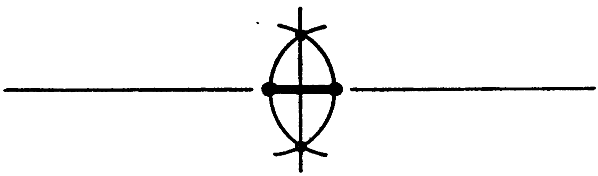
ГЕОМЕТРИЯ 6

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОБНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ 6 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ



Рекомендовано
Министерством просвещения
РСФСР

Издание пятое,
дополненное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

ББК 22.151я72
Г36

Авторский коллектив:

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк

Издание подготовлено под научным руководством
академика **А. Н. Тихонова**

Рецензенты:

кабинет математики ЦИУУ (зав. кабинетом **И. И. Юдина**);
лаборатория обучения математике НИИ школ МП РСФСР
(зав. лабораторией **Г. Л. Луканкин**)

В данное издание пробного учебника включена глава «Параллельные прямые»

Геометрия: Проб. учеб. для 6 кл. сред. шк. / Л. С. Ата-
Г36 насян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк.—
5-е изд., доп.— М.: Просвещение, 1987.—127 с.: ил.

Г $\frac{4306020400-528}{103(03)-87}$ письмо МП РСФСР **ББК 22.151я72**

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия, как и многие другие разделы математики, своими корнями уходит в далекое прошлое. Слово «геометрия» в переводе с греческого означает «землемерие». Такое название объясняется тем, что зарождение этого раздела математики было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития служила в основном практическим целям. В дальнейшем геометрия сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

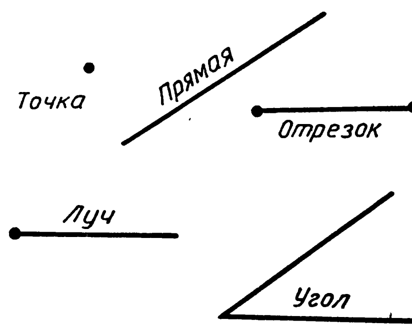


Рис. 1

На уроках математики в IV и V классах мы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляем себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Мы знакомы с такими фигурами, как треугольник, квадрат, круг, параллелепипед (рис. 2); знаем,

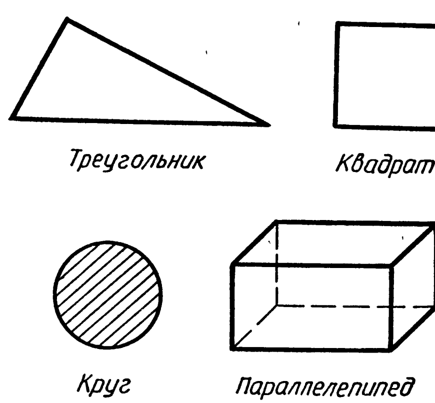


Рис. 2

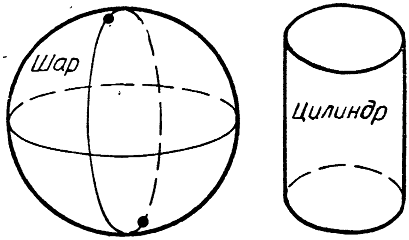


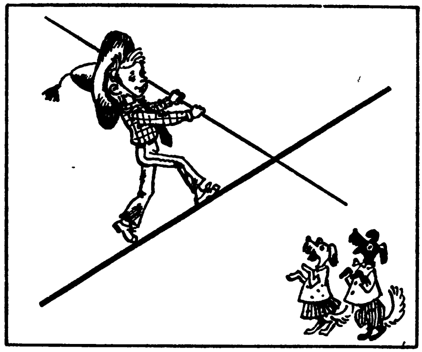
Рис. 3

как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Теперь нам предстоит расширить и углубить наши знания о геометрических фигурах. Мы познакомимся с новыми фигурами и со многими свойствами уже известных нам фигур.

Школьный курс геометрии делится на *планиметрию* и *стереометрию.* В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнем изучение геометрии с планиметрии.

Глава I

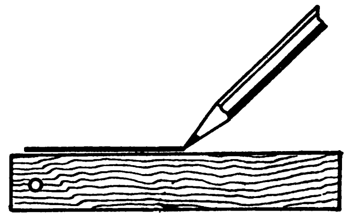
НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



§ 1. ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК

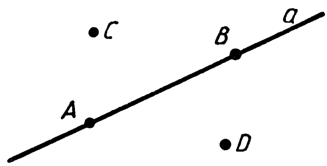
1. Точки, прямые, отрезки. Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом изображается лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе продолженной бесконечно в обе стороны. Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Заметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще, *через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну**.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они не имеют общих точек, как, например, прямые a и b на рисунке 6, то говорят, что они *не пересекаются*. Если две



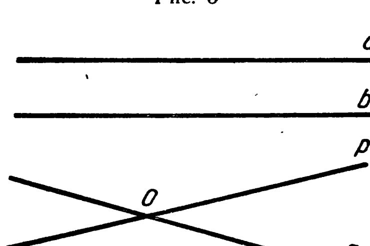
Изображение прямой на чертеже

Рис. 4



Прямая и точки

Рис. 5



Прямые a и b не пересекаются
Прямые p и q пересекаются

Рис. 6

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

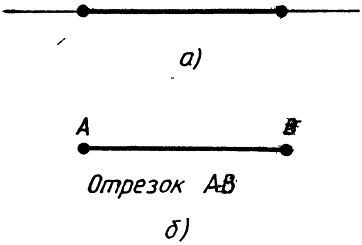


Рис. 7

прямые имеют общую точку, то говорят, что они *пересекаются.* На рисунке 6 прямые p и q пересекаются в точке O. **Две прямые не могут иметь больше одной общей точки.** В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: *две прямые либо не имеют общих точек, либо имеют только одну общую точку.*

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, иногда обозначают двумя буквами: AB или BA. Вместо слов: «точка A лежит на прямой a» — используют запись: $A \in a$, а вместо слов: «точка B не лежит на прямой a» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7,*а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется *отрезком.* Точки, ограничивающие отрезок, называются его *концами.* На рисунке 7,*б* изображен отрезок с концами A и B. Такой отрезок обозначается AB или BA. Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B.

2. Провешивание прямой на местности. Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить такой отрезок, который длиннее этой линейки. С этой целью приложим к листу бумаги линейку и отметим точки A и B и какую-нибудь точку C, лежащую между A и B (рис. 8, *а*). Затем передвинем линейку вправо так, чтобы ее левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, *б*). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведем теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

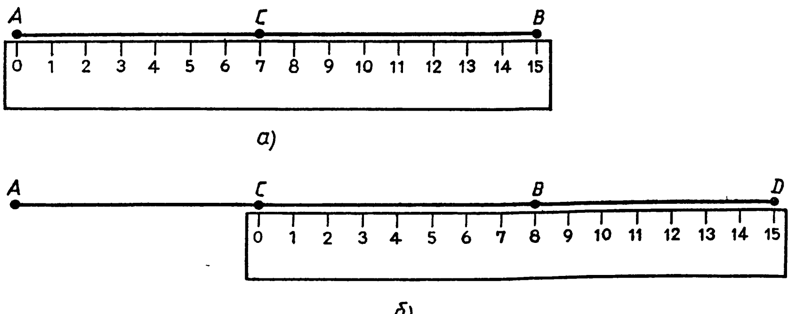


Рис. 8

Аналогичный прием используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Он состоит в следующем. Сначала ставят две вехи — шесты длиной около 2м — в какие-то точки A и B. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали ее от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы ее закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д. Ясно, что таким способом можно построить сколь угодно длинный отрезок прямой.

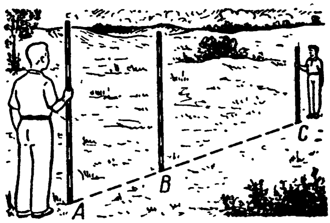


Рис. 9

Описанный прием называется *провешиванием* прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании трассы шоссейной или железной дороги, линий высоковольтных передач и т. д.

Практические задания

1. Проведите прямую, обозначьте ее буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.
2. Опишите взаимное расположение точек и прямых, изображенных на рисунке 10, используя символы $\in$ и $\notin$.
3. Назовите все пары пересекающихся прямых, изображенных на рисунке 11.
4. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.
5. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.
6. Отметьте четыре точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной

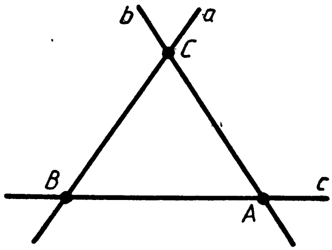


Рис. 10

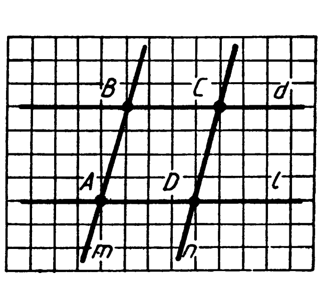


Рис. 11

прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

7. Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько таких прямых можно провести?

8. Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте точку M прямой a, лежащую между точками A и B. Затем на прямой a отметьте точку P такую, чтобы точка A лежала между точками P и B, и точку Q такую, чтобы точка B лежала между точками A и Q.

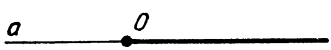
9. Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

10. На рисунке 12 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

§ 2. ЛУЧ И УГОЛ

3. Луч. На рисунке 13 на прямой a отмечена точка O. Она разделяет прямую a на две части, одна из которых выделена жирной линией. Каждая из этих частей называется *лучом, исходящим из точки O*. Точка O называется *началом* каждого из лучей.

Рис. 12



Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 13

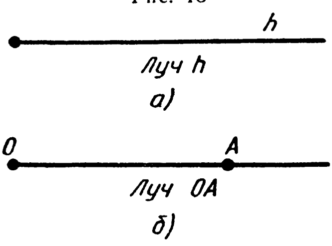


Рис. 14

Лучи обозначаются либо малыми латинскими буквами (например, луч h на рисунке 14, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 14,*б*).

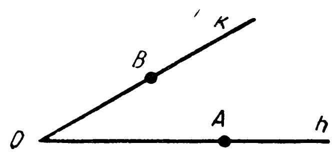
Два луча с общим началом, расположенные на одной прямой, называются *дополнительными*. На рисунке 15 изображены дополнительные лучи OA и OB.

4. Угол. Напомним, что *угол — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих* *из этой точки.* Лучи называются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. На рисунке 16 изображен угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

Лучи OA и OB дополнительные

Рис. 15

Угол называется *развернутым,* если его стороны являются дополнительными лучами. На рисунке 17 изображен развернутый угол с вершиной C и сторонами p и q.



Угол

Рис. 16

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из частей называется *внутренней,* а другая — *внешней* областью этого угла (рис. 18, *а*). На рисунке 18, *б* изображен неразвернутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

Развернутый угол

Рис. 17

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, иногда также называют углом. Луч, который исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри угла, делит этот угол на два угла. На рисунке 19, *а* луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB. Если угол AOB развернутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла AOC и COB (рис. 19, *б*).

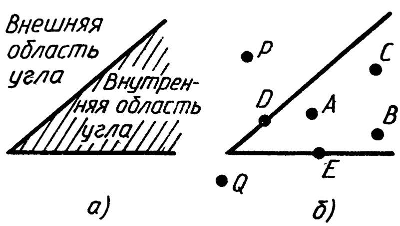
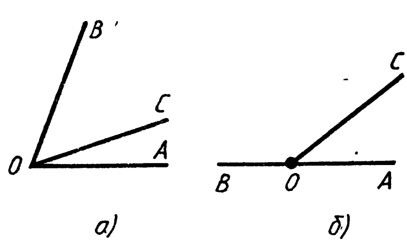


Рис. 18



Луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$

Рис. 19

Практические задания

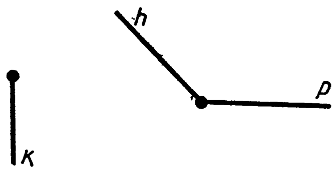


Рис. 20

11. Проведите прямую *a* и отметьте на ней точки O_1 и O_2. Покажите на рисунке два луча прямой *a*, исходящие из точек O_1 и O_2, такие, что: а) они не имеют общих точек; б) все точки одного луча лежат на другом луче.

12. Перечертите рисунок 20 в тетрадь и проведите лучи, дополнительные к лучам *k*, *h* и *p*.

13. Начертите три неразвернутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.

14. Начертите два развернутых угла и обозначьте их буквами.

15. Начертите три луча *h*, *k* и *l* с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

16. Начертите неразвернутый угол *hk*. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

17. Начертите неразвернутый угол *AOB* и: а) луч *OC*, который делит угол *AOB* на два угла; б) луч *OD*, который не делит угол *AOC* на два угла.

18. Начертите три луча с общим началом так, чтобы: а) один из них делил угол, образованный двумя другими лучами, на два угла; б) ни один из них не делил угол, образованный двумя другими лучами, на два угла.

19. Начертите развернутый угол и проведите луч, который делит этот угол на два угла.

20. Начертите неразвернутый угол. Отметьте точки *A* и *B* так, чтобы: а) все точки отрезка *AB* лежали внутри угла; б) все точки отрезка *AB* лежали вне угла.

Вопросы и задачи

21. На каждом из рисунков 21, *а* и *б* найдите все пары дополнительных лучей.

22. По данным рисунка 22 выясните, являются ли дополнительными следующие лучи: а) *BE* и *BD*; б) *BE* и *CD*; в) *BH* и *BE*; г) *AH* и *AK*; д) *AC* и *AM*; е) *CN* и *CM*.

23. Точка *K* лежит между точками *M* и *N*. Из лучей *MK*, *KN*, *NM* и *KM* выберите все пары дополнительных лучей.

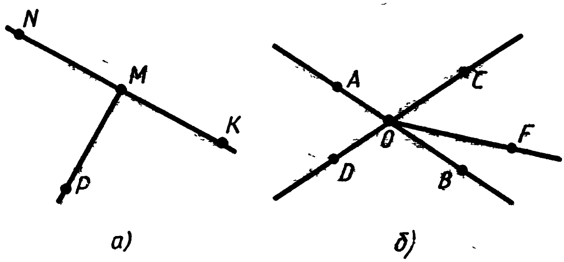


Рис. 21

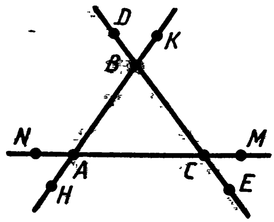


Рис. 22

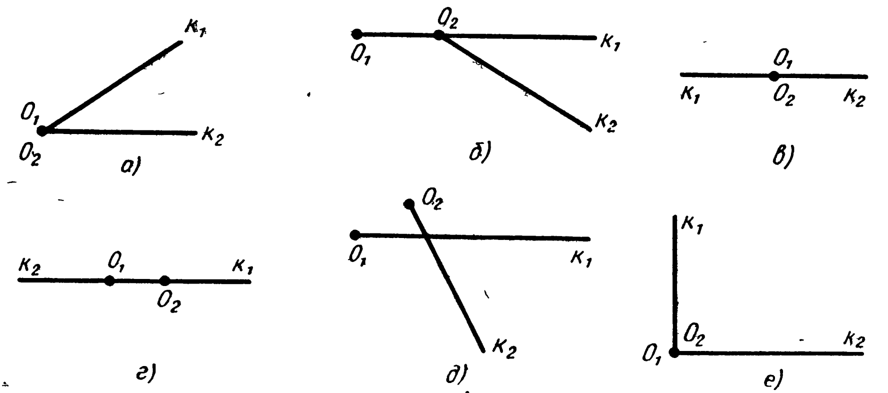


Рис. 23

24. Точки A и B лежат на дополнительных лучах с общим началом O. а) Лежат ли точки A, B и O на одной прямой; б) лежит ли точка O на отрезке AB?

25. На каждом из рисунков 23, *а* — *е* изображены два луча: луч k_1 с началом в точке O_1 и луч k_2 с началом в точке O_2. Какие пары этих лучей образуют углы? Выделите среди них развернутые углы.

26. Сколько углов образуется при пересечении двух прямых?

27. Какие из точек, изображенных на рисунке 24, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

28. Какие из лучей k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, изображенных на рисунке 25, делят угол AOB на два угла?

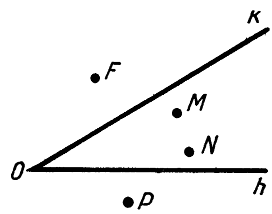


Рис. 24

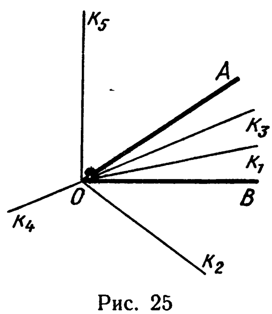


Рис. 25

§ 3. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

5. Равенство геометрических фигур. Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Такими предметами являются, например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 26 изображены фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру $Ф_1$ на кальку. Передвигая кальку и накладывая ее на фигуру $Ф_2$ той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры $Ф_1$ с фигурой $Ф_2$. Если они совместятся, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$.

Мы можем представить себе, что на фигуру $Ф_2$ накладывается не копия фигуры $Ф_1$, равная этой фигуре, а сама фигура $Ф_1$. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, *две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.*

6. Сравнение отрезков и углов. На рисунке 27, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 27, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На

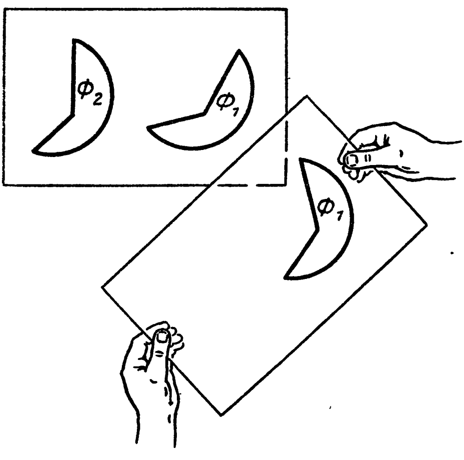


Рис. 26

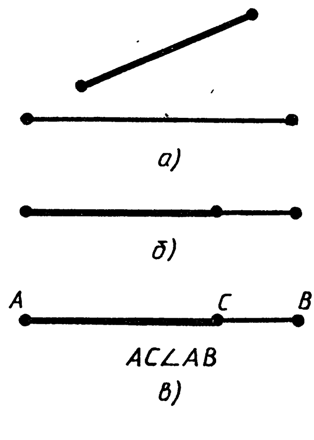
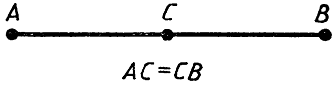


Рис. 27

рисунке 27, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB ($AC < AB$).



Точка C — середина отрезка AB

Рис. 28

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, *называется серединой отрезка.* На рисунке 28 точка C — середина отрезка AB.

На рисунке 29, *а* изображены неразвернутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие стороны оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 29, *б*). Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся, значит, они равны. Если же две другие стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 29, *б* угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

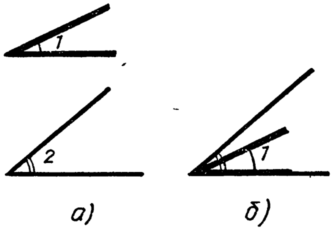
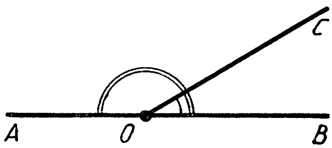


Рис. 29

Ясно, что неразвернутый угол составляет часть развернутого (рис. 30), поэтому развернутый угол больше любого неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.



Неразвернутый угол COB составляет часть развернутого угла AOB

Рис. 30

Луч, делящий угол пополам, т. е. на два равных угла, *называется биссектрисой угла.* На рисунке 31 луч l — биссектриса угла hk.

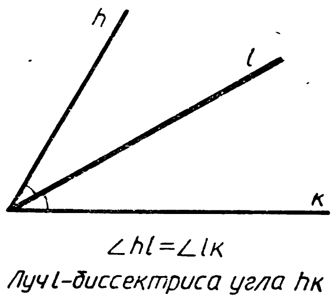


Рис. 31

Практические задания

29. На рисунке 32 изображено несколько фигур. Скопируйте фигуру Ф на кальку и наложением найдите на том же рисунке фигуры, равные фигуре Ф.

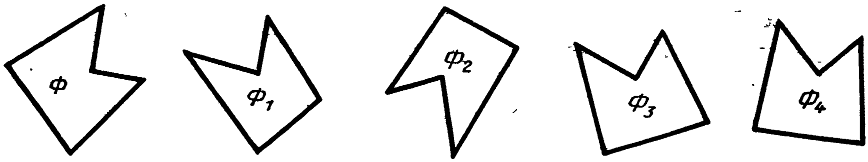


Рис. 32

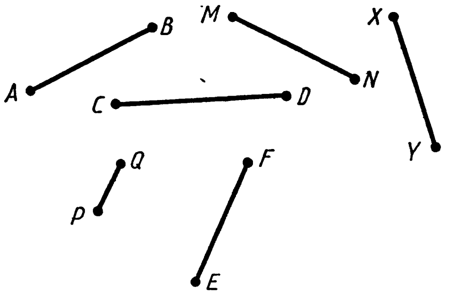


Рис. 33

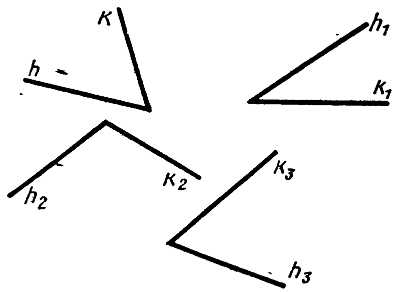


Рис. 34

30. На рисунке 33 изображены отрезки. Пользуясь циркулем, найдите: а) отрезки, равные отрезку AB; б) отрезки, которые меньше отрезка AB; в) отрезки, которые больше отрезка AB.

31. Начертите отрезки AB, CD и EF так, чтобы $AB > CD$, $CD > EF$.

32. Начертите квадрат $ABCD$ и с помощью циркуля убедитесь в том, что $AC > AB$, $CD < BD$.

33. Скопируйте на кальку угол hk, изображенный на рисунке 34. Наложением найдите на том же рисунке: а) углы, равные углу hk; б) углы, которые больше угла hk; в) углы, которые меньше угла hk.

Вопросы и задачи

34. На луче h от его начала O отложены отрезки OA и OB так, что точка A лежит между O и B. Сравните отрезки OA и OB.

35. На луче с началом O отложены отрезки OA, OB и OC так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

36. Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

37. На рисунке 35 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC, AE и CE; б) отрезки, серединой которых является точка C; в) отрезки, серединой которых является точка D.

Рис. 35

38. Луч OB делит угол AOC на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

39. Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли совместить наложением углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

40. На рисунке 36 углы, обозначенные цифрами, равны. а) Укажите биссектрису каждого из следующих углов: AOC, BOF и AOE; б) укажите все углы, биссектрисой которых является луч OC.

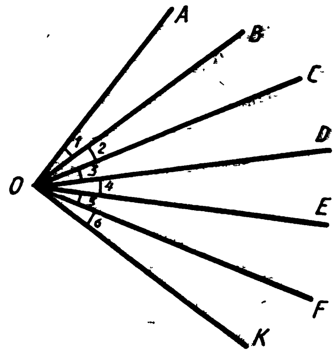


Рис. 36

§ 4. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

7. Длина отрезка. В практической деятельности часто имеют дело с измерением отрезков. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за *единицу измерения* (его называют также масштабным отрезком). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 37 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза*. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и находят, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 37 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно

* Этот рисунок выполнен в масштабе 2 : 1.

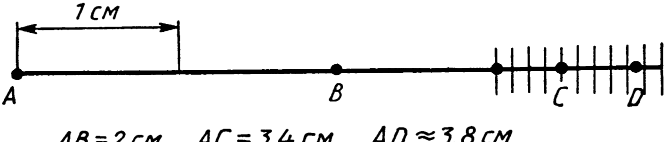


Рис. 37

4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см. Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 37, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см. Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения.

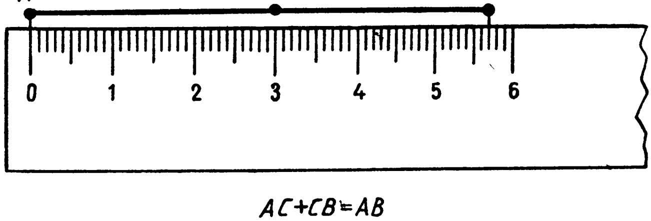
Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со все большей точностью. На практике, однако, пользуются приближенными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. *Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.*

Если два отрезка равны, то единица измерения и ее части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. *равные отрезки имеют равные длины.* Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или ее часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. *меньший отрезок имеет меньшую длину.*

На рисунке 38 изображен отрезок AB. Точка C делит отрезок на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC=3$ см, $CB=2{,}7$ см, $AB=5{,}7$ см. Таким образом, $AC+CB=AB$. Ясно, что и во всех других случаях, *если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.*

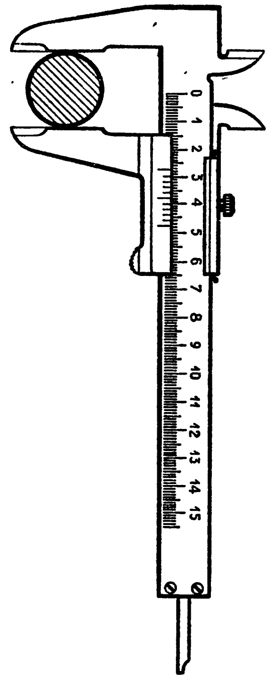
Длина отрезка называется также *расстоянием* между концами этого отрезка.



$AC+CB=AB$

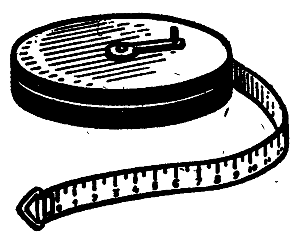
Рис. 38

8. Единицы измерения. Измерительные инструменты. Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения выбран *метр* — отрезок, приближенно равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруса хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в СССР. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.



Штангенциркуль
Рис. 39

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображенными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояния между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояния между населенными пунктами — *в километрах* (1 км равен 1000 м). Используются и другие единицы измерения например *дециметр* (1 дм равен 10 см), *морская миля* (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают *световой год,* т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.



Рулетка
Рис. 40

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется *масштабная миллиметровая линейка.* Для измерения диаметра трубки используют *штангенциркуль* (рис. 39). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются *рулеткой* (рис. 40), которая представляет собой ленту с нанесенными на ней делениями.

Практические задания

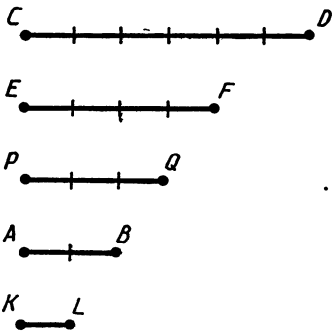


Рис. 41

41. Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

42. Начертите несколько отрезков и с помощью масштабной линейки найдите их длины в сантиметрах, а затем выразите длины в миллиметрах.

43. Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 41, если за единицу измерения принят отрезок KL.

44. Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

45. Начертите неравные отрезки AB и CD и с помощью масштабной линейки отметьте середины этих отрезков.

46. Начертите прямую и отметьте на ней две точки A и B. С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

Вопросы и задачи

47. Длины двух отрезков равны. Равны ли сами отрезки?

48. Среди отрезков AB, CD, EF, KL и MN укажите пары равных отрезков, если известно, что $AB=3$ см, $CD=8$ см, $EF=3$ см, $KL=3$ мм, $MN=80$ мм.

49. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB=7{,}8$ см, $BC=5$ мм.

50. Точка B делит отрезок AC на два отрезка $AB=2$ мм, $BC=10$ см. Выразите длину отрезка AC в миллиметрах и сантиметрах.

51. Точка B лежит на отрезке AC. Найдите длину отрезка BC, если: а) $AB=3{,}7$ см, $AC=7{,}2$ см; б) $AB=4$ мм, $AC=4$ см.

52. Точка B лежит между точками A и C, а точка C — между точками A и D. Найдите AD, если $AB=3$ см, $BC=1{,}5$ см, $CD=10$ см.

53. Точка C лежит между точками A и B, а точка B — между точками C и D. Найдите AD, если $AC=4{,}8$ см, $BC=1{,}7$ см, $BD=9{,}5$ см.

54. На прямой отмечены точки A, B, C и D (рис. 42). Найдите AC, если $CD=2{,}6$ см, $DB=4$ см, $AB=12{,}6$ см.

Рис. 42

55. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=12$ см, $BC=13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

56. Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD=7$ см, $MD=16$ см. Каким может быть расстояние BM?

57. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC=5$ см, $AB=3$ см, $BC=4$ см?

Решение. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB+BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

58. Точка B лежит между точками A и C, а точка C — между точками B и D, причем $AB=CD$. Сравните отрезки AC и BD.

59. Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC.

а) Найдите AC, CB, AO и OB, если $AB=2$ см; б) найдите AB, AC, AO и OB, если $CB=3{,}2$ м.

60. На прямой отмечены точки O, A и B так, что точка O лежит между точками A и B, $OA=12$ см, $OB=9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB. Решите эту же задачу для случая, когда точка O не лежит между точками A и B.

61. Отрезок, длина которого равна a, разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

62. Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

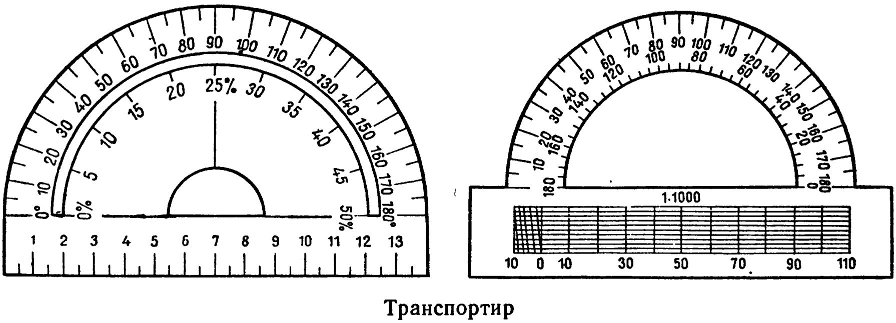
63. Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA взята точка D так, что $CD=15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

64. Расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км. Город Калинин находится между Москвой и Ленинградом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Калинином и Ленинградом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

§ 5. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

9. Градусная мера угла. Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с некоторым углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают градус — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется *градусной мерой угла*. Для измерения углов используется транспортир (рис. 43).

На рисунке 44, *а* изображен угол AOB, градусная мера которого равна 150°. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150°» — и пишут: $\angle AOB=150°$. На рисунке 44, *б* угол hk равен 40° ($\angle hk=40°$). $\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой*, а $\frac{1}{60}$ часть минуты — *секундой*. Минуты обозначают знаком «′», а секунды —



Транспортир

Рис. 43

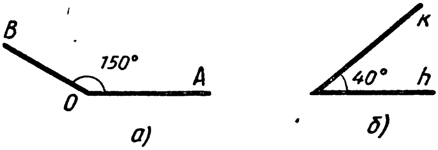


Рис. 44

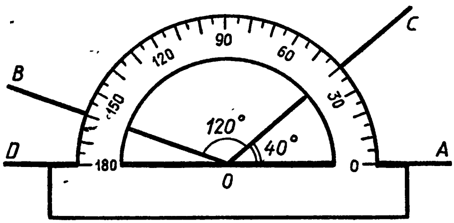


Рис. 45

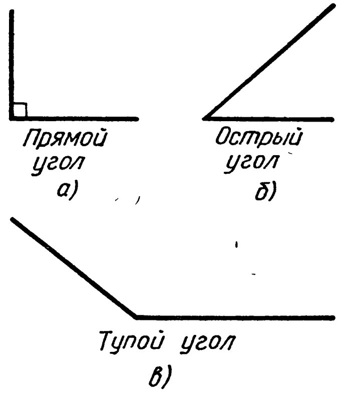


Рис. 46

знаком «″». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: 60°32′17″.

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. *равные углы имеют равные градусные меры.* Если же один угол меньше другого, то в нем градус (или его части) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. *меньший угол имеет меньшую градусную меру.*

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, то *развернутый угол равен* 180°. *Неразвернутый угол меньше* 180°, т. к. он меньше развернутого.

На рисунке 45 изображены лучи с началом в точке *O*. Луч *OC* делит угол *AOB* на два угла: *AOC* и *COB*. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$. Ясно, что и во всех других случаях, *если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.*

Угол называется *прямым,* если он равен 90° (рис. 46, *а*), *острым,* если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 46, *б*), *тупым,* если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развернутого угла (рис. 46, *в*).

10. Смежные и вертикальные углы. *Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами, называются смежными.* На рисунке 47 углы *AOB* и *BOC* — смежные. Так как лучи OA и OC образуют развернутый угол, то $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$. Таким образом, *сумма смежных углов равна* 180°.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого. На рисунке 48 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

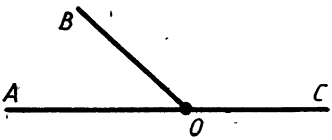


Рис. 47

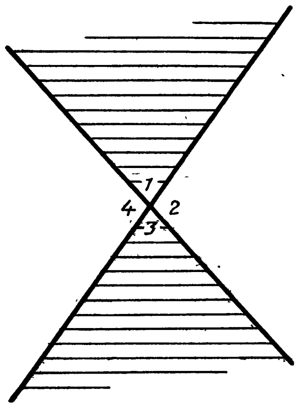
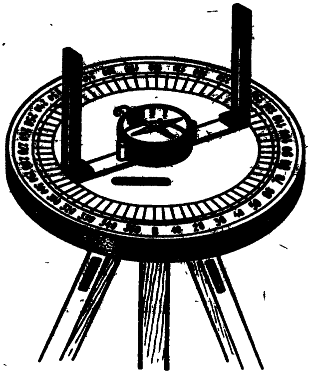


Рис. 48

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны. Итак, *вертикальные углы равны.*

11. Измерение углов на местности. Измерение углов на местности производится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является *астролябия* (рис. 49). Она состоит из двух частей: диска, разделенного на градусы, и вращающейся вокруг центра линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки линейки в определенном направлении.

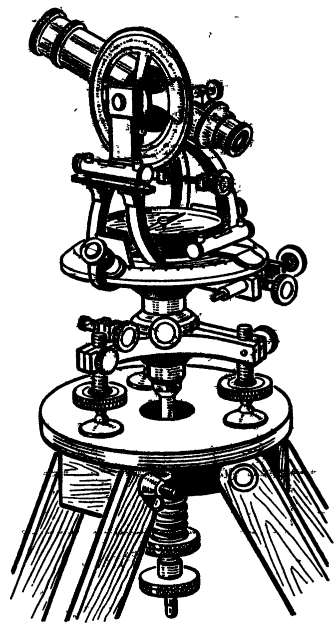


Астролябия
Рис. 49

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией устанавливают так, чтобы отвес, подвешенный к центру круга, находился точно над точкой O. Затем вращают алидаду так, чтобы направить ее вдоль одной из сторон AO или OB, и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя ее вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады.

Разность отсчетов и дает градусную меру угла AOB.

Для более точных измерений углов на местности используются более совершенные приборы. На рисунке 50 изображен один из них — *теодолит*. Этот прибор применяется, например, при съемке топографических карт. Измерение углов с определенной точностью требуется в различных разделах науки и техники, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения спутников на орбитах. Для этой цели конструируются специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ).



Теодолит

Рис. 50

Практические задания

65. Начертите три неразвернутых угла и один развернутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результат измерений.

66. Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.

67. Начертите угол hk и луч OA. Пользуясь транспортиром, отложите от луча OA угол, равный углу hk.

68. Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

69. Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

70. С помощью транспортира начертите три угла: острый, прямой и тупой.

71. Начертите острый угол AOB и на прямой OB отметьте точку D так, чтобы точка O лежала между точками B и D. Сравните углы AOB и AOD.

72. Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

73. Начертите смежные углы, с помощью транспортира проведите их биссектрисы и измерьте угол между ними.

74. Начертите неразвернутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

Вопросы и задачи

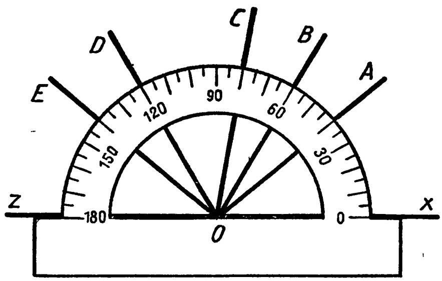


Рис. 51

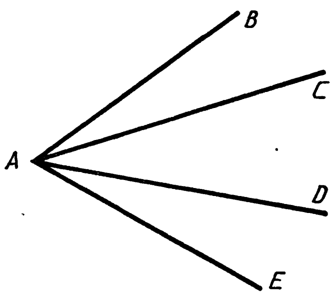


Рис. 52

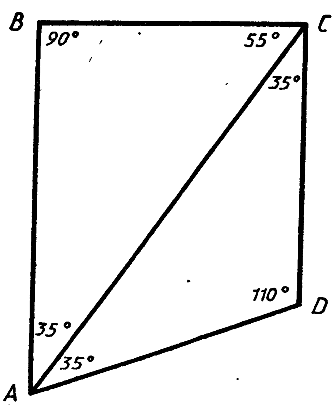


Рис. 53

75. Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

76. На рисунке 51 изображены лучи с общим началом O. а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX; б) назовите углы, равные 20°; в) назовите равные углы; г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

77. Известно, что $\angle h_1k_1 = 57°$, $\angle h_2k_2 = 180°$, $\angle h_3k_3 = 174°$, $\angle h_4k_4 = 90°$. Какой из этих углов является острым, прямым, тупым и развернутым?

78. Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите: а) $\angle AOB$, если $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$; б) $\angle EOB$, если $\angle AOE = 56°$, $\angle AOB = 110°$; в) $\angle AOB$, если $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$; г) $\angle AOE$, если $\angle EOB = 89°52'$, $\angle AOB = 176°$.

79. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78°$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC.

80. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155°$ и угол AOC на $15°$ больше угла COB.

81. Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\ \angle BOC$. Найдите угол AOB.

82. На рисунке 52 изображены четыре луча с общим началом. Сколько углов образуют эти лучи? Назовите их. Если углы BAC и DAE равны, то есть ли еще равные углы на этом рисунке?

83. Укажите пары равных углов на рисунке 53.

84. Лучи OB и OC лежат по разные стороны от прямой OA. Является ли луч OA биссектрисой угла BOC, если: а) $\angle AOB = 38°$, $\angle AOC = 38°$; б) $\angle AOB = 30°$, $\angle AOC = 40°$; в) $\angle AOB = 40°$, $\angle AOC = 45°$; г) $\angle AOB = 80°$, $\angle AOC = 80°$; д) $\angle AOB = 110°$, $\angle AOC = 110°$.

85. На рисунке 54 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

86. На рисунке 55 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80°$.

87. Луч l является биссектрисой неразвернутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

88. Укажите смежные углы на рисунке 56.

89. Найдите угол, смежный с углом

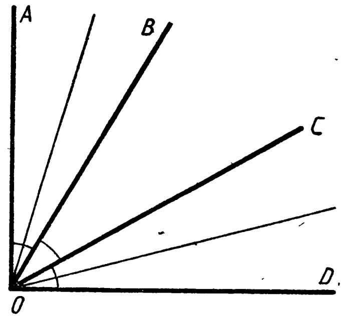


Рис. 54

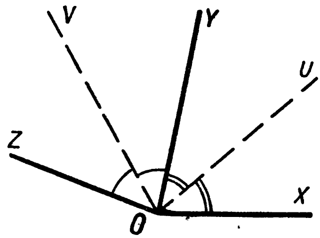


Рис. 55

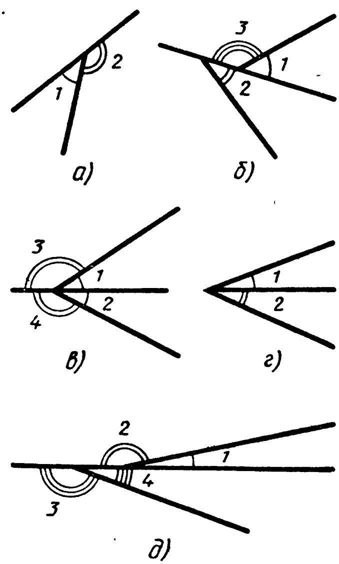


Рис. 56

ABC, если: а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$; г) $\angle ABC = 179°$.

90. Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

91. Один из смежных углов острый. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

92. Найдите смежные углы hk и kl, если: а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$; б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$; в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$.

93. Найдите смежные углы hk и kl, если: а) $\angle hk = 3\angle kl$; б) $\angle kh : \angle kl = 5:4$.

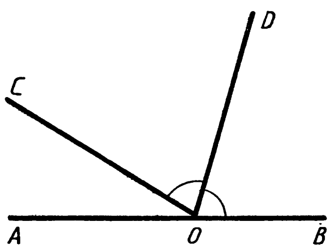


Рис. 57

94. На рисунке 57 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

95. Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

96. Укажите вертикальные углы на рисунке 58.

97. На рисунке 59 изображены углы 1, 2, 3 и 4. Найдите:

а) углы 1, 3 и 4, если $\angle 2 = 117°$;

б) углы 1, 2 и 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

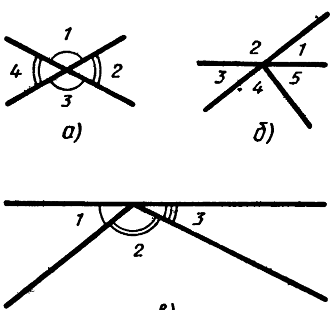


Рис. 58

98. Какими (острыми, прямыми, тупыми) являются вертикальные углы, если их сумма:

а) меньше $180°$;

б) равна $180°$;

в) больше $180°$?

99. При пересечении двух прямых образовались четыре неразвернутых угла. Найдите эти углы, если:

а) сумма двух из них равна $114°$;

б) сумма трех углов равна $220°$.

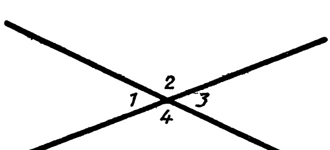


Рис. 59

100. На рисунке 59 изображены углы 1, 2, 3 и 4. Найдите каждый из углов, если:

а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$;

б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;

в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

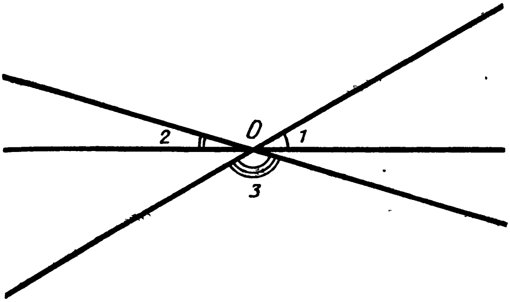


Рис. 60

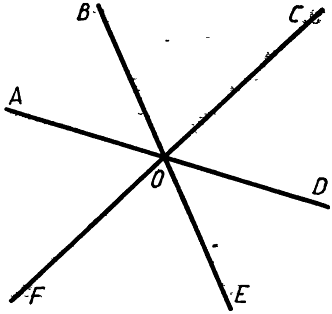


Рис. 61

101. На рисунке 60 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

102. На рисунке 61 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Сколько прямых можно провести через две точки?
2. Сколько общих точек могут иметь две прямые?
3. Какая фигура называется отрезком?
4. Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
5. Какие лучи называются дополнительными?
6. Какая фигура называется углом? Что такое вершина и стороны угла?
7. Какой угол называется развернутым?
8. Какие фигуры называются равными?
9. Как сравнить два отрезка?
10. Какая точка называется серединой отрезка?
11. Как сравнить два угла?
12. Какой луч называется биссектрисой угла?
13. Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
14. Какие единицы измерения отрезков вы знаете?
15. Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
16. Какие единицы измерения углов вы знаете?
17. Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти угол AOB, если известны углы AOC и COB?
18. Какой угол называется острым, прямым, тупым?

19. Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?

20. Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

103. Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

104. Сколько углов образуется при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

105. Даны три луча AB, AC и AD, причем AB и AC являются дополнительными лучами. Назовите все углы, образованные данными лучами. Какие из них являются неразвернутыми?

106. Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 62, если за единицу измерения принят отрезок EF.

107. Точка N лежит между точками M и P. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние: а) между точками N и P; б) между точками N и M.

108. Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL=6$ см, $LM=10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

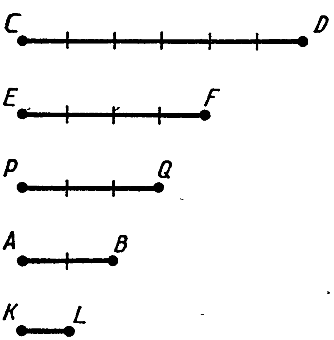


Рис. 62

Рис. 63

109. На рисунке 63 $AB=CD$. а) Совпадают ли середины отрезков AD и BC? б) Равны ли отрезки AC и BD?

110. Отрезок AB, длина которого равна a, разделен двумя точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP=2PQ=2QB$. Найдите расстояние между: а) серединами отрезков AP и QB; б) точкой A и серединой отрезка QB.

111. Отрезок длиной m разделен: а) на три равные части; б) на пять равных частей. Найдите расстояние между серединами крайних частей.

112. Отрезок в 36 см разделен на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

113. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой, причем точка B лежит между точками A и C. Известно, что $AB=17$ мм, $BC=5$ см, $CD=15$ мм, $BD=6{,}5$ см. Найдите расстояние между точками A и D.

114. Угол AOB является частью угла BOC. Найдите: а) $\angle BOC$, если $\angle AOB=30°$, $\angle AOC=45°$; б) $\angle AOB$, если $\angle BOC=$ $=130°$, $\angle AOC=31°30'$.

115. Известно, что $\angle AOB=35°$, $\angle BOC=50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж с помощью линейки и транспортира.

116. Угол hk равен 120°, а угол hm равен 150°. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

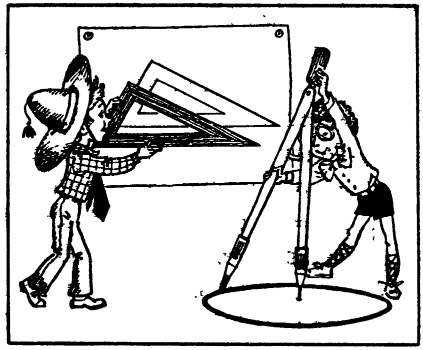
117. Найдите углы, смежные с углами в 32°, 101°, 60° и 92°.

118. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 45° больше другого; б) их разность равна 35°.

119. Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

Глава II

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



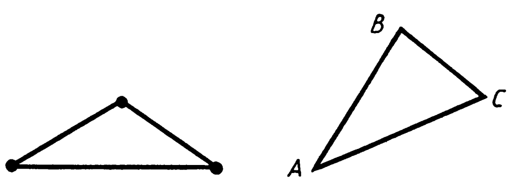
§ 1. ТРЕУГОЛЬНИК

12. Треугольники. Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 64, *а*). Мы получим геометрическую фигуру, которая называется *треугольником.* Отмеченные три точки называются *вершинами*, а отрезки — *сторонами* треугольника. На рисунке 64, *б* изображен треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник обозначается так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

Три угла $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называются *углами треугольника* ABC. Часто их обозначают так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Сумма длин трех сторон треугольника называется его *периметром.*

Любая точка, не лежащая на стороне треугольника, лежит либо внутри, либо вне этого треугольника. Так, на рисунке 65 точка M лежит внутри треугольника ABC, а точка N — вне его.

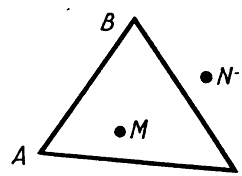
Треугольник называется *равнобедренным,* если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами,*



а) Треугольник

б) Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

Рис. 64



Точка M лежит внутри треугольника ABC, а точка N — вне этого треугольника

Рис. 65

а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника (рис. 66, *а*). Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним* (рис. 66, *б*).

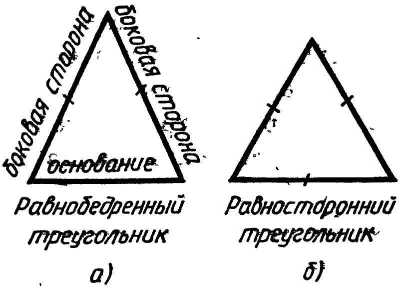


Рис. 66

13. Равенство треугольников. Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 67 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников. Таким образом, если два треугольника равны, то *элементы* (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. Отметим, что *в равных треугольниках против соответственно равных сторон* (т. е. совмещающихся при наложении) *лежат равные углы,* и обратно: *против соответственно равных углов лежат равные стороны.* Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображенных на рисунке 67, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

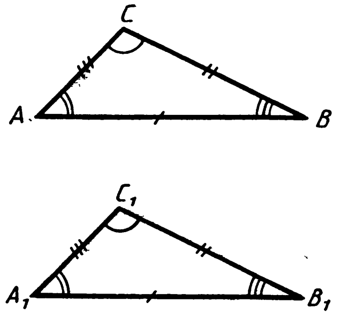


Рис. 67

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будем обозначать так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не производя наложения одного треугольника на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Этот вопрос мы рассмотрим в следующих параграфах.

Практические задания

120. Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N, P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

121. Начертите треугольник так, чтобы один из его углов был тупым. С помощью масштабной линейки и транспортира измерьте стороны и углы треугольника.

122. Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был: а) острым; б) прямым; в) тупым.

123. Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

Вопросы и задачи

124. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

125. Периметр треугольника BCD равен 16,8 см. Сторона BC меньше стороны BD на 3,2 см, а BD меньше стороны CD на 1,4 см. Найдите стороны треугольника BCD.

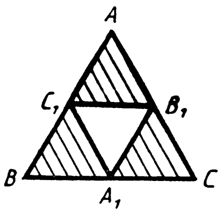


Рис. 68

126. Одна из сторон треугольника равна 18 см, периметр равен 48 см. Определите каждую из остальных сторон, если их разность равна 4,6 см.

127. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

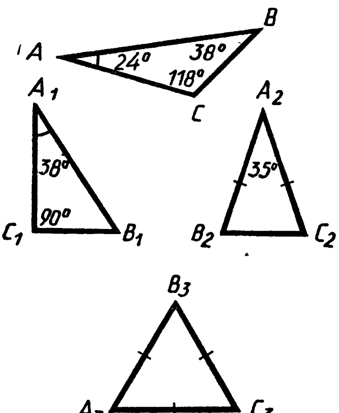


Рис. 69

128. В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

129. В равностороннем треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон (рис. 68). Заштрихованные треугольники также являются равносторонними. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB=4$ см.

130. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

131. На рисунке 69 изображены четыре треугольника. Равны ли треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ треугольнику ABC?

132. Известно, что $\triangle ABC = \triangle MNP$, причем $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$. Найдите стороны и углы треугольника MNP, если: а) $AB=7$ см, $BC=5$ см, $CA=3$ см, $\angle A=38°13'$, $\angle B=21°47'$, $\angle C=120°$; б) $AB=21$ м, $BC=30$ м, $CA=37$ м, $\angle A=54°11'$, $\angle B=91°16'$, $\angle C=34°33'$.

§ 2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

14. Первый признак равенства треугольников. В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется *теоремой,* а сами рассуждения называются *доказательством теоремы.* Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, например, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем две теоремы о равенстве треугольников.

Теорема. ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$ (рис. 70). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

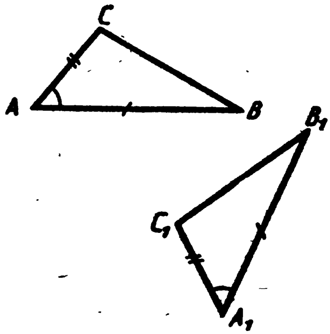


Рис. 70

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. Теорема доказана.

Доказанная теорема выражает признак (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется *первым признаком равенства треугольников.*

15. Второй признак равенства треугольников.

Теорема. ***Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

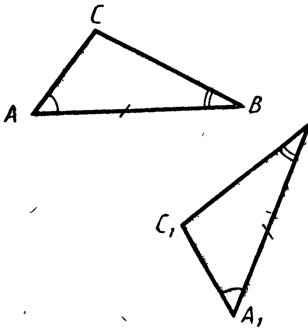


Рис. 71

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (рис. 71). Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1. Так как $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1, и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, т. е. они равны. Теорема доказана.

Практические задания

133. С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC так, чтобы: а) $AB=4{,}3$ см, $AC=2{,}3$ см, $\angle A=23°$; б) $BC=9$ см, $BA=6{,}2$ см, $\angle B=122°$; в) $CA=3$ см, $CB=4$ см, $\angle C=90°$.

134. С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC так, чтобы: а) $\angle A=46°$, $\angle B=58°$, $AB=4{,}8$ см; б) $\angle A=60°$, $\angle C=42°$, $AC=5$ см; в) $\angle BAC=72°$, $\angle BCD=138°$, $AC=7$ см, где D — точка на продолжении стороны AC за точку C.

135. Начертите треугольник ABC, стороны которого попарно не равны, и отрезок A_1B_1, равный отрезку AB. С помощью транспортира и линейки начертите $\triangle A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC. Сколько таких треугольников можно начертить?

Задачи

136. На рисунке 72 точка B — середина отрезков AE и DC. а) Докажите, что треугольники ABC и BDE равны; б) найдите углы A и C, если $\angle D=47°$, $\angle E=42°$.

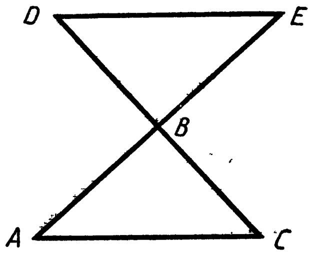


Рис. 72

137. Отрезки CC_1 и BB_1 не лежат на одной прямой и имеют общую середину A (т. е. $AC=AC_1$ и $BA=B_1A$). Докажите, что $BC=B_1C_1$.

138. На рисунке 73 $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ADC равны; б) найдите BD и AB, если $AC=15$ см, $DC=5$ см.

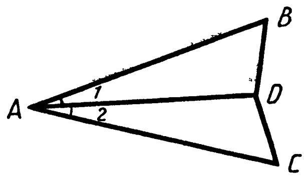


Рис. 73

139. На рисунке 74 $BC=AD$, $\angle 1=\angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и ACD равны; б) найдите стороны треугольника ABC, если $AD=17$ см, $DC=14$ см, $CA=23$ см.

140. На рисунке 75 $OA=OD$, $OB=OC$, $\angle 1=74°$, $\angle 2=36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

141. На рисунке 76 $CD=BD$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

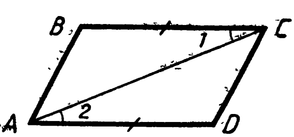


Рис. 74

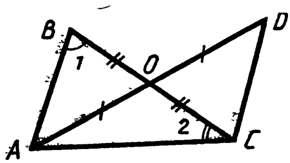


Рис. 75

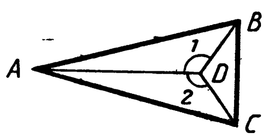


Рис. 76

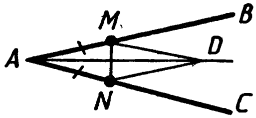


Рис. 77

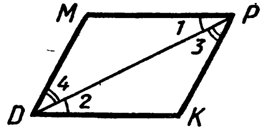


Рис. 78

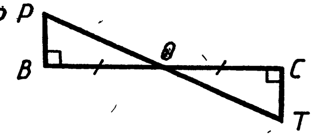


Рис. 79

142. На сторонах угла BAC отложены равные отрезки AM и AN (рис. 77). Докажите, что если угол BAD равен углу DAC, то:

а) треугольники MAD и NAD равны;

б) треугольник DMN — равнобедренный.

143. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle APC = \triangle A_1P_1C_1$.

144. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки O и O_1 так, что $AO = OB$ и $A_1O_1 = O_1B_1$. Докажите, что $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$.

145. На рисунке 72 $AB = BE$, $\angle A = \angle E$.

а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DBE$;

б) найдите стороны DB и DE, если $AC = 27$ см, $BC = 15$ см.

146. На рисунке 78 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

а) Докажите, что $\triangle DMP = \triangle PKD$;

б) найдите стороны DM и MP, если $DK = 19$ см, $PK = 11$ см.

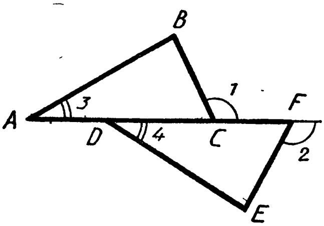


Рис. 80

147. На рисунке 73 луч AD — биссектриса угла BAC, $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

148. По данным рисунка 79 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

149. На рисунке 80 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $AB = DE$.

150. На рисунке 80 $AC = DF$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle ADE = 180° - \angle 3$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DEF$.

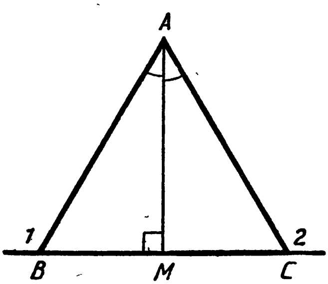


Рис. 81

151. На рисунке 81 $\angle BAM = \angle CAM$ и $\angle AMB = 90°$. Докажите, что $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$.

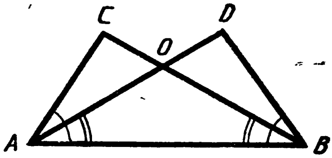


Рис. 82

152. На рисунке 76 луч AD — биссектриса угла BAC, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DBC — равнобедренные.

153. На рисунке 82 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите DB.

154. На рисунке 82 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

155. Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

156. В треугольниках ABC и DEF $BC = EF$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle DEN$, где M и N — середины сторон AC и DF.

157. В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

158. Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC, $\triangle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

§ 3. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

16. Свойство углов равнобедренного треугольника. Для доказательства третьего признака равенства треугольников нам понадобится свойство углов равнобедренного треугольника.

Теорема. ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

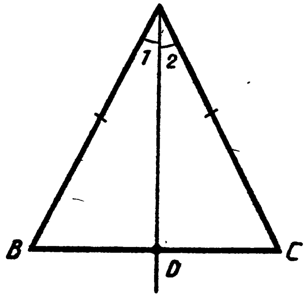


Рис. 83

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC (рис. 83). Докажем, что $\angle B = \angle C$.

Проведем биссектрису угла BAC и обозначим точку пересечения ее со стороной BC буквой D. Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона и $\angle 1 =$

$=\angle 2$, так как луч AD — биссектриса угла BAC). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B=\angle C$. Теорема доказана.

17. Третий признак равенства треугольников.

Теорема. ***Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA=C_1A_1$ (рис. 84). Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 85).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 85, *а*); луч C_1C совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 85, *б*); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 85, *в*). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

Так как по условию теоремы $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные. По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, поэтому $\angle A_1C_1B_1=\angle A_1CB_1$. Итак, $A_1C_1=AC$, $B_1C_1=BC$, $\angle C_1=\angle C$, следовательно, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$ по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

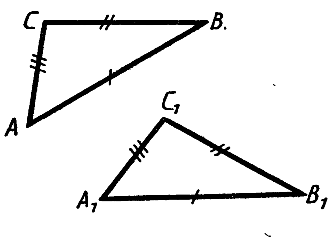


Рис. 84

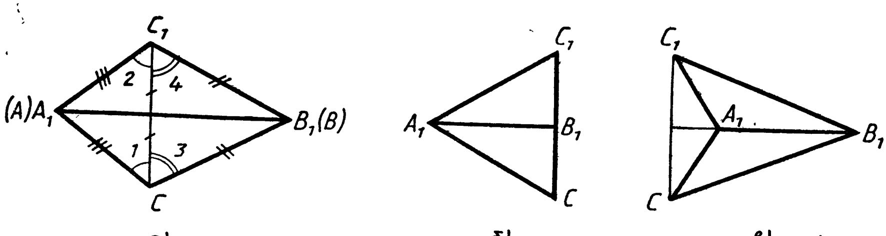


Рис. 85

159. На рисунке 86 $AB=BC$, $\angle 1=130°$. Найдите угол 2.

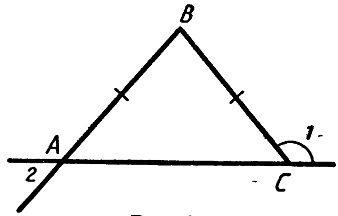


Рис. 86

160. Равнобедренные треугольники ABC и DBC имеют общее основание BC. Докажите, что $\angle ABD=\angle ACD$.

161. На рисунке 87 $MA=MB=MC$. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

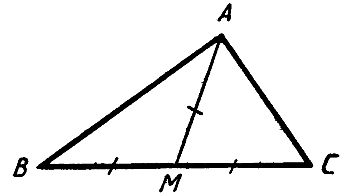


Рис. 87

162. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

163. На рисунке 88 $AB=BC$ и $CD=DE$. Докажите, что $\angle BAC=\angle CED$.

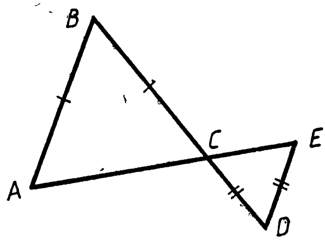


Рис. 88

164. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

165. На рисунке 89 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 5=\angle 6$. Докажите, что $\angle 3=\angle 4$.

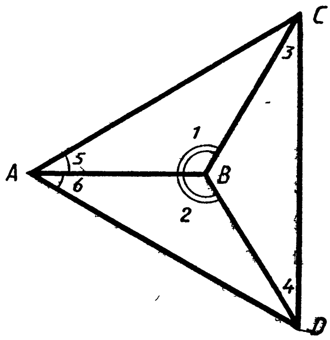


Рис. 89

166. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC отмечены точки M и N так, что $BM=CN$. Докажите, что: а) $\triangle BAM=\triangle CAN$; б) треугольник AMN — равнобедренный.

167. Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

168. На рисунке 90 $PK=PM$, $CK=CM$, $\angle KPM=40°$. Найдите $\angle MPC$.

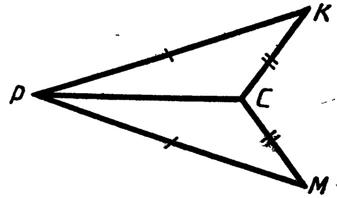


Рис. 90

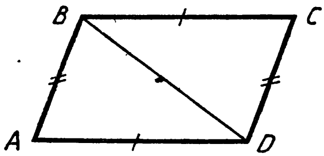


Рис. 91

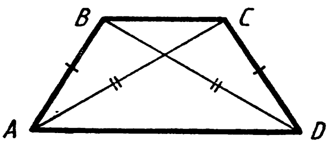


Рис. 92

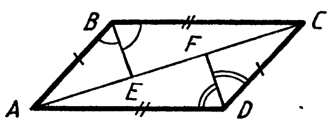


Рис. 93

169. На рисунке 91 $BC=AD$, $AB=CD$. Докажите, что $\angle A=\angle C$.

170. На рисунке 92 $AB=CD$ и $BD=AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD=\angle ADB$; б) $\angle BAC=\angle CDB$.

171. На рисунке 93 $AB=CD$, $AD=BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что $\angle ABE=\angle ADF$.

172. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BM=B_1M_1$, где M и M_1 — середины сторон AC и A_1C_1. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

173. По данным рисунка 93 докажите, что $\triangle ABE=\triangle CDF$.

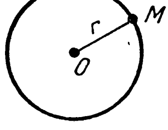
174. Отрезки AC и BD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle CDA$.

175. Равнобедренные треугольники ADC и CBD имеют общее основание DC; отрезки AB и DC имеют общую точку O. Докажите, что $DO=OC$.

§ 4. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

18. Окружность. Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется *определением*. Мы уже встречались с определениями, например с определением отрезка, угла, смежных углов и т. д. Дадим определение еще одной геометрической фигуры — окружности.

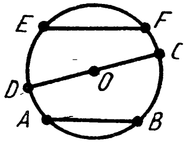
Определение. ***Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.***



Окружность радиуса r с центром O

Рис. 94

Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности,— *радиусом* окружности (рис. 94). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.



EF и *AB* — хорды,
DC — диаметр

Рис. 95

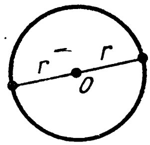
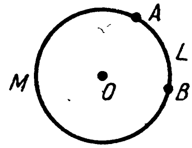


Рис. 96



ALB и *AMB* — дуги окружности, ограниченные точками *A* и *B*

Рис. 97

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой.* Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.* На рисунке 95 отрезки *AB* и *EF* — хорды окружности, отрезок *CD* — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в два раза больше ее радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра (рис. 96).

Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. На рисунке 97 *ALB* и *AMB* — дуги окружности, ограниченные точками *A* и *B*.

19. Построения циркулем и линейкой. В геометрии для выполнения чертежей используются различные инструменты: масштабная линейка, циркуль, транспортир, чертежный угольник и т. д. Однако многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые могут быть решены с помощью только этих двух инструментов.

С помощью линейки можно провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки.

С помощью циркуля можно построить окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Рассмотрим одну из простейших задач на построение.

Задача. *На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.*

Решение. Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч *OC* и отрезок *AB* (рис. 98, *а*). Затем циркулем построим окружность радиуса *AB* с центром *O* (рис. 98, *б*). Эта окружность пересечет луч *OC* в некоторой точке *D*. Отрезок *OD* — искомый.

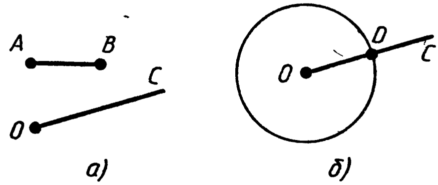


Рис. 98

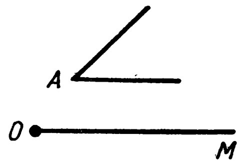


Рис. 99

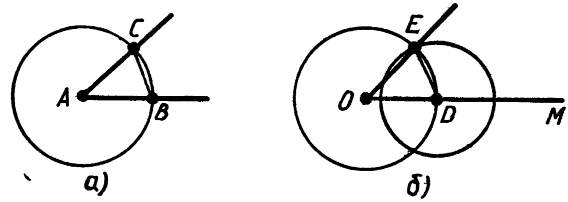


Рис. 100

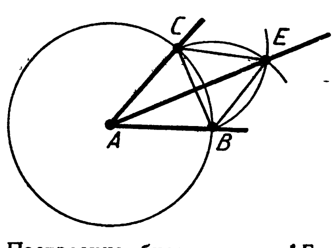
20. Примеры задач на построение.

Построение угла, равного данному. Задача. *Отложить от данного луча угол, равный данному углу.*

Решение. Данные угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 99. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из его сторон совпала с лучом OM.

Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 100, *а*). Затем проведем окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 100, *б*). После этого построим окружность, радиус которой равен BC, а центр находится в точке D. Окружности с центрами в точках O и D пересекаются в двух точках, одну из которых обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром в точке A, а OD и OE — радиусами окружности с центром в точке O (см. рис. 100, *б*). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB = OD$, $AC = OE$. Также по построению $BC = DE$. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ODE$ по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle DOE = \angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.



Построение биссектрисы AE данного угла CAB

Рис. 101

Построение биссектрисы угла.

Задача. *Построить биссектрису данного неразвернутого угла.*

Решение. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Она пересечет стороны угла в точках B и C (рис. 101). Затем проведем две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках

B и C (на рисунке изображены дуги CE и BE указанных окружностей). Они пересекутся в двух точках. Одну из этих точек, лежащую внутри угла BAC, обозначим буквой E. Докажем, что луч AE является искомой биссектрисой данного угла.

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по третьему признаку равенства треугольников. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению. Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла.

Практические задания

176. Начертите окружность, радиус которой равен 3 см, и отметьте на ней точку A. С помощью циркуля и масштабной линейки проведите хорды AB и AC, равные 4 см.

177. Отметьте точки A и B так, что $AB = 3$ см. Пользуясь циркулем и масштабной линейкой, постройте точку M так, чтобы $AM = 4$ см, $BM = 5$ см. Сколько таких точек можно построить?

178. Начертите окружность, проведите ее диаметр AB и отметьте на окружности какую-нибудь точку C. Проведите хорды AC и BC и измерьте угол ACB.

Вопросы и задачи

179. Какие из отрезков, изображенных на рисунке 102, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?

180. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

181. Отрезок MK — диаметр окружности с центром в точке O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите угол POM.

182. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

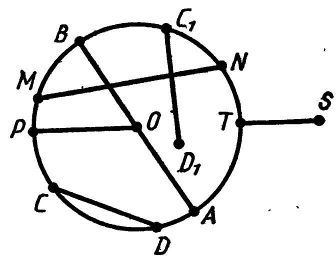


Рис. 102

183. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

Задачи на построение

184. Даны угол и отрезок PQ. На сторонах данного угла от его вершины отложите отрезки, равные отрезку PQ.

185. На прямой даны две точки A и B. На луче, дополнительном к лучу BA, отложите отрезок BC так, чтобы $BC=2AB$.

186. Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM=PQ$.

187. Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM=PQ$.

188. Даны угол hk и некоторая точка O. Постройте угол с вершиной в точке O, равный углу hk.

189. Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ=2\angle BAC$.

190. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

191. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

192. Дан угол AOB. Постройте луч OX, делящий угол AOB на два угла так, чтобы $\angle AOX=\frac{1}{4}\angle AOB$.

193. Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы: а) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle hk$; б) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$.

194. Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB=PQ$, $\angle A=\angle hk$, $\angle B=\frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

195. Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

196. Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по боковой стороне и углу при основании.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Какая фигура называется треугольником? Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?

2. Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?
3. Какой треугольник называется равносторонним?
4. Какие треугольники называются равными?
5. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.
6. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.
7. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
8. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.
9. Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?
10. Как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному?
11. Как отложить от данного луча угол, равный данному?
12. Как построить биссектрису угла? Начертите угол и постройте его биссектрису.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

197. Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

198. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

199. В треугольнике ABC $AB=18$ см, $BC=12$ см. На луче BA отмечена точка D так, что $BD=BC$. Найдите периметр треугольника ABC, если известно, что треугольники ADC и DBC имеют равные периметры.

200. Концы отрезка EF являются серединами сторон MN и NP треугольника MNP. Периметр треугольника MNP в два раза больше периметра треугольника ENF. Найдите MP, если известно, что $EF=3\frac{1}{4}$ см.

201. Какие из следующих утверждений верны: а) треугольник, равный равнобедренному треугольнику, является равнобедренным; б) существуют два равных треугольника, у одного из которых все углы острые, а у другого один из углов тупой;

в) треугольник, равный равностороннему треугольнику, является равносторонним?

202. Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

203. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажите, что $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$, где O — середина стороны AB, а O_1 — середина A_1B_1.

204. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, где $D \in BC$, $D_1 \in B_1C_1$, а лучи AD и A_1D_1 — биссектрисы углов A и A_1.

205. Отрезки CC_1 и BB_1 не лежат на одной прямой и имеют общую середину A. На отрезках BC и B_1C_1 отмечены точки K и K_1 так, что $BK = B_1K_1$. Докажите, что $AK = AK_1$.

206. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AM = A_1M_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$, где M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1.

207. В треугольнике ADE, изображенном на рисунке 103, $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.

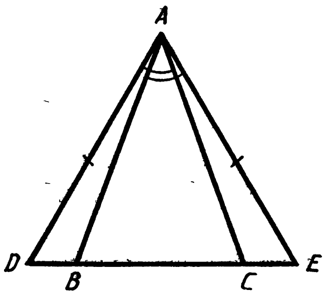


Рис. 103

208. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

209. На рисунке 104 $OA = AB = O_1A_1 = A_1B_1$, $OC = CD = O_1C_1 = C_1D_1$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$, если: а) $AC = A_1C_1$; б) $BD = B_1D_1$; в) $AD = A_1D_1$.

210. На рисунке 104 $OA = OC = O_1A_1 = O_1C_1$, $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$. Докажите, что $AC = A_1C_1$, если: а) $BD = B_1D_1$; б) $AD = A_1D_1$; в) $BC = B_1C_1$.

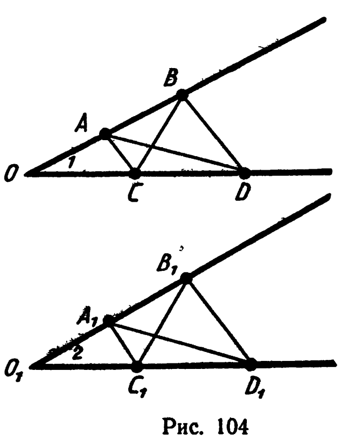


Рис. 104

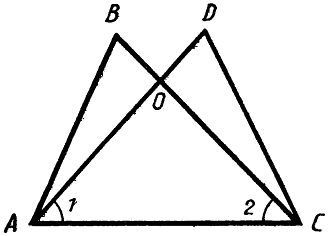


Рис. 105

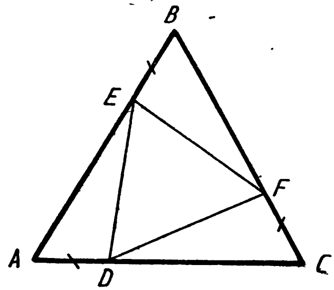


Рис. 106

211. На рисунке 105 $\angle 1 = \angle 2$, $BC = AD$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

212. Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

213. На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, CF и BE, как показано на рисунке 106. Точки D, F, E соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

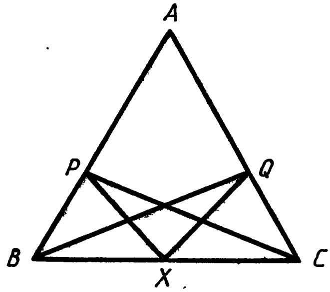


Рис. 107

214. На рисунке 107 $\angle ABC = \angle ACB$, $BX = CX$, $\angle PXB = \angle QXC$. Докажите, что $BQ = CP$.

215. На рисунке 108 изображены два треугольника с общей стороной YZ. Докажите, что: а) $\triangle YPZ = \triangle YQZ$, если $PY = QY$ и $\angle PYZ = \angle QYZ$; б) $\angle YPZ = \angle YQZ$, если $PY = QY$ и $PZ = QZ$.

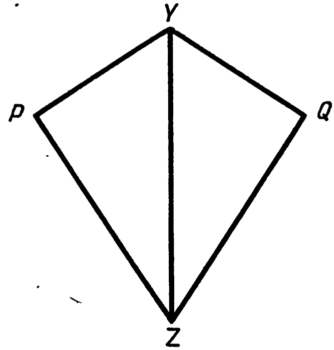


Рис. 108

216. В треугольнике ABC, у которого $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$, проведены два отрезка BD и BE так, что $BD = DA$, $BE = EC$ (рис. 109). Найдите $\angle DBE$.

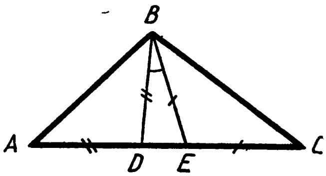


Рис. 109

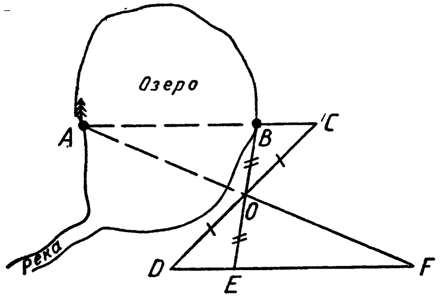


Рис. 110

217. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1.

218. На рисунке 110 $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 110), основанный на этой задаче.

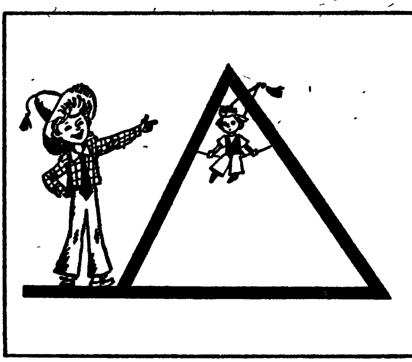
219. Даны отрезок PQ и острый угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = 2\angle hk$.

220. Постройте треугольник ABC, если даны вершины A и B и точка O, в которой пересекаются биссектрисы углов A и B.

221. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

Глава III

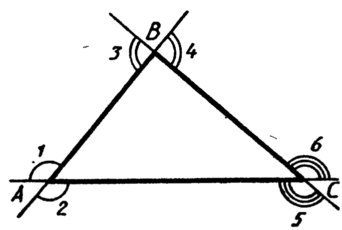
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА



§ 1. ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА

21. Теорема о внешнем угле треугольника. *Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется внешним углом этого треугольника.* При каждой вершине треугольника имеются два внешних угла. На рисунке 111 внешние углы при вершине A обозначены цифрами 1 и 2, при вершине B — цифрами 3 и 4, при вершине C — цифрами 5 и 6. Углы 1 и 2 равны, так как они вертикальные. По этой же причине равны углы 3 и 4, а также 5 и 6.

Теорема. ***Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.***



Углы 1, 2, 3, 4, 5, 6 — внешние углы треугольника

Рис. 111

Доказательство. Рассмотрим внешний угол BAD треугольника ABC (рис. 112). Докажем, например, что $\angle BAD > \angle B$ (неравенство $\angle BAD > \angle C$ доказывается аналогично).

Обозначим буквой O середину стороны AB и отложим на продолжении отрезка CO отрезок OE, равный отрезку CO. Проведем отрезок AE и рассмотрим треугольники OBC и OAE (на рисунке 112 они заштрихованы). Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников ($OB=OA$, $OC=OE$, $\angle 1=\angle 2$), поэтому $\angle B = \angle 3$.

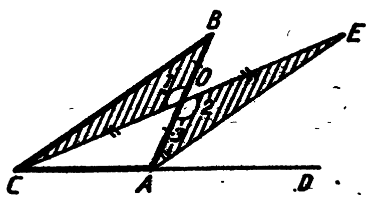


Рис. 112

Так как угол 3 составляет часть угла BAD, то $\angle BAD > \angle 3$. Но $\angle 3 = \angle B$, следовательно, $\angle BAD > \angle B$. Теорема доказана.

Рис. 113

22. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники. Утверждения, которые непосредственно выводятся из теоремы, называются *следствиями.* Следствием из теоремы о внешнем угле треугольника является следующее утверждение.

Если у треугольника один из углов прямой или тупой, то два других угла острые.

В самом деле, пусть в треугольнике ABC угол A прямой или тупой (рис. 112). Тогда внешний угол BAD — прямой или острый. По теореме о внешнем угле треугольника углы B и C треугольника ABC меньше угла BAD, поэтому они острые.

Из этого утверждения следует, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется *остроугольным* (рис. 113, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется *тупоугольным* (рис. 113, *б*). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным.* Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой,* а две другие стороны — *катетами.* На рисунке 113, *в* изображен прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Практические задания

222. Начертите треугольник DEF. Постройте: а) внешние углы при вершине D; б) один из внешних углов при вершине E.

223. Начертите треугольник ABC и внешний угол ABD этого треугольника. Назовите угол треугольника, смежный с углом ABD, и углы треугольника, не смежные с углом ABD.

224. Начертите с помощью масштабной линейки и транспортира треугольник MNP так, чтобы внешний угол при вершине M равнялся 60°, $MP=5$ см и $MN=6$ см.

225. Начертите с помощью масштабной линейки и транспортира равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 6 см, а внешний угол при вершине, противоположной основанию, равен 60°.

226. Начертите три треугольника: остроугольный, тупоугольный и прямоугольный.

227. С помощью транспортира и линейки начертите треугольник ABC, у которого угол A — прямой. Назовите гипотенузу и катеты этого треугольника, измерьте их и сравните гипотенузу с катетами.

Вопросы и задачи

228. Внешние углы при вершинах A, B и C треугольника ABC соответственно равны α, β и γ. Найдите: а) α и β, если $\angle A=73°$, $\angle B=49°$; б) $\angle B$ и $\angle C$, если $\beta=90°$, $\gamma=161°$; в) $\angle A$ и γ, если $\alpha=27°30'$, $\angle C=10°15'$.

229. На рисунке 114 луч AD — биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC. а) Найдите $\angle BAC$, если $\angle 1=58°$; б) найдите $\angle 1$, если $\angle BAC=70°$.

230. Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) внешний угол при вершине, противоположной основанию, равен 37°, а один из углов при основании равен 18°30′; б) внешний угол при основании равен 126°, а внешний угол при вершине, противоположной основанию, равен 108°.

231. Внешний угол при вершине B треугольника ABC равен 52°. Может ли угол C равняться 34°, 52°, 75°?

232. Внешний угол треугольника равен 65°. Может ли один из углов треугольника равняться: а) 48°; б) 100°; в) 15°; г) 80°; д) 115°?

233. Один из углов треугольника равен 57°. Может ли один из внешних углов треугольника равняться 43°, 60°, 100°, 23°?

234. Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть: а) прямым; б) острым; в) тупым?

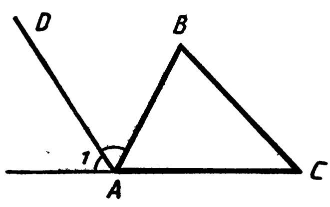


Рис. 114

235. Докажите, что в любом треугольнике сумма двух углов меньше 180°.

236. Докажите, что в любом треугольнике сумма двух внешних углов при разных вершинах больше 180°.

237. Может ли в треугольнике один угол быть острым, другой — прямым, а третий — тупым? Ответ обоснуйте.

238. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина гипотенузы AB, $AD=BD=CD$. Найдите сумму углов треугольника.

239. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C на катете BC отмечена точка D. Докажите, что $\angle ADB > \angle ABC$ и $\angle ADB > \angle BAC$.

240. В треугольнике ABC угол A — прямой. Докажите, что внешние углы при вершинах B и C — тупые.

241. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании острые.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

23. Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Теорема. ***В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. Докажем, что $\angle ACB > \angle ABC$ (рис. 115, *а*).

Отложим на луче AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 115, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит на отрезке AB, следо-

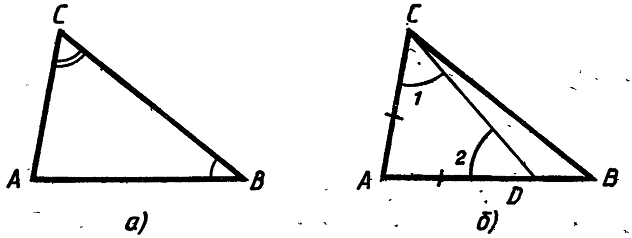


Рис. 115

вательно, угол 1 является частью угла ACB. Поэтому $\angle ACB > \angle 1$. Но $\angle 1 = \angle 2$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ACD), значит, $\angle ACB > \angle 2$.

Рассмотрим теперь треугольник BCD. Так как $\angle 2$ — внешний угол этого треугольника, то $\angle 2 > \angle B$. Таким образом, $\angle ACB > \angle 2$, а $\angle 2 > \angle B$, поэтому $\angle ACB > \angle B$, т. е. $\angle ACB > \angle ABC$. Теорема доказана.

24. Обратные теоремы. Во всякой теореме различают две части: *условие* и *заключение*. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую третий признак равенства треугольников. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника», а заключением — вторая часть: «то такие треугольники равны». Иными словами, дано: три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника; требуется доказать: эти треугольники равны.

Теоремой, *обратной данной*, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы.

Докажем теорему, обратную теореме предыдущего пункта.

Теорема. ***В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла B. Докажем, что $AB > AC$ (рис. 116).

Допустим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, и поэтому $\angle C = \angle B$. Во втором случае по теореме предыдущего пункта $\angle C < \angle B$. И то, и другое противоречит условию теоремы: $\angle C > \angle B$, поэтому сторона AB не может быть равной AC и не может быть меньше стороны AC. Следовательно, $AB > AC$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется *методом доказательства от противного*. Мы предположили, что $AB \leqslant AC$, т. е. пред-

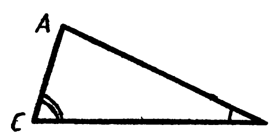


Рис. 116

положили противоположное тому, что хотим доказать. Исходя из этого предположения, путем рассуждений пришли к противоречию с условием теоремы. Это означает, что наше предположение неверно, следовательно, $AB > AC$.

Такой способ рассуждений часто используется при доказательстве утверждений.

Следствие. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого катета.*

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Приведем еще один пример обратной теоремы. В пункте 16 мы доказали, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Докажем обратную теорему.

Теорема. ***Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.***

Доказательство. Пусть два угла треугольника равны. Докажем, что против них лежат равные стороны, т. е. треугольник равнобедренный. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что одна из указанных сторон больше другой. Тогда угол, лежащий против нее, больше угла, лежащего против другой стороны. Но это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно, следовательно, стороны, лежащие против равных углов, равны. Теорема доказана.

Замечание. Если доказана прямая теорема, то отсюда еще не следует справедливость обратной теоремы. Более того, обратная теорема не всегда верна. Приведем простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

Вопросы и задачи

242. Сравните углы треугольника ABC, если известно, что $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см.

243. В треугольнике ABC $AB > BC > AC$. а) Сравните углы треугольника; б) может ли угол A быть прямым или тупым?

244. Сравните стороны треугольника ABC, если известно, что $\angle A > \angle B > \angle C$.

245. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C на катете BC отмечена точка D. Докажите, что $AD < AB$.

246. В треугольнике ABC угол C — тупой. Докажите, что $BK > BC$, $BK < AB$, где K — произвольная точка стороны AC, не совпадающая с точками A и C.

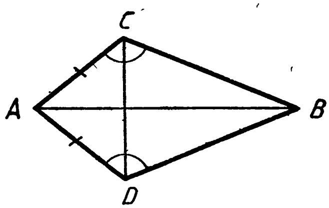


Рис. 117

247. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D. Докажите, что: а) если $BC = CD$, то $\angle B > \angle A$; б) если $BD = DC$, то $AB < AC$.

248. Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершин, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

249. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, пересекающая сторону BC в точке D; $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$. Докажите, что треугольник ABD — равнобедренный.

250. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

251. На рисунке 117 $AC = AD$, $\angle C = \angle D$. Докажите, что $BC = BD$.

252. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см, $\angle A + \angle B = 90°$. Найдите CD, если D — точка отрезка AB и $CD = BD$.

253. Докажите следующие утверждения: а) если внешние углы при двух разных вершинах треугольника равны, то треугольник равнобедренный; б) если все углы треугольника равны, то треугольник равносторонний.

254. Каждый из внешних углов треугольника равен 120°, а одна из его сторон равна 8 см. Найдите периметр треугольника.

255. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 45°$. Точка D — середина стороны AC, $BD = \frac{1}{2} AC$. Найдите угол ABC.

256. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и прилежащему углу.

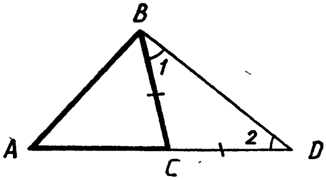


Рис. 118

25. Неравенство треугольника.

Теорема. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 118). Так как треугольник BCD равнобедренный ($BC = CD$), то $\angle 1 = \angle 2$, а поскольку $\angle ABD > \angle 1$, то $\angle ABD > \angle 2$. В треугольнике ABD против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона, поэтому $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, следовательно, $AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.*

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника.*

Следствие 2. *Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.*

Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. По доказанной теореме $AB + BC > AC$, поэтому $AB > AC - BC$.

Вопросы и задачи

257. Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м, 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм, 2,4 дм?

258. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

259. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 5 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

260. Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

261. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух его сторон равна 4 см и один из его внешних углов острый. Найдите стороны треугольника.

262. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1, C_1, отличные от вершин треугольника. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра треугольника ABC.

Задачи на построение

263. Постройте треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам. Всегда ли задача имеет решение?

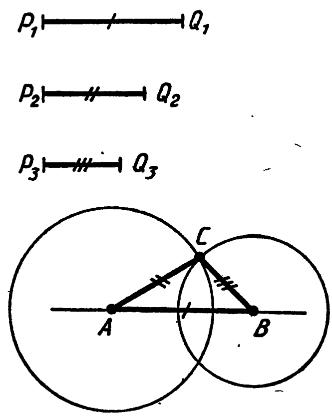
Решение. Данные отрезки обозначим P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 (рис. 119). Проведем какую-нибудь прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1. Далее построим две окружности: одну — с центром в точке A и радиусом, равным отрезку P_2Q_2, а другую — с центром в точке B и радиусом, равным отрезку P_3Q_3. Пусть C одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC. В самом деле, по построению $AB=P_1Q_1$, $AC=P_2Q_2$, $BC=P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Данная задача не всегда имеет решение. Действительно, в треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.

264. Постройте треугольник ADC, равный данному треугольнику ABC, так, чтобы вершина D не совпадала с вершиной B.

265. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=2P_3Q_3$. Всегда ли задача имеет решение?

266. Дан треугольник ABC с тупым углом A. Постройте треугольник BAK так, чтобы $\triangle BAK = \triangle ABC$ и точки C и K лежали по одну сторону от прямой AB.



Построение треугольника по трем сторонам

Рис. 119

267. Даны прямая a и отрезки AB и PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка C лежала на прямой a и $AC=PQ$.

268. Даны окружность и отрезки AB и PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка C лежала на данной окружности и $AC=PQ$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Какой угол называется внешним углом треугольника? Сколько внешних углов имеет каждый треугольник?
2. Докажите, что внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.
3. Докажите, что если у треугольника один из углов прямой или тупой, то два других угла острые.
4. Какой треугольник называется остроугольным, прямоугольным, тупоугольным?
5. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
6. Докажите теорему: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
7. Докажите теорему: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого катета. Может ли гипотенуза быть больше суммы катетов?
9. Докажите, что если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.
10. Докажите теорему: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

269. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, и внешние углы этих треугольников при вершинах A и A_1 равны.

270. Если один из внешних углов треугольника острый, то каковы остальные внешние углы треугольника? Ответ обоснуйте.

271. Если один из внешних углов треугольника прямой, то каковы остальные внешние углы треугольника? Ответ обоснуйте.

272. Сумма трех внешних углов треугольника при вершинах A, B и C равна 360°. Найдите углы треугольника ABC, если:

а) треугольник равнобедренный и один из его углов равен 105°; б) треугольник равнобедренный и угол B при основании равен 45°; в) $\angle A=38°$, $\angle C=45°10'$.

273. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle BAC < \angle BMC$.

274. Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой противоположной стороны, лежащей между ее концами. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

275. Докажите, что треугольник равносторонний, если внешние углы при трех его вершинах равны.

276. Отрезок AB является диаметром окружности, а отрезок AC — хордой. Докажите, что $AB > AC$.

277. Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, а сторона AC — хордой. Докажите, что $\angle A < \angle C$ и $\angle B < \angle C$.

278. В прямоугольном треугольнике ABC сумма углов равна 180°, а гипотенуза AB равна 16 см. Найдите AD, если D — точка отрезка AB и $CD=BD$.

279. В треугольнике одна сторона равна 1,9 дм, а другая равна 0,7 дм. Найдите третью сторону, зная, что ее длина в дециметрах выражается целым числом.

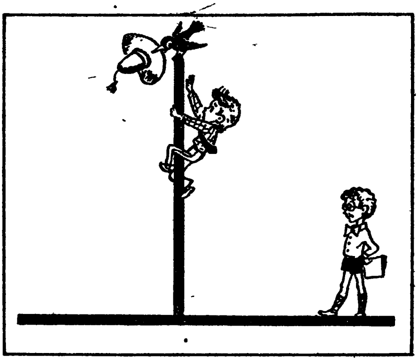
280. Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB+MC<AB+AC$.

281. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

282. Докажите, что если $AB=AC+CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

Глава IV

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ



§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ

26. Перпендикулярные прямые. Рассмотрим прямые AC и BD, пересекающиеся в точке O (рис. 120). Они образуют четыре неразвернутых угла AOB, BOC, COD и DOA. Если один из них прямой, то остальные три угла также прямые (рис. 121).

Определение. ***Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.***

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 122). Отрезок, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a,* если прямые AH и a перпендикулярны. При этом точка H называется *основанием перпендикуляра.*

Теорема. ***Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.***

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на прямой a. Докажем, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a, и притом только один.

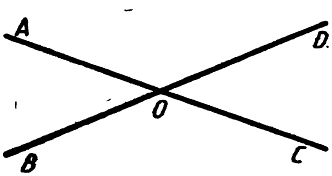
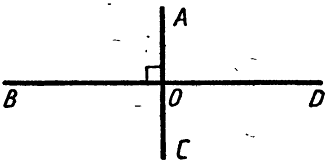
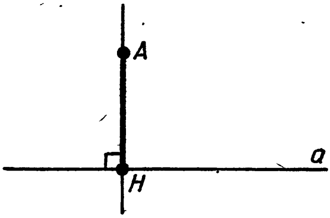


Рис. 120



Перпендикулярные прямые

Рис. 121



Отрезок AH — перпендикуляр к прямой a

Рис. 122

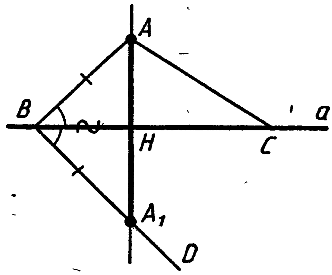


Рис. 123

Отметим на прямой a какие-нибудь две точки B и C (рис. 123). В треугольнике ABC хотя бы один из углов B и C острый. Пусть, например, угол B — острый. Отложим от луча BC угол CBD, равный углу ABC, как показано на рисунке 123, а на луче BD отложим отрезок BA_1, равный отрезку BA. Обозначим буквой H точку пересечения прямых a и AA_1. Треугольники ABH и A_1BH равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = A_1B$, BH — общая сторона, $\angle ABH = \angle A_1BH$). Следовательно, $\angle AHB = \angle A_1HB$, а так как эти углы смежные, то каждый из них прямой. Таким образом, $AH \perp a$, т. е. отрезок AH — искомый перпендикуляр.

Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой a. Если предположить, что можно провести еще один перпендикуляр AH_1 к прямой a, то получим треугольник AHH_1, в котором два прямых угла (рис. 124). Но это невозможно, следовательно, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой a. Теорема доказана.

27. Расстояние от точки до прямой. Пусть точка H — основание перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой a, а M — любая другая точка прямой a. Отрезок AM называется *наклонной, проведенной из точки A к прямой a*. На рисунке 125 отрезок AH —

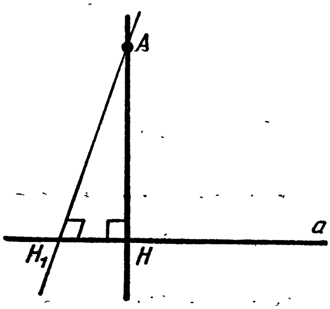
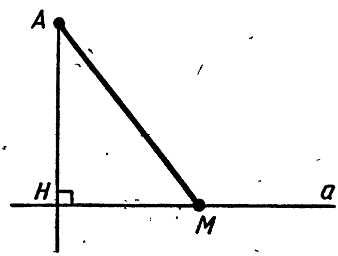


Рис. 124



Отрезок AM — наклонная к прямой a

Рис. 125

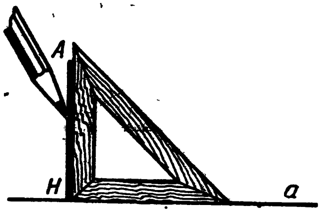


Рис. 126

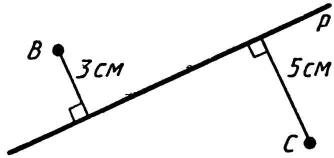


Рис. 127

перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, а отрезок AM — наклонная. Перпендикуляр AH является катетом, а наклонная AM — гипотенузой прямоугольного треугольника AHM. Так как в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то *перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.*

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Для того чтобы найти расстояние от точки до прямой, сначала проводят перпендикуляр из этой точки к данной прямой, а затем измеряют этот перпендикуляр. Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертежный угольник (рис. 126). На рисунке 127 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой — 5 см.

Практические задания

283. Начертите прямую a и отметьте точку A, не лежащую на ней. С помощью чертежного угольника проведите через точку A прямую, перпендикулярную к прямой a.

284. Начертите неразвернутый угол MON и отметьте точки P и Q так, чтобы точка P лежала внутри угла, а точка Q — вне его. С помощью чертежного угольника через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

285. Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертежного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

286. С помощью линейки проверьте свой чертежный угольник, как показано на рисунке 128.

287. Начертите прямую a и отметьте точку O, не лежащую на этой прямой. Используя чертежный угольник, проведите перпендикуляр OB к прямой a и наклонные OA и OC так, чтобы луч OC делил угол BOA на два угла. Найдите с помощью масштабной линейки длины перпендикуляра и наклонных и сравните их. Назовите виды полученных треугольников.

288. Начертите прямую a и с помощью чертежного угольника отметьте точку A на расстоянии 6 см от нее. С помощью циркуля и масштабной линейки постройте наклонные из точки A к прямой a длиной 7,5 см, 9 см и 10 см.

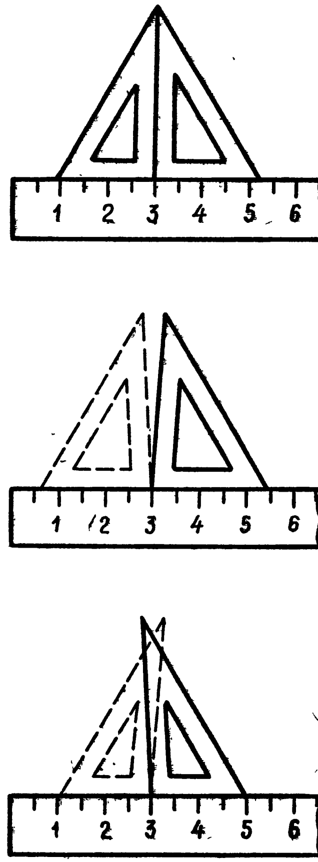


Рис. 128

Вопросы и задачи

289. Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, которые пересекают прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

290. Докажите, что если через две точки прямой проведены перпендикулярные к ней прямые, то они не пересекаются.

291. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. Найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

292. Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ к прямой b равны. Точка O — середина отрезка NQ. а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$; б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

293. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что: а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$; б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

294. В прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ катеты BA и B_1A_1 равны, а катет BC меньше катета B_1C_1. Докажите, что $AC < A_1C_1$.

295. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что: а) если $AM_1=AM_2$, то $HM_1=HM_2$; б) если $AM_1<AM_2$, то $HM_1<HM_2$.

296. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

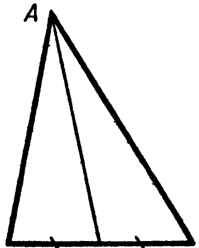
297. Стороны прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C удовлетворяют условиям: $AB+AC=31$ см, $AB-AC=3$ см. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

298. Два населенных пункта находятся на одинаковом расстоянии от прямой дороги. Где нужно расположить автобусную остановку на дороге, чтобы она была равноудалена от этих пунктов?

§ 2. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

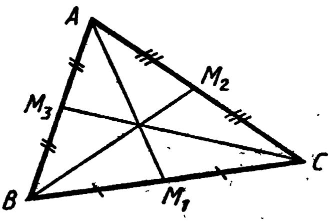
28. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника* (рис. 129, *а*). Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 129, *б* точки M_1, M_2 и M_3 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, а отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы этого треугольника.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника (рис. 130, *а*). Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 130, *б* отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.



а)

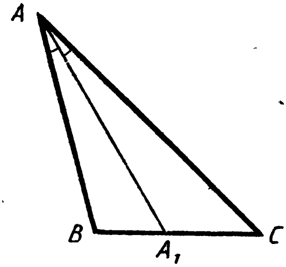
AM — медиана треугольника



б)

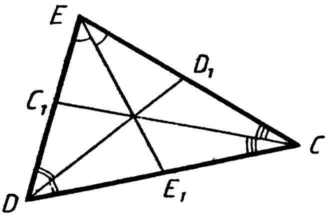
AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC

Рис. 129



а)

AA_1 — биссектриса треугольника ABC



б)

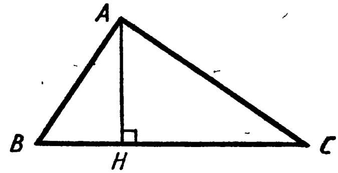
CC_1, DD_1, EE_1 — биссектрисы треугольника CDE

Рис. 130

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника (рис. 131, *а*). Любой треугольник имеет три высоты.

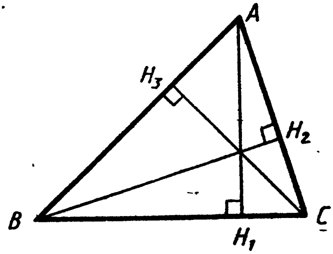
Если треугольник остроугольный, то все три высоты лежат внутри треугольника (рис. 131, *б*), а если тупоугольный, то две высоты лежат вне треугольника (рис. 131, *в*). Если же треугольник прямоугольный, то две его высоты совпадают с катетами (рис. 131, *г*).

Замечание. В VIII классе мы докажем замечательные свойства медиан, биссектрис и высот: три медианы

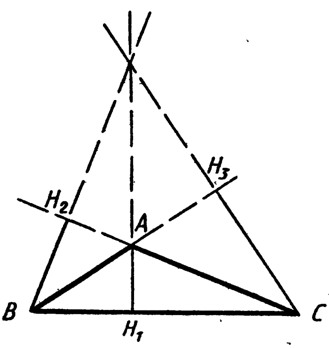


а)

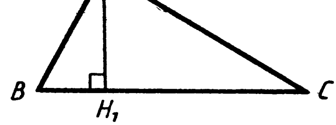
AH — высота треугольника ABC



б)



в)



г)

AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC

Рис. 131

треугольника пересекаются в одной точке (рис. 129, *б*); три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 130, *б*); три высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке (рис. 131, *б, в, г*).

29. Теорема о медиане равнобедренного треугольника.

Теорема. ***Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.***

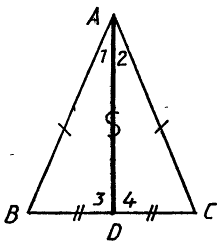


Рис. 132

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором AD — медиана, проведенная к основанию BC (рис. 132). Докажем, что отрезок AD является также биссектрисой и высотой треугольника ABC.

Треугольники ABD и ACD равны по третьему признаку равенства треугольников: $AB = AC$, как боковые стороны равнобедренного треугольника ABC; $BD = DC$, так как точка D — середина отрезка BC; AD — общая сторона. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Так как $\angle 1 = \angle 2$, то AD — биссектриса треугольника ABC.

Углы 3 и 4 смежные и равны друг другу, поэтому каждый из них прямой. Следовательно, AD также и высота треугольника ABC. Теорема доказана.

Мы установили, что медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также следующие утверждения.

1. *Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

2. *Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и медианой.*

Практические задания

299. Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

300. Начертите треугольник. С помощью линейки и транспортира проведите его биссектрисы.

301. Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. С помощью чертежного угольника проведите высоты каждого треугольника.

302. Начертите прямоугольный треугольник. Из вершины острого угла проведите медиану, биссектрису и высоту этого треугольника.

303. Начертите тупоугольный треугольник. Из вершины острого угла проведите медиану, биссектрису и высоту этого треугольника.

Задачи

304. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. а) Докажите, что периметры треугольников ABM и ACM равны; б) найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

305. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведенная к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

306. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C. Найдите угол ACE, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

307. Внешний угол треугольника ABC при вершине B равен 110°. На продолжении биссектрисы BO отложен отрезок OD, равный OB, $\angle ODC = 35°$. Докажите, что $DC = AB$.

308. Докажите, что в равностороннем треугольнике: а) все медианы равны; б) все биссектрисы равны.

309. Высоты треугольника равны 1,7 см, 3,4 см и 2,3 см. Найдите расстояния от вершин треугольника до прямых, содержащих противоположные стороны.

310. Докажите, что в треугольнике медиана не может быть меньше высоты, проведенной из той же вершины.

311. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

312. Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

313. Отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

314. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD, $\angle ABD = 15°$, $\angle BAC = 75°$. Найдите $\angle B$, $\angle C$, $\angle BDC$.

315. В равнобедренном треугольнике DEK с основанием DK проведена биссектриса EF, $DK = 16$ см, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

316. Высота и биссектриса, проведенные из одной и той же вершины треугольника, равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

317. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

318. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

319*. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

§ 3. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ОТРЕЗКА. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ

30. Серединный перпендикуляр отрезка. *Серединным перпендикуляром отрезка называется прямая, проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная к нему.*

На рисунке 133, a прямая a — серединный перпендикуляр отрезка AB. Каждый отрезок имеет только один серединный перпендикуляр. В самом деле, если предположить, что некоторый отрезок AB имеет два серединных перпендикуляра OC и OD (рис. 133, *б*), то один из прямых углов AOC и AOD будет частью другого, что невозможно, так как прямые углы равны.

Докажем теорему о серединном перпендикуляре отрезка.

Теорема. ***Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.***

Доказательство. Пусть прямая m — серединный перпендикуляр отрезка AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 134). Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$.

Если точка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Рассмотрим прямоугольные треугольники OAM и OBM.

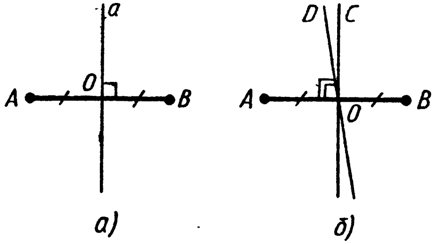


Рис. 133

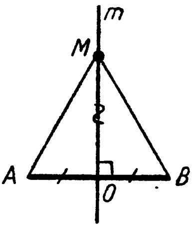


Рис. 134

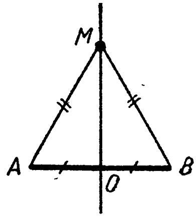


Рис. 135

Они равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AM=BM$. Теорема доказана.

Докажем теперь обратную теорему.

Теорема. ***Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.***

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку M, равноудаленную от концов отрезка AB. Докажем, что точка M лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.

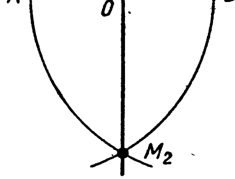
Если точка M лежит на прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB, а значит, лежит на его серединном перпендикуляре. Если точка M не лежит на прямой AB, то треугольник AMB равнобедренный, так как $AM=BM$ (рис. 135). Отрезок MO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Следовательно, $MO \perp AB$. Таким образом, прямая MO, на которой лежит точка M, является серединным перпендикуляром отрезка AB. Теорема доказана.

31. Построение перпендикулярных прямых.

Задача. *Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.*

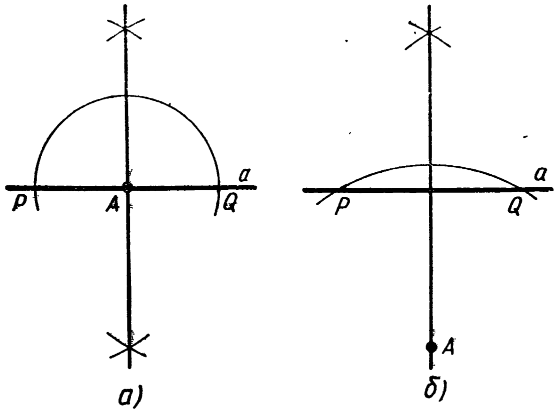
Решение. Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 136). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

Проведем прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром отрезка AB. В самом деле, так как точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, то они лежат на серединном перпендикуляре этого отрезка. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр отрезка AB.



Построение серединного перпендикуляра отрезка AB

Рис. 136



Построение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a

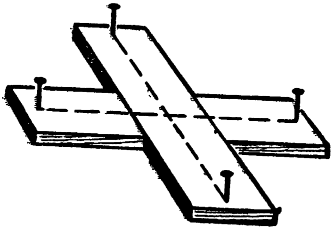
Рис. 137

Эту задачу можно использовать для *построения середины данного отрезка*. Пусть AB — данный отрезок. Середина O является точкой пересечения этого отрезка с его серединным перпендикуляром. Поэтому, построив серединный перпендикуляр отрезка AB (см. рис. 136), мы найдем и его середину O.

Задача. *Построить прямую, проходящую через данную точку A и перпендикулярную к данной прямой a.*

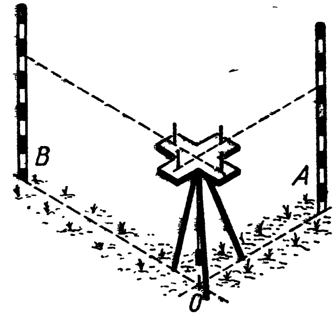
Решение. Независимо от того, лежит ли точка A на прямой a (рис. 137, a) или не лежит на ней (рис. 137, $б$), данную задачу можно решить с помощью построения серединного перпендикуляра. Построим окружность с центром в точке A, пересекающую прямую a в каких-нибудь двух точках P и Q. Так как $AP = AQ$, то точка A равноудалена от концов отрезка PQ и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка. Остается построить серединный перпендикуляр отрезка PQ. Он и будет прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к данной прямой a.

32. Построение прямых углов на местности. Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является *экер* (рис. 138). Экер представляет собой два бруска, расположенные под прямым углом и укрепленные на треножнике (рис. 139). На концах брусков насажены булавки так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны. Чтобы построить на местности прямой угол с заданной



Экер

Рис. 138



Треножник с экером

Рис. 139

стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче. Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 139). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используются более совершенные приборы, например теодолит.

Практические задания

320. Начертите два неравных отрезка AB и MN. Пользуясь масштабной линейкой и чертежным угольником, проведите серединные перпендикуляры этих отрезков.

321. Начертите треугольник. Пользуясь масштабной линейкой и чертежным угольником, проведите серединные перпендикуляры его сторон.

322. Пользуясь масштабной линейкой и чертежным угольником, начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием BC так, чтобы $BC=6$ см, $AM=4$ см, где AM — медиана треугольника.

Задачи

323. Серединный перпендикуляр стороны BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите AD и CD, если $BD=5$ см, $AC=8{,}5$ см.

324. Серединный перпендикуляр стороны MP треугольника MNP пересекает сторону NP в точке K. Найдите PN, если $MK=11{,}4$ см, $NK=3{,}2$ см.

325. Серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) D — середина стороны BC; б) $\angle A=\angle B+\angle C$.

326. Докажите, что серединный перпендикуляр стороны треугольника проходит через точку пересечения серединных перпендикуляров двух других сторон.

327. Серединный перпендикуляр стороны AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB=18$ см.

328. Серединный перпендикуляр стороны DE равнобедренного треугольника DEF с основанием DF, равным 7 см, пересекает сторону EF в точке M. Найдите периметр этого треугольника, если $DM=8$ см, а периметр треугольника DEM равен 30 см.

329. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

330. Прямая OM проходит через середину O отрезка AB и не перпендикулярна к прямой AB. Докажите, что если точка X лежит на прямой OM и отлична от точки O, то отрезки AX и BX не равны.

331. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

332. Каждая из точек M, N и P равноудалена от концов отрезка AB. Докажите, что точки M, N и P лежат на одной прямой.

333. Докажите, что вершины всех равнобедренных треугольников с общим основанием, противоположные этому основанию, лежат на одной прямой.

334. Прямая a — серединный перпендикуляр отрезка AB, M — точка, лежащая по ту же сторону от прямой a, что и точка A. Докажите, что $MA<MB$.

335. Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна к основанию AB.

336. Даны равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и точка D, такая, что $AD<DB$. Докажите, что прямая CD не проходит через середину отрезка AB.

337. На рисунке 140 $AO=OD$, а углы A и D — прямые. Докажите, что $AB=CD$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 140) с помощью экера и рулетки, основанный на этой задаче.

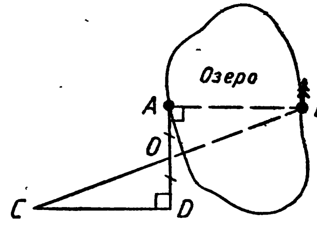


Рис. 140

338. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

339. С помощью циркуля и линейки постройте угол: а) в 45°; б) в 22°30′.

340. Дана прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой a постройте точку M так, чтобы $AM=MB$.

341. Даны окружность и две точки A и B на ней. На окружности постройте точку M так, чтобы $AM=MB$.

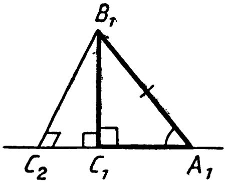
342. С помощью циркуля и линейки постройте точку, равноудаленную от трех вершин треугольника.

§ 4. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

33. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Так как в прямоугольном треугольнике угол между катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует: *если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.* Далее, из второго признака равенства треугольников следует: *если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.*

Рассмотрим еще два признака равенства прямоугольных треугольников.

Т е о р е м а. ***Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.***



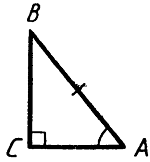


Рис. 141

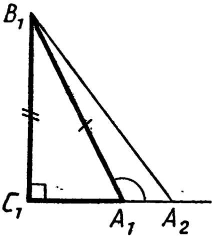
Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 141). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины C и C_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка C совместится с некоторой другой точкой C_2 луча A_1C_1, то получим треугольник $B_1C_1C_2$, в котором два прямых угла (см. рис. 141). Но это невозможно, поэтому вершины C и C_1 совместятся. Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, и значит, они равны. Теорема доказана.

Теорема. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 142). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 142 $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой, как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся. Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, и значит, они равны. Теорема доказана.



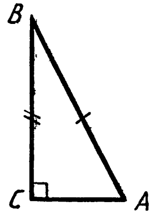


Рис. 142

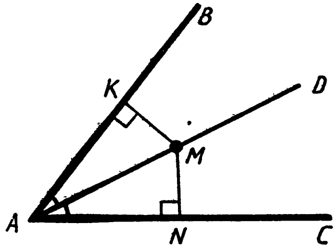


Рис. 143

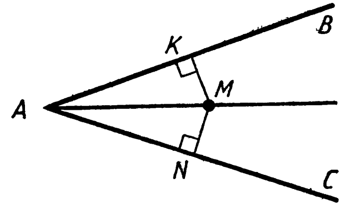


Рис. 144

34. Свойство биссектрисы угла. Докажем теорему о свойстве биссектрисы угла.

Теорема. ***Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон*.***

Доказательство. Пусть AD — биссектриса угла BAC, M — произвольная точка на биссектрисе, MK и MN — перпендикуляры, проведенные из точки M к прямым AB и AC (рис. 143). Докажем, что $MK=MN$.

Прямоугольные треугольники AMK и AMN равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle KAM = \angle NAM$ — по условию). Следовательно, $MK=MN$. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема. ***Любая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.***

Доказательство. Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (рис. 144).

Проведем из точки M перпендикуляры MK и MN к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AKM и ANM равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK=MN$ — по условию). Следовательно, $\angle KAM = \angle NAM$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. Теорема доказана.

Задачи

343. Гипотенузы AC и BD прямоугольных треугольников ABD и ABC с общим катетом AB и с равными катетами AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOB — равнобедренный.

---

* Т. е. равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

344. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе неразвернутого угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

345. На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

346. Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.

347. Катеты AC и BD прямоугольных треугольников ABD и ACD с общей гипотенузой AD пересекаются в точке K. Докажите, что точка K лежит на серединном перпендикуляре отрезка AD, если $AB = CD$.

348. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от прямых, содержащих боковые стороны.

349. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудаленная от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

350. Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

351. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

352. Отрезки BD и B_1D_1 — биссектрисы прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами A и A_1. Докажите, что если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

353. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

Задачи на построение

354. Постройте прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты были равны данным отрезкам.

355. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.

356. Постройте прямоугольный треугольник так, чтобы гипотенуза и один катет были равны данным отрезкам.

357. Постройте прямоугольный треугольник так, чтобы гипотенуза была равна данному отрезку, а один из острых углов треугольника — данному углу.

358. Внутри угла hk дана точка A. Через точку A проведите прямую так, чтобы она отсекала на сторонах угла равные отрезки.

359. Постройте точку, равноудаленную от трех сторон треугольника.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Дайте определение перпендикулярных прямых.
2. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой.
3. Докажите теорему о перпендикуляре, проведенном из данной точки к данной прямой.
4. Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой.
5. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.
6. Что называется расстоянием от точки до прямой?
7. Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?
8. Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?
9. Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?
10. Докажите теорему о медиане равнобедренного треугольника.
11. Сформулируйте следствия из теоремы о медиане равнобедренного треугольника.
12. Какая прямая называется серединным перпендикуляром отрезка?
13. Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре отрезка.
14. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о серединном перпендикуляре отрезка.
15. Как построить серединный перпендикуляр данного отрезка?
16. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

17. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве биссектрисы угла.

18. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве биссектрисы угла.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

360. Докажите, что высота AH треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC.

361. Из точки A стороны h угла hk проведен перпендикуляр AH к прямой, содержащей другую сторону угла. Докажите, что: а) если угол hk — острый, то $H \in k$; б) если угол hk — тупой, то $H \in k_1$, где k_1 — луч, дополнительный к лучу k.

362. Пусть AH — высота треугольника ABC. Докажите, что если $AB < AC$, то: а) $BH < CH$; б) $\angle CAH > \angle BAH$.

363. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

364. Докажите, что в любом треугольнике сумма трех высот меньше периметра треугольника.

365. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к боковой стороне, больше половины боковой стороны.

366. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

367. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 60°$. Докажите, что $CB < 2AD$.

368. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы при вершинах равных углов равны.

369. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$. Докажите, что $AE = A_1E_1$, где E и E_1 — середины биссектрис BD и B_1D_1 данных треугольников.

370. Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведенных из вершин острых углов,— на продолжениях сторон.

371. Докажите, что в остроугольном треугольнике основания всех высот лежат на сторонах треугольника и не совпадают с его вершинами.

372. Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре какой-либо стороны? Ответ обоснуйте.

373. Докажите, что если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника проходят через вершины треугольника, то треугольник — равносторонний.

374. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены соответственно точки P и Q так, что $AP=AQ$. Отрезки PC и BQ пересекаются в точке O. Докажите, что: а) треугольник BOC — равнобедренный; б) прямая AO является серединным перпендикуляром основания BC.

375. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если острый угол и противолежащий катет одного треугольника соответственно равны острому углу и противолежащему катету другого треугольника.

376. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ и $BH=B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

377. Докажите, что в равностороннем треугольнике все высоты равны.

378. Докажите, что если сторона и проведенные к ней высота и медиана одного треугольника соответственно равны стороне и проведенным к ней высоте и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

379. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются в некоторой точке. Докажите, что биссектриса третьего угла также проходит через эту точку.

380. Объясните, как разделить данный отрезок на восемь равных частей, пользуясь циркулем и линейкой.

381. Постройте прямоугольный треугольник так, чтобы один катет был равен данному отрезку, а другой был вдвое меньше этого отрезка.

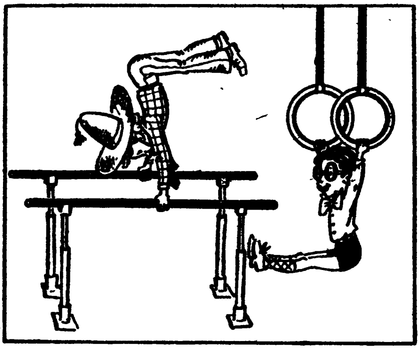
382. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

383. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и внешнему углу при вершине острого угла.

384. Даны три точки A, B, C и отрезок PQ. Постройте точку M такую, что $AM=BM$ и $CM=PQ$.

Глава V

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



§ 1. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

35. Определение параллельных прямых. Мы знаем, что две прямые на плоскости либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Определение. ***Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.***

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \| b$. На рисунке 145, *а* изображены параллельные прямые a и b. В геометрии часто рассматриваются также параллельные отрезки. Два отрезка называются *параллельными,* если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 145, *б* отрезки AB и CD параллельны ($AB \| CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 145, *в*), отрезка и луча, двух лучей (рис. 145, *г*).

36. Признаки параллельности двух прямых. Прямая c называется *секущей* по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух разных точках (рис. 146). При пересечении пря-

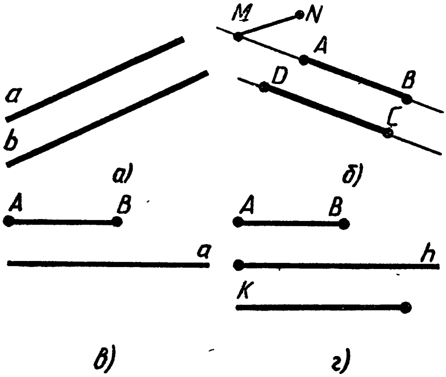


Рис. 145

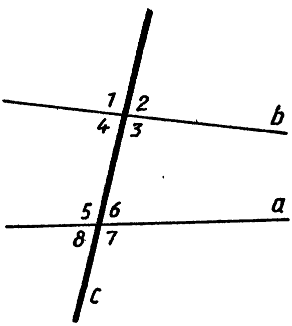


Рис. 146

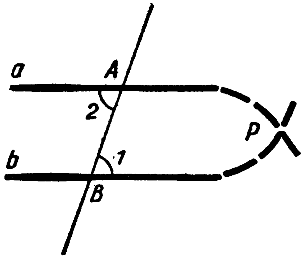


Рис. 147

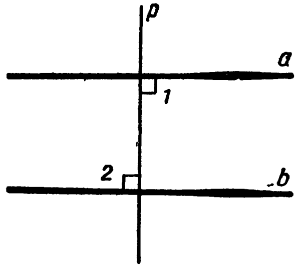


Рис. 148

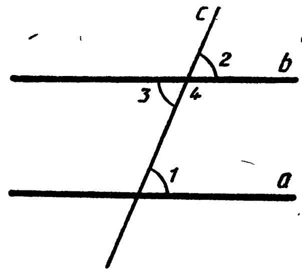


Рис. 149

мых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке 146 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 147). Докажем, что $a \parallel b$. Предположим, что это не так. Тогда прямые a и b пересекаются в некоторой точке P. Один из данных накрест лежащих углов (угол 1 на рисунке 147) является углом треугольника ABP, а другой (угол 2) — внешним углом этого треугольника. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 2 > \angle 1$. Но это противоречит условию $\angle 1 = \angle 2$. Значит, наше предположение неверно, и, следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны. Теорема доказана.

Следствие. *Две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.*

Действительно, пусть прямые a и b перпендикулярны к прямой p (рис. 148). Тогда накрест лежащие углы 1 и 2, образованные при пересечении прямых a и b секущей p, равны (поскольку каждый из этих углов прямой), поэтому $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 149). Так как углы 2 и 3 вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (рис. 149). Так как углы 3 и 4 смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Практические задания

При выполнении заданий 385 и 386 для проверки параллельности прямых измерьте транспортиром нужные углы и воспользуйтесь признаками параллельности двух прямых.

385. Начертите произвольный треугольник ABC, отметьте середины M и N сторон AB и AC и проведите прямую MN. Убедитесь в том, что эта прямая параллельна прямой BC.

386. Начертите произвольный четырехугольник $ABCD$. Отметьте середины всех его сторон и соедините их последовательно. Убедитесь в том, что противоположные стороны получившегося четырехугольника параллельны.

387. Пользуясь признаками параллельности двух прямых, с помощью транспортира и линейки проведите две параллельные прямые.

Вопросы и задачи

388. На рисунке 150 $\angle 1 = \angle 3$. а) Выпишите все пары накрест лежащих углов и докажите, что в каждой паре углы равны. б) Выпишите все пары соответственных углов и докажите, что в каждой паре углы равны. в) Выпишите все пары односторонних углов и докажите, что сумма углов в каждой из этих пар равна 180°.

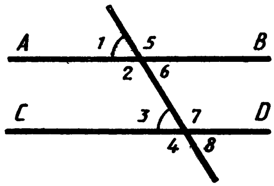


Рис. 150

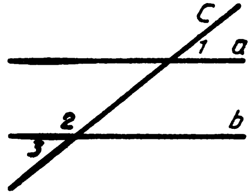


Рис. 151

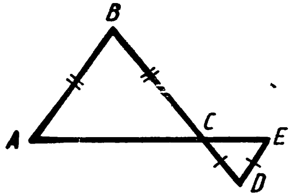


Рис. 152

389. На рисунке 151 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 2 = 143°$; б) $\angle 1 = \angle 3$.

390. На рисунке 152 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

391. На рисунке 153 $AB = BC$, луч AC — биссектриса угла BAD. Докажите, что $BC \parallel AD$.

392. Отрезки AB и CD, не лежащие на одной прямой, имеют общую середину. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

393. На рисунке 154 $AB = A_1B_1$, $BC_1 = CB_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажите, что: а) $AB \parallel A_1B_1$; б) $AC \parallel A_1C_1$.

394. На рисунке 155 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

395. Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что $KM \parallel AB$.

396. В треугольнике ABC $\angle C = 57°$. На сторонах BA и BC отмечены соответственно точки D и E так, что $\angle BED = 57°$. Докажите, что прямые DE и AC параллельны.

397. В треугольнике ABC угол A равен 40°, а внешний угол BCE равен 80°. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

398. На рисунке 150 $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 1. Докажите, что $AB \parallel CD$.

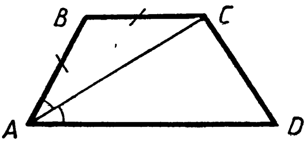


Рис. 153

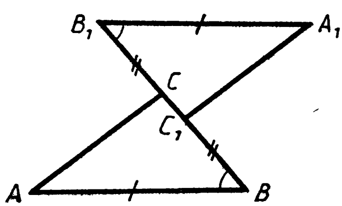


Рис. 154

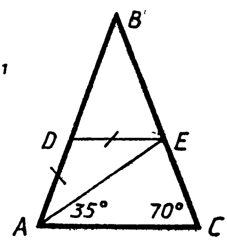


Рис. 155

399. В треугольнике ABC $\angle A=40°$, $\angle B=70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что $AC \parallel BD$.

§ 2. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

37. Об аксиомах геометрии. Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чем основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений. На основе этих утверждений и доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия. Такие исходные положения называются *аксиомами.*

Некоторые аксиомы были сформулированы еще в первой главе (хотя они не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение: *через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.* Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Это относится, в частности, к аксиомам о наложении и равенстве отрезков и углов. Так, сравнение двух отрезков основано на наложении одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы: *на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.* Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме: *от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*

При доказательстве первого признака равенства треугольников мы накладывали треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы стороны AB и AC угла A совместились соответственно со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 угла A_1, равного углу A. Возможность такого наложения следует из аксиомы: *любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1, и так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.* Как видим, все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Полный список аксиом, или, как говорят, *система аксиом планиметрии,* приведен в конце учебника.

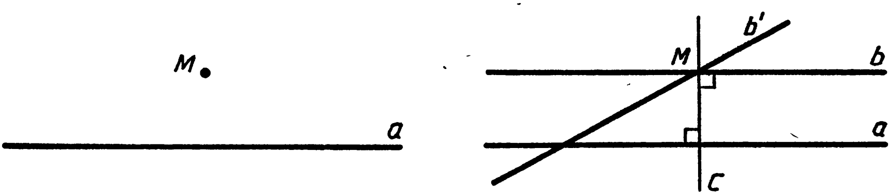
Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путем логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился еще в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого ученого Евклида. Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл *постулатами*) и сейчас используются в курсах геометрии в современной формулировке, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется *евклидовой геометрией*.

Евклид (III в. до н. э.)

В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

38. Аксиома параллельных прямых. Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 156, *а*). Докажем, что *через точку M проходит прямая, параллельная прямой a*. Пусть c — прямая, проходящая через точку M перпендикулярно к прямой a, а b — прямая, проходящая через точку M перпендикулярно к прямой c (рис. 156, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает вопрос: можно ли через точку M провести еще одну прямую, параллельную прямой a? Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки M, то она пересечет прямую a (прямая b' на рисунке 156, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую



а) б)

Рис. 156

Н. И. Лобачевский (1792—1856)

прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать? Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики, начиная с древних времен, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его как следствие из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой. Огромную роль в решении этого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский.

Итак, в качестве еще одного из исходных положений мы принимаем *аксиому параллельных прямых*.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Рассмотрим некоторые следствия из этой аксиомы.

1°. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 157, a). Если бы прямая c

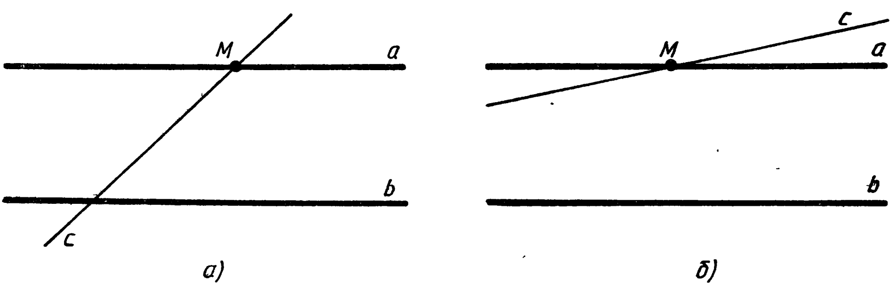


Рис. 157

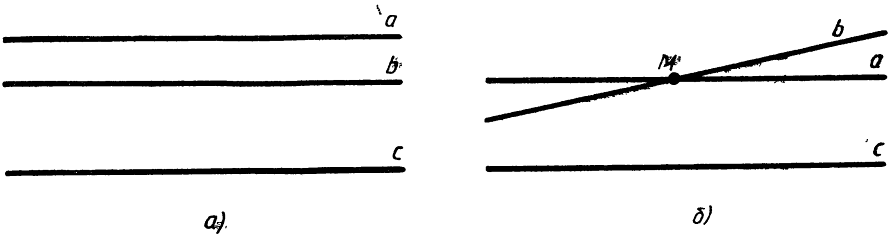


Рис. 158

не пересекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 157, *б*). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

2°. *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 158, *а*). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 158, *б*). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше допущение неверно, а значит, прямые a и b параллельны.

Вопросы и задачи

400. Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

401. Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите возможные случаи.

402. Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

403. Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

404. Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

405. На рисунке 159 $AD \parallel p$, $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

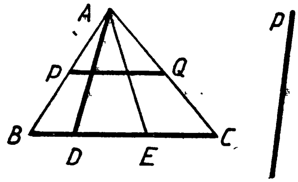


Рис. 159

406. Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

407. Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

§ 3. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

39. Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. В пункте 36 были доказаны три теоремы, выражающие признаки параллельности двух прямых, связанные с парами накрест лежащих, соответственных и односторонних углов. Справедливы и обратные теоремы, которые мы сейчас докажем.

Теорема. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, например, что накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 160).

Допустим, что это не так, т. е. $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно, и $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Следствие. *Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

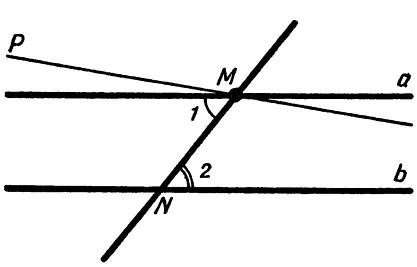


Рис. 160

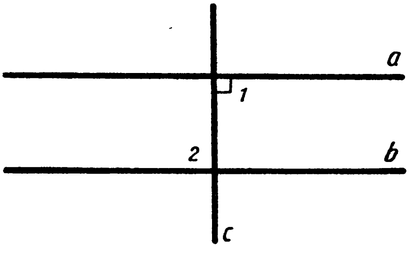


Рис. 161

Пусть $a \parallel b$ и $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 161). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

Теорема. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, например, что соответственные углы 1 и 2 равны (см. рис. 149 на с. 81). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Теорема. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 149 на с. 81). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = \angle 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Теорема доказана.

40. Расстояние между параллельными прямыми. Рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема. ***Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.***

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые. Отметим на прямой a некоторую точку A и проведем из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 162). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

Пусть XY — перпендикуляр, проведенный из точки X к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b се-

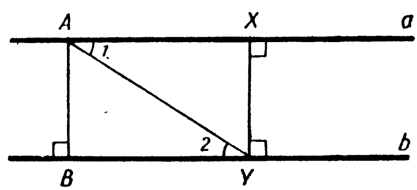
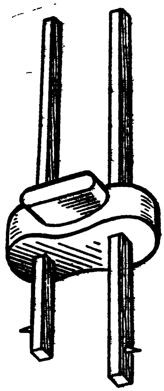


Рис. 162



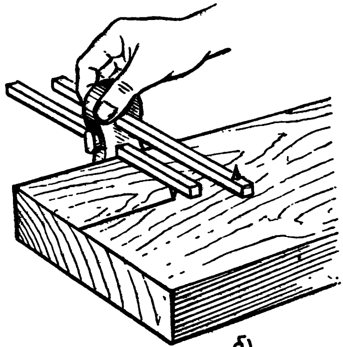


Рис. 163

кущей AY). Следовательно, $XY = AB$. Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, что все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, все время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Замечание. Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: все точки, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной (докажите это утверждение самостоятельно). На этом утверждении основано устройство инструмента, называемого *рейсмусом* (рис. 163, *а*). Рейсмус используется при столярных работах для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска его металлическая игла прочерчивает отрезок, параллельный краю бруска (рис. 163, *б*).

41. Практические способы построения параллельных прямых. Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертежного угольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, сначала нужно приложить чертежный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 164. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, следует добиться того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и провести прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 164 буквами α и β, равны.

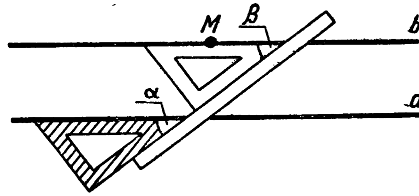


Рис. 164

На рисунке 165 показан способ построения параллельных прямых при помощи *рейсшины*. Этим способом пользуются в чертежной практике.

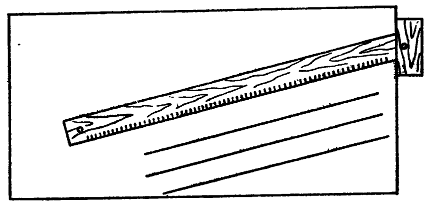


Рис. 165

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется *малка*, представляющая собой две деревянные планки, скрепленные шарниром (рис. 166).

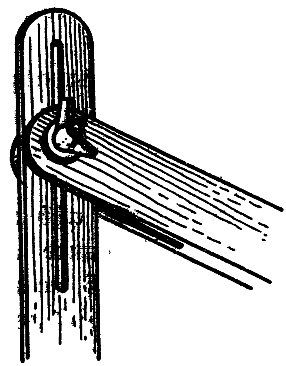


Рис. 166

Вопросы и задачи

408. На рисунке 167 $AC \parallel BD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $MN \parallel BD$.

409. На рисунке 168 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

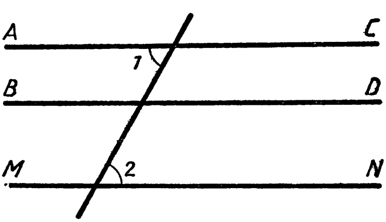


Рис. 167

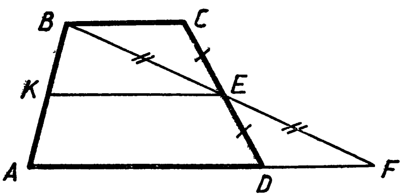


Рис. 168

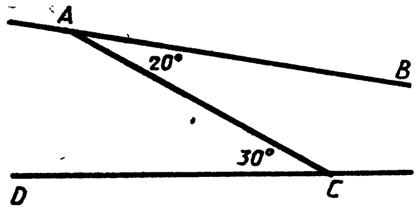


Рис. 169

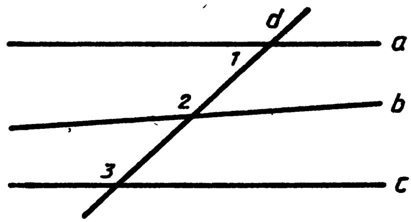


Рис. 170

410. Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

411. Параллельны ли прямые AB и CD, изображенные на рисунке 169?

412. На рисунке 170 прямые a, b и c пересечены секущей d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

413. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если: а) один из углов равен 150°; б) один из углов на 70° больше другого.

414. На рисунке 171 $a \parallel b$ и $c \parallel d$. а) Назовите все углы, равные углу 1. б) Найдите $\angle 7$, $\angle 8$, $\angle 13$, $\angle 14$, если $\angle 5 = 60°$. в) Найдите $\angle 15$, если $\angle 1 = \angle 4$.

415. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

416. На рисунке 172, а и б $l \parallel m$, $k \parallel n$. Найдите углы x, y и z.

417. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

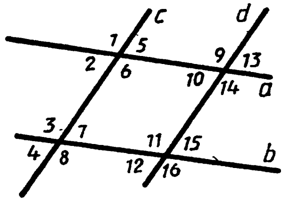


Рис. 171

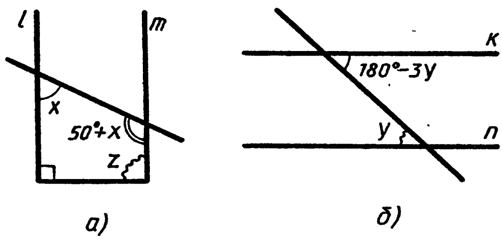


Рис. 172

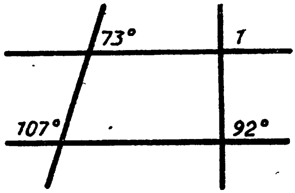


Рис. 173

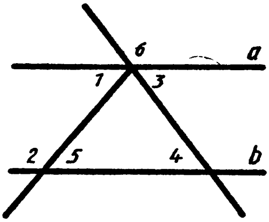


Рис. 174

418. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне, то треугольник равнобедренный.

419. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

420. По данным рисунка 173 найдите $\angle 1$.

421. На рисунке 174: а) $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = 70°$. Найдите $\angle 2$. б) $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 70°$. Найдите $\angle 4$.

422. На рисунке 174 $\angle 1 = 49°$, $\angle 2 = 131°$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 4 + \angle 6 = 180°$.

423. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы соответственных углов параллельны; в) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

424. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Решение. Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$ (рис. 175). Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, значит, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, обра-

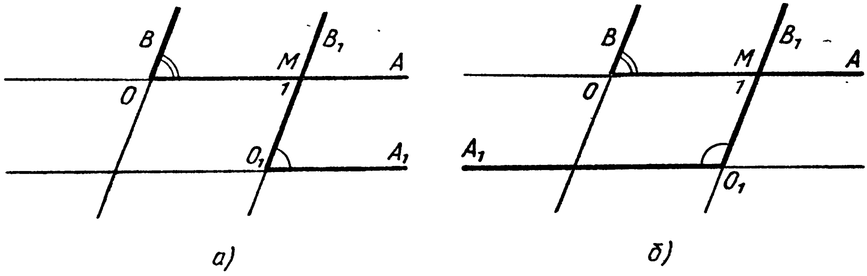


Рис. 175

зованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 175, *а*), равен углу AOB (как накрест лежащие углы).

Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 175, *а*), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 175, *б*). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 175, *а*), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 175, *б*), что и требовалось доказать.

425. На рисунке 176 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

426. Через точку пересечения биссектрис углов B и C треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

427. Через точку O пересечения биссектрис углов B и C треугольника ABC проведены прямые OE и OD, параллельные соответственно сторонам AB и AC (рис. 177). Докажите, что периметр треугольника OED равен BC.

428. Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

429. Даны неразвернутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество точек, лежащих внутри данного угла и удаленных от прямой BC на расстояние PQ?

430. Что представляет собой множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых?

431. Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, а $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудаленной от этих прямых.

432. Что представляет собой множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на данном расстоянии от прямой a?

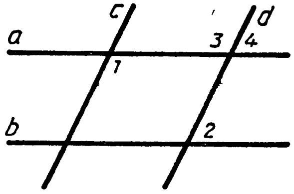


Рис. 176

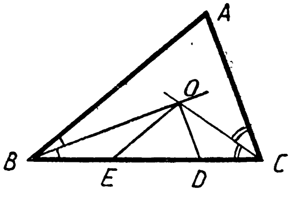


Рис. 177

433. Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

Решение. Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведем через нее прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 178). Затем на одном из лучей прямой b, исходящем из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведем прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p искомая (см. доказательство теоремы п. 40).

Как видно из построения, для любой данной прямой a и для любого данного отрезка AB искомую прямую p можно построить, причем задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 179).

434. Постройте треугольник ABC так, чтобы сторона AB и высота CH, проведенная к этой стороне, были равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A был равен данному углу hk.

Решение. Данные отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk изображены на рисунке 180, *а*.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 180, *б*). Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Поэтому точка C должна лежать на прямой p, параллельной прямой AB и такой, что расстояние между прямыми p и AB равно P_2Q_2.

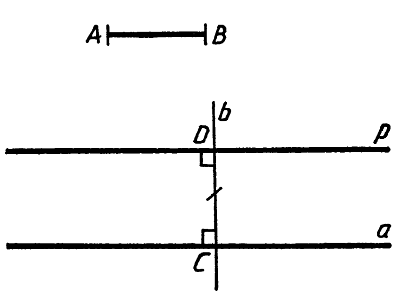


Рис. 178

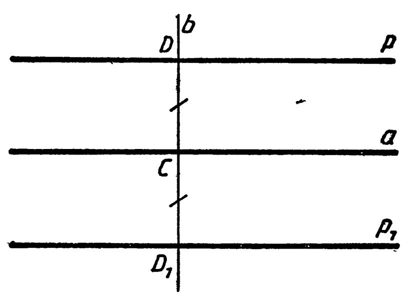


Рис. 179

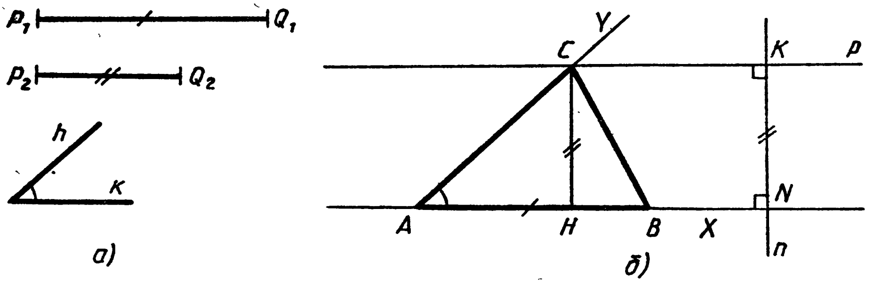


Рис. 180

Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY.

Построение прямой p выполнено на рисунке 180, *б* (см. задачу 433).

Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи:

$$AB = P_1Q_1,\quad CH = P_2Q_2,\quad \angle A = \angle hk.$$

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и угле hk искомый треугольник построить можно. Так как луч AX можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны (объясните почему), поэтому принято говорить, что *задача имеет единственное решение*.

435. Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удаленную от прямой b на расстояние PQ.

436. Постройте треугольник ABC по сторонам AB, AC и высоте BD.

437. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему углу.

438. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

439. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

§ 4. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

42. Теорема о сумме углов треугольника. Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

Проведем через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 181). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4=\angle 1, \qquad \angle 5=\angle 3. \tag{1}$$

Очевидно, что сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной B, т. е. $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$ или $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. Теорема доказана.

Следствие. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.*

В самом деле, пусть $\angle BCD$ — внешний угол треугольника ABC, смежный с углом 3 (рис. 182). Тогда $\angle BCD+\angle 3=180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1+\angle 2)+\angle 3=180°$. Отсюда получаем: $\angle BCD=\angle 1+\angle 2$, что и требовалось доказать.

43. Некоторые свойства прямоугольных треугольников. Рассмотрим некоторые свойства прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

1°. *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.*

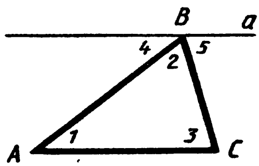


Рис. 181

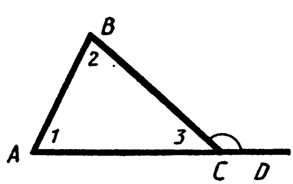
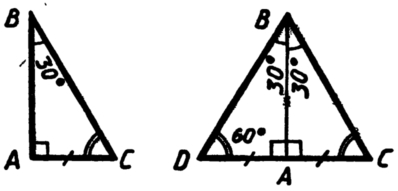
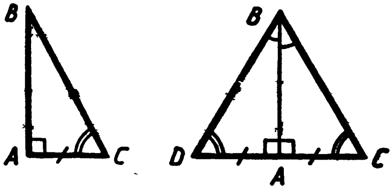


Рис. 182



а) б)

Рис. 183



а) б)

Рис. 184

В самом деле, сумма всех трех углов прямоугольного треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2°. *Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.*

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, в котором $\angle A$ прямой, $\angle B=30°$ (рис. 183, *а*). Докажем, что $AC=\frac{1}{2}BC$.

По свойству 1° $\angle B+\angle C=90°$, поэтому $\angle C=90°-$ $-\angle B=60°$. Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 183, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B=\angle D=60°$, поэтому $CD=$ $=BC$. Так как $AC=\frac{1}{2}CD$, то $AC=\frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

3°. *Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.*

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, в котором $\angle A$ прямой, $AC=\frac{1}{2}BC$ (рис. 184, *а*). Докажем, что $\angle ABC=30°$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 184, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $DC=2AC=BC$, поэтому $\angle DBC=\angle D$ или $2\angle ABC=\angle C$. По свойству 1° $\angle C=90°-\angle ABC$. Таким образом, $2\angle ABC=90°-\angle ABC$, откуда $\angle ABC=30°$, что и требовалось доказать.

44. Уголковый отражатель. В п. 43 мы доказали, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Это свойство лежит в основе конструкции простейшего *уголкового отражателя.* Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

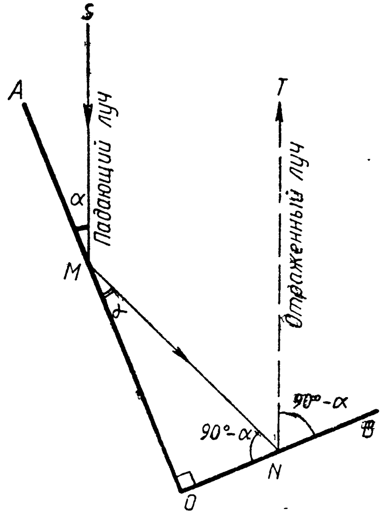


Рис. 185

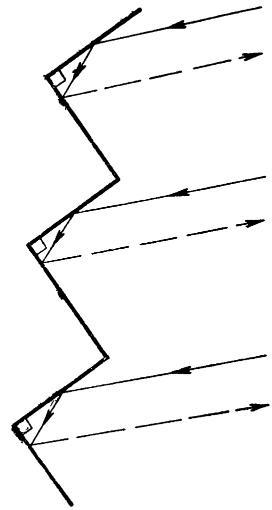


Рис. 186

Задача. *Угол между зеркалами OA и OB равен 90°. Луч света, падающий на зеркало OA под углом α, отражается от него, а затем отражается от зеркала OB (рис. 185). Доказать, что падающий и отраженный лучи параллельны.*

Решение. По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90°-\alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отраженный луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 185, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$. Следовательно, падающий луч SM и отраженный луч NT параллельны (п. 36), что и требовалось доказать.

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, составленных так, что соседние зеркала образуют угол в 90°. На рисунке 186 в виде ломаной линии схематически изображен такой отражатель. Представим себе, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены сплошными линиями со стрелками). Тогда отраженные лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены штриховыми линиями со стрелками). Таким образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, на одной из автоматических станций, запущенных в Советском Союзе на поверхность Луны, был установлен уголковый отражатель специальной конструкции. (Уголковый отражатель, используемый на практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.) С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещен лучом лазера. Отраженные лучи были «возвращены назад» в то место, где находился лазер. Измерив точно время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Вопросы и задачи

440. Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A=65°$, $\angle B=57°$; б) $\angle A=24°$, $\angle B=130°$; в) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$; г) $\angle A=\alpha$, $\angle B=2\alpha$; д) $\angle A=90°$, $\angle B=\beta$; е) $\angle A=60°+\alpha$, $\angle B=60°-\alpha$.

441. Найдите все углы, обозначенные цифрами, на рисунке 187.

442. Найдите углы треугольника ABC, если:

$$\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4.$$

443. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

444. Биссектрисы углов A и B равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$.

445. На рисунке 188 $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что $\angle 3=\angle 4$.

446. Прямая параллельна основанию BC равнобедренного треугольника ABC и пересекает его боковые стороны в точках M и N. Найдите углы треугольника AMN, если: а) $\angle A=72°$; б) $\angle B=37°30'$.

447. На рисунке 189 $CA=CB$, $MN \parallel BC$. Найдите углы треугольника AMN, если:

а) $\angle B=47°$; б) $\angle C=110°$.

448. Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

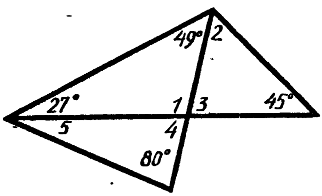


Рис. 187

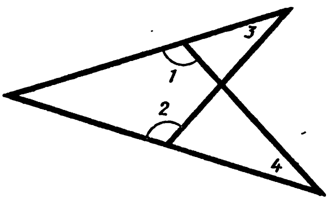


Рис. 188

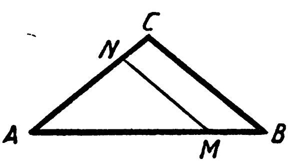


Рис. 189

449. Один из углов равнобедренного треугольника равен α. Найдите два других угла треугольника, если а) $\alpha=40°$; б) $\alpha=60°$; в) $\alpha=80°$; г) $\alpha=100°$.

450. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C=50°$.

451. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A=58°$, $\angle B=96°$.

452. В прямоугольном треугольнике ABC биссектрисы острых углов A и B пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$.

453. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

454. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним, то треугольник равнобедренный.

455. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

456. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115°. Найдите углы треугольника.

457. Найдите углы равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если AD — биссектриса треугольника, а $\angle ADB=110°$.

458. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

459. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D=54°$.

460. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=30°$, BM — медиана, проведенная к гипотенузе. Докажите, что один из треугольников ABM и MBC равносторонний, а другой — равнобедренный.

461. Высоты, проведенные к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle BMC=140°$.

462. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A=55°$, $\angle B=67°$.

463. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B=112°$.

464. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

465. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC+AB=18$ см. Найдите AC и AB.

466. В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите AD.

467. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

468. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

469. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°.

Р е ш е н и е а) и б). Построим прямой угол hk с вершиной в некоторой точке A и на стороне h отметим произвольную точку B. Затем построим окружность с центром B, радиус которой равен $2AB$. Эта окружность пересечет луч k в некоторой точке C. В прямоугольном треугольнике ABC по построению $AB=\frac{1}{2}BC$, поэтому $\angle C=30°$, $\angle B=60°$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?
2. Что такое секущая? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей.
3. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
4. Докажите, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.
5. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
6. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

7. Какие утверждения называются аксиомами? Приведите примеры аксиом.
8. Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.
9. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
10. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.
11. Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
12. Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
13. Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.
14. Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей: а) соответственные углы равны; б) сумма односторонних углов равна 180°.
15. Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.
16. Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?
17. Какие практические способы проведения параллельных прямых вы знаете?
18. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.
19. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
20. Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
21. Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

470. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Серединный перпендикуляр отрезка AD пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.
471. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая

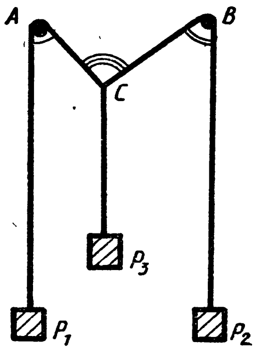


Рис. 190

сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.

472. Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через ролики A и B (рис. 190). Третье тело P_3 подвешено на той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

473. На рисунке 191 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE прямой.

474. По данным рисунка 192 найдите $\angle 1$.

475. На рисунке 193 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

476. Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

477. В треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

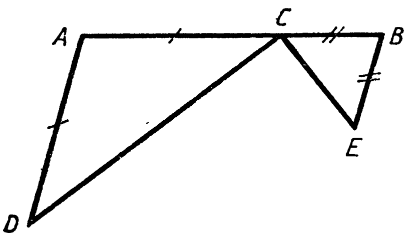


Рис. 191

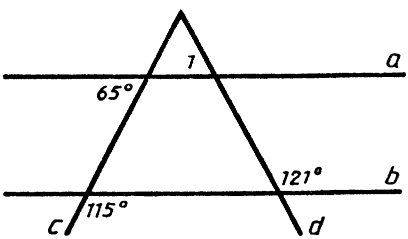


Рис. 192

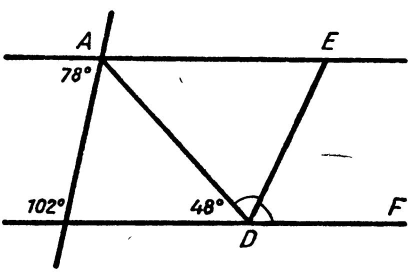


Рис. 193

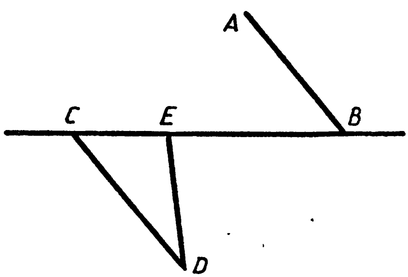


Рис. 194

478. На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC=BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

479. На рисунке 194 $AB \parallel CD$. а) Найдите $\angle BED$, если $\angle ABC=30°$, $\angle CDE=40°$. б) Найдите $\angle ABC$, если $\angle BED=70°$, $\angle EDC=20°$.

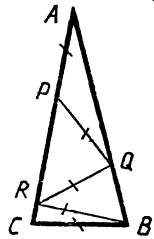


Рис. 195

480*. На рисунке 195 $AB=AC$, $AP=PQ=QR=RB=BC$. Найдите $\angle A$.

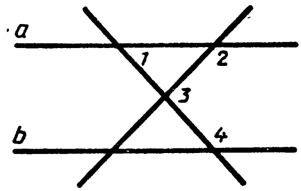


Рис. 196

481. На рисунке 196 прямые a и b параллельны, $\angle 2 : \angle 3 : \angle 4 = 5 : 3 : 4$. Найдите $\angle 1$.

482. В треугольнике ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольников ABD и BDC, если $\angle A=38°$, $\angle B=110°$.

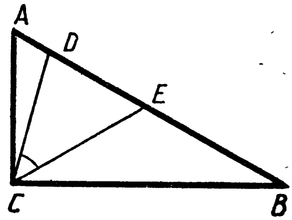


Рис. 197

483. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB. Докажите, что $\angle A=\angle BCD$.

484. Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB=12$ см.

485. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

486. Из вершины угла треугольника проведены биссектриса и высота. Докажите, что угол между ними равен полуразности двух других углов треугольника.

487. На рисунке 197 угол ACB прямой, $AE=AC$ и $BD=BC$. Докажите, что $\angle DCE=45°$.

488. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 150°; б) 135°; в) 165°; г) 75°; д) 105°.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Задачи к главе I

489. Дано конечное число попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения двух прямых проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

490. Дано конечное число точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере еще одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

491. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC=2MN$.

492. Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

493. Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

494. Отрезок длиной 1 см покрыт некоторым количеством отрезков так, что любая его точка покрыта не менее чем одним, но не более чем двумя отрезками. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать несколько отрезков, не имеющих общих точек, так, чтобы сумма их длин была не менее 0,5 см.

495. Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что $\angle hk=90°-\frac{1}{2}(\angle hl-\angle hk)$, а $\angle hl=90°+\frac{1}{2}(\angle hl-\angle hk)$.

496. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

497. Пять прямых пересекаются в одной точке. Найдите сумму тех пяти из десяти образовавшихся углов, которые не имеют общих сторон.

Задачи к главе II

498. Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

499. Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

500. Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 198, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

501. На рисунке 199 $OA = OB$, $AC = BD$, прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Пользуясь этой задачей, укажите способ построения биссектрисы угла.

502. Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

503. Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

504. Три угла и две стороны одного треугольника равны каким-то трем углам и двум сторонам другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

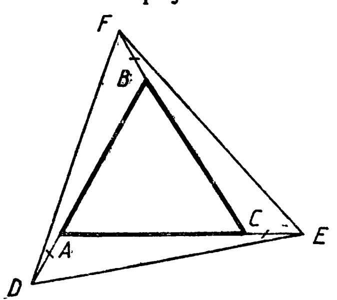


Рис. 198

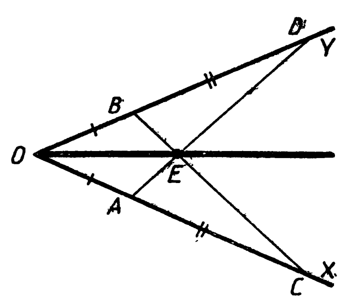


Рис. 199

505. Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задачи к главам III и IV

506. Точки M и N лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что $\angle MAB = \angle ABN$. Докажите, что прямые AM и BN не пересекаются.

507. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

508. Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

509. Даны три точки A, B, C прямой a и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трех отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

510. Стороны BC и AD треугольников ABC и ABD пересекаются. Докажите, что $BC + AD > AC + BD$.

511. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $AB > BC$. Докажите, что $AB > BD$.

512. Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

513. Внутри треугольника ABC взята точка D такая, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

514. В треугольнике ABC, в котором сторона AB больше AC, проведена биссектриса AD. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

515. Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведенная из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

516. Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

517. В разностороннем треугольнике ABC проведен отрезок AM, соединяющий вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

518. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Серединный перпендикуляр стороны AC пересекает прямую BC в точке D такой, что точка B лежит между точками C и D. На прямой AD взята точка E так, что $AE = BD$ и точка A лежит между точками E и D. Докажите, что $\triangle CDE$ — равнобедренный.

519. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведен перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

520. В треугольнике ABC, где $AB < AC$, проведены биссектриса AD и высота AH. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

521. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенных из этой же вершины.

522. Прямая a пересекает отрезок AB и перпендикулярна к нему. Для каждой точки $M \in a$ строится точка N, не лежащая на AB, так, что $\angle NAM = \angle MAB$ и $\angle NBM = \angle MBA$. Докажите, что разность $AN - BN$ не зависит от положения точки M.

523. В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи к главе V

524. Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

525. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, перпендикулярная к соответствующей биссектрисе треугольника. Эти прямые, пересекаясь, образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

526. В каждом из следующих случаев определите вид треугольника: а) сумма любых двух углов больше 90°; б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

527. Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

528. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведены высота AH и медиана AM; $\angle B=\alpha$, где $\alpha<45°$. Найдите угол HAM.

529. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

530. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

531. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка M такая, что $\angle MBC=30°$, $\angle MCB=10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC=80°$.

532. В треугольнике ABC $\angle B=70°$, $\angle C=50°$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N так, что $\angle MCB=40°$ и $\angle NBC=50°$. Найдите угол NMC.

533. На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC с углом B, равным 20°, взяты соответственно точки Q и P так, что $\angle ACQ=60°$ и $\angle CAP=50°$. Найдите угол APQ.

534. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота BD. На гипотенузе AC взята точка P так, что $AB=AP$. Докажите, что луч BP является биссектрисой угла CBD.

Задачи на построение

535. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

536. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB=BC$.

537. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM+MB$ была бы меньше суммы $AX+XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

538. Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудаленную от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

539. Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудаленную от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

540. Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

541. Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

542. Постройте треугольник по стороне, а также высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

543. На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

544. Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

545. Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

546. Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

547. Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

548. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

549. Даны равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

ОБ АКСИОМАХ ПЛАНИМЕТРИИ

Напомним, что аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с так называемыми основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, являются понятия точки и прямой. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Можно поэтому сказать, что основные понятия как бы определяются аксиомами. Используя основные понятия и аксиомы, мы даем определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

Отметим, что не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, были приведены в нашем учебнике — для упрощения изложения некоторые из них мы не формулировали, хотя ими и пользовались. Здесь мы приведем все аксиомы планиметрии.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки**.

2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

3. *Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Для точек, лежащих на одной прямой, мы использовали понятие «лежать между», которое относим к основным поня-

---

* Такие понятия, как «принадлежность», «множество», «число» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

тиям геометрии. Свойство этого понятия выражено в следующей аксиоме.

4. *Из трех точек прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.*

Подчеркнем, что, говоря «точка B лежит между A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит между C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A), или точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

5. *Каждая точка O прямой разделяет ее на две части, называемые дополнительными лучами, так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.*

При этом точка O не лежит ни на одном из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, содержащая точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. *Каждая прямая a разделяет плоскость на две части так, что любые две точки одной и той же части лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных частей лежат по разные стороны от прямой a.*

Перейдем к аксиомам, связанным с понятием наложения и равенства фигур. В главе I мы определили равенство геометрических фигур, используя понятие наложения. При этом мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура (т. е. все ее точки) может перемещаться. Но геометрические фигуры не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложение геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Понятие наложения относится в нашем курсе к основным понятиям геометрии. Определение этого понятия не дается, а свойства наложения выражаются в аксиомах. Сформулируем эти аксиомы.

7. При наложении каждая точка плоскости сопоставляется одной определенной точке плоскости.

Для упрощения формулировок остальных аксиом о свойствах наложений введем понятие равенства фигур. Для этого заметим, что согласно аксиоме 7 при наложении каждой точке всякой фигуры сопоставляется некоторая точка плоскости. Поэтому самой фигуре сопоставляется какая-то определенная фигура. Если существует наложение, при котором фигуре Φ сопоставляется фигура Φ_1, то говорят, что фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ_1 или что фигура Φ равна фигуре Φ_1. Приведем теперь остальные аксиомы о свойствах наложений.

8. *Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.*

9. *На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C такая, что отрезок AB равен отрезку OC.

10. *От любого луча в данную сторону можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*

11. *Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами:*

1) *так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1;*

2) *так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.*

12. *Любая фигура равна самой себе.*

13. *Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ.*

14. *Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.*

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадет с B либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы предполагаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так.

15. *При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.*

Кроме того, справедлива аксиома существования отрезка данной длины.

16. *Для любого положительного числа существует отрезок, длина которого при выбранной единице измерения отрезков выражается этим числом.*

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

17. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (попробуйте провести такое доказательство самостоятельно). От различных систем аксиом требуется лишь, чтобы они были эквивалентны, т. е. приводили бы к одним и тем же выводам.

Систему аксиом, отличную от принятой в нашем учебнике, можно найти, например, в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» — М.: Просвещение, 1987. В отличие от нашей системы аксиом основными понятиями в курсе геометрии А. В. Погорелова, наряду с понятиями точки, прямой и «лежать между», являются длина отрезка и градусная мера угла. В нашем же курсе основным понятием является понятие наложения, а длина отрезка и градусная мера угла вводятся с помощью этого понятия. Еще одна система аксиом рассматривается в учебнике А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика «Геометрия: Пробный учебник для 8 класса средней школы» — М.: Просвещение, 1986. В этой системе аксиом одним из основных понятий является понятие отрезка, а прямая определяется с помощью отрезков.

Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимы, т. е. ни одну из них нельзя было бы вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Однако для упрощения изложения мы приняли его в качестве аксиомы.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

5. Три точки или одна точка. **6.** Четыре прямые. **7.** Шесть прямых. **21.** а) Лучи MN и MK; б) лучи OA и OB, лучи OC и OD. **22.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) да. **23.** KM и KN. **24.** а) Да; б) да. **25.** а), в), е); на рисунке в) угол развернутый. **26.** Шесть углов. **34.** $OA<OB$. **35.** $OB<OA$, $OC>OA$, $OB<OC$. **36.** а) Да; б) нет. **37.** а) B, C и D; б) BD и AE; в) CE. **38.** $\angle AOB<\angle AOC$. **39.** а) Да; б) нет. **40.** а) Лучи OB, OD, OC; б) $\angle BOD$, $\angle AOE$. **43.** $CD=6$; $EF=4$, $PQ=3$, $AB=2$. **47.** Да. **49.** 8,3 см. **50.** 102 мм; 10,2 см. **51.** а) 3,5 см; б) 36 мм. **52.** 14,5 см. **53.** 16 см. **54.** 14 см. **55.** 25,5 см или 1,5 см. **56.** 9 см или 23 см. **58.** $AC=BD$. **59.** а) $AC=1$ см, $CB=1$ см, $AO=0{,}5$ см, $OB=1{,}5$ см; б) $AB=6{,}4$ м, $AC=3{,}2$ м, $AO=1{,}6$ м, $OB=4{,}8$ м. **60.** 10,5 см; если точка O не лежит между точками A и B, то искомое расстояние равно 1,5 см. **61.** $\frac{a}{2}$. **62.** 4 см. **63.** $BD=47$ см, $DA=17$ см. **64.** 480 км. **69.** Нет. Построение невозможно, когда угол AOB тупой или прямой. **71.** $\angle AOB<\angle AOD$. **75.** Да. **78.** а) 121°; б) 54°; в) 121°2′; г) 86°8′. **79.** 48°. **80.** 85°. **81.** 81°. **82.** Шесть углов; $\angle EAC=\angle DAB$. **84.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет. **85.** 60°. **86.** 160°. **87.** Нет. **89.** а) 69°; б) 90°; в) 165°; г) 1°. **92.** а) 70° и 110°; б) 150° и 30°; в) 113°39′ и 66°21′. **93.** а) 135° и 45°; б) 100° и 80°. **94.** 106°. **95.** Да. **97.** а) $\angle 4=\angle 2=117°$, $\angle 1=\angle 3=63°$; б) $\angle 1=\angle 3=43°27'$, $\angle 2=\angle 4=136°33'$. **98.** а) Острыми; б) прямыми; в) тупыми. **99.** а) 57°, 57°, 123°, 123°; б) 40°, 40°, 140°, 140°. **100.** а) $\angle 2=\angle 4=110°$, $\angle 1=\angle 3=70°$; б) $\angle 2=\angle 4=135°$, $\angle 1=\angle 3=45°$; в) $\angle 1=\angle 3=75°$, $\angle 2=\angle 4=105°$. **101.** 180°. **102.** $\angle AOC=120°$, $\angle BOD=130°$, $\angle COE=110°$, $\angle COD=60°$. **103.** Шесть точек. **104.** Пятнадцать углов. **105.** $\angle BAD$, $\angle DAC$ — неразвернутые углы. **106.** $CD=1{,}5$; $EF=1$; $PQ=0{,}75$; $AB=0{,}5$; $KL=0{,}25$. **107.** а) 8 см; б) 16 см. **108.** 16 см или 4 см. **109.** а) Да; б) $AC=BD$. **110.** а) $\frac{5}{8}a$; б) $\frac{7}{8}a$. **111.** а) $\frac{2}{3}m$; б) $\frac{4}{5}m$. **112.** 12 см. **113.** 8,2 см. **114.** а) 75°; б) 98°30′. **115.** 85° или 15°. **116.** 30° или 90°. **117.** 148°, 79°, 120°, 88°. **118.** а) 67°30′ и 112°30′; б) 72°30′ и 107°30′. **119.** 90°.

Глава II

124. 75 см. **125.** $BC=3$ см, $CD=7{,}6$ см, $BD=6{,}2$ см. **126.** 12,7 см и 17,3 см. **127.** $AB=12{,}5$ см и $BC=15$ см. **128.** 10 см, 20 см и 20 см. **129.** 6 см. **130.** Нет. **131.** Нет. **132.** а) $MN=7$ см, $NP=5$ см, $PM=3$ см, $\angle M=38°13'$,

$\angle N=21°47'$, $\angle P=120°$; б) $MN=21$ м, $NP=30$ м, $PM=37$ м, $\angle M=54°11'$, $\angle N=91°16'$, $\angle P=34°33'$. **135.** Четыре треугольника. **136.** б) $\angle A=42°$, $\angle C=47°$. **138.** б) $BD=5$ см, $AB=15$ см. **139.** б) $AB=14$ см, $BC=17$ см, $CA=23$ см. **140.** б) 110°. **145.** $DB=15$ см, $DE=27$ см. **146.** $DM=11$ см, $MP=19$ см. **153.** 13 см. **159.** 50°. **168.** 20°. **177.** Две точки. **181.** 90°. **182.** 29 см. **195.** Указание. Сначала построить биссектрису данного угла. **197.** $AB=4$ см, $AC=5$ см, $BC=6$ см. **198.** 7 см, 5 см и 5 см. **199.** 48 см. **200.** 6,5 см. **201.** а) Верно; б) неверно; в) верно. **212.** Указание. Сначала доказать, что $\angle COM=\angle DON$, провести луч ON_1, дополнительный к лучу ON, и рассмотреть углы COM и CON_1. **216.** 40°. **217.** Указание. Рассмотреть треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, где точки D и D_1 такие, что M и M_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. **218.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle BOC=\triangle EOD$, а затем, что $\triangle ABO=\triangle FEO$.

Глава III

228. а) 107°, 131°; б) 90°, 19°; в) 152°30′, 169°45′. **229.** а) 64°; б) 55°. **230.** а) 18°30′, 18°30′, 143°; б) 54°, 54°, 72°. **231.** Может быть 34°. **232.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да. **233.** Нет, да, да, нет. **234.** а) Нет; б) нет; в) да. **237.** Нет. **238.** 180°. **242.** $\angle C<\angle A<\angle B$. **243.** а) $\angle C>\angle A>\angle B$; б) нет. **244.** $BC>AC>AB$. **252.** 5 см. Указание. Предварительно доказать, что треугольник ACD — равнобедренный. **254.** 24 см. **255.** $\angle ABC=90°$. **257.** а) Нет; б) нет. **258.** Сторона, равная 10 см. **259.** а) 5 см или 3 см; б) 8 см; в) 10 см. **260.** 29 см и 29 см. **261.** 7 см, 7 см и 11 см. **262.** Указание. Применить теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника к треугольникам AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1, а затем полученные неравенства почленно сложить. **270.** Один угол острый, а четыре — тупые. **271.** Один угол прямой, а четыре — тупые. **272.** а) 105°, 37°30′, 37°30′; б) 90°, 45°, 45°; в) 38°, 96°50′, 45°10′. **273.** Указание. Рассмотреть точку пересечения прямых BM и AC и воспользоваться теоремой о внешнем угле треугольника. **274.** Указание. Пусть в треугольнике ABC $AC>AB$, а AM — данный отрезок. Учесть, что в треугольнике ACM $\angle C<\angle M$. **277.** Указание. Воспользоваться задачей 276. **278.** 8 см. Указание. Предварительно доказать, что треугольник ACD — равнобедренный. **279.** 2 дм. **280.** Указание. Продолжить отрезок BM до пересечения с AC в точке B_1 и применить теорему о неравенстве треугольника к треугольникам ABB_1 и B_1MC. **281.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **282.** Указание. Утверждение доказать методом от противного, применив теорему о неравенстве треугольника.

Глава IV

291. 46°. **292.** б) 37°30′. **294.** Указание. Воспользоваться задачей 293. **295.** Указание. а) Допустить, что $HM_1\neq HM_2$, и воспользоваться задачей 293; б) допустить, что $HM_1>HM_2$ или $HM_1=HM_2$, и воспользоваться задачей 293. **296.** 8 см. **297.** 14 см. **298.** На середине отрезка, соединяющего основания перпендикуляров, проведенных из точек A и B к прямой a, где A и B — населенные пункты, a — дорога. **304.** б) 8 см. **305.** 10 см или 6 см. **306.** 96°. **307.** Указание. Доказать, что $\triangle BOA = \triangle DOC$. **309.** 1,7 см, 3,4 см и 2,3 см. **313.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$. **314.** $\angle B = 30°$, $\angle C = 75°$, $\angle BDC = 90°$. **315.** $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$. **316.** Указание. Сначала доказать, что высота и биссектриса совпадают. **319.** Указание. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BM — его медиана. Сначала построить $\triangle BB_1C$, в котором точка M — середина стороны BB_1. **323.** $AD = 3{,}5$ см, $CD = 5$ см. **324.** 14,6 см. **326.** Указание. Воспользоваться теоремами п. 30. **327.** 9 см. **328.** 35 см. **330.** Указание. Использовать серединный перпендикуляр отрезка AB. **334.** Указание. Отрезок MB пересекается с прямой a в некоторой точке X. Учесть, что $AX = BX$. **335.** Указание. Сначала доказать, что $MA = MB$, а затем воспользоваться обратной теоремой п. 30. **346.** Указание. Сначала доказать, что углы, прилежащие к равным сторонам данных треугольников, равны. **348.** Указание. Воспользоваться теоремой о свойстве биссектрисы угла. **349.** Указание. Сначала доказать, что CM — биссектриса треугольника ABC. **358.** Указание. Сначала построить биссектрису угла hk и воспользоваться задачей 344. **359.** Указание. Воспользоваться теоремой о свойстве биссектрисы угла. **361.** Указание. Доказательство провести методом от противного. **362.** Указание. а) Воспользоваться задачей 295; б) если точка H лежит между точками B и C, то на луче HC отложить отрезок HB_1, равный отрезку HB, и рассмотреть $\triangle AHB_1$. **364.** Указание. Воспользоваться задачей 360. **367.** Указание. Учесть, что в треугольнике ADC $AD > DC$. **370.** Указание. Воспользоваться задачей 361. **371.** Указание. Воспользоваться задачей 361. **372.** Нет. **374.** Указание. а) Предварительно доказать, что $\triangle BPC = \triangle CQB$; б) воспользоваться обратной теоремой п. 30. **376.** Указание. Используя задачу 375, сначала доказать, что $AB = A_1B_1$. **378.** Указание. Воспользоваться задачей 206.

Глава V

388. а) $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 3 = \angle 6$; б) $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$; в) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 6 + \angle 7 = 180°$. **400.** Одну прямую. **401.** Четыре или три прямые. **402.** Да. **406.** Да. **407.** Указание. Доказать методом от противного. **410.** Указание. Доказать методом от противного. **411.** Нет. **412.** $a \parallel c$. **413.** а) Четыре угла по 150°, четыре других угла по 30°; б) четыре угла по 55°, четыре других угла по 125°. **414.** а) $\angle 6$, $\angle 9$, $\angle 14$, $\angle 11$, $\angle 16$, $\angle 3$, $\angle 8$; б) $\angle 7 = 60°$, $\angle 8 = 120°$, $\angle 13 = 60°$, $\angle 14 = 120°$; в) $\angle 15 = 90°$. **416.** $x = 65°$, $y = 45°$, $z = 90°$. **420.** 92°. **421.** а) 110°; б) 70°. **422.** Указание. Сначала доказать, что $a \parallel b$. **425.** $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 135°$. **428.** 2 см или 8 см. **429.** Луч с началом на стороне BA, параллельный стороне BC. **430.** Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них. **431.** Указание. Воспользоваться задачей 430. **432.** Две прямые, параллельные прямой a и расположенные по разные стороны от нее на данном расстоянии. **435.** Указание. Воспользоваться задачей 433. **436.** Указание. Сначала начертить отрезок AC, а затем воспользоваться задачей 433. **437.** Указание. Сначала начертить данный угол, а затем воспользоваться задачей 433. **438.** Указание. Воспользоваться задачей 431. **439.** Указание. Воспользоваться задачей 426.

440. а) $\angle C=58°$; б) $\angle C=26°$; в) $\angle C=180°-\alpha-\beta$; г) $\angle C=180°-3\alpha$; д) $\angle C=90°-\beta$; е) $\angle C=60°$. **441.** $\angle 1=104°$, $\angle 2=59°$, $\angle 3=76°$, $\angle 4=76°$, $\angle 5=24°$. **442.** $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. **444.** 120°. Указание. Воспользоваться задачей 443. **446.** а) 72°, 54°, 54°; б) 105°, 37°30′, 37°30′. **447.** а) 86°, 47°, 47°; б) 110°, 35°, 35°. **448.** а) 36°, 72° и 72°; б) 45°, 45° и 90°; треугольник прямоугольный. **449.** а) 40° и 100° или 70° и 70°; б) 60° и 60°; в) 80° и 20° или 50° и 50°; г) 40° и 40°. **450.** 105°. **451.** 103°. **452.** 135°. **453.** Указание. Сначала воспользоваться свойством углов при основании равнобедренного треугольника. **455.** Указание. Учесть, что внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащий основанию, в два раза больше угла при основании. **456.** 65°, 65°, 50° или 57°30′, 57°30′, 65°. **457.** 73°20′, 73°20′ и 33°20′. **458.** 45°, 45°, 90°. **459.** 27°. **460.** Указание. Воспользоваться равенством: $BC=\frac{1}{2}AC$. **461.** 70°, 70° и 40°. **462.** 122°. **463.** 90°, 39°, 51°. **464.** 17,6 см. **465.** $AC=6$ см и $AB=12$ см. **466.** 12 см. **467.** 18 см. **468.** 30°, 30°, 120°. **472.** Указание. Провести луч, дополнительный к лучу CP_3, и воспользоваться параллельностью прямых CP_3 и AP_1, CP_3 и BP_2. **474.** 59°. Указание. Сначала доказать, что $a\parallel b$. **475.** 48°, 66°, 66°. **476.** Указание. Доказать, что $AN\parallel BC$ и $AM\parallel BC$, и воспользоваться аксиомой параллельных прямых. **479.** а) 70°; б) 50°. **480.** 20°. **481.** 60°. Указание. Пусть $\angle 2=5x$. Тогда $\angle 3=3x$, $\angle 4=4x$. Выразить $\angle 1$ через x. **482.** Углы треугольника ABD: 90°, 38°, 52°; углы треугольника BDC: 90°, 58°, 32°. **484.** 9 см. **485.** 18,5 см. **488.** Указание. Воспользоваться задачей 469.

Задачи повышенной трудности

489. Указание. Доказать методом от противного и рассмотреть ту из точек пересечения данных прямых, которая лежит ближе всех остальных от одной из данных прямых. **490.** Указание. Доказать методом от противного и рассмотреть ту тройку точек A, B, C из числа данных, для которых расстояние от прямой AB до точки C наименьшее. **491.** Указание. Рассмотреть три случая. **492.** $ab=1$. **493.** $\frac{n}{m}$. **494.** Указание. Сначала отбросить каждый такой отрезок, который составляет часть другого; затем, перенумеровав оставшиеся отрезки в порядке их следования, доказать, что сумма длин отрезков либо с четными, либо с нечетными номерами не меньше чем 0,5 см. **495.** Указание. Воспользоваться тем, что $\angle hk+\angle hl=180°$. **496.** Указание. Доказать, что угол ABD — развернутый. **497.** 180°. **500.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников DBF, FCE и EAD. **502.** Могут. **503.** Могут. **504.** Могут. **505.** Указание. Рассмотреть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$, $AB+BC=A_1B_1+B_1C_1$, продолжить их стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD=BC$ и $B_1D_1=B_1C_1$. **507.** Указание. Отложить на луче B_1A_1 отрезок $B_1A_2=AB$; методом от противного доказать, что точки A_1 и A_2 совпадают. **508.** Указание. Соединить один из концов отрезка с вершиной треугольника и воспользоваться задачей 274. **509.** Указание. Предположить, что $DA=DB=DC$, и прийти к выводу, что в одном равнобедренном треугольнике угол при основании тупой. **510.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **511.** Указание. Воспользоваться соотношениями между сторонами и углами треугольника, а также теоремой о внешнем угле треугольника. **512.** Указание. Воспользоваться теоремой о внешнем угле треугольника, а также соотношениями между сторонами и углами треугольника. **513.** Указание. Провести прямую CD и рассмотреть внешние углы треугольников ADC и BDC. **514.** Указание. Пусть C_1 — точка на луче AB такая, что $AC=AC_1$, тогда $\triangle ADC=\triangle ADC_1$. Учесть, что: а) точка C_1 лежит между точками A и B; б) в треугольнике BC_1D угол C_1, равный внешнему углу треугольника ABC при вершине C, больше угла B. **515.** Указание. Пусть ABC — данный треугольник, $AB>BC$, BM — медиана. Отметить точку E такую, что M является серединой отрезка BE, и рассмотреть треугольник ABE. **516.** Указание. Допустить, что треугольник неравнобедренный, и воспользоваться задачей 514. **517.** Указание. Воспользоваться соотношениями между сторонами и углами треугольника. **519.** Указание. Продолжить отрезок BA на отрезок $AD=AC$ и, рассмотрев треугольник DHB, воспользоваться неравенством треугольника. **520.** Указание. Воспользоваться задачами 361 и 514. **521.** Указание. Воспользоваться задачей 514. **522.** Указание. Соединить точки A, B, M и N отрезками, провести перпендикуляры из точки M к прямым AN и BN и доказать, что получаются три пары равных треугольников. **523.** Указание. Воспользоваться свойством перпендикуляра и наклонной. **524.** $90°-\frac{\alpha}{2}$. **526.** а) Остроугольный; б) остроугольный. 527. Указание. Воспользоваться тем, что: 1) в треугольнике против большей стороны лежит больший угол; 2) сумма углов треугольника равна 180°. **528.** $90°-2\alpha$. Указание. Сначала доказать, что $\angle BAM=\alpha$, $\angle HAC=\alpha$. **529.** Указание. Воспользоваться указанием к задаче 528. **531.** 70°. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с прямой BM. Сначала доказать равенство треугольников AOC, AOB и MOC. **532.** 30°. Указание. На отрезке CM отметить точку K так, чтобы $\angle CBK=30°$. Учитывая, что $\triangle CNB$ равнобедренный, доказать, что BN — серединный перпендикуляр отрезка KM. **533.** 80°. **535.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а катет — данной высоте. **536.** Указание. Сначала постройте треугольник OAD, в котором $AD=R$ и $OD=2R$, где R — радиус данной окружности. **537.** Указание. Рассмотреть точку A_1 такую, что прямая a есть серединный перпендикуляр отрезка AA_1, и доказать, что для любой точки X прямой a $AX+XB=A_1X+XB$. **539.** Два, одно или ни одного. **542.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной медиане, а катет — данной высоте. **543.** Два, одно или ни одного. **545.** 4. **546.** Указание. Пусть даны $\angle A$, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, равный его периметру. Построить сначала $\triangle ABH$, а затем $\triangle ABD$, где D — точка луча AH такая, что $AD+AB=PQ$. **547.** Указание. Пусть BC, $AC+AB$, $\angle B-\angle C$ — данные элементы искомого треугольника ABC. На луче, дополнительном к лучу AC, отложить отрезок AA_1, равный отрезку AB. Построить сначала $\triangle CBA_1$. **548.** Указание. Построить сначала треугольник, у которого сторона равна данному периметру, а углы, прилежащие к ней, равны половинам данных углов. **549.** Указание. Сначала доказать, что треугольники A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B равны.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Глава III

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Глава IV

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Глава V

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Левон Сергеевич Атанасян
Валентин Федорович Бутузов
Сергей Борисович Кадомцев
Эдуард Генрихович Позняк

ГЕОМЕТРИЯ

Пробный учебник для 6 класса средней школы

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Младший редактор *Л. Е. Козырева*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *В. В. Новоселова, Н. Т. Рудникова*
Корректор *Т. С. Крылова*

ИБ № 11351

Сдано в набор 27.01.87. Подписано к печати 17.04.87. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная. Усл. печ. л. 8. Усл. кр.-отт. 8,38. Уч.-изд. л. 6,46. Тираж 299 000 экз. Заказ 45. Цена 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.