Институт
Компьютерных
Исследований

COLUMBIA UNIVERSITY IN THE CITY OF NEW YORK
PUBLICATION NUMBER FIVE
OF THE ERNEST KEMPTON ADAMS FUND FOR PHYSICAL RESEARCH
ESTABLISHED DECEMBER 17TH, 1904

FOUR LECTURES ON MATHEMATICS

DELIVERED AT COLUMBIA UNIVERSITY
IN 1911

BY
J. HADAMARD
MEMBER OF THE INSTITUTE, PROFESSOR IN THE COLLÈGE DE FRANCE AND IN THE ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
LECTURER IN MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS IN COLUMBIA UNIVERSITY FOR 1911

NEW YORK
COLUMBIA UNIVERSITY PRESS

Ж. Адамар

ЧЕТЫРЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Перевод с английского
В. В. Шуликовской

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2002

УДК 517

Адамар Ж.
Четыре лекции по математике. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 60 стр.

Дается описание двух важнейших методов математической физики: метода Фурье и метода обобщенных функций, а также и некоторых других методов, например, рассмотрены простейшие разностные схемы. Наибольшее внимание уделяется нестационарным и стационарным задачам диффузии-теплопроводности, а также волновому уравнению.

Книга предназначена студентам и аспирантам технических вузов и университетов, а также и другим лицам, интересующимся математической физикой и ее приложениями.

ISBN 5-93972-185-0

http://rcd.ru

Оглавление

Предисловие к английскому изданию

«Утренние лекции по субботам», прочитанные профессором Адамаром в Колумбийском университете осенью 1911 года на темы, затрагивающие и математику, и физику, были записаны профессором Нью-Йоркского колледжа А. Н. Голдсмитом и, исправленные автором в 1914 году, издаются сейчас для широкой аудитории. Автор просил выразить здесь свою благодарность доктору Голдсмиту, записавшему и просмотревшему лекции, и профессору Колумбийского университета Каснеру, прочитавшему доказательства.

Глава I

Определение решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с помощью граничных условий

На этой лекции мы ограничимся рассмотрением линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Естественно в первую очередь искать общие решения таких уравнений, но, как было доказано, их можно успешно использовать только в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. При использовании уравнений в частных производных в связи с физическими задачами от общих решений чаще всего приходится отказаться по двум причинам: во-первых, в общем случае невозможно получить общее решение или общий интеграл; во-вторых, даже если их можно найти, они, вообще говоря, бесполезны.

Наша задача — получить функцию, удовлетворяющую не только дифференциальному уравнению, но и другим условиям, а для этого может оказаться и очень часто оказывается совершенно недостаточно знать общий интеграл. Например, несмотря на то что у нас есть общее решение уравнения Лапласа, оно не позволяет нам решать обычные, зависящие от этого уравнения задачи, такие как задача о распределении электричества, без дальнейших и очень сложных вычислений.

Таким образом, каждое дифференциальное уравнение в частных производных приводит к возникновению не одной общей задачи, состоящей в разыскании всех решений одновременно, но к некоторому количеству частных задач, каждая из которых состоит в разыскании одного частного решения, определенного не только самим дифференциальным уравнением, но системой таких уравнений и какими-то дополнительными данными.

Теперь перед нами стоит вопрос, как можно выбрать эти данные, чтобы задача была «поставлена корректно». Но что означает «поставлена корректно»? Обратимся к аналогии.

В обычной алгебре этот термин применяется к задачам, в которых количество условий равно количеству неизвестных. Наши задачи должны быть аналогичны этим. В общем случае в обычной алгебре корректно поставленные задачи характеризуются наличием решений, причем конечного числа решений. (Мы даже можем охарактеризовать их как имеющих единственное решение, если задача линейна, что соответствует изучаемому нами случаю.) Тем не менее в исключительных случаях возникают сложности.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{c} a_1x_1 + \ldots\ldots + a_nx_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{1}$$

n — количество этих уравнений в точности равно количеству неизвестных. Если определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, не равен нулю, то задача имеет единственное решение. Если он равен нулю, то задача в общем случае неразрешима. На первый взгляд, это делает неэффективным вышеуказанный критерий, так как кажется, что нет разницы между этим случаем и тем, когда количество уравнений превосходит количество неизвестных, и задача в общем случае также неразрешима. (Говоря геометрически, две прямые на плоскости не пересекаются, если они параллельны, и в этом они похожи на две прямые, произвольно взятые в трехмерном пространстве.) Разница между двумя случаями проявляется, если выбрать b_i (вторые члены в уравнении (1)) правильно, то есть так, чтобы система снова была разрешима. Если количество уравнений больше n, то (в общем случае) решение вновь единственно, но если эти два числа совпадают, то задача перестает быть неразрешимой и оказывается неопределенной.

То же самое происходит в каждой алгебраической задаче. Например, три уравнения

$$f(x,\, y,\, z) = a,$$
$$g(x,\, y,\, z) = b,$$
$$f + g = c,$$

соединяющие три неизвестных x, y, z, образуют неразрешимую систему, если c не равно $a+b$, но если c равно $a+b$, эта система, вообще говоря, неопределена.

Более того, этот факт был обобщен и уточнен в прекраснейшей теореме Шенфлиса.

Пусть

$$f(x,\, y,\, z) = X, \quad g(x,\, y,\, z) = Y, \quad h(x,\, y,\, z) = Z \tag{2}$$

— уравнение преобразования пространства, функции f, g, h непрерывны. Предположим, что внутри данной сферы (например, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) две точки $(x,\, y,\, z)$ не могут дать одну и ту же отдельную точку $(X,\, Y,\, Z)$, иначе говоря, что $f(x,\, y,\, z) = f(x',\, y',\, z')$, $g(x,\, y,\, z) = g(x',\, y',\, z')$, $h(x,\, y,\, z) = h(x',\, y',\, z')$ не может выполняться одновременно внутри этой сферы, если неверно, что $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Пусть S обозначает поверхность, соответствующую поверхности сферы s, то есть поверхность, описываемую точками $(X,\, Y,\, Z)$, когда $(x,\, y,\, z)$ описывает s. Если теперь в уравнении (2) мы рассмотрим X, Y, Z как данные, а x, y, z как неизвестные, наша гипотеза очевидно означает, что эти уравнения не допускают более одного решения внутри s. Теперь *теорема Шенфлиса* гласит, что *эти уравнения допускают решение* для любой $(X,\, Y,\, Z)$, выбранной внутри S. Конечно, теорема выполняется для пространств любой размерности. Очевидно, что эта теорема яснейшим образом иллюстрирует вышесказанное соотношение между фактом единственности решения и необходимостью его существования[1].

---

[1]Тем не менее мы должны заметить, что здесь единственное решение противопоставляется не только бесконечному количеству решений (как выше), но и любому количеству больше одного. Например, тот факт, что $x^2 = X$ может не иметь решений по x, с точки зрения теоремы Шенфлиса связан с тем, что для других значений X это уравнение может иметь два решения.

Как было сказано выше, эта теорема замечательна прежде всего своей общностью, так как при рассмотрении функций f, g, h не выдвигалось никаких гипотез, кроме их непрерывности. Но в действительности ее значение куда шире и покрывает пространство функций. Я считаю, что ее обобщения на этом пространстве не могут не появиться в большом количестве как следствие будущих открытий. Это важное замечание извинит меня за отступление от темы, хотя рассмотренная теорема весьма отдаленно связана с главным предметом нашего повествования. Она подчеркивает общий факт, установленный нами в начале, и этот факт имеет несколько приложений к вопросам, рассмотренным в этой лекции. Можно считать, что это критерий, показывающий, следует ли рассматривать данную линейную задачу как аналог алгебраических задач, в которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Так будет всегда для разрешимой и определенной задачи, а иногда — для неразрешимой, если ее можно разрешить (дальнейшим уточнением данных), только превратив в неопределенную.

Вернемся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Коши первым стал определять одно решение дифференциального уравнения с помощью начальных условий. Для обыкновенных уравнений, таких как $f(x,\, y,\, dy/dx,\, d^2y/dx^2) = 0$, нам заданы значения y и dy/dx для частного значения x. Коши обобщил этот результат для уравнений в частных производных.

Пусть $F\big(u, x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\big) = 0$ — данное уравнение второго порядка, и пусть считается, что мы можем разрешить его относительно $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Тогда мы получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1 = 0$, где F_1 — функция всех вышеуказанных величин за исключением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Задача Коши возникает, если задать значения

$$u = \varphi(y,\, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \psi(y,\, z) \tag{3}$$

функций u и $\partial u/\partial x$ для $x = 0$. (Эти данные можно заменить на аналогичные, вводя вместо плоскости $x = 0$ другую поверхность.) Действительно, при выполнении сформулированной выше гипотезы о возможности разрешить уравнение относительно $\partial^2 u/\partial x^2$ и в предположении, что функции F_1, ϕ и ψ голоморфны, Коши, а после него Софья Ковалевская показали, что здесь действительно имеется одно и только одно решение. Это решение можно разложить в ряд Тейлора в виде $u = u_0 + xu_1 + x^2u_2 + \ldots$, где $u_0, u_1 \ldots$ можно вычислить.

Вышеуказанные теоремы справедливы для большинства уравнений, возникающих в связи с физическими задачами, например

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{E}$$

Но в общем случае эти теоремы могут не выполняться. Мы поймем это, рассмотрев задачу Дирихле: определить решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{e}$$

для точек внутри данного объема, если даны их значения в каждой точке граничной поверхности S этого объема.

Как известно, эта задача поставлена корректно: у нее есть одно и только одно решение. Таким образом, этот случай не является задачей Коши, в которой в каждой точке S даны и u, и одна из ее производных. Если первой из этих данных самой по себе (в соединении с дифференциальным уравнением) достаточно, чтобы определить неизвестную функцию, мы не имеем права вводить еще одно дополнительное условие. Как тогда в доказательстве Софьи Ковалевской оказалась возможной та же самая задача с обеими данными?

Есть два расхождения в смысле вопросов в одном и в другом случае: (a) В теореме Софьи Ковалевской функция u должна всего лишь существовать в непосредственной окрестности начальной поверхности S. В задаче Дирихле она должна существовать и быть корректно определенной во всем объеме, ограниченном S. Так что в последнем случае мы требуем большего, чем в первом, и можно подумать, что этого достаточно для разрешения явного противоречия, появившегося выше.

Однако в действительности это не так, и мы должны принять во внимание и второе расхождение. (b) В доказательстве Коши – Ковалевской данные, как мы сказали, предполагаются аналитическими: функции ϕ, ψ (вторые члены (3)), взятые как функции y, z, заданы сходящимися рядами Тейлора в окрестности каждой точки плоскости $x = 0$ в области, где решается задача. Ничего подобного не предполагается при изучении задачи Дирихле. Не постулируется даже существование первых производных функции u при перемещении по S, а в некоторых исследованиях допускается определенная разрывность этих величин. Оба эти обстоятельства играют свою роль при объяснении различия между двумя обсуждаемыми выше результатами.

Так, (a) делает это различие очевидным, так как, конечно, если функция обязана быть гармонической (то есть везде допускать дифференцирование и удовлетворять уравнению Лапласа) внутри сферы, то нельзя одновременно произвольно выбрать ее значения и значения ее нормальных производных даже на аналитической поверхности.

Чтобы показать, что (a) недостаточно для необходимого объяснения, сформулируем задачу геометрически в том же виде, что и Коши. Тогда мы предположим, что u определена уравнением Лапласа, а необходимые для поиска u дополнительные данные — это значения u и $\partial u/\partial x$ на плоскости $x = 0$, или, точнее, на некотором участке Ω этой плоскости; здесь так же не требуется, чтобы u существовала во всем пространстве; область существования u, например, может быть ограничена каким-то, довольно малым, расстоянием до плоскости $x = 0$ (в окрестности Ω), если это расстояние конечно, но не бесконечно мало.

Но в общем случае при этих условиях такая функция u не существует, если данные не аналитические и выбраны произвольно. Мы наблюдаем явление, которое никогда не появляется при рассмотрении только обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, результаты заметно отличаются в зависимости от того, постулируется аналитический характер данных или нет.

3.

Который из этих двух противоположных результатов следует рассматривать как дающий нам более точное и адекватное представление о природе вещей? Я не говорю «правильный», потому что оба они, конечно, верны при подходящих условиях.

Некоторые математики все еще склонны предпочесть старую точку зрения Коши, один из их аргументов в том, что, как известно со времен Вейерштрасса, любую функцию, аналитическую или нет, можно заменить аналитической (а именно, многочленом) с любой данной точностью. И тот факт, что функция принадлежит к той или иной из этих двух категорий, кажется им несущественным. Я не могу согласиться с такой точкой зрения. То, что это не является несущественным, как мне кажется, сразу следует из только что установленных нами фактов. И нельзя не принимать это во внимание, если думать не только о существовании решения, но и о его свойствах и методах вычисления. Если задача Коши для уравнения (e), как правило, становится неразрешимой, когда функции, обозначенные φ, ψ, не аналитические, то каждое выражение решения должно существенно зависеть от этой аналитичности и особенно от радиусов сходимости разложений φ, ψ. Иначе говоря, вообразим себе, что мы заменили функции φ, ψ на другие функции φ_1, ψ_1, причем разности $\varphi_1 - \varphi$, $\psi_1 - \psi$ очень малы для каждой пары действительных значений y, x внутри Ω (и, возможно, так же малы разности некоторых производных). Каким бы малым ни было это изменение, из вышеуказанной теоремы Вейерштрасса строго следует, что радиусы сходимости соответствующих степенных рядов (если они вообще существуют) могут быть и, в общем случае, будут совершенно другими; так что и решение необходимо будет вычислять иначе.

Если само решение должно претерпеть хотя бы легкое изменение, это сразу покажет нам, что подобные методы вычисления должны иметь совершенно искусственную природу, и они полностью скрывают качественные свойства требуемого результата[1]. Но в действительности ясно,

[1] В общем случае в задачах такого рода решение может быть представлено только с помощью разложения в ряд Тейлора. Я знаю только одно исключение: метод минимальных поверхностей Шварца, когда даны кривая поверхности и соответствующая последовательность касательных плоскостей. Этот метод основан на том благоприятном и исключительном

что дела обстоят не так, как утверждалось выше. Изменение $u_1 - u$ значений функции u после нашей небольшой корректировки φ, ψ будет, вообще говоря, важным и зачастую полным, как это видно[1] на примере, когда u вообще перестает существовать, если φ, ψ становятся неаналитическими. Прежде всего это доказывает невозможность применения теоремы Вейерштрасса в этом случае, так как она аппроксимирует данные, но ни в коем случае не неизвестное.

Теперь мы также видим, что такая задача и вычисления, результаты которых заметно меняются при бесконечно малой ошибке в начале, не могут иметь значения для приложений.

Отсюда мое второе и главное основание для рассмотрения только тех результатов, которые соответствуют неаналитическим данным, а именно того, как замечательно они согласуются с результатами, полученными из приложений к физике.

Это согласование еще интереснее от того, что его результаты неожиданны. Наша предыдущая точка зрения — то есть теорема Коши–Ковалевской — очевидно создает полную аналогию со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений. Но с нашей последней точки зрения — а это видение задачи с точки зрения приложений к физике — любая аналогия кажется разрушенной. Кажется, что результаты часто не согласуются, они приводят к противоположным выводам в очевидно похожих вопросах.

Первый пример этого был дан выше. Мы знаем, что задача Коши уже неразрешима для уравнения Лапласа

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \qquad (e)$$

обстоятельстве, что для изучения действительных точек такой поверхности можно использовать комплексные переменные.

[1]Если $u_1 - u$ должно быть очень мало равномерно и одновременно с $\varphi_1 - \varphi$, $\psi_1 - \psi$, то из хорошо известной теоремы сходимости Коши следует, что для аналитических функций φ_1, ψ_1, сходящихся к определенным (неаналитическим) предельным функциям φ, ψ соответствующее решение u_1 должно равномерно сходиться к некоторому пределу u — решению задачи с данными φ, ψ.

но напротив, в уравнении сферических волн

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dt^2} = 0, \tag{E}$$

или цилиндрических волн

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2u}{\partial t^2} = 0, \tag{E'}$$

мы можем придавать u и $\partial u/\partial x$ произвольные значения (аналитические или нет) при $t = 0$, и поставленная таким образом задача Коши имеет решение (причем единственное). Этот последний случай похож на алгебраическую задачу, в которой количество уравнений равно количеству неизвестных; предыдущий случай похож на задачу, в которой уравнений больше[1], чем неизвестных.

A priori невозможно было бы вообразить, что такая разница может зависеть всего лишь от смены знака в одном из коэффициентов уравнения. Но это полностью согласуется с физическим смыслом уравнений. Уравнение (E'), например, управляет малыми движениями однородной и изотропной среды, такой как однородный газ; и сформулированная выше соответствующая задача Коши представляет определение этого движения, если задано расположение и скорости в начальный момент времени. Уравнение (e), тоже управляющее многими физическими феноменами, напротив, никогда не приводит к задачам такого типа, но исключительно к задачам типа Дирихле. Аналитический критерий, по которому следует различать эти два вида дифференциальных уравнений в частных производных, известен: он задается так называемыми характеристиками уравнения. Характеристики уравнения аналитически соответствуют тому, что физик называет волнами, совместимыми с данным уравнением, и вычисляются они так. Пусть волна представлена уравнением $P(x, y, z, t) = 0$.

[1] В этом случае хочется применить сделанное в начале (с. 10) замечание о таких неразрешимых задачах, которые, несмотря на это обстоятельство, могут считаться похожими на «корректно поставленные». Однако в действительности это замечание неприменимо: мы ссылались на класс задач, который можно распознать по свойству превращаться в неопределенные при более частных предположениях. В изучаемом сейчас случае такое невозможно: это следует из теоремы Холмгрена («Archiv für Mathematik») о том, что решение задачи Коши единственно в каждом случае, когда оно существует.

Если в данном уравнении заменить, например, $\Delta^2 u - 1/a^2 \cdot \partial^2 u/\partial t^2 = 0$ и $\Delta^2 u$ на $(\partial P/\partial x)^2 + (\partial P/\partial y)^2 + (\partial P/\partial z)^2$, а $-(1/a^2)(\partial^2 u/\partial t^2)$ на $-(1/a^2)(\partial P/\partial t)^2$, то получится условие

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 = 0$$

(то есть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка). Функция P должна удовлетворять ему. Если это выполняется, то $P(x, y, z, t) = 0$ называют характеристикой данного уравнения.

Для уравнения (E) такие характеристики существуют (то есть действительны); такой случай называется *гиперболическим*.

Уравнение Лапласа $\Delta^2 u = 0$, после приведенных выше подстановок, приводится к виду

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 = 0$$

и не имеет действительных решений. Итак, в этом случае волн нет, и мы получаем так называемый эллиптический случай[1]. Задачу Коши можно поставить для гиперболического, но не для эллиптического уравнения. Означает ли это, что в гиперболическом уравнении задача Коши возникает всегда? Нет, в действительности все не так просто. Например, в уравнении (E) или (E') мы не можем выбрать u и $\partial u/\partial y$ при $x = 0$ произвольно; это бы вновь привело нас к неразрешимой задаче (в неаналитическом случае, конечно).

Физическое объяснение этого связано с тем, что кроме дифференциальных уравнений в частных производных существуют еще два вида условий, определяющих развитие феномена, то есть начальные условия и граничные условия. Первые имеют тип Коши и они одни возникают в приведенной выше задаче Коши для уравнения звука.

Но граничные условия всегда имеют тип Дирихле. Они одни могут появиться в эллиптическом уравнении, но они

[1]Существует так называемый промежуточный случай $\Delta^2 u - k\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. Он полуопределен и называется параболическим (пример: уравнение теплопроводности).

обычно присутствуют и в гиперболических уравнениях наряду с начальными условиями. Отсюда появляются так называемые смешанные задачи с двумя видами данных (типа Коши и Дирихле соответственно), возникающих одновременно при определении неизвестного.

В уравнении (E) $t = 0$ соответствует начальному моменту времени и может породить начальные условия, имеющие форму Коши. Но такие условия не могут соответствовать $x = 0$, которое представляет собой геометрическую границу.

По-разному расположенные конфигурации порождают более или менее сложные случаи, приводя к другим парадоксальным и очевидно противоречивым результатам, хотя все их можно объяснить одним и тем же способом. Более того, имеются другие типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных[1], которые не управляют какими-либо физическими феноменами. Определение их решений изучалось[2] в аналитическом случае, но до сих пор не найдено ни одного способа определить решение при неаналитических данных.

Мы видим, что с этой неаналитической точки зрения математические результаты и физические предположения превосходно согласуются друг с другом. Такая согласованность не должна удивлять нас: как мы видели выше, она соответствует тому, что задача, разрешимая только для аналитических данных, не может иметь физического значения. Но она продолжает быть достойной нашего внимания. Никакой другой пример не может лучше проиллюстрировать взгляды Пуанкаре[3] на помощь, которую физика оказывает анализу, взгляды, выраженные им в утверждениях вроде следующих: «Это физика дает нам много важных задач, о которых мы бы без нее не думали» и «Именно с помощью физики мы можем предвидеть решения».

[1] Так называемые аномальные гиперболические уравнения, например
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} = 0 \quad (m > 1,\ n > 1).$$

[2] Гамелем (Inaugural Dissertation, Göttingen) и Кулоном (thesis, Paris).

[3] Лекции, прочитанные на Первом Международном Математическом Конгрессе в Цюрихе, 1897; напечатаны в «La Valeur de la Sciences».

Глава II

Современные исследования дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений

1. Дифференциальные уравнения в частных производных и интегральные уравнения

В конце прошлой лекции я напомнил вам, какую необходимую помощь оказывает физик математику, снабжая его задачами. Но эта помощь не всегда свободна от неудобств, и задача математика зачастую очень неблагодарна. Обычно имеют место два случая: бывает, что физическая задача легко разрешима всего лишь методом «правила трех», но в противном случае она так чрезвычайно сложна, что математик отчаивается вообще решить ее; он будет биться над этим решением два столетия, а когда он найдет его, наш интерес к соответствующей физической задаче может пропасть. По-видимому, так обстоят дела с некоторыми задачами, касающимися дифференциальных уравнений в частных производных. Сразу после открытия исчисления бесконечно малых физики перестали нуждаться в чем бы то ни было, кроме очень простых методов интегрирования, в общем случае сводя задачи к элементарным дифференциальным уравнениям. Но после введения дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков соответствующие задачи почти сразу оказались заведомо выше того уровня, с которым могли обращаться современные им математики.

Действительно, эти задачи (такие как задача Дирихле) тренировали сообразительность геометров и были предметом большого числа важных и широко известных работ в течение всего девятнадцатого века. Большое разнообразие примененных к ним остроумных методов показало, что этот вопрос по-прежнему сохраняет свои довольно загадочные свойства. Только в последние годы столетия мы смогли обращаться с ним с некоторой ясностью и пониманием его истинной природы. По-видимому, эта ясность пришла слишком поздно, так как в это время началось современное развитие физики, в котором физика, кажется, отказалась от дифференциальных уравнений в частных производных и вернулась к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но, конечно, в задачах совершенно других, нежели простые случаи, знакомые Бернулли или Эйлеру.

Такая бесполезная работа была бы унизительна, но, к счастью, это чисто внешнее пренебрежение, и старые задачи не теряют своего значения от того, что другие задачи наложились на них, не заменив их собой. Действительно, полученное сейчас решение задачи Дирихле оказалось полезным в некоторых последних физических исследованиях.

Поэтому теперь мы выясним, каким образом возник этот новый вид задачи Дирихле и других похожих задач. Его особая и наиболее замечательная черта в том, что мы отказываемся от дифференциального уравнения в частных производных и заменяем его новым видом уравнения, а именно, интегральным уравнением. Этот новый метод делает задачу настолько же ясной, насколько туманной она была до того.

В современном анализе во многих обстоятельствах, в отличие от обычной точки зрения, операция интегрирования оказывается намного проще операции дифференцирования. В качестве примера можно привести интегральные уравнения, в которых неизвестная функция стоит под знаком интеграла, а не производной. С полученной таким образом разновидностью уравнений обращаться гораздо проще, чем с уравнением в частных производных.

Тип интегральных уравнений, соответствующих задаче Дирихле на плоскости — это

$$\phi(x) - \lambda \int\limits_A^B \phi(y) K(x, y) dy = f(x) \qquad (1)$$

где ϕ — неизвестная функция переменной x в интервале (A, B), f и K — известные функции, а λ — известный параметр. Уравнения эллиптического типа в многомерном пространстве приводят к похожим интегральным уравнениям, однако они содержат многократные интегралы и несколько независимых переменных. До того как были введены уравнения этого типа, каждый шаг в изучении эллиптических уравнений в частных производных, казалось, приносил с собой новые сложности; мало того что различные методы, придуманные для задачи Дирихле, проливали лишь частичный свет на этот вопрос, но и принципы большинства из них подходили особо к этой частной задаче: они, по-видимому, исчезали, если уравнение Лапласа заменялось на любое другое уравнение того же типа или даже (за исключением метода Неймана, который, как мы вскоре увидим, напрямую связан с интегральными уравнениями) если задача Дирихле в том же самом уравнении Лапласа заменялась на аналогичную, как это было в гидродинамике или теории теплопроводности. Кроме того, каждый из них скорее доказывал существование, чем предоставлял метод вычисления.

И вновь они казались совершенно неэффективными для другого ряда вопросов, которые должна была решать математическая физика, например, для изучения гармоник. Существование этих гармоник (таких как различного рода резонанс в наполненном воздухом пространстве) было очевидно физически, но предоставляло громадную трудность для математика. Шварц, Пикар и Пуанкаре дали первое решение, достаточно сложное, так как для определения каждой гармоники требовался новый бесконечный процесс вычислений, если предыдущая гармоника уже была определена. Тем не менее это решение строго доказывало основные свойства находящихся под вопросом величин (а именно, некоторые специальные значения параметра в уравнении (1)), то есть то, что они существуют и образуют дискретную бесконечность, причем лишь конечное их число лежит внутри любого конечного интервала.

Но в то же время Пуанкаре совершил открытие в некотором смысле даже более важное, точнее, он открыл близкую связь вопроса о гармониках и метода, указанного Нейманом для решения задачи Дирихле. Это открытие Пуанкаре открыло дорогу для работ Фредгольма. Последний подходит к каждому из перечисленных выше вопросов и ко всем родственным им задачам с одним и тем же методом, состоящим в редукции к уравнению вида (1). Отсюда сразу получаются все требуемые результаты для всех возможных типов таких задач.

Во всем этом математик, по-видимому, вновь играет ту несчастливую роль, на которую мы ссылались в начале, так как эти результаты – не более чем математическое доказательство фактов, каждый из которых был знаком любому физику задолго до начала всех этих исследований. Но конечно, в действительности их значение не ограничено этим доказательством, они могут стать и являются исходным материалом для открытия новых фактов. Они полезны, так как дают хороший метод вычисления. Ранее при вычислении резонанса в пространстве, наполненном воздухом, резонатор должен был иметь очень простую форму, но это требование не будет необходимым при использовании интегральных уравнений. Нам нужно только произвести элементарное вычисление функции K и применить к вычисленной таким образом функции общий метод решения интегральных уравнений.

Имеются два основных метода решения таких уравнений. Не всегда легко получить численные результаты.

Лиувилль и Нейман (решая задачу Дирихле) в действительности разработали метод решения интегральных уравнений. Второй метод принадлежит Фредгольму. Первый метод дает ряды, которые могут медленно сходиться, но их легко вычислять. Метод Фредгольма дает частное двух рядов (целые функции от λ), члены которых надо вычислять независимо, в то время как в первом методе каждый последующий получается из предыдущего. Мы должны добавить, что Эрланд Шмидт показал, как с помощью первого метода можно получить более быстро сходящийся ряд, но метод Фредгольма имеет большее значение для физики из-за теоретической точки зрения. С его помощью легко получить (что было невозможно до его появления) не только существование гармоник, но и их свойства. Например, более старые методы нельзя было успешно применять, по крайней мере без больших трудностей и большого объема вычислений, для нахождения порядка величины последовательной верхней гармоники (то есть соответствующих больших значений λ). Возможно, с их помощью вообще нельзя было предсказать порядок величины, как это сделано в последних работах Германа Вейля, так, чтобы показать их связь с объемом соответствующего пространства. Но уже доказано, насколько важно в физике знать математически, а не только эмпирически, что гармоники, соответствующие уравнениям вида (1) дискретно бесконечны. Так как в случае спектральных частот мы получаем ряды, стремящиеся накапливаться в определенных положениях. По теории Фредгольма мы можем утверждать, что такие ряды несовместимы с видом интегральных уравнений, приведенных в начале этой лекции.

Сам Фредгольм исследовал новые формы (как и Вальтер Рисс). Введение интегрального уравнения сделало доступной даже вышеуказанную задачу. Старый метод не позволил бы решить, возможно ли находящееся под вопросом распределение. Предложенная Фредгольмом гипотеза приводит к интегральному уравнению, такому как

$$\phi(x) - \frac{1}{k-\lambda^2}\int\limits_a^b \phi(y)K(x,\,y)dy = f(x) \tag{2}$$

Здесь частоты будут накапливаться в окрестности $\lambda = \sqrt{K}$.

Я должен непременно добавить, что, как показал Рисс, тип Фредгольма недостаточен для правильного объяснения этих феноменов. Но это не меняет тот существенный факт, что с помощью нового метода мы можем сразу решить, какое асимптотическое распределение гармоник может или не может иметь место, чтобы было возможно сравнение с наблюдениями; этим мы обязаны исключительно методу Фредгольма.

2. Возвращаясь к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Как мы сказали в начале, предмет дифференциальных уравнений в частных производных, бывший главным и почти единственным объектом математической физики, сейчас перестает быть таковым. Как следствие общего допущения дискретной структуры материи, современные физические задачи имеют тенденцию приводить к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эти дифференциальные уравнения приходится изучать в сложнейших обстоятельствах, поскольку мы должны проследить вид решений за очень длительные периоды времени, то есть независимого переменного t. Можно сказать, что до Пуанкаре таких исследований не существовало, и даже его работы по этой теме, я прежде всего имею в виду четыре его мемуара в «Journal de Mathematiques», 1887 («О форме кривых, определенных дифференциальными уравнениями»), заставляют нас почувствовать, как Сократ, что мы ничего не знаем.

Здесь мы не можем заострить внимание на открытых им чрезвычайных сложностях и парадоксах. Мы упомянем лишь один из них, поскольку он помогает исправить ошибку, часто допускаемую в задачах гидродинамики и электричества, касающихся силовых линий и линий потоков. Все эти линии определены обыкновенными дифференциальными уравнениями. Их общий вид $dx/X = dy/Y = dz/Z$. В очень общем классе случаев вектор XYZ обладает свойством

$$\mathrm{div}(XYZ) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

Итак, когда бы ни существовали такие условия, физики привыкли говорить, что силовые трубки — или трубки потоков или вихрей — замкнуты (если они не уходят в бесконечность или не выходят на границу области существования вектора X, Y, Z).

Я думаю, они так говорят из-за примеров, возникающих в некоторых простых частных случаях, в которых дифференциальные уравнения можно проинтегрировать, так как до работ Пуанкаре никто не мог подозревать исключительность этих случаев, дающих, вообще говоря, совершенно неадекватное и деформированное представление о предмете. В действительности находящееся под вопросом утверждение совершенно неверно[1]. Если мне позволят привести грубое сравнение, неправда, что силовая трубка должна вернуться домой и вставить ключ в замок. Скорее она вставит свой ключ выше, или ниже, или в стороне, но никогда не попадет точно в него. Правда, она почти вернется назад бесконечно много раз. Единственное следствие, которое правильно будет вывести из уравнения $\operatorname{div}(XYZ) = 0$, — то, что площадь поперечного сечения трубки не может измениться. Но форма его измениться может и в общем случае изменяется. Если в начале она была, скажем, круглой, то она превратится в эллиптическую при возвращении, и ее эллиптичность будет возрастать при каждом возврате. Наконец она превратится в длинную плоскую полосу, и только часть ее вернется в окрестность начального положения. На рисунке 1 показаны последовательные изменения вида той же самой силовой трубки.

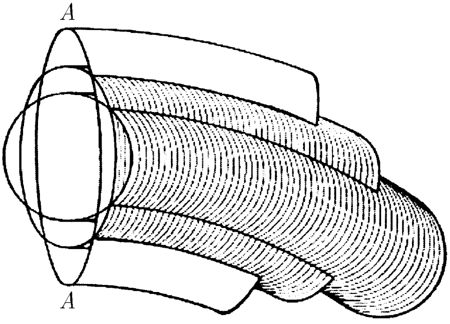

Рис. 1

Силовая трубка может быть изначально круглой, но при первом возвращении или возврате она может стать эл-

[1] Для доказательства часто приводится наглядный пример, ошибка которого состоит в неполном перечислении возможных случаев.

липтической в поперечном сечении, и поэтому лишь частично вернуться в начальное положение. Это выражено еще сильнее при втором возвращении силовой трубки, про которую можно сказать, что она стала очень плоской в поперечном сечении.

Как любезно указал мне мистер Биркгхоф, интересно отметить, что в большинстве случаев деформированная и плоская трубка будет вообще проходить одновременно неопределенно близко к любой точке рассматриваемой среды.

Тем не менее можно установить довольно любопытный факт. Хотя принцип замкнутости трубки совершенно неверен, выводы, сделанные из него физиками, большей частью верны. В чем здесь дело? Возможно, объяснение связано с тем, что при той же самой гипотезе, $\mathrm{div}(XYZ) = 0$, кривая, определенная нашими дифференциальными уравнениями, как правило возвращается бесконечно близко к своей начальной точке бесконечно много раз. (Это называют «устойчивостью по Пуассону».) Пуанкаре показал, что хотя не каждая изучаемая кривая ведет себя так, но случаев, когда это происходит, бесконечно больше, чем противоположных случаев.

3. Приложение к молекулярной физике

На этом отдельном примере мы увидели, насколько сложной и неожиданной может быть форма кривых, определенных дифференциальными уравнениями, и насколько мы далеки от ее понимания при больших значениях независимой переменной.

Но можем ли мы быть удовлетворены нашей работой, даже преуспев в этом? Сомнительно. Я не могу не вспомнить о наследстве, оставленном Французской Академии Наук в качестве премии первому человеку, который смог бы связаться с другой планетой, за исключением Марса! Случай молекулярной физики напоминает мне это довольно сложное требование. Обсуждение молярных воздействий (то есть воздействий на доступные наблюдению количества вещества) молекулярных движений — это математическая задача, которая, говоря логически, должна предполагать достаточно обширные знания о кривых, определенных дифференциальными уравнениями; примем это за исходную точку для обсуждения вероятностных вопросов, связанных с такими кривыми.

То, что вероятность играет свою роль в движении почти любой динамической системы, следует из только что приведенных утверждений. Если начальные положения и начальные скорости движущихся точек точно известны, то так же будут известны и конечные положения и скорости после любого (сколь угодно долгого) данного промежутка времени. Но если этот промежуток долог, а мы допустили очень малую ошибку в начальных условиях, то влияние этой малой ошибки может очень возрасти и даже вызвать полное изменение результатов в конце долгого периода времени, а это и есть принадлежащая Пуанкаре концепция случая. Ситуация походит на игру в рулетку в Монте-Карло, когда мы не знаем всех обстоятельств бросания шарика, что порождает случай. Итак, мы знаем об условиях не более, чем азартные игроки. Иначе говоря, в конце концов молекулы перемешиваются в точности как карты после долгого перетасовывания. Это тот фундаментальный случай, который играет главную роль в методе Гиббса. Следует ввести что-то вроде перемешивающей функции. Начнем на одной из силовых линий. Если мы точно знаем исходную точку A, мы должны точно знать конечную точку. Если A известна лишь приблизительно, то конечная точка может занять разнообразные позиции; действительно, во многих дифференциальных задачах она может совпасть (приблизительно) с любой точкой B внутри той области, в которой рассматривается дифференциальная система (хотя это не совсем так для динамических задач, связанных с интегралом энергии или другими подобными интегралами, допускаемыми уравнениями).

Таким образом, если исходная точка приближенно равна A, то имеется определенная вероятность, что конечная точка будет находиться в определенной окрестности другой данной точки B, и эта вероятность будет определенной функцией от положения этих двух точек A и B.

Теперь, говоря логически, для решения вопроса, поставленного перед нами кинетическими теориями, мы должны бы были взять такую «перемешивающую функцию», предполагая ее известной, как основу дальнейших и, возможно, сложных рассуждений. Действительно, главные из современных теорий в статистической механике основаны на определенных, очень правдоподобных предположениях, касающихся этой функции. Но строго говоря, мы не можем рассматривать их как теоремы.

К счастью, все очень упрощается от того, что при таком перемешивании вышеназванная функция, характеризующая закон перемешивания, проявляет лишь некоторые из своих свойств и может измениться довольно сильно без изменения конечного результата. Именно это показал Пуанкаре для обычного тасования карт в своей «Calcul des Probabilites»[1]. При единичном тасовании индивидуальные привычки игрока, конечно, имеют значение, имеют они значение в большей или меньшей степени и после нескольких тасований. Но после многих тасований результаты становятся совершенно не зависящими от этих привычек. Пуанкаре также показывает (хотя и с несколькими исключениями, которые, однако, вряд ли имеют большое практическое значение), что нечто подобное происходит при перемешивании в молекулярных теориях.

Поразительный пример этого дают некоторые известные факты из истории этих теорий. Таковы работы Больцмана и Гиббса по кинетической теории газов и статистической механике. Оба они делают вывод, что если рассмотреть вероятность среднего количества молекул в шестимерном пространстве, обозначить ее P и проинтегрировать $\log P$ по всей массе, то окажется, что полученный интеграл постоянно возрастает. Критики, и среди них мой коллега и друг Бриллуин, говорят: «Мы не можем поздравить себя с таким результатом, поскольку эти двое говорят о совершенно разных вещах и все-таки соглашаются. Гиббс не упоминает о соударениях молекул, тогда как анализ Больцмана основан на них. Примитивный порядок молекул возмущается этими соударениями и происходит перемешиванием. Гиббс получает похожее перемешивание простым рассмотрением дифференциальных уравнений, существующих в течение долгого промежутка

[1] А. Пуанкаре. «Теория вероятностей». — Ижевск: РХД, 1999.

времени.» Если в каждом из случаев рассмотреть «молекулярно организованные» системы, то через некоторое время молекулы будут куда менее организованы и более перемешаны.

Нас удивляет подобное совпадение результатов Гиббса и Больцмана в таких обстоятельствах. Однако мы больше не будем считать его случайным и осознаем истинное его значение именно с помощью того, что мы только что заметили по поводу тасования карт, заставившего нас понять, что такие конечные результаты могут зависеть и зависят от свойств, вообще говоря, совпадающих для заметно разных законов перемешивания.

Но сейчас мы должны рассматривать не только те сложности, которые встречаются в обыкновенных дифференциальных уравнениях или в уравнениях в частных производных. Математикам принадлежит идея ввести новый тип уравнений, сложнее предыдущих: интегро-дифференциальные уравнения.

4. Интегро-диференциальные уравнения

Теперь нам придется рассмотреть этот новый тип. Здесь неизвестная функция появляется под знаком интеграла и дифференциала одновременно. Мы должны рассмотреть как минимум два совершенно разных вида таких уравнений. Разница между ними соответствует двум видам переменных, появляющихся в физических задачах: пространственным переменным x, y, z и переменному времени t. (В первой группе может быть более трех переменных.)

Первый тип: дифференцирование по x, y, z, интегрирование по t.

Второй тип: дифференцирование по t, интегрирование по x, y, z. И хотя этот тип уравнений датируется всего лишь 1907 годом, мы уже нашли случаи обоих типов.

Вольтерра пришлось рассмотреть первый из них в связи с «механикой наследственности». Это случай, когда свойства системы зависят от всех предыдущих фактов ее существования (таковы магнитный гистерезис, деформации стекла и вообще постоянные деформации).

Вольтерра рассматривает упругий гистерезис. Пусть T — компонента напряжения; E — компонента деформации. (Имеются шесть T и шесть E.) Затем мы формально рассматриваем $T_{hk} = \sum a_{hk} E_{hk}$. Имеются шесть уравнений этого типа и 21, 36, 6 или 2 параметра a в зависимости от теории. Рассматривая наследственность, мы должны ввести новые члены. Предположим, что в момент времени 0 деформаций не было, тогда

$$T_{hk} = \sum aE_{hk} + \int\limits_0^t \Big(\sum aE\Big)_t \, d\tau,$$

где τ — переменное время. В этом уравнении имеем производные по x, y, z и интеграл по времени; это свойство остается, если вывести из данных значений T уравнения движения. Волны на воде снабжают нас примером противоположного типа. Известно, что волны на поверхности воды — наиболее общий пример волнового явления, и поэтому именно их чаще всего используют, давая начинающему первое представление, что это за явление.

Но общий, хотя и удивительный, факт состоит в том, что простейшие ежедневные явления сложнее всего понять. Если теория воздушных или даже упругих волн довольно проста, по крайней мере если оставить в стороне вязкость[1], и сейчас она классическим образом сводится к аналитическим принципам (родственным понятию характеристик, как мы видели на предыдущей лекции), то свойства поверхностных волн в жидкостях куда менее известны. Несколько классически известных результатов даже имеют противоречивую природу. Один из них — дифференциальное уравнение, составленное Лагранжем в случае малой (постоянной) глубины, послужившее моделью для динамической теории приливов; уравнение, полученное как управляющее этим явлением, было в обоих случаях дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Но для того же самого явления в жидкости неопределенной глубины

[1] Строго говоря, в вязком газе волны не могут существовать. Они заменяются на квазиволны, впервые рассмотренные Дьюхемом и более глубоко изученные в важном мемуаре Руа, представленном Французской Академии Наук.

Коши получает уравнение в частных производных четвертого порядка. Дело в том, что эта задача вообще приводит не к дифференциальному, а к интегро-дифференциальному уравнению. Для изначально плоской поверхности с малыми перемещениями, где z — вертикальное перемещение в точке $(x,\, y)$,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \iint Z_Q \phi(P,\, Q) dS_Q$$

Итак, для любой данной точки P на поверхности, определенной своими координатами $(x,\, y)$, вертикальное ускорение зависит от значений z в любой другой точке $Q(x',\, y')$. Здесь S_q равно $dx'dy'$, а ϕ — известная функция (x, y, x', y'). Написанное выше уравнение принадлежит ко второму типу интегро-дифференциальных уравнений.

Вольтерра добился успеха в случае изотропных тел, сводя задачу к решению дифференциального уравнения в частных производных и обыкновенного интегрального уравнения. Но для кристаллической среды все не так просто[1].

Уже перечисленные нами два типа интегро-дифференциальных уравнений требуют совершенно разного подхода. Тип Вольтерра напоминает дифференциальные уравнения в частных производных (эллиптического или иногда гиперболического рода в уже приведенных примерах). Уравнение нужно снабдить дополнительными условиями, которые будут ничем иным как граничными условиями (ср. с лекцией I). Методы, приведенные Вольтерра, действуют в точности как методы, применяемые для задачи Дирихле (составление функций Грина, например).

В вышеописанном втором типе дополнительными будут начальные условия; с ними надо обращаться как с обыкновенными дифференциальными уравнениями, а не как с уравнениями в частных производных, например, в этом случае очень полезен метод последовательных приближений Пикара.

[1]С тех пор как были прочитаны эти лекции, профессор Вольтерра дал исчерпывающий обзор своих методов и решений в курсе лекций в Парижском университете. Эти лекции изданы (J. Peres, Paris, Gauthier Villars).

Глава III

Analysis Situs в связи с соответствиями и дифференциальными уравнениями

1.

Поговорим о роли Analysis Situs[1] в нашей современной математике. Эта теория называется также геометрией положений. Она изучает связи между разными частями геометрических форм, не меняющиеся при произвольной непрерывной деформации. Предположим, что мы можем позволить системе подвергнуться любой деформации, какой бы произвольной она ни была, лишь бы она сохраняла непрерывность. Например, с точки зрения геометрии положений сфера и куб рассматриваются как одно и то же, поскольку они переходят друг в друга без отрыва частей и без объединения изначально разделенных частей. С той же самой точки зрения круг идентичен прямоугольнику. Но боковая поверхность цилиндра и прямоугольная поверхность не идентичны, так как, преобразовывая одну из них в другую, мы должны сделать разрез вдоль образующей. К тому же одна из них ограничена двумя линиями (окружностями в основании), а другая — одной. Полная поверхность цилиндра вполне замкнута, она идентична поверхности сферы. Здесь не возникает сложностей при преобразовании.

Ситуация изменится, если мы рассмотрим кольцо (тор). Это замкнутая поверхность, но в ней есть дыра, которой нет на поверхности сферы, и поверхность сферы

[1] Analysis Situs Пуанкаре первоначально назвал топологию.

нельзя преобразовать в нее непрерывно. Придется сделать несколько разрезов, после первого из них получаем разорванное кольцо (рис. 2), для нас идентичное боковой поверхности цилиндра. Разрезав его, можно получить прямоугольник, который превращается в сферу. Но преобразования кольца в сферу нельзя произвести без разрезания и склеивания.

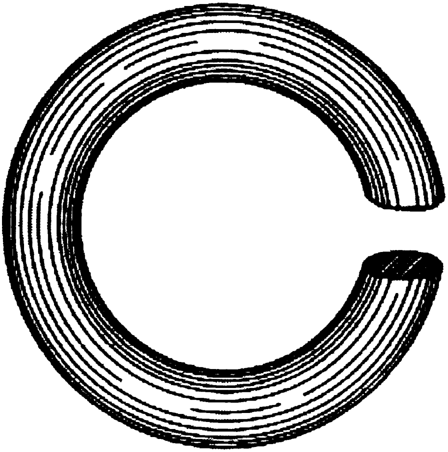

Рис. 2

Принципы позиционного анализа поверхностей в обычном пространстве хорошо известны, и сейчас я не собираюсь останавливаться на них. Считаем, что они нам даны. В соответствии с ними двумерная поверхность с нашей нынешней точки зрения определяется количеством границ и еще одним числом, а именно, родом. Он равен нулю для сферы и единице для кольца. Для горшка с двумя «ушками» (рис. 3) род равен двум.

Позиционный анализ начался с шутливых задач, вроде рассмотренной Эйлером задачи о мостах через реку Прегель в Кенигсберге. Имеется семь мостов; надо пройти по всем ним, ни на одном не побывав дважды (рис. 4).

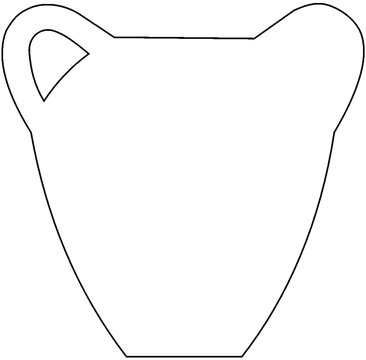

Рис. 3

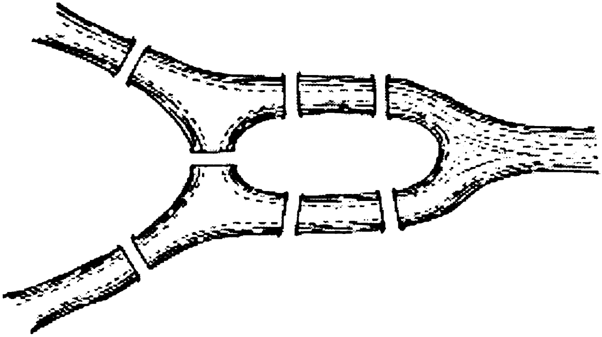

Рис. 4

Великий Эйлер не стыдился заниматься этой и многими другими, казалось бы детскими, задачами. Но в этой задаче нас особо интересует то, что она использует геометрию положений в том смысле, в котором мы употребили этот термин. Так как даже если бы острова на реке имели другие очертания, а форма мостов была бы очень причудливой, рассуждения остались бы теми же самыми, при условии, что количество островов и мостов не изменилось, и в обоих случаях каждый мост соединяет те же острова.

Перед нами пример важной теории, развившейся из детского упражнения. Можно подумать, что необходимость заниматься такими задачами вредит математике. На самом же деле, как мы видим, эти задачи могут, хотя и в качестве исключения, привести к важным результатам.

То, что понятие позиционного анализа действительно важное, впервые становится ясным в исследованиях Римана. Как известно, Риман вместе с Коши был основателем теории аналитических функций. Эти две школы применяли свои теории к изучению алгебраических функций. Методы Коши в руках своего автора и Пюизо смогли пролить свет на многие важные разделы этой задачи, не разъяснив ее, однако, полностью, и (в частности) один Риман смог открыть фундаментальное понятие рода алгебраической кривой.

В чем элементы успеха Римана и его превосходство над Коши? Прежде всего надо сделать замечание, которое, строго говоря, может и не относиться к нашему предмету, но тем не менее, как мы увидим, наиболее тесным и необходимым образом связано с ним.

Рассмотрим действительную область. Предположим, что нам надо изучить алгебраическую функцию y, определенную равенством $x^2 + y^2 = 1$ (или любым другим квадратным уравнением, определяющим y как соответствующую эллипсу функцию от x).

Эта функция действительна только для значений x, заключенных между -1 и $+1$ (во втором случае между x_0 и x_1). Риман рассматривал функция на сегменте, заключенном между этими значениями. Он заметил, что это неполный вид уравнения, так как y определено некорректно и имеет два разных значения. Но если мы заменим нашу прямую на две слегка отличающиеся прямые, то мы можем считать, что верхний сегмент соответствует значениям y со знаком $+$, а нижний — со знаком $-$, при этом предполагается, что два сегмента соединены друг с другом на общих концах. После этой модификации каждой точке рисунка будет соответствовать одна и только одна система значений x и y, удовлетворяющих данному уравнению. Кроме того, в этом случае мы получим фигуру, идентичную с точки зрения позиционного анализа эллипсу, представленному самим данным уравнением.

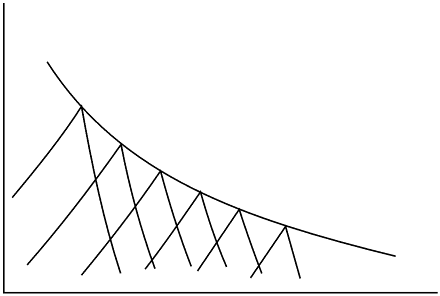

Рис. 5

Но Риман применял тот же метод в комплексной области и пришел к знаменитому классу поверхностей, носящих его имя.

Это очень общий принцип. Во всяком случае, его необходимо применить, прежде чем использовать геометрию положений. Мы должны выяснить, будет ли используемая область адекватно представлять изучаемые положения изменений. Я приведу пример, принадлежащий, по-моему, Софусу Ли. Он связан с особым решением дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f(x,\, y,\, z') = 0 \tag{1}$$

как известно, вопрос состоит в том, существует ли некоторое решение, не представленное общим интегралом. В этом случае подобное решение должно удовлетворять не только исходному уравнению, но и

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

Дарбу показал, что этого недостаточно и что, вообще говоря, система уравнений (1) и (2) не представляет действительного решения, но определенная этой системой кривая будет геометрическим местом точек возврата решений уравнения (1) (рис. 5). Сейчас мы увидим, что этот результат, аналитическое доказательство которого требует некоторых сложных вычислений, появляется сам по себе в результате вышеуказанных геометрических рассуждений.

Уравнение (1) определяет y' как функцию x и y, но эта функция имеет несколько определений, то есть ветвей. Такое положение вещей неудовлетворительно с высказанной нами выше точки зрения. Чтобы избежать этого, рассмотрим поверхность $f(x, y, z) = 0$ в пространстве. Для каждой точки этой поверхности имеем

$$dy/dx = z. \tag{3}$$

Так что задача сводится к вычерчиванию на поверхности тех кривых, у которых dy/dx равно z. Говоря геометрически, такие кривые должны в каждой точке касаться некоторого направления, а именно пересечения плоскости, касательной к данной поверхности, с определенной вертикальной плоскостью (представленной уравнением (3)). Система (1) и (2) представляет «горизонтальную границу» поверхности. В каждой ее точке m касательная плоскость вертикальна (рис. 6).

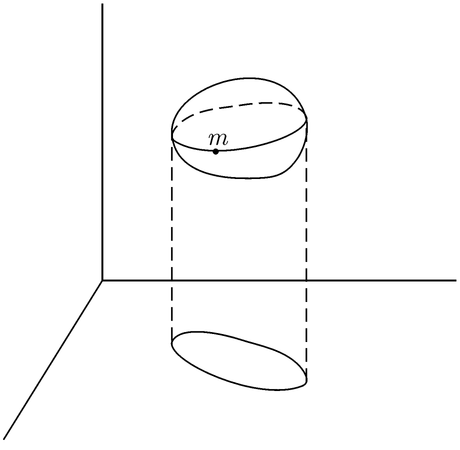

Рис. 6

Что там происходит? Мы видим, что в m две плоскости, определяющие касательную к нашей кривой, вертикальны (плоскость, соответствующая (3), всегда вертикальна). Итак, сама эта касательная тоже вертикальна. Отсюда немедленно получаем желаемый результат, так как хорошо известно, что при проецировании пространственной кривой на плоскость, перпендикулярную одной из ее касательных, мы получаем плоскую кривую с точкой возврата. Единственное исключение возникает, когда обе наши плоскости совпадают, и это действительно дает дополнительное условие для существования особого решения.

Таким образом сложный вопрос в теории дифференциальных уравнений сводится к элементарному результату аналитической геометрии, и это достигается всего лишь правильным (в смысле Римана) изображением y' как функции x и y. Только когда получено это адекватное представление области изменения, можно применять позиционный анализ.

Прежде чем увидеть его в действии, заметим, что у Коши была возможность открыть его значение. Это любопытный исторический факт в его работе, так как это была одна из его немногих ошибок. Она была допущена в период его юности, когда он занимался теоремой Эйлера о многогранниках. Эта теорема связывает количество граней, вершин и ребер. Она говорит, что $F + V = E + 2$, где F — количество граней, V — количество вершин, E — количество ребер. Доказательство Коши было неверно, как и вообще сама теорема. Эта теорема действительно выполняется (вот почему Эйлер и Коши считали ее правильной) для очень большой категории многогранников, к которой относятся все выпуклые многогранники. Но другие не были приняты во внимание, например, те, что имеют общую форму кольца, а они не удовлетворяют вышеупомянутому соотношению. Если бы Коши почувствовал эту ошибку, если бы он заметил это исключение из теоремы Эйлера, то с некоторой вероятностью можно допустить, что он не оставил бы Риману славы открывателя полной теории алгебраических функций.

Позвольте напомнить вам о разнице между методом Коши (и Пюизо) и Римана. Если рассмотреть алгебраическую функцию, определенную уравнением $F(x,\, y) = 0$, то y, вообще говоря, будет регулярной аналитической функцией от x в окрестностях x_0 и y_0, которая задается разложением в ряд Тейлора в некотором круге с центром в x_0. Принципы Коши и Вейерштрасса позволяют нам изучать эту функцию внутри этого круга. Пюизо изучал ее в критических точках x_1, где y не является голоморфной функцией от x. Он брал $X = (x - x_1)^{1/p}$ со специально подобранным p. Тогда y можно разложить по степеням X вместо степеней $x - x_1$. На первый взгляд кажется, что здесь все в порядке. Но в действительности мы все еще не знаем о некоторых фундаментальных свойствах. Дело в том, что у нас нет непосредственного представления о полной области, но только опосредствованное представление о ней как о ряде более мелких областей.

Правда, эти мелкие области таковы, что, будучи взятыми в совокупности, они полностью покрывают изучаемую область и поэтому в конечном счете позволяют нам полностью управлять ей. Но неправильно было бы считать, что это можно сделать, не изучив специально способ объединения этих частичных областей.

Я бы сравнил это (хотя такое сравнение очень неполно) с картой большой страны, данной на нескольких отдельных листах. Мы должны отдавать себе отчет не только о каждом отдельном листе, но и о «сводной таблице», показывающей их общее расположение, чтобы можно было перейти от частей к целому. Основополагающий и неожиданный факт, открытие которого принадлежит Риману, состоит в том, что такие «сводные таблицы» не во всем похожи друг на друга, что у них существуют совершенно разные виды, следовательно, нельзя как следует понять синтез деталей решения, не отметив этих различий.

2.

Теперь очевидно, что значение этих рассуждений не ограничивается алгебраическими функциями. Они связаны с любым синтезом вышеупомянутого вида, то есть, говоря теоретически, с любым применением интегрального исчисления.

Они составляют своеобразную месть геометрии анализу. Со времен Декарта мы привыкли заменять каждое геометрическое соотношение соответствующим соотношением между числами, и отсюда возникло своего рода преобладание анализа. Многие математики воображали, что они избежали этого преобладания, и считали себя чистыми геометрами в оппозиции анализу; но большинство из них делали это в том смысле, который я не могу одобрить: они попросту ограничивались рассмотрением исключительно геометрических вопросов, которые другие геометры могли бы решить, в общем случае достаточно легко, средствами анализа; конечно, очень часто они были вынуждены выбирать себе задачи не по их научному значению, а по возможности решить их без вмешательства анализа. Я даже вынужден добавить, что некоторые из них имели дело с задачами, не имеющими вообще никакого значения, и именно отсутствие значения было единственной причиной, по которой аналитики отбрасывали эти задачи. Конечно, я не только допускаю геометрическое решение, но и использую его всегда, когда нахожу это возможным, так как, будучи применимо в принципе, оно дает нам в общем случае куда лучший взгляд на предмет, чем аналитическое. Но очень важные задачи неразрешимы геометрически. Мы должны использовать все имеющиеся в нашем распоряжении средства и выбирать то или иное из них не a priori, а как наиболее подходящее для нашего вопроса.

Но здесь геометрия получает более ощутимое преимущество над анализом. Я считаю, что анализ не смог бы или смог бы лишь с большими сложностями и, может быть, после целого ряда бесплодных попыток заменить геометрическую точку зрения, на которую мы только что ссылались при решении соответствующей части нашей задачи. Я имею в виду переход от решения в маленьких областях к решению во всей области[1].

Допустим, например, что эта область двумерна. Тогда, согласно методам анализа, мы должны определить каж-

[1]Говоря логически, даже результаты Analysis Situs можно установить строго на цифровом языке; но подобные утверждения можно делать, лишь когда результаты уже найдены, а некоторые части этого аналитического решения чрезвычайно сложны (такие как теорема Жордана).

дую ее точку, задав в ней значения двух параметров, x и y. Но представление геометрической задачи посредством функций двух переменных часто приводит нас к потере какой-то части задачи: функции в двумерной области могут быть чем-то большим, чем просто функции x и y. Одновременное изменение x и y соответствует плоскости. Но форма плоскости в общем случае не совпадает с формой сферы или кольца, а в методе Декарта это различие утрачено. Например, в рациональной динамике мы можем получить столько образцов этих различий, сколько захотим. Как известно, когда динамическая задача имеет две степени свободы, соответствующие дифференциальные уравнения, то есть уравнения Лагранжа, определены, если параметры, определяющие положение системы, обозначены x и y и получены выражения $2T = E(x, y)x'^2 + 2F(x, y)x'y' + G(x, y)y'^2$ для живой силы и $U = \varphi(x, y)$ для силовой функции. Таким образом, если две динамические задачи соответствуют одним и тем же выражениям T и U, то их изучение должно происходить совершенно идентично и они должны сводиться одна к другой. При этом суть их может быть совсем разной, что можно сразу увидеть на следующем примере:

(1) Рассмотрим материальную частицу, на которую не действуют никакие силы. Траектории будут прямыми. (2) Пусть у нас есть вертикальный столб. Плечи AA' и BB' жестко прикреплены к нему, точки A и B фиксированы (рис. 7).

Единственным движением системы является вращение вокруг AB. $A'B'$ — вторая ось, вокруг которой может вращаться однородное твердое тело вращения. Система имеет две степени свободы. Мы должны изучать движение этой системы. Силовых функций нет. Возможны только вращения (два независимых вокруг AB и одно вокруг $A'B'$).

Аналитически две эти задачи — одно и тоже, так как в обоих случаях $U = 0$, а коэффициенты E, F, G в $2T$ — константы (и путем линейного преобразования x и y всегда можно получить $E = G = 1$ и $f = 0$). Тем не менее очевидно нельзя сравнивать движения в случае (1) и (2), так что аналитические методы в определенной степени обманули

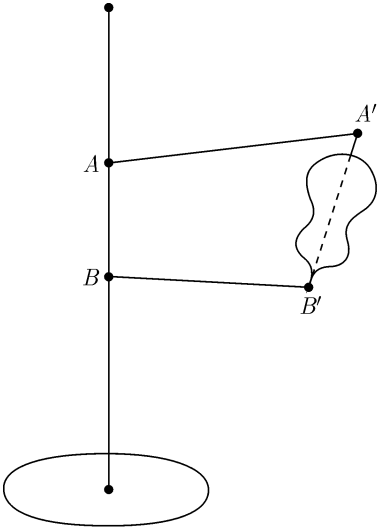

Рис. 7

нас. Множество всех возможных положений системы (2) можно представить не на плоскости, но на поверхности кольца.

После исследований Пуанкаре мы знаем, что изучение траекторий, представленных с помощью дифференциальных уравнений должно быть основано на Analysis Situs. Например, $f(x, y, y') = 0$ геометрически представляется некоторой поверхностью, и на этой поверхности геометрическое соответствие определяется так: каждой точке на поверхности сопоставляется определенное направление (вместе со знаком) на касательной плоскости. Так что мы должны нарисовать в каждой точке поверхности кривую, касательную к определенному таким образом направлению. Пуанкаре показал, что такую задачу нельзя решать, не зная рода поверхности. Это проявляется уже в простом предварительном вопросе, возникающем в начале изучения. Мы сказали, что у нас есть определенное направление в каждой точке поверхности. Может ли в общем случае не быть исключений? В общем случае нет. В каждой точке, в общем случае, мы имеем определенное касательное направление, но при построении соответствия существуют и несколько особых точек. Единственный случай, когда возможно полное соответствие, — это случай поверхности рода 1. Для нулевого рода, например, должны найтись особые точки. Пуанкаре установил, что в этом случае каждая траектория либо замкнута, либо заканчивается в особой точке, либо асимптотически приближается к замкнутой. Для рода один особые точки могут отсутствовать, но форма удовлетворяющих уравнению кривых может быть гораздо сложнее.

Дифференциальные уравнения высших порядков, конечно, потребуют (как и случилось в некоторых разделах работы Пуанкаре) вмешательства Analysis Situs. Но сложность будет куда выше, так как в гиперпространствах эта теория настолько сложна, насколько она была проста в руках Римана, примененная к обычным поверхностям. Эти высшие главы Analysis Situs становятся, однако, хорошо известными, и хотя их еще нельзя применять к дифференциальным уравнениям, их роль уже ясна, если обратиться к работам Пикара и Пуанкаре о естественном обобщении оригинальной теории Римана. Я имею в виду сложную теорию алгебраических поверхностей и алгебраических функций двух и более независимых переменных.

Что касается дифференциальных уравнений в частных производных, мы должны указать очень примечательный аналогичный пример Вольтерра, связанный с задачей из теории упругости. Вообще говоря, если внешние силы и периферические воздействия на однородное твердое тело равны нулю, таким же будет и давление в каждой принадлежащей ему точке. Точнее, в таком теле, имеющем простую связную форму, давление может появиться только при условии существования особых точек, где перестают действовать общие законы его распределения. Но для кольцеобразного тела может иметь место обратное, и в действительности Вольтерра просто построил такие кольцеобразные тела, в которых давление существует и его можно ощутить опытным путем при отсутствии внешнего воздействия и при отсутствии особых точек.

3.

Но можно привести гораздо более элементарные примеры из самых начал дифференциального исчисления. Рассмотрим точечное отображение, определенное такими уравнениями как

$$X = f(x, y), \quad Y = g(x, y).$$

Когда эта система уравнений допускает одно и только одно решение в переменных x и y для данных X и Y?

Классический результат состоит в том, что это прежде всего зависит от функционального определителя

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что он не равен нулю в некоторой точке (x_0, y_0). Нас учат, что в окрестности (X_0, Y_0) система будет иметь одно и только одно решение. Возникает искушение сделать вывод, что если этот определитель всюду отличен от нуля, то мы имеем всюду взаимнооднозначное соответствие. Это не так, и в связи с этим действительно допускались ошибки. Даже в простейшем случае, когда рассматривается представление всей плоскости XY на всей плоскости xy, нужно добавить дополнительное условие на бесконечности, чтобы говорить о взаимнооднозначном соответствии.

А теперь заменим наши плоскости на две сферы, рассматривая соответствие между точкой (x, y, z) на поверхности первой сферы и точкой (X, Y, Z) на поверхности второй сферы. В этом случае мы находим, что выполнение условия, аналогичного вышеуказанному, в каждой точке первой сферы действительно обеспечивает правильное взаимнооднозначное соответствие.

Но если мы заменим наши сферы двумя кольцами, результаты вновь полностью и ощутимо изменятся. Несколько точек на поверхности одного кольца могут соответствовать одной и той же точке на поверхности второго кольца, хотя в окрестности каждой точки все, кажется, происходит так, как должно быть при взаимнооднозначном соответствии. Чтобы увидеть это, надо всего лишь заметить, что точка на торе зависит от двух углов Θ, φ. Если через Θ', φ' мы обозначим аналогичные углы на второй поверхности, то остается всего лишь определить соответствие $\Theta' = p\Theta$, $\varphi' = q\varphi$, где p и q два произвольных целых числа[1].

Любопытно, что то же самое имеет место в отношении двух окружностей. Очевидно, что если две точки движутся соответственно по двум окружностям с одинаковой скоростью и одна оборачивается p раз (p — целое), тогда как другая — один раз, то каждое положение первой из них соответствует p разным положениям второй, хотя отношение скоростей ни разу не меняет знак, не обращается ни в ноль, ни в бесконечность.

Как мы видели, ничего подобного не может случиться на поверхностях двух сфер (или двух гиперсфер в n-мерном пространстве с $n > 2$), так что в этом смысле двумерный случай оказывается сложнее, чем трех- или многомерный.

Эти частные различия тесно связаны с фундаментальными различиями в Analysis Situs. Они происходят от того, что существует много существенно отличных друг от друга способов перейти от одной точки к другой на окружности (соответственно с количеством оборотов вокруг кривой), но любая линия, соединяющая две точки на сферической поверхности, может перейти в любую другую с помощью непрерывного изменения.

Этот вопрос о соответствиях и теореме Эйлера на многогранниках мог бы дать нам самые простые и элементар-

[1] Интересно добавить, что если рассматривать обычные (замкнутые) поверхности, то род 1 — единственный, при которого может получиться такой парадоксальный результат, в том смысле что если каждой точке замкнутой поверхности Σ рода $g > 1$ соответствует одна (и только одна) точка второй замкнутой поверхности Σ' того же рода и если в окрестности каждой точки определенное таким образом соотношение имеет вид регулярного взаимнооднозначного соответствия, то таким же оно будет и на всей поверхности. Это легко увидеть, заметив, что в общем случае, накладывая те же условия за исключением предположения о равенстве двух родов g и g' и обозначая h количество точек Σ, соответствующих одной и той же точке на Σ, мы получаем, что это число h (которое должно быть одинаково везде, кроме особых точек) связано с g, g' уравнением $g - 1 = h(g' - 1)$: факт, вытекающий из обобщенной теоремы Эйлера.

ные примеры, в которых результаты основательно видоизменяются от рассмотрения с точки зрения Analysis Situs, если бы не существовал другой анализ, связанный с самими принципами геометрии. Я имею в виду концепцию пространства Клейна – Клиффорда. Но так как эта концепция полностью определена и развита в «Evanston Colloquium» Клейна, нет смысла рассматривать ее особо. Мы хотим только напомнить, что этот вопрос в большой степени сходен по характеру с темой, о которой мы говорили на настоящей лекции. Пространство Клейна – Клифорда и обычное евклидово пространство не просто приблизительно, но полностью и строго идентичны, если только рассматриваемые фигуры не превышают некоторых размеров. Таким образом ничто не отличает их друг от друга в их бесконечно малых свойствах. Тем не менее они оказываются совершенно различны при рассмотрении достаточно больших расстояний.

Как вы видите, этот пример, в точности похожий на предыдущие, учит нас тому, что некоторые фундаментальные черты математических решений могут оставаться скрытыми, пока мы ограничиваемся рассмотрением деталей; так что, открывая их, мы необходимо должны обратить наше внимание на способ синтеза этих деталей, что приводит к точке зрения Analysis Situs.

Глава IV

Элементарные решения дифференциальных уравнений в частных производных и функции Грина

1. Элементарные решения

Мы будем говорить о выражениях, которые составляют необходимую базу при обращении с любым линейным дифференциальным уравнением в частных производных, возникающим в физических задачах. Простейшее из них — это величина, используемая во всех теориях классического уравнения Лапласа: $\nabla^2 u = 0$; а именно, элементарный ньютонов потенциал $1/r$, где

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

а (a, b, c) — фиксированная точка.

На самом деле изначально был введен потенциал, давший толчок к изучению уравнения. Аналогичное уравнение на плоскости имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь мы должны рассматривать логарифмический потенциал $\log 1/r$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Итак, мы видим, что, желая иметь дело с любым другим уравнением вышеуказанного типа, мы должны вновь построить похожее решение, обладающее теми же свойствами, какими обладает $1/r$ в случае уравнения Лапласа. Как найти такое решение? Чтобы понять это, мы должны изучить определенные свойства $1/r$. Во-первых, заметим, что эта величина $1/r$ является функцией координат двух точек $(x,\, y,\, z)$ и $(a,\, b,\, c)$ [соответствующий элемент $\log 1/r$ на плоскости аналогичным образом зависит от $(x,\, y;\, a,\, b)$]. Если рассматривать $1/r$ как функцию только x, y, z (предполагая, что a, b, c константы), то $1/r$ имеет особенность (сингулярность) при $r = 0$, а $r = 0$ только когда одновременно $x = a$, $y = b$ и $z = c$. Но для комплексных точек $1/r$ имеет особенности, если линия, соединяющая $(x,\, y,\, z)$ с $(a,\, b,\, c)$ составляет часть изотропного конуса с вершиной $(a,\, b,\, c)$.

Этот изотропный конус вводится не случайно, и не каждая поверхность может быть такой поверхностью особенностей (сингулярностей). Это то, что мы будем называть характеристическим конусом уравнения. Мы уже встречались с понятием характеристики на нашей первой лекции, и видели, что это не что иное как аналитический перевод физического выражения «волны». Тем не менее сейчас я должен вернуться к нему, чтобы напомнить вам, что слово «волны» имеет два разных значения. Наиболее очевидное из них следующее: пусть где-то возникает колебание, подобное звуку; оно не воспринимается немедленно в любой другой точке. Следовательно, в пространстве есть точки, которых это действие в произвольный данный момент времени еще не достигло. Тогда волна в этом смысле представляет собой поверхность, разделяющую среду на две части (области): часть, находящаяся в покое, и другая, находящаяся в движении благодаря начальным колебаниям. Эти две части пространства соприкасаются. Только в 1887 году Гюгонио, преждевременно умерший французский математик, показал, какой может быть поверхность волны; и даже его работа не была широко известна, пока Дюгем не показал ее значения в своем труде по математической физике.

Вторая точка зрения на волну чаще используется физиками. Мы не включали колебания в первое определение. Если теперь предположить, что мы должны иметь дело с синусоидальными колебаниями классической формы, то движение будет общим и охватит все занятое воздухом пространство. Отмечая положение всех точек пространства с одинаковой фазой колебания, мы определяем некоторую волновую поверхность (или поверхности).

Ясно, что эти два значения слова «волны» заметно отличаются. В первом случае мы делим пространство на две области, где происходят разные вещи, но это не так во втором случае. Конечно, говоря физически, мы чувствуем определенную аналогию между ними. Но аналитику кажется, что между этими двумя точками зрения лежит пропасть.

Эта пропасть заполняется с помощью теоремы Делассю. Рассмотрим произвольное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка и предположим, что u — это решение, которое должно быть сингулярно вдоль всех точек некоторой поверхности $\pi(x, y, z) = 0$. Делая несколько очень простых предположений о природе особенностей, Делассю нашел, что эта поверхность должна быть характеристической в смысле определения на нашей первой лекции, то есть при данном уравнении $\nabla^2 u = 0$ она должна удовлетворять (нелинейному) дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\Big(\frac{\partial \pi}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \pi}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \pi}{\partial z}\Big)^2 = 0,$$

полученному подстановкой вместо частных производных второго порядка неизвестной функции u в данном уравнении соответствующих квадратов или произведений производных первого порядка функции π (считается, что остальные члены данного уравнения отсутствуют). Это характеристическое уравнение, соответствующее нашей задаче. Оно совпадает с тем, которое нашел Гюгонио, изучая задачу с первой точки зрения. Это третье определение показывает нам связь двух первых. В первом случае волна соответствует разрывности, так как скорости и ускорения на поверхности волны изменяются мгновенно; такая разрывность, очевидно, будет разновидностью сингулярности. Общее уравнение колебательного движения содержит множитель $\sin \mu\pi$, так как $u = F \sin \mu\pi$, где F — параметр, соответствующий частоте, а π зависит от x, y, z. Этот вид u, кажется, не обнаруживает особенностей, так как синус — голоморфная функция. Тем не менее можно сказать, что u «практически сингулярно». Если предположить, что абсолютная величина μ велика, то функция очень быстро меняется от $+1$ до -1, ее производные содержат в качестве множителя μ и поэтому очень велики. Функция похожа на разрывную из-за большого наклона. Так что в так называемом «аппроксимационном» анализе ее следует рассматривать как аналог некоторой разрывной функции. С этой точки зрения три определения волн тесно связаны.

Сейчас нас будет интересовать, в частности, точка зрения Делассю, так как для элементарного решения $1/r$ характеристический конус будет поверхностью сингулярности. Теперь мы видим, в каком направлении можно смотреть на решение задачи. Мы должны найти, что будет характеристическим конусом или соответствующей ему поверхностью. Затем мы должны построить решение с сингулярностью на этом множестве. На первый вопрос отвечает общая теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Мы должны получить вершину конуса в (a, b, c). В общем случае характеристический конус заменяется на характеристический коноид с криволинейной образующей, соответствующей физическим «лучам». Во-вторых, мы должны построить решение, для которого эта поверхность будет поверхностью сингулярности. Первая работа общего характера в этом направлении была написана Пикаром в 1891 году. Он рассматривал случай двух переменных и особо выделял уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = cu. \tag{1'}$$

Не каждое уравнение общего вида

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial\, y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

можно свести к этой форме. Но в эллиптическом случае $(B^2 - AC < 0)$ после подходящей замены независимых переменных его можно свести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{1}$$

(в котором характеристическими линиями будут изотропные линии плоскости). Зоммерфельд и Хедрик рассматривали этот более общий вид уравнения и показали для уравнения (1), как Пикар для уравнения ($1'$), что существует элементарное решение, обладающее всеми существенными свойствами $\log 1/r$. Это

$$P \log 1/r + Q,$$

где P и Q — регулярные функции x и y. P принимает значение 1, $x = a$, $y = b$. В гиперболическом случае (действительные характеристики) уравнение можно привести к виду Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{2}$$

при действительной замене переменных; соответствующее элементарное решение имеет тип

$$P \log \sqrt{(x-a)(y-b)} + Q$$

где P и Q имеют то же значение, что и выше (P не что иное как функция, играющая главную роль в методе Римана решения уравнения (2)). Конечно, если допускать мнимые замены (что возможно только в предположении аналитичности коэффициентов), то эллиптические уравнения, как и гиперболические, можно свести как к виду (2), так и к виду (1). Единственный случай, для которого это невозможно, — параболический случай, в котором $B^2 - AC = 0$. Это куда более сложный случай. Он был решен совсем недавно. Здесь возникает новый тип элементарного решения, приведенный Адамаром в «Comptes Rendus» («Отчеты Парижской Академии Наук») за 1911 год и, для уравнения теплопроводности для более чем двух переменных, — Жере в тот же год (в том же издании).

Даже если оставить в стороне параболический случай, в этой задаче возникает новое затруднение, поскольку ее нельзя упростить, как раньше, заменой переменных, если этих переменных более двух, так что приходится рассматривать общий случай. Однако, задача впервые была решена в случае

$$\nabla^2 u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + 1u = 0.$$

Но не каждое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с тремя переменными можно свести к этому виду. Тем не менее этот случай важен. Хольмгрен получил решение в виде, аналогичном $1/r$, а именно, P/r, где $P = 1$ при $r = 0$.

Если мы желаем иметь дело с общим случаем и с совершенно произвольными коэффициентами, мы прежде всего должны попытаться построить поверхность сингулярности, то есть характеристический коноид. Сначала предположим, что у нас есть какая-то регулярная характеристическая поверхность нашего уравнения, равная $x = 0$ после замены переменных. Напишем $u = x^p P(x, y, z)$. Можно показать, что, придавая p произвольное положительное значение, можно найти решение в этом виде с регулярной F. Это не так в случае отрицательного целого p, что снабжает нас еще одной интересной иллюстрацией рассуждений, приведенных в нашей первой лекции в связи с теоремой Шёнфлиса. Пусть p — целое отрицательное. Предположим, что есть какое-то решение. Тогда мы получаем и другие значения u в виде

$$\frac{F(x, y, z)}{x^p} + F_1(x, y, z).$$

(Мы можем составить бесконечно много таких решений, так как у дифференциального уравнения есть бесконечно много регулярных решений.) Но эти значения u можно записать

$$\frac{F + x^p F_1}{x^p}.$$

Итак, если наша задача разрешима, то у нее бесконечно много решений. Рассуждая как на первой лекции, мы не должны удивляться его неразрешимости в общем случае. Это то же самое балансирование между бесконечностью решений и их существованием.

Но мы предположили, что наша характеристическая поверхность регулярна. Если рассматривать наш характеристический коноид с вершиной $(a,\ b,\ c)$, то все будет происходить иначе; p не может принимать произвольные значения. Если количество независимых переменных равно n, мы должны получить

$$p = -\frac{n-2}{2} \quad \text{или} \quad -\left(\frac{n-2}{2}+1\right), \quad -\left(\frac{n-2}{2}+2\right), \ldots$$

Однако, из этих значений существенным является только первое, так как, составив (единственное) решение, соответствующее $p = -(n-2)2$ и зависящее от x, y, z, a, b, c, мы можем вывести из него все остальные: надо только продифференцировать по a, b, c.

Если n четно, то эти значения p — целые отрицательные числа, и тогда, принимая во внимание все уже сказанное, видим, что в общем случае не существует решения вышеуказанного вида

$$u = \frac{P}{\Gamma^p} + Q.$$

Мы должны заменить его на

$$u = \frac{P}{\Gamma^p} + P_1 \log \Gamma,$$

в котором Γ должно вновь совпадать с r^2, где r обозначает расстояние в n-мерном пространстве, если старшие члены (второго порядка) данного уравнения имеют вид $\nabla^2 u$. Однако если они произвольны, то Γ можно заменить на первый член уравнения характеристического коноида с вершиной $(a,\ b,\ c)$.

Функции P, Q, P_1 можно легко разложить в сходящийся ряд Тейлора, если коэффициенты уравнения аналитичны. Если нет, то P, Q, P_1 все еще существуют, но найти их гораздо сложнее. Первый результат Пикара, касающийся специального уравнения $(1')$, был, однако, получен (с помощью последовательных приближений) без каких-либо предположений об аналитичности c. Впоследствии Э. Леви решил в том же смысле задачу для общего эллиптического уравнения.

В действительности принцип методов Пикара и Леви один и тот же. Оба они могут считаться частными случаями метода, указанного Гильбертом и состоящего во введении первого приближения, которое представляет сингулярность требуемой формы, но не должно удовлетворять данному уравнению. Поиск необходимого дополнительного слагаемого вновь приводит к интегральному уравнению. Я должен добавить, что обобщение этих методов на уравнения высшего порядка, по-видимому, приводит к затруднениям совершенно нового рода, так как в общем случае характеристический коноид допускает особенности не только в вершине (линии возврата, например). В очень частном случае, когда нет других слагаемых, кроме членов старшего порядка с постоянными коэффициентами, уравнение, однако, можно свести к интегралам Абеля с помощью прекрасного анализа Фредгольма.

2. Функции Грина

Элементарные решения — необходимый инструмент при обращении с дифференциальными уравнениями в частных производных в математической физике. Не всегда их достаточно. Их достаточно для простейшей из задач, на которую мы ссылались на нашей первой лекции, то есть для задачи Коши. Но мы знаем, что в эллиптическом случае ее рассматривать нельзя, и приходится сталкиваться с другими задачами, например с задачей Дирихле. Для задачи Дирихле (найти u, принимающую данные значения на всей поверхности объема S и удовлетворяющую $\nabla^2 u = 0$) функции $1/r$ недостаточно. Мы должны ввести новую функцию вида $1/r + h$, где h — регулярная функция, которая должна быть такой, чтобы $1/r + h$ обращалось в нуль в каждой точке граничной поверхности. Это так называемая функция Грина. Она равна потенциалу, создаваемому на поверхности S количеством электричества, помещенным в точку (a, b, c) внутри поверхности, если поверхность полая, проводящая и имела нулевой потенциал. Такова физическая интерпретация.

Для любого другого линейного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа требуется рассматривать такие же функции Грина, в которых член $1/r$ надо заменить на элементарное решение (то есть его вид заведомо предполагается известным заранее), h — по-прежнему регулярная функция (во всяком случае, пока $(a,\, b,\, c)$ остается фиксированной внутренней точкой для S).

Для дифференциальных уравнений высших порядков также известны аналогичные виды функций Грина, например, в задаче об эластичной пластинке с жестко закрепленным краем, где дифференциальное уравнение $\nabla^2\nabla^2 u = 0$ (только для двух переменных x и y), а функция $r^2 \log r$ играет роль элементарного решения.

Как $1/r$ и как само элементарное решение, любая функция Грина зависит от координат двух точек, $A(x,\, y,\, z)$ и $B(a,\, b,\, c)$. Но при изучении этих функций Грина главный интерес представляет важное различие между ними и вышеупомянутыми фундаментальными решениями, соответствующее похожему различию задач Коши и Дирихле в виде, определенном на нашей первой лекции. Чтобы понять это, вспомним, что каждая из этих двух задач зависит от трех составляющих:

1) Данное дифференциальное уравнение;

2) Данная поверхность (или гиперповерхность в более высоких пространствах) S;

3) Некоторое распределение данных величин в различных точках S.

Конечно, каждый из этих элементов оказывает свое влияние на решение, но не в одинаковой степени. Влияние вида уравнения не может не быть фундаментальным. Напротив, влияние величин, упомянутых в пункте 3, сравнительно поверхностно, в том смысле что вычисления могут продвинуться достаточно далеко, до того как будут введены эти условия. Иначе говоря, при сравнении с системой обычных линейных алгебраических уравнений роль первой составляющей можно сравнить с ролью коэффициентов при неизвестных (с помощью которых можно составить такие сложные выражения как определитель и его миноры), тогда как роль третьей составляющей напоминает роль вторых членов, которые нужно всего лишь умножить на соответствующие миноры, прежде чем подставить в числитель.

Но в том, что касается роли нашей второй составляющей, то есть формы поверхности S, ответы будут разными в разных случаях.

Если мы имеем дело с задачей Коши, эта форма играет такую же поверхностную роль, как и третья составляющая. Например, в методе Римана для задачи Коши, связанной с уравнением (2), каждый элемент решения можно вычислять, не зная форму S (которая в данном случае превращается в кривую, так как задача двумерна), до тех пор пока их не придется подставлять в некоторый криволинейный интеграл, который надо взять вдоль S.

Совершенно иначе обстоят дела в этом отношении в случае задачи Дирихле. Если можно сказать, что, в общем-то, для каждого уравнения есть только одна задача Коши, то для одного и того же уравнения $\nabla^2 u = 0$ имеется одна задача Дирихле для сферы, одна для эллипсоида, одна для параллелепипеда; и эти разные задачи имеют очень непохожие решения.

Понятно, что та же разница появляется в методах решения, соответствующих этим двум задачам. Элементарное решение не зависит ни от чего, кроме данного уравнения и координат x, y, z, a, b, c двух точек A, B.

Функция Грина, напротив, зависит не только от этого уравнения и этих координат, но и от вида границы S.[1]

Отсюда возникает интересный вопрос: найти, как меняются свойства функций Грина при изменении формы поверхности. Заменим S на S', определенную ее нормальным расстоянием δn (которое может меняться при переходе от одной точки S к другой). Возьмем две данные точки A и B внутри S. Тогда функция Грина имеет какой-то вид g_A^B для поверхности S, и при изменении S на S' g_A^B меняется. Это

[1]Все эти замечания точно так же выполняются и для «смешанных задач», о которых говорилось на нашей первой лекции, и для выражений, соответствующих функциям Грина, которые возникают при их решении.

изменение

$$\delta g_A^B = \iint \frac{dg^n A}{dn} \frac{dg^n B}{dn} \, \delta n \, dS, \tag{3}$$

где $\dfrac{dg^n A}{dn}$ — степень изменения g_A по сравнению с n.

Здесь $\delta n \, dS$ — элемент объема, заключенного между поверхностями S и S'. Аналогичные формулы выполняются для функций Грина на плоских областях. Они похожи на то, что получается при вычислении вариаций интегралов, хотя те методы нельзя применять непосредственно.

Любопытное следствие состоит в том, что из всех функций Грина для всех эллиптических уравнений в частных производных мы с помощью подходящего дифференцирования можем вывести выражения, удовлетворяющие одному и тому же интегро-дифференциальному уравнению, а именно

$$S\phi_A^B = S\phi_A^n \phi_n^B \, \delta n \, dS.$$

Дело в том, что во втором члене уравнения (3) коэффициент при $\delta n \, dS$ — квадрат, симметричный по отношению к выражениям, зависящим от точек A и B соответственно, тоже важен. Отсюда можно вывести полезные неравенства, которые нельзя получить другим путем.

Кроме этого исследования изменения численных значений функций Грина, влияние формы поверхности S можно изучать и с другой точки зрения, я имею в виду влияние на их аналитические свойства, представившее возможность недавно получить важные результаты. Дополнительный член h в функции Грина остается регулярным, до тех пор пока одна из точек остается фиксированной внутри рассматриваемой области; но когда две точки A и B одновременно приближаются к одной и той же точке P на границе, возникает особенность специального вида; на первый взгляд эта особенность кажется очень сложной. Тем не менее ее исследование упрощается от того, что она зависит только от формы S в непосредственной окрестности P.

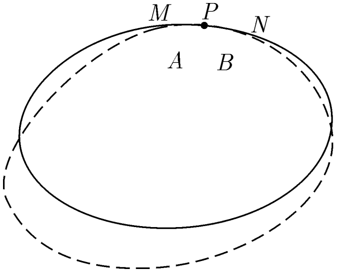

Рис. 8

Пусть на плоскости, например, два замкнутых контура S и S', ограничивающих две разные области, имеют общую дугу arc MN (рис. 8)[1], пусть P — точка на этой дуге, а G и G' — две функции Грина, соответствующие этим двум контурам, тогда разность $G - G'$ будет вполне регулярной функцией (допускающей разложение в сходящийся ряд Тейлора), когда A и B очень близки к P.

Теперь мы должны выяснить, какой будет, например, особенность G. После первого частичного ответа, полученного в интересных работах нескольких итальянских геометров, Э. Леви полностью ответил на этот вопрос для функции, аналогичной обыкновенной функции Грина, и, недавно, П. Леви дал ответ для самой этой функции.

Полученный таким образом ответ замечательно прост в случае двух измерений. П. Леви также работает над трехмерной задачей, но там результаты гораздо сложнее.

Что касается функции Грина в целом (а не только ее сингулярной части), следует хорошо понимать, что ее значения в любых двух данных точках области или даже такие элементы как нормальная производная в одной точке контура существенно зависят от формы каждой части этого контура, как бы она ни была удалена от изучаемой точки или точек.

Обратив на это внимание, мы должны ожидать, основываясь на том, что видели на прошлой лекции,что в этом

[1]Считается, что два контура находятся по одну и ту же сторону от arc MN.

вопросе будут важны исследования из области Analysis Situs. Сначала кажется, что здесь случай иной, и важнейшие методы решения задачи Дирихле одинаковы для областей любого рода (хотя и несколько различаются в деталях, как это было показано для метода Фредгольма в диссертации Келлогга). Но другой взгляд на задачу показывает, что и здесь существует влияние Analysis Situs, возможно, даже на удивление более существенное, чем в каких бы то ни было вопросах, изученных на нашей последней лекции.

Если мы вновь рассмотрим задачу Дирихле для плоской области, мы увидим, что аналитические свойства соответствующей функции Грина очень различаются в зависимости от того, имеет эта область одну или несколько границ.

Возьмем первый случай. В этом случае плоская область может быть конформно отображена на окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Легко видеть, что при таком конформном отображении функции Грина сохраняют свои значения, а это проясняет замечательное следствие, касающееся шести функций Грина, порожденных четырьмя точками, взятыми по две. Эти шесть величин находятся в определенном соотношении друг с другом и приводят к особому виду геометрии, которая не только напоминает обычную неевклидову геометрию, но и может быть сведена к ней простым преобразованием.

В области с двумя границами (кольцевая область) дела обстоят совершенно иначе. Шоттки показал, что если мы возьмем две такие области S и S', каждая из которых имеет две границы, то в общем случае их нельзя конформно отобразить друг на друга. Каждую из них можно отобразить на область, заключенную между двумя концентрическими окружностями. Но отношение радиусов этих окружностей надо специально выбирать в каждом случае, следовательно, оно, вообще говоря, не будет одинаково для Σ и Σ'.

В этом последнем случае соотношение между шестью функциями Грина не будет выполняться, и свойства наших функций Грина будут гораздо менее просты. Они станут еще сложнее в случае более чем двух границ. Здесь мы вновь получаем важный пример роли Analysis Situs в аналитических свойствах и, поскольку мы установили, что функции Грина связаны со всеми основными темами наших предыдущих лекций, это будет, по-видимому, лучшим заключением для них всех.

Адамар Жак

Четыре лекции по математике

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 12.10.02. Формат $80 \times 100^1/_{32}$.
Усл. печ. л. 3,48. Уч. изд. л. 3,60.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Заказ №56.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru