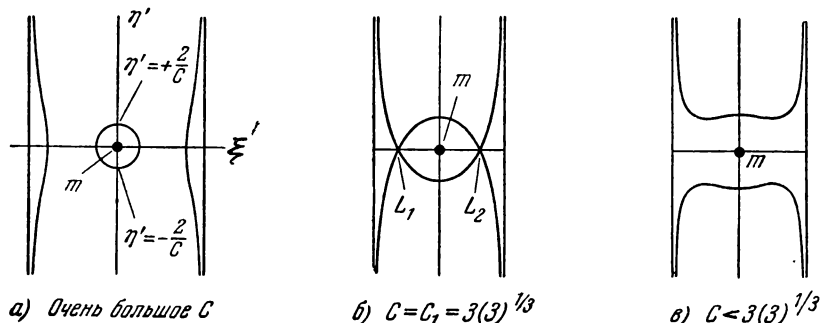


Рис. 2.83. Условия устойчивости орбит около тела с меньшей массой в системе из двух тел с конечными массами.

C замкнутая часть граничной кривой исчезает и остаются две отдельные разомкнутые ветви (рис. 2.83, в). Другими словами, если $v' > v'_1$ (где v'_1 — скорость, соответствующая значению C_1), то орбита спутника перестает быть устойчивой.

В § 2.13 было указано на большую трудоемкость расчета точных граничных кривых, соответствующих заданным постоянным C . Однако для области значений $C \geq C_1$ эти граничные кривые близки к окружностям. Приняв круговую форму граничной кривой и для той же орбиты радиуса ρ рассчитав C в направлениях на различные точки (ξ', η') , по вариации C можно судить о правомерности допущения о круговой форме граничной кривой. Таким методом можно быстрее получить уточненное приближение для расстояния до граничной кривой в определенном направлении, соответствующей постоянному значению C . Обычно определение ρ для C_1 в нескольких направлениях позволяет найти наименьший радиус области, внутри которой орбита еще устойчива, то есть частица не может покинуть цент-

ральное тело. Орбитальная скорость частицы во вращающейся системе координат при $C > C_1$ может быть найдена по формуле

$$v' \approx \sqrt{\frac{2m^*}{\rho}}, \quad (2.365)$$

которая получается из второго уравнения (2.310). Приближенное значение C для различных радиусов орбит ρ можно вычислить, используя выражения (2.265), (2.316) и соотношение $v'^2 = 2\Phi - C$. Таким образом оказывается возможным приближенно определить величину ρ , для которой наступает критическое значение C_1 . Зона устойчивых орбит спутника целиком находится внутри окружности найденного радиуса ρ . Для Луны $\rho = 0,14D \approx 8,6r_{00} \approx 54\,800$ км.

Т а б л и ц а 2.12

Расстояния коллинеарных точек либрации от планет *)

	L_1	L_2	L_3
Меркурий	0,0034	0,0034	$(2 \div 7) \cdot 10^{-8}$
Венера	0,0093	0,0093	$(2 \div 1,43) \cdot 10^{-6}$
Земля	0,0101	0,0101	$(2 \div 1,78) \cdot 10^{-6}$
Марс	0,0048	0,0048	$(2 \div 1,9) \cdot 10^{-7}$
Юпитер	0,0668	0,0698	$(2 \div 5,57) \cdot 10^{-3}$
Сатурн	0,0450	0,0464	$(2 \div 1,67) \cdot 10^{-4}$
Уран	0,0242	0,0246	$(2 \div 2,6) \cdot 10^{-5}$
Нептун	0,0257	0,0261	$(2 \div 3) \cdot 10^{-5}$

*) В качестве единицы измерения всех расстояний принят средний гелиоцентрический радиус орбиты соответствующей планеты.

Для астронавтики представляют интерес орбиты спутников около Луны, удаленные от ее центра на расстояния порядка $1800 \div 9000$ км, то есть находящиеся в области устойчивых орбит. Необходимое расстояние от границы внутрь области зависит от требуемого времени, в течение которого орбита устойчива. По-видимому, на расстояниях $0,03D$ или $0,06D$ орбита спутника остается устойчивой практически неограниченное время. По мере приближения к границе зоны устойчивости возмущения от центрального тела M (в данном случае от Земли) могут заставить спутник Луны покинуть зону устойчивости и превратиться в спутник Земли. Подобную ситуацию можно сравнить

с переносом чашки с кофе. Теоретически чашка может быть наполнена до самого края. Однако возмущения при переносе вызывают распыливание части содержимого. Чем меньше наполнена чашка, тем дольше можно нести ее, пока комбинация возмущений не вызовет распыливания части содержимого. При наполнении чашки ниже определенного уровня никакая комбинация возмущений (возможная при нормальном переносе) не может вызвать распыливания содержимого, то есть условия становятся устойчивыми на неограниченное время. Применительно к спутнику Луны эти условия требуют расстояния порядка половины расстояния до точки L_1 или меньше. При этом соответствующая продолжительность устойчивости орбиты превосходит пределы, имеющие практическое значение для астронавтики. Подобные рассуждения применимы и к спутникам планет.

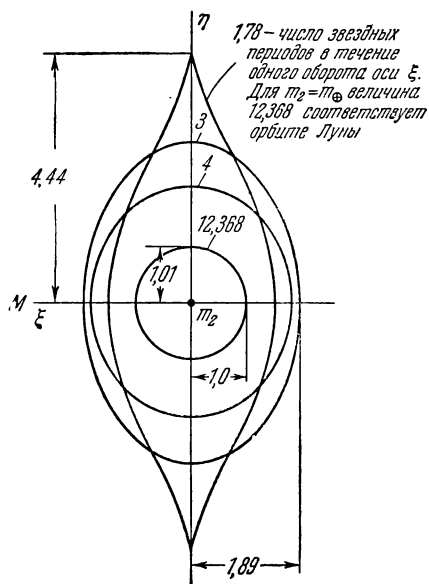


Рис. 2.84. Периодические орбиты вблизи тела m_2 .

скому радиусу орбиты планеты, и поэтому не представляют интереса при рассмотрении вопроса об области устойчивости орбит спутников планет.

В начале § 2.12 было указано, что периодические орбиты могут быть разбиты на две главные группы, одна из которых охватывает бесконечно малые изменения положения частицы относительно тел системы, а вторая — конечные изменения. Периодические орбиты около одной из конечных масс системы относятся ко второй группе. При отыскании периодических решений дифференциальных уравнений (2.358) можно воспользоваться численным интегрированием, рассчитывая орбиту при изменяемых начальных условиях и добиваясь прохождения орбиты через начальную точку (периодическая орбита). Можно

воспользоваться другим методом: разложить ξ' и η' в уравнениях (2.358) в периодические ряды и с помощью уравнений (2.358) попытаться отыскать коэффициенты этих рядов.

Хилл воспользовался вторым путем и получил уравнения для группы периодических орбит около тела m , которые под прямым углом пересекали оси ξ' и η' и имели синодический период (то есть период по отношению к заданной точке во вращающейся системе координат) меньший, чем период оси ξ . На рис. 2.84 приведены некоторые из орбит, рассчитанных Хиллом. После одного оборота они возвращаются в исходное положение.

2.18. Устойчивость орбит в долунном и залунном пространствах

В начале § 2.17 уже отмечались причины особой сложности учета возмущений в системе «Земля — Луна». Однако по аналогии с простым суммированием малых возмущений, принимаемых за независимые, можно в первом приближении две системы, наложение полей которых создает большие трудности, изучать в отдельности. Речь идет о системах «Земля — Луна» и «Земля — Солнце». Первая определяет устойчивость орбит в долунном пространстве, вторая — устойчивость орбит в залунном пространстве (рис. 2.85). Сравнение размеров показывает, что область устойчивости орбит спутников Луны очень мала. Любой маневр захвата должен быть произведен в небольшой области между точками L_1 и L_2 . Для возвращающихся к Земле межпланетных аппаратов имеются значительно большие области устойчивых долунных орбит и области захвата. По причинам, отмеченным в предыдущем параграфе, необходимо также учитывать фактор времени. Орбиты, подобные 24-часовой орбите, имеющие особо важное значение в астронавтике, относятся к орбитам с большим временем существования. Они устойчивы неограниченное время ($r/D \approx 0,11$). Орбиты радиуса, приближающегося к $r = 0,8D$, устойчивы в течение очень малого промежутка времени (очевидно, в течение нескольких оборотов). Даже подобное малое время устойчивости орбит может быть использовано в астронавтике, в особенности если космический аппарат обладает определенной маневренностью.

Космические корабли, возвращающиеся на Землю, могут при необходимости «зацепиться» за Землю, используя даже еще больший район залунных орбит. Здесь опять подразумеваются крайне ограниченные периоды устойчивости, позволяющие использовать кривые C_1 системы «Солнце — (Земля — Луна)». Для задач, требующих больших периодов устойчивости, область залунного пространства соответственно сокращается по двум

причинам. Внутренняя часть области сразу за кривой C_1 подвержена сильным периодическим возмущениям со стороны Луны. Внешний район области, примыкающий к $(C_1)_\odot$, чрезвычайно чувствителен к возмущениям, вызываемым эллиптичностью земной орбиты. Поэтому уменьшение периода устойчивости

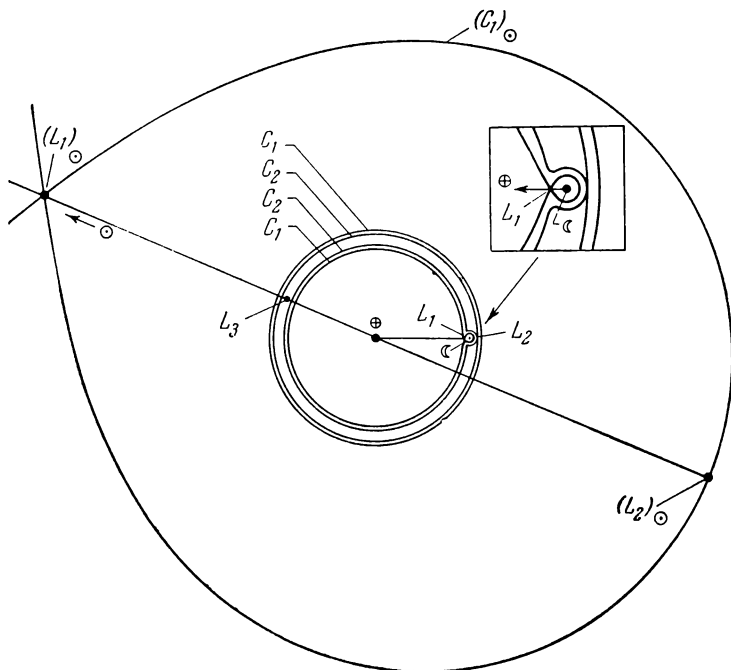


Рис. 2.85. Граничные кривые системы «Земля — Луна» и кривые C_1 системы «Солнце — (Земля — Луна)» в одинаковом масштабе.

наступит гораздо раньше достижения орбитальных расстояний, соответствующих $C_\odot \approx (C_1)_\odot$. Во всяком случае, получение орбиты (спутника или космического корабля по его возвращении из межпланетного полета) в залунном пространстве является более тонкой задачей, чем получение орбиты в долунном пространстве при $r \approx 0,4D$ или меньше.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Из-за обилия обозначений, потребовавшихся в настоящей главе, здесь приводятся лишь основные из них. Многие обозначения использовались для различных целей, и поэтому их разъяснение приводилось в тексте.

- A — площадь поперечного сечения;
- A — экваториальный момент инерции сжатого сфероида;
- a — ускорение;
- a — экваториальный радиус Земли; ;
- a — большая полуось;
- a' — азимут;
- b — полярный радиус Земли;
- C — постоянная Кеплера орбиты (постоянная закона площадей);
- C — полярный момент инерции сжатого сфероида;
- c — $-mQ$ — постоянная, входящая в уравнение (2.229);
- c' — $g_{00}\rho_{00}/2$ — параметр плотности;
- D — коэффициент четвертой гармоники (см. таблицу 2.4);
- D — сила лобового сопротивления;
- D — расстояние «Земля — Луна»;
- D^* — параметр лобового сопротивления [см. выражение (2.161)];
- d — расстояние от кажущегося центра притяжения до Земли (см. рис. 2.69);
- e — эксцентриситет;
- F — вообще сила; аэродинамическая сила;
- g — ускорение силы притяжения;
- h — постоянная энергии орбиты;
- i — наклонение плоскости орбиты к плоскости отсчета или к плоскости другой орбиты;
- J — коэффициент второй гармоники (см. таблицу 2.4);
- K — гравитационный параметр;
- k^2 — постоянная Гаусса;
- L — точка либрации;
- L — подъемная сила;
- L^* — параметр подъемной силы [см. выражение (2.162)];
- M — средняя аномалия;
- m — масса;
- m^* — отношение массы Луны к массе Земли;
- N — нормальная сила;
- n — количество витков (оборотов);
- p — фокальный параметр;
- Q — $r_0 - K/v_0^2$ — постоянная при определении времени существования спутника [см. выражение (2.222)];
- R — радиальная сила;
- r — радиальное расстояние от центра притяжения;
- r^0 — среднее расстояние от сжатого центрального тела;
- r_0 — другое обозначение для экваториального радиуса Земли;

- r_{00} — средний радиус поверхности Земли (или другого небесного тела);
- S — трансверсальная сила;
- S — характерная площадь, входящая в выражение для подъемной силы;
- s — расстояние от барицентра системы «Земля — Луна»;
- s — длина участка орбиты;
- T — тангенциальная сила;
- T — период обращения;
- T_{sid} — звездный (сидерический) период обращения;
- T_{Ω} — период между двумя последовательными прохождением восходящего узла спутником, движущимся по прецессирующей орбите;
- T_{pr} — период прецессии;
- t_{12} — время полета между точками 1 и 2 орбиты;
- $t_{P\Omega}$ — время полета от перицентра до восходящего узла;
- t_t — продолжительность перехода;
- t_a — продолжительность активного участка вывода от старта до момента первого выключения двигательной установки;
- t_{δ} — продолжительность активного участка при переходе с орбиты ожидания на переходную орбиту;
- t_{π} — продолжительность пассивного полета по орбите ожидания;
- t_{τ} — продолжительность пассивного полета по переходной орбите между исходной орбитой и орбитой цели;
- t_{ω} — продолжительность активного участка при переходе с переходной орбиты на орбиту цели (спутника);
- v — скорость;
- v_E — энергетическая скорость;
- W — вес;
- x — дальность;
- y — высота;
- α — угол атаки;
- α — прямое восхождение;
- α_{pr} — угол, на который поворачивается плоскость орбиты при прецессии за определенный промежуток времени [см. выражение (2.72)];
- β — отрицательная константа в выражении для плотности (2.219);
- Δv_{id} — приращение идеальной скорости;
- Δv_a — импульсное изменение скорости за время t_a ;
- Δv_{δ} — импульсное изменение скорости за время t_{δ} ;
- Δv_{ω} — импульсное изменение скорости за время t_{ω} ;
- δ — угловая дальность;

- δ — склонение спутника над плоскостью экватора;
 $\varepsilon = \pi + \sigma$ — средняя долгота спутника на орбите в эпоху t_0 , равная средней долготе средней аномалии σ (см. рис. 1.6.11);
 ζ — расстояние по дуге большого круга между стартовой позицией и плоскостью орбиты спутника (угол склонения по отношению к плоскости орбиты);
 $\dot{\eta}$ — мгновенная угловая скорость движения по орбите (в отличие от среднего движения μ);
 η — истинная аномалия;
 η_{π} — центральный угол, проходимый космическим аппаратом в пассивном полете по орбите ожидания;
 η_{π} — центральный угол, проходимый аппаратом в пассивном полете по переходной орбите;
 θ — угол между касательной к орбите и местным горизонтом;
 i — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора;
 $\kappa = g_{00} D^* \rho_0 r_0^2$ — параметр при определении времени существования спутника [см. четвертую формулу (2.214)];
 λ — географическая долгота;
 μ — среднее движение;
 $v = v/v_c$ — отношение скорости к местной круговой скорости;
 $\xi\eta$ — вращающаяся система координат в системе «Земля — Луна»;
 $\pi = \Omega + \omega$ — долгота перигея, измеренная от точки весеннего равноденствия;
 ρ — плотность атмосферы;
 ρ — радиальное расстояние от Луны;
 $\rho^* = \rho/\rho_{00}$ — отношение плотностей;
 $\sigma = \mu t_P \Omega$ — средняя аномалия спутника в узле;
 φ — географическая широта;
 ψ — возмущающий потенциал вследствие сжатия Земли;
 ψ — угол положения тела на орбите относительно определенного направления отсчета;
 ω — долгота перигея, измеряемая от восходящего узла (аргумент перигея);
 ω — угловая скорость; угловая скорость вращения Земли (см. таблицу 2.4);
 Ω — долгота восходящего узла, измеряемая от точки весеннего равноденствия.

Индексы (нижние):

- A — относится к апогею;
 a — трансверсальный;
 $ball$ — баллистический;

- c — круговой;
- D — относится к лобовому сопротивлению;
- D — начальный, исходный; относится к начальной точке;
- d — относится к опорной орбите;
- kin — кинетический;
- L — стартовый; относится к стартовой позиции;
- min — минимум;
- n — нормальный;
- P — относится к перигею;
- p — параболический;
- pot — потенциальный;
- pr — значение параметра при прецессии;
- r — радиальный;
- s — относится к орбите спутника;
- T — цель; орбита цели;
- t — переходный;
- φ — относится к широте φ ;
- π — относится к орбите ожидания;
- τ — относится к переходной орбите;
- 00 — условия на поверхности;
- 0 — начальное значение;
- 1 — значение в момент выключения двигательной установки.

Индекс (верхний):

- * — значение параметра в вершине траектории.

ЗАДАЧИ

1. Предполагается произвести инспекцию спутника баллистическим аппаратом со специальными приборами при его пролете в непосредственной близости от спутника в точке встречи. Точка встречи находится в вершине баллистической траектории ($r^*/r_1=1,3$) на расстоянии 14825 км от начальной точки. Начальный угол траектории $\theta_1=8^\circ$, высота начальной точки $y_1=185$ км. Определите относительную скорость двух рассматриваемых тел в вершине траектории и время полета баллистического аппарата от начальной точки до вершины траектории. Допущения: орбита спутника круговая, плоскость траектории баллистического аппарата находится в плоскости орбиты спутника, направления движения баллистического аппарата и спутника совпадают.

2. Определите отношение энергетической скорости к орбитальной скорости для следующих орбит спутников Земли: а) круговой орбиты высотой 1850 км; б) эллиптической орбиты высотой в перигее $y_P=242$ км и высотой в апогее $y_A=3700$ км.

3. Орбита спутника проходит над наблюдателем на высоте 556 км. В момент появления спутника угол места линии визирования от наблюдателя составляет 5° . Какова дальность до проекции спутника на поверхность Земли и какова дальность до спутника в момент его появления?

4. При условиях задачи 1 определите величины отклонений r^*/r_1 и v^*/v_1 , соответствующие ошибке в начальной скорости $\Delta v_1=1$ м/сек, при отсутствии

ошибки в угле бросания ($\Delta\theta_1=0$); определите отклонения в величинах r^*/r_1 и v^*/v_1 , соответствующие ошибки в угле бросания $\Delta\theta_1=0^\circ,01$, при отсутствии ошибки в величине начальной скорости ($\Delta v_1=0$).

5. Спутник движется по круговой орбите на высоте 556 км. Рассчитайте звездный период обращения, количество звездных витков за средние солнечные сутки, синодический период и количество синодических витков по отношению к точке на экваторе, считая орбиту экваториальной. Определите в случае экваториальной орбиты, через какие интервалы времени будут наступать взаимные расположения спутника и стартовой позиции, обеспечивающие встречу со спутником при выводе космического аппарата в точку встречи по заданной траектории, и количество подобных расположений за 4 сут после старта, за 24 сут после старта и за 216 сут после старта.

6. Спутник движется по круговой орбите высотой 556 км. Наклонение орбиты к плоскости экватора $i=28^\circ,5$. Стартовая позиция расположена на широте $\varphi=28^\circ,5$ (примерно на широте Атлантического полигона, Флорида). Определите возможность достижения спутника по компланарной эллиптической орбите (угловая дальность перехода 180°).

7. Орбита спутника и стартовая позиция те же, что в условиях предыдущей задачи. Вычислите угол, определяющий положение спутника относительно начальной точки, для первых двух недель полета (14 суток). Определите тип непрерываемого компланарного вывода, осуществимого хотя бы один раз в течение каждых суток. При этом оцените диапазон углов, определяющих положение спутника относительно стартовой позиции, для следующих типов вывода:

а) Предельный случай баллистического вывода: $\theta_1=20^\circ$ (следует учитывать, что с увеличением θ_1 растет требуемая величина начальной скорости); продолжительность активного участка $t_a=5$ мин; конец активного участка удален от старта на 666 км.

б) Полностью активный вывод: $t_a=6,5$ мин; точка выключения двигательной установки расположена на орбите цели на расстоянии 1665 км от точки старта.

в) Эллиптический вывод: $t_a=6$ мин; начальная точка расположена на расстоянии 900 км от точки старта; угол, определяющий положение спутника по отношению к начальной точке для пассивной фазы полета $\eta_\tau=180^\circ$, найден в предыдущей задаче; эллиптический переход при $\eta_\tau>180^\circ$ уменьшает положительный угол, определяющий положение спутника, а переход при $\eta_\tau<180^\circ$ несколько увеличивает его (по крайней мере в начале полета) по сравнению с переходом с $\eta_\tau=180^\circ$.

При решении этого примера предельный отрицательный угол, определяющий положение спутника по отношению к начальной точке, принять таким же, как в описанном выше баллистическом выводе, а его предельное положительное значение принять равным $6^\circ,4$. Предполагается, что маневр встречи осуществляется при помощи импульсов. При определении положения спутника предполагается, что в начальный момент времени проекция спутника на поверхность Земли совпадает с точкой старта.

8. Орбита спутника и стартовая позиция те же, что в условиях задачи 5. Необходимо осуществить встречу со спутником с использованием орбиты ожидания. Космический аппарат выведен на круговую орбиту ожидания высотой 185 км, компланарную с орбитой спутника. Для заданной переходной орбиты рассчитайте максимально возможный период нахождения космического аппарата на орбите ожидания.

9. Спутник движется по эллиптической орбите высотой в перигее $y_p=230$ км и высотой в апогее $y_a=740$ км. Наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора $i=35^\circ$. Сравните звездный период обращения с периодом между двумя последовательными прохождениями восходящего узла, считая Землю сжатым сфероидом.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. A. Ehricke, Ascent of Orbital Vehicles, *Astronautica Acta*, vol. 11, Fasc 4, pp. 175—190 (1956).
2. E. W. Brown, *An Introductory Treatise on Lunar Theory*, Cambridge University Press, 1896.
3. D. Brouwer, The Motion of a Particle with Negligible Mass under the Gravitational Attraction of a Spheroid, *Astronom. J.*, vol. 51, p. 223 (1946).
4. L. Spitzer, Jr., Perturbations of a Satellite Orbit, *J. Brit. Interplan. Soc.*, vol. 9, p. 131 (1950).
5. R. J. Davis, F. L. Whipple, and J. B. Zirkner, The Orbit of a Small Earth Satellite, in *Scientific Uses of Earth Satellites*, J. A. Van Allen (ed.), Chapman & Hall, 1956.
6. L. Blitzter, M. Weisfeld, and A. D. Wheelon, Perturbations of a Satellite's Orbit Due to the Earth's Oblateness, *J. Appl. Phys.*, vol. 27, No. 10, pp. 1141—1149, 1956.
7. L. Blitzter and A. D. Wheelon, Oblateness Perturbation of Elliptical Satellite Orbits, *J. Appl. Phys.*, vol. 28, p. 279 (February 1957).
8. L. Blitzter, Effect of Earth's Oblateness on the Period of a Satellite, *Jet Propulsion*, vol. 27, p. 405 (April 1957).
9. H. G. L. Krause, Die Saekularstoerungen einer Aussenstationsbahn, Third International Congress, Astronautical Congress, Stuttgart, September 1952.
10. H. G. L. Krause, Die saekularen und periodischen Stoerungen der Bahn eines kuenstlichen Erdsatelliten, Seventh International Astronautical Congress, Rome, September 1956.
11. C. L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, W. De Gruyter, Berlin, 1927.
12. F. R. Moulton, *An Introduction to Celestial Mechanics*, Macmillan, 1914, pp. 282—294.
13. D. F. Lawden, *J. Brit. Interplan. Soc.*, vol. 13, No. 3 (1954).
14. M. v. Laue, *Die Relativitaetstheorie*, vol. II, F. Vieweg, Braunschweig, 1952.
15. K. A. Ehricke, Some Basic Aspects of Operations in Cislunar and Lunar Space, Paper presented at the Twenty-fifth Anniversary Annual Meeting of the American Rocket Society, Chicago, November 1955; ARS Paper No. 235A-55.
16. E. Saenger, The Prospects of Jet Reaction Flight, *Interavia*, vol. IV (July 1949).
17. K. A. Ehricke, The Establishment of Large Satellites by Means of Small Orbital Carriers, Probleme aus der Astronautischen Grundlagenforschung, Proceedings of the Third International Congress, H. H. Koelle (ed.), Stuttgart, October 1952; cf. also American Rocket Society ARS Preprint No. 69-52, 1952.
18. N. V. Petersen, Lifetimes of Satellites from Near-Circular and Elliptic Orbits, American Rocket Society, *Jet Propulsion*, vol. 26, No. 5 (May 1956).
19. S. F. Singer, Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE), Part II, «Orbits and Lifetimes of Minimum Satellites», *Astronautica Acta*, vol. 11, Fasc. 3 (1956).
20. K. A. Ehricke, The Satelloid, *Astronautica Acta*, vol. 11, Fasc. 2 (1956).
21. F. M. Perkins, An Analytical Solution for Flight Time of Satellites in Eccentric and Circular Orbits, *Astronautica Acta*, vol. IV, Fasc. 2 (1958).

22. K. A. Ehricke, Cislunar Orbits, Convair Report AZP-004 (March 30, 1957).
 23. R. J. Havens, R. T. Koll and H. L. Gow, The Pressure, Density, and Temperature of the Earth's Atmosphere to 160 Kilometers, J. Geophys. Res., vol. 57, p. 59 (1952).
 24. K. A. Ehricke, Analysis of Orbital Systems, Proceedings of the Fifth International Astronautical Congress, Innsbruck, Austria, September 1954.
 25. G. Grimmer, Analysis of Temperature, Pressure, and Density of the Atmosphere Extending to Extreme Altitudes, The RAND Corp., Santa Monica, Calif., November 1948.
 26. R. M. L. Baker, Jr., Survey of Astrodynamics 1960, American Rocket Society, Preprint 1475-60. This is a most extensive survey, covering some 260 papers on space flight dynamics published to September 1960.
-

ГЛАВА 3

ОРБИТАЛЬНЫЕ МАНЕВРЫ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

3.1. Введение

Настоящая глава знакомит читателя с основами механики космических полетов в поле центральной силы. Полученные в данной главе уравнения будут необходимы для решения ряда задач по оптимизации траекторий. В основу изложения положено движение в поле центральной силы, то есть движение при отсутствии всякого рода возмущающих сил. Последовательно рассматриваются переходы между компланарными и некомпланарными орбитами, анализ ошибок маневра в поле центральной силы, а также вывод космического аппарата с поверхности центрального тела на заданную орбиту в поле центральной силы.

Двумя основными типами навигационных задач в поле центральной силы являются: *переход с орбиты на орбиту* и *изменение орбиты*. При отсутствии возмущений орбита небесного тела неизменна в инерциальном пространстве. Космический аппарат снабженный двигательной установкой, может создавать искусственные возмущения либо импульсами (то есть кратковременными периодами работы двигательной установки, приводящими к скачкообразному изменению скорости), либо более продолжительными периодами работы двигательной установки. Подобные искусственные возмущения могут быть использованы как для *коррекции существующей орбиты*, так и для *перехода космического аппарата на другую орбиту*. В обоих случаях требуется *изменение орбиты*. В первом случае *изменением орбиты* непосредственно достигается требуемая орбита. При этом небольшие изменения орбиты можно рассматривать как коррекцию существующей орбиты. При больших изменениях уместнее говорить об изменении существующей орбиты. Во втором случае (в случае перехода на другую орбиту) изменение орбиты преследует цель перевода космического аппарата на *переходную орбиту*, двигаясь по которой он *достигает требуемой орбиты*. После

этого необходимо второе изменение орбиты, чтобы аппарат стал двигаться по требуемой орбите. Поэтому, прежде чем исследовать вопросы *перехода между орбитами*, нам придется рассмотреть вопрос об *изменении орбиты*.

3.2. Кинематика изменения орбиты

Изменение орбиты может быть произведено либо изменением величины скорости, либо изменением направления скорости (либо одновременным изменением и того и другого). Различают *плоское*, или *компланарное*, изменение орбиты и *пространственное*, или *некомпланарное*, изменение орбиты. К плоскому случаю относят такое изменение орбиты, при котором плоскость измененной орбиты совпадает с плоскостью первоначальной орбиты. Пространственный случай предполагает изменение наклонения орбиты. Кинематически оба случая являются одинаковыми. Действительно, во всех случаях требуемое изменение скорости определяется как разность между вектором скорости, получаемым после изменения орбиты, и вектором скорости, имеющимся до изменения орбиты. При этом предполагается, что изменение скорости происходит в виде *импульса скорости*, то есть требуемое изменение скорости по величине и направлению происходит мгновенно. Это допущение позволяет сравнительно просто изучить кинематику изменения орбиты и установить простые зависимости для определения требуемого изменения вектора скорости.

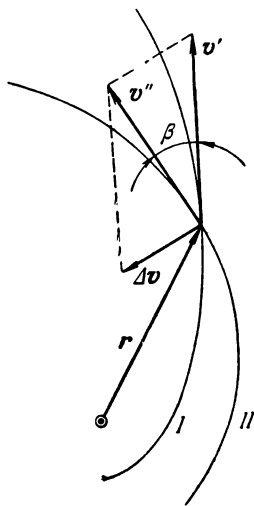


Рис. 3.1. Пересечение двух орбит, лежащих в одной плоскости.

Рассмотрим (рис. 3.1) плоский случай изменения орбиты, включающий изменение направления скорости на угол

$$\beta = \theta' - \theta'', \quad (3.1)$$

где θ' и θ'' — соответственно углы, образованные векторами скоростей с трансверсалью в точке изменения орбиты до и после маневра. Для определения требуемой величины импульса скорости имеем:

$$\Delta v_\beta = \sqrt{v'^2 + v''^2 - 2v'v'' \cos \beta}, \quad (3.2a)$$

$$\Delta v_\beta = \sqrt{v'^2 + v''^2 - 2v'v'' (\sin \theta' \sin \theta'' + \cos \theta' \cos \theta'')} \quad (3.2b)$$

или

$$\Delta v_\beta = v' \sqrt{1 + \left(\frac{v''}{v'}\right)^2 - 2 \frac{v''}{v'} \cos \beta}, \quad (3.3a)$$

$$\Delta v_\beta = v' \sqrt{1 + \left(\frac{v''}{v'}\right)^2 - 2 \frac{v''}{v'} (\sin \theta' \sin \theta'' + \cos \theta' \cos \theta'')}. \quad (3.3b)$$

При малых углах β зависимости (3.2) и (3.3) упрощаются:

$$\Delta v \approx |v' - v''|. \quad (3.4)$$

Эта зависимость справедлива и для случая, при котором не требуется изменения направления скорости.

Если требуется изменить только направление скорости, то есть $v' = v'' = v$, то из (3.3a) получим:

$$\begin{aligned} \Delta v_\beta &= v \sqrt{2(1 - \cos \beta)} = \\ &= 2v \sin \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (3.5a)$$

Последняя зависимость при малых β упрощается:

$$\Delta v_\beta \approx v\beta. \quad (3.5b)$$

На рис. 3.2, а, б, в показаны различные случаи изменения орбиты в плоскости, охватываемые приведенными зависимостями.

Полученные зависимости оказываются пригодными и для случая изменения орбиты, связанного с изменением наклона орбиты (рис. 3.2, г). Угол поворота плоскости орбиты в дальнейшем будем обозначать через α , что-

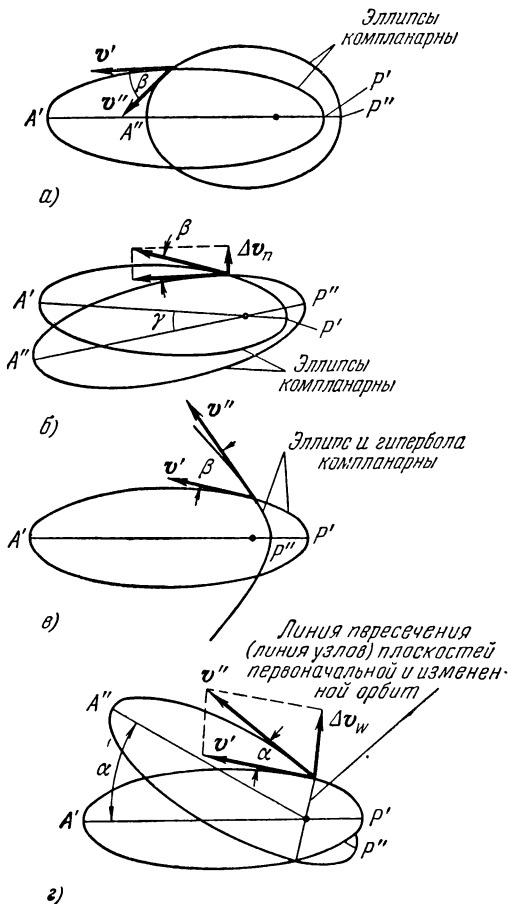


Рис. 3.2. Изменение орбиты.

бы отличать его от угла поворота в плоскости орбиты. По аналогии с предыдущими равенствами для определения величины импульса скорости, необходимого для поворота плоскости орби-

ты на угол α , находим:

$$\Delta v_\alpha = \sqrt{v'^2 + v''^2 - 2v'v'' \cos \alpha} \quad (3.6a)$$

или при $v' = v'' = v$

$$\Delta v_\alpha = 2v \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.6b)$$

В предельном случае при $\alpha = 90^\circ$ и $v' = v'' = v$ будем иметь:

$$\Delta v_\alpha = v \sqrt{2},$$

то есть необходимая энергия для поворота плоскости круговой орбиты ($v = \sqrt{K/r}$) на 90° оказывается равной энергии для получения параболической скорости в точке приложения импульса

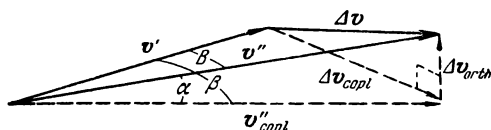


Рис. 3.3. Одновременное изменение скорости по величине и направлению в плоскости орбиты и поворот плоскости орбиты.

скорости. При $\Delta v_\alpha = v$ и $v = \sqrt{K/r}$ достигается поворот плоскости круговой орбиты на 60° .

При $v' = v'' = v$ и малых значениях α получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\Delta v_\alpha}{v}, \\ \cos \alpha &\approx 1, \\ \alpha^{(e)} &= \arcsin \left(\frac{\Delta v_\alpha}{v} \right), \\ \alpha^{(u)} &= \frac{\Delta v_\alpha}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7a)$$

и для величины импульса, нормального к плоскости орбиты,

$$\Delta v_\alpha = v \sin \alpha \approx v\alpha. \quad (3.7b)$$

В случае одновременного изменения вектора скорости в плоскости орбиты и поворота плоскости орбиты необходимая величина импульса скорости будет:

$$\Delta v_{\alpha\beta} = \sqrt{v'^2 + v''^2 - 2v'v'' (\sin \theta' \sin \theta'' + \cos \theta' \cos \theta'') \cos \alpha} \quad (3.8)$$

или, с использованием выражения (3.1),

$$\Delta v_\beta = \sqrt{v'^2 + v''^2 - 2v'v'' \cos B}, \quad (3.9a)$$

где, как следует из рис. 3.3,

$$\cos B = \cos \beta \cos \alpha. \quad (3.9b)$$

На рис. 3.4 и 3.5 приведены графики величины импульса скорости, необходимого для поворота вектора скорости в плоскости орбиты на угол β или поворота плоскости орбиты на угол α .

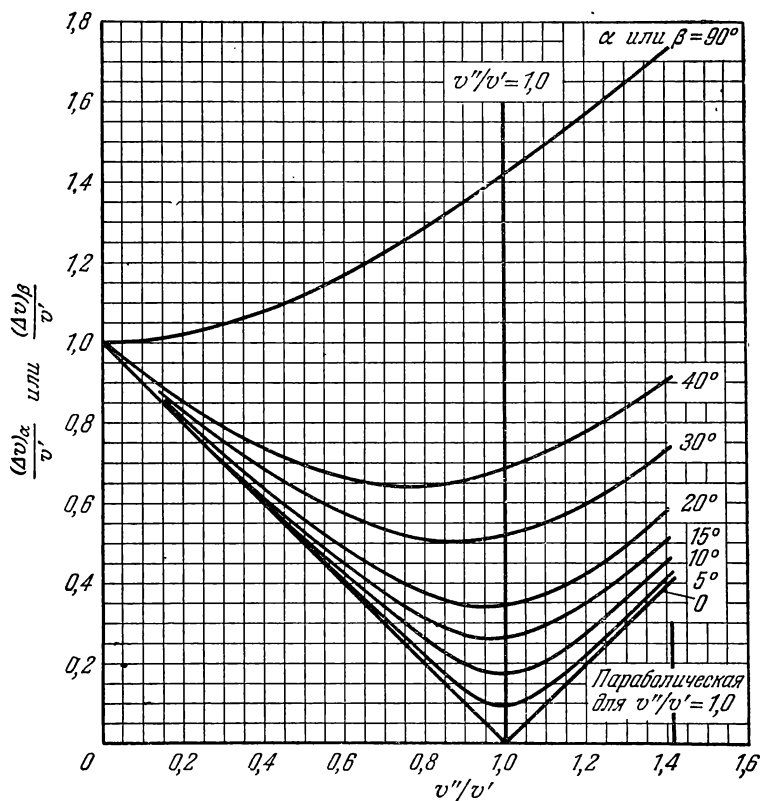


Рис. 3.4. Величина импульса скорости для изменения вектора скорости по величине и направлению (β) в плоскости орбиты или поворота (α) плоскости орбиты (показана в зависимости от отношения величин скоростей после и до маневра).

угол α . На рис. 3.6, 3.7 и 3.8 приведены графики величины импульса скорости, необходимого для *одновременного* поворота вектора скорости в плоскости орбиты на угол β и поворота плоскости орбиты на угол α . Величина импульса скорости пред-

ставлена в безразмерном виде $\Delta v/v'$, где v' — величина скорости до совершения маневра. Из анализа графиков следует, что для уменьшения величины импульса скорости, необходимого для поворота вектора скорости, он должен прикладываться в

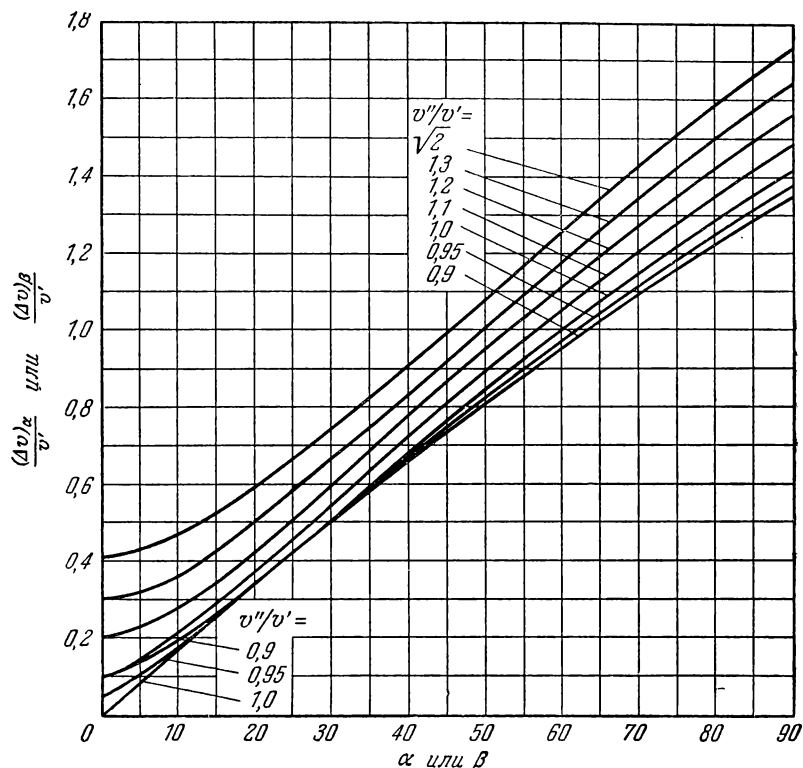


Рис. 3.5. Величина импульса скорости для изменения вектора скорости по величине и направлению (β) в плоскости орбиты или поворота (α) плоскости орбиты (показана в зависимости от отношения величин скоростей после и до маневра).

точках орбиты, соответствующих малым значениям v' или v'' и v'' , например в окрестности апоцентра эллиптической орбиты. При совершении маневра перехода на другую орбиту иногда оказывается выгодным требуемый поворот плоскости орбиты разбить на два меньших поворота в каждой точке изменения орбиты. Этот подход будет рассмотрен в § 3.5.

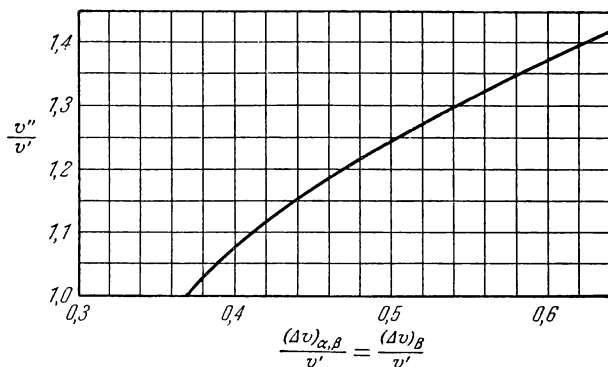


Рис. 3.6. Величина импульса скорости для одновременного поворота вектора скорости в плоскости орбиты и поворота плоскости орбиты ($\alpha = 15^\circ$).

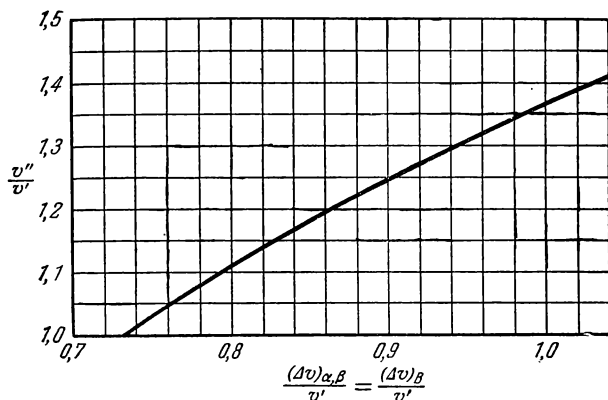


Рис. 3.7. Величина импульса скорости для одновременного поворота вектора скорости в плоскости орбиты и поворота плоскости орбиты ($\alpha = 30^\circ$).

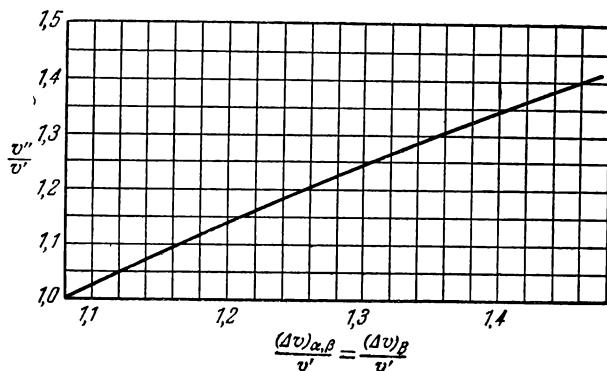


Рис. 3.8. Величина импульса скорости для одновременного поворота вектора скорости в плоскости орбиты и поворота плоскости орбиты ($\alpha = 45^\circ$).

3.3. Динамика изменения орбиты

В предыдущем параграфе анализ изменения орбиты ограничивался только рассмотрением изменения скорости по величине и направлению и тип орбиты не был оговорен. В настоящем параграфе вопрос об изменении орбиты будет рассмотрен в общем виде, то есть будет рассмотрен переход космического аппарата из любой точки заданной кеплеровой орбиты на любую другую кеплерову орбиту.

а) Общий анализ кеплеровых орбит. Текущий угол, образованный вектором скорости с местным горизонтом (то есть с

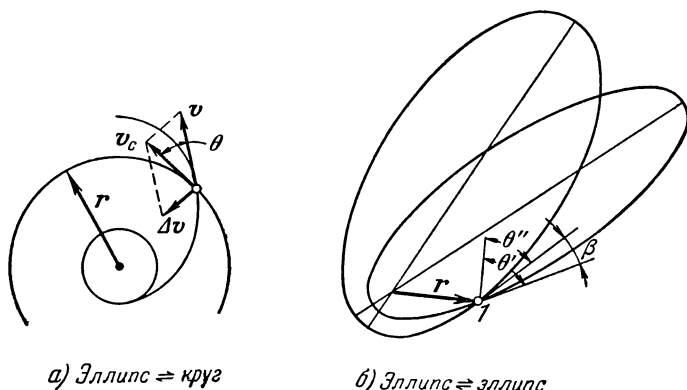


Рис. 3.9. Изменение эллиптической орбиты в круговую и эллиптической в другую эллиптическую орбиту.

трансверсалью в рассматриваемой точке), будем обозначать через θ . Угол между касательными к орбитам в точке их пересечения (то есть в точке изменения орбиты) будем обозначать через β (рис. 3.9). Тогда

$$\beta = \theta' - \theta''.$$

В зависимости от величины текущего радиуса-вектора r , величины скорости v_P в перигеентре и величины радиуса-вектора r_P в перигеентре угол θ для кеплеровых орбит может быть определен по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{\frac{|v_P^2 - 2K/r_P|}{v_P^2 r_P^2} r^2 + \frac{2K}{v_P^2 r_P^2} r - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{r/r_P}{v_P} \left[\frac{|v_P^2 - 2|}{v_P r_P} + \frac{2}{v_P} \right] - 1}, \quad (3.10a) \end{aligned}$$

где $v_p = v_p / \sqrt{K/r_p}$ — значение параметра скорости в перигентре. В зависимости от истинной аномалии η (отсчитываемой от перигентра) угол θ можно определить по следующей формуле:

$$\cos \theta = \frac{1}{v} \sqrt{1 + e \cos \eta}, \quad (3.10b)$$

где $v = v/v_c = v/\sqrt{K/r}$ — значение параметра скорости в рассматриваемой точке. Величину текущей скорости можно рассчитать по формуле

$$v = \sqrt{v_l^2 + \frac{2K}{r} - \frac{2K}{r_l}}, \quad (3.11)$$

где индекс «l» относится к любой фиксированной точке кеплеровой орбиты (например, к перигентру). Угол θ для любой кеплеровой орбиты может быть выражен через эксцентриситет e и истинную аномалию η так:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e \sin \eta}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.10c)$$

Графики этой зависимости представлены на рис. 4.20 (см. «Космический полет», т. I).

Приведем ряд полезных зависимостей, которые легко получить из соотношений, рассмотренных в первом томе настоящей серии («Космический полет», т. I):

фокальный параметр в зависимости от величины текущего радиуса-вектора r :

$$\frac{p}{r} = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} = \frac{v_a^2}{v_c^2} = v_a^2; \quad (3.12)$$

эксцентриситет (с использованием соотношения $v \sin \theta / \sqrt{K/r} = v_r/v_c = v_r$):

$$e = \sqrt{v_r^2 v_a^2 + (1 - v_a^2)^2}; \quad (3.13)$$

большая полуось (в зависимости от r ; с использованием равенства $v = v \sqrt{K/r}$):

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{|2 - v^2|} = \frac{1}{|2 - v_a^2 - v_r^2|}; \quad (3.14)$$

малая полуось:

$$\frac{b}{r} = \frac{v_a}{\sqrt{|2 - v^2|}} = \frac{v_a}{\sqrt{|2 - v_a^2 - v_r^2|}} = v_a \sqrt{\frac{a}{r}}; \quad (3.15)$$

отношение величины малой полуоси к величине большой полуоси для гиперболы в зависимости от Φ — половины угла между асимптотами:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \Phi = v_a \sqrt{|2 - v^2|} = v_a \sqrt{|2 - v_a^2 - v_r^2|}; \quad (3.16)$$

расстояние от центра притяжения до перигентра:

$$\frac{r_P}{r} = \frac{v_a^2}{1+e} = \frac{v_a^2}{1 + \sqrt{v_a^2 v_r^2 + (1 - v_a^2)^2}}; \quad (3.17a)$$

расстояние от центра притяжения до апоцентра:

$$\frac{r_A}{r} = \frac{v_a^2}{1-e}; \quad (3.17b)$$

линейный эксцентриситет:

$$\frac{c}{r} = \frac{e}{|2 - v^2|} = \frac{\sqrt{v_a^2 v_r^2 + (1 - v_a^2)^2}}{2 - v_a^2 - v_r^2}. \quad (3.18)$$

Связь между эксцентриситетом кеплеровой орбиты, текущим

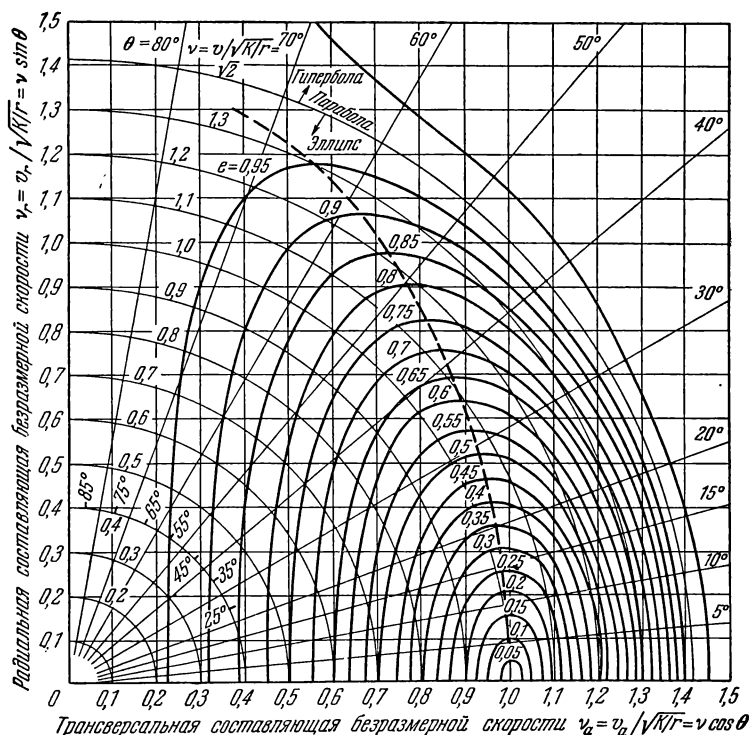


Рис. 3.10. Связь между эксцентриситетом, текущим углом θ , безразмерной величиной текущей скорости и ее трансверсальной и радиальной составляющими для кеплеровых орбит.

углом θ , безразмерной величиной текущей скорости и ее трансверсальной и радиальной составляющими показана графиками,

приведенными на рис. 3.10 (для эллиптических орбит) и на рис. 3.11 (для гиперболических орбит). Графики отношения a/r в функции ν приведены на рис. 3.12 (эллиптические орбиты) и

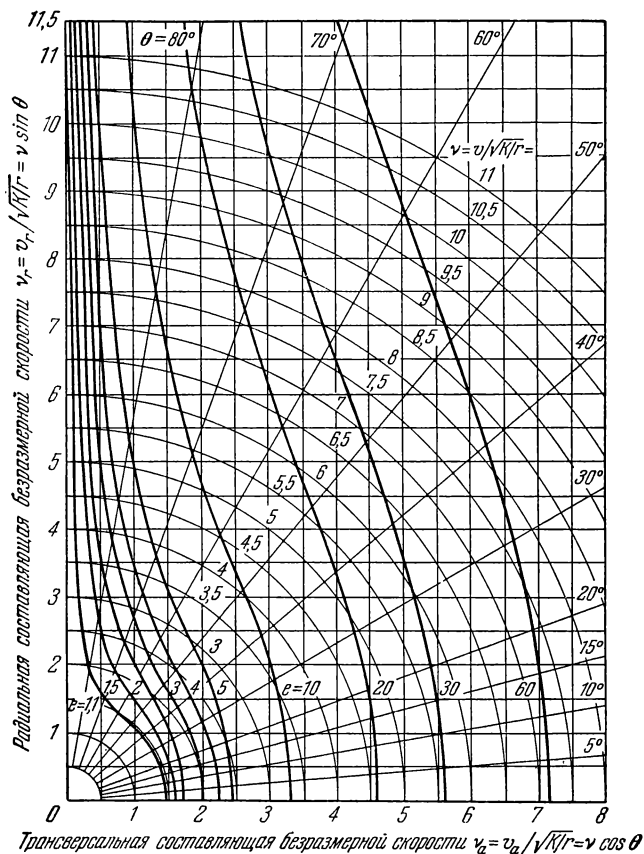


Рис. 3.11. Связь между эксцентриситетом, текущим углом θ , безразмерной величиной текущей скорости и ее трансверсальной и радиальной составляющими для гиперболических орбит.

на рис. 3.13 (эллиптические и гиперболические орбиты). На рис. 3.14 и рис. 3.15 приведены графики обратного отношения r/a , которые могут быть использованы для определения угла Φ — половины угла между асимптотами гиперболы.

Величина скорости в текущей точке может быть выражена через величину круговой скорости в некоторой фиксированной точке орбиты I (рис. 3.1):

$$\frac{v^2}{K/r_1} = 2 \frac{r_1}{r} + |v_1^2 - 2|, \quad (3.19a)$$

$$\frac{v^2}{K/r_1} = \frac{2(1 + e \cos \eta)}{v_{a,1}^2} + |v_1^2 - 2|, \quad (3.19b)$$

где v — величина скорости в текущей точке, удаленной от центра притяжения на расстояние r , а r_1 — расстояние от центра

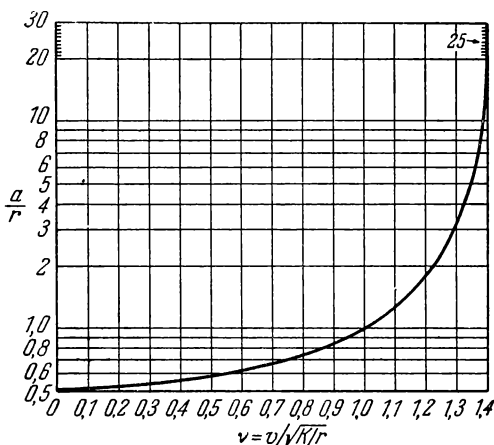


Рис. 3.12. Отношение a/r в зависимости от v для эллиптических орбит.

притяжения до некоторой фиксированной точки I (например, до точки выключения двигательной установки при выводе космического аппарата на орбиту), в которой величина местной круговой скорости равна $\sqrt{K/r_1}$, а величина скорости аппарата равна v_1 или в безразмерной форме $v_1 = v_1/\sqrt{K/r_1}$ и $v_{a,1} = v_{a,1}/\sqrt{K/r_1}$.

Трансверсальная составляющая безразмерной скорости в текущей точке, определяемой r или η , может быть представлена в виде функции от r , r_1 , e , η и $v_{a,1} = v_{a,1}/\sqrt{K/r_1}$:

$$\frac{v_a}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{r_1}{r} v_{a,1}, \quad (3.20a)$$

$$\frac{v}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{1 + e \cos \eta}{v_{a,1}}, \quad (3.20b)$$

откуда можно получить следующие выражения для определения величины безразмерной скорости в перигентре и апоцентре:

$$v_P = (v_a)_{\eta=0} = \frac{1+e}{v_{a,1}}, \quad (3.21a)$$

$$v_A = (v_a)_{\eta=180^\circ} = \frac{1-e}{v_{a,1}}. \quad (3.21b)$$

Аналогичным образом получаются выражения для радиальной составляющей безразмерной скорости:

$$\frac{v_r^2}{K/r} = 2 \frac{r_1}{r} - v_{a,1}^2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 + |v^2 - 2|, \quad (3.22a)$$

$$\frac{v_r^2}{K/r} = \frac{e^2 \sin^2 \eta}{v_{a,1}^2}. \quad (3.22b)$$

Наконец, по заданным значениям величин $v_{a,1}$ и r_1 можно

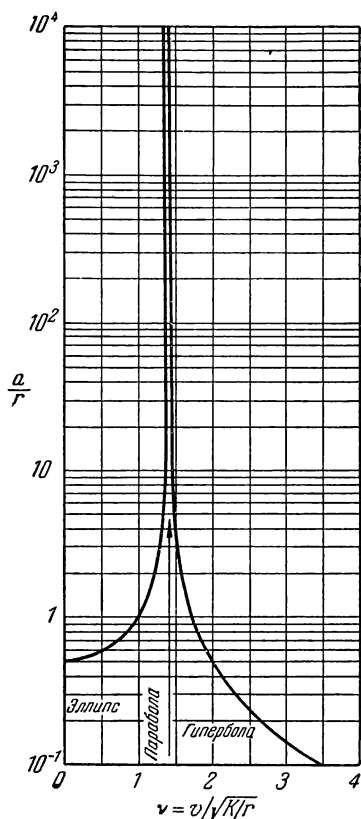


Рис. 3.13. Отношение a/r в зависимости от v для эллиптической и гиперболической орбит.

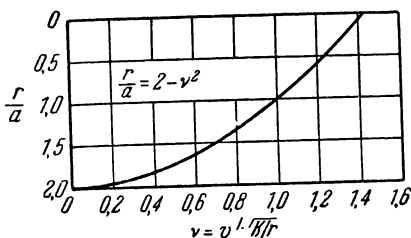


Рис. 3.14. Отношение r/a в зависимости от v для эллиптических орбит.

вычислить угол θ в текущей точке орбиты, определяемой r или η :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_r / \sqrt{K/r}}{v_{a,1}} \frac{r}{r_1} = \frac{v_r}{v_{a,1}} \frac{r}{r_1}, \quad (3.23a)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{v_{a,1}^2 v_{r,1}^2 + (1 - v_{a,1}^2)^2 \sin^2 \eta}}{1 + [v_{a,1}^2 v_{r,1}^2 + (1 - v_{a,1}^2)^2] \cos \eta}. \quad (3.23b)$$

Последнее равенство идентично равенству (3.10с).

Особый интерес представляют следующие точки *эллиптической орбиты*: конечные точки большой оси (апсиды P и A ; $\eta=0; 180^\circ$), конечные точки малой оси ($\cos \eta = -e$; $v=1$), конечные точки фокального параметра ($\eta=90^\circ; 270^\circ$; трансверсальная составляющая безразмерной скорости $v_a=1$). Точками,

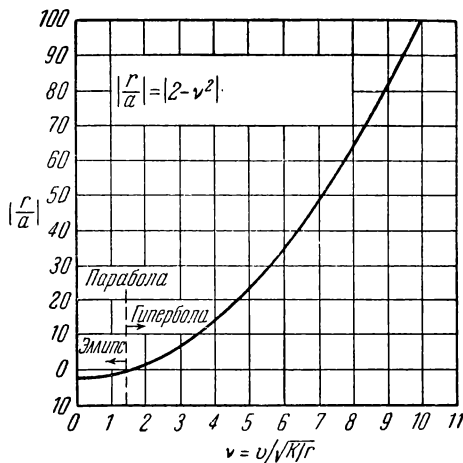


Рис. 3.15. Отношение r/a в зависимости от v для эллиптической и гиперболической орбит.

представляющими интерес на *параболической* и *гиперболической орбитах*, являются перигейная точка и конечные точки фокального параметра. Используя формулу (3.10b), получаем следующие значения для углов θ в характерных точках орбиты:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{апсиды} & \theta = 0, \\ \text{конечные точки малой оси (эллипс)} & \cos \theta = \frac{1}{v} \sqrt{1 - e^2}, \\ \text{конечные точки фокального параметра:} & \\ \quad \text{эллипс, гипербола} & \cos \theta = \frac{1}{v}, \quad \theta \leq 45^\circ, \\ \quad \text{парабола} & \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = 45^\circ. \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Для определения величины скорости в текущей точке орбиты можно воспользоваться равенством

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\eta})^2 = c_1'^2 \sin^2 \eta + \frac{K^2}{C^2} + 2c_1' \frac{K}{C} \cos \eta + c_1'^2 \cos^2 \eta,$$

обращающимся в равенство

$$v^2 = c_1'^2 + \frac{K^2}{C^2} + 2c_1' \frac{K}{C} \cos \eta, \quad (3.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1' &= e \frac{K}{C}, \\ C &= r v \cos \theta = r v_a. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Подстановка соотношений (3.26) в равенство (3.25) приводит к очень простой формуле для определения текущей скорости для любой кеплеровой орбиты:

$$v^2 = 2 - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.27a)$$

Используя последнюю зависимость, получаем следующие значения параметра скорости в характерных точках орбиты:

перигей:		(3.27b)
эллипс, гипербола	$v^2 = 1 + e,$	
парабола	$v^2 = 2;$	
апогей:		
эллипс	$v^2 = 1 - e;$	
конечные точки малой оси ($e = -\cos \eta$):		
эллипс	$v^2 = 1;$	
конечные точки фокального параметра ($r = p$):		
эллипс, гипербола	$v^2 = 1 + e^2,$	
парабола	$v^2 = 2.$	

Хотя формула (3.27a) является пригодной для расчета для любой кеплеровой орбиты, приведем еще одну полезную зависимость для определения величины орбитальной скорости в текущей точке, отнесенной к величине круговой скорости на радиальном удалении, равном большой полуоси ($r = a$). При определении гиперболических и эллиптических орбит величина большой полуоси играет особо важную роль. Для гиперболической орбиты

$$\frac{v^2}{K/a} = \frac{1 + e^2 + 2e \cos \eta}{e^2 - 1}, \quad (3.28a)$$

для эллиптической орбиты

$$\frac{v^2}{K/a} = \frac{1 + e^2 + 2e \cos \eta}{1 - e^2}. \quad (3.28b)$$

Для эллиптической орбиты круговая скорость при $r=a$ соответствует скорости на круговой орбите, пересекающей конечные точки малой оси. Для параболической орбиты подобной зависимости не существует, так как большая полуось параболической орбиты бесконечна.

Дальнейший анализ изменения орбиты в общем виде, очевидно, невозможен, так как расчет требуемых импульсов скорости будет основан на различных формулах, зависящих от типа исходной и конечной орбит. Из приведенных зависимостей наибольший интерес для расчета величины импульса скорости представляет формула (3.2а), определяющая Δv_β исходя из требуемого изменения скорости по величине и направлению. *Поворот плоскости орбиты* не связан с изменением параметров плоской орбиты; он будет рассмотрен в § 3.10. Выражение (3.3а) для целей нашего исследования перепишем в виде

$$\frac{\Delta v}{v'} = \sqrt{1 + \left(\frac{v''}{v'}\right)^2 - 2\frac{v''}{v'} \cos \beta}. \quad (3.29)$$

Последовательно рассмотрим следующие изменения орбиты:

- б) круг $\rightleftharpoons$ эллипс или круг $\rightleftharpoons$ гипербола,
- в) круг $\rightleftharpoons$ парабола,
- г) общий случай: одна кеплерова орбита $\rightleftharpoons$ другая кеплерова орбита,
- д) эллипс $\rightleftharpoons$ эллипс,
- е) эллипс $\rightleftharpoons$ парабола,
- ж) эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола,
- з) парабола $\rightleftharpoons$ гипербола.

Знак $\rightleftharpoons$ указывает на обратимость импульсного маневра в поле центральной силы.

б) Изменение орбиты «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» или «круг $\rightleftharpoons$ гипербола». Полагая $v' = v_c$, $v = v''/v_c$, $\beta = \theta$, равенство (3.29) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta v}{v_c} = \sqrt{1 + v^2 - 2v \cos \theta}. \quad (3.30)$$

Подставив вместо v^2 его выражение (3.27а) и используя получающуюся из формулы (3.10б) зависимость

$$v \cos \theta = \sqrt{1 + e \cos \eta}, \quad (3.31)$$

получим общее уравнение для импульсного изменения круговой орбиты в другую кеплерову орбиту или наоборот:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)^2 = 3 - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \eta} - 2\sqrt{1 + e \cos \eta}. \quad (3.32)$$

В равенстве (3.32) истинная аномалия η определяет точку изменения орбиты относительно перицентра измененной орбиты. Если предположить, что измененная орбита является круговой,

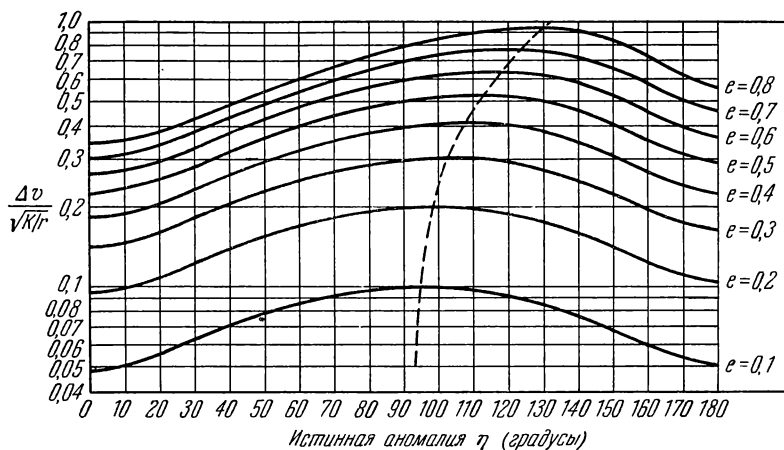


Рис. 3.16. Относительная величина импульса скорости для изменения круговой орбиты в эллиптическую.

то $\Delta v/v_c = 0$, что полностью согласуется с тем фактом, что переход с одной круговой орбиты на другую круговую орбиту невозможен при помощи лишь одного импульса. В точках, представляющих особый интерес, равенство (3.32) приобретает следующий вид:

в перигеентре ($\eta = 0$; $\theta = 0$; $v^2 = 1 + e$; для эллипса, параболы, гиперболы)

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)_P = 2(1 - \sqrt{1+e}) + e; \quad (3.33a)$$

в апоцентре ($\eta = 180^\circ$; $\theta = 0$; $v^2 = 1 - e$; только для эллипса)

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)_A = 2(1 - \sqrt{1-e}) - e; \quad (3.33b)$$

в конечных точках малой оси ($\eta = \arcsin e$; $\theta = \eta - 90^\circ$; $v^2 = 1$; только для эллипса)

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)_C = 2(1 - \sqrt{1-e^2}); \quad (3.33c)$$

в конечных точках фокального параметра ($\eta = 90^\circ$; $\theta = \arctg e$; $v^2 = 1 + e^2$; для эллипса, параболы, гиперболы)

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)_B = e^2. \quad (3.33d)$$

Последнее выражение соответствует максимуму величины импульса, в чем нетрудно убедиться, подставляя в выражение (3.32) $\cos \eta = 0$.

В случае изменения орбиты «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» верхней границей величины истинной аномалии точки изменения орбиты будет $n_l = 1/e$, что соответствует $\Delta v/v_c = \infty$. Поэтому подобное изменение орбиты необходимо производить при меньших значениях величины истинной аномалии, предпочтительнее всего в

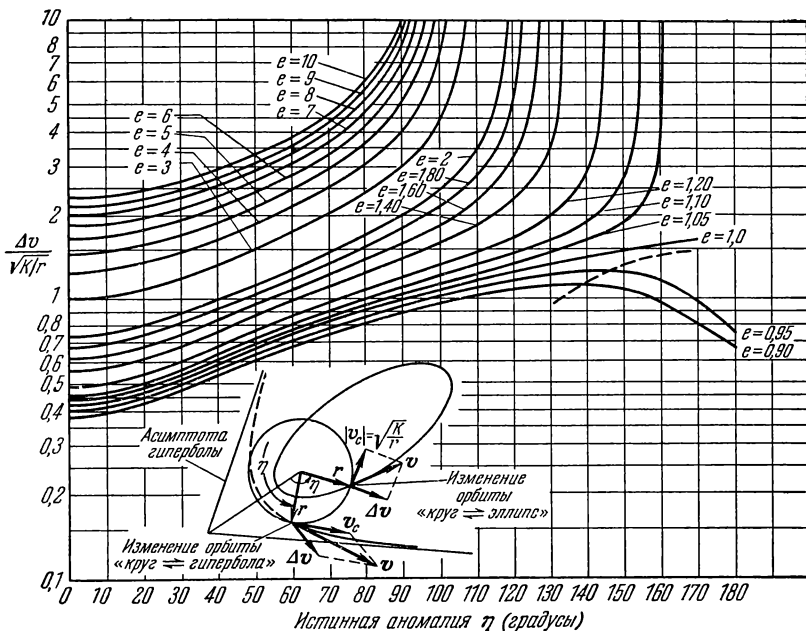


Рис. 3.17. Относительная величина импульса скорости для изменения круговой орбиты в эллиптическую, параболическую или гиперболическую орбиту.

перигентре орбиты (в вершине гиперболы). На рис. 3.16 и 3.17 приведены графики зависимости (3.32).

в) Изменение орбиты «круг $\rightleftharpoons$ парабола». Выражение (3.32) в этом случае сильно упрощается, так как $v^2 = 2$ и $e = 1$:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{1 + \cos \eta}. \quad (3.34)$$

При $\eta = 0$ получаем:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 0,17156 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta v}{v_c} = 0,414.$$

Действительно, в перигее $\Delta v = v_c(\sqrt{2} - 1)$. В конечных точках фокального параметра $(\Delta v/v_c)^2 = 1$. Графики изменения ¹⁾ $\Delta v/v_c$ в зависимости от η приведены на рис. 3.17.

г) **Общий случай: «одна кеплерова орбита $\rightleftharpoons$ другая кеплерова орбита».** *Общая зависимость* для определения требуемого импульса для изменения одной кеплеровой орбиты в другую кеплерову орбиту на основании соотношений (3.1) и (3.3b) (см. также рис. 3.9, б) может быть записана в следующем виде:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c}\right)^2 = v'^2 + v''^2 - 2v'v'' \cos(|\theta' - \theta''|), \quad (3.35)$$

где $v' = v'/v_c$ и $v'' = v''/v_c$ — безразмерные величины скорости соответственно на исходной и измененной орбитах, а θ' и θ'' — отвечающие им углы наклона вектора скорости к местному горизонту в точке изменения орбиты:

$$\left. \begin{aligned} v'^2 &= 2 - \frac{1 - e'^2}{1 + e' \cos \eta'}, \\ v''^2 &= 2 - \frac{1 - e''^2}{1 + e'' \cos \eta''}, \\ \theta' &= \arccos \frac{\sqrt{1 + e' \cos \eta'}}{v'}, \\ \theta'' &= \arccos \frac{\sqrt{1 + e'' \cos \eta''}}{v''}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Равенства (3.36) справедливы для любой кеплеровой орбиты. Разность углов $|\eta' - \eta''|$ представляет собой угол поворота большой оси кеплеровой орбиты в результате изменения орбиты. В некоторых задачах этот угол может быть задан. В этом случае выбор точки изменения орбиты (то есть выбор r' и η') сразу приводит к определению η'' (так как $r'' = r'$ при одноимпульсном маневре). В зависимости от η' , η'' , e' , e'' , v' и v'' для разности углов между касательными к орбитам в точке изменения орбиты можно записать следующее выражение:

$$\cos(|\theta' - \theta''|) = 1 + A + A^2 - \frac{1 + e' \cos \eta'}{v'^2} - \frac{1 + e'' \cos \eta''}{v''^2}, \quad (3.37)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{(1 + e' \cos \eta')(1 + e'' \cos \eta'')}}{v'v''}.$$

д) **Изменение орбиты «эллипс $\rightleftharpoons$ эллипс»** (рис. 3.9). В этом случае непосредственно можно использовать выражения (3.35) —

¹⁾ $v_c = \sqrt{\frac{K}{r}}$. (Прим. перев.)

(3.37). Если требуется, чтобы $|\eta' - \eta''| = 0$, то изменение орбиты необходимо производить в одной из точек аписид. В этом случае, очевидно, $\theta' - \theta'' = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c} \right)_{\text{apsis}} = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}''|.$$

Однако условию $\theta' - \theta'' = 0$ соответствует изменение орбиты не только в точках аписид. Если изменить скорость только *по величине* в любой другой точке орбиты, то параметры движения до и после изменения орбиты будут связаны следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} v'^2 \cos^2 \theta &= 1 + e' \cos \eta', \\ v''^2 \cos^2 \theta &= 1 + e'' \cos \eta'', \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

откуда, если принять за независимые переменные e'' и η'' , можно получить:

$$v''^2 = v'^2 \frac{1 + e' \cos \eta''}{1 + e' \cos \eta'}. \quad (3.39)$$

Если за независимые переменные принять r''_P и r''_A , то, вводя обозначение $r''_A/r''_P = n''$ и учитывая очевидное равенство $(r''_A + r''_P)/2 = a''$, получим:

$$\left. \begin{aligned} e'' &= \frac{n'' - 1}{n'' + 1} = \frac{r''_A}{a''} - 1 = 1 - \frac{r''_P}{a''}, \\ v''^2 &= 2 \left(1 - \frac{r}{r''_A + r''_P} \right) = 2 - \frac{r}{a''}, \\ \cos \eta'' &= \frac{v''^2 \cos^2 \theta - 1}{e''}, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

где величина радиуса-вектора r (заранее определенная или известная) и истинная аномалия η' (известная) определяют точку изменения орбиты. Полученные равенства легко преобразовать и для других независимых переменных.

е) Изменение орбиты «эллипс $\rightleftharpoons$ парабола». С учетом значений $v'' = \sqrt{2}$ и $e'' = 1$ общая зависимость для определения требуемого импульса записывается в следующем виде:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c} \right)^2 = 1 + \frac{2}{v'^2} - \frac{2\sqrt{2}}{v'} \cos(|\theta' - \theta''|), \quad (3.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v'^2 &= 2 - \frac{1 - e'^2}{1 + e' \cos \eta'}, \\ \theta' &= \arccos \frac{\sqrt{1 + e' \cos \eta'}}{v'}, \\ \theta'' &= \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos \eta''}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

ж) **Изменение орбиты «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола».** В этом случае используются зависимости, приведенные в пункте д).

з) **Изменение орбиты «парабола $\rightleftharpoons$ гипербола».** В этом случае $v' = \sqrt{2}$, $e' = 1$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\Delta v}{v_c} \right)^2 = 1 + \frac{2}{v''^2} - v'' \sqrt{2} \cos(|\theta' - \theta''|), \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} v''^2 &= 2 + \frac{e''^2 - 1}{1 + e'' \cos \eta''}, \\ \theta' &= \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos \eta'}{2}}, \\ \theta'' &= \arccos \frac{\sqrt{1 + e'' \cos \eta''}}{v''}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

В соответствии с выводом, приведенным в конце § 3.2, следует отметить, что точку пересечения орбит по возможности нужно выбирать в районе малых орбитальных скоростей. Например, при изменении эллиптической орбиты в круговую точку изменения орбиты выгоднее выбрать в районе апогейной, а не перигейной точки. Так как в действительности изменение орбиты происходит не мгновенно, а в течение конечного промежутка времени, то этот подход приводит к тому, что в большинстве случаев изменение орбиты происходит при скоростях, меньших теоретической скорости в точке пересечения орбит. Такой подход к выбору точки изменения орбиты в соответствии с зависимостями предыдущего параграфа позволяет уменьшить энергетические требования к маневру.

3.4. Переход с орбиты на орбиту

В противоположность *изменению орбиты* переход с орбиты на орбиту включает *промежуточную*, или *переходную*, орбиту, связывающую исходную и конечную орбиты. Изложение целесообразно начать с классификации орбитальных переходов. Различают три основных вида орбитальных переходов:

- 1) орбитальный переход в поле центральной силы (ОППЦ),
- 2) орбитальный переход «поверхность — орбита» (ОППО),

3) межпланетный орбитальный переход (МОП).

В случае 1) начальная и конечная траектории движения являются кеплеровыми орбитами, соответственно называемыми *исходной орбитой* и *орбитой цели*. Плоскости обеих орбит проходят через центр притяжения.

В случае 2) конечная траектория также является орбитой цели. Начальная траектория в этом случае, если тело, с поверхности которого совершается переход, вращается, представляет собой круг широт, параллельный плоскости экватора. Таким образом, если широта начальной точки отлична от нуля, то плоскость начальной траектории не проходит через центр притяжения.

Случай 3) представляет собой комбинацию первых двух случаев с учетом гелиоцентрического поля притяжения.

ОППЦ и ОППО являются операциями в поле центральной силы. Теоретические основы этих переходов будут рассмотрены в настоящей главе. Теоретические основы МОП будут изложены в следующей главе. Орбитальный переход в поле центральной силы и орбитальный переход «поверхность — орбита» будут рассмотрены в §§ 3.5—3.12.

Переход между исходной орбитой и орбитой цели включает в себя два изменения орбиты, которые в идеальном случае могут рассматриваться как импульсные, то есть переход осуществляется по методике, изложенной в предыдущем параграфе. Так же как и в случае изменения орбиты, различают компланарные и некомпланарные орбитальные переходы. В большинстве случаев долунных переходов и в особенности межпланетных переходов конечные орбиты близки к компланарным. Так что компланарный переход может служить хорошим приближением для первоначального анализа параметров перехода и, следовательно, представляет определенную практическую ценность.

Между компланарными некруговыми кеплеровыми орбитами различают *соосные* и *несоосные* орбитальные переходы в зависимости от взаимного расположения больших осей рассматриваемых орбит. Естественно, что для круговых орбит подобного различия не существует. Простейшим случаем орбитального перехода является переход между компланарными круговыми орбитами, с рассмотрения которого мы и начнем.

3.5. Переход между компланарными круговыми орбитами

Рассмотрим две круговые орбиты (на рис. 3.18 помечены одним штрихом и тремя штрихами), между которыми необходимо осуществить переход космического аппарата. Переходная орбита минимальной требуемой энергии (помечена двумя штри-

хами) представляет собой эллипс (часто называемый *гомановским*¹⁾ эллипсом. Точки апсид гомановского эллипса касаются исходной и конечной орбит. Приведенный ниже анализ основан

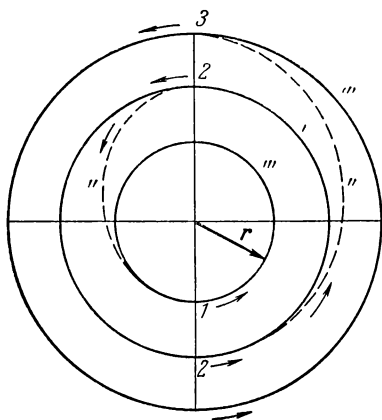


Рис. 3.18. Орбитальный переход с минимальной требуемой энергией между компланарными круговыми орбитами.

на применении теории эллиптических орбит, изложенной в первом томе настоящей серии (см. «Космический полет», т. I, § 4.4).

Пронумеруем три круговые орбиты в порядке увеличения их радиусов. Номера орбит будут использованы как индексы для обозначения соответствующих точек начала и конца перехода. Переход может иметь место с внутренней орбиты на внешнюю ($r_2 < r_3$) или наоборот ($r_2 > r_1$). В первом случае величина скорости на переходной орбите в точке 2 (см. рис. 3.18) может быть определена из равенства

$$v_2''^2 = \left(\frac{v_2''}{v_c'} \right)^2 = \frac{2}{1 + r_2/r_3}, \quad (3.45a)$$

а в точке 3 — из следующего равенства:

$$v_3''^2 = \left(\frac{v_3''}{v_c'''} \right)^2 = \frac{r_2}{r_3} \frac{2}{1 + r_2/r_3} = \frac{2}{1 + r_3/r_2}, \quad (3.45b)$$

где $v_c'^2 = K/r_2$ и $v_c'''^2 = K/r_3$. Следовательно,

$$v_2'' = \sqrt{\frac{2K}{r_2(1 + r_2/r_3)}} = \frac{v_{P,2}}{\sqrt{1 + r_2/r_3}}, \quad (3.46a)$$

$$v_3'' = \sqrt{\frac{r_2}{r_3} \frac{2K}{r_2 + r_3}} = \frac{v_{P,3}}{\sqrt{1 + r_3/r_2}}, \quad (3.46b)$$

где $r_2 + r_3 = 2a''$ — большая ось переходного эллипса. Соответствующие положительные импульсы скорости в начале и в конце переходного эллипса определяются по выражениям

$$\Delta v_2 = v_2'' - v_c' = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left(\sqrt{\frac{2}{1 + r_2/r_3}} - 1 \right), \quad (3.47a)$$

$$\Delta v_3 = v_c''' - v_3'' = \sqrt{\frac{K}{r_3}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r_3/r_2}} \right). \quad (3.47b)$$

¹⁾ По имени Гомана (W. Hohmann), первым исследовавшего этот тип перехода (см. «Космический полет», т. I, гл. 1).

Для перехода с орбиты 2 на орбиту 1 имеем:

$$v_2''^2 = \left(\frac{v_2''}{v_c'} \right) = \frac{2}{1 + r_2/r_1}, \quad (3.48a)$$

$$v_1''^2 = \frac{r_2}{r_1} \frac{2}{1 + r_2/r_1} = \frac{2}{1 + r_1/r_2}, \quad (3.48b)$$

$$v_2''' = \sqrt{\frac{2K}{r_2(1 + r_2/r_1)}} = \frac{(v_p)_2}{\sqrt{1 + r_2/r_1}}, \quad (3.49a)$$

$$v_1'' = \frac{r_2}{r_1} v_2'' = \sqrt{\frac{r_2}{r_1} \frac{2K}{r_2 + r_1}} = \frac{(v_p)_1}{\sqrt{1 + r_1/r_2}}, \quad (3.49b)$$

$$\Delta v_2 = v_2'' - v_c' = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left(\sqrt{\frac{2}{1 + r_2/r_1}} - 1 \right), \quad (3.50a)$$

$$\Delta v_1 = v_2''' - v_1'' = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r_1/r_2}} \right). \quad (3.50b)$$

При рассмотрении перехода с внутренней круговой орбиты на внешнюю круговую орбиту импульс скорости Δv_3 в апоцентре переходной орбиты может быть выражен в единицах круговой скорости на внутренней орбите таким образом:

$$\frac{\Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{1}{r_3/r_2}} - \sqrt{\frac{2}{r_3/r_2(1 + r_3/r_2)}}. \quad (3.51a)$$

Дифференцируя равенство (3.51a) по r_3/r_2 , получаем:

$$\frac{d}{d(r_3/r_2)} \left[\frac{\Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2r_3/r_2(1 + r_3/r_2)^3}} \left[1 + \frac{1 + r_3/r_2}{r_3/r_2} \left(1 - \sqrt{\frac{1 + r_3/r_2}{2}} \right) \right]. \quad (3.51b)$$

Выражение (3.51b) обращается в нуль при значении $r_3/r_2 = 5,879$, которое соответствует максимуму импульса скорости в апоцентре переходной орбиты, равному

$$\frac{\Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} = 0,190. \quad (3.51c)$$

Из равенства (3.50a) следует, что $\Delta v_2 \rightarrow 0$ при $r_2 \rightarrow \infty$.

Суммарная величина импульсов $\Delta v_2 + \Delta v_3$ для перехода с внутренней орбиты на внешнюю орбиту в единицах круговой скорости на внутренней орбите ($v_c = \sqrt{K/r_2}$) равна:

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} = \frac{r_3/r_2 - 1}{\sqrt{r_3/r_2}} \sqrt{\frac{2}{1 + r_3/r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_3/r_2}} - 1. \quad (3.51d)$$

Дифференцируя равенство (3.51d) по r_3/r_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(r_3/r_2)} \left(\frac{\Delta v_2 + \Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} \right) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^{-3/2} \left(1 + \frac{r_3}{r_2} \right)^{-3/2} \left[1 + 3 \frac{r_3}{r_2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{r_3}{r_2} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.51e) \end{aligned}$$

Выражение (3.51e) обращается в нуль при $r_3/r_2 = 15,582$. При этом значении отношения радиусов r_3/r_2 суммарная величина

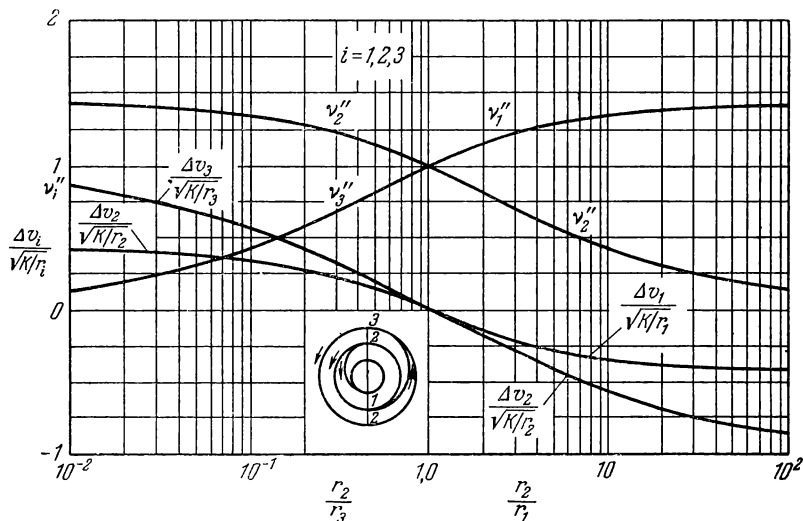


Рис. 3.19. Величины импульсов скорости при переходе между круговыми орбитами (величины импульсов скорости выражены в единицах круговой скорости на орбитах 1, 2 и 3).

импульсов для перехода с внутренней круговой орбиты на внешнюю круговую орбиту в единицах круговой скорости на внутренней орбите равна:

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} = 0,536. \quad (3.51f)$$

При $(\Delta v_2 + \Delta v_3)/\sqrt{K/r_2} = \sqrt{2} - 1$, то есть при переходе с суммарной величиной импульсов, которая обеспечивает параболическую скорость ухода с исходной круговой орбиты 2, из соотношения (3.51d) получим значение $r_3/r_2 \approx 3,4$. Таким образом, переход на круговую орбиту, удаленную от центра притяжения более чем в 3,4 раза, чем исходная орбита, требует большей энергии, чем уход с параболической скоростью с исходной орбиты. В межпла-

петных полетах подобные условия могут возникнуть при перелетах с Земли на орбиту Юпитера или орбиты более дальних планет.

На рис. 3.19—3.21 приведены графики величин импульсов скорости для перехода между круговыми орбитами. На рис. 3.19 величины импульсов скорости выражены в единицах круговой скорости на орбитах 1, 2 и 3. На рис. 3.20 величины импульсов скорости выражены в единицах круговой скорости на исходной

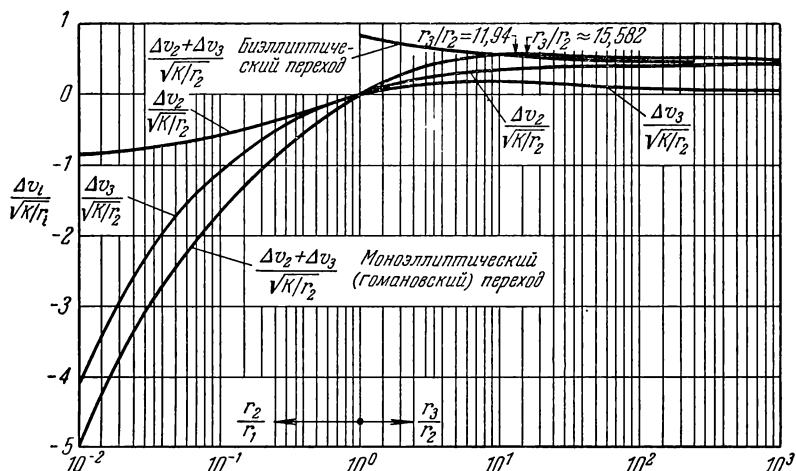


Рис. 3.20. Величины импульсов скорости при переходе между круговыми орбитами (величины импульсов выражены в единицах круговой скорости на исходной орбите).

орбите (орбите 2). На рис. 3.21 представлены те же графики, что на рис. 3.20, но в более крупном масштабе.

Наличие максимума величины $\Delta v_2 + \Delta v_3$ объясняется своеобразным характером изменения величин Δv_2 и Δv_3 . Величина $\Delta v_2 / \sqrt{K/r_2}$ монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к значению $\sqrt{2} - 1$. Характер изменения кривой Δv_3 определяется тем, что импульс Δv_3 предназначен для увеличения скорости космического аппарата в апоцентре переходной эллиптической орбиты до величины местной круговой скорости. Величина местной круговой скорости, равная $\sqrt{K/r_3}$, монотонно убывает с ростом величины r_3 , стремясь к нулю. Скорость аппарата в апоцентре переходной орбиты, равная $\sqrt{K/r_3} \sqrt{\frac{2}{1+r_3/r_2}}$, также стремится к нулю при непрерывном увеличении величины r_3 . Таким образом, $\Delta v_3 \rightarrow 0$ при $r_3 \rightarrow \infty$. При этом увеличение

отношения r_3/r_2 в диапазоне его малых значений приводит к меньшему убыванию местной круговой скорости по сравнению с убыванием величины скорости в апоцентре переходной орбиты.

Рассмотренная закономерность изменения слагаемых, формирующих величину импульса Δv_3 , приводит к тому, что при непрерывном увеличении отношения r_3/r_2 величина Δv_3 сначала

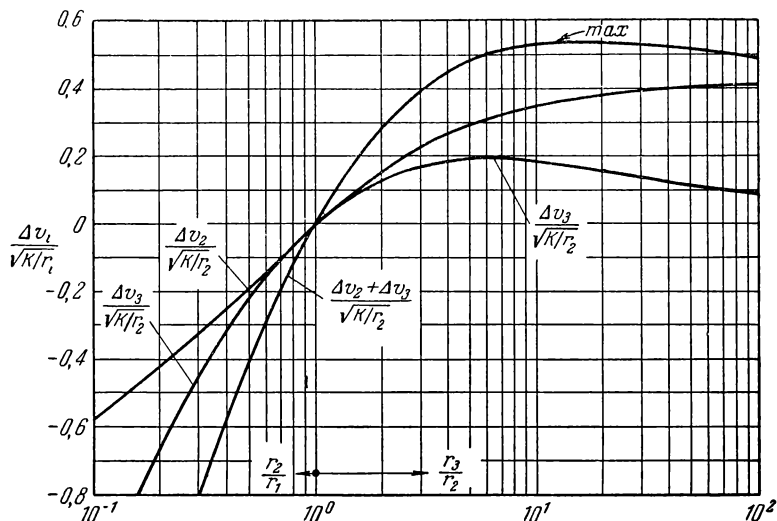


Рис. 3.21. Величины импульсов скорости при переходе между круговыми орбитами (величины импульсов выражены в единицах круговой скорости на исходной орбите).

увеличивается, а затем уменьшается, стремясь к нулю при $r_3 \rightarrow \infty$.

Из рис. 3.20 следует, что при $r_3/r_2 \geq 15,582$ можно сэкономить энергию для перехода между круговыми орбитами, если воспользоваться *обходной*¹⁾ переходной орбитой, то есть вначале вывести аппарат на высоту, превосходящую высоту орбиты цели, а затем спуститься по эллиптической орбите на орбиту цели с радиусом r_3 (рис. 3.22). В предельном случае при этом методе будем иметь уход с исходной орбиты с параболической скоростью и возвращение на исходную орбиту также с параболической скоростью. Первый маневр потребует импульса скорости $\Delta v_2/v_{2c} = \sqrt{2} - 1$; импульс скорости при втором маневре

¹⁾ Этот метод предложен советским ученым А. А. Штернфельдом в 1954 г. См.: Штернфельд А. А., Искусственные спутники Земли, Гостехиздат, 1957. (Прим. перев.)

$\Delta v_3/v_{2c} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{1}{r_3/r_2}}$. Суммарная величина импульсов будет равна:

$$\frac{\sum \Delta v}{v_{2c}} \frac{\Delta v_2 + \Delta v_3}{v_{2c}} = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{r_3/r_2}} \right). \quad (3.52)$$

График этой величины, приведенный на рис. 3.20, при $r_3/r_2 \gg 11,94$ проходит ниже графика суммарной величины импульсов

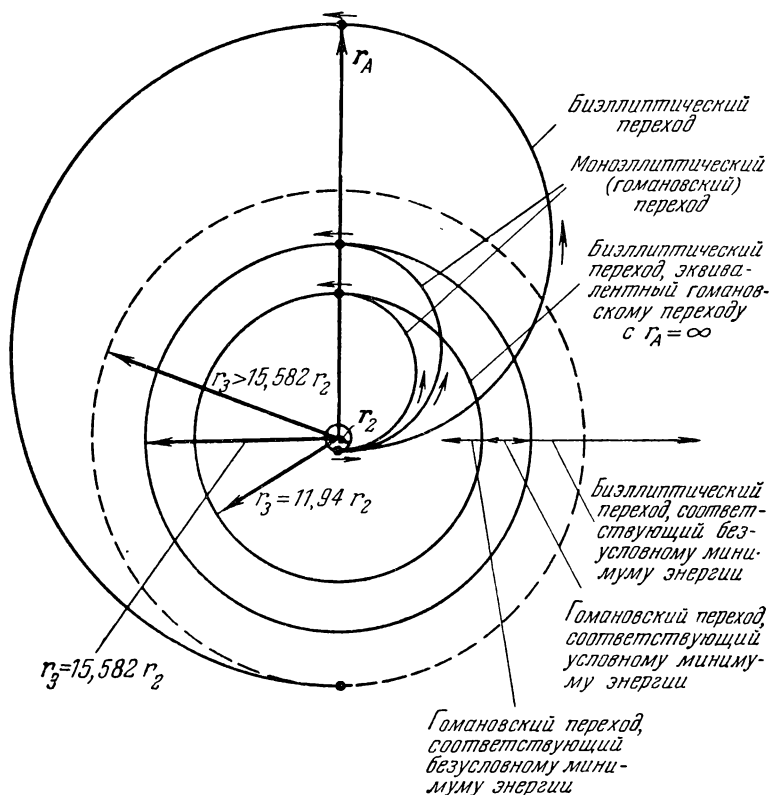


Рис. 3.22. Области моноэллиптических (гомановских) и биэллиптических переходов в поле центральной силы.

при моноэллиптическом (гомановском) переходе, определяемой выражением (3.51d). При $r_3/r_2 = 11,94$ кривые пересекаются, при этом $\sum \Delta v/v_{2c} = 0,534$. Таким образом, биэллиптический переход с промежуточной апогейной точкой, для которой $r_A > r_3$, требует

меньше энергии, чем моноэллиптический (гомановский) переход. В диапазоне $11,94 < r_3/r_2 < 15,582$ величина r_A , обеспечивающая отмеченную экономию энергии перехода, быстро возрастает, стремясь к бесконечности при $r_3/r_2 \rightarrow 11,94$. Даже в этом предельном случае выигрыш в требуемой энергии невелик (примерно 10% при очень больших значениях r_A), а переходный

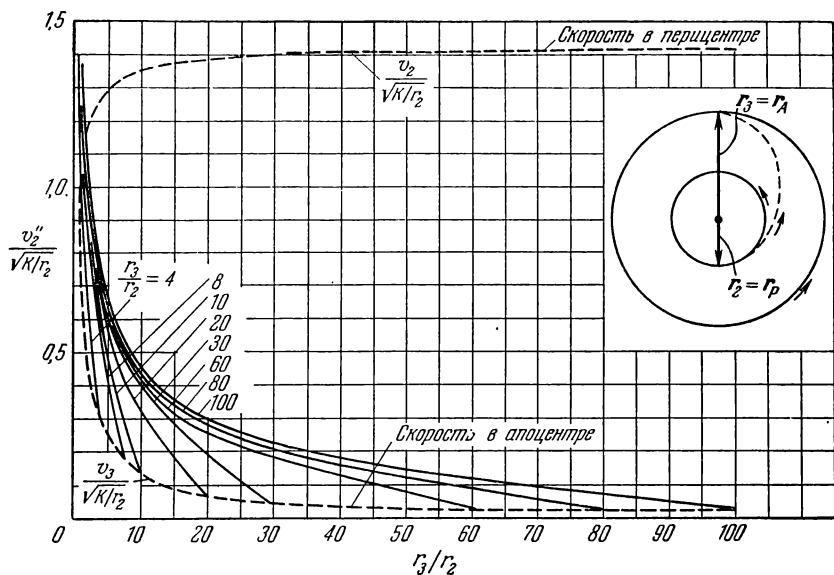


Рис. 3.23. Изменение скорости на переходной орбите в зависимости от расстояния при эллиптическом переходе с внутренней на внешнюю круговую орбиту ($r_2 \rightarrow r_3$) в поле центральной силы [скорости выражены в единицах круговой скорости на исходной орбите (r_2)].

период становится чрезмерно большим. Поэтому практическое использование биэллиптического перехода вряд ли будет оправданным, в особенности если учесть, что чувствительность параметров движения при этом переходе к начальным ошибкам становится чрезвычайно большой при значительных величинах r_A (см. § 3.10).

Графики изменения скорости и времени полета в зависимости от расстояния для эллиптических орбит в поле центральной силы приведены соответственно на рис. 3.23 и 3.24. Используя зависимость

$$v^2 = v_1^2 + 2K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (I.4.64)$$

выведенную в первом томе настоящей серии, легко получить общую зависимость, связывающую скорость в текущей точке,

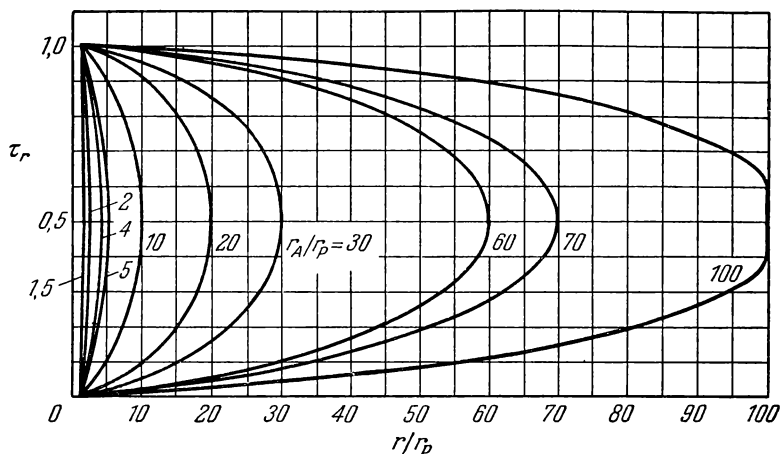


Рис. 3.24. Время полета по эллиптической орбите в поле центральной силы в зависимости от расстояния (время выражено в единицах периода обращения по эллиптической орбите, характеризующей параметром r_A/r_p).

характеризуемой величиной r , для любой переходной эллиптической орбиты, определяемой отношением r_3/r_2 (рис. 3.18), с круговой скоростью в перигеентре (для случая $r_1 < r_2$):

$$\frac{(v'')_r}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \sqrt{2 \left[\frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_3}} + \frac{r_2}{r} - 1 \right]} \quad (r > r_1), \quad (3.53a)$$

$$\frac{(v'')_r}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \sqrt{2 \left[\frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} + \frac{r_2}{r} - 1 \right]} \quad (r < r_3). \quad (3.53b)$$

Для двух рассмотренных случаев перигейная скорость в функциях r_3/r_2 выражается зависимостями

$$\frac{v''_2}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_2}{r_3}}}, \quad \frac{v''_1}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \frac{v_2}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} \frac{r_1}{r_2}, \quad (3.54a)$$

а апогейная скорость — зависимостями

$$\frac{v''_3}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \frac{v''_2}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{v''_2}{\sqrt{\frac{K}{r_2}}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_2}{r_1}}}. \quad (3.54b)$$

Рис. 3.23 относится к случаю эллиптического перехода с внутренней круговой на внешнюю круговую орбиту. Параметром семейства графиков является величина отношения r_3/r_2 . На рис. 3.23 нижняя пунктирная линия соответствует значениям скорости в апоцентре, а верхняя — в перицентре. Для получения зависимости времени полета на переходной орбите от расстояния воспользуемся равенством (I.4.180) для времени полета по эллиптической орбите, отсчитываемого от момента прохождения космического аппарата через перицентр:

$$t_r = \frac{\sqrt{\frac{p}{K}}}{1-e^2} \left[\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \arcsin \frac{p-r(1-e^2)}{ep} - \frac{\pi p}{2\sqrt{1-e^2}} - \sqrt{2pr-r^2(1-e^2)-p^2} \right]. \quad (3.55)$$

Подставив в формулу (3.55) выражение $p=a(1-e^2)$, получим выражение для времени полета в единицах периода обращения на заданной эллиптической орбите:

$$\tau_r = \frac{t_r}{2\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}}} = \frac{1}{2\pi} \left[\arcsin \frac{a-r}{ae} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{2 \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} - (1-e^2)} \right], \quad (3.56a)$$

где $2\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}} = T$ — период обращения по переходному эллипсу с большой полуосью $a = \frac{1+r_A/r_P}{2r_P} (r_A \text{ и } r_P \text{ — соответственно апогейное и перигейное расстояния переходного эллипса})$. Выражение (3.56a) может быть использовано в приведенном виде как для перехода $r_1 \rightarrow r_2$, так и для перехода $r_2 \rightarrow r_3$ (рис. 3.18). Подставив в правую часть выражения (3.56a) величину большой полуоси, выраженную через r_A и r_P , окончательно получим:

$$\tau_r = \frac{t_r}{T} = \frac{1}{2\pi} \left[\arcsin \frac{-\frac{r}{r_P} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_A}{r_P} \right)}{\frac{e}{2} \left(1 + \frac{r_A}{r_P} \right)} - \frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{\frac{r}{r_P}}{1 + \frac{r_A}{r_P}} - \left[\frac{\frac{r}{r_P}}{1 + \frac{r_A}{r_P}} \right]^2 - \frac{1-e^2}{4}} \right], \quad (3.56b)$$

где

$$e = \frac{\frac{r_A}{r_P} - 1}{\frac{r_A}{r_P} + 1}.$$

Графики зависимости (3.56b) приведены на рис. 3.24 для различных переходных орбит, характеризуемых параметром r_A/r_P . Из графиков следует, что большая часть времени перехода приходится на долю области апоцентра переходной орбиты — обстоятельство, которое необходимо учитывать в космических полетах при выборе «быстрых» переходных орбит, то есть орбит с малым временем перехода.

Вместо переходных эллипсов, точки апсид которых касаются обеих круговых орбит, между которыми осуществляется переход, можно использовать эллиптические переходные орбиты, которые касаются лишь одной из круговых орбит и пересекают другую. Пример подобной переходной орбиты показан на рис. 3.9, а. Такая переходная орбита обеспечивает более быстрый переход, поскольку при переходе апогейная часть орбиты не используется. Как следует из графиков (рис. 3.24), именно эта часть переходной орбиты является главной причиной большой продолжительности гомановского перехода. Энергетические требования для вывода космического аппарата с исходной орбиты на подобные переходные несколько выше, чем при гомановских переходах. Что касается энергетических требований, связанных с изменением орбиты в точке пересечения с орбитой цели, то они значительно выше вследствие необходимости изменения скорости по направлению.

Переходные орбиты, пересекающие одну (или обе) заданные орбиты, для краткости будем называть *эллипсами быстрого перехода*. К сожалению, в общем случае не представляется возможным вычислить параметры переходного эллипса только по заданному времени перехода. Действительно, для этого необходимо вначале либо определить одну из точек апсид (если в начальной точке переходной орбиты касательные к переходной и исходной орбитам совпадают, то эта точка известна), либо определить истинную аномалию точки пересечения. В обоих случаях время перехода является зависимой переменной.

Предположим, что величина r_p'' перигейного расстояния переходной орбиты известна. Тогда для точки пересечения переходной орбиты с орбитой цели при выбранной величине апогейного расстояния переходной орбиты $r_A'' > r_2''$ можно

вычислить время перехода t'' по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} a'' &= \frac{r_A'' + r_P''}{2}, \\ e'' &= 1 - \frac{r_P''}{a''}, \\ \cos E_2'' &= \frac{1 - r_2''/a''}{e''}, \\ M'' &= E_2'' - e'' \sin E_2'', \\ \mu'' &= \sqrt{\frac{K}{a''^3}}, \\ t'' &= \frac{M''}{\mu''}. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Как и прежде, параметры переходной орбиты помечены двумя штрихами: μ'' — среднее движение, t'' — время перехода (в рассматриваемом случае от r_P'' до r_2''). Истинную аномалию η_2'' точки пересечения на переходной орбите можно вычислить по выражению

$$\cos \eta = \frac{a (\cos E - e)}{r}. \quad (1.4.98a)$$

Теперь, зная величину η_2'' , можно по уравнению (3.32) вычислить необходимую величину импульса скорости Δv_2 в точке пересечения. Постоянная энергии переходного эллипса равна:

$$h'' = -\frac{K}{a''}.$$

Параметр скорости переходного эллипса в точке пересечения равен:

$$v_2''^2 = 2 - \frac{h''}{K/r_2''}. \quad (3.58)$$

Наконец, угол наклона вектора скорости в точке пересечения к местному горизонту равен [см. выражение (3.10b)]:

$$\cos \theta_2'' = \frac{1}{v_2''} \sqrt{1 + e'' \cos \eta_2''}.$$

Если же задана истинная аномалия η_2'' (а не r_2''), то эксцентрическая аномалия определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \frac{E_2''}{2} = \sqrt{\frac{1 - e''}{1 + e''}} \operatorname{tg} \frac{\eta_2''}{2}, \quad (3.59)$$

причем опять имеется в виду, что a'' , а следовательно, и e'' являются известными величинами. Дальнейший расчет производится так же, как и в приведенной выше схеме.

Таким образом, время перехода является функцией принятой в расчете величины большой полуоси или апогейного (перигейного) расстояния переходного эллипса. Изменяя величину большой полуоси, последовательными расчетами по приведенной схеме добиваются желаемого времени перехода. В большинстве случаев эта задача решается графически построением графиков t'' в зависимости от E'' , a'' или e'' . Графики времени перехода в зависимости от e'' приведены в главе 9 для различных коротких ($\Delta\eta < 180^\circ$) и длинных ($\Delta\eta > 180^\circ$) переходных орбит с Земли к другим планетам в предположении, что орбиты планет круговые и компланарные.

Более быстрые (и, следовательно, с большей затратой энергии) переходы можно осуществить, используя параболические и гиперболические переходные орбиты. Расчет параметров параболической переходной орбиты чрезвычайно прост. По определению, величина параметра скорости в точке пересечения должна быть $v_2'' = \sqrt{2}$; эксцентриситет $e'' = 1,0$; фокальный параметр $p'' = 2r_p''$. Величина радиуса-вектора точки пересечения также известна, так как точка пересечения принадлежит орбите цели. Поэтому для определения истинной аномалии η_2'' точки пересечения на переходной орбите можно воспользоваться полярным уравнением орбиты

$$\cos \eta_2'' = \frac{p''}{r_2''} - 1 = 2 \frac{r_p''}{r_2''} - 1. \quad (3.60)$$

Величину импульса скорости Δv_2 можно определить по уравнению (3.32), а угол θ_2'' — по формуле (3.10b), полагая $e = 1,0$. Время перехода t'' может быть найдено из следующего выражения [см. формулу (I. 4.196)]:

$$t'' = \sqrt{\frac{2r_p^3}{K}} \left(\operatorname{tg} \frac{\eta_2''}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\eta_2''}{2} \right). \quad (3.61)$$

При расчете параметров гиперболической переходной орбиты вначале задаются величиной $v_p = \frac{v_p}{\sqrt{K/r_p}}$, по которой

определяют $e'' = v_p^2 - 1$. Дальнейший расчет ведется по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta_2'' &= \frac{\frac{r_P}{r} (1 - e'') - 1}{e''}, \\ \operatorname{tg} \frac{H''}{2} &= \sqrt{\frac{e'' - 1}{e'' + 1}} \operatorname{tg} \frac{\eta_2''}{2}, \\ a'' &= \frac{K}{\frac{K}{r_P} (2 - v_p^2)} = \frac{r_P}{1 - e''}, \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

где H — вспомогательный угол, соответствующий эксцентрической аномалии гиперболической орбиты (см. «Космический полет», т. I, рис. 4.28). Время перехода $t'' = t - T_P$, где T_P — время прохождения космическим аппаратом перицентра (T_P обычно полагают равным нулю), определяется из уравнения [см. формулу (I.4.240)]

$$t'' = \sqrt{\frac{a''^3}{K}} \left[e'' \operatorname{tg} H_2'' - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{H_2''}{2} \right) \right]. \quad (3.63)$$

Как будет показано дальше, выигрыш во времени перехода по гиперболической орбите по сравнению с эллипсом быстрого перехода достигается большей затратой энергии. По сравнению с гомановским переходом максимальный выигрыш во времени достигается при использовании перехода по параболической орбите. Поэтому до тех пор, пока при выборе типа перехода главную роль будут играть энергетические соображения, переход по гиперболической орбите между двумя орбитами в поле центральной силы будет применяться крайне редко.

3.6. Переход между компланарными круговой и эллиптической орбитами

Рассмотрим переход с круговой орбиты радиуса r_2 на эллиптическую орбиту радиуса $r_P > r_2$. В этом случае необходимы два импульса скорости: первый импульс Δv_2 на исходной круговой орбите, второй — Δv_P или Δv_A соответственно в перицентре или апоцентре конечной орбиты. В зависимости от выбора точки приложения второго импульса имеют место два возможных варианта перехода, изображенных на рис. 3.25 и 3.26 (рис. 3.25 соответствует варианту $\Delta v_2 + \Delta v_P$, рис. 3.26 — варианту $\Delta v_2 + \Delta v_A$).

Из графиков (рис. 3.20), а также из анализа выражения (3.47а) следует, что заданному увеличению Δv_2 при малых r_2

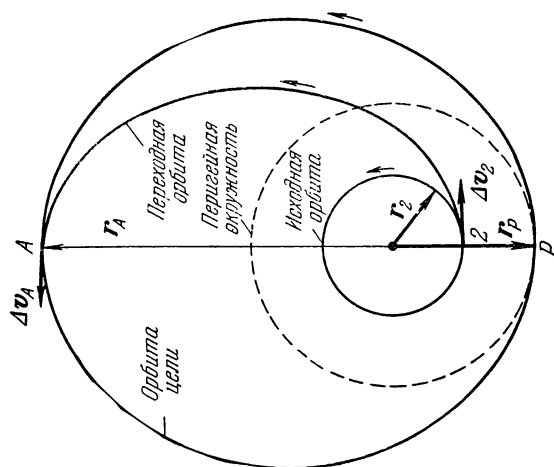


Рис. 3.26. Вариант перехода с круговой орбиты на эллиптическую орбиту (импульс прикладывается в апоцентре эллиптической орбиты).

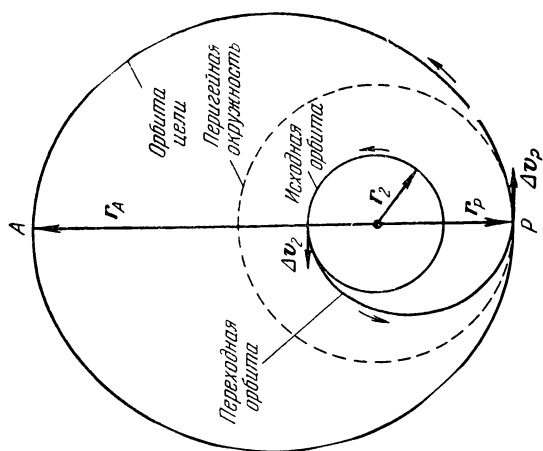


Рис. 3.25. Вариант перехода с круговой орбиты на эллиптическую орбиту (импульс прикладывается в перигеэе эллиптической орбиты).

(отношение r_3/r_2 велико) соответствует большее увеличение r_A (или r_3), чем при больших r_2 , и создается впечатление, что вариант $\Delta v_2 + \Delta v_A$ экономически выгоднее варианта $\Delta v_2 + \Delta v_P$. Это предположение легко проверить, воспользовавшись уравнениями, полученными в предыдущем параграфе. Действительно, из формул (3.47) имеем:

$$\frac{\Delta v_2}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_P)}} - 1,$$

$$\Delta v_P = \underbrace{\sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_P/r_2)}} \right]}_{\text{разность между круговой скоростью и скоростью на переходной орбите в периферии}} + \underbrace{\sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[\sqrt{\frac{2}{1 + (r_P/r_A)}} - 1 \right]}_{\text{разность между скоростью на конечной орбите и круговой скоростью в периферии}},$$

$$\frac{\Delta v_P}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + (r_P/r_A)}} - \sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + (r_P/r_2)}}.$$

Таким образом, для варианта $\Delta v_2 + \Delta v_P$ получаем:

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_P}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_P)}} \left(1 - \frac{r_2}{r_P} \right) + \sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + (r_P/r_A)}} - 1 \quad (3.64)$$

$(r_2 < r_P).$

Аналогичным образом для варианта $\Delta v_2 + \Delta v_A$, воспользовавшись формулами (3.47а) и (3.47б), получим:

$$\frac{\Delta v_2}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_A)}} - 1,$$

$$\Delta v_A = \underbrace{\sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_2)}} \right]}_{\text{разность между круговой скоростью и скоростью на переходной орбите в апоцентре}} + \underbrace{\left\{ -\sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_P)}} \right] \right\}}_{\text{разность между круговой скоростью и скоростью на конечной орбите в апоцентре; знак «минус» внутри фигурных скобок указывает на то, что направление этого вектора противоположно направлению вектора первого слагаемого}},$$

$$\frac{\Delta v_A}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2r_2/r_A}{1 + (r_A/r_P)}} - \sqrt{\frac{2r_2/r_A}{1 + (r_A/r_2)}},$$

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_A}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_A)}} \left(1 - \frac{r_2}{r_A} \right) + \sqrt{\frac{2r_2/r_A}{1 + (r_A/r_P)}} - 1 \quad (3.65а)$$

$(r_2 < r_A).$

На рис. 3.27 приведены графики суммарной величины импульсов скорости для перехода «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» с приложением

второго импульса в апогее или перигее конечной орбиты в зависимости от отношения r_A/r_2 для различных значений отношения r_P/r_2 . Для сравнения там же приведены графики суммарной величины импульса скорости $(\Delta v_2 + \Delta v_3)/\sqrt{K/r_2}$ для перехода между двумя компланарными круговыми орбитами и величины импульса скорости $\Delta v_2/\sqrt{K/r_2}$ для перехода с круговой орбиты на эллиптическую, перенесенные с рис. 3.20. Из анализа графиков

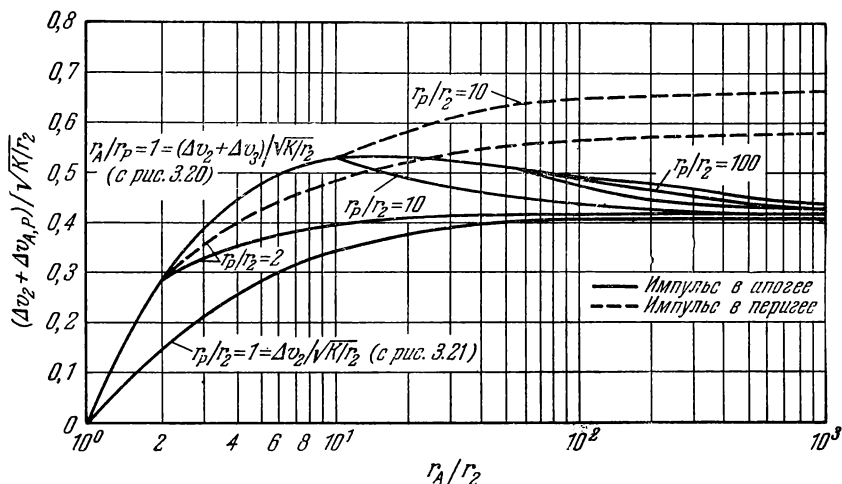


Рис. 3.27. Суммарная величина импульсов скорости для перехода «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» с приложением второго импульса в апогее или перигее конечной орбиты ($r_P \geq r_2$).

следует, что при заданной величине r_P/r_2 переход «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» со вторым импульсом скорости в перицентре всегда требует большей затраты энергии, чем в случае приложения второго импульса в апоцентре. При этом указанная разность быстро увеличивается с возрастанием r_A/r_2 . С другой стороны, следует ожидать, что некоторые переходы «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» с приложением второго импульса в перицентре требуют меньшего расхода энергии, чем переход с той же исходной круговой орбиты на круговую орбиту радиуса, равного апогейному расстоянию конечной эллиптической орбиты. Это объясняется разницей в уровнях орбитальных энергий сравниваемых круговой и эллиптической орбит.

Подставляя в выражение (3.65а) $r_A = a(1+e)$ и $r_P = a(1-e)$, можно получить суммарную величину импульсов скорости,

выраженную через эксцентриситет e , большую полуось a орбиты цели (не переходной орбиты) и r_2 :

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_A}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2(1+e)}{1+e+(r_2/a)}} \left(1 - \frac{r_2/a}{1+e}\right) + \sqrt{\frac{r_2}{a} \frac{1-e}{1+e}} - 1. \quad (3.65b)$$

(Графики этой зависимости приведены на рис. 3.28.)

В случае перехода с внешней круговой орбиты радиуса r_2 на внутреннюю эллиптическую орбиту наиболее экономичным

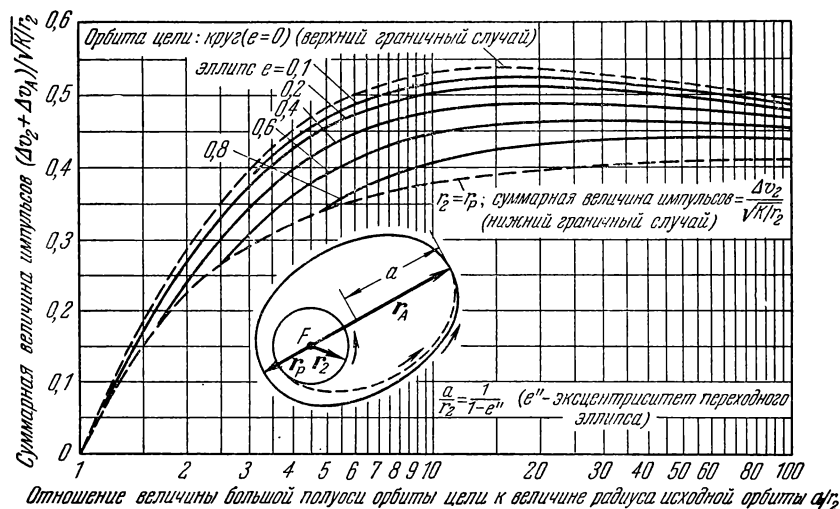


Рис. 3.28. Суммарная величина импульсов для перехода «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» при $r_p \geq r_2$.

является переход ($r_2 \rightarrow r_p$) в перигентр орбиты цели. Для этого случая можно получить зависимости, аналогичные зависимостям (3.65a) и (3.65b):

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_p}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2}{1+(r_2/r_p)}} \left(\frac{r_2}{r_p} - 1\right) - \sqrt{\frac{2r_2/r_p}{1+(r_p/r_A)}} - 1 \quad (3.66a)$$

$(r_2 > r_A),$

$$\frac{\Delta v_2 + \Delta v_p}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{\frac{2(1-e)}{1-e+(r_2/a)}} \left(\frac{r_2/a}{1-e} - 1\right) - \sqrt{\frac{r_2}{a} \frac{1+e}{1-e}} - 1 \quad (3.66b)$$

$(r_2 > r_A),$

где a и e относятся к орбите цели (а не к переходной орбите). Графики, соответствующие этому случаю, представлены на рис. 3.29.

Пример быстрого перехода с круговой орбиты на эллиптическую (или наоборот) изображен на рис. 3.30. Этот переход состоит из двух изменений орбиты: переход «круг (исходный) $\rightleftharpoons$ эллипс (переходный)», для которого можно воспользоваться выражением (3.47a) или (3.50a), и переход «эллипс (переходный) $\rightleftharpoons$ эллипс (цели)» с общей точкой пересечения, который

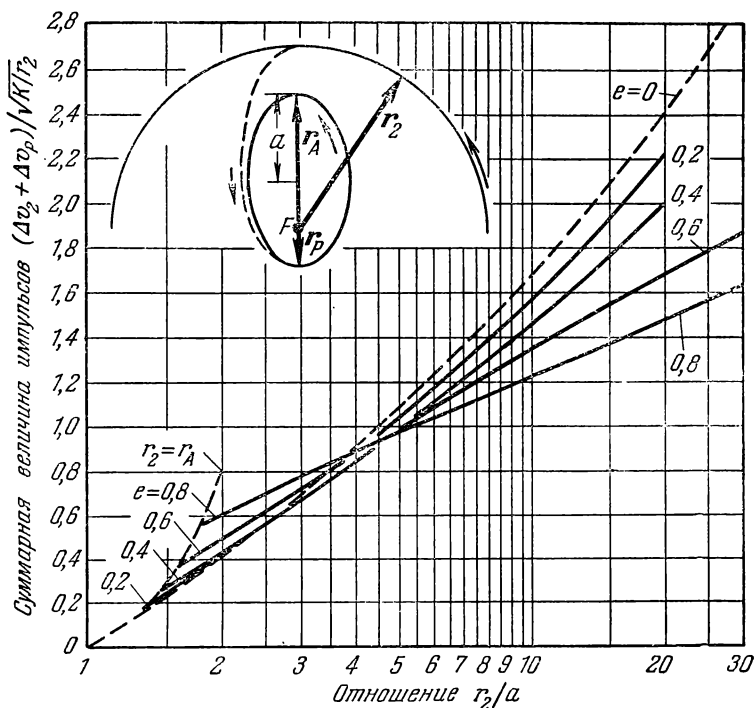


Рис. 3.29. Суммарная величина импульсов для перехода «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» при $r_2 \geq r_A$.

будет рассмотрен в пунктах 2 и 3 § 3.7. Суммарная величина импульса подобного перехода может быть вычислена по соответствующим зависимостям.

На рис. 3.31 приведен третий случай — переход между пересекающимися круговой и эллиптической орбитами. Среди многих возможных вариантов перехода между этими орбитами особый интерес представляют следующие три: «внешний» двухимпульсный переход ($A \rightleftharpoons 2$), «внутренний» двухимпульсный переход ($P \rightleftharpoons 3$) и одноимпульсный переход (изменение орбиты) в

одной из точек пересечения орбит (например, в точке 4 на рис. 3.31).

При *внешнем двухимпульсном переходе*, считая, что переход совершается из точки A в точку 2, получаем (двумя штрихами помечены параметры переходной орбиты):

$$\Delta v_A = v_A'' - v_A = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left[\frac{r_2}{r_A} \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_A)}} - \sqrt{\frac{r_2}{r_A} \frac{2}{1 + (r_A/r_P)}} \right],$$

$$|\Delta v_2| = |v_P'' - v_2| = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left[\sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_A)}} - 1 \right].$$

Для суммарной величины импульсов имеем:

$$\left(\frac{\Delta v_2 + |\Delta v_2|}{\sqrt{K/r_2}} \right)_{A \rightarrow 2} = \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_A)}} \left(1 + \frac{r_2}{r_A} \right) - \sqrt{\frac{r_2}{r_A} \frac{2}{1 + (r_A/r_P)}} - 1 \quad (3.67a)$$

или, выражая через a и e исходной эллиптической орбиты,

$$\left(\frac{\Delta v_A + |\Delta v_2|}{\sqrt{K/r_2}} \right)_{A \rightarrow 2} = \sqrt{\frac{2(1+e)}{1+e+(r_2/a)}} \left(1 + \frac{r_2/a}{1+e} - \sqrt{\frac{r_2}{a} \frac{1-e}{1+e}} - 1 \right). \quad (3.67b)$$

При *внутреннем двухимпульсном переходе*, считая, что переход совершается из точки P в точку 3, находим:

$$|\Delta v_P| = |v_P - v_P''| = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left[\sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + (r_P/r_A)}} - \sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + (r_P/r_2)}} \right],$$

$$|\Delta v_3| = v_3 - v_A'' = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_P)}} \right].$$

Для суммарной величины импульсов имеем:

$$\left(\frac{|\Delta v_P| + \Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} \right)_{P \rightarrow 3} = 1 + \sqrt{\frac{2r_2/r_P}{1 + r_P/r_A}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_P)}} \left(1 + \frac{r_2}{r_P} \right) \quad (3.68a)$$

или

$$\left(\frac{|\Delta v_P| + \Delta v_3}{\sqrt{K/r_2}} \right)_{P \rightarrow 3} = 1 + \sqrt{\frac{r_2}{a} \frac{1+e}{1-e}} - \sqrt{\frac{2(1-e)}{1-e+(r_2/a)}} \left(1 + \frac{r_2/a}{1-e} \right). \quad (3.68b)$$

Наконец, для изменения орбиты в точке 4 (одноимпульсный переход) из уравнения (3.32), учитывая очевидное равенство $(1 - e^2)/(1 + e \cos \eta) = r/a$, получаем:

$$\frac{\Delta v_A}{\sqrt{K/r_2}} = \sqrt{3 - \frac{r_2}{a} - 2 \sqrt{\frac{1 - e^2}{r_2/a}}} . \quad (3.69)$$

Из графиков зависимости a/r от v , приведенных на рис. 3.12 и 3.13, следует, что одинаковому изменению v соответствуют все

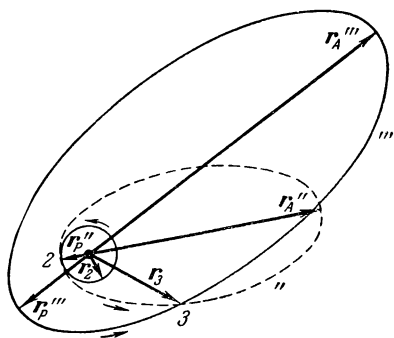


Рис. 3.30. Пример быстрого перехода между круговой и эллиптической орбитами.

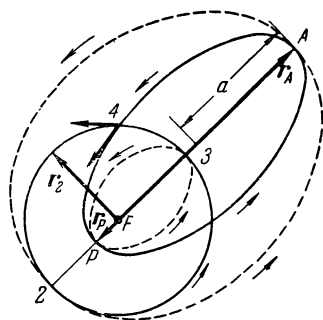


Рис. 3.31. Переход между пересекающимися круговой и эллиптической орбитами.

возрастающие изменения большой полуоси a по мере приближения v к величине $\sqrt{2}$, соответствующей параболической скорости. Это позволяет сделать вывод, что с увеличением a возрастает чувствительность величины большой полуоси к изменениям v . Большая величина a объясняется главным образом большим апогейным расстоянием r_A . Поэтому изменение скорости в перигеентре является более эффективным способом изменения расстояния до апоцентра для вытянутых эллипсов по сравнению с эллипсами с малыми эксцентриситетами. По тем же самым соображениям изменение скорости в апоцентре является более эффективным способом изменения расстояния до перигеентра для эллиптических орбит с большими эксцентриситетами (большие значения a) по сравнению с эллиптическими орбитами с малыми эксцентриситетами. Эта закономерность, которая нашла свое отражение на графиках, приведенных на рис. 3.20 и 3.21, будет подтверждена многочисленными частными случаями, рассматриваемыми в последующих параграфах. В частности, в случае перехода между пересекающимися круговой и эллиптической орбитами внешний двухимпульсный переход

является более экономичным, чем внутренний двухимпульсный переход, так как апоцентр, представляющий собой одну из конечных точек переходного маневра, является наиболее удаленной точкой от центра притяжения. Суммарные величины импульсов для внешней и внутренней переходных орбит и для одноимпульсного перехода приведены на графиках (рис. 3.32) в функции e . Эти графики относятся к случаю, когда $r_2 = a$, то

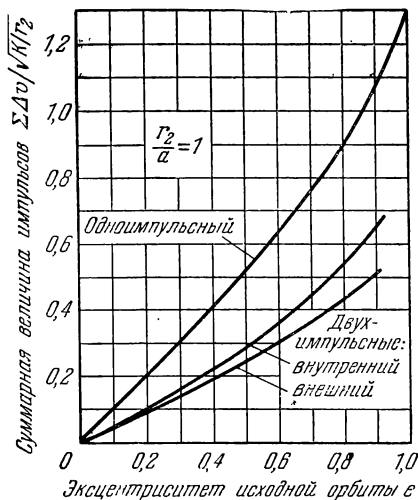


Рис. 3.32. Сравнение трех вариантов переходов «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» для случая $r_2 = a$ (см. рис. 3.31).

увеличения эксцентриситета (например, при $r_2/a = 0,95$ $e = 0,4$; при $r_2/a = 0,85$ $e = 0,6$; при $r_2/a = 0,7$ $e = 0,8$), становясь все более резко выраженным.

Энергетические требования к двухимпульсному переходу уменьшаются при $r_2/a < 1$ и увеличиваются при $r_2/a > 1$. При малых эксцентриситетах разница в энергетических требованиях внутреннего и внешнего двухимпульсных переходов незначительна. Однако, так как внутренний переход обладает преимуществом по времени перехода, можно сделать вывод, что при малом эксцентриситете ($e \leq 0,2$) эллиптической орбиты, пересекающей круговую орбиту, переход между ними предпочтительнее осуществлять по схеме «перицентр эллиптической орбиты $\rightleftharpoons$ круговая орбита» (внутренний переход, см. рис. 3.31). Такой переход является более быстрым и требует лишь небольшого увеличения требуемой энергии по сравнению с переходом ми-

есть к случаю, при котором точки пересечения орбит совпадают с концами малой оси эллиптической орбиты. В этом случае в точках пересечения орбит скорости на исходной и конечной орбитах равны по величине (равны круговой скорости), а по направлению отличаются на угол $\theta = \arcsin e$. В приведенном случае импульс скорости при одноимпульсном переходе близок к максимальной величине при $e = 0,2$, поскольку, как было отмечено выше, максимальная величина импульса скорости соответствует точкам изменения орбиты, совпадающим с концами фокального параметра [см. равенство (3.33d)]. С уменьшением отношения $r_2/a < 1,0$ максимум сдвигается в сторону

нимальной энергии по схеме «апоцентр эллиптической орбиты $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ круговая орбита» (внешний переход), который является более продолжительным и требует значительно меньше энергии при больших эксцентриситетах.

3.7. Переход между компланарными эллиптическими орбитами

Различают следующие случаи переходов между компланарными орбитами:

1. Переход между соосными эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит в точках апсид (касательный коапсидальный переход).

2. Переход между соосными эллиптическими орбитами по пересекающей переходной орбите.

3. Переход между несоосными эллиптическими орбитами по пересекающей переходной орбите.

4. Переход между несоосными эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит.

5. Переход между несоосными околосолнечными орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит.

Переходы между эллиптическими орбитами (не обязательно компланарными) являются наиболее распространенным видом переходных маневров в астронавтике.

1. Переход между соосными эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит в точках апсид (касательный коапсидальный переход). Среди переходов между эллиптическими орбитами этот переход является самым простым. На рис. 3.33 пунктирной линией показаны две возможные переходные орбиты. Как и прежде, одним штрихом и тремя штрихами обозначены заданные орбиты, двумя штрихами — переходная орбита. Две возможные переходные орбиты связывают перигей исходной орбиты с апогеем орбиты цели (точку 1 с точкой 2 или, при обратном переходе, точку 4 с точкой 3) и апогей исходной орбиты с перигеем орбиты цели (точку 3

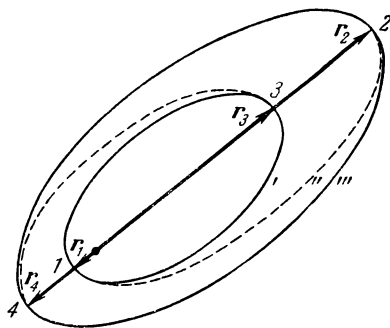


Рис. 3.33. Переход между соосными эллиптическими орбитами по переходной эллиптической орбите, касающейся исходной и конечной орбит в точках апсид.

с точкой 4 или, при обратном переходе, точку 2 с точкой 1). Последовательно рассмотрим случаи перехода $1' \rightarrow 2'''$ и $3' \rightarrow 4'''$. Переход $1' \rightarrow 2'''$ состоит из двух импульсов скорости: первый импульс Δv_1 на исходной орбите служит для изменения орбиты $1' \rightarrow 1''$, второй импульс Δv_2 на орбите цели служит для изменения орбиты $2'' \rightarrow 2'''$. Переход $3' \rightarrow 4'''$ аналогичен предыдущему.

Отличительной чертой рассматриваемого касательного перехода между точками апсид соосных эллиптических орбит является совпадение точек апсид переходной орбиты с точками апсид исходной и конечной орбит. Эта особенность рассматриваемого перехода будет использована при дальнейшем анализе. Сначала, в первой части исследования, мы получим зависимость для суммарной величины импульсов, выраженную через круговую скорость в точке r_1 , эксцентриситеты заданных орбит и апсидальные расстояния. Затем, во второй части исследования, будет получена зависимость для суммарной величины импульсов, выраженная через скорость на круговой орбите радиуса, равного большой полуоси исходной орбиты (в рассматриваемом случае a'), отношение апсидальных расстояний заданных орбит, эксцентриситеты заданных орбит и отношение их больших полуосей. При дальнейшем анализе будут использованы следующие обозначения и вспомогательные равенства:

$$n = \frac{r_A}{r_P}, \quad (3.70a)$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n' &= r_3'/r_1, \\ n''' &= r_3'''/r_4; \end{aligned} \right\} \quad (3.70b)$$

$$n = \frac{1+e}{1-e}, \quad (3.71a)$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n' &= \frac{1+e'}{1-e'}, \\ n''' &= \frac{1+e'''}{1-e'''}; \end{aligned} \right\} \quad (3.71b)$$

$$e = \frac{n-1}{n+1}; \quad (3.72)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a'(1-e') = a''(1-e''), \\ r_2 &= a'''(1+e''') = a''(1+e''), \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

$$v_i = \frac{v_i}{\sqrt{K/r_i}} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{a'}{a''} = \alpha, \quad \frac{1-e'}{1+e''} = \varepsilon. \quad (3.74)$$

Пользуясь приведенными соотношениями, можно выразить параметры переходной орбиты через параметры заданных орбит:

$$\frac{r'_1}{r_2'''} = \frac{a'}{a'''} \frac{1-e'}{1+e'''} = \alpha\epsilon, \quad (3.75')$$

$$a'' = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{a'}{2} (1-e') \left(\frac{1+\alpha\epsilon}{\alpha\epsilon} \right), \quad (3.76)$$

$$\frac{r_3}{r_4} = n' n''' \alpha \epsilon, \quad (3.77)$$

$$\left. \begin{aligned} e'' &= 1 - \frac{r_1}{a''} = \frac{r_2}{a''} - 1 = \frac{(r_2/r_1) - 1}{(r_2/r_1) + 1}, \\ e'' &= 1 - \frac{r_4}{a''} = \frac{r_3}{a''} - 1 = \frac{(r_3/r_4) - 1}{(r_3/r_4) + 1} \end{aligned} \right\} \quad (r_3 > r_4),$$

$$e'' = 1 - \frac{r_3}{a''} = \frac{r_4}{a''} - 1 = \frac{(r_4/r_3) - 1}{(r_4/r_3) + 1} \quad (r_4 > r_3).$$

Часть I. Определение суммарной величины импульсов через $\sqrt{K/r_1}$, e' , e''' , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 .

Рассмотрим последовательно изменения орбит, составляющие изучаемые переходы.

Изменение $1' \rightarrow 1''$:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{2n'}{1+n'}} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{2 - \frac{r_1}{a'}} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_3}{a'}} = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{1+e}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$v_1^2 = \frac{2n'}{1+n'} = 2 - \frac{r_1}{a'} = \frac{r_3}{a'} = 1 + e', \quad (3.79)$$

$$v''_1 = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_2}{a''}} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{2}{1+(r_1/r_2)}}, \quad (3.80)$$

$$v_1''^2 = \frac{2}{1+(r_1/r_2)}, \quad (3.81)$$

$$v''_1 - v'_1 = \frac{\Delta v_1}{\sqrt{K/r_1}} = \sqrt{\frac{2}{1+(r_1/r_2)}} - \sqrt{1+e'}. \quad (3.82)$$

Изменение $2' \rightarrow 2'''$:

$$v''_2 = v''_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{2}{1+(r_1/r_2)}}, \quad (3.83)$$

$$v'''_2 = \sqrt{\frac{K}{r_2}} \sqrt{1-e'''} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{1-e'''}{r_1/r_2}}, \quad (3.84)$$

$$\frac{\Delta v_2}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{v'''_2 - v''_2}{\sqrt{K/r_1}} = \sqrt{\frac{1-e'''}{r_1/r_2}} - \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{2}{1+(r_1/r_2)}}. \quad (3.85)$$

Переход $1' \rightarrow 2'''$:

$$\frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{\sqrt{K/r_1}} = \sqrt{\frac{1 - e'''}{r_1/r_2}} - \sqrt{1 + e'} + \sqrt{\frac{2}{1 + (r_1/r_2)}} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right). \quad (3.86)$$

Изменение $3' \rightarrow 3''$:

$$v'_3 = \sqrt{\frac{K}{r_3} (1 - e''')} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_1}{r_3} (1 - e''')}, \quad (3.87)$$

$$v''_3 = \sqrt{\frac{K}{r_3} \frac{r_4}{a'''}} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_1}{r_3} \frac{2}{1 + (r_3/r_4)}}. \quad (3.88)$$

Следует заметить, что, хотя $r_3 < r_2$, не обязательно должно быть $r_3 < r_4$. Если эксцентриситеты заданных орбит малы, то более вероятно, что $r_3 < r_4$. Однако при больших эксцентриситетах заданных орбит, как в случае, изображенном на рис. 3.33, может оказаться, что $r_3 > r_4$. Это обстоятельство послужило одной из причин, по которой вместо обычных обозначений r_A и r_P в настоящем анализе используются цифровые индексы соответствующих точек.

Из последних выражений получаем:

$$\frac{\Delta v_3}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{v''_3 - v'_3}{\sqrt{K/r_1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \left(\sqrt{\frac{2}{1 + n'''}} - \sqrt{1 - e'''} \right). \quad (3.89)$$

Изменение $4'' \rightarrow 4'''$:

$$v''_4 = v''_3 \frac{r_3}{r_4} \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_1}{r_4} \frac{2r_3/r_4}{1 + (r_3/r_4)}}, \quad (3.90)$$

$$v'''_4 = \sqrt{\frac{K}{r_4} (1 + e''')} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \sqrt{\frac{r_1}{r_4} (1 + e''')}, \quad (3.91)$$

$$\frac{\Delta v_4}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{v'''_4 - v''_4}{\sqrt{K/r_1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_4}} \left[\sqrt{1 + e'''} - \sqrt{\frac{2r_3/r_4}{1 + (r_3/r_4)}} \right]. \quad (3.92)$$

Переход $3' \rightarrow 4'''$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_3 + \Delta v_4}{\sqrt{K/r_1}} = & \sqrt{\frac{1}{n'}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{1 + n'''}} - \sqrt{1 - e'''} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{r_3}{r_4}} \left[\sqrt{1 + e'''} - \sqrt{\frac{2r_3/r_4}{1 + (r_3/r_4)}} \right] \right\}. \quad (3.93) \end{aligned}$$

Часть II. Определение суммарной величины импульсов через $\sqrt{K/a'}$, n' , n''' , a'/a''' .

Изменение $1' \rightarrow 1''$:

$$v'_1 = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{n'}, \quad (3.94)$$

$$v''_1 = \sqrt{\frac{K}{a''}} \sqrt{n''} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{2}{1-e'}} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha\varepsilon}}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\Delta v_1}{\sqrt{K/a'}} = \frac{v''_1 - v'_1}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\frac{2}{1-e'}} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha\varepsilon}} - \sqrt{n'}. \quad (3.96)$$

Изменение $2'' \rightarrow 2'''$:

$$v''_2 = \sqrt{\frac{K}{a''}} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{2}{1-e'}} \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}}, \quad (3.97)$$

$$v'''_2 = \sqrt{\frac{K}{a'''}} \sqrt{\frac{r_4}{r_2}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{\alpha}{n'''}} \quad (3.98)$$

$$\frac{\Delta v_2}{\sqrt{K/a'}} = \frac{v'''_2 - v''_2}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\frac{\alpha}{n'''}} - \sqrt{\frac{2}{1-e'}} \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}}. \quad (3.99)$$

Переход $1' \rightarrow 2'''$:

$$\frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\frac{2}{1-e'}} \frac{1-\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}} + \sqrt{\frac{\alpha}{n'''}} - \sqrt{n'}. \quad (3.100)$$

Изменение $3' \rightarrow 3''$:

$$v'_3 = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{1}{n'}}, \quad (3.101)$$

$$v''_3 = \sqrt{\frac{K}{a''}} \sqrt{\frac{r_4}{r_3}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{2}{n'n'''(1-e')}} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha\varepsilon}}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\Delta v_3}{\sqrt{K/a'}} = \frac{v''_3 - v'_3}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\frac{2}{n'n'''(1-e')}} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{n'}}. \quad (3.103)$$

Изменение $4'' \rightarrow 4'''$:

$$v''_4 = \sqrt{\frac{K}{a''}} \sqrt{\frac{r_3}{r_4}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\frac{2n'n'''}{1-e'}} \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}}, \quad (3.104)$$

$$v'''_4 = \sqrt{\frac{K}{a'''}} \sqrt{\frac{r_2}{r_4}} = \sqrt{\frac{K}{a'}} \sqrt{\alpha n'''}, \quad (3.105)$$

$$\frac{\Delta v_4}{\sqrt{K/a'}} = \frac{v'''_4 - v''_4}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\alpha n'''} - \sqrt{\frac{2n'n'''}{1-e'}} \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}}. \quad (3.106)$$

Переход $3' \rightarrow 4'''$:

$$\frac{\Delta v_3 + \Delta v_4}{\sqrt{K/a'}} = \sqrt{\frac{2n'n'''}{1-e'}} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\varepsilon}} - \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{n'n'''}} + \sqrt{n'''\alpha} - \frac{1}{\sqrt{n'}}. \quad (3.107)$$

В соответствии с отмеченной выше закономерностью, что наиболее эффективным способом изменения расстояния до апоцентра является изменение скорости в перицентре и наиболее эффективным способом изменения расстояния до перицентра является изменение скорости в апоцентре, следует, что $(\Delta v_1 + \Delta v_2) < (\Delta v_3 + \Delta v_4)$.

2. Переход между соосными эллиптическими орбитами по пересекающей переходной орбите. Пример быстрой переходной орбиты приведен на рис. 3.34. В этом случае точкой начала перехода является перицентр, то есть имеет место равенство $\eta'_1 = \eta''_1 = 0$. Этот случай энергетически наиболее выгодный. Поэтому быстрый переход с внутренней на внешнюю эллиптическую орбиту с началом в этой точке требует меньших затрат энергии, чем переход с любой другой точки внутренней эллиптической орбиты. Параметры внутренней исходной эллиптической орбиты, как и прежде, обозначены одним штрихом. При переходе с внешней эллиптической орбиты (параметры обозначены тремя штрихами) наиболее выгодной точкой начала перехода является апоцентр исходной орбиты.

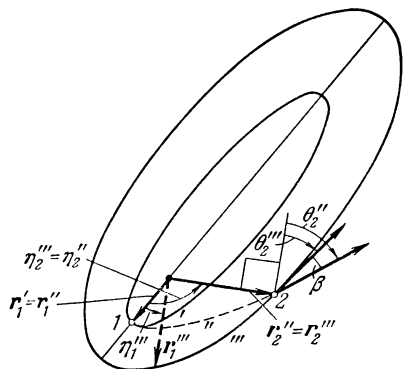


Рис. 3.34. Переход между соосными эллиптическими орбитами по переходной орбите, пересекающей орбиту цели.

Определение элементов быстрой переходной орбиты удобнее всего производить, если за независимые переменные принять расстояние до перицентра r''_p и расстояние до апоцентра r''_A переходной орбиты. По этим величинам можно сразу определить величину большой полуоси a'' переходной орбиты, а следовательно, определить

$$\left. \begin{aligned} &\text{орбитальную энергию } h'' = -K/a'' \\ &\text{и скорость в начале перехода } v''_1 = \sqrt{\frac{2K}{r''_1} + h''}, \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

где r''_1 — известная величина радиуса-вектора точки начала перехода ($r'_1 = r'_1$ и $r'_1 = r'_p$). Если $r'_1 \neq r'_p$, то переходный эллипс не является соосным с заданными эллиптическими орбитами и для

него будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \text{скорость в перигеентре } v_p'' &= v_1'' \frac{r_1''}{r_p''}, \\ \text{эксцентриситет } e'' &= 1 - \frac{r_p''}{a''}, \\ \text{фокальный параметр } p'' &= r_p''(1 + e''), \\ \text{истинная аномалия } \eta_1'' &= \arccos \frac{(p''/r_1'') - 1}{e''}, \\ \text{угол } \theta \text{ в начале перехода } \theta_1'' &= \arctg \frac{e'' \sin \eta_1''}{p''/r_1''}. \end{aligned} \right\} \quad (3.109)$$

Если быстрая переходная орбита не соосна с заданными орбитами, то величина радиуса-вектора r_2'' точки пересечения переходной орбиты с орбитой цели определяется из условия удовлетворения величины радиуса-вектора этой точки одновременно уравнению переходной орбиты и уравнению орбиты цели:

$$r_2'' = \frac{p''}{1 + e'' \cos \eta_2''} = r_2''' = \frac{p'''}{1 + e''' \cos \eta_2'''} = \frac{p'''}{1 + e''' \cos (\eta_2'' + \gamma'')}, \quad (3.110)$$

где γ'' — угол между большой осью переходной орбиты и (совпадающими) осями заданных орбит, измеряемый против хода часовой стрелки от направления на перигеентры заданных орбит. Величина η_2'' является истинной аномалией точки пересечения для переходной орбиты. Если переходная орбита соосна с заданными орбитами, то $\eta_2'' = \eta_2'''$, $r_2'' = r_2'''$, что следует из совместного решения уравнений

$$r_2'' = \frac{p''}{1 + e'' \cos \eta_2''} = r_2''' = \frac{p'''}{1 + e''' \cos \eta_2''}. \quad (3.111)$$

Соответствующее время перехода от точки 1 до точки 2 может быть найдено из следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} t_{12}'' &= t_{p2}'' - t_{p1}'', \\ t_{p1}'' &= \sqrt{\frac{a''^3}{K}} (E_1'' - e'' \sin E_1''), \\ t_{p2}'' &= \sqrt{\frac{a''^3}{K}} (E_2'' - e'' \sin E_2''), \end{aligned} \right\} \quad (3.112)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos E_1'' &= \frac{a'' - r_1''}{a'' e''}, \\ \cos E_2'' &= \frac{a'' - r_2''}{a'' e''}. \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

Варьируя r_p'' и r_A'' , получим соответствующие им значения v_1'' и θ_1'' , а следовательно, и необходимые величины импульсов скорости в начале перехода

$$\Delta v_1 = \sqrt{v_1'^2 + v_1''^2 - 2v_1'v_1'' \cos \beta_1}, \quad (3.114)$$

величину радиуса-вектора точки пересечения орбиты цели $r_2'' = r_2'''$, время перехода t_{12} и величину импульса в конце перехода

$$\Delta v_2 = \sqrt{v_2''^2 + v_2'''^2 - 2v_2''v_2''' \cos \beta_2}. \quad (3.115)$$

Углы β_1 и β_2 представляют собой соответственно угол между касательными к переходной орбите и исходной орбите в точке начала перехода и угол между касательными к орбите цели и переходной орбите в точке конца перехода:

$$\beta_1 = |\theta_1' - \theta_1''|, \quad (3.116)$$

$$\beta_2 = |\theta_2'' - \theta_2'''|, \quad (3.117)$$

где θ_1' , θ_2'' и θ_2''' определяются так же, как и θ_1'' .

При изучении перехода по эллиптической орбите, соосной с заданными орбитами, но не обязательно касающейся заданных орбит в начале и конце перехода, в качестве независимых переменных удобнее выбрать r_1 , r_2 и e'' . В этом случае, если заданные орбиты *одинаково ориентированы* (то есть одноименные точки аписид расположены по одну сторону от центра притяжения), истинные аномалии точек начала и конца перехода соответственно равны: $\eta_1'' = \eta_1'$ и $\eta_2'' = \eta_2'''$. Если же заданные орбиты имеют *противоположную ориентацию*, то $\eta_1'' = \eta_1'$ или $\eta_1'' = 180^\circ + \eta_1'$ и $\eta_2'' = \eta_2'''$ или $\eta_2'' = 180^\circ + \eta_2'''$. Используя первое выражение (3.42), получаем:

$$v_1' = \sqrt{2 - \frac{1 - e'^2}{1 + e' \cos \eta_1'}}, \quad (3.118)$$

$$v_1'' = \sqrt{2 - \frac{1 - e''^2}{1 \pm e'' \cos \eta_1'}}, \quad (3.119)$$

где знак «плюс» берется для случая, когда $\eta_1'' = \eta_1'$, а знак «минус» — для случая, когда $\eta_1'' = 180^\circ + \eta_1'$.

Углы θ переходной и исходной орбит в точке начала перехода (точка I) можно получить, воспользовавшись вторым и

третьим выражениями (3.42):

$$\theta'_1 = \arccos \frac{1}{v'_1} \sqrt{1 + e' \cos \eta'_1}, \quad (3.120)$$

$$\theta''_1 = \arccos \frac{1}{v''_1} \sqrt{1 \pm e'' \cos \eta''_1}, \quad (3.121)$$

$$\beta_1 = |\theta'_1 - \theta''_1|. \quad (3.122)$$

Истинную аномалию точки конца перехода получим по известной величине $r''_2 = r'''_2$ и известным элементам орбиты цели:

$$\cos \eta'''_2 = \frac{(p'''/r'''_2) - 1}{e'''}, \quad (3.123)$$

где $\eta''_2 = \eta'''_2$ или $\eta''_2 = 180^\circ + \eta'''_2$. Далее находим:

$$v'''_2 = \sqrt{2 - \frac{1 - e'''^2}{1 + e''' \cos \eta'''_2}}, \quad (3.124)$$

$$v''_2 = \sqrt{2 - \frac{1 - e''^2}{1 \pm e'' \cos \eta''_2}}, \quad (3.125)$$

$$\theta'''_2 = \arccos \frac{1}{v'''_2} \sqrt{1 + e''' \cos \eta'''_2}, \quad (3.126)$$

$$\theta''_2 = \arccos \frac{1}{v''_2} \sqrt{1 \pm e'' \cos \eta''_2}, \quad (3.127)$$

$$\beta_2 = |\theta''_2 - \theta'''_2|.$$

Величины импульсов скорости в точках начала и конца перехода можно получить на основании соотношения (3.35):

$$\Delta v_1 = \frac{K}{r_1} \sqrt{1 + \left(\frac{v'_1}{v_1}\right)^2 - 2 \frac{v'_1}{v_1} \cos \beta_1}, \quad (3.128)$$

$$\Delta v_2 = \frac{K}{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{v'''_2}{v_2}\right)^2 - 2 \frac{v'''_2}{v_2} \cos \beta_2}. \quad (3.129)$$

Время перехода определяется так же, как и прежде. По этой схеме, задавшись величинами r_1 , r_2 и e'' , можно получить соответствующие величины суммарного импульса $\Delta v_1 + \Delta v_2$ и времени перехода t''_{12} . Зная t''_{12} , можно определить положение цели на орбите, обеспечивающее встречу с нею (или прохождение

вблизи от нее), в следующей последовательности: μ''' , e''' , a''' , η_2''' , E_2''' и, далее,

$$M_2''' = E_2''' - e''' \sin E_2''' \quad (3.130)$$

(отсчет средней аномалии производится от перигентра, то есть $M'''=0$ при $E'''=0$, $\eta'''=0$).

Величина M_1''' находится из следующего выражения:

$$M_1''' = M_2''' - \mu''' t_{12}'''. \quad (3.131)$$

Соответствующее значение E_1''' можно определить из уравнения

$$M_1''' = E_1''' - e''' \sin E_1'''. \quad (3.132)$$

Поскольку последнее уравнение нельзя разрешить в явном виде относительно E_1''' , то для определения E_1''' необходимо использовать специальные методы решения. Некоторые методы решения этого уравнения были приведены в главе 5 первого тома настоящей серии (см. «Космический полет», т. I). Более широкий обзор различных методов решения этого уравнения (уравнения Кеплера) можно найти в учебниках по небесной механике.

Как было отмечено, $M'''=0$ при $\eta'''=0$. Поэтому, если t_{12}''' достаточно велико и $M_1''' < 0$ (например, 350°), то это означает, что тело, с которым предполагается осуществить встречу, должно находиться «впереди» перигентра в момент начала перехода. Следовательно, и $E_1''' < 0$ (этот случай относится к переходу с внешней орбиты на внутреннюю). После определения E_1''' поллярные координаты цели, соответствующие началу перехода, можно определить по следующим зависимостям:

$$r_1''' = a''' (1 - e''' \cos E_1'''), \quad (3.133)$$

$$\cos \eta_1''' = \frac{a''' \cos E_1''' - a''' e'''}{r_1'''} \quad (3.134)$$

Если же известны эфемериды цели, то ее координаты, соответствующие началу перехода, могут быть найдены из таблиц.

3. Переход между несоосными эллиптическими орбитами по пересекающей переходной орбите. Этот случай перехода имеет большое практическое значение (рис. 3.35), например при межпланетных переходах. Исследование подобных переходов может быть сведено к предыдущему случаю перехода между соосными эллиптическими орбитами, если принять, что $\eta_2''' \dots$

$= \eta'' \pm \gamma'''$. Таким образом, случай перехода между несоосными эллиптическими орбитами является просто модификацией перехода между соосными эллиптическими орбитами.

4. Переход между несоосными эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит. Предыдущий анализ был посвящен двум типам переходов между двумя заданными эллиптическими орбитами: переходу между соосными эллиптическими орбитами по касающейся соосной переходной орбите и по пересекающей переходной орбите и переходу между несоосными эллиптическими орбитами по пересекающей переходной орбите. В случае несоосных эллиптических орбит переход между ними по касающейся соосной орбите невозможен. Однако переход между ними можно осуществить по переходной орбите, касающейся обеих заданных орбит. В предыдущем анализе не были рассмотрены вопросы минимизации требуемой энергии перехода. Все переходы по пересекающей переходной орбите требуют большего расхода энергии, чем касательный соосный переход, но обладают соответственно меньшим временем перехода. К тому же дополнительным преимуществом этих переходов является большая свобода выбора времени начала перехода. Поскольку касательный несоосный переход обладает также большей гибкостью в выборе времени начала перехода и, очевидно, меньшей требуемой энергией, чем переход по пересекающей переходной орбите, то этот случай представляет определенный практический интерес. Кроме того, поскольку касательный соосный переход невозможен между двумя несоосными эллиптическими орбитами, то рассматриваемый тип перехода в данном случае будет соответствовать переходу с минимальной затратой энергии.

Касательный переход между компланарными эллиптическими и не обязательно соосными орбитами был исследован Лоуденом (D. F. Lawden)¹⁾.

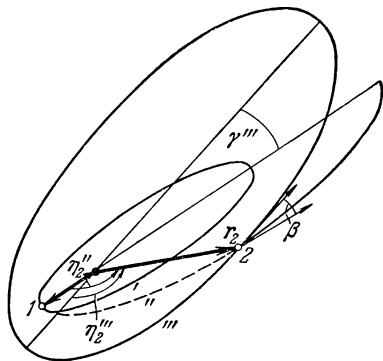


Рис. 3.35. Переход между компланарными несоосными эллиптическими орбитами по переходной эллиптической орбите, пересекающей орбиту цели.

¹⁾ Orbital Transfer via Tangential Ellipse, J. B. I. S., vol. 11, No. 6, pp. 278—289 (November 1952).

Поскольку отрезок $N'N''$ равен $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}$, то отсюда следует, что положение, или «наклон», треугольника $Q'OQ''$ по отношению к линии OI определяется соотношением

$$N'N'' = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}. \quad (3.138)$$

Это возможно лишь при

$$Q'Q'' \geq N'N'' \quad (3.139)$$

или при

$$\left(\frac{e'}{p'}\right)^2 + \left(\frac{e''}{p''}\right)^2 - 2 \frac{e'e''}{p'p''} \cos(l' - l'') \geq \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}\right)^2. \quad (3.140)$$

Выполнению равенства соответствует случай касания эллипсов. Если левая часть неравенства (3.140) больше правой, то эллипсы

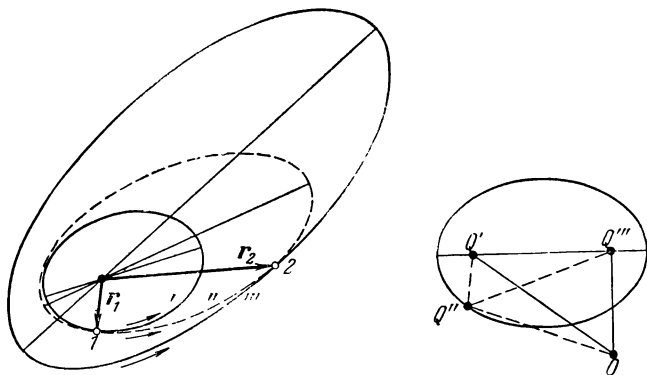


Рис. 3.37. Геометрическая иллюстрация перехода между двумя непересекающимися эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит. [Если точка O принадлежит эллипсу (то есть является возможным положением точки Q''), то переходная орбита является круговой.]

пересекаются. Если левая часть меньше правой, то эллипсы не имеют общих точек и один из них расположен целиком внутри другого.

Расстояние $r_1 = r' = r''$, удовлетворяющее равенству (3.140) для двух заданных эллипсов (p', e', l') и (p'', e'', l'') , можно определить из равенства

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} \right) - \frac{\left(\frac{e''}{p''} \right)^2 - \left(\frac{e'}{p'} \right)^2}{\frac{1}{p''} - \frac{1}{p'}} \right], \quad (3.141)$$

которое можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{r_1}{p'} = \frac{2 \left(1 - \frac{p''}{p'} \right)}{\frac{p'}{p''} (1 - e''^2) - \frac{p''}{p'} (1 - e'^2)}. \quad (3.142)$$

Используя выражение $p = a(1 - e^2)$, получаем:

$$r_1 = \frac{2 \left(1 - \frac{p''}{p'} \right)}{a' - \frac{p''}{p'} a'}. \quad (3.143)$$

Таким образом, если параметры двух заданных эллипсов удовлетворяют равенству (3.140), то величина радиуса-вектора точки касания может быть найдена по формуле (3.142) или (3.143), а истинная аномалия η_1 этой точки — по формуле (3.136).

Вернемся к вопросу о переходе по переходной орбите, касающейся двух заданных эллиптических орбит. Рассматриваемый случай изображен на рис. 3.37. Параметры исходной и конечной орбит помечены соответственно одним и тремя штрихами. Параметры переходной орбиты помечены двумя штрихами. Введем обозначения:

$$\frac{e}{p} = \varepsilon, \quad \frac{1}{p} = \psi. \quad (3.144)$$

Тогда условия касания переходной орбиты заданных орбит примут вид:

$$e'^2 + e''^2 - 2e'e'' \cos(l' - l'') = (\psi'' - \psi')^2, \quad (3.145)$$

$$e'''^2 + e''^2 - 2e'''e'' \cos(l''' - l'') = (\psi'' - \psi''')^2. \quad (3.146)$$

В приведенных двух уравнениях известными являются следующие шесть величин: e' , l' , ψ' , e''' , l''' , ψ''' ; неизвестными величинами являются: e'' , l'' , ψ'' . Исключение l'' из уравнений (3.145) и (3.146) позволило бы, как было указано Лоуденом, выразить одну из оставшихся неизвестных через другую. Однако этот путь приводит к чрезвычайно сложным математическим выражениям. Исключение составляет случай равенства или (в зависимости от требуемой точности) приближенного равенства l' и l''' . В этом случае $2e'' \cos(l' - l'') \approx \approx 2e'' \cos(l''' - l'')$ можно исключить и разрешить полученное уравнение относительно e'' :

$$e'' = \left[\frac{\varepsilon' (\psi'' - \psi''')^2 - e''' (\psi'' - \psi')^2 + \varepsilon''' e'^2 - \varepsilon' e'''^2}{\varepsilon' - \varepsilon'''} \right]^{1/2}. \quad (3.147)$$

Для общего случая ($l''' \neq l'$) Лоуден предложил геометрический метод определения положения Q'' , удовлетворяющего

условию касания. Сущность этого метода показана на рис. 3.38. Возможные случаи, удовлетворяющие уравнениям (3.145) и (3.146), сведены в приведенную ниже таблицу.

Случай	Условия	$Q''Q'$	$Q''Q'''$	Угол
A	$\psi'' < \psi'; \psi'' < \psi'''$	$\psi' - \psi''$	$\psi''' - \psi''$	$OQ''Q' = \eta_1 - l''$
B	$\psi'' > \psi'; \psi'' > \psi'''$	$\psi'' - \psi'$	$\psi'' - \psi'''$	$OQ''Q' = 180^\circ - (\eta_1 + l'')$
C	$\psi' < \psi'' < \psi'''$	$\psi'' - \psi'$	$\psi''' - \psi''$	$OQ''Q''' = \eta_2 + l''$
D	$\psi''' < \psi'' < \psi'$	$\psi' - \psi''$	$\psi'' - \psi'''$	$OQ''Q''' = 180^\circ - (\eta_1 + l''')$

Случаи A и B относятся к пересекающимся заданным орбитам, случаи C и D — к непересекающимся.

В случаях A и B имеет место равенство

$$|Q''Q' - Q''Q'''| = |\psi' - \psi'''|, \quad (3.148)$$

поэтому геометрическим местом точек касания Q'' является гипербола с фокусами Q' и Q''' . В случаях C и D имеет место равенство

$$Q''Q' + Q''Q''' = |\psi' - \psi'''| \quad (3.149)$$

и геометрическим местом точек касания Q'' является эллипс с фокусами Q' и Q''' . Таким образом, в любом случае имеется бесконечно большое число софокусных эллипсов, касающихся заданных эллипсов.

Итак, геометрическим местом точек касания Q'' переходной орбиты между двумя непересекающимися эллиптическими орбитами (рис. 3.37) является эллипс, определяемый выражением (3.149). Геометрическим местом точек касания Q'' переходной орбиты двух пересекающихся эллиптических орбит (рис. 3.39) является гипербола, определяемая выражением (3.148). Для заданной пары эллиптических орбит можно в определенном масштабе построить соответствующую кривую конического сечения, являющуюся геометрическим местом точек касания Q'' ,

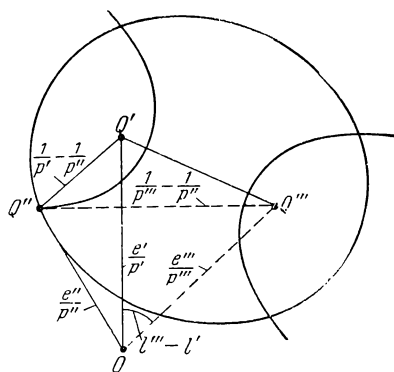


Рис. 3.38. Условия касания переходной орбиты двух заданных эллиптических орбит.

и, выбрав ряд значений Q'' , по измеренным величинам OQ'' и $Q''Q'$ определить величины e''/p'' и $1/p''$.

Естественно, что геометрический метод решения задачи обладает ограниченной точностью. Для решения задачи можно использовать графо-аналитический метод или, при наличии электронной вычислительной машины, метод последовательных приближений для совместного решения уравнений (3.145) и (3.146). Сущность графо-аналитического метода заключается в следующем. Используя l'' в качестве параметра, строят график ψ'' в функции от ϵ'' на основании решения каждого из двух следующих уравнений:

$$\psi'' = \psi' \pm \sqrt{E_1}, \quad (3.150)$$

$$\psi'' = \psi''' \pm \sqrt{E_3}, \quad (3.151)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \epsilon'^2 + \epsilon''^2 - 2\epsilon'\epsilon'' \cos(l' - l'') = (\psi'' - \psi')^2, \\ E_3 &= \epsilon'^2 + \epsilon'''^2 - 2\epsilon'\epsilon''' \cos(l''' - l'') = (\psi'' - \psi''')^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.152)$$

Рис. 3.39. Переход между двумя пересекающимися эллиптическими орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит.

Точка пересечения графиков соответствует совместному решению уравнений (3.145) и (3.146). По найденным величинам l'' , ϵ'' и ψ'' можно определить:

$$\left. \begin{aligned} p'' &= \frac{1}{\psi''}, & e'' &= \frac{\epsilon''}{\psi''}, \\ a'' &= \frac{p''}{1 - e''^2}, & r_1 &= \frac{2(1 - p''/p')}{a'' - (p''/p') a'}, \\ \cos(\eta_1'' + l'') &= \frac{1}{e''} \left(\frac{p''}{r_1} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.153)$$

(отсюда находится η_1''),

$$r_2 = \frac{2[1 - (p''/p''')]}{a'' - (p''/p''') a'''}, \quad \cos(\eta_2'' + l'') = \frac{1}{e''} \left(\frac{p''}{r_2} - 1 \right)$$

(отсюда находится η_2'').

По известным величинам r_1 и r_2 можно, используя полярные уравнения заданных орбит, рассчитать истинные аномалии η'_1 и η''_2 . Величины θ_1 и θ_2 определяются из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e \sin \eta}{p/r}. \quad (3.154)$$

Затем, используя равенства

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{Kp}}{rv} = \frac{\sqrt{\frac{K}{r} \frac{p}{r}}}{v}, \quad (3.155)$$

получаем:

$$v = \sqrt{\frac{K}{r}} \frac{\sqrt{\frac{p}{r}}}{\cos \theta}, \quad (3.156)$$

откуда с учетом ранее введенного обозначения $v_i = v_i / \sqrt{K/r_i}$ будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= \frac{\sqrt{\frac{p'}{r_1}}}{\cos \theta_1}, & v''_1 &= \frac{\sqrt{\frac{p''}{r_1}}}{\cos \theta_1}, \\ v''_2 &= \frac{\sqrt{\frac{p'''}{r_2}}}{\cos \theta_2}, & v''_2 &= \frac{\sqrt{\frac{p''}{r_2}}}{\cos \theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.157)$$

Суммарная величина импульсов скорости $\sum \Delta v = (v''_1 - v'_1) + (v''_2 - v''_2)$ определяется из выражения

$$\sum_{i=1}^2 \Delta v_i = \frac{\sqrt{\frac{K}{r_1}}}{\cos \theta_1} \left(\sqrt{\frac{p'}{r_1}} - \sqrt{\frac{p''}{r_1}} \right) + \frac{\sqrt{\frac{K}{r_2}}}{\cos \theta_2} \left(\sqrt{\frac{p'''}{r_2}} - \sqrt{\frac{p''}{r_2}} \right). \quad (3.158)$$

Время перехода можно рассчитать, используя следующую формулу:

$$\begin{aligned} \Delta t = \frac{\sqrt{\frac{p''}{K}}}{1-e''^2} \{ & \sqrt{2p''r_1 - r_1^2(1-e''^2) - p''^2} - \\ & - \sqrt{2p''r_2 - r_2^2(1-e''^2) - p''^2} + \\ & + \frac{p}{\sqrt{1-e''^2}} \left[\arcsin \frac{r_2(1-e''^2) - p''}{e''p''} - \arcsin \frac{r_1(1-e''^2) - p''}{e''p''} \right] \}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

При использовании графо-аналитического метода масштаб построения графиков выбирается в соответствии с требуемой

точностью. Точки пересечения определяются для заданных величин l'' . Если заданные эллипсы не пересекаются, то l'' может иметь любое значение от 0 до 360° . Для пересекающихся заданных эллипсов решение существует лишь в определенном диапазоне значений l'' , который может быть определен заранее построением гиперболы, определяемой выражением (3.148).

5. Переход между несоосными околорядовыми орбитами по переходной орбите, касающейся исходной и конечной орбит. Для этого случая, имеющего большое практическое значение при межпланетных перелетах, Лоуденом получены упрощенные зависимости, основанные на пренебрежении степенями e выше первой в выражении (3.147). При $e' = e''' = 0$ из уравнений (3.145) и (3.146) получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' &= \bar{\psi}'' = \frac{1}{2} (\psi' + \psi'''), \\ \varepsilon'' &= \bar{\varepsilon}'' = \frac{1}{2} (\psi' - \psi'''). \end{aligned} \right\} \quad (3.160)$$

Для малых значений e' и e''' при $\psi' > \psi'''$ можно записать:

$$\psi'' = \bar{\psi}'' + x'', \quad \varepsilon'' = \bar{\varepsilon}'' + y'', \quad (3.161)$$

где x и y — величины того же порядка малости, что e' и e''' . Подставляя полученные выражения в уравнения (3.145) и (3.146) и сохраняя лишь величины первого порядка, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x'' + y'' &= e' \cos(l'' - l'), \\ -x'' + y'' &= e''' \cos(l'' - l'''). \end{aligned} \right\} \quad (3.162)$$

Выражая x'' и y'' через l'' , находим:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \frac{1}{2} e' \cos(l'' - l') - \frac{1}{2} e''' \cos(l'' - l'''), \\ y'' &= \frac{1}{2} e' \cos(l'' - l') + \frac{1}{2} e''' \cos(l'' - l'''). \end{aligned} \right\} \quad (3.163)$$

Подставляя эти значения в соотношения (3.161), получаем упрощенные выражения для ψ'' и ε'' :

$$\left. \begin{aligned} \psi'' &= \bar{\psi}'' + \frac{1}{2} [e' \cos(l'' - l') - e''' \cos(l'' - l''')], \\ \varepsilon'' &= \bar{\varepsilon}'' + \frac{1}{2} [e' \cos(l'' - l') + e''' \cos(l'' - l''')]. \end{aligned} \right\} \quad (3.164)$$

Из выражения $p = a(1 - e^2)$, используя равенства (3.144), находим:

$$\frac{1}{a''} = \frac{\psi''^2 - \varepsilon''^2}{\psi''}. \quad (3.165)$$

Из соотношения $v^2 = K[(2/r) - (1/a)]$, исключая r и a с помощью выражений (3.141), (3.165), (3.144), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1'^2}{K} &= \psi' + \frac{\psi' \varepsilon''^2 - \psi'' \varepsilon'^2}{\psi'' (\psi' - \psi'')}, \\ \frac{v_1''^2}{K} &= \psi'' + \frac{\psi' \varepsilon'^2 - \psi'' \varepsilon''^2}{\psi' (\psi' - \psi'')} \end{aligned} \right\} \quad (3.166)$$

и, как было установлено Лоуденом, находим величину импульса скорости:

$$\frac{|v_1'' - v_1'|}{\sqrt{K}} = \left[\frac{\psi'^{1/2} - \psi''^{1/2}}{\psi'^{1/2} + \psi''^{1/2}} \left(\psi' - \frac{\varepsilon'^2}{\psi'} - \psi'' + \frac{\varepsilon''^2}{\psi''} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.167)$$

Аналогичным образом получается выражение для второго импульса скорости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_2''^2}{K} &= \psi''' + \frac{\psi''' \varepsilon''^2 - \psi'' \varepsilon'''^2}{\psi'' (\psi''' - \psi'')}, \\ \frac{v_2'''^2}{K} &= \psi'' + \frac{\psi''' \varepsilon'^2 - \psi'' \varepsilon'''^2}{\psi''' (\psi''' - \psi'')} \end{aligned} \right\} \quad (3.168)$$

$$\frac{|v_2'' - v_2'''|}{\sqrt{K}} = \left[\frac{\psi'''^{1/2} - \psi''^{1/2}}{\psi'''^{1/2} + \psi''^{1/2}} \left(\psi''' - \frac{\varepsilon'''^2}{\psi'''} - \psi'' + \frac{\varepsilon''^2}{\psi''} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.169)$$

Суммарная величина импульсов скорости будет:

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^2 \Delta v_i = \frac{|v_1'' - v_1'|}{\sqrt{K}} + \frac{|v_2'' - v_2'''|}{\sqrt{K}}. \quad (3.170)$$

Выражения (3.165) — (3.170) пригодны и для заданных орбит с большими эксцентриситетами. В применении к околокруговым орбитам величины ψ'' и ε'' могут быть вычислены по формулам (3.164). Выражение для суммарной величины импульсов скорости было приведено Лоуденом к следующему виду:

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^2 \Delta v_i = a + b \cos(l'' - l') + c \cos(l'' - l'''), \quad (3.171)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\psi' - \psi'''}{\sqrt{\psi''}} - \sqrt{\psi'} + \sqrt{\psi'''}, \\ b &= \varepsilon' \left(\frac{\psi' + 3\psi'''}{4(\psi'')^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{\psi'}} \right), \\ c &= \varepsilon''' \left(\frac{3\psi' + \psi'''}{4(\psi'')^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{\psi''}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.172)$$

Варьируя в равенстве (3.171) величину l'' , можно получить выражение для минимума суммарной величины импульсов скорости:

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \left[\sum_{i=1}^2 \Delta v_i \right]_{\min} = a - \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(l' - l'')} . \quad (3.173)$$

Соответствующее значение l'' , обеспечивающее минимальную суммарную величину импульсов скорости, определяется из выражения

$$\operatorname{tg} l'' = \frac{b \sin l' + c \sin l'''}{b \cos l' + c \cos l'''} = \frac{A}{B} . \quad (3.174)$$

При этом, если

$A < 0, B < 0$ — l'' находится в первой четверти,

$A < 0, B > 0$ — l'' находится во второй четверти,

$A > 0, B > 0$ — l'' находится в третьей четверти,

$A > 0, B < 0$ — l'' находится в четвертой четверти.

В общем случае для заданной величины l'' при $\eta_1' = \eta_1''$, то есть в точке касания, Лоуден показал, что точками касания являются точки апсид переходной орбиты. В этом случае время перехода составляет половину периода обращения по переходной орбите:

$$\Delta t = \frac{1}{2} T = \pi \sqrt{a^3/K}$$

или, с использованием равенств (3.165) и (3.164),

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{K}} \left(\frac{1}{2\psi'} + \frac{1}{2\psi'''} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{3\psi'^2 \epsilon'' \cos(l'' - l''') - \psi'''^2 \epsilon' \cos(l'' - l')}{2\psi' \psi'' (\psi' - \psi''')} \right] . \quad (3.175)$$

Последняя формула пригодна лишь для орбит с малым эксцентриситетом, так как она получена на основании равенств (3.164). В правой части полученного выражения известны все величины, кроме l'' . Варьируя величину l'' , можно определить значение l'' , соответствующее минимальному времени перехода или какому-либо другому ограничению по времени перехода.

При использовании полученных уравнений в задаче перехода между околокруговыми орбитами, соответственно заданными величинами ψ', ϵ', l' и ψ'', ϵ'', l'' , поступают следующим образом. Вначале по формулам (3.160) находят $\bar{\psi}''$ и $\bar{\epsilon}''$, затем по формулам (3.172) определяют a, b и c . Затем либо задаются l'' и соответствующую суммарную величину импульсов скорости

определяют по формуле (3.170) с использованием соотношений (3.163), (3.164), (3.167), (3.169), а время перехода — по формуле (3.175), либо определяют l'' по формуле (3.175), исходя из заданных требований на время перехода Δt . В последнем случае для ряда заданных значений l'' определяют соответствующие значения Δt и интерполированием находят l'' , отвечающее заданному Δt . В этом случае методика определения суммарной величины импульсов скорости остается прежней.

Наконец, если l'' выбирается из условия минимума суммарной величины импульсов скорости, то $\operatorname{tg} l''$ определяется по формуле (3.174), а соответствующая суммарная величина импульсов скорости — по формуле (3.173). Определение величин импульсов скорости в отдельности производится по описанному выше методу.

3.8. Влияние малых импульсов скорости на элементы кеплеровой орбиты

Предыдущий параграф был посвящен вопросам изменения орбит и переходам между компланарными орбитами. При этом предполагалось, что изменение орбиты достигается приложением импульса скорости (мгновенным приложением силы тяги). В настоящем параграфе будет рассмотрено влияние малых импульсов скорости на элементы орбиты в поле центральной силы. Под малыми импульсами Δv будем понимать импульсы скорости, которые по величине составляют незначительную часть от величины текущей скорости, то есть $\Delta v/v \ll 1$ или $\Delta v/v \leq 0,01$.

а) **Эллипс.** Элементами эллиптической орбиты являются: долгота восходящего узла Ω , наклонение орбиты i , аргумент перигея ω , эксцентриситет e , большая полуось a и среднее движение μ . Силы, приложенные к движущемуся по орбите телу, можно представить в виде двух пар составляющих в плоскости орбиты (взаимно перпендикулярных) и ортогональной составляющей (перпендикулярной плоскости орбиты).

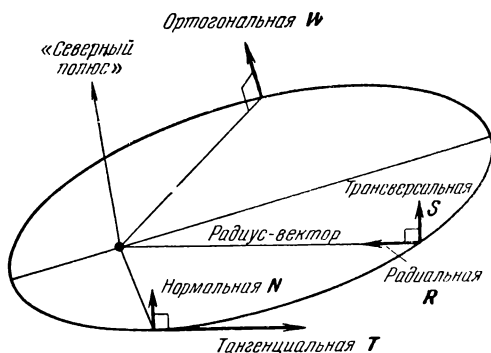


Рис. 3.40. Разложение силы на составляющие (положительные направления показаны стрелками).

Эти составляющие показаны на рис. 3.40:

тангенциальная T — положительна в направлении движения, нормальная N — положительна в направлении мгновенного центра кривизны,

радиальная R — положительна в направлении к центру притяжения,

трансверсальная S — положительна в сторону движения, ортогональная W — положительна в сторону северного полюса орбиты (составляющая W образует правую тройку с составляющими S и R и составляющими T и N).

Частично влияние составляющих T , N и W было исследовано Мультоном¹⁾. Ниже будет представлено полное исследование.

Для определения влияния *тангенциального импульса* на величину большой полуоси найдем частную производную da/dv , воспользовавшись следующим выражением:

$$v^2 = K \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3.176)$$

В результате получим:

$$\frac{da}{dv} = \frac{2a^2}{K} v, \quad (3.177)$$

$$\frac{da}{dv} = \frac{2a^2}{\sqrt{K}} \left[\frac{2(1+e \cos \eta)}{r_p(1+e)} - \frac{1}{a} \right]^{1/2}. \quad (3.178)$$

Максимальной величине da/dv соответствует приложение импульса в перигее ($\eta=0$), минимальной — в апогее.

Изменение формы орбиты характеризуется изменением эксцентриситета. Большая полуось и эксцентриситет связаны соотношением

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{(r^2 \dot{\eta})^2}{K(1-e^2)} = \frac{C^2}{K(1-e^2)}. \quad (3.179)$$

Дифференцируя это равенство, считая переменными a , e и C и подставляя $da = 2a^2 v dv/K$, получаем:

$$Kae \, de = a^2 v \, dv (1-e^2) - C \, dC. \quad (3.180)$$

Умножая каждое слагаемое последнего равенства на v , учитывая, что тангенциальный импульс, по определению, не изменяет направления вектора текущей скорости (а изменяет только ее величину), и используя равенство $v \, dC = C \, dv$, получаем:

$$Kae v \frac{de}{dv} = a^2 v^2 (1-e^2) - C^2. \quad (3.181)$$

¹⁾ An Introduction to Celestial Mechanics, 2nd ed., MacMillan, pp. 323—332.

На основании очевидных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{r} &= \frac{1+e \cos \eta}{1-e^2}, & C^2 &= \frac{r(1+e \cos \eta)}{K}, \\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 + (r\dot{\eta})^2 = K \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.182)$$

выражение (3.181) можно преобразовать к виду

$$ev \frac{\partial e}{\partial v} = 2(1+e \cos \eta) - (1-e^2) - \frac{r}{a}(1+e \cos \eta).$$

Преобразовав последнее слагаемое с помощью соотношений (3.182), окончательно получим:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{2}{v}(e + \cos \eta). \quad (3.183)$$

Как следует из полученного выражения, частная производная, характеризующая изменение эксцентриситета в зависимости от изменения величины скорости, состоит из медленно изменяющегося члена $2e/v$ и периодического члена $2 \cos \eta/v$. В точке пересечения малой полуоси с эллипсом $\cos \eta = -e$ и, следовательно, $\partial e/\partial v = 0$. При меньших значениях η положительный импульс скорости увеличивает эксцентриситет, при больших — уменьшает. Поскольку положительный импульс скорости может только увеличить орбитальную энергию, то уменьшение эксцентриситета при этом означает, что увеличение перигейного расстояния r_p превосходит увеличение апогейного расстояния r_A , то есть орбита изменяется в сторону круговой.

Влияние тангенциального импульса на среднее движение можно определить из соотношения $\mu = \sqrt{K/a^3}$:

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{3v}{\sqrt{Ka}} = -3v \sqrt{\frac{1-e^2}{Kr(1+e \cos \eta)}}. \quad (3.184)$$

Положительный импульс уменьшает μ , то есть увеличивает период обращения.

Для определения влияния тангенциального импульса на величину истинной аномалии, а следовательно, на аргумент перигея, воспользуемся полярным уравнением орбиты в следующей форме:

$$p = r[1 + e \cos(\eta - \eta_0)], \quad (3.185)$$

где $p = C^2/K$ — фокальный параметр, η — истинная аномалия точки приложения импульса и η_0 — истинная аномалия любой принятой точки отсчета (например, для перигея $\eta_0 = 0$). Уравнение (3.185) можно переписать в следующем виде:

$$C^2 = Kr[1 + e \cos(\eta - \eta_0)].$$

Продифференцируем последнее выражение, полагая r и η постоянными, а C , e и η_0 — переменными. Получим:

$$e \sin(\eta - \eta_0) \partial \eta_0 = \frac{2C}{Kr} \partial C - \cos(\eta - \eta_0) \partial e. \quad (3.186)$$

Подставив $\partial C = C \frac{\partial v}{v}$ и ∂e из равенства (3.183), получим выражение для частной производной, характеризующей поворот линии апсид вследствие тангенциального импульса скорости:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v} = \frac{2 \sin(\eta - \eta_0)}{ev}. \quad (3.187)$$

Из полученного выражения следует, что при положительном тангенциальном импульсе скорости перигейная точка смещается в направлении движения (вперед), если точка приложения импульса находится в пределах $0 < \eta < 180^\circ$ (то есть при движении космического аппарата от перигейной точки к апогейной). Положительный тангенциальный импульс, приложенный в точке, находящейся в диапазоне $180^\circ < \eta < 360^\circ$, вызывает обратный поворот линии апсид. Тангенциальный импульс скорости не изменяет наклонения орбиты и долготы восходящего узла.

Рис. 3.41. Нормальная, тангенциальная и радиальная составляющие скорости.

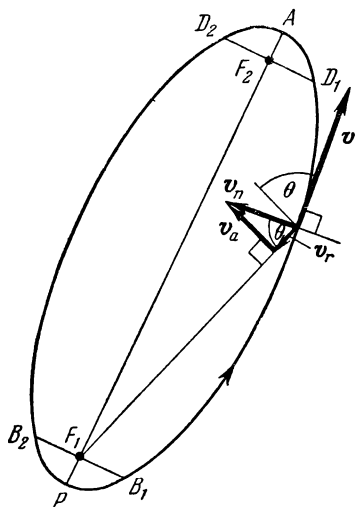
В случае приложения импульса N , нормального к направлению движения, из равенства (3.176) следует, что

$$\frac{\partial a}{\partial v_n} = 0, \quad (3.188)$$

так как величина большой полуоси кеплеровой орбиты зависит лишь от величины скорости, а не от ее направления. Из выражения $\mu = \sqrt{K/a^3}$ следует также, что

$$\frac{\partial \mu}{\partial v_n} = 0. \quad (3.189)$$

Таким образом, величина большой полуоси и среднее движение не изменяются под воздействием нормального импульса, так как величина скорости при этом (предполагается) не изменяется. Не изменяются также наклонение орбиты и долгота вос-



ходящего узла, так как вектор импульса скорости располагается в плоскости орбиты. Нормальный импульс скорости вызывает изменение эксцентриситета и аргумента перигея. Из соотношения (3.180) следует, что

$$\frac{\partial e}{\partial C} = - \frac{C}{Kae}. \quad (3.190)$$

Разлагая нормальную скорость v_n , вызванную нормальным импульсом, на радиальную и трансверсальную составляющие (см. рис. 3.41) и используя соотношения

$$\dot{r}\eta = v_a = v \cos \theta \text{ и } r^2\dot{\eta} = C = rv_a = rv \cos \theta,$$

можно получить:

$$rv_a = r^2\dot{\eta} = C = rv_n \sin \theta \quad (3.191)$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial v_n} = r \sin \theta. \quad (3.192)$$

Используя очевидные соотношения

$$\sin \theta = \frac{\dot{r}}{v}, \quad \dot{r} = \frac{rv_a}{p} e \sin \eta, \quad p = \frac{C^2}{K},$$

получаем:

$$\sin \theta = \frac{Ke}{Cv} \sin \eta. \quad (3.193)$$

Окончательно из соотношений (3.190), (3.192) и (3.193) находим:

$$\frac{\partial e}{\partial v_n} = - \frac{r}{av} \sin \eta. \quad (3.194)$$

Величину $\partial \eta_0 / \partial v_n$ можно получить, подставляя в соотношение (3.186) выражения (3.190) и (3.194) для ∂C и ∂e , заменяя в последнем η на $\eta - \eta_0$:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v_n} = \frac{2ae + r \cos (\eta - \eta_0)}{aev}. \quad (3.195)$$

Из соотношения (3.194) следует, что нормальный импульс, приложенный при движении космического аппарата от перигея к апогею (первые два квадранта), уменьшает эксцентриситет. Если же он будет приложен при движении аппарата от апогея к перигею (оставшиеся два квадранта), то эксцентриситет увеличится. Как следует из анализа выражения (3.195) и рис. 3.41, положительный нормальный импульс, приложенный в какой-либо точке участка D_2PD_1 , поворачивает линию апсид в направлении движения космического аппарата. Если же импульс прикладывается на участке D_2AD_1 , то линия апсид поворачивается в противоположную сторону.

Влияние малого импульса скорости

Элемент, изменение которого рассматривается	Направление импульса	
	тангенциальное	нормальное
Большая ось	$\frac{2a^2}{K} v dv$	0
Эксцентриситет	$2(e + \cos \eta) \frac{dv}{v}$	$-\frac{r}{a} \frac{dv_n}{v} \sin \eta$
Среднее движение	$-\frac{3v}{\sqrt{Ka}} dv$ $-3v dv \sqrt{\frac{1-e^2}{Kr(1+e \cos \eta)}}$	0
Перицентр	$\frac{2 \sin(\eta - \eta_0)}{e} \frac{dv}{v}$	$\frac{2ae + r \cos(\eta - \eta_0)}{aev} dv_n$
Наклонение *)	0	0
Узлы *)	0	0

η_0 — истинная аномалия перицентра, отсчитываемая от фиксированного в инер

η_Ω — истинная аномалия восходящего узла до точки приложения импульса;

$$C = r^2 \dot{\eta} = \sqrt{Ka(1-e^2)}; \quad q = v_a^2 / \sqrt{K/r}.$$

*) См. анализ формул (3.196)–(3.200h).

Таблица 3.1

на элементы эллиптической орбиты

(всегда положительное, см. рис. 3.40)

радиальное	трансверсальное	ортогональное
$-\frac{2a^2e}{C} dv_r \sin \eta$ $-\frac{2a^2v_r}{K} dv_r \sin \eta$	$\frac{2a^2C}{Kr} dv_a$ $\frac{2a^2v_a}{K} dv_a$	0
$-\frac{C}{K} dv_r \sin \eta$ $-\frac{qv_r}{eK/r} dv_r$	$\frac{C}{Kaer} dv_a (b^2 - r^2)$ $\frac{v_a}{Kae} dv_a r^2 \left(\frac{qa}{r} - 1 \right)$	0
$\sqrt[3]{\frac{K}{ac^2}} dv_r \sin \eta$ $3 \frac{dv_r}{\sqrt{ap}} \sin \eta$	$-\frac{3C}{r\sqrt{Ka}} dv_a$ $-\frac{3}{r} \sqrt{\frac{p}{a}} dv_a$	0
$\frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{K}} dv_r \cos (\eta - \eta_0)$	$(p+r) \frac{\sin (\eta - \eta_0)}{Ke} dv_a$	0
0	0	$\frac{dv_w}{v_a} \cos (\eta - \eta_\Omega)$
0	0	$\frac{dv_w}{v_a} \frac{\sin (\eta - \eta_\Omega)}{\sin i}$

циальном пространстве направления;

Аналогичным образом можно найти частные производные, характеризующие изменения a , μ , e и η_0 , вызванные радиальным и трансверсальным импульсами. При этом положение линии узлов и наклонение орбиты также не будут подвержены изменению, поскольку вектор импульса находится в плоскости орбиты. Соответствующие выражения для частных производных сведены в таблицу 3.1.

Ортогональный импульс не влияет на величину большой полуоси, эксцентриситет, среднее движение и угловое расстояние перигея от фиксированного в инерциальном пространстве направления¹⁾. Это объясняется тем, что ортогональный импульс изменяет лишь направление вектора скорости, не изменяя его величину. Таким образом, под действием ортогонального импульса изменяется лишь наклонение орбиты и положение линии узлов. Наклонение орбиты и ориентация линии узлов определяют положение орбиты в пространстве относительно некоторой орбиты, принимаемой за опорную. В астрономии в качестве опорной орбиты (для солнечной системы) принимают орбиту Земли. В астронавтике в качестве опорной орбиты может служить любая другая подходящая орбита или плоскость, относительно которой определяется положение орбиты космического аппарата.

Приведенное выше утверждение, что ортогональный импульс влияет лишь на наклонение орбиты и положение линии узлов, означает, что ортогональный импульс не может повернуть орбиту относительно оси, перпендикулярной плоскости орбиты, поскольку при этом произошёл бы поворот линии апсид, а следовательно, и изменилось бы угловое расстояние до перигея. Ортогональный импульс поворачивает орбиту только относительно двух осей (относительно каждой из них в отдельности или относительно обеих), а именно: линии узлов и линии, нормальной ей в плоскости орбиты. В общем случае (рис. 3.42) ни одна из этих линий не совпадает с линией апсид. В случае круговой орбиты точки пересечения H и L линии, нормальной линии узлов, с орбитой являются соответственно самой высокой и самой низкой точками орбиты относительно плоскости, от которой производится отсчет наклонения i . Вращение плоскости орбиты относительно линии узлов приводит к изменению наклонения орбиты. Поворот плоскости орбиты относительно линии LH приводит к изменению долготы восходящего узла. В соответствии с результатами, полученными в § 3.2, следует, что независимо от места приложения ортогонального импульса вектор орбиталь-

¹⁾ То есть угловое расстояние перигея в данном случае должно изменяться не от восходящего узла, который изменяет свое положение.

ной скорости v поворачивается относительно плоскости орбиты на угол α :

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\Delta v_w}{2v} \right), \quad (3.196)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_w}{v} \right)^2, \\ \sin \alpha &= \sqrt{\left(\frac{\Delta v_w}{v} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta v_w}{v} \right)^4} = \frac{\Delta v_w}{2v} \sqrt{4 - \left(\frac{\Delta v_w}{v} \right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.197)$$

где Δv_w — ортогональный импульс скорости.

Поворот вектора скорости на угол α в зависимости от места приложения импульса будет оказывать различное влияние на

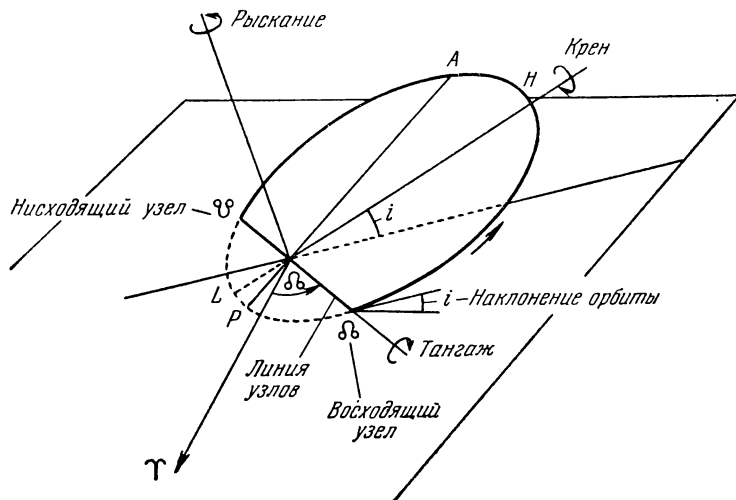


Рис. 3.42. Три оси поворота эллиптической орбиты.

изменение наклонения орбиты Δi и изменение долготы восходящего узла $\Delta \Omega$. Поясним это (см. рис. 3.43). Линия узлов, линия апсид и линия LH проходят через центр притяжения F . Вектор скорости перпендикулярен радиусу-вектору лишь в точках апсид. Поскольку линия узлов и линия LH не совпадают с линией апсид, то вектор скорости в точках пересечения этих линий с орбитой может быть разложен на радиальную и трансверсальную составляющие. Величина радиальной составляющей скорости не может быть изменена ортогональным импульсом, поскольку (если бы это имело место) это привело бы к изменению направления вектора скорости в плоскости орбиты, а следовательно, к повороту линии апсид. Поворот вектора скорости на угол α под действием ортогонального импульса происходит таким

ставляющей скорости и линией узлов достигает максимального значения 90° в точках Ω и $\mathcal{U}$, и приложение импульса в этих точках вызывает максимальное изменение Δi . В точках L и H угол между трансверсальной составляющей скорости и линией узлов обращается в нуль, и приложение импульса Δv_w в этих точках не приводит к повороту плоскости орбиты относительно линии узлов¹⁾.

Запишем выражение для составляющей $(v_a)_n$, направленной перпендикулярно линии узлов:

$$(v_a)_n = v_a \cos(\eta - \eta_\Omega).$$

Только при $\eta = \eta_\Omega$ будет иметь место соотношение $(v_a)_n = v_a = (v_a)_\Omega$, тогда как при $\eta = \eta_\Omega \pm 90^\circ$ имеет место равенство $(v_a)_n = 0$. Изменение Δi , вызванное приложением ортогонального импульса скорости Δv_w в произвольной точке B орбиты, можно представить через изменение Δi , вызванное приложением того же импульса в точке Ω . Коэффициентом пропорциональности является величина $(v_a)_n/v_a$, где v_a — трансверсальная составляющая скорости в точке B , а $(v_a)_n$ — составляющая v_a , направленная перпендикулярно линии узлов. Таким образом, в общем случае имеем:

$$\sin \frac{\Delta i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta v_w}{v_a} \frac{(v_a)_n}{v_a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta v_w}{v_a} \cos(\eta - \eta_\Omega) \quad (3.199a)$$

или при очень малых Δi (чего обычно и следует ожидать)

$$di = \frac{dv_w}{v_a} \cos(\eta - \eta_\Omega). \quad (3.199b)$$

Так как максимум Δi достигается не только при $\eta = \eta_\Omega$, но и при минимуме v_a , то есть при $r = r_A$, то абсолютный максимум Δi будет иметь место, если линия аписид совпадает с линией узлов и импульс прикладывается в апоцентре. Если линия узлов не совпадает с линией аписид, то приложение Δv_w в точке Ω или $\mathcal{U}$ обеспечивает относительный максимум Δi . Если ортогональный импульс скорости Δv_w приложен в точке L или H , то поворота орбиты относительно линии узлов не происходит и $\Delta i/\Delta \Omega \rightarrow 0$, но изменение $\Delta \Omega$ будет максимальным; если же импульс Δv_w приложить в точке Ω или $\mathcal{U}$, то $\Delta \Omega$ обращается в нуль. Поэтому изменение $\Delta \Omega$ пропорционально величине $(\Delta v_w/v_a) \sin(\eta - \eta_\Omega)$.

¹⁾ Такая формулировка используется намеренно. При очень малых $\Delta v_w \rightarrow dv_w$ или при $i = 90^\circ$ ортогональный импульс не изменяет наклонения орбиты ($\Delta i = 0$). Во всех иных случаях, как будет показано ниже, происходит изменение наклонения орбиты (большей частью пренебрежимо малое), если даже не имеет места поворот относительно линии узлов.

Однако изменение $\Delta\Omega$ может быть вызвано и изменением лишь угла наклонения орбиты. Рассмотрим (рис. 3.44) проекции опорной орбиты OI и орбиты OII на небесную сферу. Предположим, что вследствие ортогонального импульса, приложенного в точке H , орбита повернулась на угол α_H .

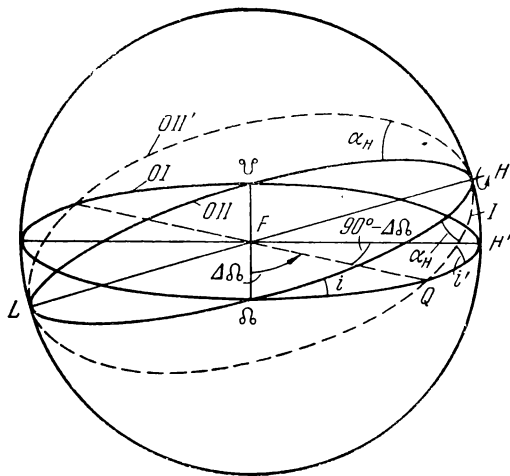


Рис. 3.44. Поворот плоскости орбиты относительно линии LH , перпендикулярной линии узлов.

Соответствующее изменение $(\Delta\Omega)_H$ можно определить из сферического треугольника QHH' :

$$\operatorname{ctg}(\Delta\Omega)_H = \frac{\sin i}{\operatorname{tg} \alpha_H}. \quad (3.200a)$$

Рис. 3.44 хорошо поясняет, что именно в повороте плоскости орбиты относительно оси LH на угол α_H , то есть в повороте только трансверсальной составляющей скорости v_a , сказывается воздействие импульса Δv_w на изменение $\Delta\Omega$ и Δi , поскольку для определения указанных изменений необходимо рассматривать лишь проекции орбит на небесную сферу. Следовательно, для определения α_H можно воспользоваться равенствами (3.196) и (3.197), подставив $v_{a,H}$ вместо v :

$$\operatorname{tg} \alpha_H = \frac{\sqrt{4 - \left(\frac{\Delta v_w}{v_{a,H}}\right)^2}}{\frac{2}{\frac{\Delta v_w}{v_{a,H}}} - \frac{\Delta v_w}{v_{a,H}}}. \quad (3.200b)$$

В выражении (3.200a) величина i есть наклонение орбиты до приложения импульса. Наклонение орбиты i' после приложения импульса можно найти из сферического треугольника QHH' :

$$\sin i' = \frac{\sin \alpha_H}{\sin (\Delta \Omega)_H}. \quad (3.200c)$$

По теореме синусов из сферического треугольника $\Omega_L QH$ имеем:

$$\sin (\Delta \Omega)_H = \frac{\sin I}{\sin i} \sin \alpha_H, \quad (3.200d)$$

где α_H определяется по второй формуле (3.197) с заменой v на v_a . Член $\sin I$ зависит от изменения наклонения i орбиты, вызванного приложением импульса в точке L или H , если это и не сопровождалось поворотом плоскости орбиты относительно линии узлов. Сравнивая выражение (3.200c) с выражением (3.200d), можно заметить, что

$$\sin i' = \frac{\sin \alpha_H}{\sin (\Delta \Omega)_H} = \frac{\sin i}{\sin I}.$$

Дуга I определяется из выражения

$$\cos I = \sin (\Delta \Omega)_H \cos i,$$

откуда

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 (\Delta \Omega)_H \cos^2 i}}.$$

Эта зависимость показывает, что $i' \rightarrow i$ как при малых значениях $\Delta \Omega$, так и при $\cos i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow 90^\circ$). В этом случае $\cos I \rightarrow 0$ ($I \rightarrow 90^\circ = \angle \Omega_L FH$). При этих условиях, если дополнительно положить $\Delta v_w/v_a \ll 1$, зависимость (3.200d) упрощается и принимает вид:

$$\sin (d\Omega)_{L,H} \approx (d\Omega)_{L,H} = \frac{dv_w}{(v_a)_{L,H} \sin i}. \quad (3.200e)$$

Составляющая v_a , перпендикулярная линии LH , равна $v_a \sin(\eta - \eta_\Omega)$. Аналогичными рассуждениями, использованными при получении равенства (3.199b), можно найти упрощенное выражение для изменения $d\Omega$, вызванного приложением ортогонального импульса в произвольной точке орбиты:

$$\sin d\Omega \approx d\Omega = \frac{dv_w}{v_a} \frac{\sin(\eta - \eta_\Omega)}{\sin i}. \quad (3.200f)$$

Из упрощенного выражения (3.199b) следует, что при приложении импульса в точке L или H величина $di=0$. Во многих

случаях это можно принять с достаточной точностью, хотя более строго следовало бы принять $di/d\Omega \rightarrow 0$.

Итак, для максимального изменения наклона орбиты ортогональный импульс должен быть приложен в одном из узлов орбиты. Для максимального изменения положения линии узлов ортогональный импульс должен быть приложен (в зависимости от знака изменения $\Delta\Omega$) либо в точке L , либо в точке H (см. ниже).

Если ортогональный импульс приложен в произвольной точке орбиты, то вызванный им поворот трансверсальной составляющей v_a на угол α приведет к изменению $\Delta\Omega$, определяемому выражением

$$\text{ctg } \Delta\Omega = \text{ctg } (\eta - \eta_\Omega) \cos i + \frac{\sin i}{\sin (\eta - \eta_\Omega)} \text{ctg } \alpha, \quad (3.200g)$$

где i — наклонение орбиты до приложения импульса, $(\eta - \eta_\Omega)$ — аргумент широты точки приложения импульса, а $\text{ctg } \alpha$ определяется из формулы (3.200b), если в ней $v_{a,H}$ заменить на v_a в рассматриваемой точке. Для определения угла наклона i' орбиты после приложения импульса можно использовать зависимость

$$\sin i' = \frac{\sin \alpha}{\sin \Delta\Omega} \sin (\eta - \eta_\Omega), \quad (3.200h)$$

где α определяется по второй формуле (3.197) при замене v на v_a . Полагая в формулах (3.200g) и (3.200h) $\eta - \eta_\Omega = 90^\circ$, что соответствует приложению ортогонального импульса в точке L или H , получим соответствующие этому случаю выражения (3.200a) и (3.200c). Вывод выражений (3.200a, c, g, h) составляет содержание задачи 19, приведенной в конце главы.

Анализируя таблицу 3.1, в которой собраны выражения для частных производных, характеризующих изменения элементов эллиптической орбиты, вызванные импульсами по различным направлениям, можно сделать следующие выводы.

1. *Положительный тангенциальный импульс*, увеличивая величину орбитальной скорости, всегда приводит к увеличению большой полуоси и увеличению периода обращения. Если эксцентрическая аномалия точки приложения импульса находится в диапазоне $270^\circ < E < 90^\circ$ (перигейная область орбиты, заключенная между двумя точками пересечения орбиты с малой осью орбиты), то эксцентриситет орбиты увеличивается. Если же точка приложения импульса находится в диапазоне $90^\circ < E < 270^\circ$ (апогейная область орбиты), то эксцентриситет орбиты уменьшается. Максимальное изменение эксцентриситета достигается при приложении импульса в точках аписид; это изменение поло-

жительное, если импульс приложен в перигее, и отрицательное, если импульс приложен в апогее. В точках пересечения орбиты с малой осью $\cos \eta = -e$ и, следовательно, $de/dv = 0$. Так как положительный тангенциальный импульс увеличивает орбитальную энергию, то уменьшение эксцентриситета e при этом означает, что увеличение перигейного расстояния r_P превосходит увеличение апогейного расстояния r_A , то есть если $\Delta e < 0$, орбита изменяется в сторону круговой.

Записав полярное уравнение орбиты в виде

$$\frac{r}{r_P} = \frac{1+e}{1+e \cos \eta} \quad (3.201)$$

или

$$\frac{r}{r_A} = \frac{1-e}{1+e \cos \eta}, \quad (3.202)$$

можно заметить, что при $\eta = 0$ отношение $r/r_P = 1$, то есть если импульс приложен строго в перигее, то независимо от величины эксцентриситета величина r_P останется прежней. Аналогичным образом, если импульс приложен строго в апогее ($\eta = 180^\circ$), то величина r_A останется также неизменной. Однако при перигейном импульсе величина dr_A становится максимальной и определяется выражением

$$\frac{dr_A}{r_P} = \frac{r'_A - r_A}{r_P} = \frac{2de}{(1-e)^2}, \quad (3.203)$$

где r_A и r'_A — соответственно апогейные расстояния до и после приложения импульса, а e и $e' = e + de$ — соответствующие величины эксцентриситетов. Так как в этом случае $de > 0$ максимальное, то $dr_A > 0$ также максимальное. Аналогично максимальному увеличению перигейного расстояния r_P соответствует точка приложения импульса в апогее. В этом случае

$$\frac{dr_P}{r_A} = \frac{r'_P - r_P}{r_A} = -\frac{2de}{(1+e)^2}, \quad (3.204)$$

где r_P и r'_P — соответственно перигейные расстояния до и после приложения импульса, а e и $e' = e + de$ — соответствующие величины эксцентриситетов. Так как и в этом случае ($\eta = 180^\circ$) абсолютная величина $|de|$ становится максимальной, то значение dr_P также максимальное. Изменения r_A и r_P при приложении импульса в произвольных точках орбиты зависят от истинной аномалии η рассматриваемой точки. При $\cos \eta = -e$ истинная аномалия точки пересечения орбиты с малой осью $\eta > 90^\circ$. Однако для околосферических орбит можно принять $\eta \approx 90^\circ$ в точке пересечения орбиты с малой осью.

Если тангенциальный импульс приложен при движении космического аппарата от перигея к апогею, то есть истинная аномалия точки приложения импульса находится в диапазоне $0 < \eta < 180^\circ$, то перигейная точка смещается в направлении движения. Если истинная аномалия точки приложения импульса находится в диапазоне $180^\circ < \eta < 360^\circ$, то перигейная точка смещается в сторону, противоположную движению аппарата. Перигейная точка не смещается, если $\sin(\eta - \eta_0) = 0$ или если $\eta = 0$ или $\eta = 180^\circ$ (считая, что до приложения импульса $\eta_0 = 0$). Максимальное смещение перигейной точки соответствует приложению импульса в точках $\eta = 90^\circ$ или $\eta = 270^\circ$, то есть в точках пересечения фокального параметра с орбитой.

В случае приложения *отрицательного тангенциального импульса*, уменьшающего величину орбитальной скорости, рассмотренные выше влияния меняются на обратные. Наклонение орбиты и положение линии узлов не изменяются под воздействием тангенциального импульса.

2. Положительный нормальный импульс, создающий составляющую скорости, направленную в мгновенный центр кривизны невозмущенной орбиты, уменьшает эксцентриситет орбиты, если импульс приложен в диапазоне $0 < \eta < 180^\circ$, то есть при движении космического аппарата от перигея к апогею. Если точка приложения импульса находится в диапазоне $180^\circ < \eta < 360^\circ$, то эксцентриситет орбиты увеличивается. Максимальное изменение эксцентриситета имеет место при приложении импульса в точке $\eta = 90^\circ$ или $\eta = 270^\circ$. При приложении импульса в точках аписид эксцентриситет не изменяется.

Перигейная точка смещается в направлении движения космического аппарата, если положительный нормальный импульс приложен на перигейном участке орбиты, ограниченном точками пересечения орбиты с прямой, перпендикулярной большой оси орбиты и проходящей через второй фокус (то есть на дуге D_2PD_1 , рис. 3.41). Если импульс приложен в какой-либо точке оставшейся части орбиты (дуга D_1AD_2), то перигейная точка смещается в сторону, противоположную движению космического аппарата. Приложение импульса в точках D_1 и D_2 не изменяет положения перигейной точки. Максимальное смещение перигейной точки соответствует приложению импульса в точках аписид.

В случае приложения *отрицательного нормального импульса*, создающего составляющую скорости, направленную от мгновенного центра кривизны невозмущенной орбиты, рассмотренные влияния меняются на обратные. Нормальный импульс не влияет на величину большой полуоси, период обращения, наклонение орбиты и положение линии узлов.

3. *Положительный радиальный импульс*, создающий составляющую скорости, направленную к центру притяжения, уменьшает величину большой полуоси, эксцентриситет и период обращения, если точка приложения импульса находится в диапазоне $0 < \eta < 180^\circ$, и увеличивает названные величины, если точка приложения импульса находится в диапазоне $180^\circ < \eta < 360^\circ$. Максимальному изменению перечисленных параметров соответствует приложение импульса в точке $\eta = 90^\circ$ или $\eta = 270^\circ$. При приложении импульса в точках аписид рассматриваемые параметры не изменяются. Положительный радиальный импульс смещает перигейную точку в направлении движения космического аппарата, если импульс будет приложен на участке орбиты, простирающемся от апогейной точки в обе стороны до пересечения с прямой, перпендикулярной большой оси и проходящей через центр притяжения (дуга B_1AB_2 , рис. 3.41). Если импульс будет приложен на оставшейся перигейной части орбиты (дуга B_2PB_1 , рис. 3.41), то перигейная точка смещается в сторону, противоположную движению космического аппарата. Приложение импульса в точках B_1 и B_2 не изменяет положения перигейной точки. Приложение импульса в точках аписид, где радиальный и нормальный импульсы становятся идентичными, приводит к максимальному смещению перигейной точки.

В случае приложения *отрицательного радиального импульса*, создающего составляющую скорости, направленную от центра притяжения, рассмотренные влияния меняются на обратные. Радиальный импульс не изменяет наклона орбиты и положения линии узлов.

4. *Положительный трансверсальный импульс*, направленный в сторону движения космического аппарата, всегда увеличивает величину большой полуоси и период обращения. Для заданной орбиты это увеличение достигает максимума при минимуме величины радиуса-вектора точки приложения импульса, и наоборот, то есть при приложении импульсов в точках аписид. В этих точках трансверсальный импульс становится идентичным тангенциальному импульсу. Увеличение или уменьшение эксцентриситета зависит от соотношения величин радиуса-вектора r точки приложения импульса и малой полуоси b орбиты. Если точка приложения импульса находится в перигейной части орбиты ($r < b$), то эксцентриситет увеличивается. Если точка приложения импульса находится в апогейной части орбиты ($r > b$), то эксцентриситет уменьшается. Этого и следовало ожидать на основании анализа влияния тангенциального импульса на эксцентриситет орбиты, так как положительный трансверсальный импульс увеличивает орбитальную скорость. При приложении импульса в диапазоне $0 < \eta < 180^\circ$ перигейная точка смещается

по ходу движения космического аппарата. При приложении импульса в диапазоне $180^\circ < \eta < 360^\circ$ перигейная точка смещается в обратную сторону. Максимальное смещение перигейной точки соответствует приложению импульса в точках $\eta = 90^\circ$ и $\eta = 270^\circ$. При приложении импульса в точках апсид положение перигейной точки не изменяется.

Отрицательный трансверсальный импульс, уменьшающий величину орбитальной скорости, во всех случаях изменяет рассмотренные влияния на обратные. Трансверсальный импульс не влияет на наклонение орбиты и положение линии узлов.

5. *Положительный ортогональный импульс*, направленный к северному полюсу от плоскости орбиты, увеличивает наклонение орбиты, если импульс приложен при движении космического аппарата от низшей точки орбиты к высшей относительно плоскости, от которой отсчитывается наклонение орбиты. Максимальное изменение наклонения соответствует приложению импульса в точке, где отношение $(\eta - \eta_0)/v_a$ достигает максимума, то есть в апоцентре, совпадающем с восходящим узлом. Если импульс приложен на оставшейся части орбиты (то есть при движении космического аппарата от высшей точки к низшей), то наклонение орбиты уменьшается и абсолютный максимум изменения соответствует приложению импульса в нисходящем узле при $r = r_A$. При приложении импульса в точке L или H пересечения орбиты с прямой, перпендикулярной линии узлов, изменение наклонения орбиты обычно пренебрежимо мало по сравнению с изменением положения линии узлов [см. выражения (3.200c) и (3.200d)].

Узлы орбиты всегда смещаются в сторону движения аппарата, если ортогональный импульс направлен от плоскости отсчета наклонения орбиты. Это имеет место, если точка приложения импульса расположена на участке орбиты, находящемся над плоскостью отсчета наклонений. При приложении импульса на участке орбиты под плоскостью отсчета наклонений узлы смещаются в противоположную сторону (регрессия линии узлов). С уменьшением наклонения орбиты величина смещения линии узлов увеличивается. При заданном наклонении орбиты максимальное смещение линии узлов соответствует приложению ортогонального импульса в точках пересечения орбиты с линией, перпендикулярной линии узлов. При приложении ортогонального импульса в точках узлов орбиты положение линии узлов не изменяется.

Отрицательный ортогональный импульс, направленный к южному полюсу от плоскости орбиты, во всех случаях изменяет рассмотренные влияния на обратные. Ортогональный импульс не оказывает влияния на большую полуось, эксцентриситет, пе-

риод обращения и ориентацию линии апсид относительно инерциального пространства.

б) Круг. В случае круговой орбиты необходимо, очевидно, рассмотреть лишь влияние ортогонального импульса, так как все прочие импульсы изменяют круговую орбиту на эллиптическую. Поскольку для круговой орбиты $v_a = v_c$ и линия апсид отсутствует, то за точку отсчета для определения положения места приложения импульса можно выбрать одну из точек пересечения орбиты с линией, перпендикулярной линии узлов и проходящей через центр притяжения. При этом для *ортогонального импульса* получим:

$$di = \frac{dv_w}{v_c} \cos(90^\circ - \eta), \quad (3.205)$$

$$d\Omega = \frac{dv_w}{v_c} \frac{\sin(90^\circ - \eta)}{\sin i}. \quad (3.206)$$

Знак изменения di такой же, как и в случае эллиптической орбиты. Для положительного ортогонального импульса будем иметь:

$$\begin{aligned} 0 < \eta < 90^\circ, \quad 270^\circ < \eta < 360^\circ: \quad di < 0, \\ 90^\circ < \eta < 180^\circ, \quad 180^\circ < \eta < 270^\circ: \quad di > 0, \end{aligned}$$

и наоборот для отрицательного ортогонального импульса. Если ортогональный импульс направлен от плоскости отсчета наклона орбиты, то узлы смещаются в сторону движения космического аппарата (то есть линия узлов поворачивается против хода часовой стрелки, если смотреть с северного полюса относительно плоскости отсчета наклона).

в) Парабола. В случае параболической орбиты $e=1$ и $a=\infty$. Влияние тангенциального, радиального и трансверсального импульсов рассматривать не будем, поскольку они изменяют параболическую орбиту на другой тип кеплеровой орбиты. Для *нормального импульса* получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta e &= 0, \\ d\eta_0 &= \frac{2}{v} dv_n, \end{aligned} \right\} \quad (3.207)$$

так как $a=\infty$.

Для ортогонального импульса используются те же зависимости, которые были получены для случая эллиптической орбиты (см. таблицу 3.1).

г) Гипербола. В случае гиперболической орбиты, как и в случае эллиптической орбиты, импульсы различных направлений оказывают различные влияния на параметры орбиты. При этом необходимо помнить, что диапазон значений рассматриваемых

истинных аномалий η является ограниченным. Предельным значением истинной аномалии является

$$\eta_l = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = \arccos\left(\frac{1}{e}\right). \quad (3.208)$$

Как показано в § 4.7 («Космический полет», т. I), $\eta_l > 90^\circ$:

$$\eta_l = 90^\circ + \zeta. \quad (3.209)$$

Поэтому для гиперболы диапазонами изменения истинных аномалий будут:

$$0 \leq \eta \leq (90^\circ + \zeta) \quad \text{и} \quad (270^\circ - \zeta) \leq \eta \leq 360^\circ.$$

Вспомогательный угол H соответственно изменяется в пределах:

$$0 \leq H \leq 90^\circ \quad \text{и} \quad 270^\circ \leq H \leq 360^\circ.$$

Приведенные в настоящем пункте частные производные получены из уравнений, выведенных в § 4.7 («Космический полет», т. I). Более полное исследование влияния малых импульсов на параметры гиперболической орбиты приведено в § 4.8 настоящего тома в связи с исследованием маневра в поле, создаваемого двумя центральными силами. Здесь же исследуется влияние малых импульсов на параметры гиперболической орбиты в поле центральной силы.

В случае *положительного тангенциального импульса* для изменения большой полуоси получим:

$$\frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{2a^2}{K} v. \quad (3.210)$$

Для изменения эксцентриситета можно найти выражение

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{2}{v}(e + \cos \eta), \quad (3.211)$$

которое совпадает с аналогичной частной производной, полученной для эллиптической орбиты. Эту частную производную можно выразить через вспомогательный угол H :

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{2r \cos H}{K} v. \quad (3.212)$$

Для среднего движения можно найти следующее выражение:

$$\partial \mu = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{K}{a}} \frac{\partial a}{a^2},$$

которое с учетом равенства (3.210) приводится к виду

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{3v}{\sqrt{Ka}} \quad (3.213)$$

и т.и

$$\partial\mu = 3v \, \partial v \sqrt{\frac{e^2 - 1}{Kr(1 + e \cos \eta)}}. \quad (3.214)$$

Поэтому для $\partial\mu$ можно использовать второе выражение в таблице 3.1 (тангенциальный импульс) с учетом, что $e > 1$.

Для определения смещения перигейной точки можно воспользоваться теми же выражениями, что и для эллиптической орбиты, так как они получены из общих зависимостей, справедливых для всех типов кеплеровых орбит.

При полетах по гиперболическим траекториям особый интерес представляет изменение угла между асимптотами к ветвям гиперболы под воздействием тангенциального импульса. Из выражения (I. 4.238b) с помощью выражения (I. 4.228) и простых тригонометрических соотношений можно получить:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{2 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{Kr} \right)}{v_\infty \sec^2 \Phi} \cos \theta, \quad (3.215)$$

где $v_\infty^2 = v^2 - 2 \frac{K}{r}$ есть квадрат гиперболического избытка скорости. Минимальное изменение угла между асимптотами равно нулю при $\Phi = 90^\circ$.

В случае приложения *положительного нормального импульса* величина большой полуоси и среднее движение не изменяются, так как не изменяется величина орбитальной скорости. Изменение эксцентриситета подчиняется той же зависимости, что и для эллиптической орбиты, но с обратным знаком, так как для гиперболы справедливо соотношение (I. 4.214), а не соотношение (3.179). Поэтому

$$\frac{\partial e}{\partial v_n} = \frac{r}{av} \sin \eta. \quad (3.216)$$

Смещение перигейной точки определяется той же зависимостью, которая используется для эллиптической орбиты. Положительный нормальный импульс всегда смещает перигейную точку в направлении движения космического аппарата независимо от точки приложения импульса, так как величины η , которым соответствует обратное влияние, находятся за предельным значением истинной аномалии η_i .

Наконец, для изменения угла между асимптотами под воздействием нормального импульса, воспользовавшись соотношением $e = \sqrt{1 + tg^2 \Phi} = 1/\cos \Phi$ и равенством (3.216), получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_n} = \frac{r}{av} \sin \eta \left(\frac{1}{\sin \Phi} - \sin \Phi \right). \quad (3.217a)$$

Частная производная $\partial\Phi/\partial v_n$ при приложении импульса на ветви гиперболической орбиты, по которой космический аппарат приближается к центру притяжения, увеличивается от нуля при $\Phi=90^\circ$ ($v=\infty$) до бесконечности при $\Phi=0$ ($v=2K/r$), и наоборот для ветви, по которой аппарат удаляется от центра притяжения. В вершине гиперболической орбиты $\partial\Phi/\partial v_n=0$.

Положительный радиальный импульс, создающий радиальную составляющую скорости, направленную к центру притяжения, оказывает на парамет-

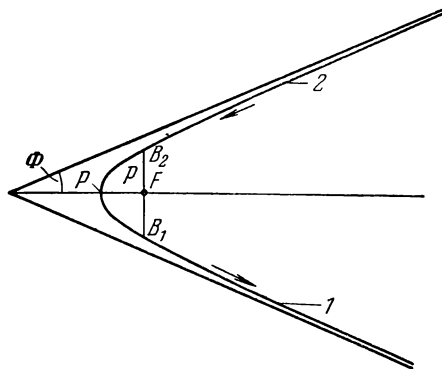


Рис. 3.45. Пересечение фокального параметра с ветвями гиперболической орбиты.

1 — ветвь, по которой космический аппарат удаляется от центра притяжения; 2 — ветвь, по которой космический аппарат приближается к центру притяжения.

ры гиперболической орбиты такое же влияние, как и на параметры эллиптической орбиты. В частности, величина большой полуоси и эксцентриситет уменьшаются, а среднее движение увеличивается¹⁾, если положительный радиальный импульс прикладывается в точках той ветви гиперболы, по которой космический аппарат приближается к центру притяжения; если импульс прикладывается в точках той ветви орбиты, по которой аппарат удаляется от центра притяжения, то картина меняется на обрат-

ную. Во всех случаях максимальному изменению рассмотренных элементов соответствует приложение импульса в точке, для которой $\eta=\eta_c$, и изменений не происходит, если импульс приложен в перигее, то есть в вершине гиперболы.

Перигейная точка смещается по направлению движения космического аппарата, если положительный радиальный импульс приложен в какой-либо точке орбиты на дуге B_2PB_1 ($270^\circ < \eta < 90^\circ$); при приложении импульса на оставшейся части орбиты, то есть при $\eta < 270^\circ$ и $\eta > 90^\circ$ (рис. 3.45), смещение перигейной точки происходит в противоположном направлении. Приложение радиального импульса в точках B_1 и B_2 не вызывает смещения перигейной точки. Приложение радиального импульса в вершине (перигее P), где радиальный импульс становится идентичным нормальному импульсу, вызывает максимальное смещение пе-

¹⁾ Соответствует уменьшению периода обращения в случае эллиптической орбиты.

ригейной точки. При этом для определения соответствующей частной производной можно использовать то же самое выражение, которое было получено для эллиптической орбиты.

Для определения изменения угла между асимптотами гиперболы при приложении радиального импульса можно получить:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_r} = \frac{C}{K} \sin \eta \left(\sin \Phi - \frac{1}{\sin \Phi} \right). \quad (3.217b)$$

Если импульс приложен в точках той ветви, по которой космический аппарат приближается к центру притяжения, то угол Φ увеличивается. При приложении импульса в точках другой ветви угол Φ уменьшается. Величина частной производной $\partial \Phi / \partial v_r$ изменяется от нуля при $\Phi = 90^\circ$ ($v = \infty$) до бесконечности при $\Phi = 0$ ($v = 2K/r$, парабола). В вершине параболы величина частной производной $\partial \Phi / \partial v_r$ всегда равна нулю.

Положительный трансверсальный импульс оказывает на параметры гиперболической орбиты такое же влияние, как на параметры эллиптической орбиты. При приложении импульса в точках той ветви, по которой космический аппарат удаляется от центра притяжения, происходит увеличение орбитальной скорости; поэтому большая полуось увеличивается, а среднее движение уменьшается¹⁾. Для заданной гиперболической орбиты указанные изменения достигают максимума при приложении импульса в вершине, где величина r является минимальной. В этой точке трансверсальный импульс становится идентичным тангенциальному импульсу. Увеличение эксцентриситета происходит при приложении импульса в точках, где $r < b$, то есть в перигейной области. При приложении импульса в точках, где $r > b$, происходит уменьшение эксцентриситета.

Для определения влияния положительного трансверсального импульса на угол между асимптотами запишем выражение для частной производной:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_a} = \frac{C}{K a e r} (b^2 - r^2) \left(\frac{1}{\sin \Phi} - \sin \Phi \right). \quad (3.218)$$

Таким образом, при приложении положительного трансверсального импульса в перигейной области ($r < b$) происходит увеличение угла Φ . При приложении импульса на оставшейся части орбиты ($r > b$) происходит уменьшение угла Φ .

Наконец, влияние *положительного ортогонального импульса* на положение линии узлов и наклонение орбиты такое же, как и в случае эллиптической орбиты.

¹⁾ Соответствует увеличению периода обращения в случае эллиптической орбиты.

3.9. Переход между некомпланарными орбитами

Используя рассмотренные влияния ортогонального импульса на положение линии узлов и наклонение орбиты, рассмотрим вопрос о переходе между некомпланарными орбитами. В настоящем параграфе будет произведено общее обсуждение вопросов, связанных с некомпланарным переходом. Частные случаи будут рассмотрены в § 3.10. Как и прежде, задача будет рассматриваться в поле центральной силы, то есть без учета влияния каких-либо второстепенных сил. Поэтому предлагаемый ниже анализ может быть в основном использован при исследовании маневров в поле притяжения Солнца или маневров вблизи планет, например при изучении переходов между орбитами спутников или изменения орбит спутников. В рамках оговоренного допущения можно выделить следующие частные задачи:

1. Переход аппарата с одной орбиты (*исходная орбита*) на другую орбиту (*орбита цели*), некомпланарную первоначальной орбите.

2. Изменение положения линии узлов или наклона орбиты космического аппарата, являющегося временным спутником какой-либо планеты или Луны, с целью последующего удаления аппарата от этой планеты (или Луны) по гиперболической траектории.

3. Осуществление перехвата космической цели с орбиты перехватчика, некомпланарной орбите цели. С точки зрения механики полета, различие между перехватом и переходом заключается в том, что при переходе необходимо добиться, чтобы плоскость переходной орбиты оказалась совмещенной с плоскостью орбиты цели, тогда как при перехвате перехватчик может приближаться к цели с любого направления.

В случае плоского движения, то есть если орбита цели компланарна первоначальной орбите, задача сводится к отысканию оптимальной точки приложения положительного или отрицательного импульса скорости. Эта задача, как было показано выше, имеет простое решение:

- а) Для достижения космическим аппаратом более высокой орбиты положительный импульс скорости должен быть приложен в перигее первоначальной орбиты. При заданной величине импульса это приведет к максимальному увеличению апогейного расстояния, и при надобности переход на более высокую орбиту может быть осуществлен в апогее переходной орбиты.

- б) Для достижения космическим аппаратом более низкой орбиты отрицательный импульс скорости должен быть приложен в апогее первоначальной орбиты. При заданной величине импульса это приведет к максимальному уменьшению перигейного

расстояния, и при надобности переход на более низкую орбиту может быть осуществлен в перигее переходной орбиты.

Некомпланарный случай отличается от случая плоского движения тем, что при некомпланарном переходе необходимо изменять наклонение орбиты по отношению к плоскости исходной орбиты. Из § 3.8 следует, что этого можно добиться приложением ортогонального импульса. Этот импульс должен быть приложен в начале или конце переходной орбиты. Если плоскости заданных орбит наклонены относительно друг друга, то в качестве опорной орбиты может служить орбита цели (0II), так как она является неизменной. Тогда остается возможность изменения наклонения или положения линии узлов (или обоих параметров) переходной или исходной орбиты.

Если ортогональный импульс прикладывается в одной из точек узлов орбиты, то орбита поворачивается относительно линии узлов (то есть имеет место поворот только по «тангажу») и происходит изменение наклонения орбиты (см. рис. 3.42). Если ортогональный импульс прикладывается в точке L или H пересечения с орбитой линии, перпендикулярной линии узлов (см. рис. 3.42), то орбита поворачивается относительно линии апсид (то есть имеет место только «крен») и в основном изменяется положение линии узлов (при малых импульсах; см. § 3.7).

При приложении импульса в произвольной точке орбиты между четырьмя отмеченными точками имеет место и изменение наклонения орбиты, и изменение положения линии узлов. В общем виде установить, какой из трех рассмотренных вариантов места приложения импульса является наиболее экономичным, не представляется возможным. Из выражений (3.199) и (3.200) видно, что величина ортогонального импульса зависит от трех факторов:

в) От величины трансверсальной составляющей скорости v_a , которую желательно иметь по возможности меньшей. Поэтому с этой точки зрения наиболее выгодной точкой приложения импульса является апоцентр.

г) От требуемых угловых изменений Δi и (или) $\Delta \Omega$. Чем они больше, тем больших затрат энергии потребуется для совершения маневра.

д) От величины угла $\eta - \eta_\Omega$, где η — истинная аномалия космического аппарата в момент приложения импульса на исходной орбите, а η_Ω — истинная аномалия восходящего узла на линии пересечения исходной орбиты и орбиты цели.

Для околокруговых орбит фактор в) не играет существенной роли. Для эллиптических орбит для получения максимальных изменений Δi и $\Delta \Omega$ ортогональный импульс следует приклады-

принять орбиту цели OII . Тремя основными методами перехода являются:

е) *Переход только с поворотом плоскости орбиты относительно линии узлов*. Этот переход состоит из следующих этапов: переход из точки I в точку $\mathcal{Q}$ по исходной орбите, поворот плоскости орбиты в точке $\mathcal{Q}$ на угол $\Delta i = i$ и дальнейшее движение в плоскости OII до встречи с целью в точке H . Возможен и другой вариант этого перехода: от точки P через точку 2 до точки $\mathcal{U}$, затем поворот плоскости орбиты в точке $\mathcal{U}$ вниз на угол $\Delta i = i$ и дальнейшее движение в плоскости OII до встречи с целью в точке R . В качестве начальной точки можно выбрать любую другую точку. Общим для рассмотренных двух вариантов является то, что при переходе космический аппарат проходит центральный угол η_i ($\angle LFH$ или $\angle PFR$), равный 180° . Кстати, это вовсе не является обязательным. Например, можно начать двигаться от точки 3 до точки $\mathcal{Q}$ в плоскости OI , затем в точке $\mathcal{Q}$ повернуть плоскость орбиты на угол $\Delta i = i$ и двигаться в плоскости OII до встречи с космической станцией в точке H . В этом случае центральный переходный угол $\eta_i = \angle 3FH$ будет меньше 180° и будет соответствовать орбите быстрого перехода.

ж) *Переход с поворотом орбиты относительно линии, перпендикулярной линии узлов*. В отличие от только что рассмотренного метода, переход от точки 3 до точки H может быть осуществлен непосредственно в плоскости, проходящей через указанные точки. В данном случае в точке 3 прикладывается ортогональный импульс, чтобы повернуть плоскость орбиты на угол Δi_1 . В точке H плоскость переходной орбиты будет наклонена к плоскости OII на угол Δi_2 . При решении задачи перехвата в точке H не потребуется прикладывать импульс для поворота переходной орбиты на угол Δi_2 . При решении задачи встречи (см. § 3.14) в точке H необходимо приложить второй ортогональный импульс для совмещения плоскости переходной орбиты с плоскостью орбиты цели, то есть для поворота плоскости переходной орбиты на угол Δi_2 . При этом $\Delta i_1 + \Delta i_2 \neq i$, то есть суммарное изменение наклона орбиты отличается от изменения наклона орбиты в случае е). Требуемая энергия для этого типа перехода может оказаться гораздо меньшей, чем в случае е). Этот вывод следует из анализа выражения (3.6) и объясняется величиной слагаемого, содержащего косинус. Например, если OI является внутренней орбитой, то наибольшая скорость на переходной орбите будет в точке 3 ; в точке $\mathcal{Q}$ скорость будет несколько меньше; скорость в точке H , вероятно, будет много меньше. Таким образом, можно предположить, что ортогональный маневр в точке 3 потребует большего расхода энергии, чем в точке $\mathcal{Q}$. Однако не следует забывать, что требуемое

изменение наклона орбиты в точке Ω больше ($i > \Delta i_1$). К тому же поворот на угол Δi_2 также требует меньшего расхода энергии. Вопрос о том, больше или меньше потребуются расхода энергии при переходе типа $\Delta i_1 + \Delta i_2$, чем при переходе с единственным поворотом плоскости орбиты на угол Δi , зависит от конкретных условий, то есть от величины $\angle 3FH$, величины скорости на переходной орбите в точке 3 (то есть совершается ли переход по быстрой переходной орбите с центральным переходным углом $\eta_1 = \angle 3FH$, велико или мало расстояние между орбитами) и от соотношения величин $\Delta i_1/i$ и $\Delta i_2/i$.

з) *Переход между узлами орбит.* Очевидно, что наименьшего расхода энергии потребует переход между точками Ω и $\mathcal{U}$ через точку 2 (180-градусный переход) или, например, переход из точки P в точку $\mathcal{U}$ через точку 2 (быстрый переход с центральным углом, меньшим 180°), или из точки A в точку Ω (также быстрый переход) и т. д. При этих переходах ортогональный импульс играет лишь вспомогательную роль для обеспечения условий взаимного расположения обоих космических аппаратов. Например, если один из них находится вблизи точки 1 или 2, то приложением ортогонального импульса поворачивают плоскость орбиты относительно линии, перпендикулярной линии узлов, на угол α . Тем самым точка Ω смещается на величину $\Delta\Omega$; на такую же величину смещается и точка $\mathcal{U}$. Если космический аппарат движется от точки 2 к точке $\mathcal{U}'$, то переход между узлами орбит можно осуществить из точки $\mathcal{U}'$ к точке Ω' через точки A' и 1. Очевидно, что переход между узлами орбит с использованием поворота на угол $\Delta\Omega$ представляет преимущества при решении частной задачи 1 лишь в случае перехода с внутренней орбиты на внешнюю орбиту, при котором скорость космического аппарата в точке Ω' будет значительно снижена и соответствующее уменьшение требуемого расхода энергии для изменения на угол $\Delta i = i'$ окажется достаточным для компенсации расхода энергии для поворота плоскости орбиты на угол α .

При переходе с внутренней орбиты на внешнюю орбиту из точки Ω в точку $\mathcal{U}$ через точку 2, не требующем ортогонального импульса для смещения линии узлов, всегда предпочтительнее поворачивать плоскость орбиты цели на угол $\Delta i = i$ в точке $\mathcal{U}$ или вблизи нее. При переходе же с внешней на внутреннюю орбиту поворот на угол $\Delta i = i$ предпочтительнее производить на исходной орбите. Очевидно, что для решения частной задачи 3 использование перехода между узлами орбит позволит значительно снизить энергетические требования, так как в этом случае нет необходимости в маневре для поворота на угол $\Delta i = i$. При полетах к Луне маневр перехода между узлами орбит

может также представить определенные энергетические выгоды, хотя при этом возрастают ошибки во времени полета (см. гл. 8).

Таким образом, переход между узлами орбит во многих случаях может оказаться очень выгодным. Однако требование необходимого взаимного расположения космического аппарата и цели может исключить возможность применения маневра перехода между узлами орбит по 180-градусной переходной орбите или по переходной орбите меньше 180° . В этих случаях имеет смысл рассмотреть более продолжительные переходы ($>180^\circ$) (рис. 3.47). Например, вместо перехода по орбите ADP более желательным может оказаться переход по орбите $\Omega B \mathcal{U}$. Однако этот вариант может оказаться неприемлемым вследствие того, что требуемое начало перехода для точки Ω окажется по времени много раньше, чем для точки A , и космическая станция еще не успеет попасть в точку $\mathcal{U}$, когда там окажется космический аппарат. Поэтому можно поступить следующим образом: либо воспользоваться переходной орбитой типа $\Omega A'' \mathcal{U}$, либо орбитой типа $IA' \mathcal{U}$. Последний вариант является более выгодным, так как при этом требуется меньшее изменение направления скорости в плоскости орбиты ($\beta_I < \beta_\Omega$). Правда, при этом

необходимо приложение ортогонального импульса в точке A' для поворота плоскости орбиты на угол $\Delta i = i$, но поскольку точка A' является апогейной точкой, то приложение импульса производится в наименее выгоднейшей точке, тогда как в случае использования орбиты $\Omega A'' \mathcal{U}$ поворот плоскости орбиты необходимо производить в точке $\mathcal{U}$, то есть при менее благоприятных условиях. К тому же в последнем случае (орбита $\Omega A'' \mathcal{U}$) второй маневр в плоскости орбиты для изменения направления скорости на угол $\beta_\mathcal{U}$ имеет место при большой величине

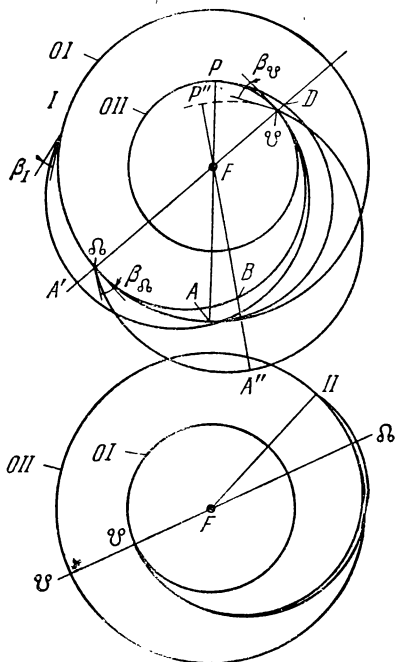


Рис. 3.47. Влияние условий взаимного расположения космических аппаратов на выбор переходной орбиты в поле центральной силы при переходах между узлами орбит или точками вблизи узлов.

орбитальной скорости космического аппарата. Поскольку орбита $\Omega A'' \Upsilon$ является внутренней по отношению к орбите $IA' \Upsilon$, а орбита $\Omega B \Upsilon$ может оказаться неприемлемой, то сравнивать надо орбиты ADP и $IA' \Upsilon$. Подобный подход к выбору переходной орбиты можно применить к случаю перехода с внутренней орбиты на внешнюю.

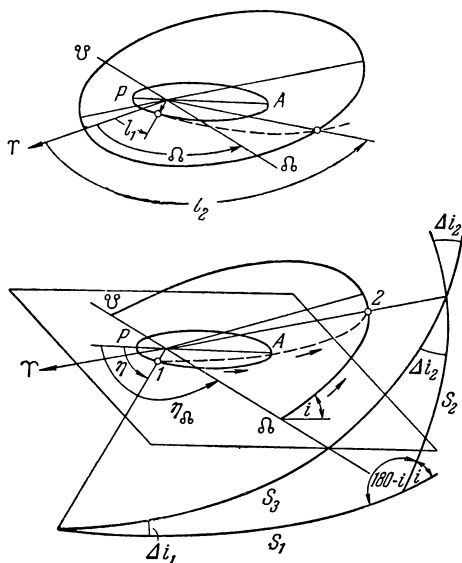


Рис. 3.48. Некомпланарный переход с помощью ортогонального импульса, приложенного на исходной орбите.

углами Δi_2 , Δi_1 и $(180^\circ - i)$, где i — известный угол между плоскостями заданных орбит. Все три стороны сферического треугольника известны: $S_1 = \Omega - l_1$, $S_2 = l_2 - \Omega$ и $S_3 = l_2 - l_1$, где l — долгота, измеряемая от точки весеннего равноденствия или любой иной точки отсчета в инерциальном пространстве. Из рассматриваемого сферического треугольника

$$\sin(\Delta i_1) = \frac{\sin S_2}{\sin S_3} \sin i \quad (S_3 < 180^\circ), \quad (3.219)$$

и по вычисленному значению Δi_1 находим:

$$(\Delta v_w)_1 = v_a \Delta i_1, \quad (3.220)$$

где Δi_1 — в радианах.

Так как ортогональный импульс влияет только на изменение i и Ω , то можно подсчитать величину полного импульса скорости

на исходной орбите, определив предварительно величину импульса скорости Δv_{copl} , необходимого для изменения скорости в плоскости переходной орбиты, а также величины Δi_1 , Δv_w и $\Delta \Omega$ в соответствии с равенствами (3.219), (3.220), (3.206) (используя в качестве угла i угол между плоскостями заданных орбит). Теперь можно определить величину полного импульса скорости на исходной орбите:

$$\Delta v_{\text{tot}} = \sqrt{(\Delta v_{\text{copl}})^2 + (\Delta v_w)_1^2}. \quad (3.221)$$

Для определения величины угла Δi_2 между плоскостями переходной орбиты и орбиты цели получаем следующее выражение:

$$\sin(\Delta i_2) = \frac{\sin S_1}{\sin S_3} \sin i. \quad (3.222)$$

При решении задачи перехвата (частная задача 3), в точке пересечения переходной орбиты с орбитой цели, как уже было отмечено, ортогонального импульса не потребуется. В задачах, требующих совмещения плоскостей переходной орбиты и орбиты цели, соответствующий ортогональный импульс вычисляется по известной величине Δi_2 по формуле, аналогичной формуле (3.220). Различные методы некомпланарных переходов при межпланетных перелетах рассмотрены в § 9.9 и § 9.10.

3.10. Пространственные маневры

Изменение плоскости орбиты или переходы между орбитами с различными наклонениями будут играть важную роль в практической астронавтике, в основном вследствие ограничений, диктуемых месторасположением стартовых комплексов, а также вследствие некомпланарности плоскостей орбит цели (естественных спутников, таких, как Луна или планеты) с плоскостью земного экватора или плоскостью эклиптики. Среди всевозможных маневров можно выделить следующие три основных:

- а) поворот плоскости круговой орбиты,
- б) поворот плоскости эллиптической орбиты,
- в) переход между некомпланарными орбитами.

а) Поворот плоскости круговой орбиты. Предположим, что космический аппарат движется по круговой орбите в поле центральной силы. Наклонение орбиты может быть задано относительно любой плоскости отсчета. Говорить об изменении плоскости орбиты имеет смысл лишь по отношению к некоторой плоскости отсчета, выбираемой в зависимости от целей маневра. Рассмотрим, например, исходную орбиту, изображенную на

рис. 3.49. С точки зрения сравнения величин требуемых импульсов, поворот плоскости орбиты относительно линии $I—I'$ равноценен повороту относительно линии $II—II'$. Однако эти повороты окажутся неравноценными с точки зрения задач, решаемых космическим аппаратом. Предположим, что космический аппарат движется по круговой орбите относительно центрального тела, освещенная часть которого представляет правую часть сферы, изображенной на рис. 3.49. Если перед аппаратом поставлена задача разведки высокоширотных областей освещенной части, то,

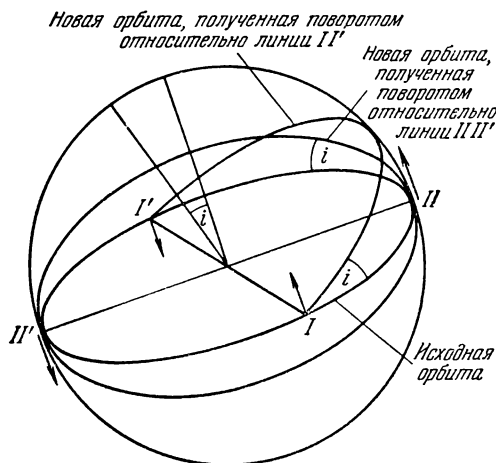


Рис. 3.49. Поворот плоскости круговой орбиты.

очевидно, предпочтительнее совершить маневр поворота относительно линии $I—I'$, то есть приложить импульс в точке I или I' , так как при повороте плоскости орбиты относительно линии $II—II'$ район высоких широт приходился бы на область сумерек (границу между дневной и ночной сторонами сферы). Наоборот, если по каким-либо причинам (например, для специальных научных наблюдений или измерений) необходимо охватить область высоких широт сумеречной части, то предпочтительнее производить поворот плоскости орбиты относительно линии $II—II'$.

Из равенств (3.3) следует, что чем выше орбитальная скорость космического аппарата, тем больше величина требуемого импульса для осуществления заданного поворота плоскости орбиты. Следовательно, в случае низкой исходной орбиты может возникнуть вопрос об использовании промежуточной эллиптической орбиты для получения выигрыша в требуемой энергии. В этом случае (если предположить, что ортогональный импульс будет приложен в точке I) вначале в точке I' прикладывается перигейный импульс $(+\Delta v_p)$, смещающий точку I' , где прикладывается ортогональный импульс, на большее расстояние от центра притяжения, чтобы уменьшить орбитальную скорость аппарата в точке I (рис. 3.50). Орбитальные элементы промежуточной орбиты (за исключением наклона) не изменятся, если

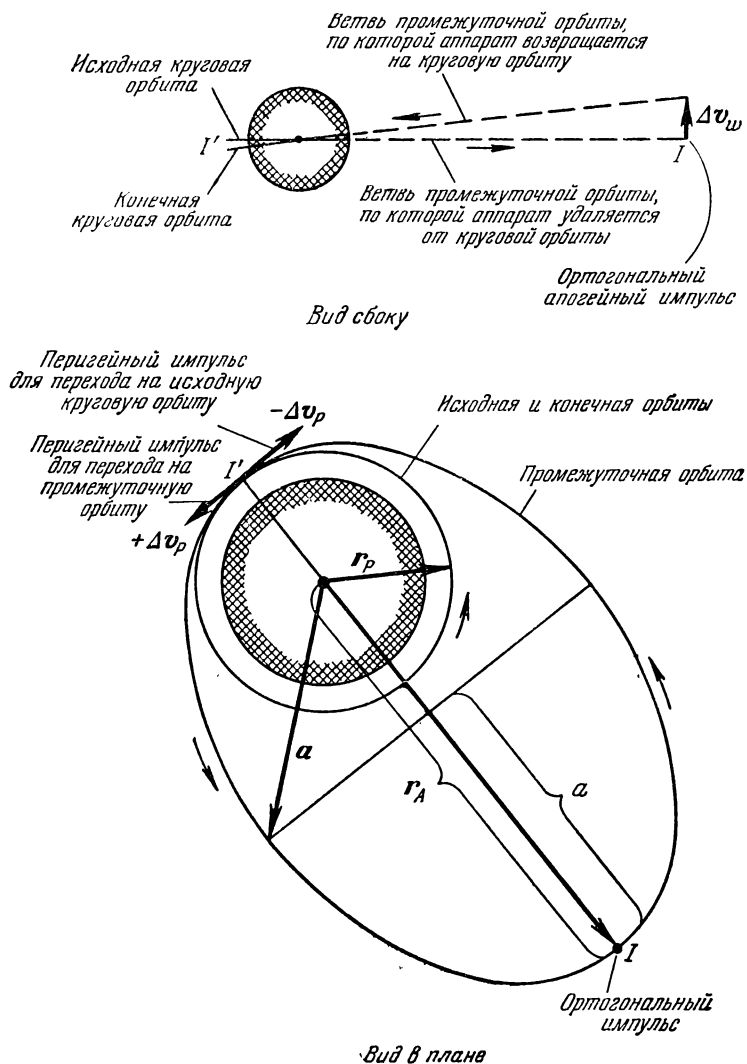


Рис. 3.50. Поворот плоскости круговой орбиты с использованием промежуточной орбиты.

импульс $(\Delta v_w)_A$ в точке I будет строго ортогональным. После поворота плоскости промежуточной орбиты космический аппарат вернется в точку I' , где в результате приложения второго перигейного импульса $(-\Delta v_P)$, равного по величине первому, но обратного по направлению, аппарат будет переведен на заданную круговую орбиту. Требуемая величина двух импульсов скорости в перигентре равна:

$$\frac{2 \Delta v_P}{\sqrt{K/r_P}} = 2 \left(\sqrt{\frac{2n}{1+n}} - 1 \right) \quad (n = r_A/r_P). \quad (3.223)$$

Требуемая величина ортогонального импульса скорости для маневра в апоцентре равна:

$$\frac{(\Delta v_w)_A}{\sqrt{K/r_P}} = \frac{2v_A}{\sqrt{K/r_P}} \sin \frac{\Delta i}{2} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2n}{1+n}} \sin \frac{\Delta i}{2}. \quad (3.224)$$

Отсюда можно получить суммарную величину импульсов скорости для совершения указанного маневра:

$$\frac{2 \Delta v_P + (\Delta v_w)_A}{\sqrt{K/r_P}} = 2 \left[\sqrt{\frac{2n}{1+n}} \left(1 + \frac{1}{n} \sin \frac{\Delta i}{2} \right) - 1 \right]. \quad (3.225a)$$

Для поворота плоскости круговой орбиты на угол Δi без использования промежуточной орбиты требуемую величину ортогонального импульса можно определить из выражения

$$\frac{(\Delta v_w)_c}{\sqrt{K/r_P}} = \frac{(\Delta v_w)_c}{\sqrt{K/r_c}} = 2 \sin \frac{\Delta i}{2}. \quad (3.225b)$$

В предельном случае для поворота плоскости круговой орбиты на 90° требуется ортогональный импульс $(\Delta v_w)_c / \sqrt{K/r_P} = \sqrt{2}$. В случае использования предельной промежуточной орбиты, то есть орбиты с $e \rightarrow 1$, $r_A/r_P \rightarrow \infty$, для поворота плоскости орбиты на 90° (или на любую другую величину) величина требуемого ортогонального импульса $(\Delta v_w)_A$ стремится к нулю и $[2 \Delta v_P + (\Delta v_w)_A] / \sqrt{K/r_P} \rightarrow 0,828$, что много меньше, чем в случае поворота плоскости круговой орбиты на 90° без использования промежуточной орбиты. Поэтому, если требуемый угол Δi поворота круговой орбиты превосходит определенную величину, то энергетически более выгодно осуществлять указанный поворот с использованием промежуточной эллиптической орбиты. В рассмотренном выше примере использования предельной эллиптической орбиты ($e \rightarrow 0$) угол поворота плоскости круговой орбиты, при котором оба варианта являются энергетически эквивалентными, оказывается равным:

$$\Delta i_{eq} = 2 \arcsin 0,414 \approx 48^\circ 54'.$$

В силу предельного характера рассмотренной промежуточной орбиты (парабола) этот угол одновременно является минимально возможным, при котором выполняется условие энергетической эквивалентности обоих вариантов. Иными словами, для любого поворота плоскости круговой орбиты на угол $\Delta i < 48^\circ 54'$ энергетически более выгодным оказывается вариант без использования промежуточной эллиптической орбиты. Суммарная величина импульсов, требуемых для поворота плоскости круговой

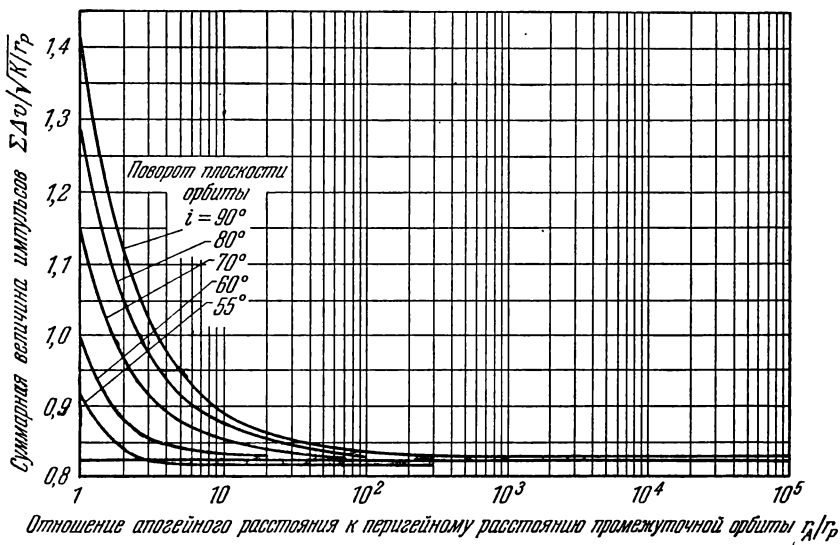


Рис. 3.51. Суммарная величина импульсов, требуемых для поворота плоскости круговой орбиты (см. рис. 3.50).

орбиты с использованием различных промежуточных эллиптических орбит, показана на графиках, приведенных на рис. 3.51 и 3.52.

Если приложить ортогональный импульс в произвольной точке круговой орбиты с координатами l и δ (рис. 3.53), то плоскость орбиты повернется на угол

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\Delta v_{\perp}}{2v} \right),$$

что приведет к изменению наклона орбиты на угол $\Delta i = i' - i$ и изменению долготы восходящего узла на величину $\Delta \Omega = \Omega' - \Omega$. Из сферического треугольника (рис. 3.53) имеем:

$$\cos \alpha = -\cos i \cos (180^\circ - i') + \sin i \sin (180^\circ - i') \cos \Delta \Omega$$

или, учитывая, что $\cos(180^\circ - i') = -\cos i'$ и $\sin(180^\circ - i') = \sin i'$, получим:

$$\cos \alpha = \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos \Delta \Omega. \quad (3.226a)$$

Для полярных орбит это выражение упрощается:

$$\alpha = \Delta \Omega. \quad (3.226b)$$

Требуемая величина ортогонального импульса скорости может быть определена по формуле (3.6b). В рассматриваемом случае

зависимой переменной является угол поворота α в отличие от случая, описываемого уравнениями (3.199a), (3.199b) или (3.200c), (3.200d), где зависимой переменной является величина

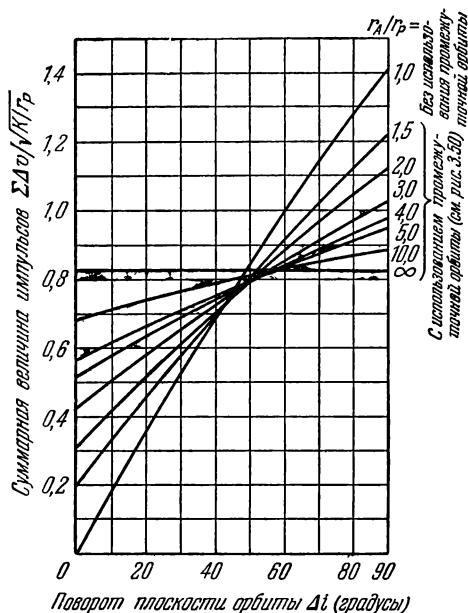


Рис. 3.52. Суммарная величина импульсов, требуемых для поворота плоскости круговой орбиты (см. рис. 50).

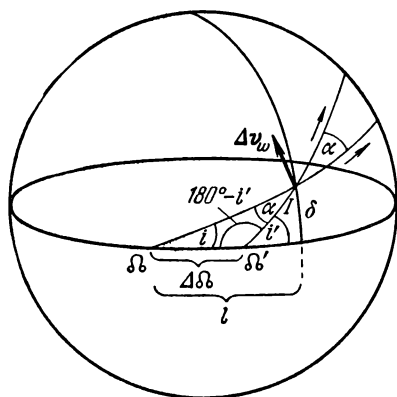


Рис. 3.53. Изменение долготы восходящего узла и наклона орбиты в результате приложения ортогонального импульса в произвольной точке орбиты.

$\Delta i = |i - i'|$ или $\Delta \Omega$. Поэтому указанные выражения являются более подходящими для анализа ошибок, вызываемых малыми величинами ортогонального импульса Δv_w или dv_w , в наклоне орбиты и положении линии узлов. С другой стороны, выражение (3.226a) является весьма полезным при анализе орбитальных маневров, связанных с необходимостью определения величины ортогонального импульса, приложенного в заданной точке орбиты (эта точка орбиты может быть выбрана либо

исходя из обеспечения контроля маневра с заданной станции слежения, либо, в случае военного использования космического аппарата, исходя из желания не допустить обнаружения маневра с определенных станций слежения противника) для требуемого изменения наклонения орбиты и (или) долготы восходящего узла. Выражения (3.199b) и (3.200d) позволяют определить место приложения ортогонального импульса, где рассматриваемые изменения параметров орбиты могут быть произведены с наибольшей эффективностью.

б) Поворот плоскости эллиптической орбиты. Из таблицы 3.1 следует, что поворот плоскости эллиптической орбиты относительно линии узлов на малый угол может быть определен из выражения

$$di = \frac{dv_w}{v_a} \cos(\eta - \eta_\Omega), \quad (3.227)$$

где v_a — трансверсальная составляющая скорости в рассматриваемой точке:

$$v_a = r\dot{\eta} = \sqrt{\frac{K}{a}} \sqrt{\frac{r_A}{r_P}} \frac{1 + e \cos \eta}{1 + e}. \quad (3.228)$$

Отсюда для поворота плоскости эллиптической орбиты на малый угол, что характеризуется отношением $\Delta v_w/v_a \ll 1$, и для изменения наклонения орбиты на небольшую величину имеем:

$$\frac{dv_w}{\sqrt{K/a}} = di \frac{1 + e \cos \eta}{1 + e} \sec(\eta - \eta_\Omega) \sqrt{\frac{r_A}{r_P}}. \quad (3.229)$$

При изменении наклонения орбиты на небольшую величину, используя выражения (3.198a) и (3.198b), получим:

$$\sin \frac{\Delta i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta v_w}{(v_a)_\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\Delta v_w}{v_\Omega} \frac{v_\Omega}{(v_a)_\Omega} = \left(\frac{v}{v_a} \right)_\Omega \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3.230a)$$

или с учетом $v_a/v = \cos \theta$

$$\sin \frac{\Delta i}{2} = \frac{\sin \alpha/2}{\cos \theta_\Omega}, \quad (3.230b)$$

где θ_Ω — угол, образованный вектором скорости в восходящем узле, где прикладывается ортогональный импульс, с местным горизонтом.

В случае орбитального маневра независимой переменной является Δi , а не α :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\Delta i}{2} \cos \theta_\Omega. \quad (3.231)$$

Возводя последнее равенство в квадрат и используя зависимость

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos x),$$

получаем:

$$\cos \alpha = 1 - \cos^2 \theta_{\Omega} (1 - \cos \Delta i). \quad (3.232)$$

Используя выражение

$$a(1 - e^2) = \frac{C^2}{K} = \frac{r_{\Omega}^2}{K} v_{\Omega}^2 \cos^2 \theta_{\Omega}, \quad (3.233)$$

где $C = r^2 \dot{\eta}$ — постоянная закона площадей Кеплера, и приписывая индекс « Ω » параметрами в восходящем узле, находим:

$$r_{\Omega} = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \eta_{\Omega}}, \quad (3.234)$$

$$\frac{v_{\Omega}^2}{K/r_{\Omega}} = 2 - \frac{r_{\Omega}}{a}. \quad (3.235)$$

Окончательно имеем:

$$\cos^2 \theta_{\Omega} = \frac{(1 \pm e \cos \eta_{\Omega})^2}{2(1 \pm e \cos \eta_{\Omega}) - (1 - e^2)}. \quad (3.236)$$

Подставляя это выражение в соотношение (3.232) и принимая Δi за независимую переменную, можно рассчитать величину α . Требуемую величину импульса можно рассчитать по формуле (3.6b):

$$\Delta v_w = 2v_{\Omega} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3.237a)$$

$$\frac{\Delta v_w}{\sqrt{K/r_{\Omega}}} = 2 \sqrt{2 - \frac{r_{\Omega}}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.237b)$$

Наличие знаков « $\pm$ » в выражении (3.234) вызвано тем, что ортогональный импульс может быть приложен в точках с истинной аномалией η или $180^\circ - \eta$ (см. рис. 3.43).

Очевидно, лучшим местом приложения ортогонального импульса для поворота плоскости орбиты (в случае совпадения линии узлов с линией апсид) является апоцентр орбиты, совпадающий с восходящим узлом. В этом случае в выражении (3.236) числитель принимает минимальное значение $(1 - e^2)$, $\cos \theta = 1$ и величина Δv_w становится минимальной, так как величины минимальны. *Во всяком случае, маневр необходимо производить в узле орбиты, ближайшем к апоцентру.*

При больших значениях Δi , в особенности если линия узлов проходит ближе к перигею (например, как показано на

рис. 3.42), более выгодным может оказаться маневр с использованием промежуточной орбиты, то есть маневр, подобный изображенному на рис. 3.50. Однако, в отличие от круговых орбит, в случае поворота плоскости эллиптической орбиты могут возникнуть дополнительные ограничения, связанные с ориентацией линии апсид. На рис. 3.54, а

показан случай наиболее эффективного использования промежуточной орбиты — эллиптической орбиты с большим эксцентриситетом и с линией узлов, совпадающей с линией апсид. Благодаря большому эксцентриситету сравнительно малый перигейный импульс оказывается в состоянии сильно увеличить апогейное расстояние и, следовательно, уменьшить скорость в апоцентре. В случае совпадения линии апсид с линией узлов ортогональный импульс прикладывается в апоцентре промежуточной орбиты. Менее благоприятный случай изображен на рис. 3.54, б. Вследствие большого угла между линией узлов и линией апсид переход на промежуточную орбиту не может быть осуществлен в перигентре. Это уменьшает эффектив-

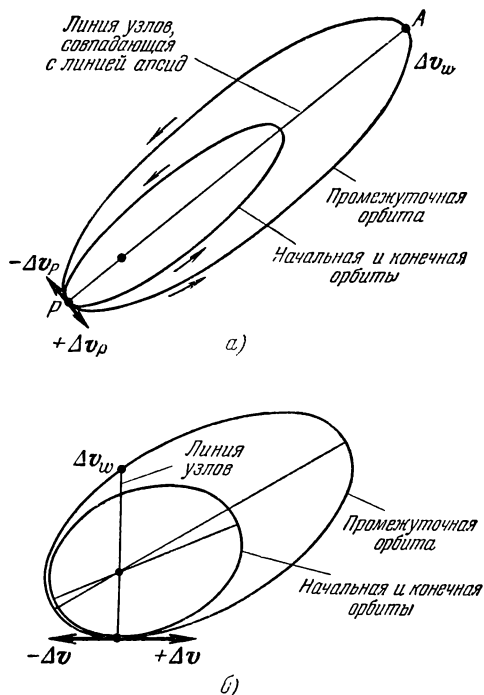


Рис. 3.54. Поворот плоскости эллиптической орбиты с использованием промежуточной орбиты.

а) Наиболее эффективное использование промежуточной орбиты; б) менее эффективное использование промежуточной орбиты.

тивность маневра, имеющего целью увеличение расстояния до апоцентра промежуточной орбиты. По той же причине не сильно увеличивается и расстояние до противоположного узла промежуточной орбиты, что также уменьшает эффективность использования промежуточной орбиты. Эффективность использования промежуточной орбиты была бы еще меньшей, если поменять местами точки приложения тангенциального и ортогонального импульсов (рис. 3.54, б). Тангенциальные импульсы должны всегда прикладываться в ближайшем к перигентру узле орбиты,

оставляя противоположный узел для приложения ортогонального импульса.

Так как элементы начальной (она же и конечная) орбиты известны, то

$$v_{\Omega} = \frac{C}{r_{\Omega} \cos \theta_{\Omega}}. \quad (3.238a)$$

Обозначив параметры промежуточной орбиты двумя штрихами и рассчитав v''_{Ω} по v_{Ω} и Δv_{Ω} , для промежуточной орбиты получим:

постоянная закона площадей Кеплера

$$C'' = r_{\Omega} v''_{\Omega} \cos \theta_{\Omega}; \quad (3.238b)$$

фокальный параметр

$$p'' = \frac{C''^2}{K}; \quad (3.239)$$

постоянная энергии

$$h'' = v''_{\Omega}{}^2 - \frac{2K}{r_{\Omega}}; \quad (3.240)$$

величина большой полуоси

$$a'' = -\frac{K}{h''}; \quad (3.241)$$

эксцентриситет

$$e'' = \sqrt{1 - \frac{p''}{a''}}; \quad (3.242)$$

истинная аномалия восходящего узла

$$\eta''_{\Omega} = \arccos\left(\frac{p''}{r_{\Omega}} - 1\right); \quad (3.243)$$

угол между линиями аписид начальной и промежуточной орбит

$$\Delta\eta = |\eta_{\Omega} - \eta''_{\Omega}|; \quad (3.244)$$

величина радиуса-вектора до противоположного узла

$$r''_{\Omega} = \frac{p''}{1 + e'' \cos(180^\circ + \eta''_{\Omega})} = \frac{p''}{1 - e'' \cos \eta''_{\Omega}} \quad (3.245a)$$

или

$$r''_{\Omega} = \frac{r_{\Omega} \cos^2 \theta_{\Omega} v''_{\Omega}{}^2 / (K/r_{\Omega})}{1 - \sqrt{\frac{v''_{\Omega}{}^4 \cos^2 \theta_{\Omega}}{K^2/r_{\Omega}^2} - \frac{2v''_{\Omega}{}^2 \cos^2 \theta_{\Omega}}{K/r_{\Omega}} - 1} \left(\frac{v''_{\Omega}{}^2 \cos^2 \theta_{\Omega}}{K/r_{\Omega}} - 1 \right)}. \quad (3.245b)$$

Величина орбитальной скорости в противоположном узле определяется из следующего выражения:

$$v''_{\Omega} = \sqrt{\frac{2K}{r''_{\Omega}} - h''}. \quad (3.246)$$

Наконец, можно определить требуемую величину ортогонального импульса [см. выражение (3.237a)]:

$$\Delta v_w = 2v_{\Omega} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3.247)$$

где α определяется из соотношения (3.231). Величину ортогонального импульса можно определить, используя r_{Ω} , по выражению (2.237b).

На рис. 3.55 приведены для сравнения графики суммарной величины импульсов для поворота плоскости орбиты с эксцентриситетом $e=0,2$ в зависимости от требуемой величины Δi и от

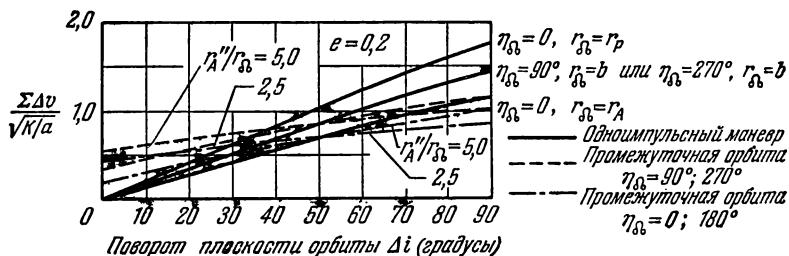


Рис. 3.55. Сравнение требуемой суммарной величины импульсов для поворота плоскости эллиптической орбиты с использованием промежуточной орбиты и без нее.

положения восходящего узла при одноимпульсном маневре и маневре с использованием промежуточной орбиты, характеризуемой отношением расстояния r''_A до апоцентра к величине радиуса-вектора r_{Ω} точки начала маневра. Из графиков следует, что при одноимпульсном маневре точка приложения импульса должна быть по возможности ближе к апоцентру. Использование промежуточной орбиты становится энергетически выгодным при $\Delta i \geq 50^\circ$.

в) Переход между некомпланарными орбитами. При переходе между некомпланарными орбитами по переходной орбите, касающейся заданных орбит, имеются три возможности выполнения маневра (рис. 3.56): импульс для поворота плоскости орбиты совместить с перигейным импульсом; импульс для поворота плоскости орбиты совместить с апогейным импульсом; поворот плоскости орбиты на угол i осуществить двумя

поворотами (в точках касания переходной орбиты с заданными орбитами), угол каждого из которых меньше требуемого угла поворота: $\Delta i_1 = \Delta i_2 < i$.

Из проведенного ранее анализа следует, что осуществление поворота плоскости орбиты приложением ортогонального им-

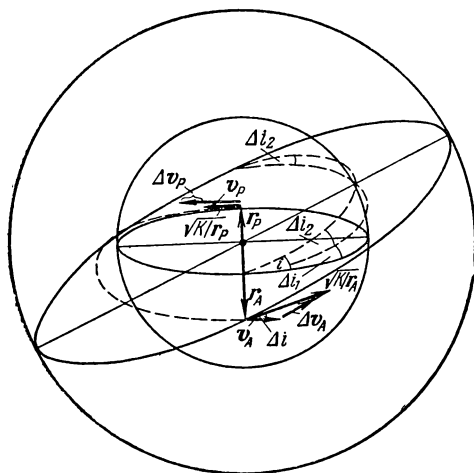


Рис. 3.56. Переход между некомпланарными орбитами.

пульса в районе больших орбитальных скоростей, то есть в районе перигея, является крайне неэкономичным. На основании основного правила о том, что изменение направления скорости должно производиться в точках орбиты с минимальными значениями скорости, на первый взгляд может показаться, что поворот плоскости орбиты должен производиться в апоцентре. Действительно, этот маневр почти всегда будет близок к энергетическому минимуму. Однако можно

показать, что действительный энергетический минимум не совпадает с маневром поворота плоскости орбиты в апоцентре. Предположим, что заданы две круговые орбиты, угол между плоскостями которых равен i . Поворот плоскости орбиты в перигее переходной орбиты потребует импульса скорости

$$\Delta v_{p,i} = \sqrt{\frac{K}{r_p} + v_p^2 - 2v_p \sqrt{\frac{K}{r_p}} \cos i}, \quad (3.248)$$

а в апоцентре переходной орбиты — импульса скорости

$$\Delta v_{A,i} = \sqrt{v_A^2 + \frac{K}{r_A} - 2v_A \sqrt{\frac{K}{r_A}} \cos i}. \quad (3.249)$$

При третьем методе поворота плоскости орбиты для совершения маневра перехода потребуется суммарная величина импульсов

$$\sum \Delta v = \sqrt{\frac{K}{r_p} + v_p^2 - 2v_p \sqrt{\frac{K}{r_p}} \cos \Delta i_1} + \sqrt{\frac{K}{r_A} + v_A^2 - 2v_A \sqrt{\frac{K}{r_A}} \cos \Delta i_2}. \quad (3.250)$$

Учитывая, что $v_P^2 = K [1 + (n-1)/(n+1)]/r_P$, $v_A = v_P r_P / r_A$, $n = r_A / r_P$ и $\Delta i_2 = i - \Delta i_1$, последнее выражение можно записать так:

$$\sum \frac{\Delta v}{\sqrt{K/r_P}} = \sqrt{2+e-2\sqrt{1+e}\cos\Delta i_1} + \sqrt{\frac{1+e}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+e}{n^2}} \cos(i-\Delta i_1)}. \quad (3.251)$$

Для нахождения величины первого поворота Δi_1 , для которого суммарная величина импульсов $\Delta v_P + \Delta v_A$ обращается в минимум, необходимо найти частную производную от суммарной величины импульсов по Δi_1 :

$$\frac{\partial \left(\sum \frac{\Delta v}{\sqrt{K/r_P}} \right)}{\partial \Delta i_1} = \frac{2\sqrt{1+e}\cos\Delta i_1}{\sqrt{2+e-2\sqrt{1+e}\cos\Delta i_1}} + \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+e}{n^2}} \sin(i-\Delta i_1)}{\sqrt{\frac{1+e}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+e}{n^2}} \cos(i-\Delta i_1)}}.$$

Приравняв ее нулю, после некоторых алгебраических преобразований получим:

$$\cos(i-\Delta i_1) = A \sqrt{1 + A \left(\frac{A \sqrt{\frac{2n}{1+n}} - 1}{\sqrt{\frac{2n}{1+n}}} - \sqrt{\frac{2n}{1+n}} \right)}, \quad (3.252a)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{2e \frac{n}{n+1}}}{e + \frac{4+n}{1+n} - \sqrt{2e \frac{n}{n+1}} \cos\Delta i_1} \cdot \frac{\sin^2 \Delta i_1}{n^2}. \quad (3.252b)$$

Выражение (3.252a) является решением квадратного уравнения, и поэтому перед корнем следовало бы писать знаки « $\pm$ ». Однако знак «минус» опущен и берется только положительное значение корня, которое соответствует случаю, когда $\Delta i_1 < \Delta i_2$. Поскольку величина скорости в перигентре переходной орбиты больше, чем в апоцентре, то, очевидно, искомый минимум находится в области значений $\Delta i_1 < \Delta i_2$, а не $\Delta i_2 < \Delta i_1$. При $\Delta i_1 \rightarrow 0$, $\Delta i_2 \rightarrow i$, то есть имеет место поворот плоскости орбиты, осуществляемый ортогональным импульсом, приложенным в апоцентре переходной орбиты. На рис. 3.57 приведены графики

величины оптимального угла поворота плоскости орбиты в периге переходной орбиты в зависимости от отношения радиусов орбиты цели и исходной орбиты для широкого диапазона наклонений орбит i .

Из графиков следует, что независимо от величины наклона орбиты наибольшей величине угла поворота плоскости

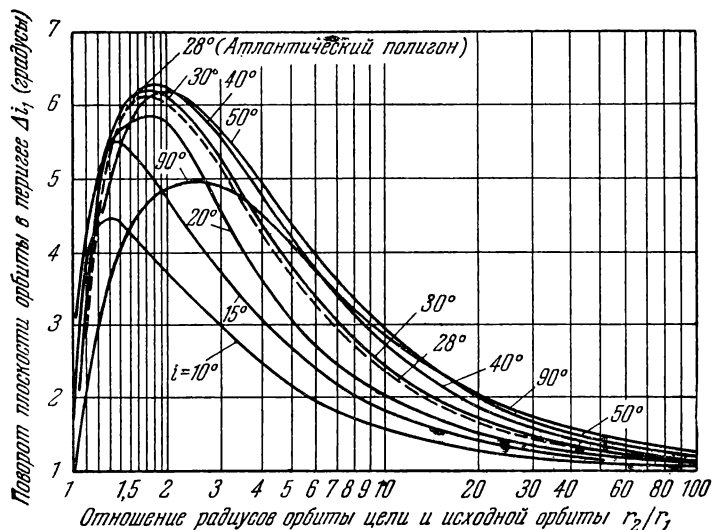


Рис. 3.57. Величина оптимального угла поворота плоскости орбиты в периге переходной орбиты при переходе между некомпланарными круговыми орбитами в зависимости от отношения радиусов орбиты цели и исходной орбиты при различных наклонениях i .

орбиты в перигее соответствует диапазон значений $1,5 \leq r_2/r_1 \leq 2,5$. Для орбит цели, удаленных на очень большие расстояния от исходной орбиты, практически поворот плоскости орбиты необходимо производить в апогее переходной орбиты (то есть в районе орбиты цели). Соответственно выигрыш в требуемой суммарной величине импульсов скорости при совершении маневра с оптимальным углом поворота в перигее по сравнению с поворотом плоскости орбиты только в апогее, как это показано на графиках, приведенных на рис. 3.58, является незначительным. Переход с использованием оптимального угла поворота плоскости орбиты в перигее целесообразно проводить при отношении радиусов заданных орбит порядка 1,5, в особенности если исходная орбита имеет малую высоту и, следовательно, большую величину орбитальной скорости.

Ввиду того, что переход между некомпланарными круговыми орбитами с двумя последовательными поворотами плоскости орбиты дает сравнительно малый энергетический выигрыш, его применение в случае перехода между круговой и эллиптической

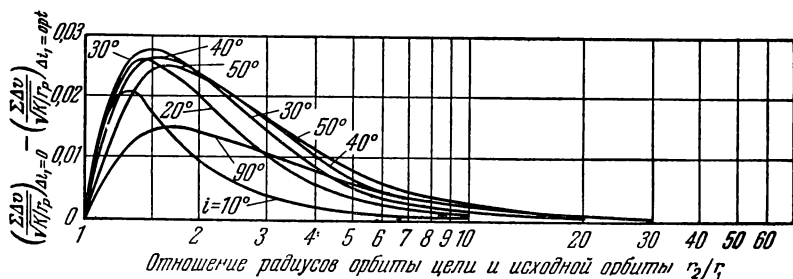


Рис. 3.58. Выигрыш в требуемой суммарной величине импульсов скорости при совершении маневра с оптимальным углом поворота в перигее по сравнению с поворотом плоскости орбиты только в апогее.

орбитами или между эллиптическими орбитами, очевидно, должно дать еще меньший эффект. Чем больше разница в величинах орбитальных скоростей на заданных орбитах, тем меньший выигрыш в требуемой суммарной величине импульсов можно получить за счет частичного поворота плоскости орбиты в перигее переходной орбиты.

3.11. Анализ изменения скорости на кеплеровой орбите

Если в какой-либо точке кеплеровой орбиты с известными параметрами необходимо изменить скорость с целью заданного изменения параметров орбиты, то требуемые тангенциальный, нормальный и ортогональный импульсы скорости могут быть рассчитаны по описанной выше методике. Однако при решении навигационных задач в трехмерном пространстве более удобным является использование абсолютной пространственной декартовой системы координат с началом в центре притяжения.

Предположим, что требуется изменить орбиту 1 с параметрами $(\Omega_1, i_1, \omega_1, e_1, a_1, T_{P_1})$ с целью получения орбиты 2 с параметрами $(\Omega_2, i_2, \omega_2, e_2, a_2, T_{P_2})$. Обозначим постоянные интегрирования первой орбиты через k , а второй орбиты через κ . Величины $k_1 \dots k_6$ и $\kappa_1 \dots \kappa_6$ могут быть легко определены с помощью уравнений (1.5.35). Величины k', k'', k''' и $\kappa', \kappa'', \kappa'''$ можно определить из уравнений (1.5.31).

Если координаты точки, в которой импульсом скорости производится изменение орбиты, обозначить через x, y, z , то из

стью xy , для проекций ускорения силы притяжения на координатные оси получим:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{K_x}{r^3} = \frac{K_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{K}{r^2} \cos \alpha \cos \beta, \\ g_y &= \frac{K_y}{r^3} = \frac{K_y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{K}{r^2} \sin \alpha \cos \beta, \\ g_z &= \frac{K_z}{r^3} = \frac{K_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{K}{r^2} \frac{\sin 2\beta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.256)$$

где $K_x = Kx$, $K_y = Ky$, $K_z = Kz \cos \beta$ и

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\bar{r}} \cos \beta, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{y}{z} = \frac{y}{\bar{r}} \cos \beta, \\ \sin \beta &= \frac{z}{\bar{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.257)$$

По проекциям импульса скорости на координатные оси можно вычислить величину импульса скорости:

$$\Delta v = [(\Delta \dot{x})^2 + (\Delta \dot{y})^2 + (\Delta \dot{z})^2]^{1/2}, \quad (3.258)$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} v dt = \int_{t_0}^{t_1} [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2]^{1/2} dt, \quad (3.259)$$

где t_0 и t_1 — соответственно моменты времени начала и конца работы двигательной установки, создающей импульс тяги.

Для определения расхода массы топлива для создания требуемого импульса скорости можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\Delta v_{id} = v_e \ln \mu_{01} = \int_{t_0}^{t_1} [(\ddot{x} + g_x)^2 + (\ddot{y} + g_y)^2 + (\ddot{z} + g_z)^2]^{1/2} dt, \quad (3.260)$$

где v_e — скорость истечения продуктов сгорания на срезе сопла двигательной установки, $\mu_{01} = m_0/m_1$ — отношение массы космического аппарата в момент начала работы двигательной установки к массе аппарата в момент окончания работы двигательной установки. Через Δv_{id} обозначено приращение идеальной скорости¹⁾, то есть скорости, полученной в предположении, что ускорение, создаваемое тягой двигательной установки, идет

¹⁾ Скорость по формуле Циолковского. (Прим. перев.)

исключительно на увеличение скорости аппарата. В действительности, если в течение конечного промежутка времени работы двигательной установки космический аппарат увеличивает расстояние от центра притяжения, то часть энергии расходуется на преодоление работы силы притяжения и действительное приращение скорости будет меньшим. В случаях кратковременной работы двигательной установки, позволяющей рассматривать приложение тяги как импульс, расход энергии на преодоление работы силы притяжения близок к нулю и им можно пренебречь.

Составляющие скорости для обеих орбит в точке пересечения были представлены ранее соотношениями (3.253) и (3.254). Для получения составляющих скорости, выраженных через r , η , α и β , продифференцируем уравнения (3.257) по времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \alpha \cos \beta - r \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - r \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta = \\ &= e \sin \eta \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\frac{K}{p}} - \sin \alpha \cos \beta (1 + e \cos \eta) \sqrt{\frac{K}{p}} - \\ &- r \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta = \cos \beta \sqrt{\frac{K}{p}} [e \sin \eta \cos \alpha - \sin \alpha (1 + e \cos \eta)] - \\ &- \frac{p \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta}{1 + e \cos \eta}, \quad (3.261)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{r} \sin \alpha \cos \beta + r \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - r \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{K}{p}} [e \sin \eta \sin \alpha - \cos \alpha (1 + e \cos \eta)] - \frac{p \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta}{1 + e \cos \eta}, \quad (3.262)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos 2\beta = e \sin \eta \sin \beta \sqrt{\frac{K}{p}} + \frac{p \dot{\beta} \cos \beta}{1 + e \cos \eta} = \\ &= e \sin \eta \sin \beta \sqrt{\frac{K}{p}} + \frac{p \dot{\beta} \cos \beta}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.263)\end{aligned}$$

Таким образом, составляющие скорости $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$ и $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$, $\dot{z}_2$ для исходной и новой орбит в заданной точке их пересечения могут быть определены либо по формуле (3.253) и (3.254), либо по формулам (3.261)—(3.263). Следовательно, можно рассчитать разности $\Delta \dot{x}$, $\Delta \dot{y}$, $\Delta \dot{z}$ соответствующих составляющих скорости. В идеальном случае приложения импульса тяги (мгновенный импульс) соответствующее изменение скорости можно определить по формуле (3.258), а требуемый расход массы топлива — из следующего равенства:

$$\mu_{01} = e^{\Delta v/v} e. \quad (3.264)$$

В случае конечного интервала работы двигательной установки, но достаточно малого, чтобы можно было пренебречь

изменениями составляющих ускорений силы притяжения с изменением координат x, y, z , составляющие полного импульса $F(t_1 - t_0)$ по трем координатным осям определяются из выражений (3.255):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \dot{x}}{t_1 - t_0} &= -g_x - \frac{F_x}{m}, \\ \frac{\Delta \dot{y}}{t_1 - t_0} &= -g_y - \frac{F_y}{m}, \\ \frac{\Delta \dot{z}}{t_1 - t_0} &= -g_z - \frac{F_z}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.265)$$

Отношение масс до и после работы двигательной установки определяется в соответствии с формулой (3.260):

$$v_e \ln \mu_{01} = [(\ddot{x} + g_x)^2 + (\ddot{y} + g_y)^2 + (\ddot{z} + g_z)^2]^{1/2} (t_1 - t_0). \quad (3.266)$$

В данном случае предполагается, что изменение массы космического аппарата за время работы двигательной установки столь незначительно, что изменением ускорения аппарата при постоянной тяге за счет уменьшения его массы можно пренебречь.

При длительном периоде работы двигательной установки при сравнительно малой тяге необходимо учитывать изменения составляющих g_x, g_y, g_z ускорения силы притяжения в зависимости от изменения координат x, y, z и изменения ускорения F/m за время работы двигательной установки. Изменение ускорения F/m в зависимости от времени определяется следующим равенством:

$$\frac{F}{m} = \frac{F}{m_0^{1/2} m (t_0 - t)}. \quad (3.267)$$

Связь времени t с координатами x, y, z устанавливается последовательными приближениями, так как для решения равенства (3.267) необходимо знать x, y, z в текущие моменты времени работы двигательной установки. Для определения изменения составляющих ускорения силы притяжения в зависимости от изменения координат x, y, z необходимо найти частные производные по x, y, z от выражений (3.256) с учетом соотношений (3.257):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= K \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = K \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = K \frac{1 - 3 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{r^3}, \\ \frac{\partial g_x}{\partial y} &= -K \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -K \frac{3xy}{r^5} = -\frac{3}{2} K \frac{\sin 2\alpha \cos^2 \beta}{r^3}, \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} &= -K \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -K \frac{3xz}{r^5} = -\frac{3}{2} K \frac{\cos \alpha \cos \beta \sin 2\beta}{r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (3.268)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_y}{\partial x} &= \frac{\partial g_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial y} &= K \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = K \frac{r^3 - 3ry^2}{r^6} = K \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{r^3}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial z} &= -K \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -K \frac{3yz}{r^5} = -\frac{3}{2} K \frac{\sin \alpha \cos \beta \sin 2\beta}{r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (3.269)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_z}{\partial x} &= \frac{\partial g_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial g_z}{\partial y} &= \frac{\partial g_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial g_z}{\partial z} &= K \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = K \frac{r^3 - 3rz^2}{r^6} = K \frac{1 - 3 \sin^2 \beta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.270)$$

Для текущих составляющих скорости получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= - \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{dg_x}{dt} dt - \int_{t_0}^t \frac{F_x}{m_0 - \dot{m}t} dt, \\ \dot{y}(t) &= - \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{dg_y}{dt} dt - \int_{t_0}^t \frac{F_y}{m_0 - \dot{m}t} dt, \\ \dot{z}(t) &= - \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{dg_z}{dt} dt - \int_{t_0}^t \frac{F_z}{m_0 - \dot{m}t} dt, \end{aligned} \right\} \quad (3.271)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg_x}{dt} &= \frac{\partial g_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_x}{\partial z} \dot{z}, \\ \frac{dg_y}{dt} &= \frac{\partial g_y}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_y}{\partial z} \dot{z}, \\ \frac{dg_z}{dt} &= \frac{\partial g_z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_z}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.272)$$

Частные производные в правых частях последних выражений определяются по формулам (3.268), (3.269), (3.270). Уравнения (3.271) и (3.272) являются совокупными и решаются совместно. В результате интегрирования будут найдены величины $\dot{x}_1 - \dot{x}_0 = \Delta \dot{x}$ и т. д., и затем можно определить величину изменения скорости Δv по формуле (3.258) и отношение масс $\mu_{01} = m_0/m_1 = \exp(\Delta v/v_e)$.

В случае, описываемом уравнениями (3.271) и (3.272), точка пересечения двух заданных орбит трансформируется в траекторию активного участка. При этом известной является точка

(x_1, y_1, z_1) начала маневра на исходной орбите. Координаты точки окончания маневра на новой орбите являются неизвестными. Поэтому при такой постановке задачи приходится рассчитывать текущие элементы кеплеровой орбиты как функции составляющих мгновенной скорости до получения заданной орбиты. Или же орбитальные элементы определяются приближенно, так, чтобы при последующем импульсном приложении тяги получить требуемую орбиту. Этот случай напоминает переход между орбитами, при котором переходная орбита состоит из участков свободного полета (нулевой тяги), посредством которых достигается заданная орбита.

Следует отметить, что уравнения (3.271) и (3.272) можно использовать и в случае, когда имеет место потенциал силы притяжения, изменяющийся со временем, например при учете наложения потенциала возмущающей силы на потенциал учитываемой силы.

При переходе космического аппарата по переходной кеплеровой орбите, пересекающей заданные орбиты, с использованием двух импульсов, приложенных в точках пересечения переходной орбиты с заданными, минимизация суммарной величины импульсов может быть произведена аналогично тому, как это было сделано для ТМЭ (§ 1.3). Однако эта задача является более сложной даже в случае компланарного перехода.

3.12. Анализ ошибок маневров в поле центральной силы

Ликвидация отклонений параметров орбиты от требуемых, очевидно, повлечет за собой дополнительный расход топлива. Естественно, что реалистический подход при изучении маневров должен охватывать и вопросы, связанные с отклонением орбиты от теоретической кеплеровой орбиты. Предположим, что необходимо вывести космический аппарат в поле центральной силы на заранее вычисленную орбиту, которую будем называть *теоретической орбитой*. Каждая точка этой орбиты определяется шестью переменными: тремя координатами и тремя составляющими скорости. При использовании прямоугольной системы координат с началом в центре притяжения этими переменными будут $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. При использовании полярной системы координат с началом также в центре притяжения этими переменными будут $r, \eta, \delta, \dot{r}, \dot{\eta}, \dot{\delta}$, где δ — угол склонения рассматриваемой точки относительно определенной плоскости отсчета ($z=0$).

Начальная точка свободного полета космического аппарата должна совпадать с теоретической точкой выключения

двигательной установки. Отклонения от теоретической точки выключения двигательной установки либо по координатам, либо по скорости, или по тому и другому будем называть *ошибками*. Под *анализом ошибок* будем понимать исследование влияния ошибок в точке выключения двигательной установки на орбитальные элементы, имеющее целью выявление чувствительности орбиты или класса орбит к ошибкам в начальной точке. В свою очередь чувствительность орбиты к ошибкам в начальной точке вместе с требуемой точностью маневра определяет допустимые отклонения начальной точки (требования к точности). Математическим аппаратом при проведении анализа ошибок являются выражения для полных и частных производных, определяющих чувствительность орбитальных элементов к ошибкам в начальной точке.

В настоящем параграфе будет рассмотрено движение космического аппарата (материальной точки) в поле центральной силы. При этом общий анализ ошибок маневров в поле центральной силы будет ограничен рассмотрением лишь эллиптических орбит. Круговая и параболическая орбиты могут рассматриваться как особые случаи эллиптических орбит. Они могут отклоняться от расчетных орбит без изменения своей геометрической формы за счет изменения склонения (δ и δ'), долготы восходящего узла Ω , ориентации большой оси (парабола) или изменения радиального расстояния; в последнем случае соответственно должна измениться и скорость в начальной точке.

Поскольку, по определению, отклонения элементов начальной точки от их теоретических значений *малы*, то отклонения орбитальных элементов в случае круговой орбиты также малы. В случае параболической орбиты отклоняться могут лишь наклонение, радиальное расстояние до перицентра и ориентация большой оси (долгота перицентра), так как изменение прочих параметров приводит к превращению орбиты в эллиптическую или гиперболическую. В случае параболической орбиты ошибки в наклонении и в ориентации большой оси оказывают значительное влияние на координаты космического аппарата, если он находится на большом расстоянии от центрального тела. Однако практическое значение параболических орбит невелико. При совершении маневров, связанных с переходом аппарата из одного центрального поля в другое, как будет показано в § 4.3, параболические орбиты с энергетической точки зрения оказываются менее выгодными, чем гиперболические орбиты. Поскольку анализ ошибок маневров, связанных с движением космического аппарата в пространстве со сложным силовым полем, образованным наложением отдельных силовых полей, будет рассмотрен в следующем параграфе, то в настоящем пара-

графе мы ограничимся рассмотрением лишь эллиптических орбит.

Исследование ошибок маневра начнем с анализа влияния ошибок в координатах космического аппарата. Соответствующая геометрическая иллюстрация приведена на рис. 3.60. Пусть вектор скорости $\mathbf{v}$ в начальной точке зафиксирован в теоретической точке выключения двигательной установки. При дальнейшем исследовании будем считать, что вектор скорости в начальной точке может изменять свое положение, оставаясь параллельным своему фиксированному положению. Любой поворот вектора скорости потребовал бы дополнительной составляющей скорости, что противоречило бы допущению о фиксированном по направлению положении вектора начальной скорости. Предположим, что на рис. 3.60 точка A соответствует требуемому положению точки выключения двигательной установки. При наличии ошибки в радиальном расстоянии r точка выключения двигательной установки в действительности может оказаться в точке A' или A'' . Если при этом отсутствуют ошибки в прочих параметрах, то ориентация плоскости орбиты и истинная аномалия точки выключения двигательной установки будут отвечать требуемым значениям. Подобная ошибка dr в радиальном расстоянии без изменения вектора скорости $\mathbf{v}$ может иметь место в любой точке орбиты. Однако, как будет показано ниже, это утверждение не является справедливым в отношении ориентации плоскости орбиты и истинной аномалии.

Если в качестве плоскости отсчета принять плоскость теоретической орбиты, то ошибка в ориентации плоскости орбиты приведет к тому, что космический аппарат окажется в точке B , характеризуемой ошибкой $d\delta$. При этом, поскольку было оговорено, что вектор скорости может перемещаться, лишь оставаясь параллельным своему фиксированному положению, то очевидно, что точка A должна быть одной из точек апсид. В любой другой точке подобное смещение начальной точки привело бы к ошибке в векторе скорости $\mathbf{v}$.

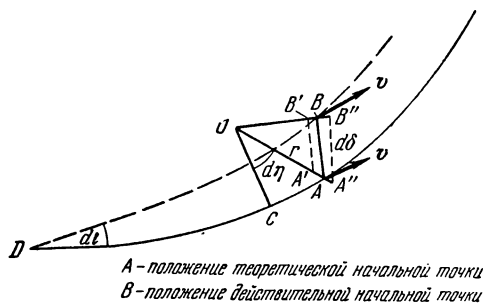


Рис. 3.60. Геометрическая иллюстрация к анализу ошибок в координатах космического аппарата.

Естественно, что при параллельном перемещении вектора скорости в точку A' или A'' он будет содержать ошибку по величине. Если одновременно имеют место ошибки dr и $d\delta$, то вектор скорости для точек B' и B'' также будет содержать ошибку.

Третьей причиной, вызывающей ошибки в координатах космического аппарата, является ошибка в η . Однако легко заметить, что подобная ошибка по необходимости приводит к ошибке в векторе скорости. Действительно, при параллельном переносе вектора скорости $\mathbf{v}$ в точку C (рис. 3.60) вектор скорости не будет направлен по касательной к орбите в точке C . Этот случай формально может быть исследован как совместное влияние ошибок в скорости и координатах.

Таким образом, анализ ошибок в координатах может быть сведен к двум случаям.

Случай 1. Ошибка dr в радиальной дальности. Анализ этой ошибки может быть проведен применительно к любой точке теоретической орбиты. Вектор скорости $\mathbf{v}$, соответствующий своему требуемому значению на теоретической орбите на радиальном расстоянии r , перемещается параллельно самому себе на расстояние $r \pm dr$.

Случай 2. Ошибка $d\delta$ в склонении, а следовательно, и в наклонении орбиты. Эта ошибка приводит к ошибкам только в координатах, если истинная аномалия точки выключения двигательной установки равна 0 или 180° (перигентр или апоцентр), так как только в этих точках выполняется условие о параллельности вектора $\mathbf{v}$ своему фиксированному положению при отсутствии ошибки dr . Таким образом, анализ ошибок в координатах, вызванных ошибкой в наклонении орбиты, будет ограничен рассмотрением случая, когда начальная точка является одной из точек апсид.

Рассмотрим первый случай — ошибку в радиальной дальности r . Задача может быть сформулирована следующим образом: допустим, что космическим аппаратом в точке выключения двигательной установки достигнута расчетная скорость $\mathbf{v}$, но имеет место небольшая ошибка dr в радиальной дальности. Каково влияние этой ошибки на орбитальные элементы?

Используя полярное уравнение эллиптической орбиты, можно получить:

$$\delta p = dr + e \cos \eta \, dr + r \cos \eta \, d\epsilon, \quad (3.273)$$

так как изменяться будут фокальный параметр p и эксцентриситет e , а истинная аномалия η , по определению, остается неизменной. Будет изменяться также и постоянная закона площадей $C = r^2 \dot{\eta}$:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = 2r\dot{\eta} = 2 \frac{C}{r} \quad (3.274a)$$

или, в более общей форме,

$$\frac{\partial C/C}{\partial r/r} = 2, \quad (3.274b)$$

$$\frac{\partial C/C}{\partial r/a} = 2 \frac{a}{r}. \quad (3.274c)$$

Таким образом, относительное изменение C , то есть $\partial C/C$, в два раза больше относительного изменения радиального расстояния. Поскольку эксцентриситет орбиты $e = v^2 - 1$, где $v^2 = (v/v_c)^2 = rv^2/K$, то изменение радиального расстояния приводит к изменению эксцентриситета орбиты:

$$\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{v^2}{K} = \frac{v^2}{r} \quad (v > 1) \quad (3.275a)$$

или, в более общей форме,

$$\frac{\partial e/e}{\partial r/r} = \frac{v^2}{v^2 - 1} \quad (v > 1). \quad (3.275b)$$

Приведенное выше выражение для e справедливо для эллиптических орбит, орбитальная энергия которых больше орбитальной энергии соответствующей круговой орбиты, так что v всегда больше единицы. Это имеет место при изменении данной круговой орбиты в эллиптическую орбиту с большей орбитальной энергией (например, при переходе с низкой орбиты на более высокую орбиту). В обратном случае $e = 1 - v^2$ и

$$\frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{v^2}{K} = -\frac{v^2}{r} \quad (v < 1), \quad (3.276a)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial r/r} = \frac{v^2}{1 - v^2} \quad (v < 1). \quad (3.276b)$$

Из анализа приведенных выражений следует, что в обоих случаях ($v \geq 1$) относительное изменение эксцентриситета, соответствующее заданному изменению радиального расстояния, сильно возрастает с приближением v^2 к единице, то есть с приближением теоретической орбиты к круговой. При $v^2 \rightarrow 2$, то есть при $e \rightarrow 1$, относительное изменение $\partial e/e$ стремится к граничному значению $\partial e/e \rightarrow 2$. Если в качестве относительного изменения радиального расстояния использовать величину $\partial r/a$, то можно получить более общее выражение для относительного изменения эксцентриситета:

$$\frac{\partial e/e}{\partial r/a} = \frac{\frac{v^2}{K/a}}{\frac{v^2}{K/a} - \frac{a}{r}} = \frac{(v/v_c, a)^2}{(v/v_c, a)^2 - a/r}. \quad (3.276c)$$

Для определения влияния ошибки в радиальном расстоянии на величину фокального параметра p воспользуемся выражением (3.273):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 1 + e \cos \eta + r \cos \eta \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{p}{r} + r \cos \eta \frac{\partial e}{\partial r}, \quad (3.277a)$$

$$\frac{\partial p/p}{\partial r/r} = 1 + \frac{r^2}{p} \cos \eta \frac{\partial e}{\partial r} = 1 \pm \frac{r}{p} v^2 \cos \eta \quad (v \geq 1), \quad (3.277b)$$

$$\frac{\partial p/p}{\partial r/a} = \frac{a}{r} \pm \frac{v^2}{K/a} \frac{\cos \eta}{1 + e \cos \eta} \quad (v \geq 1). \quad (3.277c)$$

Из выражения (3.277b) следует, что максимальное влияние данной относительной ошибки $\partial r/r$ на относительное изменение величины фокального параметра имеет место, если начальной точкой является одна из точек апсид, и минимальное влияние, если $\eta = 90^\circ$ или $\eta = 270^\circ$ (в последних двух точках $r = p$). В приведенных выше выражениях e представляет собой эксцентриситет теоретической (то есть невозмущенной) орбиты.

Для определения влияния dr на величину большой полуоси воспользуемся выражением $a = p/(1 - e^2)$:

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\frac{\partial p}{\partial r} + 2ae \frac{\partial e}{\partial r}}{1 - e^2}, \quad (3.278a)$$

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{a}{r} \left(1 \pm \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e}{1 - e^2} v^2 \right) \quad (v \geq 1), \quad (3.278b)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial r/r} = \frac{r}{a} \left(\frac{a}{r} \pm \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e}{1 - e^2} \frac{v^2}{K/a} \right) \quad \left(\frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right), \quad (3.278c)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial r/r} = 1 \pm \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e}{1 - e^2} v^2 \quad (v \geq 1). \quad (3.278d)$$

При $v > 1$ или $v/\sqrt{K/a} > 1$ берется знак «плюс». Знак «минус» соответствует значениям $v < 1$ или $v/\sqrt{K/a} < 1$.

Из полученных выражений, как и следовало ожидать, вытекает, что с увеличением эллиптичности орбиты влияние относительной ошибки $\partial r/r$ на величину большой полуоси возрастает; при приближении орбиты к параболе относительная ошибка $\partial r/r$ приводит к бесконечно большому увеличению большой полуоси. В полученных выражениях истинная аномалия η соответствует радиусу-вектору r исходной орбиты.

Для определения изменения величины малой полуоси $b = \sqrt{ap} = a \sqrt{1 - e^2}$ можно получить:

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{(1 - e^2) \frac{\partial a}{\partial r} - ae \frac{\partial e}{\partial r}}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial r} + ae \frac{\partial e}{\partial r}}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (3.279a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{b}{r} \left(1 \pm \frac{r}{a} \frac{\cos \eta}{1 - e^2} v^2 \right) \quad (v \geq 1), \quad (3.279b)$$

$$\frac{\partial b/b}{\partial r/r} = 1 \pm \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + e}{1 - e^2} \quad (v \geq 1), \quad (3.279c)$$

$$\frac{\partial b/b}{\partial r/a} = \frac{a}{r} \pm \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + e}{1 - e^2} \quad \left(\frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right). \quad (3.279d)$$

Для определения изменения радиального расстояния до апоцентра $r_A = a(1 + e)$ можно получить:

$$\frac{\partial r_A}{\partial r} = (1 + e) \frac{\partial a}{\partial r} + a \frac{\partial e}{\partial r}, \quad (3.280a)$$

$$\frac{\partial r_A}{\partial r} = \frac{r_A}{r} (1 \pm v^2 A) \quad (v \geq 1), \quad (3.280b)$$

$$\frac{\partial r_A/r_A}{\partial r/r} = 1 \pm v^2 A \quad (v \geq 1), \quad (3.280c)$$

$$\frac{\partial r_A/r_A}{\partial r/a} = \frac{a}{r} \pm \frac{v^2}{K/a} A \quad \left(\frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right), \quad (3.280d)$$

$$A = \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e \pm (1 - e)}{1 - e^2} \quad \left(v \geq 1 \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right). \quad (3.280e)$$

И здесь, как и следовало ожидать, чувствительность r_A к ошибкам в радиальном расстоянии возрастает с увеличением эксцентриситета орбиты.

Для определения изменения радиального расстояния до перигея $r_P = a(1 - e)$ аналогичным образом можно получить:

$$\frac{\partial r_P}{\partial r} = (1 - e) \frac{\partial a}{\partial r} - a \frac{\partial e}{\partial r}, \quad (3.281a)$$

$$\frac{\partial r_P}{\partial r} = 1 \pm v^2 B \quad (v \geq 1), \quad (3.281b)$$

$$\frac{\partial r_P/r_P}{\partial r/r} = 1 \pm v^2 B \quad (v \geq 1), \quad (3.281c)$$

$$\frac{\partial r_P/r_P}{\partial r/a} = 1 \pm \frac{v^2}{K/a} B \quad \left(\frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right), \quad (3.281d)$$

$$B = \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e \mp (1 + e)}{1 - e^2} \quad \left(v \geq 1 \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right). \quad (3.281e)$$

В приведенных выше выражениях v обозначает величину $v/v_c = v/\sqrt{K/r}$ в теоретической точке орбиты. Например, если необходимо определить влияние ∂r_p на величину r_A , то в выражении (3.280b) используется величина v , соответствующая r_p теоретической орбиты, и берется знак, соответствующий значению $v > 1$. Аналогичным образом при определении влияния ошибки ∂r_A на величину r_p (например, при переходе космического аппарата с внешней на внутреннюю орбиту) в выражении (3.281b) используется величина v , соответствующая r_A теоретической орбиты, и берется знак для $v < 1$. В любом случае истинная аномалия η соответствует радиусу-вектору r теоретической орбиты.

Наконец, для определения влияния ошибки в радиальном расстоянии на период обращения $T = 2\pi a^{3/2} K^{-1/2}$ можно получить:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{3\pi}{\sqrt{K/a}} \frac{\partial a}{\partial r}, \quad (3.282a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 1,5 \frac{T}{r} (1 \pm Dv^2) \quad (v \geq 1), \quad (3.282b)$$

$$\frac{\partial T/T}{\partial r/r} = 1,5 (1 \pm Dv^2) \quad (v \geq 1), \quad (3.282c)$$

$$\frac{\partial T/T}{\partial r/a} = 1,5 \left(1 \pm D \frac{v^2}{K/a} \right) \left(\frac{v^2}{K/a} \geq 1 \right), \quad (3.282d)$$

$$D = \frac{\frac{r}{a} \cos \eta + 2e}{1 - e^2}. \quad (3.282e)$$

Для эллиптических орбит с малым эксцентриситетом абсолютная величина изменения орбитальных элементов, вызываемого ошибками в радиальном расстоянии до начальной точки, невелика и поэтому часто не имеет практического значения (за исключением случаев, когда решается задача встречи со спутником).

Для орбит с большим эксцентриситетом изменения орбитальных элементов становятся значительными.

Для иллюстрации приведем влияние ошибок в радиальной дальности Δr , равной 1 морской миле (1,852 км), на параметры орбиты, близкой к параболической. В качестве подобной орбиты воспользуемся орбитой, близкой к переходной орбите «Земля — Луна» (без учета поля притяжения Луны). Примем радиальное расстояние теоретической начальной точки $r = 6920$ км (3740 морских миль) [высота 556 км (300 морских миль)], $\eta = 0$, $v/v_p = 0,99$ (v_p — параболическая скорость), что соответствует $v^2 = 1,95$. Эксцентриситет орбиты $e = 0,96$, $p = 13\,610$ км (7350 морских

миль), $a=170\,500$ км (92 000 морских миль), $b=47\,200$ км (26 000 морских миль), $r_A=330\,300$ км (180 000 морских миль), $T \approx 8,9$ сут. Ошибка Δr_p , равная 1 морской миле (1,852 км), вызывает следующие изменения параметров орбиты: $\Delta e = 5,22 \cdot 10^{-4}$, $\Delta p = 7360$ км (3955 морских миль), $\Delta a = 2262$ км (1223 морских мили), $\Delta b = 335$ км (181 морская миля), $\Delta r_A = 4530$ км (2448 морских миль), $\Delta T = 0,1155$ сут, или 2,77 час.

Этот пример показывает, что ошибка в положении начальной точки может иметь большое значение. В приведенном примере ошибка в положении начальной точки должна быть несколько меньше 1/100 мили (16,1 м), чтобы можно было пренебречь ее влиянием на величину r_A .

Рассмотрим теперь второй случай — ошибку в склонении dd . Если в качестве плоскости отсчета склонения выбрать плоскость теоретической орбиты, то теоретическое значение δ равно нулю и $d\delta = \delta$, $di = i$. Тогда в соответствии с рис. 3.60 можно получить:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin DB \sin i, \\ \cos \delta \sin DA &= \sin DB \cos i, \\ \cos \delta \cos DA &= \cos i.\end{aligned}$$

В силу допущения о параллельном смещении вектора $\mathbf{v}$, $\sin DB = 1$, $\sin DA = 1$ и, следовательно, $i = \delta$. Таким образом, ошибка в наклонении орбиты в данном случае равна ошибке в склонении начальной точки, то есть $di/d\delta = 1$.

Анализ ошибок в скорости будет основан на представлении вектора скорости тремя составляющими в полярной системе координат: радиальной составляющей $v_r = \dot{r}$, трансверсальной составляющей $v_a = r\dot{\eta}$ и ортогональной составляющей v_w . Составляющими в плоскости орбиты выбраны v_r и v_a , так как практически все методы орбитальных измерений основаны на определении v_r и v_a , а не v и θ (рис. 3.40).

В любой точке (r, η, δ) пространства величина вектора скорости $v = \sqrt{v_r^2 + v_a^2 + v_w^2}$ определяет данную эллиптическую орбиту, если $v^2 - 2K/r < 0$. Задача заключается в определении влияния ошибок dv_r , dv_a и dv_w на параметры этой орбиты. Для решения задачи мы можем непосредственно обратиться к результатам § 3.8, так как формально каждая из ошибок может рассматриваться как импульсное изменение скорости от ее требуемого значения.

Напомним, что в § 3.8 было установлено, что ортогональный импульс скорости dv_w может изменить лишь наклонение орбиты и положение линии узлов, а не величину большой оси, эксцентриситет, аргумент перигея или среднее движение. Частную производную, определяющую влияние *малой* ортогональной

составляющей скорости на наклонение орбиты и долготу восходящего узла, можно взять непосредственно из таблицы 3.1, учитывая выражения (3.196) — (3.200h):

$$\frac{\partial i}{\partial v_w} = \frac{1}{v_a} \cos(\eta - \eta_\Omega) \quad (3.283a)$$

или, в более общем виде,

$$\frac{\partial i}{\partial v_w / \sqrt{K/a}} = \frac{a \cos(\eta - \eta_\Omega)}{r \sqrt{|1 - e^2|}} \quad (e \leq 1). \quad (3.283b)$$

Для эллиптической орбиты с учетом выражения (3.229) получим:

$$\frac{\partial i}{\partial v_w} = \sqrt{\frac{r_p}{r_A}} \frac{(1 + e) \cos(\eta - \eta_\Omega)}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.283c)$$

Аналогичным образом можно получить частные производные, характеризующие изменение долготы восходящего узла:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_w} = \frac{\sin(\eta - \eta_\Omega)}{v_a \sin i}, \quad (3.283d)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_w} = \frac{a/r}{\sqrt{|1 - e^2|}} \frac{\sin(\eta - \eta_\Omega)}{\sin i}, \quad (3.283e)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_w} = \sqrt{\frac{r_p}{r_A}} \frac{1 + e}{1 + e \cos \eta} \frac{\sin(\eta - \eta_\Omega)}{\sin i}, \quad (3.283f)$$

где v_a — трансверсальная составляющая скорости; η — истинная аномалия удаленной на радиальное расстояние r точки, в которой прикладывается ортогональный импульс ∂v_w ; η_Ω — истинная аномалия восходящего узла; i — наклонение орбиты к плоскости, определяющей линию узлов. Зависимость частных производных от величин η , η_Ω и i исследована в § 3.8. Для численной оценки влияния ортогональной составляющей ошибки скорости необходимо знать величины η , η_Ω и i .

Случаи больших изменений наклонения i [выражение (3.231)] или долготы восходящего узла Ω в настоящем параграфе исследоваться не будут, так как большие изменения не могут рассматриваться как ошибки, представляющие малые отклонения от теоретических величин.

Для учета влияния ошибки в радиальной составляющей скорости получим:

$$\frac{\partial a}{\partial v_r} = -2 \frac{a}{\sqrt{K/a}} \frac{v_r}{\sqrt{K/a}} \sin \eta = -\frac{2a^2 v_r}{K} \sin \eta, \quad (3.284a)$$

где η — истинная аномалия точки с радиальной скоростью v_r . При $v_r \neq 0$ можно записать:

$$\frac{\partial a/a}{\partial v_r/v_r} = -2 \frac{v_r^2}{K/a} \sin \eta = -\frac{2v_r^2}{h} \sin \eta = 2v_r^2 \frac{1 + e \cos \eta \sin \eta}{|1 - e^2|}, \quad (3.284b)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial v_r/\sqrt{K/a}} = \frac{2e}{\sqrt{|1 - e^2|}} \sin^2 \eta = -2 \frac{v_r}{\sqrt{K/a}} \sin \eta. \quad (3.284c)$$

С приближением орбиты к параболической, то есть при $a \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $e \rightarrow 1$, изменение величины большой оси при заданной величине ошибки в радиальной составляющей скорости стремится к бесконечности. Однако вблизи точек апсид величина радиальной составляющей скорости и величина $\sin \eta$ малы. При этих условиях влияние ∂v_r на величину большой оси может оказаться пренебрежимо малым в широком диапазоне значений эксцентриситета. Для учета влияния ∂v_r на прочие параметры орбиты можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v_r} &= -\frac{C}{K} \sin \eta = \sqrt{\frac{p}{K}} \sin \eta = \\ &= -\sqrt{\frac{1 + e \cos \eta}{K/r}} \sin \eta = -\sqrt{\frac{|1 - e^2|}{K/a}} \sin \eta, \end{aligned} \quad (3.285a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e/e}{\partial v_r/v_r} &= -\frac{C}{K} \frac{v_r}{e} \sin \eta = -\left(\frac{v_r}{v_c}\right)^2 \sqrt{1 + e \cos \eta} \sin \eta = \\ &= -\sqrt{\frac{1 - e^2}{h}} \frac{v_r}{e} \sin \eta = -\sqrt{\frac{b}{K}} \frac{v_r}{e} \sin \eta, \end{aligned} \quad (3.285b)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial v_r/\sqrt{K/a}} = -\sqrt{\frac{|1 - e^2|}{e^2}} \sin \eta; \quad (3.285c)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v_r} = \frac{3}{\sqrt{ap}} \sin \eta = \frac{3}{a \sqrt{1 - e^2}} \sin \eta, \quad (3.286a)$$

$$\frac{\partial \mu/\mu}{\partial v_r/v_r} = \frac{3}{a \sqrt{1 - e^2}} \frac{v_r}{\mu} \sin \eta = \frac{3T}{2\pi} v_r \sqrt{1 - e^2} \sin \eta; \quad (3.286b)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v_r} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{K}} \cos(\eta - \eta_0) = \frac{\cos(\eta - \eta_0)}{e \sqrt{h(1 - e^2)}}, \quad (3.287)$$

где, как и прежде, μ — среднее движение ($\mu = 2\pi/T$), T — период обращения, а η_0 и η — соответственно истинные аномалии перигея и текущей точки относительно фиксированного в абсолютном пространстве направления (например, направления на точку весеннего равноденствия).

Ошибка в радиальной составляющей в точках апсид не оказывает влияния на параметры орбиты, за исключением углового расстояния до перигея η_0 . Влияние на η_0 в свою очередь зависит от величины $\eta - \eta_0$, то есть от взаимного углового распо-

жения перигея и текущей точки, в которой находится космический аппарат. При этом указанное влияние является максимальным при $\eta = \eta_0$ или $\eta = \eta_0 + 180^\circ$. При $\eta - \eta_0 = 90^\circ$ или $\eta - \eta_0 = 270^\circ$ это влияние отсутствует. Степень влияния ошибки в радиальной составляющей скорости на угловое расстояние до перигея η_0 зависит от эксцентриситета орбиты. При $e \rightarrow 0$ (круговая орбита) и $e \rightarrow 1$ (параболическая орбита) $\partial \eta_0 / \partial v_r \rightarrow \infty$.

Для учета влияния трансверсальной составляющей скорости получим:

$$\frac{\partial a}{\partial v_a} = \frac{2a^2}{K} v_a, \quad (3.288a)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial v_a/v_a} = \frac{2a}{K} v_a^2 = \frac{2v_a^2}{h} = 2 \left(\frac{v_a}{v_c} \right)^2 \frac{1 + e \cos \eta}{1 - e^2}, \quad (3.288b)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial v_a/\sqrt{K/a}} = \frac{2(1 + e \cos \eta)}{\sqrt{|1 - e^2|}}. \quad (3.288c)$$

В частности, если начальная точка совпадает с одной из точек апсид ($\eta = 0$ или 180° и $v = v_a$, $v_r = 0$), то

$$\frac{\partial a/a}{\partial v/v_{\text{apsis}}} = \frac{2v^2}{1 \mp e} \quad (\eta = 0 \text{ или } 180^\circ), \quad (3.288d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v_a} &= \frac{C}{K a e r} (b^2 - r^2) = \frac{1 - e^2}{e r \sqrt{K a}} (r_A r_P - r^2) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{K} (|1 - e^2|)} \left[\frac{a}{r} (|1 - e^2|) - \frac{r}{a} \right], \end{aligned} \quad (3.289a)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial v_a/v_a} = \frac{C v_a v_r}{K a e^2 r} (b^2 - r^2) = \frac{v_r (1 - e^2)}{e^2 r^2} (r_A r_P - r^2), \quad (3.289b)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial v_a/\sqrt{K/a}} = \left[\frac{a}{r} (|1 - e^2|) - \frac{r}{a} \right] \sqrt{\frac{|1 - e^2|}{e^2}}, \quad (3.289c)$$

так как $v_a = C/r$.

Наконец,

$$\frac{\partial \mu}{\partial v_a} = -\frac{3}{r} \sqrt{\frac{p}{a}} = -\frac{3}{r} \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.290a)$$

$$\frac{\partial \mu/\mu}{\partial v_a/v_a} = -\frac{3}{r} \frac{v_a}{\mu} \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.290b)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v_a} = \frac{p + r}{K e} \sin(\eta - \eta_0) = \frac{2 + e \cos \eta}{e K/r} \sin(\eta - \eta_0). \quad (3.291)$$

Рассмотренные выше частные производные получены в предположении, что имеет место ошибка либо в радиальной составляющей скорости, либо в трансверсальной составляющей скорости, но не одновременно в обеих составляющих. Поэтому полученные выражения относятся к случаю, когда с изменением величины скорости меняется также и направление вектора ско-

рости, за исключением точек апсид, где $v_r=0$. Если же имеет место одновременное изменение v_r и v_a таким образом, что направление вектора скорости не изменяется, а изменяется лишь его величина, то можно получить:

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{2v}{K \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{K} \right)^2} = \frac{2va^2}{K}, \quad (3.292a)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial v/v} = \frac{2v^2}{K} = 2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (3.292b)$$

$$\frac{\partial a/a}{\partial v/\sqrt{K/a}} = 2 \frac{v}{\sqrt{K/a}}; \quad (3.292c)$$

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \pm \frac{2v}{v_c^2} = \pm \frac{2}{v} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.293a)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial v/v} = \pm \frac{2}{e} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.293b)$$

$$\frac{\partial e/e}{\partial v/\sqrt{K/a}} = \pm 2 \frac{r}{a} \frac{v}{e \sqrt{K/a}} \quad \left(\frac{v}{\sqrt{K/a}} \geq 1 \right); \quad (3.293c)$$

$$\frac{\partial r_A}{\partial v} = \frac{2var_A}{K} \pm \frac{2a}{v} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.294a)$$

$$\frac{\partial r_A}{\partial v} = \frac{r_A}{\sqrt{K/a}} \frac{2v}{\sqrt{K/a}} \left(1 \pm \frac{r/a}{1+e} \right) \quad \left(\frac{v}{\sqrt{K/a}} \geq 1 \right), \quad (3.294b)$$

где

$$\frac{r}{a} = \frac{(1-e^2)}{1+e \cos \eta} \quad \text{и} \quad v/\sqrt{K/a} = \sqrt{2 \frac{a}{r} - 1}.$$

Отсюда

$$\frac{v}{\sqrt{K/a}} = \sqrt{2 \frac{1+e \cos \eta}{|1-e^2|} - 1}, \quad (3.295)$$

$$\frac{\partial r_A/r_A}{\partial v/v} = \frac{2va^2}{K} \pm \frac{2a}{v_A} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.294c)$$

$$\frac{\partial r_A/r_A}{\partial v/\sqrt{K/a}} = 2 \frac{v}{\sqrt{K/a}} \left(1 \pm \frac{r/a}{1+e} \right) \quad \left(\frac{v}{\sqrt{K/a}} \geq 1 \right), \quad (3.296)$$

$$\frac{\partial r_P}{\partial v} = \frac{2var_P}{K} \mp \frac{2a}{v} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.297a)$$

$$\frac{\partial r_P}{\partial v} = \frac{r_P}{\sqrt{K/a}} \frac{2v}{\sqrt{K/a}} \left(1 \mp \frac{r/a}{|1-e|} \right) \quad \left(\frac{v}{\sqrt{K/a}} \geq 1 \right), \quad (3.297b)$$

$$\frac{\partial r_P/r_P}{\partial v/v} = \frac{2v^2a}{K} \mp \frac{2a}{r_P} v^2 \quad (v \geq 1), \quad (3.297c)$$

$$\frac{\partial r_P/r_P}{\partial v/\sqrt{K/a}} = 2 \frac{v}{\sqrt{K/a}} \left(1 \mp \frac{r/a}{|1-e|} \right) \quad \left(\frac{v}{\sqrt{K/a}} \geq 1 \right), \quad (3.297d)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v} = \frac{2}{ev} \sin(\eta - \eta_0), \quad (3.187)$$

где η и η_0 обозначают те же величины, что и в выражении (3.287).

Перейдем к исследованию влияния произвольной комбинации ошибок в радиальной и трансверсальной составляющих скорости на величину радиуса-вектора произвольной точки орбиты. В дальнейшем примем следующие обозначения: v_r и v_a — соответственно радиальная и трансверсальная составляющие скорости в начальной точке, v_1 — величина скорости в начальной точке, θ_1 — угол, образуемый вектором скорости с местным горизонтом в начальной точке, e — эксцентриситет орбиты. Запишем полярное уравнение кеплеровой орбиты $r = p/(1 + e \cos \eta)$ в следующей форме:

$$r = \frac{r_1^2 v_1^2 \cos^2 \theta_1}{K(1 + e \cos \eta)}, \quad (3.298)$$

где r и η относятся к любой произвольной (за исключением начальной) точке орбиты. С учетом равенства $K = r_1 v_c^2$, где v_c — местная круговая скорость в начальной точке, можно записать:

$$e^2 = \left(1 - \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{v_c^2}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1 \left(\frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{v_c^2}\right)^2. \quad (3.299)$$

Наконец, используя выражения $\operatorname{tg} \theta_1 = v_r/v_1$ и $v_1 \cos \theta_1 = v_a$, можно переписать уравнение (3.298) в следующей форме:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{(v_a/v_c)^2}{1 + \chi(v) \cos \eta} = \frac{v_a^2}{1 + \chi(v) \cos \eta}, \quad (3.300)$$

где

$$\chi(v) = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2 \left(\frac{v_r}{v_c}\right)^2} = \sqrt{v_a^2 v_r^2 + (1 - v_a^2)^2}. \quad (3.301)$$

Формула (3.300) позволяет вычислить относительную величину радиуса-вектора r в произвольной точке орбиты, определяемой истинной аномалией η (измеренной от перигея), в зависимости от величины скорости в начальной точке $v_1 = \sqrt{v_a^2 + v_r^2}$. В частности, если точками, представляющими интерес, являются точки апсид, для которых $r = r_A$ или $r = r_P$, то $\cos \eta = \pm 1$. В остальных случаях должна быть задана истинная аномалия η рассматриваемой точки.

Начальная точка не обязательно должна совпадать с одной из точек апсид (то есть $\eta_1 \neq 0$), за исключением случая $v_r = 0$. Если для любых конкретных начальных условий обозначить теоретические значения v_a через v'_a и $\chi(v)$ через $\chi(v')$ (при этом может быть $v_r = 0$ или $v_r \neq 0$), а величины, соответствующие дей-

ствительной скорости при достижении теоретической радиальной дальности r_1 , обозначить через v_a'' и $\chi(v'')$, то при заданной истинной аномалии η' получим следующее отношение действительной величины радиуса-вектора к его теоретической величине:

$$\frac{r''}{r'} = \left(\frac{v_a''}{v_a'} \right)^2 \frac{1 + \chi(v'') \cos \eta'}{1 + \chi(v') \cos \eta'}. \quad (3.302)$$

В частности, для точек апсид последнее выражение упрощается:

$$\frac{r_{A,P}''}{r_{A,P}'} = \left(\frac{v_a''}{v_a'} \right)^2 \frac{1 + \chi(v'')}{1 + \chi(v')}. \quad (3.303)$$

На рис. 3.61 и 3.62 представлены графики, полученные на основании выражения (3.303). Они показывают изменение относительных апогейных и перигейных расстояний r_A/r_1 и r_P/r_1 (в качестве центрального тела принята Земля) в зависимости от отношения трансверсальной составляющей начальной скорости v_a к местной круговой скорости v_c . На рис. 3.61 относительные апсидальные расстояния r_A/r_1 и r_P/r_1 являются параметрами семейства кривых. В качестве параметра семейства кривых на рис. 3.62 использовано отношение v_r/v_c . В такой форме график может быть использован для любого центрального тела. Случай, когда $v_a/v_c=1$ и $v_r/v_c=0$, соответствует круговым орбитам. Как следует из графиков, наибольшая чувствительность изменения апсидальных расстояний к ошибкам в радиальной составляющей скорости в начальной точке соответствует случаю $v_a/v_c=1$. При $v_a/v_c \geq 1$ возмущенной орбитой является эллипс, и если к тому же $v_r/v_c=0$, то космический аппарат переходит на возмущенную орбиту в одной из точек апсид. Из графиков также следует, что при сравнительно небольших отклонениях от $v_a/v_c=1$ влияние ошибки в радиальной составляющей начальной скорости на изменения апсидальных расстояний значительно уменьшается. Этот вывод был бы более очевидным, если бы на графиках (рис. 3.61 и 3.62) были приведены кривые, соответствующие случаям отклонения отношения v_a/v_c от единицы больше чем на $\pm 5\%$.

На графике, приведенном на рис. 3.63, диапазон изменения v_a/v_c расширен и охватывает практически все обозримые операции в центральном поле. Пунктирный прямоугольник, изображенный на рис. 3.63, представляет собой часть области, показанной на рис. 3.62, а отрезок линии графика внутри прямоугольника соответствует значениям $v_r/v_c=0$ и $v_a/v_c=1 \pm 0,05$. Поскольку малыми ошибками в радиальной составляющей начальной скорости (по крайней мере в пределах $\pm 5\%$) вне диапазона

$0,9 \leq v_a/v_c \leq 1,1$ можно пренебречь, то на рис. 3.63 приведен график только при $v_r/v_c=0$ для всего диапазона изменения v_a/v_c . Естественно, что этим графиком можно пользоваться для

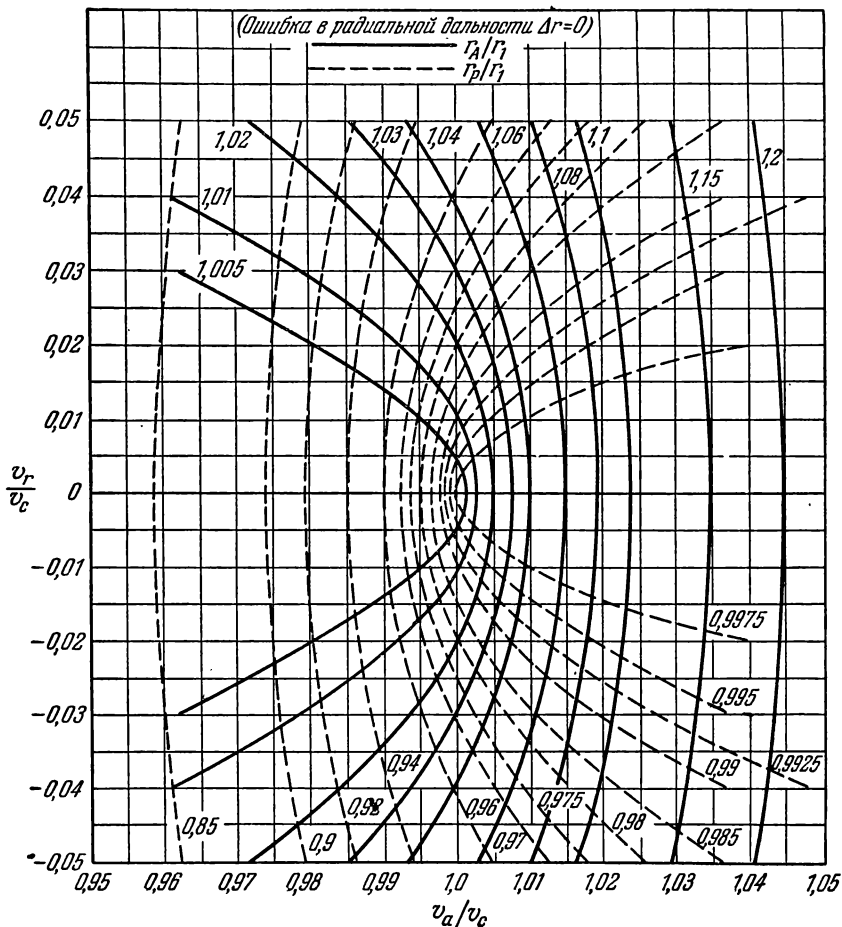


Рис. 3.61. Зависимость между ошибками в радиальной и трансверсальной составляющих начальной скорости для постоянных изменений относительных апсидальных расстояний.

любого центрального поля. Поэтому на графике приведены как геоцентрические (r), так и гелиоцентрические (R) операции¹⁾.

¹⁾ Имеются в виду касательные соосные переходные эллипсы.

По оси ординат указаны относительные апсидальные расстояния от центра притяжения Земли (r_A/r_1 , r_P/r_1) и от центра притяжения Солнца (R_A/R_1 , R_P/R_1). Центры либрации L_1 и L_2

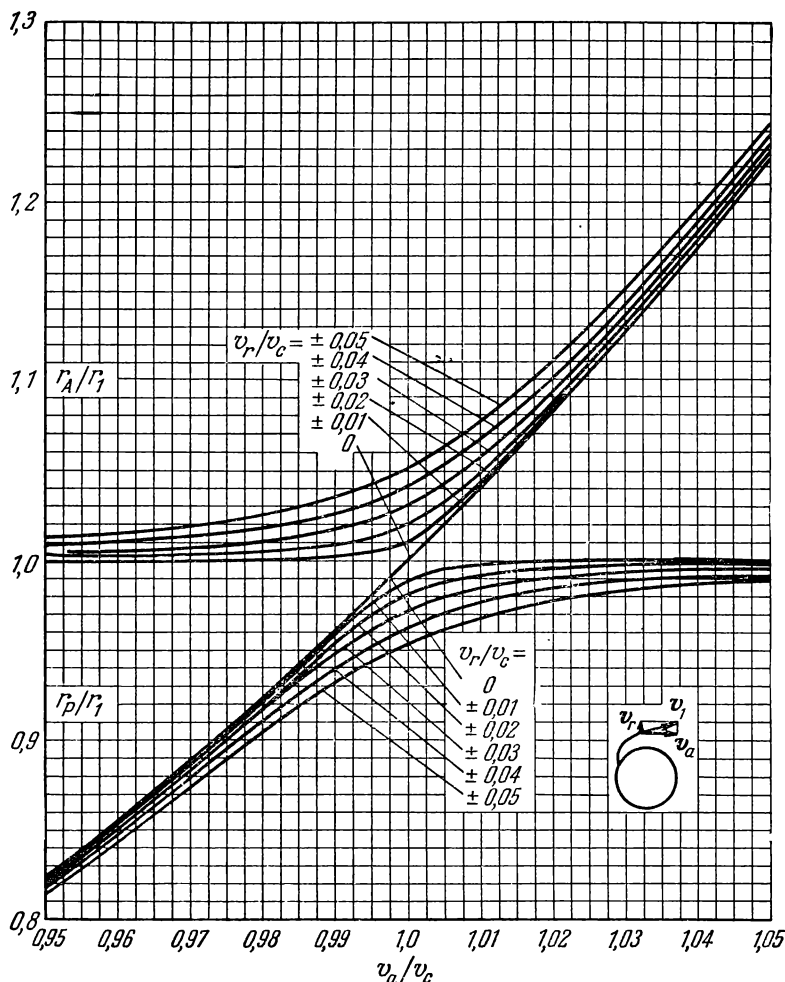


Рис. 3.62. Зависимость между изменениями апсидальных расстояний и ошибками в трансверсальной составляющей скорости для постоянных радиальных составляющих начальной скорости.

в правой части графика относятся к коллинеарным лагранжевым точкам либрации вблизи Земли системы «Солнце — Земля», а не «Земля — Луна». Указанные точки лежат на прямой линии

«Земля — Солнце» по обе стороны от Земли на расстоянии $r = 1\,505\,000$ км.

Крутизна кривых, приведенных на рис. 3.61, 3.62 и 3.63, характеризует чувствительность орбиты к ошибкам в v_a и v_r . Очевидно, указанная чувствительность равна нулю

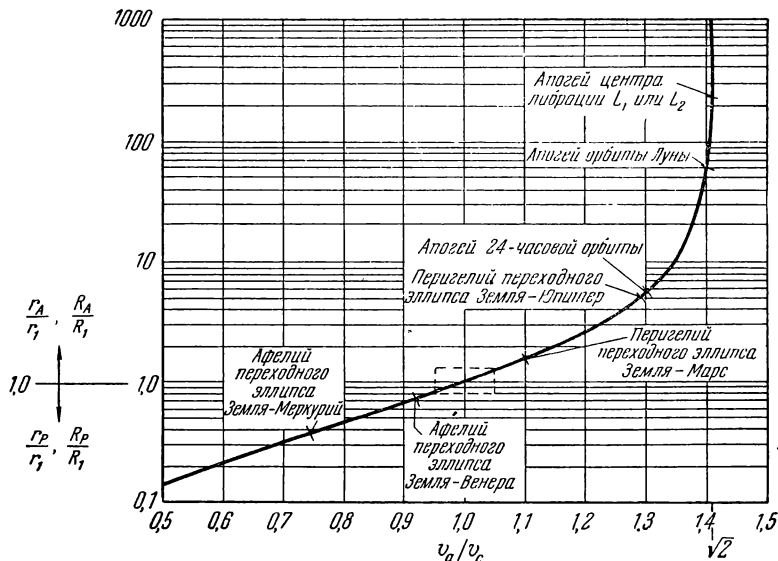


Рис. 3.63. Изменения в относительных аписидальных расстояниях в зависимости от трансверсальной составляющей начальной скорости для системы «Земля — Луна» и солнечной системы.

$[\partial(r/r_1)/\partial(v_a/v_c) = 0]$, если касательная к кривой графика параллельна оси абсцисс, и равна бесконечности $[\partial(r/r_1)/\partial(v_a/v_c) = \infty]$, если касательная к кривой графика вертикальна. Легко получить общее выражение для тангенса угла между касательной к графику и осью абсцисс:

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\partial\left(\frac{v_a}{v_c}\right)} = 2 \frac{v_a}{v_c} \frac{1 + \chi(v) \cos \eta - [\chi(v)]^{-1} \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2 \cos \eta \left[\left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_r}{v_c}\right)^2 - 1\right]}{[1 + \chi(v) \cos \eta]^2}. \quad (3.30)$$

Это выражение является общим и может быть использовано для любой комбинации ошибок в v_a и v_r . Его справедливость ограничена лишь допущением о центральности поля. Если начальной

точкой является одна из точек апсид ($v_r/v_c=0$), то выражение (3.304) упрощается:

$$\frac{d\left(\frac{r_{\text{apsis}}}{r_1}\right)}{d\left(\frac{v_a}{v_c}\right)} = \frac{4 \frac{v_a}{v_c}}{\left[2 - \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2\right]^2}. \quad (3.305)$$

График этой зависимости приведен на рис. 3.64 почти для всего диапазона значений $v_a/v_c = v_{I'}/(v_c)_P$ и $v_a/v_c = v_A/(v_c)_A$. Выражениями (3.304) и (3.305) в дифференциальной форме можно пользоваться, если относительная величина ошибки $\Delta v/v$ мала (что обычно имеет место на практике). Если $v_r/v_c \neq 0$, то по формуле (3.304) необходимо вычислить предварительно $\partial(r/r_1)/\partial(v_a/v_c)$ и затем для заданного значения η рассчитать ошибку в радиальной дальности по следующей зависимости:

$$\Delta r_{\eta, v_r/v_c} = \frac{\partial\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\partial\left(\frac{v_a}{v_c}\right)} r_1 \frac{\Delta v_a}{v_c}, \quad (3.306)$$

где Δv_a — абсолютная величина ошибки в трансверсальной составляющей скорости. Если $v_r/v_c = 0$, то ошибка в апсидальном расстоянии до точки, противоположной начальной точке (совпадающей с одной из точек апсид), может быть вычислена с помощью выражения (3.306):

$$\Delta r_{\text{apsis}} = \frac{d\left(\frac{r}{r_1}\right)}{d\left(\frac{v_a}{v_c}\right)} r_1 \frac{\Delta v_a}{v_c}. \quad (3.307)$$

Из графика, приведенного на рис. 3.63, следует, что чувствительность гелиоцентрического переходного эллипса к Венере к ошибкам в начальной скорости меньше, чем для переходного

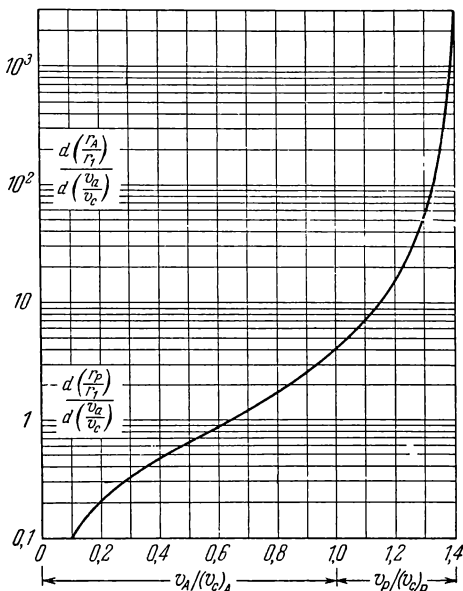


Рис. 3.64. Скорость изменения апсидальных расстояний в зависимости от апсидальной скорости.

эллипса «Земля — Марс». Можно подсчитать, что для гомановской переходной орбиты Земля — Марс ошибка в начальной скорости $0,305 \text{ м/сек}$ (1 фут/сек) в перигелии приводит к изменению радиального расстояния в афелии примерно на $111\,000 \text{ км}$. Для гомановской переходной орбиты Земля — Венера такая же ошибка в скорости в афелии приводит к изменению радиального расстояния в перигелии примерно на 3700 км . Для переходного эллипса «Земля — Луна» в геоцентрической системе координат ошибка в начальной скорости $0,305 \text{ м/сек}$ (1 фут/сек) в перигее, расположенном на 556 км над поверхностью Земли, приводит к изменению радиального расстояния в апогее примерно на 925 км .

3.13. Применение анализа ошибок маневров в поле центральной силы

Ввиду того, что в рассмотренном выше анализе ошибок главное внимание было уделено *теории* вопроса, весьма полезно отдельно рассмотреть некоторые важные *практические приложения* этой теории.

Пример 1. Необходимо вывести спутник на круговую орбиту с начальными условиями: высота 556 км , $v_1 = 7600 \text{ м/сек}$, $\theta_1 = 0$. В действительности при отделении спутника от последней ступени ракеты-носителя были реализованы следующие начальные условия: высота 556 км , $\theta_1 = 0$, а величина начальной скорости 7745 м/сек . Какая при этом будет орбита спутника?

Начальные условия: $v_a/v_c = \frac{7745 \text{ м/сек}}{7600 \text{ м/сек}} = 1,02$, $v_r/v_c = 0$.

Из графика (см. рис. 3.62) на линии, соответствующей $v_r/v_c = 0$, при $v_a/v_c = 1,02$ находим $r_A/r_1 = 1,085$. Таким образом, возмущенной орбитой является эллипс с $r_P = r_1 = 6371 \text{ км} + 556 \text{ км} = 6927 \text{ км}$, $r_A = 7516 \text{ км}$ и высотой в апогее $y_A = 1145 \text{ км}$, то есть в два с лишним раза большей, чем высота в перигее.

Пример 2. Условия те же, что в примере 1, но действительная скорость меньше расчетной на 76 м/сек , то есть $v_1 = 7524 \text{ м/сек}$.

Начальные условия: $v_a/v_c = \frac{7524 \text{ м/сек}}{7600 \text{ м/сек}} = 0,99$, $v_r/v_c = 0$.

Из графика (рис. 3.62) на линии $v_r/v_c = 0$ при $v_a/v_c = 0,99$ находим $r_P/r_1 = 0,961$, или $r_P = 6657 \text{ км}$, что соответствует высоте в перигее $y_P = 286 \text{ км}$, то есть перигей орбиты находится в опасной близости к земной атмосфере. Апогейная точка совпадает с начальной точкой.

Пример 3. Условия те же, что в примере 1, но имеет место ошибка в направлении начальной скорости $\Delta\theta_1 = 2^\circ$. Определить радиальные расстояния до точек апсид.

Начальные условия:

$$\begin{aligned}v_1 &= 7745 \text{ м/сек}, & v_1/v_c &= 1,02, \\v_a &= v_1 \cos \theta_1 = 7745 \text{ м/сек} \cdot 0,9994 = 7740 \text{ м/сек}, \\v_a/v_c &= 1,0194, \\v_r &= v_1 \sin \theta_1 = 7745 \text{ м/сек} \cdot 0,0349 = 270 \text{ м/сек}, \\v_r/v_c &= \frac{270 \text{ м/сек}}{7600 \text{ м/сек}} = 0,0356.\end{aligned}$$

Поскольку масштаб графика на рис. 3.62 не позволяет в данном случае учесть различие между v_1 и v_a , то опять примем $v_a/v_c = 1,02$. Интерполируя между кривыми $v_r/v_c = 0,03$ и $v_r/v_c = 0,04$, в правой нижней четверти графика найдем $r_p/r_1 = 0,986$ и в правой верхней четверти $r_A/r_1 = 1,099$. По этим величинам, как было показано выше, нетрудно рассчитать высоты в апогее и перигее. Знак θ_1 при определении r_A и r_P не играет роли.

Пример 4. Космический аппарат должен покинуть круговую орбиту высотой 556 км со скоростью 10 480 м/сек при $\theta_1 = 0$. В действительности направление скорости было выдержано правильно, а величина скорости оказалась на 0,305 м/сек (1 фут/сек) больше. Определить изменение апогейного расстояния, вызванное этим отклонением скорости.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой (3.307):

$$\Delta r_A = \frac{d\left(\frac{r}{r_1}\right)}{d\left(\frac{v_a}{v_c}\right)} r_1 \frac{\Delta v_a}{v_c}.$$

В данном случае $r_1 = 6927$ км, $\Delta v_a/v_c = 1/24\,900$ и из графика (рис. 3.64) для $v_P/(v_c)_P = \frac{10\,480 \text{ м/сек}}{7600 \text{ м/сек}} = 1,38$ получаем $d(r/r_1)/d(v_a/v_c) = 650$. Таким образом,

$$\Delta r_A = 650 \frac{6927}{24900} = 180,7 \text{ км}.$$

Так что при данных условиях отклонение в величине начальной скорости на 0,305 м/сек приводит к изменению апогейного расстояния на 180,7 км. Поскольку приведенный на рис. 3.64 график в некоторой окрестности рассматриваемой точки может быть принят линейным, то полученный результат можно использовать для оценки влияния отклонения в величине начальной скорости порядка нескольких десятков метров в секунду.

Пример 5. Условия те же, что в примере 4, но имеет место ошибка в направлении начальной скорости ($v_r/v_c \neq 0$).

В этом случае прежде всего необходимо определить v_a/v_c и v_r/v_c , как было показано в примере 3. Затем по формуле (3.304) вычисляется частная производная, характеризующая влияние отклонения в величине начальной скорости на изменение радиального расстояния в интересующей точке. Если необходимо определить лишь изменение апогейного расстояния, то частную производную $\partial(r_p/r_1)/\partial(v_a/v_c)$ определяют по формуле (3.304), полагая $\cos \eta = -1$ ($\eta = 180^\circ$). Затем по формуле (3.306) находят Δr_A так же, как и в примере 4.

Пример 6. Предположим, что при условиях, указанных в примерах 4 и 5, требуется найти не изменение апогейного расстояния, а изменение радиального расстояния в произвольной точке, определяемой величиной $r < r_A$. В данном случае прежде всего необходимо вычислить соответствующую данному радиальному расстоянию истинную аномалию η , например, из соотношения

$$\cos \eta = \frac{\frac{a}{r}(1 - e^2) - 1}{e}, \quad (3.308)$$

считая, что a и e теоретического эллипса известны. Затем, как и в случае примера 4, по формуле (3.304) при найденном значении η вычисляется частная производная, характеризующая изменение радиального расстояния в зависимости от изменения величины начальной скорости:

$$\frac{\partial(r/r_1)}{\partial(v_a/v_c)} = 2 \frac{v_a}{v_c} \frac{1 + \chi(v) \cos \eta - [\chi(v)]^{-1} \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2 \cos \eta \left[\left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2 - 1\right]}{[1 + \chi(v) \cos \eta]^2}, \quad (3.309)$$

где теперь

$$\chi(v) = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{v_a}{v_c}\right)^2}. \quad (3.310)$$

В случае примера 5 необходимо учесть члены, содержащие (v_r/v_c) .

Пример 7. Каков должен быть избыток скорости по отношению к орбитальной скорости Земли для перехода на переходную орбиту, афелий которой касался бы орбиты Марса?

Непосредственно из графика, приведенного на рис. 3.63, находим, что искомая величина равна примерно 10% ($v_a/v_c \approx 1,1$), или 2980 м/сек (9770 фут/сек).

Пример 8. Предположим, что космический аппарат, движущийся по начальной круговой орбите радиуса r_0 , должен пересечь более удаленную круговую орбиту радиуса r . Как следует

из рис. 3.65, истинная аномалия точки пересечения (или касания) уменьшается по мере перехода к более быстрым переходным орбитам. При переходе с внутренней орбиты на внешнюю орбиту точка пересечения перемещается по ходу часовой стрелки (при переходе с внешней на внутреннюю — против хода часовой стрелки). Это перемещение, которое можно выразить истинной аномалией η точки пересечения, может иметь большое значение при решении задачи встречи со спутником (Луной, планетой), движущимся по орбите радиуса r . Выражения (3.287) и (3.291) в данном случае не подходят, так как они пригодны для определения поворота линии апсид вследствие ошибки в величине скорости не в точках апсид. В большинстве же случаев импульсных переходов точка приложения импульса скорости расположена вблизи точек апсид. В подобных случаях поворот линии апсид столь мал, что им в первом приближении можно пренебречь. Поэтому мы должны рассматривать только изменение истинной аномалии точки пересечения на заданном постоянном радиальном расстоянии r [постоянном по отношению к переходной орбите; орбита цели (рис. 3.65) не обязательно должна быть круговой]. Используя уравнение орбиты $r = p/(1 + e \cos \eta)$, находим $\cos \eta$:

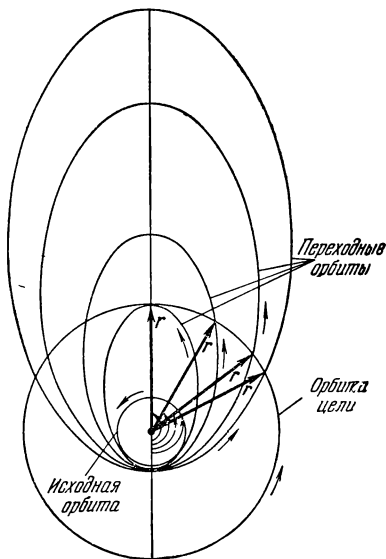


Рис. 3.65. Изменение истинной аномалии точки пересечения с увеличением величины большой оси переходного эллипса.

$$\cos \eta = \frac{1}{r} \frac{p-r}{e} = \frac{1}{r} \frac{a(1-e^2) - r}{e}. \quad (3.311)$$

Продифференцировав это уравнение, считая переменными η , a и e , найдем:

$$-\sin \eta \, d\eta = \frac{\partial a}{r e} - \frac{a}{r e^2} de - \frac{e}{r} da - \frac{a}{r} de + \frac{\partial e}{e^2}.$$

Разделив полученное выражение на dv , подставив затем значения da/dv и de/dv из выражений (3.292а) и (3.293а), соответственно равные $2va^2/K$ и $2v^2/v$, и разрешив относительно $d\eta/dv$,

после некоторых преобразований будем иметь:

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \pm \frac{2v^2}{e^2 v \sin \eta} \left[\frac{a}{r} (1 + e^2) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 e (1 - e)^2 - 1 \right] \quad (v \geq 1), \quad (3.312)$$

где η — истинная аномалия начальной (невозмущенной) переходной орбиты в точке пересечения с орбитой цели; r — радиальное расстояние до точки пересечения (для орбиты цели с большим эксцентриситетом в случае необходимости при очень быстрых переходных орбитах можно учесть изменение радиального расстояния r до точки пересечения); v — скорость на начальной орбите (то есть «невозмущенная» скорость) в точке, где имеет место ошибка в скорости ∂v ; $v = v/v_c$ — параметр скорости v на соответствующем расстоянии; a и e относятся к невозмущенной начальной переходной орбите. С помощью формулы (3.312) можно вычислить изменение $\partial \eta$, соответствующее данному ∂v , которое может достигать нескольких десятков метров в секунду или больше в зависимости от апогейного расстояния r_A . Например, переходная орбита к Луне является близкой к параболической даже при углах перехода $\eta_t = 180^\circ$, так что при сравнительно малом диапазоне отклонений в начальной скорости, порядка 100 м/сек, величина η_t меняется в пределах между 180° и $164^\circ,5$.

Пример 9. Перемещение точки пересечения в случае ошибки в v_r , а не в v , как в примере 8, рассчитывается аналогичным методом. Имеем:

$$\sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial v_r} = \frac{\partial a}{\partial v_r} \left(\frac{e}{r} - \frac{1}{re} \right) + \frac{\partial e}{\partial v_r} \left(\frac{a}{re^2} + \frac{a}{r} - \frac{1}{e^2} \right),$$

где $\partial a / \partial v_r$ определяется по формуле (3.284а), а $\partial e / \partial v_r$ — по формуле (3.285а). Подставив эти выражения в последнюю зависимость, после некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial \eta}{\partial v_r} = \frac{1}{er} \left\{ \frac{2a^2}{K} v_r (1 - e^2) - \sqrt{\frac{a}{K} \frac{|1 - e^2|}{e^2}} [a(1 + e^2) - r] \right\}. \quad (3.313)$$

Соответственно для ошибки в v_a найдем:

$$\sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial v_a} = \frac{\partial a}{\partial v_a} \left(\frac{e}{r} - \frac{1}{er} \right) + \frac{\partial e}{\partial v_a} \left(\frac{a}{re^2} + \frac{a}{r} - \frac{1}{e^2} \right).$$

Используя выражение для $\partial a / \partial v_a$ из формулы (3.288а), а также выражение для $\partial e / \partial v_a$ из формулы (3.289с)

$$\frac{\partial e}{\partial v_a} = \frac{a}{K} (|1 - e^2|) \left[\frac{a}{r} (|1 - e^2|) - \frac{r}{a} \right],$$

после преобразования получим:

$$\frac{\partial \eta}{\partial v_a} = \frac{1}{er \sin \eta} \left[\frac{a}{r} (1 - e^2) - \frac{r}{a} \right] [a(1 + e^2) - r] \times \\ \times \sqrt{\frac{a}{K} \frac{1 - e^2}{e^2}} - 2 \frac{a^2}{K} v_a (1 - e^2). \quad (3.314)$$

Наконец, для получения выражения, характеризующего влияние ошибки в радиальном расстоянии r , продифференцируем выражение (3.311), считая переменными r , a и e , и результат разделим на ∂r :

$$\sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial r} \left(\frac{e}{r} - \frac{1}{er} \right) + \frac{\partial e}{\partial r} \left(\frac{a}{re^2} + \frac{a}{r} - \frac{1}{e^2} \right) + \frac{a}{r^2} \left(\frac{1}{e} - e \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{er \sin \eta} \left\{ \frac{\partial e/e}{\partial r/r} \left[\frac{a}{r} (1 + e^2) - 1 \right] - \frac{\partial a}{\partial r} (1 - e^2) + \frac{a}{er^2} (1 - e^2) \right\}, \quad (3.315)$$

где $(\partial e/e)/(\partial r/r)$ определяется из выражения (3.276b), а $\partial a/\partial r$ — из выражения (3.278a).

Пример 10. Предположим, что космический аппарат в результате перехода должен встретить другое тело, движущееся по орбите цели (рис. 3.66). Любая ошибка в начальной скорости (по величине или направлению) приведет к отклонению во времени полета по переходной орбите. Во многих случаях представляет интерес определение влияния ошибки в начальной скорости на время перехода между орбитами радиуса r_1 и r_2 . Время перехода между указанными орбитами определяется следующим выражением:

$$t_2 - t_1 = t_{12} = \\ = \frac{E_2 - E_1 - e (\sin E_2 - \sin E_1)}{\sqrt{K/a^3}}, \quad (3.316)$$

где E — эксцентрическая аномалия (рис. 3.67). Отклонение скорости приводит к изменению орбиты и, следовательно, к изменению эксцентрических аномалий точек на радиальных расстояниях r_1 и r_2 . Поэтому в первую очередь необходимо определить влияние ошибки ∂v на

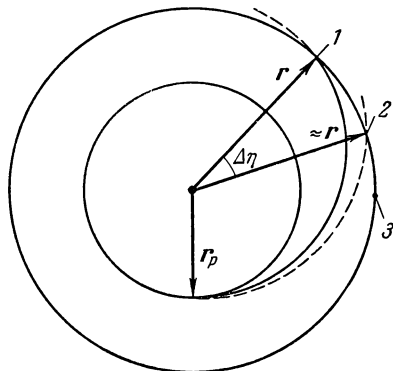


Рис. 3.66. Чувствительность переходной пересекающей орбиты к ошибкам в начальной скорости.

1 — точка пересечения невозмущенной переходной орбиты с орбитой цели, соответствующая положению цели в этой точке; 2 — точка пересечения переходной орбиты, реализованной с ошибкой в начальной скорости, с орбитой цели; 3 — положение цели в момент пересечения ее орбиты космическим аппаратом, движущимся по переходной орбите, реализованной с ошибкой в начальной скорости.

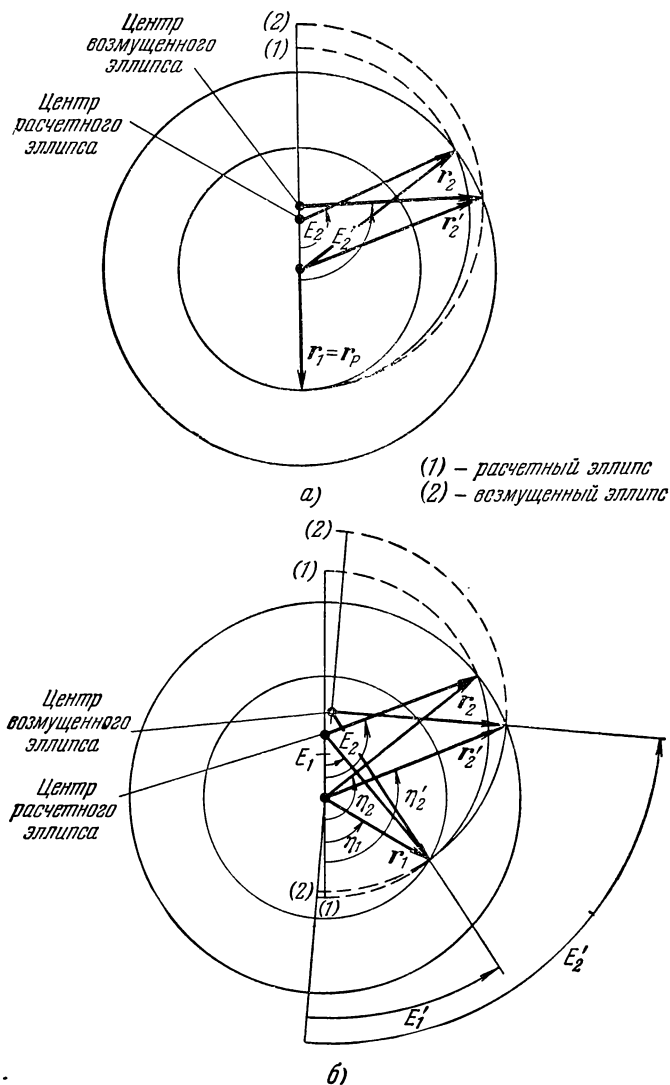


Рис. 3.67. Влияние ошибки во времени перехода.

а) Начальная точка совпадает с перигелием (E_1 не изменяется); б) начальная точка не совпадает ни с одной из точек аписид (изменяются E_1 и E_2).

эксцентрическую аномалию. Воспользуемся известной зависимостью

$$\cos E = \frac{a-r}{ae}. \quad (3.317)$$

Дифференцируя зависимость (3.317), считая переменными a и e , получаем:

$$\partial E = \frac{1}{\sin E} \left[\left(\frac{\partial a}{a} + \frac{\partial e}{e} \right) \cos E - \frac{1}{e} \frac{\partial a}{a} \right], \quad (3.318a)$$

$$\partial E = \frac{1}{\sin E} \left[\frac{r}{ae} \frac{\partial a}{a} + \left(\frac{r}{ae} - \frac{1}{e} \right) \frac{\partial e}{e} \right]. \quad (3.318b)$$

Разделив полученные выражения на $\partial x = \partial v_r$, $\partial x = \partial v_a$ и $\partial x = \partial v$, но не на ∂r (см. ниже), получим выражение для производной $\partial E / \partial x$, в котором $\partial a / \partial x$ и $\partial e / \partial x$ выражаются соответствующими зависимостями, полученными в предыдущем параграфе. Например, полагая $\partial x = \partial v$, находим:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \right) \cos E - \frac{1}{ae} \frac{\partial a}{\partial v}}{\sin E}, \quad (3.318c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\frac{\cos E}{e} \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{r}{a^2 e} \frac{\partial a}{\partial v}}{\sin E}. \quad (3.318d)$$

Подставив сюда выражения (3.292a) и (3.293a) и исключив $\cos E$, получим:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\sin E} \left[\pm \frac{2v^2}{ve^2} \left(1 - \frac{r}{a} \right) - \frac{2rv}{Ke} \right] \quad (v \geq 1) \quad (3.318e)$$

или, исключив E с использованием равенств $\sin E = (r/b) \sin \eta$ и $b = a \sqrt{1-e^2}$, справедливых для эллипса, получим:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\frac{r}{a} e^2 v \sin \eta} \left[\pm 2v^2 \left(1 - \frac{r}{a} \right) - 2ev^2 \right] \quad (v \leq 1). \quad (3.318f)$$

Продифференцировав соотношение (3.317), считая переменными a , e и r , получим частную производную, характеризующую влияние ошибки в радиальном расстоянии r на эксцентрическую аномалию E :

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{ae \sin E} \left[\left(\frac{a}{r} - 1 \right) \frac{\partial e/e}{\partial r/r} - \frac{\partial a/a}{\partial r/r} + 1 \right], \quad (3.318g)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{re \sin \eta} \left[\left(\frac{a}{r} - 1 \right) \frac{\partial e/e}{\partial r/r} - \frac{\partial a/a}{\partial r/r} + 1 \right], \quad (3.318h)$$

где $(\partial e/e)/(\partial r/r)$ и $(\partial a/a)/(\partial r/r)$ определяются по формулам (3.276b) и (3.278c).

Продифференцировав соотношение (3.316), считая переменными E_1 , E_2 , e и a , после преобразований получим общую зависимость:

$$\begin{aligned} \partial t_{12} = \sqrt{\frac{a}{K}} \left[\frac{3}{2} (E_2 - E_1 - e \sin E_2 + e \sin E_1) \partial a + \right. \\ \left. + a (1 - e \cos E_2) \partial E_2 - a (1 - e \cos E_1) \partial E_1 - \right. \\ \left. - a (\sin E_2 - \sin E_1) \partial e \right] \quad (3.319a) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \partial t_{12} = \frac{3}{2} t_{12} \frac{\partial a}{a} + a \sqrt{\frac{a}{K}} [(1 - e \cos E_2) \partial E_2 - \\ - (1 - e \cos E_1) \partial E_1 - (\sin E_2 - \sin E_1) \partial e]. \quad (3.319b) \end{aligned}$$

Если начальная точка совпадает с одной из точек апсид переходной орбиты, то в случае перигентра $E_1 = \sin E_1 = \partial E_1 = 0$, а в случае апоцентра $E_1 = \pi$, $\sin E_1 = \partial E_1 = 0$, и полученные выше зависимости приводятся к виду

$$\begin{aligned} \partial t_{P_2} = \sqrt{\frac{a}{K}} \left[\frac{3}{2} (E_2 - e \sin E_2) \partial a + \right. \\ \left. + a (1 - e \cos E_2) \partial E_2 - a \sin E_2 \partial e \right] \quad (v > 1), \quad (3.319c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial t_{P_2} = \frac{3}{2} t_{P_2} \frac{\partial a}{a} + a \sqrt{\frac{a}{K}} [(1 - e \cos E_2) \partial E_2 - \sin E_2 \partial E_2] \quad (v < 1), \\ (3.319d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial t_{A_2} = \sqrt{\frac{a}{K}} \left[\frac{3}{2} (E_2 - \pi - e \sin E_2) \partial a + \right. \\ \left. + a (1 - e \cos E_2) \partial E_2 - a \sin E_2 \partial e \right] \quad (v > 1), \quad (3.319e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial t_{A_2} = \frac{3}{2} t_{A_2} \frac{\partial a}{a} + a \sqrt{\frac{a}{K}} [(1 - e \cos E_2) \partial E_2 - \sin E_2 \partial E_2] \quad (v < 1). \\ (3.319f) \end{aligned}$$

При использовании зависимостей (3.319c)–(3.319f) важно помнить, что они получены при допущении о том, что ошибки, вызывающие отклонения во времени перехода ∂t_{P_2} и ∂t_{A_2} , не изменяют E_1 (0 или 180°). Это является справедливым лишь в том случае, если имеет место либо ошибка в величине скорости v ($=v_P$ или v_A) в начальной точке переходного эллипса, совпадающей с одной из точек апсид, либо ошибка в радиальном расстоянии r ($=r_P$ или r_A), либо имеют место обе эти ошибки вместе, но не в v_r (которая в точках апсид равна нулю). Наличие радиальной составляющей скорости смещает точку апсид, и, следовательно, начальная точка перестает быть одной из точек апсид.

Таким образом, в общем случае необходимо пользоваться зависимостями (3.319a) и (3.319b). Разделив правую и левую части этих зависимостей на $\partial x = \partial r$, $\partial x = \partial v$, $\partial x = \partial v_a$ и $\partial x = \partial v_r$ и используя ранее полученные выражения для $\partial a / \partial x$, $\partial E_2 / \partial x$, $\partial E_1 / \partial x$ и $\partial e / \partial x$, получим частные производные, характеризующие изменение времени перехода между заданными орбитами вследствие ошибок в начальной точке. Например,

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial v} = \frac{3}{2} \frac{t_{12}}{a} \frac{\partial a}{\partial v} + a \sqrt{\frac{a}{K}} \left[(1 - e \cos E_2) \frac{\partial E_2}{\partial v} - (1 - e \cos E_1) \frac{\partial E_1}{\partial v} - (\sin E_2 - \sin E_1) \frac{\partial e}{\partial v} \right] \quad (v \geq 1), \quad (3.319g)$$

где $\partial a / \partial v$ определяется по формуле (3.292a), $\partial e / \partial v$ — по формуле (3.293a) и

$$\frac{\partial E_1}{\partial v} = \frac{\left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \right) \cos E_1 - \frac{1}{ae} \frac{\partial a}{\partial v}}{\sin E_1},$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial v} = \frac{\left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \right) \cos E_2 - \frac{1}{ae} \frac{\partial a}{\partial v}}{\sin E_2}.$$

Частные производные, характеризующие изменение времени перехода между заданными орбитами, в случае совпадения начальной точки с одной из точек апсид переходной орбиты можно получить из соотношений (3.319c) — (3.319f), разделив левые и правые части этих выражений на $\partial x = \partial r$ или $\partial x = \partial v_a$ (∂v_r или ∂v_a , но не ∂v_r).

Пример 11. Иногда возникает вопрос о влиянии отклонения величины скорости в начальной точке на радиальное расстояние точки при заданной истинной аномалии. Опять будем предполагать, что отклонение скорости имеет место вблизи точек апсид и, следовательно, поворота линии апсид не происходит.

Продифференцировав r (полярное уравнение орбиты), считая переменными a и e (в данном случае $\eta = \text{const}$) и проделав такие же операции, как и в предыдущем примере, получим:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\frac{2va}{K} - \frac{2v^2}{v} \left[\frac{a}{\cos \eta (1 + e \cos \eta)} + \frac{2e(1 + e \cos \eta) - e^2 \cos \eta}{1 + e \cos \eta} \right]}{1 + e \cos \eta}, \quad (3.320)$$

где ∂r (или Δr) представляет собой изменение радиального расстояния r при заданной истинной аномалии η вследствие отклонения ∂v (или Δv). Прочие величины имеют тот же смысл, что и в примере 8.

Пример 12. Иногда возникает необходимость в определении влияния отклонения в величине скорости на период обращения космического аппарата. Для периода обращения имеем:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2}. \quad (3.321a)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{6\pi v a}{\sqrt{K^3/a^3}} = 3 \frac{T}{\sqrt{K/a}} \frac{v}{\sqrt{K/a}} \quad (3.321b)$$

или, учитывая равенство (3.295),

$$\frac{\partial T/T}{\partial v/\sqrt{K/a}} = 3 \sqrt{2 \frac{1+e \cos \eta}{1-e^2}} - 1. \quad (3.321c)$$

График этой зависимости приведен на рис. 3.68. Из графика видно, что для всех значений $e > 0$ чувствительность периода

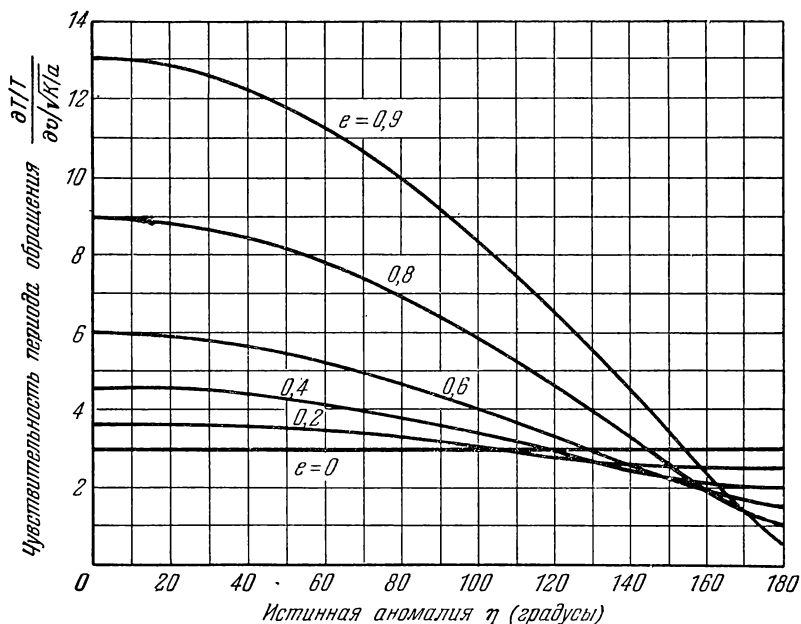


Рис. 3.68. Чувствительность периода обращения к тангенциальному импульсу скорости.

обращения к тангенциальному импульсу скорости уменьшается с увеличением η , имея максимальное значение при $\eta=0$ (в перигентре). В точках, где $\cos \eta = -e$, соответствующих равенству орбитальной скорости местной круговой скорости (концы малой оси эллипса), рассматриваемая чувствительность становится равной чувствительности круговой орбиты.

3.14. Переход с поверхности на орбиту

В § 3.4 были кратко определены три основных типа переходов в astronautике. В предыдущей главе были рассмотрены некоторые вопросы, касающиеся энергетических требований, полетного времени, условий прямой видимости и орбитальной встречи с космической станцией.

В настоящем параграфе будет проведено общее исследование геометрических и кинематических аспектов задачи вывода космического аппарата с поверхности сферической вращающейся планеты на орбиту цели, удаленную на произвольное расстояние и наклоненную к плоскости экватора центрального тела (поле сил центральное). Практические приложения этой задачи в astronautике охватывают полет с поверхности Земли к космической станции, вывод спутника в определенную точку орбиты, по которой движется система спутников, полеты с Земли на Луну или переходы с поверхности Марса на его спутник. Таким образом, исследование основывается на выделении на орбите цели определенной точки, называемой *целью*. Эта цель может быть материальным телом больших (Луна) или малых (космическая станция) размеров или просто определенной точкой орбиты, как в случае выведения системы спутников и расположения их на равных расстояниях друг от друга по орбите. После вывода первого спутника системы на орбиту точки прибытия (цели) остальных спутников становятся вполне определенными.

Задача перехода с поверхности на орбиту (ОППО) является более сложной, чем задача перехода в поле центральной силы (ОППЦ), поскольку в последнем случае плоскости обеих орбит проходят через общий центр притяжения, тогда как при ОППО в общем случае начальная точка движется по кругу широт, параллельному плоскости экватора (см. главу 2). Осуществление этого типа перехода вследствие большей его сложности требует выполнения большего числа условий. Как было показано в главе 2, последнее обстоятельство при космических полетах всегда приводит к уменьшению достижимости орбиты цели с поверхности центрального тела. Поэтому часто оказывается выгодным (а иногда и необходимым) использование промежуточной орбиты (перигейной орбиты или орбиты ожидания), то есть вместо того, чтобы пытаться решить задачу одной переходной орбитой ОППО, разбивают весь участок перехода с поверхности на орбиту цели на две фазы: начальную — ОППО и конечную — ОППЦ. Преимущества этого метода прерываемого вывода были показаны в главе 2 применительно к случаю вывода орбитальной станции на низкую орбиту. С увеличением

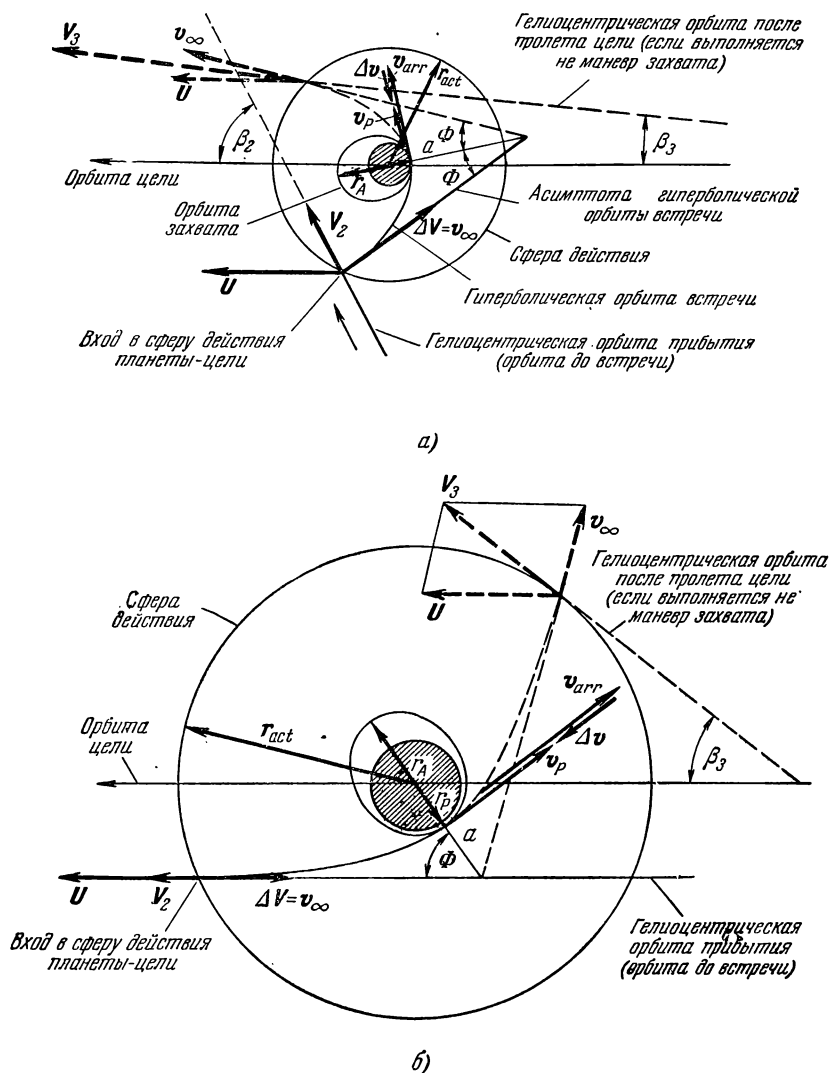


Рис. 3.69. Схематическое представление различных условий приближения космического аппарата к цели.

а) Маневр захвата, осуществляемый с пересекающейся переходной орбитой; б) маневр захвата, осуществляемый с касательной переходной орбитой.

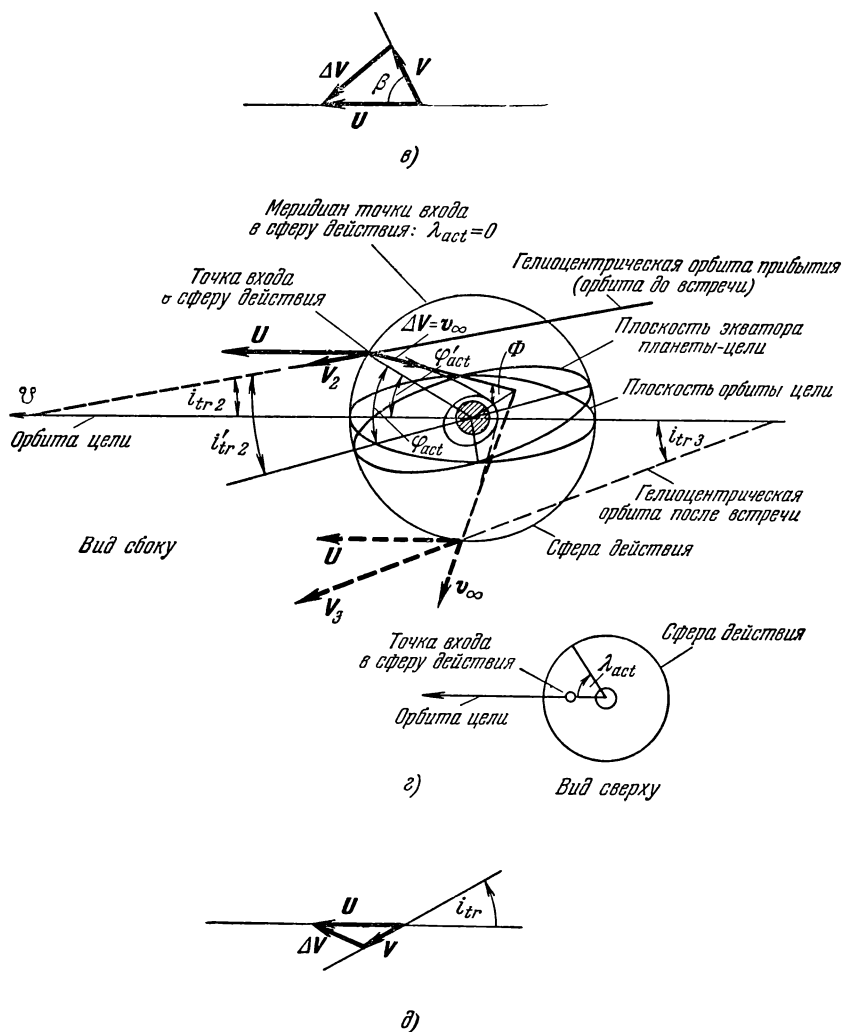


Рис. 3.69. Схематическое представление различных условий приближения космического аппарата к цели (продолжение).

а) Встреча, осуществляемая с пересекающейся переходной орбиты; б) маневр захвата, осуществляемый с наклоненной переходной орбиты; в) встреча, осуществляемая с наклоненной переходной орбиты.

высоты орбиты цели эти преимущества возрастают вследствие большей разницы в угловых скоростях движения цели и космического аппарата, движущегося по перигейной орбите. С увеличением этой разницы уменьшается интервал между двумя последовательными моментами времени, удовлетворяющими требованию необходимого взаимного расположения цели и аппарата.

Хотя при дальнейшем рассмотрении вопроса конкретное содержание термина «цель» не будет определено, читатель должен помнить о разнице между целью большой массы, обладающей собственным гравитационным полем, которое может «захватить» космический аппарат, и целью малой массы или вообще не обладающей массой, которая не дает подобного облегчения для решения задачи встречи при приближении аппарата к цели. Этот случай встречи со «свободной» точкой орбиты будем называть *встречей* в отличие от термина *захват*, относящегося к встрече с материальной точкой, движущейся по орбите и обладающей собственным полем притяжения. Между этими двумя типами маневров существует разница, которая является с точки зрения энергетических требований очень важной при рассмотрении вопроса об использовании ОППО для перехода на космическую станцию или на Луну. Эта разница имеет важное значение и при рассмотрении переходов, связанных с межпланетными полетами.

Реализация встречи заключается в таком изменении вектора скорости космического аппарата на переходной орбите, чтобы в точке встречи этот вектор стал равным вектору орбитальной скорости цели (рис. 3.69, *а, б, в*). Величина требуемого импульса скорости ΔV может быть определена из любого выражения (3.3) — (3.9).

Реализация захвата состоит из двух маневров (см. главу 4): ΔV -маневра встречи в поле центральной силы, определяющего переходную орбиту, и Δv -маневра вывода космического аппарата на заданную эллиптическую или круговую орбиту относительно цели (рис. 3.69, *г*). При этом импульс скорости $\Delta v = v_p - v_s$, где v_p и v_s — соответственно параболическая скорость и необходимая орбитальная скорость на расстоянии r относительно цели. Для максимального уменьшения расхода топлива оба импульса скорости совмещаются: $\Delta v_{\text{capt}} = \sqrt{\Delta V^2 + \Delta v^2}$ (рис. 3.69, *д*).

Таким образом, маневр захвата всегда требует большего расхода энергии, чем маневр встречи. Однако если отношение $\Delta v / \Delta V$ достаточно велико (>1 или $\gg 1$), то ΔV не сильно увеличивает суммарную величину $\Delta v_{\text{capture}}$ в силу особенности влияния относительно малых слагаемых на величину вектора

суммы двух рассматриваемых векторов. При заданной величине ΔV отношение $\Delta v/\Delta V$ увеличивается с возрастанием массы цели. Поэтому, с энергетической точки зрения, при маневре захвата оказывается не безразличным, является ли переходная орбита касательной или пересекающей, компланарной или наклоненной по отношению к орбите цели, так как от этого зависит величина ΔV . Однако относительный дополнительный расход энергии в случае пересекающей или наклоненной переходной орбиты уменьшается с увеличением массы цели. Таким образом,

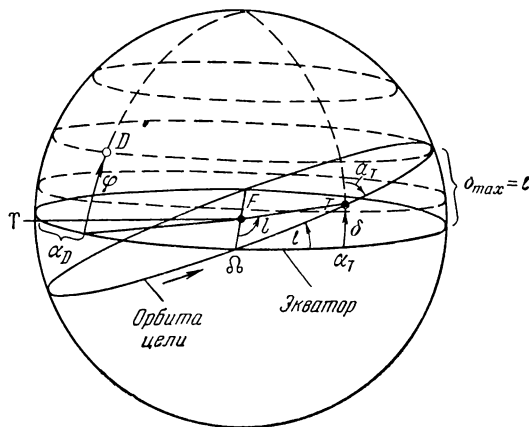


Рис. 3.70. Основные обозначения, используемые при изучении перехода с поверхности на орбиту.

условия приближения космического аппарата к цели оказывают большее влияние на энергетические требования к маневру встречи по сравнению с маневром захвата.

На рис. 3.70 приведены основные обозначения, используемые при изучении перехода с поверхности на орбиту. Географическая и геоцентрическая экваториальная системы координат (обе в равной мере могут быть использованы для любого небесного тела сферической формы) спроектированы на небесную сферу. Географическая система координат представлена углом широты φ , определяющим положение точки на поверхности либо проекцию конца активного участка или начальной точки (орбиты), связанной с положением стартовой позиции. Начальная точка D соответствует началу свободного орбитального полета космического аппарата. Геоцентрическая экваториальная система координат используется применительно к орбите цели или применительно к определенной точке на орбите цели. Положение точки

над или под плоскостью экватора определяется углом склонения δ , максимальная величина которого равняется наклонению орбиты ι относительно плоскости экватора. Для определения долготы, которая в данном случае может быть использована в обеих системах координат, выбрано прямое восхождение α , измеряемое от направления на точку весеннего равноденствия Υ . На том же рисунке показаны: α_D — прямое восхождение начальной точки, α_T — прямое восхождение точки пересечения с

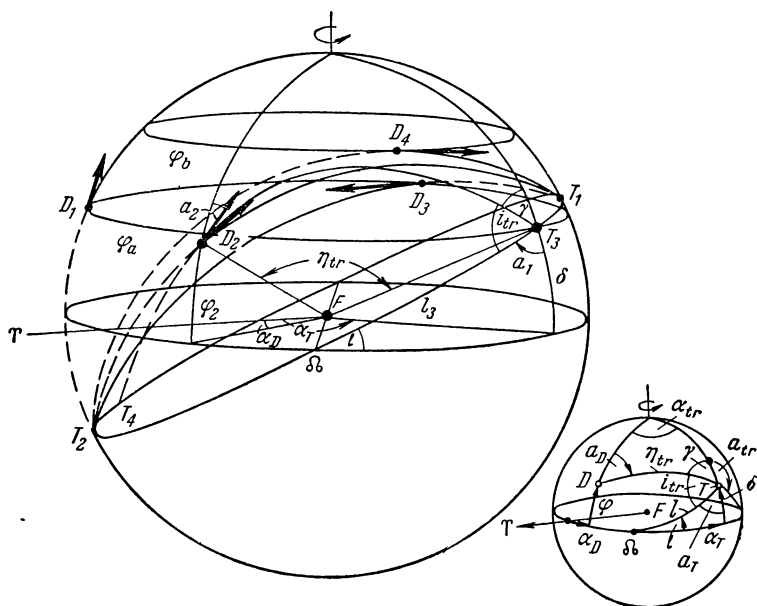


Рис. 3.71. Проекция различных переходных орбит класса «поверхность — орбита» на небесную сферу.

орбитой цели, которая (при отсутствии ошибок) совпадает с точкой цели T . Плоскости орбиты цели и экватора пересекаются по линии узлов, имея восходящий узел в точке Ω . Угол a_T является азимутом (географическим) орбиты цели в точке цели T . Угловое расстояние точки цели T от восходящего узла (аргумент широты) определяется величиной $l = \angle \Omega FT$.

На рис. 3.71 представлены проекции различных орбит ОППО на небесную сферу для двух начальных точек с широтами $\varphi_a < \iota$ и $\varphi_b > \iota$ и для трех точек цели: T_1 при $(+\delta_{\max})$, T_2 при $(-\delta_{\max})$ и T_3 при промежуточной величине склонения δ . Для правильного выполнения рисунка, с точки зрения формы проек-

ций орбит на небесную сферу, азимута a_D в начальной точке и наклона i_{tr} переходной орбиты по отношению к плоскости орбиты цели, в первую очередь учитывалось, что плоскости всех орбит проходят через центр притяжения (то есть их проекции на небесную сферу являются дугами больших кругов), а также принималось во внимание соответствующее значение центрального переходного угла η_{tr} , представляющего собой разность истинных аномалий в точке цели T и начальной точке D .

Рис. 3.71 показывает, что переход из начальной точки D_1 в точку цели T_1 должен происходить при максимальном значении η_{tr} (то есть по сравнительно «медленной» переходной орбите), и космический аппарат из начальной точки должен двигаться строго на север ($a_D=0$). Более короткий переход показан из точки D_2 в точку T_1 . Участкам переходной орбиты, реально проходимым аппаратом при переходе, соответствуют сплошные линии. Пунктирные линии являются продолжениями до точки, отстоящей на 180° от точки цели. Из приведенного примера видно, что для перехода D_2-T_2 требуется начальный азимут, равный примерно 45° . Начальная точка D_3 отстоит от точки D_2 на половину оборота (половину суток), то есть находится на «задней» по отношению к читателю стороне сферы. Переход D_2-T_2 показан для случая пуска в северо-восточном направлении. Однако если не представляется возможным осуществить пуск из точки D_2 или встречу в точке T_1 , то может оказаться необходимым переждать 1,5; 2,5 и т. д. периода обращения (суток), пока цель должна будет (в зависимости от высоты движения) перейти из точки T_1 в точку T_2 . На круге широты φ_a существуют такие положения начальной точки D , из которых при соответствующем положении цели T возможен пуск строго на восток. Для ясности на рис. 3.71 такой случай приведен для точки D_4 , расположенной на другой широте (φ_b). Если небесное тело обладает собственным вращением (подобно Земле или Марсу), то пуск в строго восточном направлении ($a_D=90^\circ$) позволяет максимально использовать окружную скорость стартовой позиции. Так как эта скорость пропорциональна $\cos \varphi$, то для северных широт это преимущество резко уменьшается. Более важным, с точки зрения увеличения требуемой энергии для маневра встречи, является резкое увеличение i_{tr} с возрастанием φ . Это было показано раньше (см. рис. 3.69). Количественную оценку увеличения требуемой энергии см. в § 3.2.

Рассмотрим произвольный случай — переход из точки D_2 в точку T_3 . Космический аппарат начинает орбитальный полет в направлении под азимутом a_2 (или, в общем случае, a_D). Широту начальной точки обозначим через φ_2 (или, вообще, φ_D), склонение выбранной точки цели после прибытия в нее

космического аппарата — через δ , наклонение переходной орбиты к плоскости орбиты цели — через i_{tr} . Если азимут орбиты цели в точке пересечения с переходной орбитой обозначить через a_T , то азимут переходной орбиты будет $a_{tr}=180^\circ - \gamma$, где $\gamma=180^\circ - (a_T + i_{tr})$, то есть $a_{tr}=a_T + i_{tr}$. Центральным углом переходной орбиты является η_{tr} , а прямыми восхождениями начальной точки и точки цели соответственно являются α_2 (или, в общем случае, α_D) и α_T .

На рис. 3.71 внизу справа отдельно приведена небольшая схема, позволяющая лучше уяснить приведенные обозначения. Из рисунка следует, что угол α_{tr} представляет собой разность прямых восхождений точки цели и начальной точки, то есть $\alpha_{tr}=\alpha_T - \alpha_D$. Используя зависимости сферической тригонометрии, получаем:

$$\sin \alpha_D = \frac{\sin \alpha_{tr}}{\sin \eta_{tr}} \cos \delta, \quad (3.322)$$

причем

$$\cos \eta_{tr} = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \alpha_{tr}. \quad (3.323)$$

Отсюда следует, что для определения α_D и нахождения η_{tr} без дальнейшего расчета параметров орбиты должны быть известны: широта начальной точки, склонение точки цели в момент прибытия космического аппарата и разность прямых восхождений.

Прямое восхождение может быть задано либо в градусном измерении, либо в единицах времени (для Земли $15^\circ=1$ час). Примерно такое же соотношение можно принять и для Марса. Таким образом, при $\alpha_{tr}=0$ переходное время должно быть кратным синодическому периоду обращения меридиана начальной точки относительно цели. Это вовсе не означает, что в момент прибытия космического аппарата к цели она будет в зоне прямой видимости из начальной точки (или, приближенно, из района стартовой позиции), так как точка T , оставаясь на том же меридиане, может отстоять далеко от точки D по широте. Поэтому, чтобы космический аппарат в момент прибытия в точку T был в зоне прямой видимости из точки D , необходимо, чтобы переходное время было кратным синодическому периоду обращения точки D на широте φ относительно точки T (см. главу 2). Последнее обстоятельство может предъявить очень жесткие требования к выбору места стартовой площадки или времени пуска. Поэтому на практике эта трудность преодолевается размещением пунктов слежения вне района старта. Однако, к счастью, чем больше расстояние до точки T и меньше φ и i , тем условие $\alpha_{tr}=0$ больше удовлетворяет требованию кратности

переходного времени *синодическому периоду обращения меридиана точки D* относительно точки *T*. При $\alpha_{tr} \neq 0$ переходное время можно выразить либо частью f суток планеты, либо как $1+f$, $2+f$ и т. д., так как заданными являются α_D для времени начала перехода и α_T для времени прибытия космического аппарата в точку цели. Следовательно, α_{tr} можно определить в единицах времени. Допустим, что переходное время для перехода «Земля — Луна» равно 50 час. Воспользовавшись схемой, подобной приведенной на рис. 3.71, можно найти, что $\alpha_{tr} = 360^\circ + 360^\circ + 30^\circ$, то есть $\alpha_{tr} = 30^\circ$, тогда как для переходного времени, равного 46 час, аналогичный расчет приведет к другому результату: $\alpha_{tr} = 360^\circ + 360^\circ - 30^\circ$, то есть $\alpha_{tr} = 330^\circ$.

На практике вначале определяют меридиан (а при необходимости и широту), на (или над) котором произойдет встреча аппарата с целью. Обычно этот меридиан назначается либо исходя из условий удовлетворения требованиям прямой видимости, либо исходя из расположения подходящей обсерватории или пункта радиолокационного слежения. Предположим, что этот меридиан расположен на угловом расстоянии α_{tr} от начальной точки. В таком случае переходное время ограничено периодами $\alpha_{tr}^o \geq 0$; $360^\circ + \alpha_{tr}^o$; $720^\circ + \alpha_{tr}^o$ (или для Земли $\alpha_{tr}^h \geq 0$; $24^h + \alpha_{tr}^h$; $48^h + \alpha_{tr}^h$) и т. д. Некоторые значения этого переходного времени могут оказаться неприемлемыми либо вследствие того, что они окажутся слишком малыми (например, точка *T* удалена на очень большое расстояние и космический аппарат не сможет достичь ее за время α_{tr}), либо вследствие того, что эти значения переходного времени будут очень большими (например, если точка *T* удалена на слишком близкое угловое расстояние $360^\circ + \alpha_{tr}$, $720^\circ + \alpha_{tr}$ или даже α_{tr}). В подобных случаях необходимо назначить другой меридиан. Однако если можно определить подходящее значение α_{tr} , то можно определить и δ , поскольку при решении задач перехвата или встречи предполагается, что элементы орбиты цели, а следовательно, и геоцентрические координаты цели являются известными. Так как широта начальной точки также является известной, то по формулам (3.222) и (3.223) можно вычислить a_D и η_{tr} .

В точке пересечения переходной орбиты и орбиты цели имеем:

$$\sin \alpha_T = \sin (\gamma + i_{tr}) = \frac{\cos i}{\cos \delta}, \quad (3.324)$$

где

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha_{tr}}{\sin \eta_{tr}} \cos \varphi \quad (3.325a)$$

или, если использовать выражение (3.322),

$$\sin \gamma = \frac{\sin a_D}{\cos \delta} \cos \varphi. \quad (3.325b)$$

Если предварительно по формуле (3.324) вычислить a_T и по формуле (3.325a) вычислить γ , то легко определить наклонение i_{tr} переходной орбиты по отношению к плоскости орбиты цели

$$i_{tr} = 180^\circ - (\gamma + a_T) \quad (3.326)$$

и азимут переходной орбиты в точке T

$$a_{tr} = 180^\circ - \gamma. \quad (3.327)$$

Для малых значений ι и φ имеем: $\gamma \approx 90^\circ$ и $i_{tr} \approx 0$.

Рассмотрение ошибок в рамках предыдущего геометрического анализа показывает, что единственной геометрической ошибкой в начальной точке, оказывающей значительное влияние на элементы переходной орбиты в конечной точке, является азимут a_D . Из рис. 3.71 следует, что ошибка в величине a_D приводит к отклонениям в α_{tr} и δ . Из выражения (3.322) следует, что a_D является функцией α_{tr} , η_{tr} и δ . Дифференцируя выражение (3.322) и считая величину η_{tr} неизменной, получаем:

$$\cos a_D da_D = \frac{\cos \delta}{\sin \eta_{tr}} \cos \alpha_{tr} d\alpha_{tr} - \frac{\sin \alpha_{tr}}{\sin \eta_{tr}} \sin \delta d\delta. \quad (3.328)$$

Отклонения в α_{tr} и δ связаны между собой выражением для ι

$$\operatorname{tg} \iota = \frac{\operatorname{tg} (d\delta)}{\sin (d\alpha_{tr})} \quad (3.329)$$

или

$$d\delta = \arctg [\sin (d\alpha_{tr}) \operatorname{tg} \iota]. \quad (3.330)$$

Таким образом, $d\alpha_{tr} = d\alpha_T$ и $d\delta$ можно найти из выражений (3.328) и (3.330) методом последовательных приближений. Изменением i_{tr} можно пренебречь при очень малых ошибках в a_D , что и предполагается здесь, поскольку на практике следует ожидать, что эти ошибки будут действительно малыми.

Если угол ι мал, то $d\delta$ будет тоже малым, по крайней мере по сравнению с $d\alpha_T$, которое примет значение

$$d\alpha_T = da_D \sin \eta_{tr} \frac{\cos a_D}{\cos \delta \cos a_{tr}}. \quad (3.331)$$

Ясно, что при малом ι должно быть малым и δ , следовательно, можно положить $\cos \delta \approx 1$, и в конечной точке будем иметь отклонение от цели

$$d\alpha_T \approx da_D \sin \eta_{tr} \frac{\cos a_D}{\cos a_{tr}}. \quad (3.332)$$

исключает ее, так что космический аппарат пересекает не орбиту цели, а плоскость орбиты цели. Если предположить, что расстояние до апоцентра невозмущенной переходной орбиты больше, чем расстояние до орбиты цели (переход по пересекающей переходной орбите), то небольшое отрицательное отклонение начальной скорости приведет к тому, что переходная орбита пересечет плоскость орбиты цели «внутри» орбиты цели и пройдет под ней. При положительном отклонении начальной скорости будет иметь место «перелет» и переходная орбита пересечет

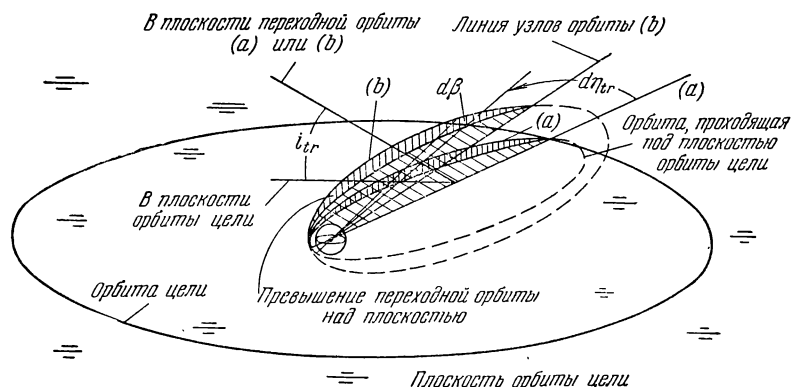


Рис. 3.73. Влияние ошибки в начальной скорости на некомпланарную переходную орбиту.

плоскость орбиты цели «вне» орбиты цели и пройдет над ней. Этот случай схематически представлен на рис. 3.73. Влияние отклонения начальной скорости на угол β , под которым переходная орбита пройдет относительно плоскости орбиты цели в точке пересечения с невозмущенной переходной орбитой (для невозмущенной переходной орбиты $\beta=0$), характеризуется частной производной

$$\frac{\partial \beta}{\partial v_D} = \frac{d\eta_T}{di_{D,T}} \frac{\partial i_{D,T}}{\partial v_D} \sin i_{tr}. \quad (3.336)$$

Очевидно, в случае компланарной переходной орбиты ошибка в начальной скорости не приведет к образованию угла β . Наоборот, если плоскость переходной орбиты образует с плоскостью орбиты цели угол $i_{tr}=90^\circ$, то выражение (3.333) для угловой ошибки в плоскости приобретает вид:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial v_D} \right)_{i_{tr}=90^\circ} = - \frac{d\eta_T}{di_{D,T}} \frac{\partial i_{D,T}}{\partial v_D}, \quad (3.337)$$

так как в данном случае $d\eta_{tr}$ проявляется как радиальное смещение точки пересечения вдоль линии узлов без изменения ориентации линии узлов, то есть проявляется просто как изменение длины линии узлов. Изменение β на единицу изменения начальной скорости в данном случае, конечно, будет максимальным.

Одним из важных вопросов при изучении маневра встречи является минимизация i_{tr} , имеющая целью создание наиболее экономичных условий для реализации, например, маневра встречи, используемого для регулярного снабжения орбитальной станции. Другим примером использования подобных маневров может явиться выведение первого, второго, третьего и т. д. спутника в соответствующие точки орбиты системы спутников. В последнем примере каждый спутник совершает маневр встречи с точкой орбиты, расположенной на строго определенном угловом расстоянии от ранее выведенного на орбиту спутника. Во всех приведенных примерах в дополнение к маневру на активном участке, имеющему целью совмещение плоскостей орбит, необходим маневр для ликвидации остаточного угла i_{tr} . Поскольку ликвидация i_{tr} может потребовать значительной дополнительной энергии, то создание почти компланарных условий перехода имеет большое практическое значение. При этом обычно различают следующие случаи.

Случай 1. Компланарный ОППО всегда возможен лишь при наличии экваториальной стартовой площадки ($\varphi=0$) и экваториальной орбиты цели ($i=0$).

Случай 2. При $\varphi=0$, но $i \neq 0$ плоскость орбиты цели дважды за сутки (за один оборот центрального тела, с поверхности которого осуществляется переход на орбиту цели) пересекает начальную точку D . Пригодность этих точек пересечения для совершения маневра ОППО зависит от периода обращения цели. Поясним сказанное (см. рис. 3.74). Начальные точки D_1 и D_2 расположены на экваторе. Пусть целью является низкоорбитальная космическая станция Земли, совершающая 14—15 оборотов в сутки по круговой орбите. В данном случае оказывается пригодным большое количество комбинаций. Например, комбинация $D_1—T_1$, требующая достаточно крутой баллистической траектории вывода (см. главу 2; роль угловой дальности δ в данном случае играет переходный угол η_{tr}), комбинация $D_1—T_2$, требующая менее крутой траектории вывода, и комбинация $D_1—T_3$, требующая еще менее крутой траектории вывода. Требования к точности определения времени пуска при переходе в точки T_3 , T_2 , T_1 становятся все более жесткими вследствие увеличения крутизны траектории в районе сближения и соответствующего уменьшения горизонтальной составляющей

скорости в районе вершины траектории (предполагается, что вершина траектории баллистического вывода касается орбиты цели).

Комбинация $D_1 - T_4$ представляет собой гомановский переход, который в этом примере является переходом ОППО с минимальным расходом энергии.

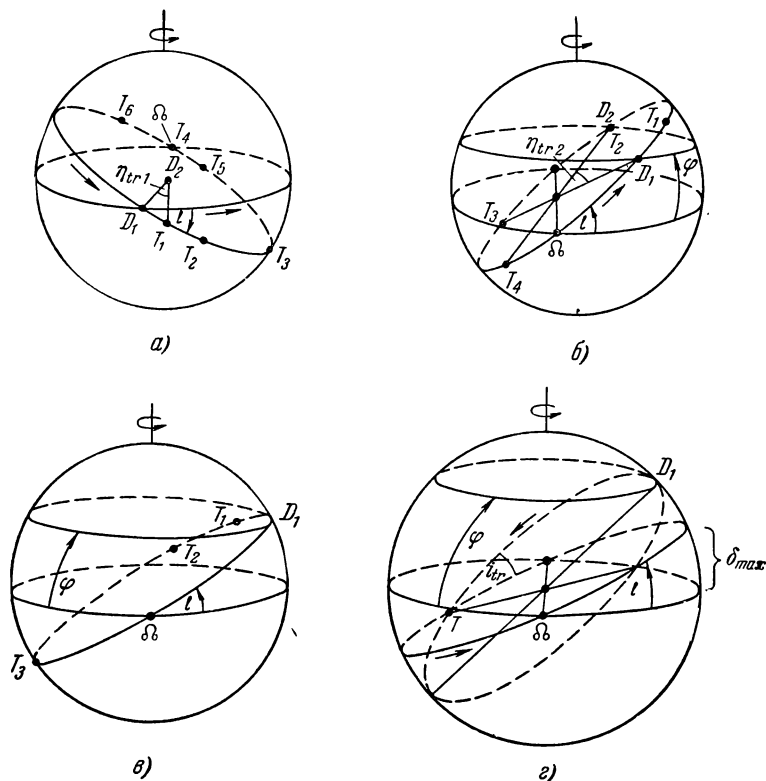


Рис. 3.74. Различные условия компланарного перехода класса «поверхность — орбита».

Комбинация $D_1 - T_6$ представляет интерес, поскольку, как будет показано ниже, этот случай играет важную роль при некоторых межпланетных перелетах, в частности с Земли на Венеру и обратно (см. главу 9). При этом переходе апогей переходной орбиты расположен за орбитой цели и космический аппарат встречает цель T при вторичном пересечении орбиты цели после прохождения апогея. В этом случае компланарность орбит сохраняется, но имеет место угол между касательными

к орбитам в точке T_6 . Если точка T_6 не слишком удалена от узла орбиты, то величина этого угла будет малой.

По истечении половины суток начальной точкой станет точка D_2 . Переход $D_2—T_5$ является непрактичным, как и переход $D_2—T_4$, представляющий собой вертикальный подъем с вершиной на орбите цели. Условия перехода $D_2—T_6$ подобны условиям перехода $D_1—T_2$. Поскольку для орбит высотой около 556 км синодический период по отношению к точке D является дробной частью суток, то в течение суток дважды будут (при каждом прохождении точкой D линии узлов) иметь место различные комбинации $D—T$. При этом некоторые комбинации не будут обеспечивать практически приемлемые условия перехода. Однако если считать, что можно воспользоваться всем диапазоном траекторий баллистического вывода вплоть до эллиптической переходной орбиты (гомановский переход), то за сутки по крайней мере одна из комбинаций окажется практически приемлемой. Следует отметить, что при условиях, приведенных на рис. 3.74, невозможно осуществить компланарный переход при строго восточном направлении пуска (с целью максимального использования угловой скорости вращения Земли). Наоборот, пуск в восточном направлении может привести к таким большим значениям i_{tr} (зависящим от ι), что расход энергии, требуемый для изменения орбиты в точке цели, превысит экономию энергии, получаемую за счет использования угловой скорости Земли.

Случай 3. Если $\varphi \neq 0$, $\iota \neq 0$, но $\varphi < \iota$, то при строго восточном направлении пуска также невозможно осуществить компланарный переход. Если точка D расположена в северном полушарии, то, как следует из рис. 3.74, б, все переходы из точки D_1 в северо-восточном направлении ($a_D < 90^\circ$) в точку T_1 или T_2 представляют собой баллистические траектории быстрого вывода, а комбинация $D_1—T_3$ — траекторию эллиптического вывода. Если по какой-либо причине встречу необходимо произвести в северном полушарии, то в качестве начальной точки предпочтительнее выбрать точку D_1 . Если же встречу предполагается произвести в южном полушарии, то в качестве начальной точки предпочтительнее выбрать точку D_2 . Иными словами, в первом случае будут преобладать пуски в северо-восточном направлении, а во втором — в юго-восточном направлении.

Подобные рассуждения и оценки являются справедливыми и для случая 2. Однако между случаями 2 и 3 существует разница, заключающаяся в том, что в случае 3 при пусках в восточном направлении образование i_{tr} происходит даже быстрее, чем при пусках с экваториальной стартовой площадки. К тому же в случае 3 угловая скорость вращения Земли используется

в меньшей степени. Вообще говоря, не следует придавать слишком большого значения необходимости пуска в восточном направлении, если это не диктуется ограничением веса полезной нагрузки для данного носителя.

Случай 4. Если $\varphi = \iota \neq 0$ (рис. 3.74, в), то существует единственная точка D_1 , удовлетворяющая условиям компланарного перехода. При этом точка D_1 является единственной точкой, из которой возможен пуск в строго восточном направлении. Комбинации $D_1 - T_1$ и $D_1 - T_2$ отвечают соответственно более и менее крутым траекториям баллистического вывода, а комбинация $D_1 - T_3$ отвечает выводу с минимальным расходом энергии, не считая случая 1. Важно отметить, что при $\varphi = \iota \neq 0$ условия компланарного перехода выполняются только один раз в течение суток. Однако поскольку при этом точка цели T может не удовлетворять требованию необходимого взаимного расположения с точкой D_1 , зависящего от синодического периода обращения точки T относительно точки D_1 , то этот единственный случай не гарантирует реализации компланарного перехода в течение одних суток. Поэтому этот случай является не очень пригодным, когда речь идет о выводе космического аппарата для встречи с обитаемой орбитальной станцией (см. численный пример в главе 2).

Случай 5. Если $\varphi > \iota$, то компланарный переход ОППО невозможен. При этом существует единственная точка D_1 , для которой имеет место минимальное значение $(i_{tr})_{\min}$:

$$(i_{tr})_{\min} = \varphi - \delta_{\max} = \varphi - \iota. \quad (3.338)$$

Проведенный выше анализ показывает, что если при $\varphi = \iota = 0$ для достижения низкоорбитальной станции маневр ОППО окажется неприемлемым, то, чтобы иметь условия компланарного перехода один или два раза в течение суток, необходимо по крайней мере соблюсти условие $\iota > \varphi$. Более того, с точки зрения осуществимости перехода, необходимо иметь значения φ и ι по возможности меньшими, чтобы несоблюдение компланарности приводило к небольшим значениям i_{tr} , а следовательно, и к небольшому дополнительному расходу требуемой энергии.

Если рассматривать встречу с очень удаленным объектом, например с космической станцией на высоте 111 000 км (или переход с поверхности Марса на один из его спутников), то выполнение условия $\iota > \varphi$ является еще более важным, так как в этом случае только одна из двух точек D (рис. 3.74, б) имеет практическое значение для данных суток или отрезка времени в несколько суток (это количество суток возрастает с увеличением расстояния до точки T). Это объясняется уменьшением орбитальной скорости с увеличением радиального расстояния

до точки T . Например, на рис. 3.74, б комбинация $D_1 - T_1$ может оказаться практически неприемлемой для таких больших высот, но за несколько оборотов (суток) центрального тела точка T_1 постепенно переместится в положение T_2 или за нее, так что при этом расположении точка D_1 окажется пригодной для перехода при практически приемлемом значении угла η_{tr} . В течение этого периода ожидания наличие второй точки D_2 не имеет практического значения. Таким образом, хотя при $\varphi < \iota$ за сутки имеют место две точки пересечения точкой D плоскости орбиты цели, только одна из них может оказаться пригодной для компланарного перехода в рассматриваемый промежуток времени.

В случае $\varphi = \iota \neq 0$, при котором в течение суток имеет место лишь одно положение, соответствующее условию компланарности, возможность достижения орбитальной станции на очень больших высотах по компланарной переходной орбите становится весьма ограниченной. С другой стороны, необходимо помнить, что при этом апогейная скорость на переходной орбите будет очень малой, что приведет к соответственно меньшему дополнительному расходу энергии на компенсацию заданного $\dot{r}_{tr}$, чем при низких орбитах (см. § 3.2).

При использовании ОППО или ОППО — ОППЦ для маневра *захвата* удаленной цели значительной массы, такой, как Луна, как было указано в начале настоящего параграфа, наклонение переходной орбиты, с энергетической точки зрения, не играет большой роли. Однако следует помнить об одном существенном недостатке наклоненных переходных орбит при их использовании для маневров встречи и захвата: требования к точности реализации начальных условий возрастают с увеличением наклонения. В этом можно убедиться из рассмотрения рис. 3.72 и 3.73. При наклоненной переходной орбите ошибка в величине и (или) направлении начальной скорости вызовет не только смещение по долготе dl , но и угловое смещение $d\beta$. В случае цели с большой массой это влияние будет усилено соответствующим уменьшением силы притяжения гравитационного поля цели вследствие большего расстояния, равного $\sqrt{(dl)^2 + (d\beta)^2}$, по сравнению с dl при компланарном случае. Это приводит к тому, что цель с большой массой становится «гравитационно меньшей» (с уменьшенным эффективным диаметром; см. § 4.5).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a — большая полуось;

α — географический азимут (измеряется по ходу часовой стрелки от направления на север);

b — малая полуось;

- C — постоянная в законе площадей Кеплера;
 E — эксцентрическая аномалия;
 e — эксцентриситет;
 g — ускорение силы притяжения;
 h — постоянная интеграла энергии;
 i — наклонение орбиты; угол между плоскостями двух орбит;
 K — гравитационный параметр;
 $k_1 - k_6$ — постоянные, обозначающие шесть параметров орбиты;
 l — аргумент перигея, определяющий ориентацию орбиты в плоскости орбиты; долгота;
 M — масса центрального тела;
 M — средняя аномалия;
 m — масса;
 p — фокальный параметр;
 r — радиальное расстояние;
 T — период обращения;
 T_p — эпоха [время прохождения перигея (часто принимается равным нулю)];
 v — скорость;
 x, y, z — прямоугольные координаты;
 α — прямое восхождение;
 β — угол места точки над плоскостью xy (см. рис. 3.59);
 γ — угол между большими осями компланарных несоосных эллипсов (см. рис. 3.35);
 e — $= (1 - e') / (1 + e''')$ [см. формулу (3.74)]; $= e/p$ [см. формулу (3.144)];
 η — истинная аномалия;
 θ — угол, образованный вектором скорости с местным горизонтом (угол траектории);
 $\kappa_1 - \kappa_6$ — постоянные, обозначающие шесть параметров орбиты;
 λ — географическая долгота;
 μ — среднее движение;
 ν — параметр скорости (отношение орбитальной скорости к местной круговой скорости);
 ω — угловая скорость вращения Земли; аргумент перицентра, то есть угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты;
 ρ — радиальное расстояние от Луны;
 τ_r — безразмерное время полета по эллиптической орбите, выраженное в единицах периода обращения;
 ψ — $1/p$.

Индексы (нижние):

- A — относится к апоцентру;
- a — трансверсальный (горизонтальный);
- $apsis$ — апсидальный;
- c — относится к круговой орбите;
- $capt$ — относится к маневру захвата;
- $copl$ — компланарный;
- D — относится к начальной точке;
- eq — эквивалентный;
- id — идеальный;
- l — предельный;
- $orth$ — ортогональный;
- P — относится к перицентру;
- p — параболический;
- r — радиальный;
- s — относится к спутнику;
- T — относится к цели;
- tot — полный;
- tr — относится к переходу или переходной орбите.

ЗАДАЧИ

1. Под каким углом необходимо приложить импульс скорости к космическому кораблю, движущемуся по круговой орбите радиуса r_1 , для плоского маневра изменения орбиты, эквивалентного получению местной параболической скорости?

2. Какого изменения плоскости орбиты можно достичь при импульсном маневре при условиях задачи 1, если величина импульса скорости равна местной круговой скорости?

3. Определите величину импульса скорости для поворота плоскости круговой орбиты на 5° в следующих случаях:

- а) окололунная орбита высотой 100 *морских миль* (185 км);
- б) околоземная орбита высотой 300 *морских миль* (556 км);
- в) околосолнечная орбита радиуса 1 *а. е.*

4. Космический аппарат движется по эллиптической орбите около Земли. Высота в перигее 100 *морских миль* (185 км), высота в апогее 19 370 *морских миль* (35 900 км), наклонение орбиты к плоскости экватора $i=30^\circ$. Определите апогейный импульс для изменения орбиты в экваториальную круговую орбиту.

5. Искусственный планетоид, движущийся по околокруговой орбите в поясе астероидов на расстоянии 3 *а. е.* в плоскости, наклоненной на 10° к плоскости эклиптики, должен вернуться на Землю по переходной орбите, являющейся частью эллиптической орбиты, афелий которой расположен на расстоянии $R_A=5$ *а. е.*, а перигелий — на расстоянии $R_P=1$ *а. е.* В момент начала перехода планетоид находится в точке пересечения орбиты с плоскостью эклиптики, так что маневр поворота плоскости орбиты может быть совмещен с переходным маневром в плоскости эклиптики. Определите величину импульса скорости в начальной точке.

6. Определите апогейное расстояние эллиптической орбиты, у которой перигейное расстояние равно 1852 км (1000 *морских миль*); скорость аппарата в точке пересечения с орбитой Луны ($60r_{00}$) равна местной круговой скорости (влиянием Луны пренебречь).

7. Космический аппарат движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса 92 700 км (50 000 морских миль) (не путать с высотой). Что является более экономичным для перехода аппарата на круговую орбиту радиуса, равного радиусу лунной орбиты: переход по томановской орбите или по биэллиптической переходной орбите?

8. Увеличивается или уменьшается большая полуось гиперболической орбиты при увеличении эксцентриситета?

9. Какой из маневров для космического аппарата, движущегося вокруг Земли по круговой орбите высотой 556 км (300 морских миль), потребует большей энергии: переход на 24-часовую орбиту или переход на круговую орбиту радиуса, равного радиусу лунной орбиты?

10. Что такое орбита ожидания и каково ее назначение?

11. Спутник Земли движется по эллиптической орбите высотой в перигее 185 км (100 морских миль) и высотой в апогее 1853 км (1000 морских миль). Сравните величины тормозных импульсов в перигее и апогее исходной орбиты для уменьшения высоты в перигее до 148 км (80 морских миль).

12. Рассчитайте высоту 24-часовой орбиты для Марса.

13. Космический аппарат достиг заданной перигейной скорости над точкой с известными географическими координатами. Необходимо перевести аппарат на 24-часовую круговую орбиту. При этом маневр перехода должен закончиться над точкой с теми же географическими координатами. Определите тип переходной орбиты и величины импульсов скорости, начиная с перигейного маневра (замечание: космический аппарат не должен задерживаться на орбите ожидания).

14. Рассчитайте апогейное расстояние 24-часовой эллиптической геоцентрической орбиты, перигейное расстояние которой $r_P = 1,1r_{00}$.

15. Пилотируемый орбитальный аппарат движется около Земли по круговой орбите радиуса $r = 1,1r_{00}$. Необходимо повернуть плоскость орбиты на 60° за время, не превосходящее 12 час. Определите суммарную величину требуемых импульсов для наиболее экономичного маневра в пределах отведенного времени и сравните ее с импульсом скорости для мгновенного поворота плоскости.

16. Считая, что половина угла между асимптотами гиперболической орбиты дается выражением $\cos \Phi = e^{-1}$, а $d\Phi/dv$ можно записать в форме $d\Phi/dv = (d\Phi/de)/(de/dv)$, проверьте выражение (3.215), получив другое выражение для de/dv через v , v_∞ , K/r , Φ и θ .

17. С круговой полярной орбиты с периодом обращения 90 мин около Земли необходимо спустить капсулу. Траекторией спуска выбрана гомановская переходная орбита ($\eta_T = 180^\circ$), касающаяся апогейной точкой переходной орбиты и имеющая теоретическую (пренебрегая сопротивлением воздуха) перигейную точку на поверхности Земли [$r_P = r_{00}$ (высота равна нулю)] с координатами: $\lambda = 140^\circ$ в. д. и $\varphi = 30^\circ$ с. ш. Определите географические координаты апогейной точки.

18. Пилотируемый космический аппарат движется около Земли по эллиптической орбите с $r_P = 1,1r_{00}$ и $r_A = 20r_{00}$. Необходимо совершить плоский маневр поворота линии апсид на 50° . Маневр предполагает провести с использованием промежуточной перигейной орбиты. Рассчитайте суммарную величину импульсов для совершения маневра и определите минимальное и максимальное время перехода аппарата в перигей конечной эллиптической орбиты.

19. Выведите выражения (3.200 а, с, g, h).

ГЛАВА 4

ПЕРЕХОДНЫЕ МАНЕВРЫ В ПОЛЕ ДВУХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

4.1. Введение

В предыдущей главе рассматривались маневры в поле центральной силы.

В настоящей главе рассматриваются более сложные маневры, осуществляемые в поле двух центральных сил. Рассмотрение этих маневров имеет важное значение, поскольку все космические полеты, за исключением движения искусственных спутников, происходят под действием более чем одной центральной силы.

Осуществление маневров в поле гравитационных сил составляет существо космических полетов и космической навигации. При наличии двух центров тяготения происходит наложение их гравитационных полей. Переходное движение от одного поля к другому включает маневр выхода и маневр захвата. Орбиты выхода или захвата всегда могут быть с высокой точностью аппроксимированы гиперболой. Поэтому в следующем параграфе настоящей главы рассматривается переход «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола», который является типичным маневром в центральном поле. Можно выделить три основных типа маневров в поле двух центральных сил (бицентральной поле): выход, захват и гиперболическая встреча. При гиперболической встрече космический аппарат пролетает вблизи тела тяготения, причем захвата не происходит. Эти три типа маневров рассматриваются в §§ 4.3—4.5.

Особо важное значение для анализа полетов в бицентральных полях имеют навигационные аспекты маневров с управлением скоростью, а также маневров, при которых необходимо учитывать ошибки в направлении и величине вектора скорости. Рассмотрению этих важных вопросов посвящены §§ 4.6—4.13.

4.2. Переход с эллиптической или круговой орбиты на компланарную гиперболическую орбиту

В том случае, когда космический аппарат должен покинуть гравитационное поле одного тела и войти в гравитационное поле другого тела, он должен двигаться по орбите, весьма близкой к гиперболе. Траектория космического аппарата является точной гиперболой, если не учитывается движение покидаемого тела (например, планеты) относительно центра притяжения (например, Солнца) и предполагается, что масса покидаемого тела сосредоточена в одной точке (случай центрального гравитационного поля). Траектория возврата также является гиперболой. Таким образом, можно сказать, что орбитой для космических маневров, осуществляемых под влиянием импульса тяги в поле более одной центральной силы, является гипербола. Гиперболическая скорость v_h превышает параболическую скорость $v_p = \sqrt{2K/r}$ на определенную величину. В то время как параболическая скорость после выхода космического аппарата из гравитационного поля покидаемого тела номинально равна нулю, гиперболическая скорость имеет конечное значение, называемое *гиперболическим избытком скорости* v_∞ , который равен скорости космического аппарата относительно покидаемой планеты (или планеты-цели) «за пределами влияния» гравитационного поля планеты. Выражение «за пределами влияния» здесь следует понимать в смысле «за пределами измеримого возмущающего влияния гравитационного поля планеты», поскольку, согласно закону Ньютона, гравитационное поле распространяется на бесконечно большое расстояние или, во всяком случае, на расстояние, в практическом смысле бесконечно большее, чем размеры планеты. Уход по гиперболической орбите будем называть *выходом*, возвращение — *захватом*, а прохождение тела мимо планеты (то есть вхождение и выход из гравитационного поля без снижения скорости до параболической и ниже) — *гиперболической встречей*.

В зависимости от типа рассматриваемого маневра (выход или захват) будем иметь орбиту спутника, от которой начинается или к которой стремится гиперболическое движение. Эту орбиту спутника, которая может быть либо круговой, либо эллиптической, будем соответственно называть *начальной орбитой спутника* (в случае выхода) или *конечной орбитой спутника* (в случае захвата).

Таким образом, комбинация круговой (или эллиптической) и гиперболической орбит в астронавтике имеет место только *при операциях в поле взаимодействующих гравитационных сил*. Такими типичными операциями, например, являются операции,

проводимые при лунных и межпланетных полетах. Механика этих полетов будет обсуждаться в последующих параграфах. Непосредственно ниже будет рассмотрена динамика маневров «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» и «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола», где символ $\rightleftharpoons$ указывает на обратимость процесса (в случае импульсного маневра). Под импульсом понимается относительно кратковременное действие тяги, приводящее к желаемому изменению скорости.

Изменение орбиты может быть осуществлено за один или два этапа. Первый случай будем называть *одноимпульсным маневром*, второй — *двухимпульсным маневром*. В случае одноимпульсного маневра следует различать переходы «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» и «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола». В случае двухимпульсного маневра интерес представляет лишь переход «круг $\rightleftharpoons$ гипербола». Все эти три случая будут последовательно рассмотрены ниже.

а) Одноимпульсный маневр «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола». С точки зрения экономии энергии, импульс тяги выгоднее сообщать в вершине гиперболы.

Вершина гиперболы может совпадать с любой точкой эллипса. Для получения соосной гиперболы ее вершина должна совпадать с любой из точек апсид эллипса. Этим двум точкам соответствуют экстремальные энергетические значения, поскольку энергетические значения импульсов в других точках орбиты располагаются между ними. Апоцентральный и перицентральный маневры показаны на рис. 4.1. Если r_V является расстоянием до вершины гиперболы, то в первом случае $r_V = r_A$ и во втором случае $r_V = r_P$. Конечное направление движения при выходе или входе задается направлением асимптоты гиперболы, которое определяется половиной угла²⁾ Φ между асимптотами. Этот

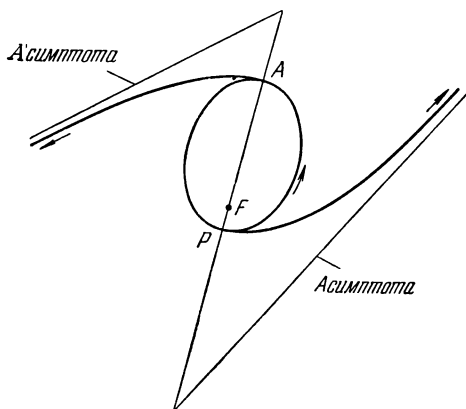


Рис. 4.1. Гиперболический выход из перигея эллиптической орбиты в центральном гравитационном поле.

¹⁾ Под «кругом» в практическом смысле будем понимать орбиту, близкую к круговой.

²⁾ Геометрические и другие основные сведения, относящиеся к гиперболической орбите, изложены в книге «Космический полет», т. I, гл. 4.

угол, а также гиперболический избыток скорости v_∞ , скорость в вершине v_V и расстояние до вершины r_V при заданном гравитационном поле, характеризуемом параметром K , связаны уравнениями¹⁾

$$v_\infty = \frac{K/r_V}{v_V} \operatorname{tg} \Phi = \sqrt{v_V^2 - \frac{2K}{r_V}}, \quad (4.1)$$

из которых можно получить выражение для скорости в вершине

$$v_V = \sqrt{\frac{2K}{r_V} + v_\infty^2} = \sqrt{\frac{2K}{r_V}} \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (4.2a)$$

где

$$\psi = \frac{v_\infty}{\sqrt{2K/r_V}}, \quad \psi_P = \frac{v_\infty}{\sqrt{2K/r_P}}, \quad \psi_A = \frac{v_\infty}{\sqrt{2K/r_A}}. \quad (4.3)$$

В случае маневра в апоцентре (апоцентральный маневр) скорость в вершине определяется выражением

$$v_V = \sqrt{\frac{2K}{r_A}} \sqrt{1 + \psi_A^2}. \quad (4.2b)$$

Обозначив отношение расстояний до точек апсид через $n \equiv r_A/r_P$, получим следующее выражение для скорости в апоцентре:

$$v_A = \sqrt{\frac{2K}{r_A}} \sqrt{\frac{1}{1+n}}. \quad (4.4)$$

Изменение скорости в результате действия импульса в апоцентре (апоимпульса) определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \Delta v_A &= |v_V - v_A| = \sqrt{\frac{2K}{r_A}} \sqrt{1 + \psi_A^2} - \sqrt{\frac{2K}{r_A(1+n)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2K}{r_A}} \left[\sqrt{1 + \psi_A^2} - \frac{1}{\sqrt{1+n}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[\sqrt{\frac{2(1+n\psi_P^2)}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n(1+n)}} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\psi_A^2 = n\psi_P^2$.

¹⁾ Дополнительные соотношения см. в § 4.9 («Космический полет», т. I).

В случае маневра в перигентре (перигентральный маневр) соответствующие соотношения имеют вид:

$$v_V = \sqrt{\frac{2K}{r_P}} \sqrt{1 + \psi_P^2}, \quad (4.6)$$

$$v_P = \sqrt{\frac{2K}{r_P} \frac{n}{1+n}}, \quad (4.7)$$

$$\Delta v_P = |v_V - v_P| = \sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[\sqrt{2(1 + \psi_P^2)} - n \sqrt{\frac{2}{n(1+n)}} \right]. \quad (4.8)$$

б) Одноимпульсный маневр «круг $\rightleftharpoons$ гипербола». В данном случае вершина гиперболы совпадает с точкой на круговой (или близкой к круговой) орбите радиуса r (рис. 4.2). Поскольку

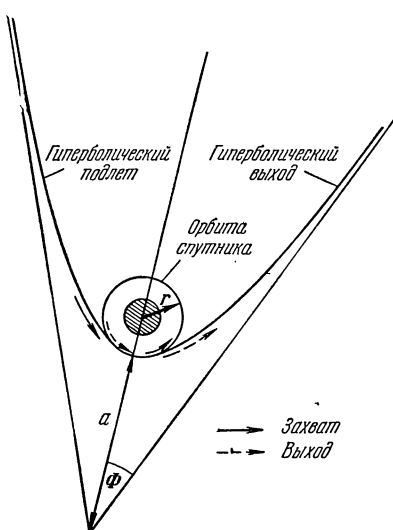


Рис. 4.2. Одноимпульсный соосный коапсидальный гиперболический маневр выхода и захвата.

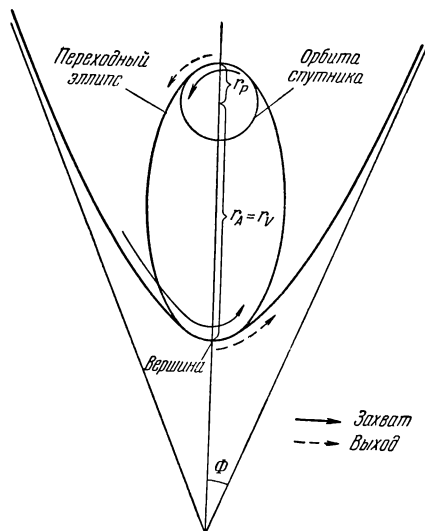


Рис. 4.3. Двухимпульсный коапсидальный маневр, использующий соосный переходный эллипс и соосную конечную орбиту. (Расстояние от центра притяжения до вершины гиперболы равно расстоянию от центра притяжения до апоцентра переходного эллипса.)

круговая скорость равна $\sqrt{K/r}$, то необходимое изменение скорости определяется выражением

$$\Delta v = \sqrt{\frac{K}{r}} [\sqrt{2(1 + \psi^2)} - 1]. \quad (4.9)$$

в) Двухимпульсный маневр «круг $\rightleftharpoons$ гипербола». В рассматриваемом случае эллипс играет роль *переходной орбиты* между гиперболой и кругом. При этом имеют место два перехода: «гипербола $\rightleftharpoons$ эллипс» и «эллипс $\rightleftharpoons$ круг». При выполнении соосных маневров возможны два случая: или апоцентральный маневр «гипербола $\rightleftharpoons$ эллипс» и перицентральный маневр «эллипс $\rightleftharpoons$ круг», или перицентральный маневр «гипербола $\rightleftharpoons$ эллипс» и апоцентральный маневр «эллипс $\rightleftharpoons$ круг». Первый случай изображен на рис. 4.3, второй — на рис. 4.4.

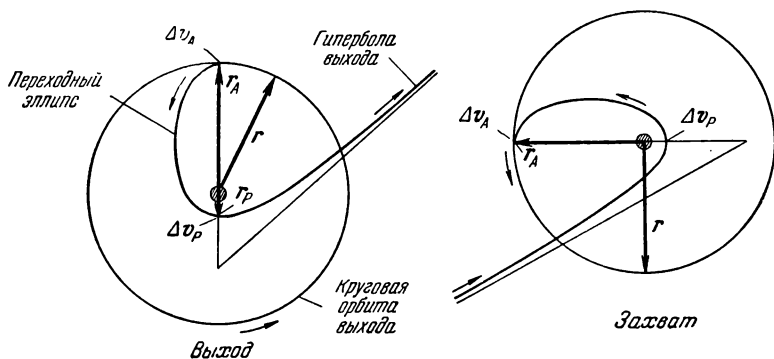


Рис. 4.4. Двухимпульсный коапсидальный маневр, использующий соосный переходный эллипс и соосную конечную орбиту. (Вершина гиперболы совпадает с перигеием переходного эллипса.)

В первом случае изменение скорости под воздействием первого импульса определяется выражением (4.5). Изменение скорости при воздействии в перигеии второго импульса может быть получено из соотношений

$$v_P = n v_A, \quad v_c = \sqrt{\frac{K}{r_P}} = \sqrt{n \frac{K}{r_A}}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_P &= v_P - v_c = n \sqrt{\frac{2K/r_A}{1+n}} - \sqrt{n \frac{K}{r_A}} = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[n \sqrt{\frac{2}{1+n}} - \sqrt{n} \right] = \sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[\sqrt{\frac{2n}{1+n}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Суммарное изменение скорости, необходимое для выполнения этого маневра, равно:

$$\begin{aligned} \Delta v_A + \Delta v_P &= \sigma_{AP} = \sqrt{\frac{K}{r_P}} \left[\sqrt{\frac{2(1+n\psi_P^2)}{n}} + (n-1) \sqrt{\frac{2}{n(1+n)}} - 1 \right] = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[\sqrt{2(1+\psi_A^2)} + (n-1) \sqrt{\frac{2}{1+n}} - \sqrt{n} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Во втором случае изменение скорости под воздействием первого импульса определяется выражением (4.8). Изменение скорости при воздействии второго импульса в апоцентре должно быть равно:

$$\begin{aligned} \Delta v_A &= v_c - v_A = \sqrt{\frac{K}{nr_p}} - \sqrt{\frac{2K}{r_p n(1+n)}} = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_p}} \left[\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n(1+n)}} \right] = \sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1+n}} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Суммарное изменение скорости определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta v_P + \Delta v_A &= \sigma_{PA} = \sqrt{\frac{K}{r_p}} \left[\sqrt{2(1+\psi_p^2)} + \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2(1+n)}{n}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{K}{r_A}} \left[1 + \sqrt{2(n+\psi_A^2)} - \sqrt{2(1+n)} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для случая $n=1$ имеем $\sigma_{AP} = \sigma_{PA}$, и уравнения (4.12) и (4.14) приводятся к виду (4.9).

г) **Одноимпульсные и двухимпульсные несоосные касательные маневры.** В общем случае большая ось переходного эллипса не совпадает с осями гиперболы или орбиты спутника, причем сами оси гиперболы и орбиты спутника также могут не совпадать (рис. 4.5). Однако переходный эллипс может касаться гиперболы и орбиты спутника, которая также является эллипсом. Два случая, представленные на рис. 4.5, являются достаточно сложными. На практике с целью уменьшения расхода топлива обычно используют маневры, близкие к соосным. Однако маневры этого типа весьма чувствительны к ошибкам. Если импульс тяги будет приложен не точно в вершине гиперболы, то переходный эллипс не будет соосным с гиперболой. И наоборот, ошибки, возникающие при выходе, могут привести к тому, что орбита спутника не будет соосной с гиперболой. Это положение может иметь место при отлете с планеты-цели для возврата на Землю, поскольку

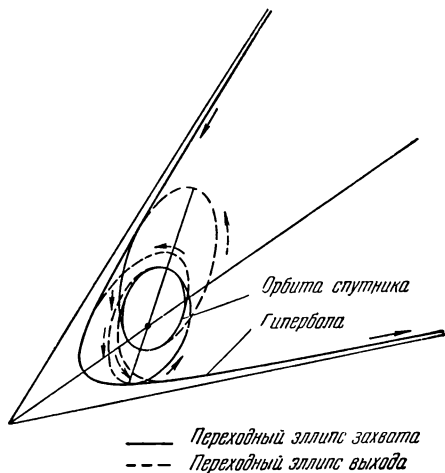
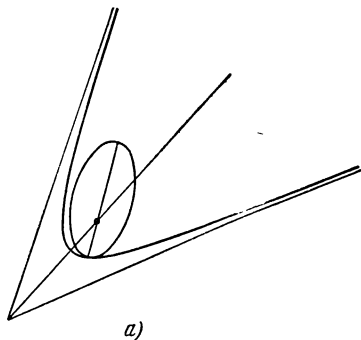


Рис. 4.5. Двухимпульсный маневр, использующий несоосные конечные орбиты и переходные эллипсы.

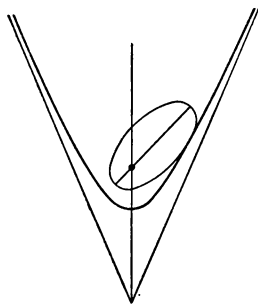
при отлете с планеты-цели для возврата на Землю, поскольку

момент отлета выбирается заранее, а орбита спутника, получающаяся при маневре захвата, может быть до некоторой степени произвольной.

Если бы эллиптическая орбита спутника была более или менее соосна с гиперболой ухода в момент отлета, то, вероятно, упомянутые ошибки оказывали бы второстепенное влияние. Более подходящим было бы установление орбиты спутника



а)



б)

Рис. 4.6. Одноимпульсный маневр выхода и захвата, использующий несоосные орбиты спутника и гиперболическую орбиту.

а) Одноимпульсный маневр в апоцентре орбиты спутника; б) одноимпульсный маневр в произвольной точке орбиты спутника.

около планеты-цели в приближительном соответствии с теоретически желаемой орбитой. Для этого в течение последующего времени пребывания спутника в гравитационном поле планеты-цели необходимо определять с максимальной точностью текущие элементы орбиты, затем определять вариацию этих элементов, обусловленную сжатием планеты-цели и влиянием естественных спутников этой планеты, до тех пор, пока можно будет провести прогнозирование вариации орбиты. После этого становится возможным произвести расчет орбитальных элементов в момент выхода и связать их с элементами требуемой гиперболы выхода. При наличии такой информации можно рассчитать маневр выхода и требуемый расход топлива. Если выход осуществляется с помощью одноимпульсного компланарного маневра, то для его расчета можно использовать соотношения п. г) § 3.3.

Схема движения космического аппарата в рассматриваемом случае показана на рис. 4.6. В обоих случаях на этом рисунке орбиты спутника и гиперболы касаются. Следовательно, в уравнении (3.35) $\theta' - \theta'' = 0$ и справедливо соотношение

$$\frac{\Delta v}{v_e} = v' \left(1 - \frac{v''}{v'} \right). \quad (4.15)$$

После определения параметров гиперболы в данной точке эллипса легко определить значения e' (эллипс) и e'' (гипербола), а также истинные аномалии η' и η'' для данного расстояния r от космического корабля до центра притяжения; значения v' и v'' можно вычислить с помощью первых двух уравнений (3.36).

В случае двухимпульсного маневра, использующего касательный переходный эллипс в соответствии с рис. 4.5, воспользуемся соотношениями, полученными при рассмотрении касательного переходного маневра между двумя эллипсами [см. п. 4) § 3.7]. В данном случае в этих соотношениях вместо параметров эллипса, помеченных тремя штрихами, следует подставить параметры гиперболы. Практический интерес представляет лишь тот случай, когда орбита спутника располагается значительно ближе к центру притяжения и оказывается меньшей по размерам, чем гипербола (случай непересечения)¹⁾. Следовательно, при указанном условии справедливо соотношение $p' < p'' < p'''$, причем один штрих относится к орбите спутника, два штриха — к переходному эллипсу и три штриха — к гиперболе. Это соответствует случаю *C* в таблице, предшествующей уравнению (3.148), причем следует иметь в виду, что точка *Q* принадлежит эллипсу. Переход на переходный эллипс может быть выполнен с любой точки орбиты спутника, но расход топлива при этом не будет одинаков. Переходные эллипсы, соответствующие различным точкам орбиты спутника, показаны на рис. 4.5.

4.3. Основы механики полета при гиперболическом выходе и захвате

При движении по переходной траектории, направленной от одного гравитационного поля к другому через промежуточное гравитационное поле высокого порядка, например при полете от Земли к другой планете через гелиоцентрическое поле, космический аппарат сначала *выходит* из гравитационного поля Земли по гиперболической орбите (или квазигиперболической, см. ниже), затем *проходит* через гелиоцентрическое поле и, наконец, *входит* в гравитационное поле планеты-цели, где он либо *захватывается* планетой после маневра торможения, либо движется дальше (случай *гиперболической встречи*).

В данном параграфе рассматривается процесс выхода космического аппарата. В последующем изложении, в котором часто будут одновременно использоваться планетоцентрические и

¹⁾ См. § 3.6.

гелиоцентрические обозначения, *планетоцентрические скорости и расстояния* будем обозначать через v и r , соответствующие *гелиоцентрические* величины — через V и R и, где необходимо, *селеноцентрические*¹⁾ скорости и расстояния — через w и ρ . Все другие обозначения для гелиоцентрической системы отсчета будем снабжать знаком $\odot$. Планетоцентрические и селеноцентрические символы, как правило, будут использоваться без специальных знаков. При необходимости будут использоваться индексы: $p1$ — для планет, $\oplus$ — для Земли, m — для естественных спутников планет и C — для Луны. Эти обозначения соответствуют тем, которые были использованы в первом томе книги «Космический полет».

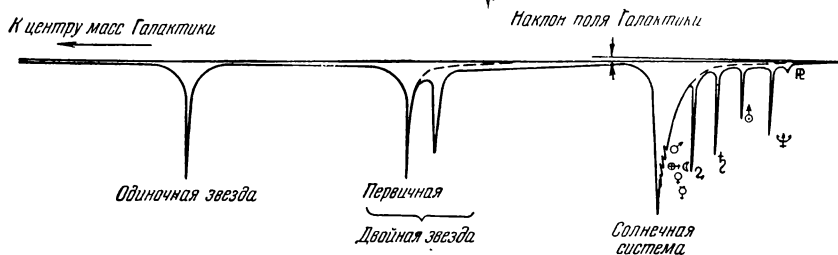


Рис. 4.7. Наложение гравитационных полей.

Термины «выход» и «захват» используются при описании перехода от одного гравитационного поля к другому. Для выхода из гравитационного поля необходима по крайней мере параболическая скорость. В силу закона тяготения Ньютона каждое гравитационное поле теоретически простирается на бесконечное расстояние, поэтому гравитационное поле в любой точке космического пространства представляет собой результат наложения бесконечного количества гравитационных полей. Однако каждое поле обладает конечным количеством энергии. Поэтому тело, обладающее кинетической энергией, по крайней мере эквивалентной энергии поля, при движении в соответствующем направлении может выйти из гравитационного поля. Таким количеством энергии обладает тело, летящее с параболической скоростью.

Явление наложения гравитационных полей иллюстрируется рис. 4.7, на котором изображены гравитационные поля Галактики, звезд, планет и их естественных спутников. Однако и

¹⁾ Термин «селеноцентрический» означает буквально «совмещенный с центром Луны». Однако этот термин здесь используется в более общем случае, как относящийся к любому естественному спутнику, обладающему гравитационным полем.

поле самой Галактики составляет лишь незначительную долю в суммарном поле, образованном множеством галактик, и т. д. Поэтому любая частица материи в космическом пространстве обладает столькими энергетическими уровнями, сколько на нее воздействует гравитационных полей высшего порядка.

Достижение космическим аппаратом параболической скорости по отношению к полю ближайшего тела тяготения не изменяет энергетического уровня аппарата по отношению к полю ближайшего высшего порядка. Для изменения энергии по отношению к обоим полям космическому аппарату необходимо сообщить гиперболическую скорость. На практике «выход» в астронавтическом смысле всегда предполагает наличие гиперболической, а не параболической скорости. Подобным же образом «захват» также происходит при гиперболической скорости космического аппарата.

Полями низшего порядка в астронавтике принято считать поля больших естественных спутников планет солнечной системы, а именно: нашей Луны и потенциально также галилеевых спутников Юпитера и некоторых лун других планет (например, спутника Титан планеты Сатурн). Гораздо большее значение имеют гравитационные поля следующего порядка — поля планет. Меньшее значение, с точки зрения требуемой энергии, имеет более высокое по порядку поле тяготения Солнца при условии, что астронавтические операции ограничиваются полетами к Марсу или Венере.

По сравнению с огромной энергией гравитационного поля Солнца разница в энергии полей Венеры и Марса является сравнительно незначительной. Для космических полетов за пределы солнечной системы гравитационное поле Солнца имеет одинаковое или даже большее значение, чем гравитационное поле Земли. Поле Галактики не оказывает существенного влияния на полет в пределах солнечной системы и даже на межзвездные перелеты при условии, что радиус области полета существенно не превышает размеров Галактики.

а) Выход. Пусть U обозначает скорость покидаемой планеты¹⁾, а V_1 — гелиоцентрическую скорость выхода космического аппарата.

Скорость V_1 достигается в момент, когда сила притяжения планеты оказывается пренебрежимо малой по сравнению с силой притяжения Солнца. С геометрической точки зрения, «планетоцентрическая бесконечность» достигается при совпадении

¹⁾ При необходимости подчеркнуть различие между выходом и захватом, как и прежде, будем использовать индекс «1» для выхода и индекс «2» для захвата.

гиперболической траектории космического аппарата с одной из асимптот гиперболы. Процесс выхода и относящиеся к нему обозначения показаны на рис. 4.8 и 4.9. Разность между вектором $\mathbf{U}$ скорости планеты и вектором $\mathbf{V}_1$ скорости космического

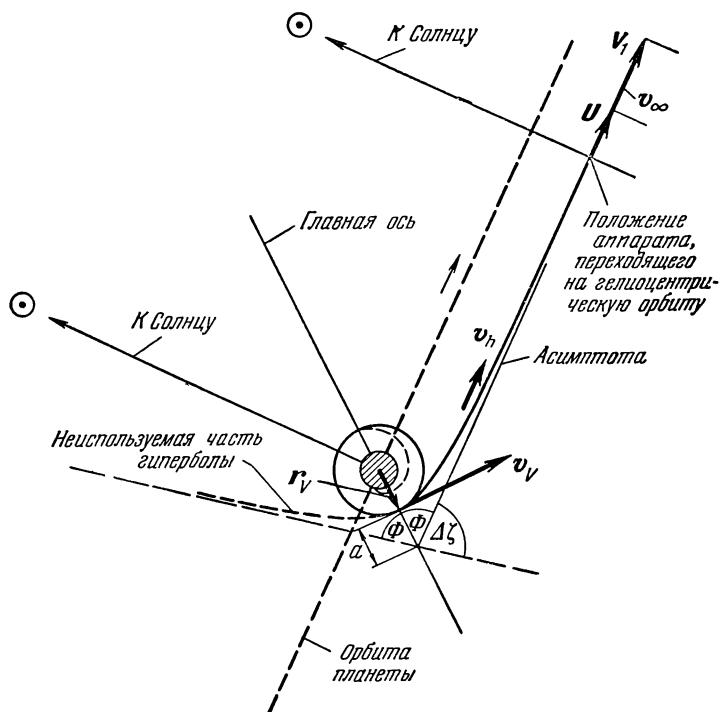


Рис. 4.8. Теоретическая траектория выхода в случае касательного гелиоцентрического маневра.

аппарата определяет гиперболический избыток скорости v_∞ . Квадрат этой скорости численно равен орбитальной энергии, которая для данной гиперболы является постоянной величиной:

$$h = v_\infty^2 = (\Delta V_1)^2, \quad (4.16)$$

где

$$\Delta V_1 = \sqrt{U^2 + V_1^2 - 2UV_1 \cos \beta_1} \quad (4.17)$$

представляет собой величину разности векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}_1$, а β_1 — угол между векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}_1$ (см. § 3.2). В случае кас-

тельного гелиоцентрического выхода имеем следующее хорошо известное соотношение:

$$V_1 - U = v_\infty. \quad (4.18)$$

В случае плоского выхода результирующая гиперболическая

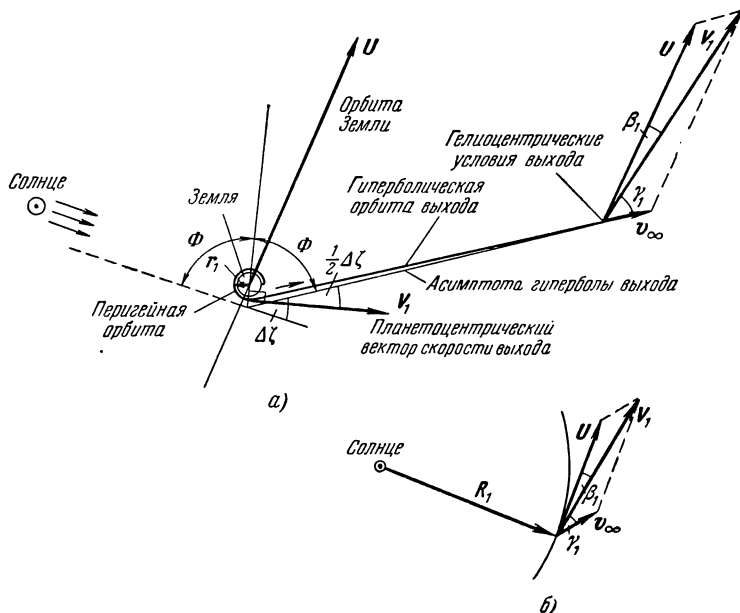


Рис. 4.9. Маневр выхода в случае пересекающей гелиоцентрической орбиты.

а) Планетоцентрическая система координат; б) гелиоцентрическая система координат.

скорость выхода в планетоцентрической системе координат имеет выражение

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K}{r_1} + v_\infty^2}, \quad (4.19)$$

где v_∞ определяется из уравнения (4.18) либо из соотношения

$$v_\infty = \sqrt{U^2 + V_1^2 - 2UV_1 \cos \beta_1}. \quad (4.20)$$

В случае пространственного гелиоцентрического выхода при наклонении орбиты i и угле β

$$v_\infty = \sqrt{U^2 + V_1^2 - 2UV_1 \cos \beta \cos i} = \sqrt{U^2 + V_1^2 - 2UV_1 \cos B_1}. \quad (4.21)$$

Следует указать, что вследствие влияния гравитационного поля Солнца траектория выхода не является точной гиперболой. Влияние Солнца сказывается особенно сильно в том случае, когда выход космического аппарата происходит под некоторым углом к направлению движения планеты, поскольку в этом случае в процессе выхода расстояние между аппаратом и Солнцем изменяется. При этом траектория выхода будет незначительно отличаться от точной гиперболы. Если бы влияние гравитационного поля Солнца не было незначительным, то невозможно было бы получить конечные математические соотношения. А это означало бы значительную потерю в ясности изложения.

В соответствии с уравнением (4.19) изменение скорости, требуемое для гиперболического выхода в случае начальной круговой орбиты, определяется из соотношения

$$\Delta v_1 = v_1 - \sqrt{\frac{K}{r_1}} = \sqrt{\frac{K}{r_1}} \left(\sqrt{2 + \frac{v_\infty^2}{K/r_1}} - 1 \right). \quad (4.22)$$

Угол между вектором скорости и нормалью к гелиоцентрическому радиусу-вектору в момент выхода обозначим через $\theta_{0,1}$, а угол между вектором скорости и касательной к орбите покидаемой планеты — через β_1 (рис. 4.9). Будем предполагать, что углы $\theta_{0,1}$ и β_1 заранее известны, то есть эти углы являются независимыми переменными, определяемыми в зависимости от типа переходного маневра. Угол γ_1 между асимптотой гиперболической орбиты выхода (направлением вектора ΔV_1) и направлением вектора гелиоцентрического выхода (вектора V_1) определяется по выражению

$$\sin \gamma_1 = \frac{U}{\Delta V_1} \sin \theta_{0,1} = \frac{U}{v_\infty} \sin \theta_{0,1} \quad (4.23a)$$

или

$$\sin \gamma_1 = \frac{U}{v_\infty} \sin \beta_1. \quad (4.23b)$$

Эксцентриситет гиперболы определяется выражением

$$e = 1 + \frac{r_P}{K} v_\infty^2, \quad (4.24)$$

где $r_P = r_1$ — расстояние до вершины гиперболы. В данном случае предполагается, что точка выхода r_1 (точка отсечки тяги при выполнении маневра выхода) совпадает с точкой r_P . Уравнение, записанное для случая $r_1 \neq r_P$, будет приведено ниже. Половина угла между асимптотами определяется из соотношения

$$\sec \Phi = e \quad (4.25)$$

либо из соотношения¹⁾

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{v_P v_\infty}{K/r_P} = v_P \frac{v_\infty}{\sqrt{K/r_P}}, \quad (4.26)$$

где v_P — гиперболическая скорость в вершине гиперболы, выраженная через местную круговую скорость $\sqrt{K/r_P}$. Если импульс выхода Δv_1 приложен в перигеуме гиперболы, то вектор скорости v_P должен быть направлен по нормали к линии «Земля — космический аппарат». В этом случае изменение направления полета по отношению к Земле в процессе выхода (то есть изменение планетоцентрического направления полета) определяется из выражения (см. рис. 4.9)

$$\frac{1}{2} \Delta \zeta = 90^\circ - \Phi = 90^\circ - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_P v_\infty}{K/r_P} \right) = \operatorname{arcsin} \frac{1}{e} = \operatorname{arcsin} \left(\frac{1}{v_P^2 - 1} \right), \quad (4.27)$$

где

$$v_P^2 = \frac{v_P^2}{K/r_P}.$$

Если исходная орбита является эллиптической, а не круговой, а выходной импульс приложен не в апоцентре и не в перигеуме, то точка выхода не совпадает с вершиной гиперболы.

Половина угла между асимптотами гиперболы Φ и ее эксцентриситет определяются из выражений

$$\operatorname{tg} \Phi = v_{a,1} \frac{v_\infty}{\sqrt{K/r_1}} = \frac{v_1 \cos \theta_1}{\sqrt{K/r_1}} \frac{v_\infty}{\sqrt{K/r_1}}, \quad (4.28)$$

$$e = v_{a,1}^2 - 1 = \frac{v_1^2 \cos^2 \theta_1}{K/r_1} - 1, \quad (4.29)$$

где $v_{a,1}$ — планетоцентрическая трансверсальная составляющая гиперболической скорости, выраженная через круговую скорость $\sqrt{K/r_1}$ ($v_{a,1} = v_1 \cos \theta_1$, θ_1 — местный планетоцентрический угол).

Дополнительные соотношения, относящиеся к задаче гиперболического выхода, читатель найдет в § 4.3 и § 4.9 первого тома книги «Космический полет».

б) Захват. Маневр захвата является обратным по отношению к маневру выхода. Его геометрия показана на рис. 4.10. Для данной гелиоцентрической скорости подлета V_2 и данного угла $\theta_{0,2}$ (или β_2), полученного из условий гелиоцентрического перехода в случае компланарного подлета, имеем:

$$\Delta V_2 = v_\infty = \sqrt{V_{p1}^2 + V_2^2 - 2U_{p1}V_2 \cos \theta_{0,2}} \quad (4.30a)$$

¹⁾ См. «Космический полет», т. I, стр. 380 и 381. (Прим. перев.)

или

$$\Delta V_2 = v_\infty = \sqrt{U_{pl}^2 + V_2^2 - 2U_{pl}V_2 \cos \beta_2}. \quad (4.30b)$$

Соотношение (4.30a) используется в случае, когда планета-цель движется по круговой орбите, а соотношение (4.30b) — в

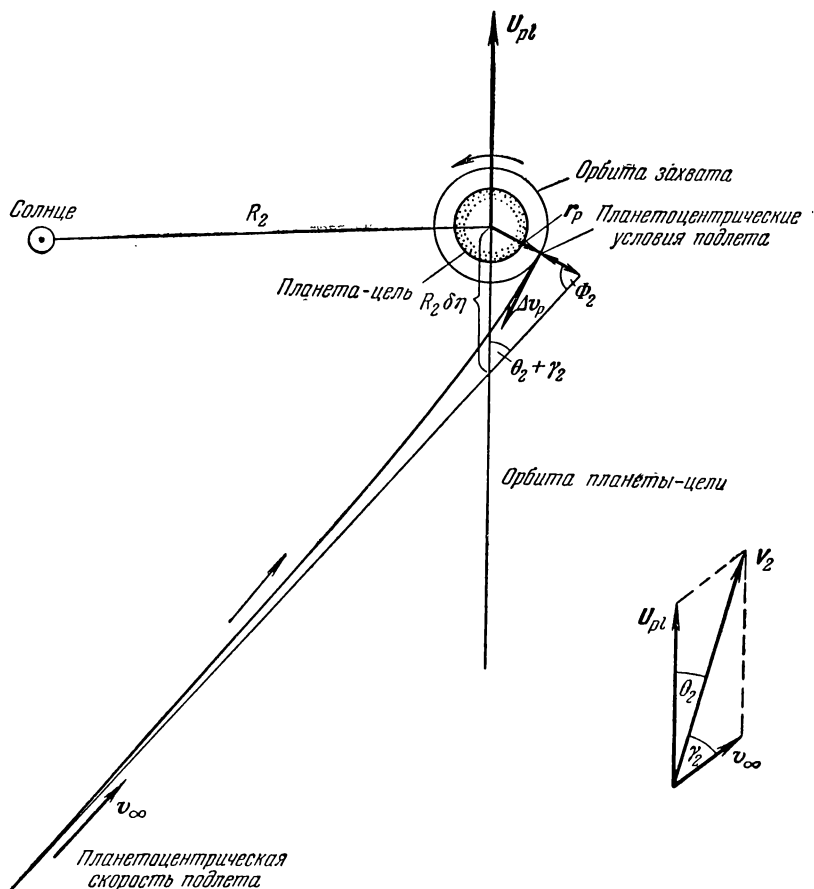


Рис. 4.10. Планетоцентрическая схема гиперболического захвата.

том случае, когда орбита планеты-цели не является круговой; предполагается, что целью захвата является совмещение направления гелиоцентрического движения космического аппарата с направлением движения планеты, а не с направлением, нормальным к радиусу-вектору «Солнце — космический аппарат».

Эти два направления совпадают только в том случае, когда планета движется по круговой орбите; при этом $\theta_{\odot, 2} = \beta_2$. В данном случае имеем:

$$\sin \gamma_2 = \frac{U_{pl} \sin \theta_{\odot, 2}}{v_{\infty}}, \quad (4.31a)$$

$$\sin \gamma_2 = \frac{v_{pl}}{v_{\infty}} \sin \beta_2. \quad (4.31b)$$

Полуось гиперболы захвата находится из выражения

$$|a| = \frac{K_{pl}}{v_{\infty}^2}. \quad (4.32)$$

Используя в качестве независимой переменной расстояние до перицентра r_P , получаем:

$$v_P = \sqrt{\frac{2K_{pl}}{r_P} + v_{\infty}^2}. \quad (4.33)$$

Половина угла между асимптотами гиперболы Φ и ее эксцентриситет e находятся из выражений:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{v_P v_{\infty}}{K/r_P}, \quad (4.34)$$

$$e = \sec \Phi. \quad (4.35)$$

Для получения желаемого планетоцентрического расстояния r_P до перицентра необходимо, чтобы планетоцентрическая асимптота гиперболической траектории космического аппарата пересекала орбиту планеты на расстоянии $R_2 \delta \eta$ от центра планеты (рис. 4.11), где (см. рис. 4.10)

$$R_2 \delta \eta = \frac{r_P + a}{\sin(\theta_{\odot, 2} + \gamma_2)} \sin \Phi = \frac{r_P + a}{\sin(\theta_{\odot, 2} + \gamma_2)} \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \quad (4.36a)$$

или, поскольку

$$e = \frac{r_P + a}{a}, \quad (4.37)$$

$$R_2 \delta \eta = \frac{a}{\sin(\theta_{\odot, 2} + \gamma_2)} \sqrt{e^2 - 1}. \quad (4.36b)$$

Чтобы получить выражение для r_P в функции $R_2 \delta \eta$, необходимо использовать выражение для эксцентриситета

$$e = 1 + \frac{r_P}{K_{pl}} v_{\infty}^2 \quad (4.38)$$

или

$$r_P = \frac{K_{pl}(e - 1)}{v_{\infty}^2}, \quad (4.39)$$

где величина e определяется из уравнения (4.36b) с учетом соотношения (4.32):

$$e = \sqrt{1 + \left[\frac{R_2 \delta\eta \sin(\theta_{\odot, 2} + \gamma_2)}{K_{pl}/v_\infty^2} \right]^2}. \quad (4.40)$$

В результате для космического аппарата, приближающегося к планете-цели таким образом, что планетоцентрическая асимптота его траектории проходит на расстоянии $R_2\delta\eta$ от центра

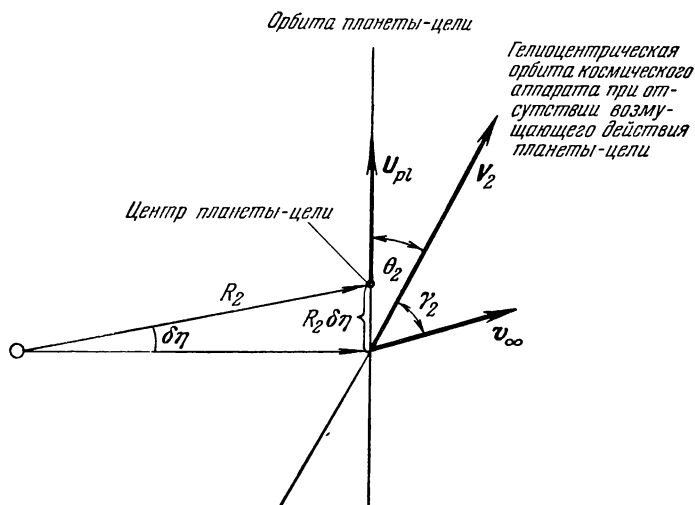


Рис. 4.11. Геометрическая схема гелиоцентрических параметров движения при подлете [v_∞ — скорость космического аппарата по отношению к точке (с нулевой массой), совпадающей с центром планеты-цели и движущейся со скоростью U_{pl}].

планеты-цели, расстояние r_P до перицентра будет выражаться через параметры v_∞ , $\theta_{\odot, 2}$, γ_2 и $R_2\delta\eta$ следующим образом¹⁾:

$$r_P = \frac{K_{pl} \left\{ \sqrt{1 + \left[\frac{R_2 \delta\eta \sin(\theta_{\odot, 2} + \gamma_2)}{K_{pl}/v_\infty^2} \right]^2} - 1 \right\}}{v_\infty^2}. \quad (4.41)$$

¹⁾ К. А. Ehricke, Interplanetary Mission Profiles, Convair (Astronautics) Report AZM-023, April 30, 1958.

Это уравнение имеет большое значение для анализа задач навигации при выполнении маневров захвата.

Энергетические требования к маневру захвата определяются соотношением

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{2K_{pl}}{r_p} + v_\infty^2} - v'_p, \quad (4.42)$$

где v'_p — скорость в перигентре замкнутой планетоцентрической орбиты захвата (эллипса или круговой орбиты, причем в последнем случае величина v'_p эквивалентна величине $\sqrt{K_{pl}/r_p}$). Обозначение v'_p использовано здесь с той целью, чтобы показать, что орбита захвата не обязательно должна быть круговой, а может быть и эллипсом, что позволяет получить энергетический выигрыш. В последнем случае имеем:

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{2K_{pl}}{r_p} - v_\infty^2} - \sqrt{\frac{K_{pl}}{r_p}} \sqrt{\frac{2n}{1+n}}, \quad (4.43a)$$

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{K_{pl}}{r_p}} \left[\sqrt{2 - \frac{v_\infty^2}{K_{pl}/r_p}} - \sqrt{\frac{2n}{1+n}} \right], \quad (4.43b)$$

и в случае круговой орбиты величина Δv_p принимает максимальное значение, так как $\sqrt{\frac{2n}{1+n}} = 1$ ($n = r_A/r_p$).

4.4. Маневры выхода и захвата

В § 4.2 указывалось, что при наличии импульса тяги гиперболический выход может быть осуществлен тремя способами: «круг — гипербола» (круговой одноимпульсный метод); «круг — эллипс — гипербола» (двухимпульсный метод); «эллипс — гипербола» (эллиптический одноимпульсный метод).

Ниже будет показано, что первый метод имеет строго определенный энергетический минимум. Второй метод практически не имеет заметного энергетического минимума. Требуемое количество энергии, необходимое для осуществления маневра выхода в соответствии со вторым методом, увеличивается, если энергия

гелиоцентрического ¹⁾ перехода меньше параболической энергии выхода космического аппарата из поля тяготения планеты. С другой стороны, двухимпульсный метод требует меньших затрат энергии, чем круговой одноимпульсный метод, если энергия гелиоцентрического перехода $[(\Delta V)^2 \equiv v_\infty^2]$ больше энергии планетоцентрического параболического выхода (то есть больше $2K/r$, если расстояние до центра планеты равно r). Другими словами, поскольку энергия выхода пропорциональна величине $v_1^2 = (2K/r) + (\Delta V)^2$, то *круговой одноимпульсный метод является более выгодным в случае, если $(2K/r) = (\Delta V)^2$. Двухимпульсный метод является более выгодным с энергетической точки зрения, если $(2K/r) < (\Delta V)^2$* . В случае, когда $(2K/r) = (\Delta V)^2$, оба метода являются с энергетической точки зрения эквивалентными.

Поскольку в приведенных выше соотношениях присутствует величина r , определяющая расстояние от центра планеты до космического аппарата, то, как будет показано ниже, преимущество того или иного метода следует определять с учетом величины r . Эллиптический одноимпульсный метод во всех случаях требует меньших затрат энергии, чем рассмотренные выше два метода, при условии, что планетоцентрическая энергия *эллипса выхода* (или *эллипса захвата*) больше энергии *выхода* (*захвата*) круговой орбиты ²⁾, поскольку энергия, требуемая для выхода (захвата) равна разности энергии гиперболической орбиты (высокая энергия) и орбиты выхода (низкая энергия).

а) Круговой одноимпульсный метод. Одноимпульсный маневр обсуждался в § 4.2 и был проиллюстрирован рис. 4.2. Основываясь на этом материале, можно без дальнейших пояснений провести анализ процесса выхода. Будем обозначать, как и раньше, скорости и расстояния относительно Солнца заглавными буквами, а соответствующие величины относительно планеты малыми буквами, используя индексы «с» и «р» для обозначения соответственно круговой и параболической орбит, индексы «А» и «Р» для обозначения расстояний до апоцентра и перицентра и символы $K_\odot$ и K для обозначения гравитационных параметров Солнца и планеты. В дальнейшем мы рассмотрим переход с орбиты, расположенной ближе к Солнцу, на более удаленную

¹⁾ То есть разность потенциальных энергий по отношению к Солнцу начальной гелиоцентрической орбиты и переходной орбиты, или, другими словами, гиперболический избыток скорости. Скоростной эквивалент разности потенциальных энергий в момент выхода равен ΔV . Вектор ΔV , по определению, идентичен планетоцентрическому избытку скорости v_∞ , направление которого не задается, то есть v_∞ не является вектором, а лишь определяет меру энергии.

²⁾ Орбитой выхода называется орбита спутника, с которой космический аппарат стартует в космическое пространство.

от Солнца орбиту. Однако анализ такого перехода можно строить также и на изучении обратного переходного движения.

Скорость гелиоцентрического выхода из точки афелия в случае касательного гелиоцентрического выхода определяется выражением

$$\Delta V = V_P - (V_c)_P = \sqrt{\frac{K_\odot}{R_P}} \left[\sqrt{\frac{2R_A}{R_P + R_A}} - 1 \right]. \quad (4.44)$$

Скорость гиперболического планетоцентрического выхода в случае круговой орбиты радиуса r равна:

$$v_1 = v_h = \sqrt{\frac{2K}{r} + (\Delta V)^2}. \quad (4.45)$$

Двигательная установка космического аппарата должна создать импульс

$$\Delta v_1 = v_1 - \sqrt{\frac{K}{r_1}} = \left[\frac{2K}{r_1} + \frac{K_\odot}{R_P} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_P + R_A}} - 1 \right)^2 \right]^{1/2} - \sqrt{\frac{K}{r_1}}, \quad (4.46)$$

поскольку, находясь на круговой орбите, тело уже обладает скоростью $\sqrt{K/r}$.

Энергия, которая должна быть сообщена телу, превышает суммарную энергию гравитационных полей планеты

$$\int_r^\infty E dr = \Delta E_{pl} \quad (4.47)$$

и Солнца

$$\int_{R_P}^{R_A} E dR = \Delta E_\odot. \quad (4.48)$$

Для данного значения $\Delta E_\odot$, то есть для заданных расстояний до перигелия и афелия, изменяется лишь величина ΔE_{pl} при изменении r . Весьма важно определить значение r , для которого функция

$$\frac{\Delta E_{pl}}{\Delta E_{pl} + \Delta E_\odot} = f(r) \quad (4.49)$$

принимает минимальное значение, поскольку при этом значении r энергия перехода от r к R_A обращается в минимум. Энергия перехода от r к R_P является энергией параболического выхода из гравитационного поля планеты. Всевозможные варианты гиперболических выходов требуют большего расхода энергии.

Но имеется по крайней мере один тип гиперболического выхода, для которого энергия выхода обращается в минимум. *Следует подчеркнуть, что рассматриваемый метод определения минимума энергии относится только к случаю импульсного маневра и не может быть распространен на переходные маневры, совершаемые под воздействием малой непрерывной тяги.*

Для определения искомого расстояния r из уравнения (4.46) найдем частную производную от Δv по r :

$$\frac{\partial(\Delta v)}{\partial r} = -\frac{K}{2r^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\frac{2K}{r} + \frac{K_{\odot}}{R_p} \left[\frac{2R_A}{R_p + R_A} - 1 \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{r}}} \right). \quad (4.50)$$

Приравняв правую часть нулю, найдем следующие два решения:

$$\frac{K}{2r^2} = 0, \quad \text{то есть} \quad r_A = \infty, \quad (4.51)$$

и

$$r = \bar{r} = \frac{2K}{\frac{K_{\odot}}{R_p} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_p + R_A} - 1} \right)^2}. \quad (4.52)$$

Рассмотрим решение (4.52). Это решение получено из условия равенства энергии выхода из поля тяготения планеты разности потенциальных энергий тела в перигелии и афелии. Действительно, уравнение (4.52) можно записать в виде

$$\frac{K_{\odot}}{R_p} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_p + R_A} - 1} \right)^2 = \frac{\Delta E_{\text{пл}}}{\Delta E_{\odot}} = 1, \quad (4.53)$$

поэтому функция $f(r)$ в уравнении (4.49) становится равной 0,5. В этом случае энергия выхода становится пропорциональной скорости

$$\bar{v}_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2K}{\bar{r}}} = \sqrt{2} (v_p)_{\bar{r}} = 2 \sqrt{\frac{K}{\bar{r}}} = 2 (v_c)_{\bar{r}} = \sqrt{2} v_{\infty}, \quad (4.54)$$

а величина импульса определяется выражением

$$\Delta \bar{v}_1 = \sqrt{\frac{K}{\bar{r}}} = \frac{v_{\infty}}{\sqrt{2}} = 0,7071 v_{\infty}. \quad (4.55)$$

Обращает на себя внимание сходство выражения $\bar{v}_1 = \sqrt{2} v_p$ с выражением для параболической скорости $v_p = \sqrt{2} v_c$. Этот факт означает, что чем больше разность в потенциальных энергиях точек гравитационного поля Солнца, тем большее значение

должна иметь скорость v_p , то есть тем ближе к планете должна располагаться орбита выхода.

На рис. 4.12 изображен график изменения величины $\bar{r}$ в функции гелиоцентрического расстояния до точки апсид планеты-цели (случай выхода из поля тяготения Земли). Как

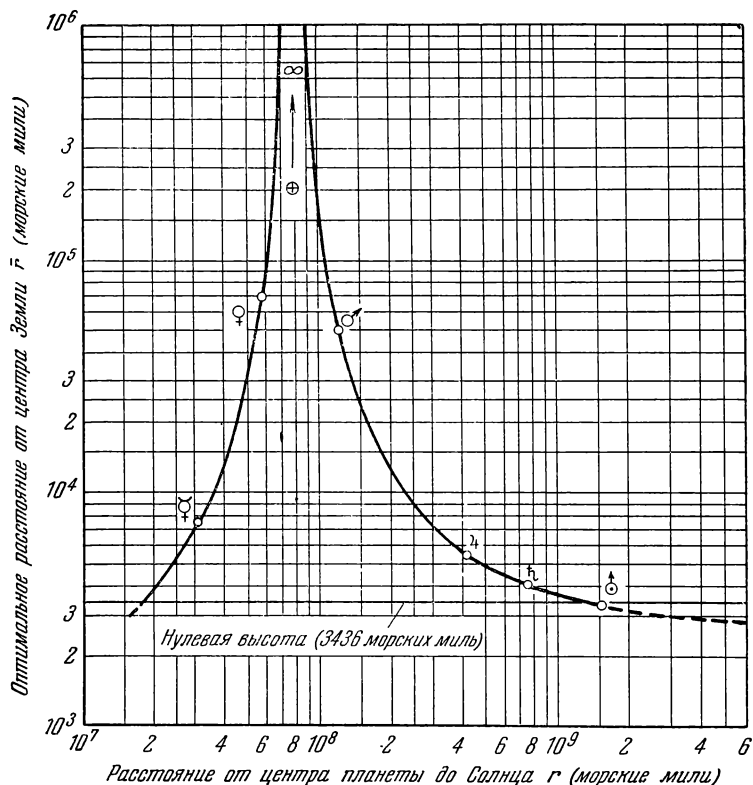


Рис. 4.12. Зависимость оптимального расстояния при выходе или захвате для одноимпульсного маневра «круг — гипербола» от гелиоцентрического расстояния до апоцентра гелиоцентрической переходной орбиты в случае касательного старта с околоземной орбиты.

видно из рисунка, значение $\bar{r}$ для полета к Венере равно примерно 128 000 км (69 000 морских миль), а для полета на Марс — 92 000 км (49 500 морских миль). С увеличением гелиоцентрического расстояния величина $\bar{r}$ уменьшается, так что при некотором значении r теоретическое значение этой величины оказывается меньшим радиуса земной поверхности (это

Приведенные результаты справедливы как для маневра выхода, так и для маневра захвата. Однако в случае Земли эти результаты применимы лишь для расчета маневра захвата, поскольку при маневре выхода необходимо учитывать особенности движения от земной поверхности. На рис. 4.14 приведены графики, показывающие влияние энергетических возможностей

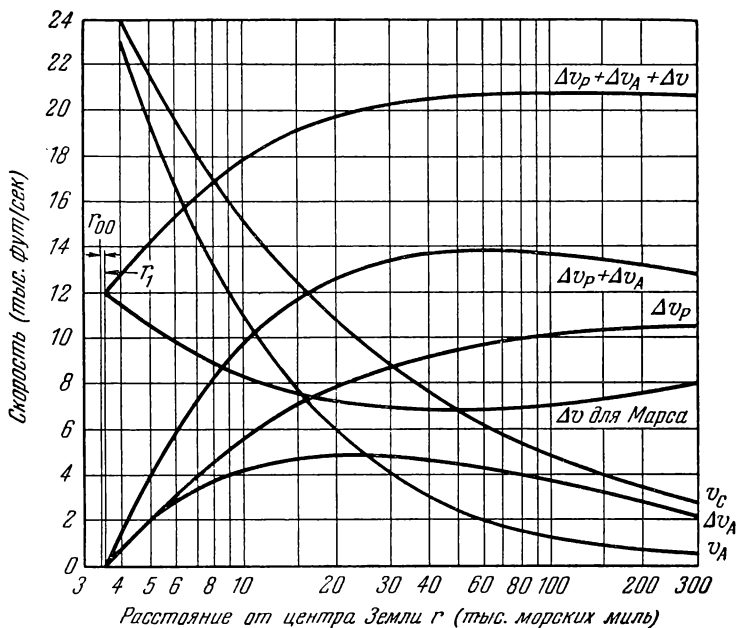


Рис. 4.14. Влияние энергетических возможностей космического аппарата на выбор орбиты полета к Марсу.

космического аппарата на выбор орбиты старта к Марсу (соответствующие обозначения пояснены на рис. 4.15). Характерными величинами для оценки расхода энергии при выходе являются импульс в перигее Δv_p и импульс в апогее Δv_A . Сумма Δv_p , Δv_A и Δv для Марса изображается верхней кривой, которая показывает, что экономия в энергии выхода не может компенсировать увеличения энергии, связанного с увеличением расстояния от центра планеты до космического аппарата. Таким образом, в случае старта космического аппарата с Земли или любой другой планеты величина $\bar{r}$ не является оптимальным расстоянием. В этих случаях орбита выхода должна лежать ближе к поверхности планеты, насколько это допускают условия старта

Если $n=1$, то имеем случай одноимпульсного маневра. Хотя при этом для кругового одноимпульсного маневра и имеет место энергетический оптимум, для двухимпульсного маневра это условие не является экстремальным. Для двухимпульсного маневра энергетическому минимуму, очевидно, соответствует решение $r_A = \infty$, поскольку правые части уравнений (4.12) и (4.14) в этом случае обращаются в нуль. Это решение аналогично решению (4.51).

Из уравнений (4.12) и (4.14) следует:

$$\frac{\sigma_{PA}}{\sigma_{AP}} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2(1+\psi_p^2)} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{2(1+n)}{n}}}{\sqrt{2(1+n\psi_p^2)} + (n-1)\sqrt{\frac{2}{1+n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}}. \quad (4.56)$$

Легко показать, что записанное отношение всегда меньше единицы. Это означает, что всегда энергетически выгоднее начинать переходное движение с круговой орбиты к гиперболе в перигеентре переходного эллипса (рис. 4.4).

Т а б л и ц а 4.1

Планетоцентрические расстояния и высоты, при которых одно- и двухимпульсные маневры захвата и выхода, использующие круговые орбиты спутника, являются эквивалентными

[рассматриваются случаи выхода (захвата) из поля притяжения Земли по гелиоцентрическому переходному гомановскому эллипсу]

Планеты	$\bar{r}/r_{\infty}$	$\bar{r} = \frac{2K}{v_{\infty, pl}^2}$, морские мили	$y = \bar{r} - r_{\infty}$, морские мили
Меркурий	0,154	208	-1 184
Венера	14,39	48 100	44 700
Марс	3,968	7 050	5 260
Юпитер	113,3	4 265 000	4 425 000
Сатурн	42,8	1 291 000	1 260 000
Уран	20,19	280 000	268 000
Нептун	32,1	433 000	418 000
Плутон	≈ 1	$\approx 3 000$	≈ 0

Если расстояние r орбиты спутника меньше $\bar{r}$, то космический аппарат должен осуществить маневр выхода или захвата одноимпульсным методом. Если, однако, имеет место соотношение $r > \bar{r}$, то следует использовать двухимпульсный метод. В таблице 4.1 приведены значения расстояний $r = \bar{r}$ от

космического аппарата до центра планеты и высот $\bar{y} = \bar{r} - r_{00}$ космического аппарата над поверхностью планеты, при которых одно- и двухимпульсные маневры являются энергетически эквивалентными. В таблице рассмотрены случаи выхода (захвата) из поля притяжения Земли с использованием касательного перехода (гомановские эллипсы).

Предположим, что космический аппарат движется по удаленной круговой орбите вокруг планеты-цели. Тогда в случае использования двухимпульсного маневра выхода космический аппарат должен перейти на такой эллипс, перицентр которого расположен как можно ближе к планете. В перицентре эллипса второй импульс должен вывести космический аппарат на гиперболу выхода. С другой стороны, если космический корабль должен попасть на удаленную орбиту при $r > \bar{r}$, то необходимо приблизить, насколько возможно, вершину гиперболы подхода к поверхности планеты-цели, осуществить переход на эллипс, двигаясь по которому космический аппарат снова достигнет удаления r , и затем осуществить маневр перехода на орбиту, близкую к круговой.

На рис. 4.16 дается сравнение величины скоростей, необходимых для осуществления маневров выхода или захвата космического корабля с Марса вблизи Земли. Рассмотрены два случая: в первом случае орбита космического аппарата почти касается верхних слоев атмосферы [$r_P = 6438$ км (3474 морских миль), $r_{00} = 6371$ км (3440 морских миль)], а во втором случае производится более осторожный подлет к планете [$r_P = 8047$ км (4342 морских миль)]. Сравнение этих случаев показывает, что обе кривые пересекаются в точке, удаленной на расстояние $\bar{r}$ и являющейся точкой минимума для одноимпульсного маневра. Поскольку пересечение этих кривых происходит под малым углом, то для большого диапазона расстояний до перигея разница в скоростях является незначительной. В конечном счете кривая скоростей, соответствующая малым значениям r , достигает меньших значений. Рис. 4.16 показывает, что если возвращающийся с Марса космический аппарат, находясь на удалении r_P , должен попасть на лунную орбиту, то маневр захвата потребует изменения скорости, равного 1370 м/сек (4500 фут/сек), в то время как одно- или двухимпульсные маневры при конечном расстоянии $\bar{r}$ требуют изменения скорости, равного 2130 м/сек (7000 фут/сек). Подобным же образом и старт с поверхности планеты является в этом случае более экономичным, поскольку величина $\Delta v_P + \Delta v_A$ для достижения расстояния 371 000 км (200 000 морских миль) равна 4000 м/сек (13 000 фут/сек) по сравнению с величиной скорости 4300 м/сек (13 800 фут/сек), требуемой для достижения расстояния 92 700 км (50 000 морских миль).

Такой маневр кажется в высшей степени практичным, однако для его осуществления требуется значительное время (дни, а не часы) и, кроме того, оказываются весьма высокими требования к точности маневра не только в отношении расстояния r_P , но также и с точки зрения встречи с космическим аппаратом на лунной орбите.

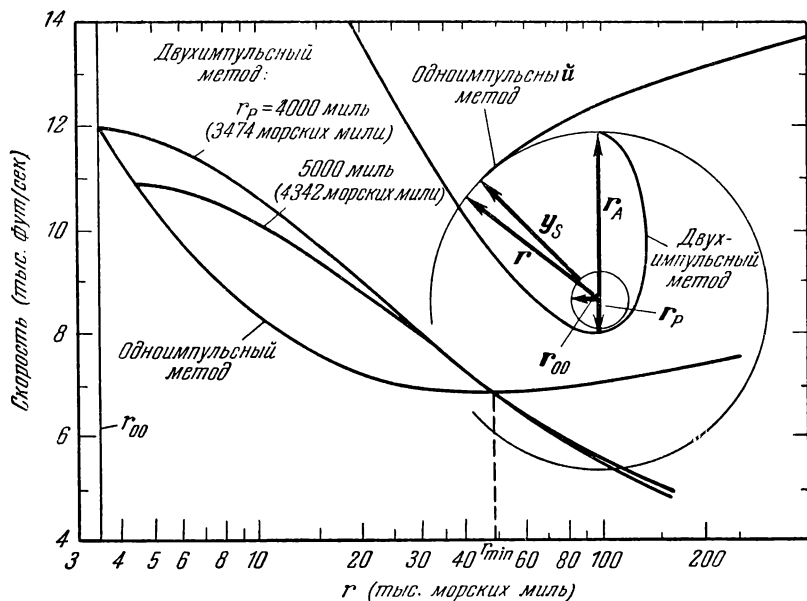


Рис. 4.16. Влияние орбитального расстояния на тип маневра при выходе или захвате вблизи Земли космического аппарата, стартующего к Марсу или возвращающегося с Марса.

Преимущество описанного маневра особенно существенно в том случае, когда используется химическое ракетное топливо. Значительное увеличение удельного импульса двигателя (до 600 сек или больше) повысило бы его экономичность и подтвердило бы то положение, что при наличии достаточно мощного ракетного двигателя можно использовать менее сложный и более практичный подход к выбору траекторий космических полетов.

При захвате космических аппаратов, возвращающихся с Марса или Венеры, для экономичности двухимпульсного метода необходимо, чтобы захват происходил на расстоянии более чем 92 700 км (50 000 морских миль) и 130 000 км (70 000 морских

милль) соответственно. Однако если используются переходные эллипсы, афелии которых удалены на большее расстояние от орбиты Земли, то величина $\bar{r}$ уменьшается и двухимпульсный метод становится более практичным. Это положение является справедливым также в случае касательных переходов по направлению к Меркурию или Юпитеру. Однако полеты к этим планетам при использовании ракетных двигателей на химическом топливе являются практически неосуществимыми.

Из таблицы 4.1 видно, что если не рассматривать Меркурий и Плутон, то наибольший интерес представляет область захвата, для которой $r \leq \bar{r}$. Спутники Марса лежат вне этой области. С точки зрения научных наблюдений и других практических целей, более желательным является облет на меньших высотах. Это положение справедливо также и для Венеры. Одноимпульсный метод применим и для полета к спутникам Юпитера, а также к спутнику Сатурна — Титану.

в) Эллиптический одноимпульсный метод. Ранее предполагалось, что конечная орбита или орбита выхода является круговой. В действительности же, как указывалось выше, экономичность выхода или захвата повышается при использовании эллиптических орбит, орбитальная энергия которых выше, чем у рассматриваемой круговой орбиты. Это положение является очевидным, поскольку в этом случае необходимо осуществить только переход «гипсрбола --- эллипс». Анализ этого движения приведен в § 4.2. Рассматриваемый тип маневра является выгодным с практической точки зрения и с точки зрения требований к точности, которые являются невысокими, за исключением того случая, когда переход осуществляется на эллиптическую орбиту специального вида. Например, если выход на эллиптическую орбиту захвата осуществляется с целью последующего возвращения на Землю, то энергетические требования к двигателю ракеты, стартующей на эту орбиту, снижаются, поскольку для достижения орбиты космическому аппарату необходимо получить приращение скорости Δv_P , а не Δv_A . И все же более существенным являются эллиптические орбиты захвата, располагающиеся вблизи планеты-цели. Их использование не только повышает экономичность захвата космического аппарата планетой-целью и последующего маневра выхода, но также уменьшает начальный вес топлива, подлежащего выведению из сферы земного притяжения, что приводит к дополнительной экономии энергии. Для многих исследовательских целей движение по эллиптической орбите является приемлемым, если расстояние до перигея достаточно мало. Весьма вероятно, что первые облеты планет будут осуществлены по эллиптическим орбитам, если удастся удовлетворить требованиям точности.

Условия для определения изменений скорости даны в § 4.2, а именно: уравнение (4.5) для маневра в апоцентре и уравнение (4.8) для маневра в перицентре. Отношение этих скоростей равно:

$$\frac{\Delta v_P}{\Delta v_A} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{1 + \psi_P^2} - \sqrt{\frac{n}{1+n}}}{\sqrt{1 + n\psi_P^2} - \sqrt{\frac{2}{1+n}}} \quad (4.57)$$

Легко показать, что это отношение всегда меньше единицы. Этот факт свидетельствует о том, что более экономичным является маневр в перицентре.

Например, если $n = 4$, $\psi_P^2 = 1,25$, то

$$\frac{\Delta v_P}{\Delta v_A} = 2 \frac{\sqrt{2,25} - \sqrt{0,8}}{\sqrt{6} - \sqrt{0,4}} \approx 0,65.$$

Для больших значений n преимущество маневра в перицентре становится более значительным, в то время как увеличение ψ_P (то есть v_∞) уменьшает различие в эффективности маневров первого и второго типов.

4.5. Гиперболическая встреча

Космический аппарат, выходящий из поля тяготения Земли, может пройти вблизи Луны. В этом случае аппарат входит в ее гравитационное поле, а затем выходит из него по гиперболической орбите (относительно Луны).

Подобное движение относительно произвольного тела космического пространства будем в дальнейшем называть *гиперболической встречей*. Такая встреча может существенно изменить не только направление полета, но также эксцентриситет и энергию орбиты космического аппарата. Эти вопросы обсуждались в главе 3 (см. «Космический полет», т. I) при рассмотрении вопроса о влиянии гравитационного поля Юпитера на орбиты астероидов (см. там же рис. 3.35 и 3.36).

В общем случае действие возмущающего гравитационного поля может привести к увеличению или уменьшению орбитальной энергии и изменению эксцентриситета орбиты космического аппарата в зависимости от условий выхода в гравитационное поле. При правильном выборе этих условий возмущающая сила может быть использована либо для увеличения орбитальной энергии стартующего космического аппарата, либо для ее уменьшения при возвращении аппарата.

Этот метод гравитационной навигации безусловно не нарушает закона сохранения энергии, поскольку орбита возмущающего тела также претерпевает изменения. При этом, очевидно, изменения орбитальной энергии и элементов орбиты пропорциональны участвующим во взаимодействии массам. Таким образом, орбита Луны или планеты не может подвергнуться существенным возмущениям, связанным с пролетом космического аппарата. Если после такой встречи орбитальная энергия и эксцентриситет орбиты аппарата увеличатся, то в случае полета по орбите, близкой к параболической, новая орбита по отношению к главному центру тяготения окажется гиперболой.

Нетрудно определить мгновенное изменение орбитальной энергии при встрече. Орбитальная энергия космического аппарата по отношению к центральному телу M определяется выражением

$$h = v^2 - \frac{2K_M}{r} = -\frac{K_M}{a}, \quad (4.58)$$

где v и r — соответственно скорость и расстояние относительно центрального тела, K_M — гравитационный параметр центрального тела, а величина a равна большой полуоси орбиты. Дифференцируя это

выражение по времени, получаем:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{K_M}{a^2} \frac{da}{dt}. \quad (4.59)$$

Записав уравнение (4.58) в виде $v^2 = K(2/r - 1/a)$ и продифференцировав по времени, получим:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{K_M} v \frac{dv}{dt}. \quad (4.60)$$

Подставив сюда (см. рис. 4.17)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K_m}{r^2} \cos \vartheta, \quad (4.61)$$

где r и K_m — соответственно расстояние и гравитационный параметр возмущающего тела m , из уравнений (4.61), (4.60), (4.59) и (4.58) окончательно получим:

$$\frac{dh}{dt} = 2 \frac{K_m}{r^2} v \cos \vartheta. \quad (4.62)$$

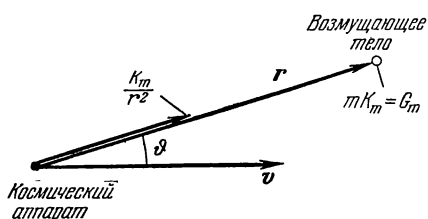


Рис. 4.17. Изменение энергии при гиперболической встрече.

Составляющая $(K_m/r^2)\sin\vartheta$ направлена по нормали к направлению движения и поэтому не изменяет орбитальную энергию.

Изменение орбитальной энергии, согласно уравнению (4.62), может быть положительным или отрицательным, то есть энергия может возрастать или уменьшаться в зависимости от направления действия возмущающей силы относительно направления движения космического аппарата. Изменение орбитальной энергии не зависит от величины K_M или a , а зависит только от параметра K_m возмущающего тела и от расстояния до него. Если $\vartheta=90^\circ$, то изменение орбитальной энергии равно нулю. Угол ϑ отсчитывается от радиуса-вектора r по направлению к вектору скорости v . Значение $\cos\vartheta$ следует считать отрицательным, если возмущающая сила K_m/r^2 вызывает обратное вращение главной оси орбиты (то есть вращение, обратное направлению вращения радиуса-вектора тела).

Чтобы определить направление изменения эксцентриситета, следует учесть как касательную составляющую возмущающей силы $(K_m/r^2)\cos\vartheta$, так и ее нормальную составляющую $(K_m/r^2)\sin\vartheta$. Можно показать, что

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_v = \frac{2(e + \cos\eta)}{v} \frac{K_m}{r^2} \cos\vartheta, \quad (4.63)$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{v_n} = \frac{r}{a} \frac{\sin\eta}{v} \frac{K_m}{r^2} \sin\vartheta, \quad (4.64)$$

где $(de/dt)_v$ и $(de/dt)_{v_n}$ — скорости изменения величины e , обусловленные влиянием соответственно касательной и нормальной составляющих возмущающей силы. За положительное направление нормальной составляющей принимается направление в сторону большой оси орбиты. Таким образом, из уравнения (4.64) следует, что эксцентриситет будет уменьшаться в том случае, если нормальная составляющая $(K_m/r^2)\sin\vartheta$ направлена во внутреннюю область орбиты. Отсюда вытекает, что можно увеличивать орбитальную энергию, уменьшая эксцентриситет. Это обстоятельство будет пояснено рассматриваемым ниже примером расчета гиперболической встречи с Марсом.

Термин «гиперболическая встреча» предполагает, что влияние гравитационного поля Солнца не учитывается, в связи с чем траектория космического аппарата в этот период в течение кратковременного прохождения вблизи возмущающего тела действительно считается точной гиперболой. Последующее изложение посвящено рассмотрению случая встречи космического аппарата с Луной.

Пусть M — центральное тело, m — возмущающее тело, v — скорость космического аппарата относительно тела M

вождаемая уменьшением скорости, иллюстрируется рис. 4.19. Тело m движется со скоростью u по орбите, пересекающей под углом β_1 орбиту космического аппарата, движущегося со

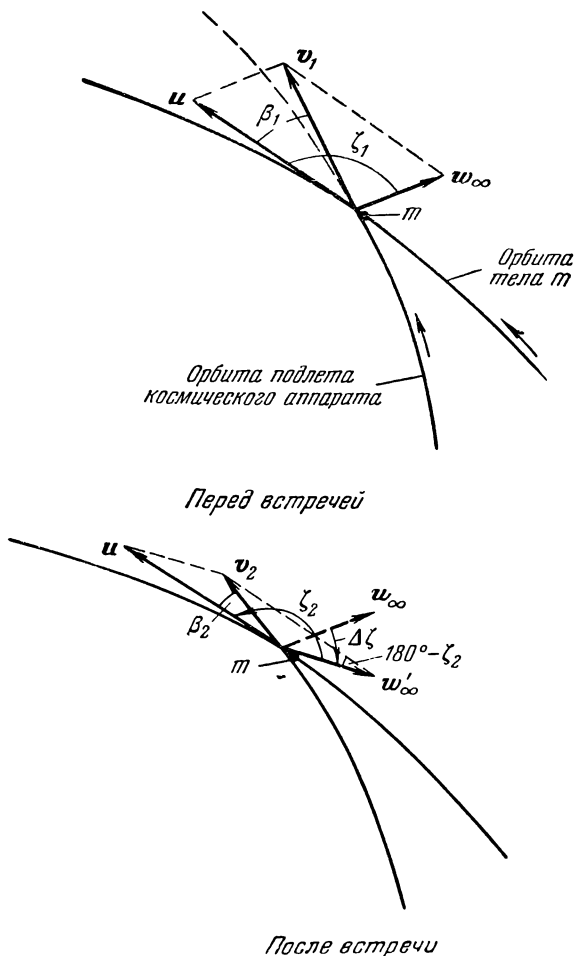
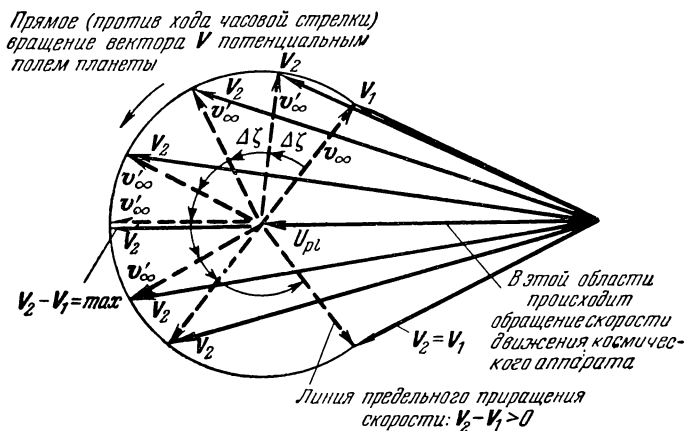


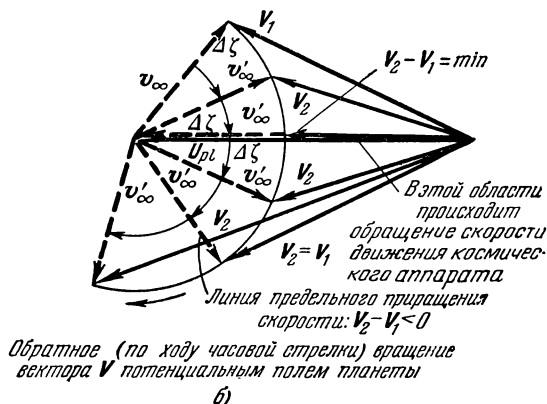
Рис. 4.19. Геометрическая схема встречи, сопровождаемой уменьшением скорости космического аппарата [обратная (ретроградная) встреча].

скоростью v_1 . Скорость w_∞ аппарата относительно тела m в точке пересечения выражается через значения u , v_1 и β_1 . Обозначим через ζ угол между векторами w_∞ и u . После встречи вектор скорости w_∞ , сохранив модуль, повернется на угол $\Delta\zeta$ в сторону w'_∞ ,

в то время как скорость u останется практически неизменной. Новая скорость v_2 может быть определена (графическим построением или расчетом) по значениям скоростей u , $\omega'_\infty = \omega_\infty$



а)



б)

Рис. 4.20. Обобщенная схема гиперболической встречи.

а) Прямая гиперболическая встреча; б) обратная гиперболическая встреча.

и угла ($180^\circ - \xi_2$). Далее можно определить угол пересечения орбит β_2 .

На рис. 4.20 показаны оба типа гиперболической встречи космического аппарата с планетой. На рис. 4.18 изображена

траектория встречи аппарата в системе координат, связанной с телом M . Если же тело m берется за начало координат, то точка m становится стационарной. Однако скорости w_∞ и w'_∞ при этом совпадают по направлению с асимптотами гиперболы и, следовательно, определяют изменение направления движения космического аппарата, обусловленное гиперболической встречей. Стационарная гипербола и соответствующие обозначения показаны на рис. 4.21.

Основные характеристики

движения могут быть определены следующим образом.

Относительная скорость перед встречей определяется выражением

$$w_\infty^2 = u^2 + v_1^2 - 2uv_1 \cos \beta_1. \quad (4.65)$$

Величина главной [действительной] гиперболы равна:

$$a = \frac{K_m}{h} = \frac{K_m}{w_\infty^2} = \frac{K_m}{(w'_\infty)^2}, \quad (4.66)$$

поскольку орбитальная энергия при движении по гиперболе $h = (2K_m/r + w_\infty^2) - 2K_m/r$, где член в скобках определяет величину квадрата скорости выхода из поля тела m по гиперболической орбите, одна из асимптот которой пересекает орбиту тела m под углом β_1 . Таким образом, w_∞ является гиперболическим избытком скорости, и поскольку для параболы $h=0$, то величина w_∞^2 пропорциональна энергии тела, летящего по гиперболической орбите. Эксцентриситет гиперболы встречи определяется из выражения

$$e = 1 + \frac{r_p}{a} = \sec \Phi = \sec \frac{180^\circ - \Delta \zeta}{2} = \operatorname{cosec} \frac{\Delta \zeta}{2}, \quad (4.67)$$

откуда видно, что эксцентриситет гиперболической орбиты пропорционален углу поворота вектора скорости. С учетом уравнения (4.66) уравнение (4.67) принимает вид:

$$e = 1 + w_\infty^2 \frac{r_p}{K_m}. \quad (4.68)$$

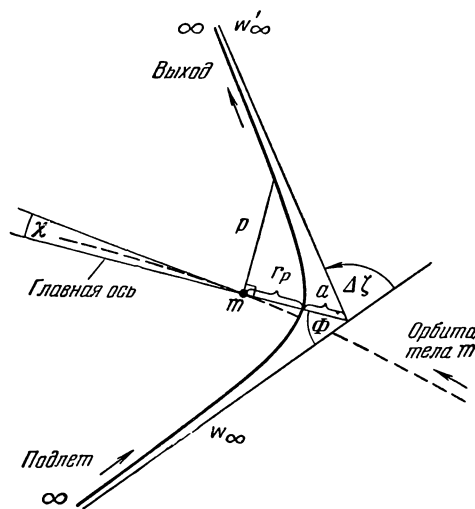


Рис. 4.21. Гиперболическая траектория после встречи согласно рис. 4.18 и 4.19.

Таким образом, если известна постоянная K_m возмущающего тела, выбран радиус r_p и вычислена величина ω_∞ по уравнению (4.65), то из уравнений (4.68) и (4.67) можно определить соответственно значения e и $\Delta\zeta$. Значение ζ_1 определяется из соотношения

$$\sin \zeta_1 = \frac{v_1}{\omega_\infty} \sin \beta_1. \quad (4.69)$$

При расчете угла ζ следует учитывать, что $\zeta > 90^\circ$, если $v_1 \cos \beta_1 < u$, поскольку при этом скорость содержит составляющую ω_∞ , направление которой противоположно направлению скорости u . В этом случае, если, например, из соотношения (4.69) получим $\zeta_1 = 40^\circ$, то следует принять $\zeta_1 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. При известном ζ_1 можно также определить $\zeta_2 = |\zeta_1 - \Delta\zeta|$. Скорость движения космического аппарата и угол пересечения траекторий космического аппарата и планеты находятся из выражений

$$v_2^2 = u^2 + \omega_\infty^2 + 2u\omega_\infty \cos(\zeta_1 - \Delta\zeta), \quad (4.70)$$

$$\sin \beta_2 = \frac{\omega_\infty}{v_2} \sin(\zeta_1 - \Delta\zeta) = \frac{\omega_\infty}{v_2} \sin \zeta_2. \quad (4.71)$$

Наконец, можно определить фокальный параметр гиперболы, то есть расстояние от аппарата до точки m при $\eta = 90^\circ$, из выражения

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{K_m}{\omega_\infty} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\zeta}{2} = \frac{K_m}{\left(\omega_\infty \operatorname{tg} \frac{\Delta\zeta}{2}\right)^2} \quad (4.72)$$

или, так как $\operatorname{tg} \frac{\Delta\zeta}{2} = \sin \Delta\zeta / (1 + \cos \Delta\zeta)$, из выражения

$$p = \frac{K_m}{\omega_\infty^2 \sin^2 \Delta\zeta} (1 + \cos \Delta\zeta)^2. \quad (4.73)$$

Таким образом, если заданы величины u , v_1 , β_1 и r_p , то можно вычислить значения ω_∞ , a , e , ζ_1 , ζ_2 , v_2 , β_2 и p . Параболическая скорость тела m относительно центрального тела M определяется выражением

$$V_p^2 = \frac{2K_M}{R}. \quad (4.74)$$

Представляет интерес определение значений ζ_1 , $v_2 - v_1$ и гиперболического избытка (недостатка) скорости по отношению к центральному телу M :

$$v_\infty^2 = v_2^2 - v_p^2 = v_2^2 - \frac{2K_M}{R_m}. \quad (4.75)$$

Вместо использования r_P в качестве независимой переменной можно определить значение r_P , для которого величина v_2 , а следовательно, и величина v_∞ принимают максимальные значения. Из уравнения (4.70) следует, что v_2 принимает максимальное значение, если $\zeta_1 = \Delta\zeta$. В этом случае

$$(v_2)_{\max} = u + w_\infty, \quad (4.76)$$

то есть направление вектора относительной скорости w'_∞ после встречи должно совпадать с направлением вектора орбитальной скорости тела m . В этом случае, если заданы u , v_1 и β_1 , значение $(v_2)_{\max}$ определяется из уравнения (4.76), значение ζ_1 — из соотношения (4.69), а соответствующее значение r_P — из соотношения (4.68):

$$r_P = \frac{K_m}{w_\infty^2} (e - 1). \quad (4.77)$$

4.6. Расчет параметров движения при гиперболической встрече и захвате

Выше были рассмотрены методы определения основных параметров траектории космического аппарата, встречающегося с космическим телом. В дальнейшем будем обозначать скорость относительно тела M и расстояния до его центра масс через V и R , а соответствующие величины по отношению к телу, с которым происходит встреча, через v и r . Все другие элементы орбиты относительно тела M будем снабжать индексом « M », а элементы орбиты, относящиеся к гиперболе, будем записывать без индекса. В том случае, если во встрече участвует планета, то m обозначает массу планеты, а M — массу Солнца. Если встреча совершается со спутником, то m является массой спутника, а M — массой планеты.

Пример 1. Космический аппарат пересекает орбиту тела m таким образом, что если бы орбита была невозмущенной, то угол пересечения имел бы значение β_1 , а скорость в точке пересечения была бы равна V_1 . Аппарат пролетает мимо тела m на минимальном расстоянии r_P , равном расстоянию до вершины r_v . Все эти значения следует считать заданными. Необходимо определить угол отклонения траектории, новое значение скорости и основные параметры движения при гиперболической встрече.

Скорость космического аппарата V_1 относительно тела m (орбитальная скорость тела m равна U_m) находится из выражения

$$v_\infty = \sqrt{V_1^2 + U_m^2 + 2V_1U_m \cos \beta_1};$$

угол между векторами $\mathbf{v}_\infty$ и $\mathbf{U}_m$ определяется из соотношения

$$\sin(180^\circ - \zeta_1) = \frac{v_1}{v_\infty} \sin \beta_1,$$

если $V_1 \cos \beta_1 < U_m$, в противном случае следует взять $\sin \zeta_1$;
действительная полуось гиперболы

$$a = \frac{K_m}{v_\infty^2};$$

эксцентриситет гиперболы

$$e = 1 + \frac{r_p}{a};$$

угол поворота вектора скорости $\mathbf{v}_\infty$ находится из выражения

$$\sin \frac{\Delta \zeta}{2} = \frac{1}{e}.$$

Новое значение скорости V_2 определяется из уравнения (4.70), а ее новое направление по отношению к вектору $\mathbf{U}_m$, то есть угол β_2 , определяется из уравнения (4.71). Изменение направления полета космического аппарата, обусловленное гиперболической встречей, определяется углом

$$\Delta \beta = |\beta_2 - \beta_1|.$$

Выше были определены параметры гиперболы a и e . Параметр p равен:

$$p = a(e^2 - 1);$$

половина угла между асимптотами определяется из выражения

$$\cos \Phi = \frac{1}{e},$$

и мнимая полуось равна:

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}.$$

Таким образом, основные элементы гиперболы найдены.

Пример 2. Космический аппарат подлетает к телу с целью максимального увеличения своей скорости за счет гиперболической встречи.

Пусть значения V_1 , U_m и β_1 известны.

Значения v_∞ , ζ_1 и a определяются из соотношений, приведенных в предыдущем примере. Требование максимального увеличения скорости означает, что $\Delta \zeta = \zeta_1$. Поэтому

$$e = \frac{1}{\sin \frac{\zeta_1}{2}}.$$

Расстояние до перигентра определяется по формуле

$$r_P = a(e - 1).$$

Может оказаться, что $r_P < r_{00}$. В этом случае практически невозможно получить максимальное приращение скорости за счет гиперболической встречи. В тех случаях, когда это возможно, новое значение скорости равно:

$$V_2 = U_m + v_\infty,$$

причем

$$\beta_2 = 0.$$

Пример 3. При полетах космических аппаратов на другие планеты гравитационное притяжение оказывает фокусирующее

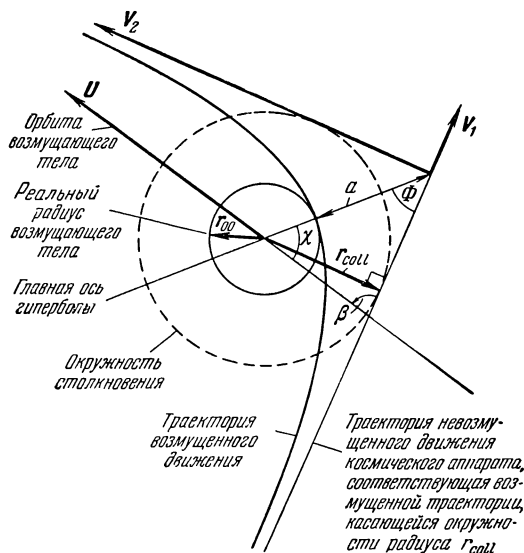


Рис. 4.22. Приближенное определение радиуса столкновения с телом.

воздействие на орбиту. При этом может случиться, что траектория, вычисленная без учета воздействия, пройдет мимо тела m , хотя в действительности космический аппарат столкнется с планетой. Это обстоятельство приводит к понятию *кажущегося диаметра столкновения* тела m , который превышает физический диаметр тела. Из рис. 4.22 следует, что кажущийся радиус столкновения может быть определен из соотношения

$$r_{\text{coll}} = (a + r_{00}) \sin \Phi = \left(\frac{K}{v_\infty^2} + r_{00} \right) \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \quad (4.78)$$

где e — эксцентриситет гиперболы встречи, то есть кажущийся диаметр столкновения уменьшается с увеличением скорости сближения v_∞ и уменьшением угла β_1 , под которым траектория космического аппарата пересекает траекторию тела m . С увеличением e (то есть с ускорением гиперболического движения) возрастает угол Φ , а следовательно, и r_{coll} , однако уменьшение величины a сказывается на величине r_{coll} более сильно, чем возрастание угла Φ . Уравнение (4.78) позволяет определить кажущийся диаметр столкновения не только в случае ошибок в модуле вектора скорости, но и при наличии ошибок в его направлении.

Пример 4. Рассмотрим случай полета к одной из планет, например к Марсу. В этом случае $R_A/R_P = n$, причем $R_m/R_P < n$, где R_m — расстояние от тела m до центрального тела. Необходимо рассчитать условия гиперболической встречи и захвата. Пусть заданы n , R_m и r_P . Обозначив Солнце через M , а Марс через $\dot{m}$, получим следующие соотношения для переходной орбиты:

$$e_M = \frac{n-1}{n+1}, \quad p_M = R_P(1 + e_M).$$

Далее находим:

истинную аномалию точки пересечения переходной орбиты с орбитой Марса из выражения

$$\cos \eta_M = \frac{\left(\frac{p_M}{R_m} - 1\right)}{e_M};$$

угол пересечения переходной орбиты с орбитой Марса из выражения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e_M \sin \eta_M}{1 + e_M \cos \eta_M};$$

большую полуось переходного эллипса

$$a_M = \frac{R_A + R_P}{2};$$

скорость в точке пересечения орбиты Марса

$$V = K_M \left(\frac{2}{R_m} - \frac{1}{a_M} \right);$$

относительную скорость по отношению к телу m (U_m — скорость Марса)

$$v_\infty = \sqrt{U_m^2 + V^2 - 2U_m V \cos \beta},$$

$$\sin(-180^\circ - \xi_1) = \frac{V}{v_\infty} \sin \beta;$$

действительную полуось гиперболы

$$a = \frac{K_m}{v_\infty^2}.$$

В случае захвата на расстоянии r_p :

$$v_p = \sqrt{2K_m/r_p}, \quad v_c = \sqrt{K/r_p}, \quad e = 1 + r_p/a;$$

скорость подлета на расстояние r_p , равная скорости v_V в вершине гиперболы,

$$v_{\text{arr}} = v_V = \sqrt{\frac{2K_m}{r_p} + v_\infty^2}.$$

Импульс скорости, необходимый для перехода космического аппарата на круговую орбиту,

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_V - \sqrt{\frac{K}{r_p}}$$

или для перехода на эллиптическую орбиту со скоростью v_p в перигентре

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_V - v_p = v_V - \sqrt{\frac{K}{r_p}} \sqrt{\frac{2n}{1+n}},$$

причем

$$\cos \Phi = \frac{1}{e},$$

$$\sin \frac{\Delta \zeta}{2} = \frac{1}{e},$$

где величина $\frac{\Delta \zeta}{2}$ определяет угол отклонения вектора скорости v_∞ при условии, что захват происходит в вершине.

Пример 5. Пусть для условий предыдущего примера необходимо осуществить одноимпульсный маневр захвата на оптимальном расстоянии $\bar{r}$.

В этом случае, по определению,

$$v_\infty^2 = \frac{2K_m}{\bar{r}},$$

поэтому

$$\bar{r} = \frac{2K_m}{v_\infty^2} = 2a, \tag{4.79}$$

так как $a = K_m/v_\infty^2$.

Далее,

$$e = 1 + \frac{\bar{r}}{a} = 3, \quad (4.80)$$

$$v_V = \sqrt{v_p^2 + v_\infty^2} = \sqrt{2v_\infty^2}, \quad (4.81)$$

$$\sin \frac{\Delta \xi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{3}, \quad (4.82)$$

$$\Delta \xi = 38^\circ 58', \quad (4.83)$$

$$\xi_2 = \xi_1 - 38^\circ 58'. \quad (4.84)$$

Записанные выше уравнения справедливы для произвольной гиперболической орбиты входа или выхода, начинающейся или заканчивающейся в точке, удаленной на расстояние $\bar{r}$ от центра планеты.

4.7. Общий анализ ошибок, возникающих при двухимпульсном переходе

Будем определять ошибку как отклонение вектора положения или скорости [по величине и (или) направлению] от требуемого значения в конце активного участка полета (то есть в начале кеплерова движения). Если начало системы координат находится в центре планеты, то отклонение будем называть *планетоцентрической ошибкой*¹⁾. Если начало координат находится в центре Солнца, то будем говорить о *гелиоцентрической ошибке*²⁾. В первом случае анализ ошибок необходимо производить с учетом бицентральности гравитационного поля (бицентральный анализ), поскольку траектория космического аппарата содержит участок перехода с планетоцентрической орбиты на гелиоцентрическую. С другой стороны, анализ гелиоцентрических ошибок следует производить для центрального гравитационного поля (моноцентральный анализ). Траектория перелета космического аппарата от одной планеты к другой является гиперболой. Выход космического аппарата осуществляется по гиперболической орбите. Поэтому планетоцентрические ошибки относятся к гиперболическому участку траектории аппарата. Эти ошибки оказывают влияние на гелиоцентрическую орбиту, которая в общем случае является эллипсом. Эту орбиту можно исследовать методами моноцентрального анализа.

В дальнейшем, как и раньше, будем обозначать скорости и расстояния, измеряемые в гелиоцентрической системе, заглав-

¹⁾ При рассмотрении системы «Земля—Луна» планетоцентрическая ошибка станет *селеноцентрической*, а *гелиоцентрическая* — *геоцентрической*.

²⁾ Анализ ошибок в поле центральной силы приведен в § 3.12 и § 3.13.

ными буквами, а скорости и расстояния, измеряемые в планетоцентрической системе, малыми буквами. Пусть U обозначает скорость планеты, а V_1 — начальную гелиоцентрическую переходную скорость космического аппарата, то есть скорость в точке выхода из планетоцентрического поля тяготения и в точке входа в гелиоцентрическое поле тяготения. Это условие выполняется, если планетоцентрическое притяжение, действующее на тело, пренебрежимо мало по сравнению с гелиоцентрическим притяжением. Геометрически гиперболическая траектория в этом случае должна совпадать с соответствующей асимптотой (в бесконечности по отношению к планете).

Угол Φ определяет гелиоцентрическое направление выхода. Сравнение уравнений (4.24) — (4.26) показывает, что ошибки в r_P и v_∞ изменяют этот угол на величину $\Delta\Phi$. Значение r_P , содержащее ошибку, можно получить, учитывая ошибку в положении, если выключение двигательной установки производится в вершине гиперболы, либо учитывая ошибку в векторе скорости, если отсечка тяги производится в какой-либо другой точке теоретической гиперболы. При этом ошибка может быть как в величине, так и в направлении вектора скорости. Иначе говоря, даже если направление гиперболического выхода не содержит ошибки, а ошибка имеется только в модуле вектора скорости, то произойдет изменение ориентации главной оси гелиоцентрического переходного эллипса по отношению к выбранной системе отсчета. В отличие от этого при моноцентральной анализе ошибок изменение ориентации главной оси эллипса может возникнуть только в случае ошибки в апоцентральной направлении вектора скорости, ошибка же в модуле вектора скорости не изменяет ориентацию главной оси.

Ошибка $\Delta\Phi$ в свою очередь влечет за собой ошибку в гелиоцентрическом направлении выхода (рис. 4.23). Поскольку рассматриваются только малые ошибки, то справедливы соотношения

$$\cos(\Delta\beta) \approx \frac{V'_1}{V_1}, \quad (4.85)$$

$$V_1 = U_{p1} + v_\infty, \quad (4.86)$$

$$V'_1 = U_{p1} + V_\infty \cos \Delta\Phi, \quad (4.87)$$

$$\Delta\beta \approx \frac{\Delta V_r}{V_1} = \sin(\Delta\Phi) \frac{v_\infty}{V_1} \approx \Delta\Phi \frac{v_\infty}{V_1}, \quad (4.88)$$

где

$$\Delta V_r = v_\infty \sin(\Delta\Phi) = v_\infty \sin \left[\frac{2 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{K_{pl}/r_P} \right)}{v_\infty \sec^2 \Phi} \Delta v_P \right]. \quad (4.89)$$

Изменение направления выхода на величину $\Delta\beta$ приводит к изменению ориентации главной оси гелиоцентрического переходного эллипса; другими словами, линия апсид смещается на некоторый угол даже в том случае, если гелиоцентрическая скорость выхода не содержит ошибки. Однако на практике эти ошибки оказываются весьма малыми, если они вызваны только техническими погрешностями. При полетах к Венере и Марсу

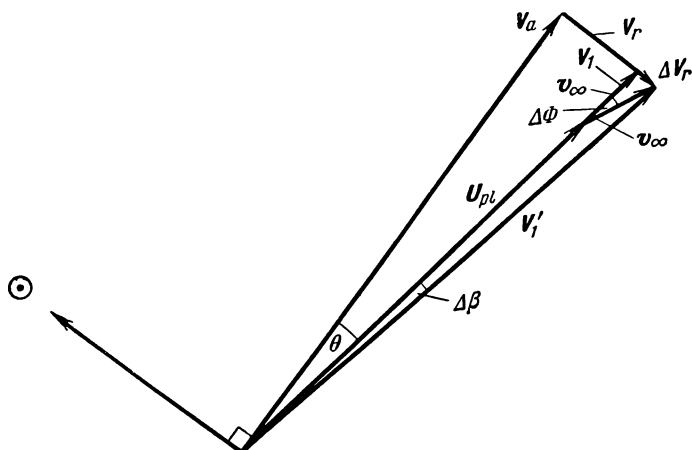


Рис. 4.23. Ошибки в гелиоцентрическом направлении выхода, обусловленные изменением половины угла между асимптотами $\Delta\Phi$.

эти ошибки имеют порядок: $1,5 \leq \Delta V_r \leq 4,5$ м/сек ($5 \leq \Delta V_r \leq 15$ фут/сек). Поскольку скорость V_1 колеблется в пределах $25\,000 \div 35\,000$ м/сек ($80\,000 \div 115\,000$ фут/сек), величина $\Delta V_r/V_1$, а следовательно, и угол $\Delta\beta$ оказываются пренебрежимо малыми.

Случай выполнения маневра выхода без ошибок в скорости, соответствующей рис. 4.8, изображен на рис. 4.24, а (в гелиоцентрической системе координат). Маневр осуществляется с круговой орбиты по касательной траектории. В правой части рис. 4.24, а показаны случаи выхода при наличии ошибок в модуле и направлении вектора скорости. Угол изменения направления вектора скорости обозначен через $\Delta\beta$. На рис. 4.24, б показаны случаи точного и неточного касательных выходов с эллиптической орбиты планеты. Различие между двумя рассматриваемыми случаями состоит лишь в том, что в последнем примере при точном выходе $\alpha \neq 90^\circ$. Угол между векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}_1$ при отсутствии ошибок равен нулю, как и в первом случае, а при наличии ошибок равен $\Delta\beta$. На рис. 4.24, в показан случай

некасательного выхода. В данном случае при отсутствии ошибок угол между векторами U и V_1 равен β , а при наличии ошибок этот угол принимает значение $\beta' = \beta + \Delta\beta$.

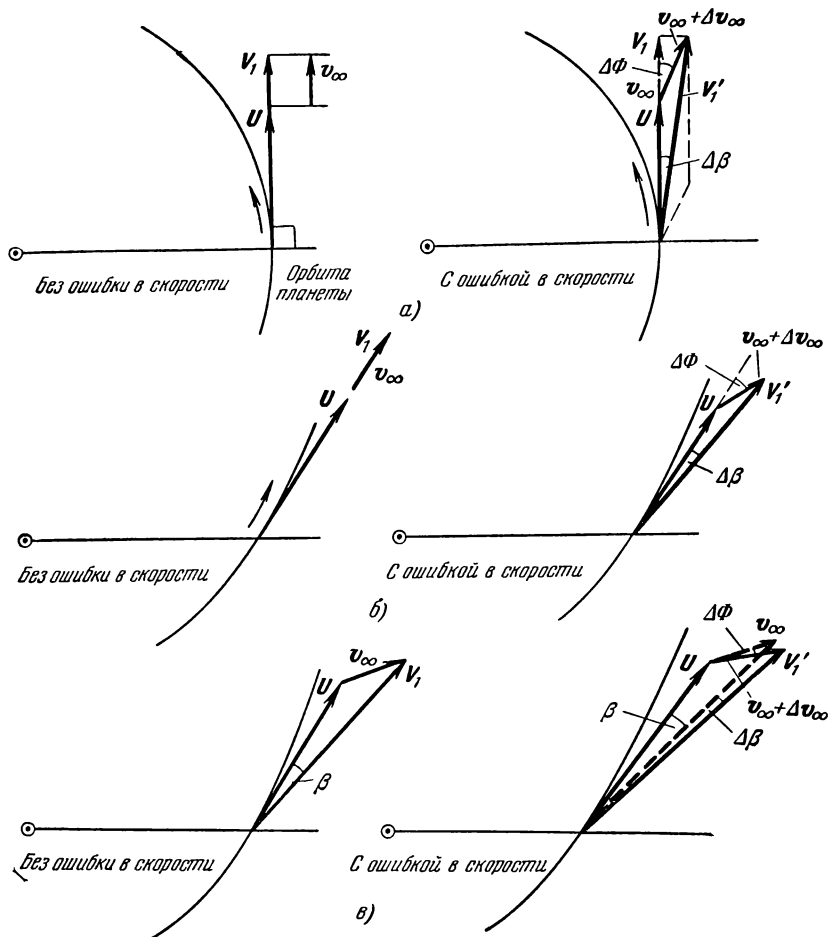


Рис. 4.24. Ошибки при маневре выхода.

- а) Круговая орбита планеты, векторы скоростей V_1 и U параллельны;
 б) эллиптическая орбита планеты, векторы скоростей V_1 и U параллельны;
 в) круговая или эллиптическая орбита планеты, вектор скорости V_1 не параллелен вектору скорости U .

Выше рассматривались ошибки в векторах положения и скорости в предположении, что эти ошибки не выходят из плоскости орбиты. Однако не исключена возможность выхода вектора

скорости из плоскости орбиты. Соответствующие ошибки были бы эквивалентны импульсу, ортогональному желаемой плоскости движения в момент выключения двигательной установки. Ошибку в положении всегда можно преобразовать в эквивалентную ошибку в скорости. Эта ошибка играет меньшую роль при исследовании маневров выхода и захвата, чем при анализе движения тела в центральном поле сил, и поэтому отдельно эта ошибка не будет рассматриваться. Ошибки в направлении и величине вектора скорости, хотя и могут накапливаться в период работы двигателя, можно представить эквивалентной ошибкой в импульсе в момент выключения двигательной установки. Три составляющие гелиоцентрической ошибки в импульсе связаны с планетоцентрическими ошибками следующим образом.

1. Ошибка в ориентации орбитальной плоскости гелиоцентрического переходного эллипса, обусловленная ошибкой в направлении асимптоты гиперболы выхода. Ошибка в направлении гиперболы может быть вызвана либо ошибкой в направлении планетоцентрического вектора скорости выхода $\mathbf{v}_1$, либо ошибкой в модуле вектора $\mathbf{v}_1$, либо комбинацией этих двух ошибок.

2. Ошибка в модуле гелиоцентрического вектора скорости. Эта ошибка обусловлена ошибкой в модуле вектора $\mathbf{v}_1$. Однако поскольку ошибка в модуле вектора $\mathbf{v}_1$ вызывает также изменение направления асимптоты, то эта ошибка связана с такими ошибками в модуле и направлении вектора $\mathbf{v}_1$, что направление асимптоты для модуля скорости v_h остается тем же, что и для точного начального значения.

3. Ошибка в ориентации плоскости гелиоцентрической орбиты, обусловленная наличием ортогональной составляющей ошибки в векторе скорости (при гиперболическом выходе).

Можно вывести соотношения, определяющие влияние ошибок гиперболического выхода на гелиоцентрические начальные условия, и затем, используя соотношения для центрального поля сил, определить влияние измененных гелиоцентрических начальных условий на гелиоцентрические параметры движения в конце перехода. Однако конечной целью анализа является установление аналитической связи ошибок гиперболического выхода с конечными гелиоцентрическими параметрами. Для решения этой задачи необходимы соотношения, определяющие движение тела по гиперболе в центральном поле сил. Эти соотношения мы и получим в первую очередь.

4.8. Ошибки гиперболической орбиты

Анализ ошибок движения тела в бицентральной поле сил начнем с рассмотрения влияния ошибок на гиперболу выхода. В случае гиперболической орбиты скорость тела, удален-

ного на расстояние r от центра планеты, определяется соотношением

$$v^2 = v_r^2 + v_a^2 = K \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (4.90)$$

Соотношение, определяющее влияние изменения скорости на величину большой полуоси (расстояние от вершины гиперболы до точки пересечения асимптот), получается путем дифференцирования выражения (4.90) по v :

$$\frac{\partial a}{\partial v} = - \frac{2a^2}{K} v. \quad (4.91)$$

Величина большой полуоси определяется из соотношения

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{(r^2 \dot{\eta})^2}{K(e^2 - 1)} = \frac{C^2}{K(e^2 - 1)}, \quad (4.92)$$

где p — фокальный параметр гиперболы, $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}$ — производная по времени от истинной аномалии и C — постоянная Кеплера. Дифференцируя по a , e и C и подставляя вместо ∂a выражение $(-2a^2 v \partial v / K)$, получаем: $Kae \partial e = a^2 v \partial v (e^2 - 1) - C \partial C$. Умножая каждый член на v и полагая, что касательный импульс изменяет только модуль вектора скорости, а также исключая ∂C с помощью равенства $v \partial C = C \partial v$, находим:

$$Kae v \frac{\partial e}{\partial v} = a^2 v^2 (e^2 - 1) - C^2. \quad (4.93)$$

Поскольку длина главной полуоси определяется из соотношения (4.92), а величина r определяется из уравнения $r^{-1} = K(1 + e \cos \eta) C^{-2}$, то после перемножения этих двух равенств получим:

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos \eta}{e^2 - 1}. \quad (4.94)$$

Используя записанные соотношения, а также равенства $C^2 = Kr(1 + \cos \eta)$ и $v^2 = K(2/r + 1/a)$, уравнение (4.93) можно преобразовать к виду

$$ev \frac{\partial e}{\partial v} = 2(1 + e \cos \eta) + (e^2 - 1) - \frac{r}{a} (1 + e \cos \eta).$$

Упростив последний член этого равенства с помощью уравнения (4.94), окончательно получим:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{2}{v} (e + \cos \eta). \quad (4.95)$$

Это соотношение совпадает с аналогичным соотношением, записанным для эллиптической орбиты. Используя соотношения для гиперболы

$$a = \frac{K}{v_\infty^2}, \quad b = \frac{r_P v_P}{v_\infty} = \frac{r v_a}{v}, \quad (4.96)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{b}{a} = \frac{v_P v_\infty}{K/r_P} = \frac{v_a v_\infty}{K/r} \cos \theta, \quad (4.97)$$

где r_P , v_P — соответственно расстояние до перигея и скорость в перигее, и принимая во внимание соотношение $v_a = v \cos \theta$ для горизонтальной составляющей скорости в точке, удаленной на расстояние r , получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{2 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{K/r} \right) \cos \theta}{v_\infty \sec^2 \Phi}. \quad (4.98)$$

Из уравнений энергии $v^2 - 2K/r = K^2(e^2 - 1)/C^2 = v_r^2 + v_a^2 - 2K/r$ находим:

$$\frac{\partial e}{\partial v_r} = \frac{v_r C^2}{e K^2}. \quad (4.99)$$

Следовательно, для всех конических сечений имеем:

$$\frac{v_r C}{e K} = \sin \eta.$$

Используя соотношение для гиперболы $e = \sec \Phi$, получаем следующие выражения для частной производной от угла наклона асимптоты по положительному импульсу (то есть импульсу, направленному к фокусу):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_r} &= \frac{\partial e}{\partial v_r} \frac{\partial \Phi}{\partial e}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_r} &= \frac{C}{K} \sin \eta (\sin \Phi - \operatorname{cosec} \Phi). \end{aligned} \quad (4.100)$$

В выражении (4.100) величина ∂v_r принимается положительной, если соответствующий вектор направлен к центру гравитационного поля. Выражение для производной $\partial \Phi / \partial v_a$ имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_a} = \frac{C}{K a e r} (b^2 - r^2) (\operatorname{cosec} \Phi - \sin \Phi). \quad (4.101)$$

Полный дифференциал функции Φ определяется выражением

$$d\Phi = \frac{2v_a \left(v_\infty^2 dv_a + \frac{1}{2} v_a v_r dv_r \right)}{\left(\frac{K}{r} \right)^2 \operatorname{tg} \Phi \sec^2 \Phi}. \quad (4.102)$$

Если известны значения v , v_r и v_a , то приращение угла Φ можно определить из уравнений (4.98) и (4.100) — (4.102).

В том случае, когда ошибка гиперболического выхода задается погрешностью в угле $\theta = \text{arctg}(v_r/v_a)$, для вычисления ошибки в угле Φ можно использовать соотношение (4.97), выражающее v_∞ через θ , соотношение $e = 1 + v_\infty^2/(K/r_p)$ и зависимость

$$e^2 = 1 - \left(\frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} \right)^2 + \text{tg}^2 \theta \left(\frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} \right)^2. \quad (4.103)$$

Окончательно получим:

$$\text{tg } \Phi = \frac{v}{K/r} \cos \theta \left\{ \frac{K}{r_p} \left[\sqrt{\left(\frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} \right)^2 - \left(\frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} \right)^2 \text{tg}^2 \theta - 1} - 1 \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.104)$$

Дифференцируя это выражение по θ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = & -\frac{1}{2} \frac{v}{v_\infty} \frac{r}{r_p} \frac{\sin \theta}{\sec^2 \Phi} \times \\ & \times \left\{ \frac{(K/r_p) \cos \theta}{\left(\frac{K/r}{v} \right)^2 \text{tg}^2 \Phi + \frac{K}{r_p} \cos^2 \theta} \left[3 \sec^2 \Phi + 2 \left(\frac{v^2 \cos^2 \theta}{K/r} \right)^2 + 1 \right] - 2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Если ошибки содержатся как в скорости v , так и в угле θ , то ошибка в угле Φ может быть определена из выражения

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta. \quad (4.106)$$

Фигурирующие в этом выражении частные производные определяются из выражений (4.98) и (4.105). Таким образом, изменение угла Φ выражается через v и θ .

Изменение скорости v_∞ определяется из выражения (4.97). Если выключение двигательной установки происходит точно в вершине гиперболы, то справедливо выражение

$$dv_\infty = \frac{K/r_p}{v_p} \sec^2 \Phi d\Phi - \frac{K/r_p}{v_p^2} \text{tg } \Phi dv_p,$$

или поскольку для перигентра из уравнений (4.106) и (4.98) следует, что

$$\frac{d\Phi}{dv_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_p} = \frac{2 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{K/r_p} \right)}{v_\infty \sec^2 \Phi}, \quad (4.107)$$

то, исключая $\text{tg } \Phi$ с помощью уравнения (4.97), получаем:

$$\frac{dv_\infty}{dv_p} = \frac{v_p}{v_\infty}. \quad (4.108)$$

Если выключение двигательной установки происходит не в перицентре, то величину dv_∞ можно определить путем дифференцирования функции $v_\infty = (K/r) \operatorname{tg} \Phi / v \cos \theta$ [см. уравнение (4.97)]. Однако использование полученного соотношения оказывается неудобным, поскольку изменения Φ , θ и v не являются независимыми.

Уравнение (4.108) можно также получить непосредственно из уравнения (4.19). В силу общего соотношения

$$\frac{dv_\infty}{dv_1} = \frac{v_1}{v_\infty}, \quad (4.109)$$

если $v_1^2 = v^2$ заменить суммой $v_r^2 + v_a^2$, получим:

$$dv_\infty = \frac{v_a dv_a + v_r dv_r}{v_\infty}. \quad (4.110)$$

Изменения радиальной и горизонтальной составляющих вектора скорости являются взаимно зависимыми.

Таким образом, гелиоцентрические ошибки $d\Phi$ и dv_∞ выражены через планетоцентрические ошибки dv , $d\theta$ или dv_a , dv_r , и теперь можно вычислить новые гелиоцентрические значения β и V_1 .

4.9. Связь гиперболических ошибок с начальными ошибками гелиоцентрической орбиты

Часто весьма желательно иметь соотношения, непосредственно связывающие V_1 и v_1 , θ и Φ . Если первоначально определить связь v_1 и V_1 , то, поскольку для случая $\beta=0$ из уравнений (4.18) и (4.19) следует $V_1 = U + v_\infty = U + \sqrt{v_1^2 - 2K/r_1}$, справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_\beta = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_{r_1} = \frac{v_1}{v_\infty} = \frac{V_p}{V_\infty} \quad (\beta=0). \quad (4.111)$$

Если $\beta \approx 0$, то $v_\infty \approx V_1 - U \cos \beta$, и из соотношения $V_1 = U \cos \beta + v_\infty$ следует соотношение (4.111). Если $\beta \neq 0$, то из уравнения (4.20) можно получить:

$$V_1 = U \cos \beta \pm \sqrt{v_\infty^2 - U^2 \sin^2 \beta}, \quad (4.112)$$

где $v_\infty^2 = v_1^2 - 2K/r_1$.

Как указывалось выше, изменение v_1 в общем случае вызовет изменение величин β и V_1 . Поэтому полная производная имеет следующее выражение:

$$\frac{dV_1}{dv_1} = \frac{dV_1}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_1}. \quad (4.113)$$

Значение dV_1 определяется из соотношения

$$dV_1 = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_\beta dv_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_1} d\beta. \quad (4.114)$$

В этих соотношениях dv_1 является независимой переменной, а члены в скобках и величина $d\Phi$ зависят от dv_1 . Из уравнения (4.112) получаем:

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_\beta = \pm \frac{v_1}{V_1 - U \cos \beta} \quad (\beta \neq 0 = \text{const}), \quad (4.115)$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_1} = \pm \frac{V_1 U \sin \beta}{V_1 - U \sin \beta}. \quad (4.116)$$

В этих выражениях знак «плюс» соответствует случаю, когда $V_1 > U$, а знак «минус» — случаю, когда $V_1 < U$. Значение $d\beta$ определяется выражением $d\beta = d\Phi v_\infty / V_1$, в котором величины v_∞ и V_1 соответствуют измененному значению v_1 . Из этого следует, что изменение v_1 вызывает не только изменение модуля вектора V_1 , но также и изменение β вследствие изменения угла между асимптотами. Поэтому можно записать:

$$\frac{dV_1}{d\Phi} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_\beta \frac{dv_1}{d\Phi} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_1} \frac{d\beta}{d\Phi}, \quad (4.117)$$

где

$$\frac{d\beta}{d\Phi} = \frac{v_\infty}{V_1}.$$

В том случае, когда изменяется только модуль вектора $\mathbf{v}_1$, значение производной $dv_1/d\Phi$ определяется из уравнения (4.98). Если к тому же меняется и направление вектора $\mathbf{v}_1$, то из соотношения (4.106) следует:

$$\frac{dv_1}{d\Phi} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v_1}}, \quad (4.118)$$

где $d\theta_1$ и dv_1 — ошибки в направлении и модуле вектора $\mathbf{v}_1$. Если v_1 выражается через v_a и v_r , то следует рассматривать ошибки dv_a и dv_r , по которым можно определить ошибку dv_1 . Значение величины $d\Phi$ при этом определяется из соотношения (4.102). Однако сравнение уравнений (4.100) и (4.101) показывает, что при малом значении η , то есть в случае выключения двигательной установки вблизи перигентра, ошибка dv_r влияет на значение $d\Phi$ намного меньше, чем ошибка dv_a . Это обстоятельство позволяет заменить производную $\frac{dv_1}{d\Phi}$ значением $\frac{\partial v_a}{\partial \Phi}$, определяемым из уравнения (4.101).

Если выключение двигательной установки происходит точно в периге (β=0), то имеет место строгое равенство

$$\frac{dV_1}{d\Phi} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_P} \right)_\beta \frac{dv_P}{d\Phi} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_P} \frac{d\beta}{d\Phi}, \quad (4.119)$$

где $dv_P/d\Phi$ определяется из уравнения (4.98), в котором следует положить $\cos \theta = 1$ и $r = r_P$. Следует отметить, что значение производной $(\partial V_1/\partial \beta)_{v_P}$ может оказаться весьма большим, если значение β не очень мало. В случае касательного (или близкого к касательному) выхода с гелиоцентрической орбиты, близкой к круговой, этим членом можно пренебречь. В этом случае, используя уравнения (4.111) и (4.98), соотношение (4.119) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dV_1}{d\Phi} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_P} \right)_\beta \frac{dv_P}{d\Phi} = \frac{v_P \sec^2 \Phi}{2 \left(1 + \frac{v_P^2}{2K/r_P} \right)} = \frac{v_P \sec^2 \Phi}{2e}. \quad (4.120)$$

Следует отметить также, что первый и второй члены в уравнении (4.114) или (4.119) имеют противоположные знаки [см. выражения (4.115) и (4.116)], так что при некоторых условиях значение производной $dV_1/d\Phi$ может быть весьма малым. Второй сомножитель уравнения (4.113) определяется из уравнения (4.106):

$$\frac{d\Phi}{dv_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \frac{d\theta_1}{dv_1}. \quad (4.121)$$

Выше приводились различные выражения для производной $\frac{\partial V_1}{\partial \Phi}$. Если использовать выражение (4.117), то уравнение (4.113) примет вид:

$$\frac{dV_1}{dv_1} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1} \right)_\beta + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_P} \frac{d\beta}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_1}. \quad (4.122)$$

Если выключение двигательной установки происходит в периге, то справедливо выражение

$$\frac{dV_1}{dv_P} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_P} \right)_\beta + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \beta} \right)_{v_P} \frac{d\beta}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_P}. \quad (4.123)$$

Для оценки чувствительности элементов гелиоцентрической орбиты к планетоцентрическим ошибкам последние необходимо связать с гелиоцентрическими горизонтальной и радиальной составляющими вектора скорости. Можно записать:

$$\frac{dV_a}{d\Phi} = \frac{dV_a}{dV_1} \frac{dV_1}{d\Phi}. \quad (4.124)$$

Так как $V_a = V_1 \cos \beta$, то

$$\frac{dV_a}{dV_1} = \cos \beta - V_1 \sin \beta \frac{d\beta}{dV_1}, \quad (4.125)$$

где [см. уравнение (4.112)]

$$\frac{dV_1}{d\beta} = \frac{v_1}{V_1 - U \cos \beta} \frac{dv_1}{d\beta} - \frac{UV_1 \sin \beta}{V_1 - U \cos \beta}. \quad (4.126)$$

Разрешая уравнение (4.20) относительно $\cos \beta$ и заменяя v_∞ через $v_1^2 - 2K/r_1$, получаем:

$$\frac{d\beta}{dv_1} = \frac{v_1}{UV_1} \operatorname{cosec} \beta + \left(\frac{\cos \beta}{V_1} - \frac{1}{U} \right) \operatorname{cosec} \beta \frac{dV_1}{dv_1}. \quad (4.127)$$

Очевидно, что в более общем случае dV_a/dV_1 является функцией dV_1/dv_1 и $dV_1/d\beta$. Другими словами, при заданных условиях выхода и заданной ошибке сначала должна быть вычислена производная dV_1/dv_1 , а затем $d\beta/dv_1$ и $dV_1/d\beta$, после чего определяется dV_a/dV_1 . Следует отметить, что в идеальном случае, когда $\beta=0$ (касательный переход с круговой гелиоцентрической орбиты), первый член уравнения (4.127) обращается в бесконечность и поэтому $dv_1/d\beta=0$. Подобным же образом $dV_1/d\beta=0$, и поскольку $\sin \beta=0$, то $dV_a/dV_1=1$. Смысл второго множителя ($dV_1/d\Phi$) правой части уравнения (4.124) был раскрыт выше.

Производная от радиальной скорости по углу наклона асимптоты определяется выражением

$$\frac{dV_r}{d\Phi} = \frac{dV_r}{dV_1} \frac{dV_1}{d\Phi}, \quad (4.128)$$

где

$$\frac{dV_r}{dV_1} = \sin \beta + V_1 \cos \beta \frac{d\beta}{dV_1}, \quad (4.129)$$

причем для определения $d\beta/dV_1$ используются уравнения (4.126) и (4.127). Соотношение, связывающее составляющие планетоцентрической скорости с составляющими гелиоцентрической скорости, имеет вид:

$$\frac{dV_a}{dv_a} = \frac{dV_a}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_a}. \quad (4.130)$$

Второй множитель правой части этого выражения определяется из уравнения (4.101). Подобным же образом

$$\frac{dV_r}{dv_r} = \frac{dV_r}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_r}, \quad (4.131)$$

где $d\Phi/dv_r$ находится из уравнения (4.100). Далее получаем:

$$\frac{dV_1}{dv_a} = \frac{dV_1}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_a}, \quad (4.132)$$

$$\frac{dV_1}{dv_r} = \frac{dV_1}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dv_r}. \quad (4.133)$$

4.10. Связь планетоцентрических ошибок с элементами гелиоцентрической орбиты

Установим связь записанных выше соотношений с зависимостями, полученными для случая движения космического аппарата в поле центральной силы (см. § 3.12). Орбитальные элементы, относящиеся к гелиоцентрической орбите будем обозначать индексом « $\odot$ ».

Пусть необходимо определить влияние ошибки в радиальной скорости v_r на длину большой полуоси $a_\odot$ гелиоцентрической переходной орбиты. Для этой цели используем уравнение (3.284а), которое для гелиоцентрической орбиты записывается в виде

$$\frac{da_\odot}{dV_r} = - \frac{2a_\odot^2 V_r}{K_\odot} \sin \eta_\odot.$$

Умножив это равенство на $\frac{dV_r}{dv_r}$, получим:

$$\frac{da_\odot}{dV_r} \frac{dV_r}{dv_r} = \frac{da_\odot}{dv_r}$$

и

$$\frac{da_\odot}{dv_r} = - \frac{2a_\odot^2 V_r}{K_\odot} \sin \eta_\odot \frac{dV_r}{dv_r}. \quad (4.134)$$

Таким же способом получим:

$$\frac{de_\odot}{dv_r} = - \frac{C_\odot}{K_\odot} \sin \eta_\odot \frac{dV_r}{dv_r}, \quad (4.135)$$

$$\frac{d\mu_\odot}{dv_r} = \frac{3}{a_\odot \sqrt{1-e_\odot^2}} \sin \eta_\odot \frac{dV_r}{dv_r}, \quad (4.136)$$

$$\frac{d\eta_\odot}{dv_r} = \frac{\cos \eta_\odot}{e_\odot \sqrt{h(1-e_\odot^2)}} \frac{dV_r}{dv_r}. \quad (4.137)$$

Влияние ошибки в азимутальной скорости на элементы гелиоцентрической переходной орбиты определяется выражениями:

$$\frac{da_{\odot}}{dv_a} = \frac{2a_{\odot}^2}{K_{\odot}} V_a \frac{dV_a}{dv_a}, \quad (4.138)$$

$$\frac{de_{\odot}}{dv_a} = \frac{C_{\odot}(b_{\odot}^2 - R_1^2)}{K_{\odot}a_{\odot}e_{\odot}R_1} \frac{dV_a}{dv_a}, \quad (4.139)$$

$$\frac{d\mu_{\odot}}{dv_a} = -\frac{3}{R} \sqrt{1 - e_{\odot}^2} \frac{dV_a}{dv_a}, \quad (4.140)$$

$$\frac{d\eta_{\odot}}{dv_a} = \frac{2 + e_{\odot} \cos \eta_{\odot}}{e_{\odot}K_{\odot}/R} \sin \eta_{\odot} \frac{dV_a}{dv_a}. \quad (4.141)$$

Наконец, если направление вектора скорости является точным, а ошибка содержится лишь в величине скорости, то с помощью уравнений (3.292a), (3.297b) и (4.122) или (4.123) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{da_{\odot}}{dv_1} = \frac{da_{\odot}}{dV_1} \frac{dV_1}{dv_1} = \frac{2V_1a_{\odot}^2}{K_{\odot}} \frac{dV_1}{dv_1}, \quad (4.142)$$

$$\frac{de_{\odot}}{dv_1} = \pm \frac{2}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_c} \right)^2 \frac{dV_1}{dv_1} \quad \left(\frac{V_1}{V_c} \geq 1 \right), \quad (4.143)$$

$$\frac{dR_A}{dv_1} = \frac{dV_1}{dv_1} \left[\frac{2V_1a_{\odot}R_A}{K_{\odot}} \pm \frac{2a_{\odot}}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_c} \right)^2 \right] \quad \left(\frac{V_1}{V_c} \geq 1 \right), \quad (4.144)$$

$$\frac{dR_P}{dv_1} = \frac{dV_1}{dv_1} \left[\frac{2V_1a_{\odot}R_P}{K_{\odot}} \mp \frac{2a_{\odot}}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_c} \right)^2 \right] \quad \left(\frac{V_1}{V_c} \geq 1 \right), \quad (4.145)$$

где V_c — круговая скорость на удалении R_1 .

4.11. Влияние произвольных планетоцентрических трансверсальных и радиальных ошибок на гелиоцентрическое удаление тела, движущегося по гелиоцентрической переходной орбите

Задача состоит в том, чтобы оценить влияние геоцентрической гиперболической скорости v на гелиоцентрическое расстояние R_A (если $V_1/V_c > 1$) или R_P (если $V_1/V_c < 1$), или в более общем случае — на любое другое расстояние R для заданного значения истинной аномалии $\eta_{\odot}$ гелиоцентрической переходной орбиты.

Гиперболическая скорость выхода определяется выражением (4.19). В последующем изложении примем, что орбита гелиоцентрического выхода (или возврата) является касательной, то

есть $\beta=0$ [см. уравнение (4.18)]. Однако следует учитывать, что полученные уравнения будут справедливы также и для некасательного выхода ($\beta \neq 0$), если заменить U на $U' = U \cos \beta$.

В уравнение (4.19) выражение $2K/r_1$ представляет собой местную параболическую скорость v_p . Будем предполагать, что значение местной скорости v_p известно точно. На самом деле это не так, поскольку для Земли величина K известна не точно. Ошибка в определении значения v_p повлечет за собой ошибку в гиперболической скорости выхода v_h . Поэтому мы будем считать величину v_p точно известной, а все ошибки технического и теоретического порядка отнесем непосредственно к v_h .

Пусть при заданной гиперболической скорости v'_1 получено точное значение приращения гелиоцентрической скорости $\Delta V' = V'_1 - U$. Тогда в единицах U получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{\Delta V'}{U}\right)^2 = \left(\frac{v'_1}{U}\right)^2 - \left(\frac{v_p}{U}\right)^2. \quad (4.146)$$

В действительности же ошибка в скорости v''_1 в момент выключения двигательной установки приведет к тому, что приращение скорости будет содержать ошибку

$$\left(\frac{\Delta V''}{U}\right)^2 = \left(\frac{v''_1}{U}\right)^2 - \left(\frac{v_p}{U}\right)^2, \quad (4.147)$$

где v''_1 — скорость в момент выключения двигателя, содержащая ошибку.

Разделив эти уравнения друг на друга, исключив U из правой части, разделив числитель и знаменатель правой части на местную круговую скорость в точке r_1 выключения двигательной установки и заменив ΔV на $V_1 - U$, получим:

$$\frac{\left(\frac{V''_1}{U} - 1\right)^2}{\left(\frac{V'_1}{U} - 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{v''_1}{v_c}\right)^2 - 2}{\left(\frac{v'_1}{v_c}\right)^2 - 2}. \quad (4.148)$$

В упрощенном случае $U = V_c$, то есть в случае круговой орбиты планеты и соосной касательной гелиоцентрической переходной орбиты V_1 является либо скоростью в перигелии

$$\frac{V_p}{V_c} \equiv V_p^* = \sqrt{\frac{2R_A}{R_p + R_A}}, \quad (4.149)$$

либо скоростью в афелии

$$\frac{V_A}{V_c} \equiv V_A^* = \sqrt{\frac{2R_P}{R_P + R_A}},$$

где индекс «*» обозначает скорость (гелиоцентрическую или планетоцентрическую), выраженную в единицах местной гелиоцентрической круговой скорости. Таким образом, уравнения (4.146) и (4.147) можно записать в виде

$$V_1^* = V_{A,P}^* = 1 + \sqrt{v_1^{*2} - v_p^{*2}}. \quad (4.150)$$

Уравнение (4.148) позволяет оценить влияние ошибки в скорости v_1 на ошибку в скорости V_1 . Для того чтобы установить связь между ошибкой в скорости v_1 и соответствующей ошибкой в скорости в любой точке гелиоцентрической орбиты, удаленной на расстояние R , необходимо записать уравнение (3.300) для гелиоцентрической орбиты:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{V_a^{*2}}{1 + \chi(V) \cos \eta_0}, \quad (4.151)$$

где $\chi(V)$ определяется выражением (3.301), в котором v необходимо заменить на V . Трансверсальная составляющая скорости определяется из выражения $V_a^2 = V_1^2 - V_r^2$. Для точного соосного перехода

$$V_r = 0 \quad \text{и} \quad V_a = V_1 = V_A \quad (\text{или } V_P).$$

Последующее исследование сильно упрощается, если в уравнении (4.151) пренебречь членом с V_r , входящим в функцию $\chi(V)$, определяемую выражением (3.301). Правомочность такого допущения связана с тем, что гелиоцентрическая скорость весьма велика и ошибка в радиальной составляющей скорости составляет малую часть касательной составляющей скорости (порядка $10^{-4} \div 3 \cdot 10^{-4}$). Из анализа, проведенного в главе 3, следует, что влияние этой ошибки пренебрежимо мало по сравнению с влиянием ошибки в трансверсальной составляющей скорости.

Поэтому в первом приближении можно положить $V_r = 0$. Это позволяет заменить $\chi(V)$ выражением $1 - V_1^{*2}$. Уравнение (4.151) при этом запишется в виде

$$\frac{R}{R_1} = \frac{V_1^{*2}}{1 + (1 - V_1^{*2}) \cos \eta_0}. \quad (4.152)$$

В силу выражения (4.150) уравнение (4.152) можно записать

в виде

$$\frac{R}{R_1} = \frac{1 + v_1^{*2} - v_p^{*2}}{1 + \cos \eta_{\odot} \left[1 - (1 + v_1^{*2} - v_p^{*2})^2 \right]}. \quad (4.153)$$

Значение R , соответствующее истинной аномалии $\eta_{\odot}$, является функцией двух различных гиперболических скоростей выхода $v_1^{*'} и $v_1^{*''}$:$

$$\frac{R''}{R'} = \left[\frac{1 + \sqrt{(v_1^{*'})^2 - v_p^{*2}}}{1 + \sqrt{(v_1^{*''})^2 - v_p^{*2}}} \right]^2 \frac{1 + \cos \eta_{\odot} \left\{ 1 - \left[1 + \sqrt{(v_1^{*'})^2 - v_p^{*2}} \right]^2 \right\}}{1 + \cos \eta_{\odot} \left\{ 1 - \left[1 + \sqrt{(v_1^{*''})^2 - v_p^{*2}} \right]^2 \right\}}. \quad (4.154)$$

Поскольку

$$\sqrt{v_1^{*2} - v_p^{*2}} = \frac{v_{\infty}}{V_c} \equiv v_{\infty}^*, \quad (4.155)$$

то уравнение (4.154) можно переписать в виде

$$\frac{R''}{R'} = \left(\frac{1 + v_{\infty}^{*''}}{1 + v_{\infty}^{*'}} \right)^2 \frac{1 + \cos \eta_{\odot} \left[1 - (1 + v_{\infty}^{*'})^2 \right]}{1 + \cos \eta_{\odot} \left[1 - (1 + v_{\infty}^{*''})^2 \right]}, \quad (4.156)$$

где в случае использования гелиоцентрической системы координат, если $\beta = 0$ и $U = V_c$,

$$v_{\infty}^* = \sqrt{\frac{2R_{P,A}}{R_p + R_A} - 1}. \quad (4.157)$$

Здесь $R_{P,A}$ означает R_p либо R_A в зависимости от того, как расположена орбита планеты-цели: внутри или вне орбиты планеты, с которой происходит старт. Если $\beta \neq 0$, то точное значение скорости определяется из выражения

$$V_1^2 = 2K_{\odot} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_A + R_p} \right) \quad (4.158)$$

или

$$V_1^* = \sqrt{2 - \frac{2R_1}{R_A + R_p}}, \quad (4.159)$$

и поэтому [см. также уравнение (4.20)], если $\beta \neq 0$ и $U = V_c$,

$$v_{\infty}^{*2} = 3 - \frac{2R_1}{R_A + R_p} - 2 \sqrt{2 - \frac{2R_1}{R_A + R_p}} \cos \beta. \quad (4.160)$$

Уравнение (4.156) справедливо для любых значений разности $v_1^{*''} - v_1^{*'}$. Для бесконечно малого значения этой разности коэффициент ошибки определяется производной $d(R/R_1)/dv_1^*$

аналогично случаю, когда движение происходит в центральном гравитационном поле.

Дифференцирование уравнения (4.153) дает:

$$\frac{d(R/R_1)}{dv_1^*} = 2v_1^* \frac{1+v_\infty^*}{v_\infty^*} \frac{\{1 + \cos \eta_\odot [1 - (1+v_\infty^*)^2]\} + (1+v_\infty^*) \cos \eta_\odot}{\{1 + \cos \eta_\odot [1 - (1+v_\infty^*)^2]\}^2}. \quad (4.161)$$

В случае, когда необходимо оценить только влияние смещения линии апсид, $\cos \eta_\odot = 1$ и выражение (4.161) приводится к виду

$$\frac{d\left(\frac{R_{\text{apsis}}}{R_1}\right)}{dv_1^*} = \frac{1+v_\infty^*}{v_\infty^*} \frac{4v_1^*}{[2 - (1+v_\infty^*)^2]^2}. \quad (4.162)$$

Если $\beta=0$ и $U=V_c$, то уравнение (4.162) записывается в еще более простом виде. В этом случае $v_\infty = V_1 - V_c$, $V_1^* = V_1/V_c$, так что

$$\frac{d\left(\frac{R_{\text{apsis}}}{R_1}\right)}{dv_1^*} = \frac{V_1^*}{V_1^* - 1} \frac{4v_1^*}{(2 - V_1^{*2})^2}, \quad (4.163)$$

где $V_1^* = \sqrt{2R_{P,A}/R_A + R_P}$. При малых (по сравнению с V_c) значениях ошибки Δv_1 (что всегда имеет место на практике) величина ΔR при данной истинной аномалии $\eta_\odot$ определяется из уравнения (4.161). Полагая $R_1 = R_\oplus$, где $R_\oplus$ — среднее значение расстояния от Земли до Солнца, получаем:

$$(\Delta R)_{\eta_\odot} = \frac{d\left(\frac{R}{R_\oplus}\right)}{dv_1^*} R_\oplus \frac{\Delta v_1}{V_c}. \quad (4.164)$$

Выражение для угла поворота линии апсид находится из уравнения (4.162):

$$\Delta R_{\text{apsis}} = \frac{d\left(\frac{R_{\text{apsis}}}{R_\oplus}\right)}{dv_1^*} R_\oplus \frac{\Delta v_1}{V_c}. \quad (4.165)$$

В частности, для касательных коапсидальных гелиоцентрических орбит при $\Delta v = 1$ *фут/сек*, $R_\oplus = 80,8184 \cdot 10^6$ *морских миль* и $V_c = 97770$ *фут/сек* можно определить смещение ΔR_{apsis} точки апсид в функции ошибки в скорости гиперболического выхода 1 *фут/сек* в следующем виде:

$$\Delta R_{\text{apsis}} = 826,6179 \frac{d\left(\frac{R_{\text{apsis}}}{R_\oplus}\right)}{dv_1^*} \left[\frac{\text{морские мили}}{\text{фут/сек}} \right]. \quad (4.166)$$

Зависимость (4.163) показана графически на рис. 4.25. Изображенная кривая соответствует кривой на рис. 3.64, построенной для поля центральной силы. При значении $V_1^* = 1$ коэффициент ошибки обращается в бесконечность. Этот факт согласуется с результатами анализа ошибок для центрального поля.

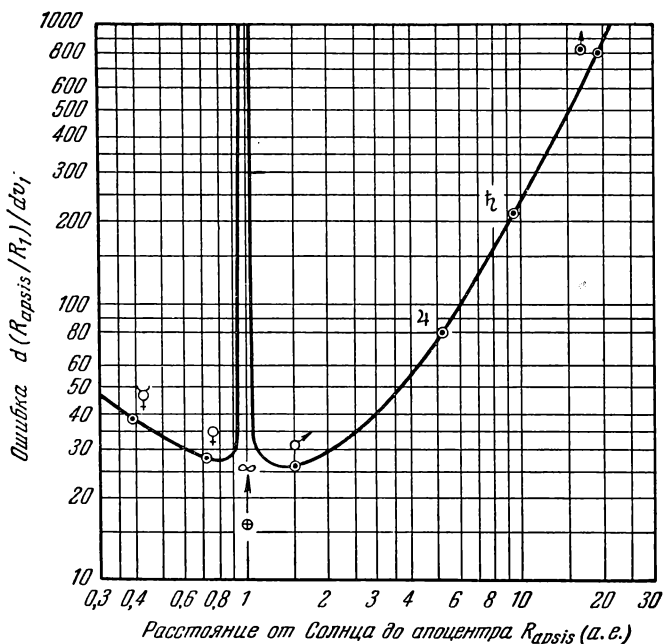


Рис. 4.25. Зависимость ошибок от расстояния до апоцентра планеты (переход «Земля — другая планета»).

в соответствии с которым при параболическом выходе коэффициент ошибки обращался в бесконечность. В случае, когда $V_1^* = 1$ и $v_1 = 2K/r_1$, результаты анализа ошибок в центральном и бицентральных полях совпадают. Это означает, что при малых отклонениях орбиты космического корабля от орбиты Земли коэффициент ошибки имеет очень большую величину. Этот коэффициент быстро уменьшается при изменении величины R_{apsis} в сторону удаления или приближения к Солнцу.

Интересно отметить, что две ближайшие к Земле планеты лежат вблизи точек минимума, за которыми кривая снова идет вверх (см. рис. 4.25). Правая ветвь кривой снова достигает бесконечности для $V_1^* = \sqrt{2}$, в то время как левая ветвь дости-

гает максимума (на рисунке не показано) и в конечном счете падает до нуля, поскольку из уравнения (4.163) следует, что для $V_1^* = 0$ производная обращается в нуль. Этот результат справедлив только для случая $\beta = 0$. Рис. 4.25 верен также только в случае, когда $\beta = 0$.

4.12. Обсуждение и выводы из анализа ошибок переходного движения в бицентральных полях

В предыдущих параграфах этой главы и в § 3.12 были получены соотношения для определения влияния ошибок в векторе скорости на параметры орбиты космического корабля. Были рассмотрены случаи движения в центральном поле и случай гиперболического выхода, при котором космический корабль переходит с орбиты спутника (*планетоцентрическое движение*) на орбиту кометы или планетоида (*гелиоцентрическое движение*).

При движении в центральном поле влияние радиальных ошибок уменьшается по мере приближения точки, в которой имеет место ошибка, к одной из точек апсид ($\sin \eta \rightarrow 0$) и достигает максимума в конечных точках фокального параметра. Азимутальные ошибки обнаруживают противоположную тенденцию. Исключением для обоих случаев является влияние ошибки на положение перигентра. В точках апсид наибольшее влияние на *положение* перигентра оказывают радиальные погрешности и минимальное влияние — азимутальные погрешности. Радиальная ошибка в скорости оказывает наибольшее влияние на апсидальное расстояние в том случае, если точная скорость является круговой (то есть $v_r = 0$). Влияние этой ошибки быстро уменьшается с ростом разности между действительной и круговой скоростями.

Азимутальная ошибка возрастает с увеличением скорости, причем она обращается в нуль при $v = 0$ и — в бесконечность при $v = v_c \sqrt{2}$.

Анализ ошибок в случаях, когда космический полет происходит сначала в одном, а затем в другом центральном поле, весьма сложен по той причине, что на ошибки в параметрах движения во втором центральном поле значительное влияние оказывают ошибки, появившиеся при выходе из первого центрального поля. Наиболее существенным в анализе ошибок движения в бицентральных полях является следующее положение: *даже при отсутствии ошибки в направлении планетоцентрической скорости и при наличии в момент выключения двигателя только ошибки в величине скорости возникает ошибка в направлении по отношению к гелиоцентрической орбите*. Коэффициент гелиоцентрической радиальной ошибки, обусловленной погрешностью

в планетоцентрической скорости, имеет весьма малую величину. Влияние планетоцентрических ошибок на элементы гелиоцентрической орбиты зависит от истинной аномалии как на планетоцентрической, так и на гелиоцентрической траектории. Коэффициенты ошибок для гелиоцентрического расстояния, особенно для расстояния до перигелия и афелия, имеют весьма большое значение. Из рис. 4.25 видно, что коэффициент ошибки велик вблизи Земли и при параболическом выходе из солнечной системы.

Т а б л и ц а 4.2

Геоцентрический и гелиоцентрический коэффициенты ошибок (смещение линии апсид при гомановском переходе)

1	2	3	4	5	6
Орбита старта	Орбита планеты цели	$\frac{d(r_{\text{apsis}}/r_i)}{d(v_1/v_e)}$	r_{apsis}/v_1 , морск. мили фут/сек.	$\frac{d(R_{\text{apsis}}/R_i)}{dv_1^*}$	R_{apsis}/v_1 , морск. мили фут/сек.
Орбита спутника (высота 556 км)	Орбита Марса	—	—	26,43	21 847
Орбита спутника (высота 556 км)	Орбита Венеры	—	—	27,98	23 129
Орбита Земли	Орбита Марса	7	5700	—	—
Орбита Земли	Орбита Венеры	2,75	2300	—	—

П р и м е ч а н и я:

столбец 1 определяет расстояние от апоцентра орбиты старта до центрального тела,

столбец 2 определяет расстояние от апоцентра планеты-цели до центрального тела,

столбец 3 — коэффициенты ошибки в случае центрального поля,

столбец 4 — смещение апоцентра планеты-цели, обусловленное ошибкой в трансверсальной скорости в момент отлета (случай центрального поля),

столбец 5 — коэффициенты ошибок в случае бицентрального поля,

столбец 6 — то же, что и столбец 4, но для бицентрального поля.

При осуществлении космических полетов высокие требования к точности выхода необходимо предъявлять лишь в случаях встреч с другими планетами. Требования к точности не являются высокими, если полет происходит в пространстве между

двумя планетами солнечной системы. В связи с этим важной задачей является определение частных производных от параметров планетных орбит. В таблице 4.2 приводятся численные значения производных, соответствующих расстояниям до Марса и Венеры. Эти значения получены для случаев центрального и бицентрального переходных маневров (в первом случае предполагается, что Земля не имеет гравитационного поля).

В таблице 4.3 приводятся обобщенные «бицентральные» ошибки, относящиеся к выходу из гравитационного поля Земли и последующему движению к другим планетам, орбиты которых являются внутренними по отношению к орбите Нептуна.

Из этой таблицы видно, что ошибка в 1 *фут/сек* в скорости в момент выключения двигательной установки на высоте 556 км (300 *морских миль*) над поверхностью Земли приводит к отклонению траектории от центра Венеры примерно на 42 800 км (23 129 *морских миль*).

Поскольку диаметр Венеры равен примерно 12 400 км (6700 *морских миль*), то требуемая точность в определении момента выключения двигательной установки, необходимая для попадания в Венеру, составляет 0,088 *м/сек* (0,29 *фут/сек*) при расчетной скорости $v_h = 11\,018$ *м/сек* (36 126 *фут/сек*). Для Марса, поскольку его диаметр меньше, величина ΔR_{apsis} несколько меньше и теоретическая погрешность в скорости в момент выключения двигательной установки не должна превосходить 0,05 *м/сек* (0,16 *фут/сек*) [расчетная скорость выхода 11 130 *м/сек* (36 507 *фут/сек*)].

При выполнении практических расчетов необходимо учитывать притяжение планеты-цели. Кроме того, космический аппарат, стартующий на другие планеты, обязательно должен иметь маломощные двигатели, вырабатывающие корректирующие импульсы после выхода аппарата в окололунное пространство. Траектория аппарата может быть окончательно скорректирована при его движении по гелиоцентрической переходной орбите. Для Венеры и Марса коэффициент ошибки в случае движения по гелиоцентрической орбите уменьшается до величины соответственно 3700 км (2000 *морских миль*) и 11 112 км (6000 *морских миль*). В связи с этим для попадания в Венеру допустимая ошибка в скорости может составлять величину $\pm 0,45$ *м/сек* ($\pm 1,5$ *фут/сек*) или даже больше, если принять во внимание притяжение планеты.

При определении приведенных выше величин учитывалось смещение точек апсид орбит планет в пространстве. Однако при полетах к космическим телам ошибка в скорости влечет за собой также и ошибку во времени полета. В результате возникает дополнительная ошибка во времени переходного движения

Таблица 4.3

Смещение точки апсид при межпланетном переходе по гомановскому эллипсу с Земли (без учета влияния гравитационного поля планеты-цели)

	1	2	3	4	5
Планета-цель	$a, \text{ а. е.}$	$v_{\infty} = \frac{\Delta V_{\text{apsids}}}{V_{c, \oplus}}$	$v_h^* = \frac{v_h}{V_{c, \oplus}}$	$\frac{d\left(\frac{R_{\text{apsids}}}{R_1}\right)}{dv_h^*}$	$\frac{\Delta R_{\text{apsids}}}{\Delta v_h^*},$ <i>морск. мили</i> <i>фут/сек</i>
Меркурий . . .	0,3871	0,25291	0,4401	47,12	38 950
Венера	0,7233	0,08377	0,3695	27,98	23 129
Марс	1,5237	0,09886	0,3734	26,43	21 847
Юпитер	5,2028	0,29520	0,4656	78,60	64 968
Сатурн	9,5388	0,34514	0,4988	214,04	176 925
Уран	19,1820	0,3794	0,5226	802,68	663 512

П р и м е ч а н и я:

столбец 1 — большая полуось орбиты планеты,

столбец 2 — гиперболический избыток в единицах гелиоцентрической круговой скорости при удалении на 1 а. е.,

столбец 3 — гиперболическая скорость выхода при выключении двигательной установки вблизи Земли в единицах гелиоцентрической скорости движения по круговой орбите радиуса 1 а. е.,

столбец 4 — коэффициент ошибки [см. уравнение (4.162)] для соответствующей планеты-цели,

столбец 5 — коэффициент ошибки.

Значения констант:

круговая скорость при среднем удалении Земли от Солнца $V_{c, \oplus} = 29\,820 \text{ м/сек}$ (97 770 фут/сек),

среднее удаление Земли от Солнца равно 1 а. е. = $149,6757 \cdot 10^6 \text{ км}$ ($80,8184 \cdot 10^6 \text{ морских миль}$),

гравитационный параметр Солнца $K_{\odot} = 1,324\,948 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{сек}^2$,

гравитационный параметр Земли $K_{\oplus} = 3,9858 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{сек}^2$,

высота полета космического аппарата в момент выхода $y = 556 \text{ км}$ (300 морских миль),

соответствующая параболическая скорость $v_p = 10\,738 \text{ м/сек}$ (35 208 фут/сек).

(«временная ошибка»), обусловленная движением планеты-цели. К счастью, «временная ошибка» и ошибка положения действуют в противоположные стороны, так что для переходных углов $\leq 180^\circ$ расстояние до планеты (величина промаха) меньше, чем смещение точки пересечения переходной орбиты с орбитой планеты. Это объясняется тем, что *положительная ошибка в скорости* приводит к смещению точки пересечения орбит в направлении против хода часовой стрелки. Поскольку при этом *уменьшается время* достижения космическим кораблем орбиты планеты, то к этому моменту планета переместится также про-

тив хода часовой стрелки. Такой же результат будет иметь место при отрицательной ошибке в скорости. В обоих этих случаях предполагается, что переход осуществляется с внутренней планеты на внешнюю. Однако такая же тенденция наблюдается и при переходе с внешней планеты на внутреннюю.

Полученные выше уравнения позволяют рассчитать влияние ошибок на параметры гелиоцентрической переходной орбиты. Оценка смещения гелиоцентрического апоцентра при ошибке в скорости 1 м/сек ясно показывает, что чисто «баллистические» полеты к другим планетам предъявляют высокие требования к точности выключения двигательной установки, лежащей в пределах точности определения астрономических констант. В связи с этим космический аппарат должен иметь бортовую навигационную систему, связанную с двигателем малой тяги, что обеспечит возможность коррекции орбиты при подлете аппарата к планете-цели.

Численный пример. Рассмотрим случай полета космического аппарата к Марсу ($\Delta t \approx 160$ сут; касательный выход) при следующих начальных условиях:

$$\sqrt{\frac{2K_{\oplus}}{r_p}} = v_p = 11\,102 \text{ м/сек},$$

$$v_{\infty} = 4820 \text{ м/сек}.$$

Отсюда

$$v_1 = 12\,170 \text{ м/сек} = v_p,$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{v_p v_{\infty}}{K_{\oplus}/r_p} = 0,954, \quad \Phi = 43^{\circ}, 65,$$

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta v_p} = \frac{2 \left(1 + \frac{v_{\infty}^2}{K_{\oplus}/r_p} \right)}{v_{\infty} \sec^2 \Phi} = 28,90 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{м/сек}} = 59'' \text{ на } 1 \text{ м/сек},$$

$$\frac{\Delta v_{\infty}}{\Delta v_p} = \frac{v_p}{v_{\infty}} = 2,5.$$

Пусть планетоцентрическая ошибка в начальной скорости равна $\Delta v_p = 1,2$ м/сек. Тогда

$$\Delta \Phi = 3,52 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'12'', \quad \Delta v_{\infty} = 3 \text{ м/сек}.$$

Таким образом, ошибка в гелиоцентрической скорости выхода равна 3 м/сек. Ошибка в направлении вектора скорости равна:

$$\Delta V_r = v_{\infty} \sin(\Delta \Phi) = 1,67 \text{ м/сек};$$

поскольку гелиоцентрическая скорость выхода равна $V_1 = 29\,800 \text{ м/сек} + 4820 \text{ м/сек} = 34\,620 \text{ м/сек}$, то $\frac{\Delta V_r}{V_1} = \Delta \beta =$

$= 4,076 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$, а при $\Delta v_p = 1,2 \text{ м/сек}$ величина $\Delta\beta = 3,343 \times 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{м/сек}}$, то есть ошибка $\Delta\beta$ является пренебрежимо малой.

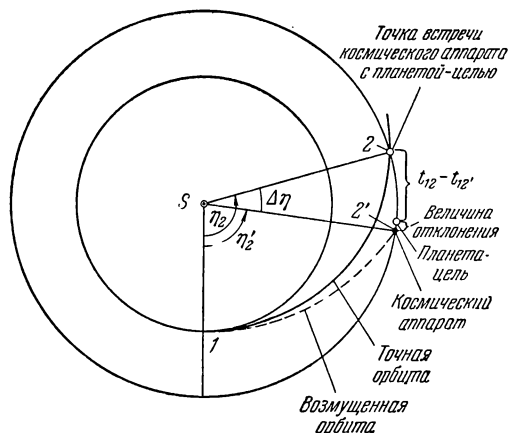


Рис. 4.26. Определение ошибок смещения.

При точных начальных условиях выхода элементы гелиоцентрической переходной орбиты имеют следующие значения (индекс «2» соответствует точке пересечения с орбитой Марса):

$$V_1 = 34\,595 \text{ м/сек}, \quad V_c = V_\oplus = 29\,780 \text{ м/сек},$$

$$\theta_1 = 0,$$

$$\eta_2 = 123^\circ,$$

$$e_\odot = 0,34959,$$

$$a_\odot = 2,26 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1,5375 \text{ а. е.},$$

$$R_2 = 2,42 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1,646 \text{ а. е.}$$

Записав уравнение (3.312) с соответствующими индексами:

$$\frac{d\eta_2}{dV_1} = + 2 \frac{V_1^2}{e_\odot^2 V_1 \sin \eta_2} \left[\frac{a_\odot}{R_2} (1 + e_\odot^2) - e_\odot \left(\frac{a_\odot}{R_2} \right) (1 - e_\odot^2) - 1 \right],$$

получим:

$$\frac{d\eta_2}{dV_1} \approx \frac{\Delta\eta_2}{\Delta V_1} = - 32 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{м/сек}} \approx - 64'' \text{ на } 1 \text{ м/сек}.$$

Используя эту величину, можно рассчитать ошибку, отнесенную к ошибке 1 м/сек в гелиоцентрической скорости выхода (рис. 4.26):

$$\Delta r_\varnothing = R_2 \Delta\eta^{(\cdot)},$$

Поскольку

$$1'' = 760 \text{ км/а. е.},$$

а $R_2 = 1,646 \text{ а. е.}$, получим:

$$\frac{\Delta r_{\sigma}}{\Delta V_1} \approx -82080 \frac{\text{км}}{\text{м/сек}}.$$

Производная от времени перехода по скорости V_1 может быть определена из уравнения (3.319с), поскольку точка выхода расположена в перигелии переходного эллипса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{P_2}}{\partial V_1} &= \sqrt{\frac{a_{\odot}}{K_{\odot}}} \left[\frac{3}{2} (E_2 - e_{\odot} \sin E_2) \frac{\partial a_{\odot}}{\partial V_1} + \right. \\ &\quad \left. + a_{\odot} (1 - e_{\odot} \cos E_2) \frac{\partial E_2}{\partial V_1} - a_{\odot} \sin E_2 \frac{\partial e_{\odot}}{\partial V_1} \right], \\ \frac{\partial a_{\odot}}{\partial V_1} &= \frac{2V_1 a_{\odot}^2}{K_{\odot}} = 2,757 \cdot 10^7 \frac{\text{км}}{\text{км/сек}}, \\ \frac{\partial e_{\odot}}{\partial V_1} &= \frac{2 \left(\frac{V_1}{V_c} \right)^2}{V_1} = 7,8021 \frac{1}{\text{м/сек}}. \end{aligned}$$

Из уравнения (3.318d) получим:

$$\frac{\partial E_2}{\partial V_1} = \frac{\cos E_2 \frac{\partial e_{\odot}}{\partial V_1} - \frac{R_2}{a_{\odot}} \frac{\partial a_{\odot}}{\partial V_1}}{e_{\odot} \sin E_2} = -3,986 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{м/сек}}.$$

Таким образом,

$$\Delta t_{12} = 41 \frac{\text{мин}}{\text{м/сек}} = 0,683 \frac{\text{час}}{\text{м/сек}}.$$

Поскольку Марс перемещается со скоростью около 88 800 км/час, то ошибка в скорости 1 м/сек, которой соответствует ошибка во времени подлета 37 мин, приведет к тому, что точка пересечения траектории космического аппарата с орбитой Марса будет располагаться на удалении 25 000 км — 18 500 км = 6500 км от Марса.

Результаты, приведенные в примере, свидетельствуют о высокой чувствительности межпланетных перелетов к ошибкам в начальных условиях старта.

4.13. Анализ ошибок при гиперболической встрече

В данном параграфе рассматриваются ошибки в параметрах движения при гиперболической встрече. Эта задача отличается от рассмотренных выше задач тем, что в данном случае невозможно получить конечное выражение, связывающее

начальные ошибки с конечными. Влияние начальных ошибок на параметры траектории встречи может быть оценено лишь после вычисления значений промежуточных параметров, определяющих гиперболическое движение космического аппарата относительно возмущающего тела.

Чтобы проиллюстрировать это положение и определить подход к анализу ошибок, выпишем уравнения § 4.5 в необходимой последовательности и соответствующей форме. Для определенности рассмотрим случай использования Луны для осуществления маневра выхода космического аппарата, запущенного с Земли, либо для его захвата при возвращении на Землю. Пусть K_M и K — гравитационные параметры Земли и Луны, u — орбитальная скорость Луны, v — скорость космического аппарата по отношению к Земле, r и ρ — удаление космического аппарата соответственно от Земли и Луны и w_∞ — гиперболический избыток скорости по отношению к Луне, то есть скорость движения космического аппарата относительно Луны. Для анализа гиперболической встречи должны быть известны четыре переменных. Такими переменными являются: скорость u , скорость подлета v_1 , угол β_1 , под которым орбита Луны пересекается с траекторией аппарата, и кратчайшее расстояние до Луны ρ_P . Тогда

$$w_\infty^2 = u^2 + v_1^2 - 2uv_1 \cos \beta, \quad (4.167)$$

$$a = \frac{K}{w_\infty^2}, \quad (4.168)$$

$$\xi_1 = \arcsin \left(\frac{v_1}{w_\infty} \sin \beta_1 \right) \quad (4.169)$$

(если $v_1 \cos \beta_1 < u$, то $\xi'_1 = 180^\circ - \xi_1$),

$$e = \frac{\rho_P}{a} + 1, \quad (4.170)$$

$$\Phi = \operatorname{arcsec} e, \quad (4.171)$$

$$\Delta \xi = 2 \operatorname{arccosec} e, \quad (4.172)$$

$$\xi_2 = \xi_1 - \Delta \xi = \arcsin \left(\frac{v_1}{w_\infty} \sin \beta_1 \right) - 2 \operatorname{arccosec} e, \quad (4.173)$$

$$v_2 = \sqrt{u^2 + w_\infty^2 + 2uw_\infty \cos \xi_2}, \quad (4.174)$$

$$\beta_2 = \arcsin \left(\frac{w_\infty}{v_2} \sin \xi_2 \right). \quad (4.175)$$

Орбитальная энергия перед встречей по отношению к Земле равна:

$$h_1 = v_1^2 - \frac{2K_M}{r_\zeta}, \quad (4.176)$$

где r_{ζ} — расстояние от Земли до Луны. После встречи энергия равна:

$$h_2 = v_2^2 - \frac{2K_M}{r_{\zeta}}, \quad (4.177)$$

и для гиперболического выхода при $h_2 > 0$

$$h_2 = v_{\infty}^2, \quad (4.178)$$

где v_{∞} — гиперболический избыток скорости по отношению к Земле.

Необходимость расчета промежуточных параметров гиперболы вытекает из процедуры расчета ошибок.

Предположим, что известна орбитальная скорость u , а в параметрах v_1 , β_1 или ρ_P или в произвольной их комбинации содержатся ошибки. Вывести конечные выражения для расчета ошибок во всех трех параметрах не представляется возможным. Эту задачу можно решить только методом численного интегрирования. Следовательно, ошибки в параметрах v_1 , β_1 или ρ_P следует рассматривать отдельно с целью получения оценки их относительного влияния.

Для этой цели необходимо получить выражения для ряда основных частных производных, которые составят основу анализа. В полученных ниже выражениях эти частные производные подчеркнуты.

1. Ошибки в v_1 или β_1 .

$$\frac{\partial w_{\infty}}{\partial v_1} = \frac{v_1 - u \cos \beta_1}{w_{\infty}}, \quad (4.179)$$

$$\frac{\partial w_{\infty}}{\partial \beta_1} = \frac{uv_1}{w_{\infty}} \sin \beta_1, \quad (4.180)$$

$$\frac{\partial a}{\partial w_{\infty}} = -\frac{2K}{w_{\infty}^3}, \quad (4.181)$$

$$\frac{\partial a}{\partial v_1} = \frac{\partial a}{\partial w_{\infty}} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial v_1}, \quad (4.182)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \beta_1} = \frac{\partial a}{\partial w_{\infty}} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial \beta_1}, \quad (4.183)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial v_1} = \frac{1 - \frac{v_1}{w_{\infty}^2} (v_1 - u \cos \beta_1)}{\sqrt{w_{\infty}^2 - v_1^2 \sin^2 \beta_1}} \sin \beta_1, \quad (4.184)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta_1} = \frac{v_1 \left(\cos \beta_1 - \frac{uv_1}{w_{\infty}^2} \sin^2 \beta_1 \right)}{\sqrt{w_{\infty}^2 - v_1^2 \sin^2 \beta_1}}, \quad (4.185)$$

$$\frac{\partial e}{\partial a} = 1 - \frac{\rho_P}{a^2}, \quad (4.186)$$

$$\frac{\partial e}{\partial v_1} = \frac{\partial e}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_\infty} \frac{\partial w_\infty}{\partial v_1}, \quad (4.187)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_1} = \frac{\partial e}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_\infty} \frac{\partial w_\infty}{\partial \beta_1}, \quad (4.188)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e} = \frac{1}{e \sqrt{e^2 - 1}}, \quad (4.189)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_\infty} \frac{\partial w_\infty}{\partial v_1}, \quad (4.190)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_\infty} \frac{\partial w_\infty}{\partial \beta_1}, \quad (4.191)$$

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial e} = - \frac{1}{e \sqrt{e^2 - 1}}, \quad (4.192)$$

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial v_1} = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial v_1}, \quad (4.193)$$

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \beta_1}, \quad (4.194)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v_1} = \frac{\sin \beta_1}{\sqrt{w_\infty^2 - v_1^2 \sin^2 \beta_1}} \left(1 - \frac{v_1 - u \cos \beta_1}{w_\infty^2} \right) + \frac{\frac{\partial e}{\partial v_1}}{e \sqrt{e^2 - 1}}, \quad (4.195)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1} = \frac{v_1 \left(\cos \beta_1 - \frac{\sin^2 \beta_1}{w_\infty^2} \right)}{\sqrt{w_\infty^2 - v_1^2 \sin^2 \beta_1}} + \frac{\frac{\partial e}{\partial \beta_1}}{e \sqrt{e^2 - 1}}, \quad (4.196)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = - \frac{w_\infty^2 u \sin \xi_2}{V Q} \quad (4.197)$$

$$(\text{где } Q = u^2 + v_1^2 + 2w_\infty^2 u v_1 \cos \xi_2 - 2u v_1 \cos \beta_1), \quad (4.198)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_1}, \quad (4.199)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1}, \quad (4.200)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} = \frac{v_2 w_\infty \cos \xi_2 + \frac{u}{v_2} w_\infty^2 \sin^2 \xi_2}{v_2^2 \sqrt{1 - \left(\frac{w_\infty}{v_2} \right)^2 \sin^2 \xi_2}}, \quad (4.201)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial v_1} = \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_1}, \quad (4.202)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1}, \quad (4.203)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial v_2} = \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2}. \quad (4.204)$$

Очевидно, что влияние ошибок в v_1 или β_1 на значения параметров v_2 или β_2 может быть оценено из выражений (4.195)—(4.204) без использования выражений (4.179)—(4.194).

Влияние ошибки в v_1 или β_1 на значение орбитальной энергии h_2 определяется из выражений:

$$\frac{\partial h_2}{\partial v_2} = 2v_2 - \frac{2K_M}{r_\zeta}, \quad (4.205)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial v_1} = \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_1}, \quad (4.206)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1}. \quad (4.207)$$

Если $h_2 > 0$, то влияние ошибки на гиперболический избыток скорости v_∞ можно оценить с помощью выражений:

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial v_2} = \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 - \frac{2K_M}{r_\zeta}}} = \frac{v_2}{\sqrt{h_2}}, \quad (4.208)$$

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial v_1} = \frac{\partial v_\infty}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial v_1}, \quad (4.209)$$

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial \beta_1} = \frac{\partial v_\infty}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \beta_1}. \quad (4.210)$$

2. Ошибка в ρ_P .

Предположим, что значения v_1 и β_1 не содержат ошибок, а значение ρ_P изменилось вследствие ошибки в определении момента приближения Луны к Земле на минимальное расстояние. В данном случае соотношения до (4.169) включительно являются справедливыми. При этом изменится величина эксцентриситета:

$$\frac{\partial e}{\partial \rho_P} = \frac{1}{a}, \quad (4.211)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_P} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \rho_P}, \quad (4.212)$$

где $\partial \Phi / \partial e$ определяется уравнением (4.189). Далее, используя

выражения

$$\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial \rho_P} = \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \rho_P}, \quad (4.213)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \Delta \zeta} = \zeta_1 - 1, \quad (4.214)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_P} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial \Delta \zeta} \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial \rho_P} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial \Delta \zeta} \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \rho_P}, \quad (4.215)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \rho_P} = \frac{\partial v_2}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_P} = \frac{\partial v_2}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \Delta \zeta} \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \rho_P}, \quad (4.216)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \rho_P} = \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_P}, \quad (4.217)$$

получим:

$$\frac{\partial h_2}{\partial \rho_P} = \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \rho_P}, \quad (4.218)$$

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial \rho_P} = \frac{\partial v_\infty}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \rho_P}. \quad (4.219)$$

В рассматриваемом случае в отличие от предыдущих невозможно получить единое конечное выражение для ошибок. Поэтому в следующем параграфе мы рассмотрим численный пример.

4.14. Гиперболическая встреча и оценка влияния ошибок (численный пример)

На рис. 4.27 изображены зависимости эксцентриситета e_Φ геоцентрической гиперболы выхода, а также величин w_∞ , $\Delta \zeta$ и β_1 от абсолютной скорости выхода v_{st} по отношению к Земле (точка выхода расположена на высоте 556 км над поверхностью Земли). Кривая $\Delta \zeta$ показывает, что изменение орбитальной энергии, обусловленное влиянием гравитационного поля Луны, прямо пропорционально отклонению $\Delta \zeta$ вектора скорости w_∞ .

Рассмотрим теперь задачу определения точных условий¹⁾, при которых в максимальной степени используется влияние гравитационного поля Луны для разгона космического аппарата, движущегося по оптимальному переходному эллипсу. Для получения такого результата гиперболический избыток скорости должен в 1,75 раза превышать параболическую скорость в точке,

¹⁾ В рамках следующих упрощающих предположений: орбиты Земли, Луны и Венеры — круговые, а траектория движения космического аппарата по отношению к Земле и Луне является точной гиперболой.

удаленной от Земли на радиус лунной орбиты, то есть скорость¹⁾ $v_{\infty} = 2452$ м/сек (8110 фут/сек). Из уравнения (4.33)

$$\Delta\zeta = |\zeta_1 - \zeta_2|$$

(градусы)

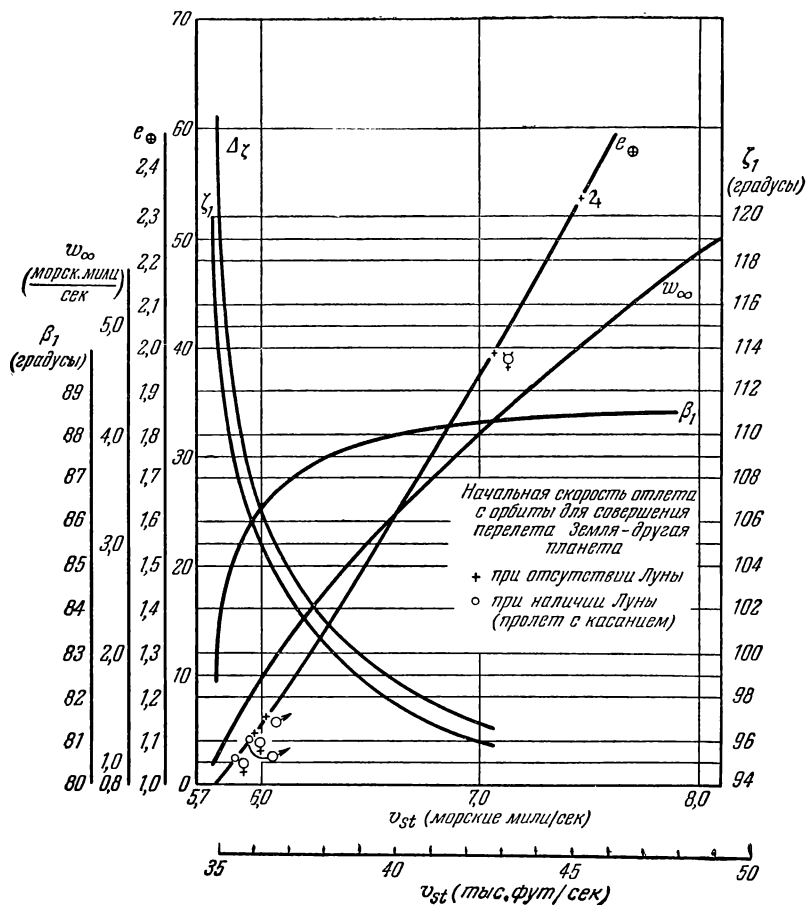


Рис. 4.27. Использование гиперболической встречи с Луной.

применительно к нашей задаче геоцентрическая скорость после

¹⁾ В рассматриваемом случае скорости и расстояния относительно Земли обозначаются малыми буквами, а относительно Солнца — заглавными буквами. Солнце является центральным телом, геоцентрическая гипербола — возмущенной траекторией первого порядка, а лунная гипербола — возмущенной траекторией второго порядка.

встречи определяется выражением

$$v_2 = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2K_\oplus}{r_\zeta}}, \quad (4.220)$$

где r_ζ — расстояние от Луны до Земли. К сожалению, направление этого вектора скорости, определяемое углом β_2 , не может быть вычислено из уравнения (4.175), поскольку w_∞ и ξ_2 еще неизвестны. Численные значения этих параметров не могут быть определены, поскольку на начальные условия наложены два ограничения: старт происходит с Земли, а траектория проходит на минимальном удалении от Луны ($\rho_p = \rho_{00}$, где ρ_p — наименьшее расстояние от космического аппарата до центра Луны, а ρ_{00} — радиус Луны). Первое ограничение является очевидным, а второе вытекает из условия максимального увеличения орбитальной энергии при гиперболической встрече с Луной¹⁾.

В связи с этим оказывается необходимым определить ξ_2 и w_∞ либо методом проб и ошибок, либо графическим способом. При выполнении расчетов без использования специальных вычислительных средств графический метод является единственным возможным практическим методом. Достижимая точность интерполяции при этом удовлетворяет требованиям, предъявляемым к точности подобных расчетов.

На рис. 4.27 показана типичная кривая графической интерполяции. Из рисунка видно, что в случае, если траектория касается поверхности Луны, требуемый геоцентрический эксцентриситет гиперболы для выхода на переходную орбиту «Земля — Венера» уменьшается с 1,1108 до 1,055. Обозначим соответствующие две точки на кривой $e_\oplus$ (рис. 4.27) крестом и кружком. Из графика видно, что величина v_{st} уменьшилась с 11 033 м/сек [36 176 фут/сек (5,95 морской мили/сек)] до 10 867 м/сек [35 629 фут/сек (5,86 морской мили/сек)]. Проведя вертикальную линию через последнюю точку на абсциссе, видим, что величина w_∞ уменьшилась до 2,44 км/сек (1,32 морской мили/сек). В том же случае, когда гравитационное поле Луны не учитывается, имеем $w_\infty = 3,015$ км/сек (1,628 морской мили/сек). Подобным образом можно определить: $\beta_1 = 86^\circ$, $\xi_1 = 109^\circ$ и $\Delta\xi = 38^\circ$, откуда $\xi_2 = 71^\circ$. Далее могут быть определены значения и всех других параметров.

¹⁾ Это положение остается справедливым также и для случая возврата с Венеры на Землю, поскольку в этом случае траектория космического аппарата должна быть изменена таким образом, чтобы его гиперболическая скорость при пролете около Земли была минимальной. Таким образом, условия возврата аналогичны рассмотренным выше, с той лишь разницей, что движение при возврате происходит в обратном порядке.

Таким образом, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 v_{\infty} &= 2452 \text{ м/сек (8110 фут/сек)}, \\
 v_2 &= 2852 \text{ м/сек (9350 фут/сек)}, \\
 w_{\infty} &= 2446 \text{ м/сек (8020 фут/сек)}, \\
 \xi_1 &= 109^{\circ}, \\
 \Delta\xi &= 38^{\circ}, \\
 \xi_2 &= 71^{\circ}, \\
 \beta_2 &= 12^{\circ}, 284, \\
 e &= 3,07, \\
 \Phi &\approx 71^{\circ}, \\
 \rho_P &\approx \rho_{00} = 1852 \text{ км (1000 морских миль)} - \text{по определению}, \\
 a &= 895 \text{ км (483 морских мили)}, \\
 \beta_1 &= 86^{\circ}, \\
 v_1 &= 2300 \text{ м/сек (7540 фут/сек)}.
 \end{aligned}$$

В результате проведенных расчетов определены как начальные условия выхода, так и положение точки пересечения траектории космического корабля с орбитой. Поскольку скорость v_{∞} должна составлять величину 2452 м/сек (8110 фут/сек) и иметь направление, строго противоположное направлению движения Земли, то асимптоты гиперболы должны быть параллельны касательной к орбите Земли в точке выхода. Из этого вытекает, что ось «Земля — Луна» должна составлять с осью «Земля — Солнце» угол $\Phi \approx 71^{\circ}$ (предполагается, что Земля движется по круговой орбите). На рис. 4.28 приведены для сравнения схемы полетов космического аппарата к Венере с использованием и без использования гравитационного поля Луны.

Приведенные выше значения не являются абсолютно точными. Однако с их помощью вполне можно оценивать влияние ошибок. Считая, что скорость движения Луны $u = 1006 \text{ м/сек}$, оценим влияние единичной ошибки в скорости ($\Delta v_1 = 1 \text{ м/сек}$) согласно уравнению (4.179):

$$\Delta w_{\infty} = \frac{v_1 - u \cos \beta}{w_{\infty}} \Delta v_1 \approx 0,91 \text{ м/сек}$$

или

$$\frac{\partial w_{\infty}}{\partial v_1} = 0,91.$$

Из уравнения (4.181)

$$\Delta a = - \frac{2K}{w_{\infty}^3} \Delta w_{\infty} \approx - 197 \text{ м},$$

где $\Delta\omega_\infty = 0,27$ м/сек, так что

$$\frac{\partial a}{\partial \omega_\infty} = -\frac{197}{0,27} = -724 \text{ сек.}$$

Другими словами, ошибка в длине большой полуоси равна

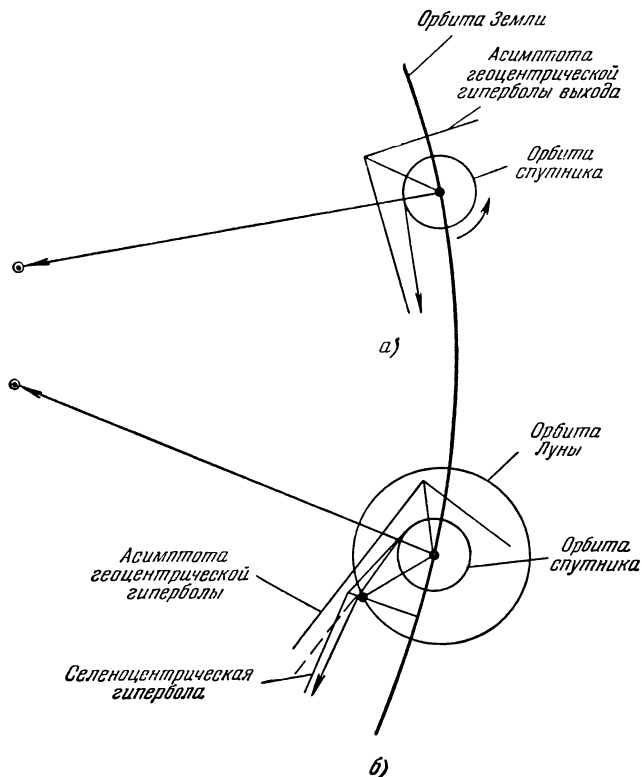


Рис. 4.28. Схема выхода космического аппарата на переходную орбиту «Земля — Венера» с использованием и без использования гравитационного поля Луны.

а) Выход при отсутствии Луны; б) выход с использованием гравитационного поля Луны.

724 м = 0,724 км при ошибке 1 м/сек в скорости ω_∞ . Таким образом, из уравнения (4.182) получим:

$$\frac{\partial a}{\partial v_1} = -0,91 \cdot 724 = -659 \text{ сек,}$$

то есть ошибка 1 м/сек в скорости v_1 приводит к ошибке 659 м в длине большой полуоси. Из уравнения (4.184) находим:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial v_1} = 5,33 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \approx 11 \text{ дуг. сек} \approx 0^{\circ},003.$$

Из уравнения (4.186)

$$\frac{\partial e}{\partial a} = 1 - \frac{1000}{483^2} = 0,99571.$$

Поэтому из уравнения (4.187) следует, что

$$\frac{\partial e}{\partial v_1} = 0,99571 (-0,119) 0,91 = -0,1075.$$

Полученный результат свидетельствует о высокой чувствительности параметров траектории к начальным ошибкам. При изменении скорости v_1 на 1 м/сек резко возрастает гиперболичность траектории, поскольку эксцентриситет изменяется на сравнительно большую величину, равную 0,354. Влияние ошибки на величину половины угла между асимптотами можно оценить из уравнений (4.189) и (4.190):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e} = 0,111,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = 0,111 (-0,354) \approx -0,0394 \frac{\text{рад}}{\text{м/сек}}.$$

Это довольно большая величина, если учесть, что асимптота определяет направление траектории выхода из гравитационного поля. Изменение угла $\Delta \zeta$ имеет, согласно уравнениям (4.192) и (4.193), противоположный знак, хотя по величине это изменение равно изменению угла Φ , поскольку угол $\Delta \zeta$ является дополнительным к углу Φ . Аналогичным образом частная производная от ζ_2 по v_1 равна по величине производной $\frac{\partial \Phi}{\partial v_1}$. Проверка с помощью уравнения (4.195) подтверждает этот факт:

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial v_2} = -0,0394 \text{ рад}.$$

Наконец, из уравнения (4.197) получаем:

$$\frac{\partial v_2}{\partial \zeta_2} = -658.$$

Из уравнения (4.199)

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = (-658) (-0,0394) = 25,7$$

и из уравнения (4.208)

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial v_2} = 1,12,$$

так что окончательно получаем:

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial v_1} = 28,8.$$

Таким образом, при ошибке в скорости подлета 1 м/сек ошибка в скорости выхода из гравитационного поля Луны

составит 25,7 м/сек, а ошибка в гиперболическом избытке скорости составит 28,8 м/сек.

Большую величину коэффициента ошибки в данном случае можно объяснить, используя результаты, полученные при рассмотрении движения тела в центральном поле.

В § 3.10 было показано, что ошибка в гелиоцентрической скорости, равная 1 м/сек, приводит к смещению точки перигелия на 11 000 км. Таким образом, если в скорости движения по гиперболе выхода будет допущена ошибка в 1 м/сек, то без учета влияния гравитационного поля Луны точка перигелия сместится на указанную выше величину. Однако если космический аппарат использует воздействие гравитационного поля Луны так, как описано выше, то та же ошибка 1 м/сек в геоцентрической скорости, допущенная до момента встречи, приведет к смещению точки перигелия на 320 000 км.

Подобным же образом, хотя и в меньшей степени, гиперболическая встреча увеличивает влияние ошибок в направлении вектора скорости и увеличивает, еще в меньшей степени (хотя довольно существенно), влияние ошибок в определении момента выхода, которые приводят к ошибкам в определении минимального расстояния r_p .

Указанные обстоятельства уменьшают практическую ценность использования гиперболической встречи с Луной при полетах к Венере или Марсу. Требуемая точность выключения двигательной установки вблизи Земли лежит за пределами существующих технических возможностей даже при условии, что астрономические константы (массы Земли, Луны и расстояния от Земли и Венеры до Солнца) были определены с точностью, достаточной для вычисления точного теоретического значения v_1 . Использование гиперболической встречи с Луной для получения энергетического выигрыша является целесообразным лишь в том случае, когда требования к точности невысоки (например, при выводе космической станции на более или менее произвольную гелиоцентрическую межпланетную орбиту) или в случае, когда имеется возможность коррекции орбиты после выхода из поля притяжения Луны (например, при использовании автоматической межпланетной станции весьма совершенной конструкции или пилотируемого космического корабля).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось;
- b — малая полуось;
- E — энергия;

- e — эксцентриситет;
 h — постоянная интеграла энергии;
 K — гравитационный параметр центрального тела;
 M — масса центрального тела;
 m — масса тела, на которое действует поле тяготения;
 $n = r_A/r_P$;
 p — параметр конического сечения;
 R — расстояние от Солнца;
 r — расстояние от центра притяжения;
 r_{00} — радиус планеты;
 $\bar{r}$ — расстояние до планеты при оптимальном одноимпульсном маневре захвата или выхода;
 U — гелиоцентрическая скорость движения небесного тела (главным образом планеты);
 u — планетоцентрическая скорость небесного тела (главным образом Луны); в общем случае — скорость движения произвольного небесного тела;
 V — гелиоцентрическая скорость космического аппарата;
 v — планетоцентрическая скорость космического аппарата;
 v_{∞} — гиперболический избыток планетоцентрической скорости;
 W — селеноцентрическая скорость космического аппарата;
 w_{∞} — гиперболический избыток селеноцентрической скорости;
 $y = r - r_{00}$ — высота;
 β — угол между векторами скорости подлета по невозмущенной и возмущенной орбитам;
 $\Delta\zeta$ — угол изменения направления движения космического аппарата при гиперболической встрече;
 $\sigma_{AP} = \Delta v_A + \Delta v_P$,
 $\sigma_{PA} = \Delta v_P + \Delta v_A$ } общие условия осуществления маневра
 } «гипербола — эллипс — круговая орбита»
 } [см. уравнения (4.12), (4.14)];
 ρ — расстояние от центра Луны;
 ζ — угол между вектором гиперболического избытка скорости и вектором орбитальной скорости возмущающего тела;
 θ — угол между направлением движения и местной горизонтальной плоскостью;
 $v = v/v_c$ — скорость движения по траектории, выраженная в единицах местной круговой скорости;
 μ — среднее движение;
 Φ — половина угла между асимптотами гиперболы;
 $\psi = v_{\infty}/\sqrt{2K/r_V}$ — гиперболический избыток скорости, выраженный в единицах параболической скорости в вершине гиперболы.

Индексы (нижние):

- A — относится к апоцентру;
- a — трансверсальный (азимутальный);
- $apsis$ — апсидальный;
- arr — относится к прибытию;
- c — относится к круговой орбите;
- dep — относится к выходу;
- h — гиперболический;
- M — относится к массе центрального тела;
- m — относится к массе возмущаемого тела;
- P — относится к перицентру;
- p — параболический;
- pl — относится к планете;
- r — радиальный;
- V — относится к вершине (гиперболы);
- 00 — значение на поверхности;
- 1 — до гиперболической встречи; выход;
- 2 — после гиперболической встречи; прибытие;
- 3 — после гиперболической встречи с планетой-целью;
- $\odot$ — относится к Солнцу;
- $\oplus$ — относится к Земле.

ЗАДАЧИ

1. Определите орбитальную энергию межпланетного аппарата, стартового с круговой орбиты спутника Земли. Высота орбиты 185 км, скорость аппарата 11,40 км/сек.

2. Аппарат движется вокруг Венеры: а) по круговой орбите радиуса $2r_{00}$ (r_{00} — радиус Венеры), б) по эллиптической орбите, $r_P = 2r_{00}$, $r_A = 8r_{00}$. Космический аппарат должен стартовать при $v_\infty = 3660$ м/сек. Определите приращение скорости при выходе: а) с круговой орбиты, б) из перигея и апогея эллиптической орбиты.

3. Космический аппарат стартует с орбиты Земли с гелиоцентрической скоростью $V_1 = 37\,000$ м/сек, причем угол β_1 (в плоскости эклиптики) между вектором V_1 и вектором скорости движения Земли U равен 7° , наклон орбиты к плоскости эклиптики $i_1 = 5^\circ$. Определите требуемый гиперболический избыток скорости и сравните его с гиперболическим избытком скорости для случая, когда $\beta_1 = i_1 = 0$.

4. Определите половину угла между асимптотами гиперболы в задаче 2.

5. Величина разности векторов скорости Марса и скорости космического аппарата в момент подлета к Марсу равна 3000 м/сек. Определите длину главной оси гиперболы входа.

6. Космический аппарат, возвращающийся с Венеры на Землю, движется по гелиоцентрической переходной орбите, компланарной плоскости эклиптики и характеризуемой параметрами: $R_P = 0,6$ а. е., $R_A = 1,2$ а. е. Расстояние до вершины гиперболы должно быть равно $20r_{00}$ (r_{00} — радиус Земли). На каком расстоянии от Земли невозмущенная (Землей) переходная орбита пересечет орбиту Земли? (Предполагается, что орбита Земли круговая, средний радиус ее равен 1 а. е., а переход на круговую орбиту происходит в результате одноимпульсного маневра в вершине гиперболы.)

7. Предположим, что переходная орбита (см. задачу 6) не является компланарной плоскости эклиптики, причем угол ее наклона к плоскости эклиптики равен 25° . Каким в этом случае будет расстояние от Земли до точки пересечения невозмущенной орбиты с орбитой Земли, если все прочие условия задачи 6 сохранены?

8. При условиях задач 6 и 7 определите удаление от Земли, соответствующее минимальному импульсу захвата, и сравните значения импульсов захвата, вычисленные в задачах 6, 7 и 8.

9. Космический аппарат движется по параболической орбите ($R_p = 1 \text{ а. е.}$) от Земли к Юпитеру. Определите: а) оптимальное расстояние в случае одноимпульсного перехода на круговую орбиту спутника и требуемый импульс захвата; б) расстояние, на котором прямая гиперболическая встреча с Юпитером приведет к максимальному увеличению гелиоцентрической скорости после встречи. Определите это приращение скорости и эксцентриситет новой гелиоцентрической орбиты.

10. Предположим, что в задаче 9б) рассматривается обратная гиперболическая встреча. Определите величину и направление гелиоцентрической скорости, а также постоянную энергии h , длину большой полуоси $a_\odot$, параметр $p_\odot$, эксцентриситет $e_\odot$, положение точек апсид R_p и R_A и период обращения T .

11. Определите радиус столкновения с Венерой в случае подлета по гелиоцентрической переходной орбите, для которой $R_A = 1,0 \text{ а. е.}$, $R_p = 0,5 \text{ а. е.}$. Предполагается, что орбита перехода компланарна орбите Юпитера, а орбита Юпитера круговая.

12. Космический аппарат стартует с околоземной орбиты высотой 556 км по направлению к Марсу по исходящей гиперболе, имея скорость $v_\infty = 3700 \text{ км/сек}$. Рассмотрите: а) тангенциальный гелиоцентрический выход ($\beta_{\odot,1} = 0$); б) гелиоцентрический выход при $\beta_{\odot,1} = 10^\circ$. Предполагается, что импульс гиперболического выхода приложен в вершине (апогее). Определите: 1) частные производные от гиперболических элементов a , e , Φ и v_∞ по тангенциальной скорости v_p ; 2) частные производные от гелиоцентрических элементов V_1 , $\beta_{\odot,1}$, $a_\odot$, $e_\odot$, R_A , R_p , $\eta_{\odot,1}$ гелиоцентрической переходной орбиты по геоцентрической тангенциальной скорости v_p .

ЛИТЕРАТУРА

1. D. F. Lawden, Escape to Infinity from Circular Orbits, J. Brit. Interpl. Soc., vol. 12, No. 2, pp. 68—71 (1953).
2. D. F. Lawden, Entry Into Circular Orbits-2, J. Brit. Interpl. Soc., vol. 13, No. 1, pp. 27—32 (1954).
3. K. A. Ehricke, A New Supply System for Satellite Orbits-1, Jet Propulsion, vol. 24, No. 5, pp. 302—309 (1954).
4. D. F. Lawden, Perturbation Maneuvers, J. Brit. Interpl. Soc., vol. 13, No. 6, pp. 329—334 (1954).
5. K. A. Ehricke, Instrumented Comets, Astronautics of Solar and Interplanetary Probes, Proceedings of the Eighth International Astronautical Congress, Barcelona, October 1957 (Vienna: Springer, 1958).
6. K. A. Ehricke, Error Analysis of Keplerian Flights Involving a Single Central Force Field and Transfer between Two Central Force Fields, Convair (Astronautics) Report ZM 7-551, January 1958.
7. K. A. Ehricke, Interplanetary Mission Profiles, Convair (Astronautics) Report AZM-023, April 1958.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абхианкар (Abhyankar K. D.) 286
Блитцер (Blitzer L.) 163
Браун (Brown E. W.) 162, 207
Брауэр (Brouwer D.) 162
Ванкулер (de Vancouleurs G.) 303
Гоман (Hohmann W.) 342
Гриммингер (Grimminger G.) 218, 221
Даламбер (D'Alembert G.) 162
Дарвин (Darwin G.) 255
Джеффрейс (Jeffreys H.) 304
Зенгер (Saenger E.) 213, 221
Кеплер (Kepler J.) 157, 175
Клеро (Clairaut A.) 162
Краузе (Krause H. G. L.) 163, 203, 207
Лагранж (Lagrange G.) 253
Лаплас (Laplace P. S.) 162
Лоуден (Lawden D. F.) 373, 376, 380
Мультон (Moulton F. R.) 270, 384
Мюзен (Musen P.) 253
Ньютон (Newton I.) 162
Перкинс (Perkins F. M.) 224, 243
Петерсен (Petersen N. V.) 220
Пламмер (Plummer H. C.) 260
Пуанкаре (Poincaré H.) 208, 255
Сингер (Singer S. F.) 220
Тиссеран (Tisserand F.) 251
Уиппл (Whipple F.) 251
Халберт (Hulburt E. O.) 227
Хейфорд (Hayford J.) 169
Хилл (Hill G. W.) 162, 255
Шарлье (Charlier C. L.) 254
Шпитцер (Spitzer L.) 162, 207
Штернфельд А. А. 346
Эйлер (Euler L.) 162
Эйнштейн (Einstein A.) 250
Энке (Encke I.) 251
Эрике (Ehricke K. A.) 220
Якоби (Jacobi) 255
Якоукин (Yakoukin A. A.) 304
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут вектора скорости 140
— орбиты 468
Альфа-маневр 137
Анализ кеплеровых орбит 327
— ошибок 116, 433, 526
— — бицентральный 526
— — моноцентральный 526
Аномалия истинная 143
— средняя 196
— эксцентрическая 117, 196
Апоимпульс 486
Апсиды 333
Аргумент перигея 142, 198
— перицентра 198
— широты 195, 468
Астероиды Троянской группы 274
Атмосфера Гриммингера 221
- Баллистика наземная 33
— орбитальная 33
Барицентр 253
Бомбардировщик гиперзвуковой орбитальный 213
— — планирующий 213
- «Вангард» («Vanguard») 68
«Вангард-1» («Vanguard 1») 169, 185, 244, 249, 253
«Вангард-2» («Vanguard 2») 244
«Вангард-3» («Vanguard 3») 244
Вздутие экваториальное 161
Видимость предельная 116
— прямая 114
Влияние импульса скорости нормального 386, 398, 401, 403
— — — ортогонального 400, 405
— — — радиального 399, 401, 404
— — — тангенциального 384, 396, 401, 402
— — — трансверсального 384, 401, 405
Возмущения атмосферные 209
— вековые 153, 195, 207
- Возмущения периодические 203, 207
— постоянные 207
— учет влияния 153
Восходящий узел 153, 198, 468
Вращение атмосферы 210
— Земли, влияние 44, 153
Время вывода 116
— переходное 471
— релаксации 242
— существования спутника 213, 226 и д.
Встреча гиперболическая 484, 513
— — обратная 517
— — прямая 516
— орбитальная 130, 466
— спутников 121
Вход с круговой скоростью 67
— с параболической скоростью 67
Вывод баллистический 99, 131, 140
— импульсный 98
— непрерываемый 131, 140
—, основные типы 98, 131 и д.
— полностью активный 99, 131, 138
— прерываемый 131 и д., 147
— с использованием промежуточной орбиты 134
— эллиптический 100, 133, 140
Выход 484, 493
— гиперболический 501
— параболический 503
- Гармоника вторая 185, 249
— зональная 167
— сферическая 167
— третья 185, 249
— четвертая 185, 249
Геонд 249
Гипербола захвата 499
Гиперболический избыток скорости 403, 484
Гомановский эллипс 342
Грушевидность формы Земли 169

- Давление солнечного излучения 249
 Дальность прямой видимости 115
 — радиальная 115
 — сферическая 23
 — угловая 23, 115
 Движение гелиоцентрическое 545
 — Земли вокруг Солнца 192
 — планетоцентрическое 545
 — среднее 201
 Диаметр столкновения кажущийся 523
 Динамика изменения орбиты 327
 Долгота восходящего узла 198
 — перигея 201
 — средняя 201
 Задача трех тел ограниченная 255
 Закон Кеплера 157, 175
 — площадей 203
 Захват 466, 484, 497
 Изменение наклона орбиты 396
 — орбиты 321 и д.
 — — «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» 335
 — — «круг $\rightleftharpoons$ парабола» 336
 — — «круг $\rightleftharpoons$ эллипс» 335
 — — «одна кеплерова орбита $\rightleftharpoons$ другая кеплерова орбита» 337
 — — «парабола $\rightleftharpoons$ гипербола» 340
 — — «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола» 340
 — — «эллипс $\rightleftharpoons$ парабола» 339
 — — «эллипс $\rightleftharpoons$ эллипс» 338
 — плоскости орбиты долгопериодическое 195
 Импульс удельный 139
 Интеграл энергии 214
 — Якоби 267, 306
 Кинематика изменения орбиты 321
 «Конвэр» («Convair») 68
 Коэффициент второй гармоники 169, 185
 — третьей гармоники 169, 185
 — четвертой гармоники 170, 185
 Кривые Хилла граничные 268, 306
 Либрация 253
 Линия апсид, вращение 153, 160
 — узлов 142, 468
 — —, вращение 153, 200
 Луна, возмущающее действие 163
 Маневр апоцентральный 486
 — встречи (ΔV -маневр) 466
 — вывода (Δv -маневр) 466
 — выхода круговой одноимпульсный 502
 Маневр гелиоцентрический касательный 494
 — «гипербола $\rightleftharpoons$ эллипс» 488
 — двухимпульсный 360, 488, 508
 — «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» 487
 — одноимпульсный 485 и д., 512
 — — эллиптический 512
 — перигея 487
 — «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола» 485
 — «эллипс $\rightleftharpoons$ круг» 488
 Маневры несоосные касательные 489
 — орбитальные 320 и д.
 Масса Земли 185
 Метод графо-аналитический решения уравнений 378
 — — Сингера 222
 Момент инерции Земли полярный 185
 — — — экваториальный 185
 — орбиты кинетический 161
 Нагрузка аппарата поперечная 65
 Наклонение плоскости орбиты 142, 194, 468
 — — — Луны 290
 Несферичность центрального тела притяжения 160
 Носитель крылатый орбитальный 217
 Нутация земной оси 290
 Объем Земли 185
 «Окно» пусков 133
 Окружность входа 64
 Омега-маневр 140
 Оптимизация траектории 111
 Орбита 21
 — выхода 502
 — гиперболическая 401
 — замкнутая 21
 — исходная 341
 — кеплерова 167, 427
 — круговая 136, 401
 — невозмущенная 153
 — неустойчивая 286
 — ожидания промежуточная 135
 — околополярная 182
 — околоэкваториальная 191
 — опорная 155
 — оскулирующая 293
 — параболическая 21, 401
 — переходная 144, 155, 284, 340
 — — быстрая 351, 412
 — — гиперболическая 353 и д.
 — — минимальной энергии 146
 — — обходная 346
 — — параболическая 353
 — перигейная 100

- Орбита полярная 154, 191
 - промежуточная 340
 - разомкнутая 21
 - спутника конечная 484
 - — начальная 484
 - теоретическая 433
 - устойчивая 286
 - цели 341
 - экваториальная 154, 182, 190
 - эллиптическая 136, 383
- Орбиты долунные 287
 - окололунные 303
 - периодические 255
- Ошибка гелиоцентрическая 526
 - планетоцентрическая 526
- Параметр времени 234
 - высотный 231
 - высоты вершины траектории 35
 - горизонтальной скорости 35
 - гравитационный Земли 25
 - — Луны 272
 - лобового сопротивления 211
 - начальной скорости 25, 33
 - подъемной силы 211
 - спуска 65
 - фокальный гиперболы 520
 - — эллипса 29, 141, 328
- Паращют тормозной 101
- Перехват 406
- Переход биэллиптический 347
 - внутриорбитальный 154
 - «гипербола $\rightleftharpoons$ эллипс» 488
 - двухимпульсный 360, 488, 508
 - касательный коапсидальный 363
 - компланарный 123, 363
 - «круг $\rightleftharpoons$ гипербола» 487
 - между некомпланарными орбитами 406, 423
 - — пересекающимися круговой и эллиптической орбитами 359
 - — эллиптическими орбитами несоосными 372, 380
 - — — соосными 363, 368
 - моноэллиптический 347
 - на гиперболическую орбиту 484
 - некомпланарный 406, 409, 413, 423
 - одноимпульсный 485 и д., 512
 - — эллиптический 512
 - орбитальный 340 и д.
 - — в поле центральной силы 340
 - — межпланетный 341
 - — несоосный 341
 - — «поверхность — орбита» 340, 463
 - — соосный 341
 - «эллипс $\rightleftharpoons$ гипербола» 485
- Переход «эллипс $\rightleftharpoons$ круг» 488
- Переходы несоосные касательные 489
- Период вращения Земли эквивалентный 154
 - обращения 136
 - — звездный 136
 - —, изменение 161
 - — сидерический 128, 136
 - — синодический 126, 470
 - орбитальный 206
 - прецессии орбиты 190
 - — относительный 206
- Плоскость эклиптики 194
- Поворот линии апсид 386
 - плоскости орбиты 322
 - — — круговой 413
 - — — эллиптической 391, 419
- Поле бицентрального 483, 545
 - квазицентрального 207
 - магнитное 160, 248
 - центральной силы 153, 320 и д.
 - электрическое 160, 248
- Полином Лежандра 167
- Постоянная закона площадей 293, 422
 - эллиптической орбиты 24
 - энергии орбиты 38, 422
 - Якоби 269
- Потенциал Земли 166, 195
 - силы притяжения 153
 - Луны 252
 - центрального поля сил 153
- Прецессия орбиты 153, 160
 - — Луны 290
 - оси вращения Земли 194
 - — — лунно-солнечная 195
- Программа тяги 111
- Продолжительность вывода 116
 - перехода 136
- Пространство долунное 251, 276, 311
 - залунное 311
- Прямое восхождение 136, 172, 468
 - —, изменение 177
- Пыль космическая 160, 248
- Радикация солнечная 192
- Радиус-вектор Земли гелиоцентрический 193
- Радиус Земли 185, 272
 - — полярный 185
 - — экваториальный 185
 - Луны 272
 - столкновения кажущийся 523
 - экваториальный 186
- Ракетоплан глобальный 213
- Расстояние апогейное 141

- Расстояние до вершины траектории
 радиальное 105
 — перигейное 38, 141
 — перигея угловое 142
 — радиальное, изменение 160
 Расчет времени полета 109
 Регрессия 172
 — линии узлов 194, 288, 400
 Релаксация 242
 Решения периодические 254
 Ряд Фурье 196
- Селеноид 303
 Сжатие 164
 — Земли динамическое 185
 — — полярное 160, 185, 249
 — Луны 304
 — Марса динамическое 303
 — планеты 195
 Сила возмущающая 203
 — торможения 65
 Силы, действующие на движущееся
 по орбите тело 383
 Сингера метод графо-аналитический 222
 Система координат абсолютная 43
 — — — геоцентрическая 136, 146
 — — — декартова 427
 — — — вращающаяся 255
 — — гелиоцентрическая 495
 — — географическая экваториальная 467
 — — — геоцентрическая 196
 — — — экваториальная 467
 — — инерциальная 37
 — — относительная 43
 — — планетоцентрическая 495
 — — полярная 428
 — —, связанная с Землей 43
 — — селеноцентрическая 306
 — — экваториальная 136
 Склонение 136, 468
 «Скор» («Scoge») 244
 Скорость баллистическая 107
 — в вершине траектории 105
 — вращения Земли угловая 137, 185
 — — — кажущаяся 162
 — — — эквивалентная 153
 — гелиоцентрическая 493
 — гиперболическая 484
 — идеальная α -маневра 146
 — импульсная 145
 — круговая 68
 — — в вершине траектории 105
 — местная угловая 137
 — начальная 105
- Скорость начальная абсолютная 43
 — обращения мгновенная 139
 — окружная 146
 — — Земли 185
 — орбитальная 100
 — параболическая 27, 484
 — перехода импульсная минимальная 147
 — — перигейная 100
 — «ухода» от Земли 27
 — энергетическая 109
 Смещение перигелия 250
 Солнечные сутки средние 185
 Солнце, возмущающее действие 163
 Сопротивление атмосферы 160
 — плазмы лобовое 242
 Составляющая возмущающей силы
 ортогональная 203
 — — — радиальная 203
 — — — трансверсальная 203
 — потенциала вековая 198
 — прецессии орбиты вековая 153
 — силы нормальная 384
 — — ортогональная 384
 — — притяжения поперечная 166
 — — радиальная 384
 — — тангенциальная 384
 — — трансверсальная 384
 — скорости вертикальная 25
 — — горизонтальная 26
 — — меридиональная 173
 — — нормальная 386
 — — радиальная 25, 173, 386
 — — трансверсальная 26, 173, 386
 — — широтная 173
 — ускорения касательная 209
 — — нормальная 209
 — — радиальная 209
 — — трансверсальная 209
 Спасение ступеней носителя 101
 Спуск баллистический 64
 — неуправляемый 75
 — с параболической скоростью 76
 — спиральный 234
 Спутник 97
 Спутник MOUSE 220
 «Спутник-1» 243
 «Спутник-2» 244
 «Спутник-3» 244
 Среднее движение 136, 201, 352
 Средняя аномалия 196
 Сутки звездные 185
 Сфероид 153
 — вращения сжатый 160
 — двухосный 160, 164
 — идеальный 249

«Тайрос-1» («Tiros 1») 244

Терминатор 192

Точка весеннего равноденствия 468

— нейтральная 271

— падения истинная 43

— — кажущаяся 43

Точки кратные 127

— либрации 253

— — коллинеарные 258, 309

— — эквидистантные 258

Траектория 21

— баллистическая 22

— минимальной энергии 21, 28

— — —, время полета 31

— — —, дальность полета 31

— — —, характеристики 34

— — —, эксцентриситет 30

— навесная 36

— настильная 36

— эллиптическая 235

«Транзит-1В» («Transit 1В») 244

Угол атаки 209

— бросания 30

— — предельный 31

— возвышения 115

— входа в атмосферу 67

— места 172, 429

— наклона траектории 26

— переходный центральный 469

— поворота плоскости орбиты 178

— положения 139

— склонения 468

— траектории 209

— центральный 140

Узел восходящий 153, 198, 468

Уравнение Кеплера 196, 372

— орбиты околополярной 182

— — — относительно сферического тела 176

— — — тела со сжатием 181

— — — полярное 385

— — — экваториальной 182

— траектории минимальной энергии 30

— эллипса 23, 29

Уравнения движения космического аппарата 211

— Лагранжа 203

Уравнения Хилла канонические 307

Ускорение касательное 211

— нормальное 212

— радиальное 212

— трансверсальное 212

Условие компланарности 149

— наличия кратных точек 130

Условия граничные 17

— наличия точки падения 41

Фаза пассивная 140, 149

Фактор ошибки начальной скорости 50, 117

— — угла бросания 56, 117

Формула Эйнштейна 250

Функция Лежандра присоединенная 166

— тессеральная сферическая 167

Цель 466

Центр притяжения кажущийся 281

Широта 467

Эклиптика 195

«Эксплорер-1» («Explorer 1») 244

«Эксплорер-3» («Explorer 3») 244

«Эксплорер-4» («Explorer 4») 244

«Эксплорер-6» («Explorer 6») 244

«Эксплорер-7» («Explorer 7») 244

Эксцентриситет 24, 28

— гиперболы 496

Эксцентрическая аномалия 117, 196

Экспесс баллистический 109

Элементы оскулирующие 284

— эллиптической орбиты 383

Эллипс 383

— быстрого перехода 351

Эллипсоид 249

Эллиптичность орбиты Земли 194

Энергетика маневра захвата 501

Энергия аппарата полная 108

— орбитальная 102, 494

— — при встрече 514

Эпоха 198

Эфемериды спутника 242

Эффекты релятивистские 160, 248

«Эхо-1» («Echo 1») 246, 253

Крафт Эрик

КОСМИЧЕСКИЙ ПОЛЕТ

Том II, Часть I

М., 1969 г. 572 стр. с илл.

(Серия: «Основы проектирования
управляемых снарядов»)

Редактор *Ю. Г. Гуревич*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 29/VIII 1968 г. Подписано к печати 21/IV 1969 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 35,75. Условн. печ. л. 35,75. Уч.-изд. л. 33,55. Тираж 5350 экз. Цена книги 2 р. 66 к. Заказ № 1612.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В 71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.

