БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

Ф. Ф. НАГИБИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА

УЧПЕДГИЗ · 1961

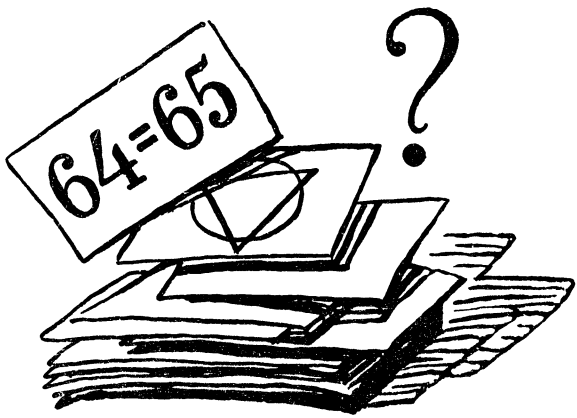
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА

БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

Ф. Ф. НАГИБИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1961

Scan AAW

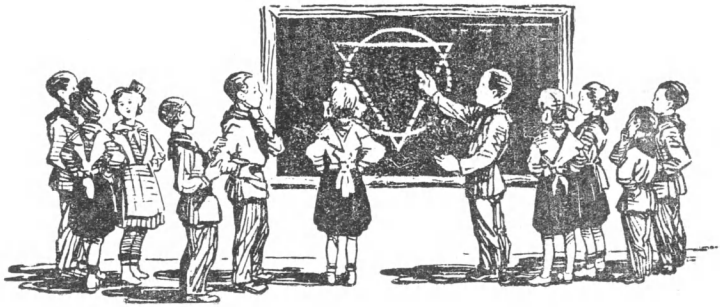
ОТ АВТОРА

В написании этой книги и в подготовке её к печати значительную помощь автору оказали учителя математики некоторых школ г. Кирова (№ 14, 16, 29), студенты физико-математического факультета и сотрудники математических кафедр Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина, а также некоторые учителя и методисты г. Москвы. Всем им и в особенности Э. И. Барташек, Е. С. Березанской, А. И. Жаворонкову, Н. А. Колмогорову, Б. А. Кордемскому, Е. Г. Крейдлину, С. Н. Корневу, С. И. Ошеровой, И. А. Тетерину, В. В. Чудиновских и М. В. Яковкину автор выражает свою признательность.

Второе издание «Математической шкатулки» отличается от первого лишь тем что исправлены замеченные ошибки и опечатки, а также внесены некоторые уточнения.

Рассчитывая продолжить работу над этой книгой, автор надеется получить от читателей «Математической шкатулки» пожелания и предложения по улучшению её, которые следует направлять в адрес редакции математики Учпедгиза: Москва И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, дом 41.

Ф. Нагибин

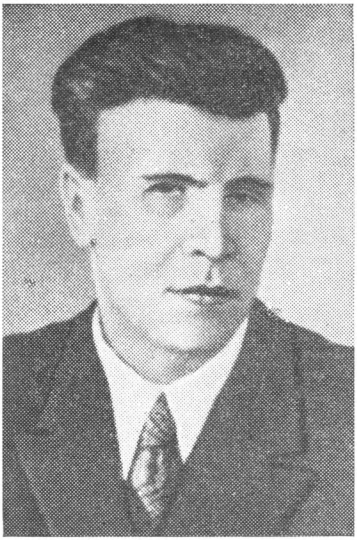


Прочитай!

М. И. Калинин говорил в 1941 году учащимся восьмых, девятых и десятых классов средних школ Ленинского района г. Москвы: «Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики. А кто из вас не мечтает теперь стать моряком, лётчиком, артиллеристом, квалифицированным рабочим в различных отраслях нашей промышленности, строителем, металлургом, слесарем, токарем и т. д., опытным полеводом, животноводом, садоводом и т. д., путейцем, паровозным машинистом, торговым работником и т. д.? Но все эти профессии требуют хорошего знания математики. И потому, если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе»*. Эти замечательные слова М. И. Калинина каждый ученик советской средней школы должен хорошо помнить. Но мало только помнить их. Нужно руководствоваться ими. А руководствоваться ими — это значит упорно и настойчиво овладевать математическими знаниями и навыками, учиться применять их на практике. Без этого невозможно подготовить себя к активному участию в строительстве коммунизма.

---

* М. И. Калинин, О коммунистическом воспитании и обучении, изд. АПН, 1948, стр. 128.



Л. С. Понтрягин

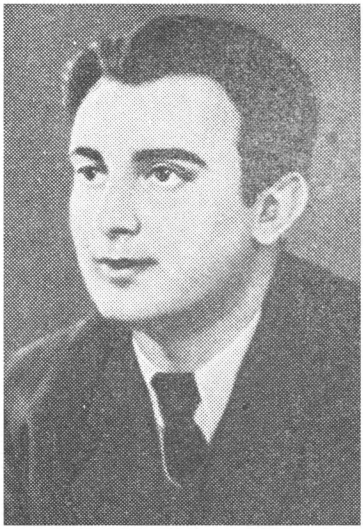
Дело не только в том, что знание математики в большей или меньшей степени необходимо для очень многих специальностей и особенно технических. Советскому Союзу, строящему коммунизм, требуются тысячи высокообразованных математиков, математиков вычислителей и математиков учёных. Вот почему в нашей стране большое внимание уделяется математическому образованию подрастающего поколения.

Математике учат во всех классах средней школы. Уроков математики в каждом классе бывает много. Учителя дают домашние задания. Может быть этого и достаточно? Нет слов, каждый ученик должен хорошо усваивать всё то, что излагает учитель математики на уроках, тщательно выполнять все задания. Но для того, кто хочет быть инженером или математиком, всего этого мало. Необходима ещё самостоятельная творческая работа по математике.

Было бы очень грубой ошибкой думать, что математика — это застывшая, законченная наука, что достаточно усвоить уже известные формулы, правила и теоремы. В действительности, математика, как и другие науки, непрерывно растёт, развивается, обогащается новыми теориями, перестраивается в ответ на новые запросы жизни. В математике не труднее, чем в других науках, добраться до возможности открывать новое. Способные математики начинают самостоятельные исследования, как правило, довольно рано. Многие советские математики начали серьёзную научную работу в 18—20 лет, а перед этим настойчиво изучали математику. Вот несколько примеров.

Один из талантливейших советских математиков — Лев Семёнович Понтрягин родился в 1908 году. Четырнад-

цати лет от несчастного случая он потерял зрение, но это не убило в нём стремления к науке. В 1925 году, шестнадцати лет, Лев Понтрягин окончил среднюю школу. В школьные годы он не только хорошо изучил школьный курс математики, но основательно изучил и многие разделы высшей математики. После окончания средней школы Понтрягин поступил в университет и уже через два года выполнил свою первую научную работу, посвящённую молодой отрасли математики — топологии, а ещё через два года слепой математик блестяще окончил Московский университет, затем он прошёл аспирантуру при нём и в короткое время зарекомендовал себя как выдающийся учёный. Двадцати двух лет он выступил с изложением своих открытий на Всесоюзном математическом съезде. В 1939 году Лев Семёнович был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1941 году за выдающиеся открытия ему была присуждена Сталинская премия.



С. Н. Мергелян.

Один из наиболее молодых советских математиков Сергей Никитович Мергелян, родившийся в 1928 году, начал упорно заниматься математикой ещё в младших классах средней школы. Восьмиклассником он принял участие в математической олимпиаде для десятиклассников и первым решил предложенные задачи. Тогда ему было всего лишь 14 лет (1943 г.). В 1944 году он сдал экзамены за девятый и десятый классы и вскоре поступил в Ереванский университет. Пятилетний университетский курс прошёл Мергелян за три года, а последующий трёхлетний курс аспирантуры при Академии наук СССР он прошёл за полтора года. Первую научную работу Мергелян опубликовал ещё в университетские годы, а в начале 1949 года за выдающуюся науч-

Л. Г. Шнирельман.

ную работу по математике ему была присвоена сразу же степень доктора физико-математических наук. Двадцати лет он стал профессором того университета, в котором совсем недавно учился, а в 1953 году Сергей Мергелян был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. За свои открытия он был удостоен Сталинской премии.

Выдающийся советский математик Лев Генрихович Шнирельман (1905—1938 гг.) математические способности обнаружил уже двенадцати лет и в этом возрасте начал самостоятельные исследования об алгебраических уравнениях. Когда ему исполнилось 16 лет, он поступил в Московский университет и успешно закончил его за два с половиной года. В 1929 году Шнирельман окончил аспирантуру и начал профессорскую работу, а в 1933 году он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

Рано начал заниматься математикой Сергей Львович Соболев (р. в 1908 г). Двадцати четырех лет он был избран членом-корреспондентом, а в 1939 году и действительным членом Академии наук СССР. За выдающиеся открытия Сергей Львович Соболев был удостоен Сталинской премии.

Многие другие наши талантливые математики, так же как Понтрягин, Мергелян, Шнирельман и Соболев, ещё в младших классах школы полюбили математику и с большим увлечением занимались ею.

У нас каждый талантливый человек получает все возможности для своего развития. Родина заботливо выращивает таланты, и они пышно расцветают. Совсем иным было и продолжает оставаться отношение к талантливым людям в капиталистических странах. Вот несколько примеров.

Одним из наиболее выдающихся математиков XIX века был норвежский учёный Нильс Генрик Абель. Родился Абель в 1802 году. Тринадцати лет он был отдан в училище.

Выдающиеся способности к занятиям математикой у Абеля обнаружились, когда ему было всего 16 лет. В этом возрасте он полюбил математику и начал ревностно заниматься ею. После окончания училища, в 1821 году, Абель поступил в университет и сразу же обратил на себя внимание как талантливый математик. В университетские годы он сделал своё выдающееся открытие об алгебраических уравнениях высших степеней. По окончании университета Абель предпринял поездку в Берлин и Париж. В этих городах, где жили наиболее известные математики, он продолжал напряжённые занятия математикой и сделал несколько новых важных открытий. За свою короткую жизнь (27 лет) Абель внёс такой вклад в развитие математики, какой даёт право считать его одним из величайших математиков. Но открытия Абеля не были поняты и оценены его современниками. В 1824 году Абель послал свою работу о неразрешимости в радикалах уравнения 5-й степени в общем виде знаменитому немецкому математику Гауссу, но тот ничего не ответил. Таким же было отношение к Абелю и со стороны французских математиков. Они также не сумели оценить огромное дарование молодого норвежского учёного. Одна из наиболее важных работ Абеля долгие годы пролежала в архивах Парижской академии. Не принесли признания Абелю при жизни и те работы, которые ему удалось опубликовать. Так, непризнанным, без средств к жизни и вернулся Абель на свою родину. Там ему пришлось заняться частными уроками, и лишь за год до смерти он получил скромную университетскую должность. Абель постоянно жил в тяжелой нужде. Материальные лишения губительно отразились на его здоровье, и в 1829

С. Л. Соболев.

Н. Г. Абель.

году он скончался от туберкулёза. Печальна история его жизни.

Но еще печальнее и короче была жизнь другого гениального математика — француза Эвариста Галуа (1811 — 1832 гг.). «Личность этого человека, — писал о нём известный советский математик Н. Г. Чеботарёв, — представляет совершенно исключительное в истории науки явление»*. Два раза пытался поступить Галуа в знаменитую французскую Политехническую школу, но каждый раз он проваливался на вступительных экзаменах. Поступив в Нормальную школу, Галуа уже через год был исключён из неё за выступление против директора. Так и не получил он специального математического образования, но исключительные математические способности позволили ему сделать замечательные открытия. Математическое дарование Галуа проявилось очень рано. Основные результаты своей теории, названной его именем, он получил уже в возрасте 16—18 лет.

За свою очень короткую жизнь (21 год) Галуа заложил основы современной алгебры. Созданная им теория алгебраических уравнений высших степеней оказала очень сильное влияние на развитие не только алгебры, но и всей математики. Идеи и методы, предложенные Галуа, нашли применение и в естествознании, в механике, кристаллографии и других науках.

Занятия наукой Галуа соединял с активным участием в бурной политической жизни тогдашней Франции. Он примыкал к обществу «Друзей народа». За публичные выступления против королевского режима, как ярый респуб-

---

* Н. Г. Чеботарёв, Теория Галуа, ОНТИ, 1936, стр. 43.

ликанец и непримиримый враг короля, Галуа неоднократно подвергался арестам и заключался в тюрьму.

«Если для того, чтобы поднять народ на восстание, нужен труп, то я пожертвую собой», — говорил он*.

Э. Галуа.

Математические открытия Галуа при его жизни не были признаны. Свои работы Галуа два раза представлял в Парижскую академию наук, но даже такие крупные математики того времени, как Коши, Фурье и Пуассон, не могли понять значения его открытий. Работы Галуа в Парижской академии предавались забвению или возвращались оттуда с надписью «непонятно».

Кончилась жизнь Галуа трагически. Он был убит на дуэли, которая, по-видимому, была подстроена политическими врагами Галуа, и наёмными убийцами его были королевские агенты.

Все математические работы Галуа были разобраны и опубликованы лишь спустя 14 лет после его смерти. Это всего несколько десятков страниц, но содержание их стало одним из краеугольных камней фундамента современной математики**.

В дореволюционной России талантливые люди, выходившие из народа, также подвергались преследованиям. Тяжёлой была жизнь выдающегося русского математика Тимофея Фёдоровича Осиповского. Продолжительное время он работал профессором и ректором Харьковского университета. Взгляды Осиповского были передовыми. Он не скрывал своих убеждений, последовательно и настойчи-

* Эварист Галуа. Сочинения, ОНТИ, 1936, стр. 297.

** Прочитай о Галуа книгу: Леопольд Инфельд, Эварист Галуа, изд. «Молодая гвардия», 1958.

М. В. Остроградский.

зо разъяснял их, не боясь затронуть чьё-либо самолюбие, не боясь испортить своё служебное положение и отношения с людьми. Царское правительство не могло мириться со свободомыслием Осиповского, и Тимофей Фёдорович, так много сделавший для процветания Харьковского университета, был отстранён от работы и лишён средств существования. Последние годы его жизни прошли в тяжёлых материальных условиях, в нужде и лишениях.

Преследованиям подвергся и великий русский математик, ученик Осиповского — Михаил Васильевич Остроградский. Как и Осиповский, Остроградский был обвинён в вольнодумстве, в безбожии. Ему было не только отказано в звании кандидата наук, но отнят был и аттестат об окончании Харьковского университета. После четырёх лет обучения в университете Остроградский остался без документа об его окончании, хотя он три раза успешно сдал все требующиеся экзамены*.

Подвергался преследованиям и такой гениальный русский математик, как Николай Иванович Лобачевский. Ещё в студенческие годы Лобачевский за свои убеждения многократно подвергался различным взысканиям. Университетское начальство за проявленные Лобачевским признаки безбожия, собиралось исключить его из Казанского университета и отдать в солдаты. И только решительное заступничество профессоров, занимавшихся с Лобачевским, спасло его от грозившей ему страшной участи. Позднее, когда Лобачевский сделал своё гениальное открытие, когда он опуб-

* Б. В. Гнеденко, Михаил Васильевич Остроградский, Гостехиздат, 1952.

ликовал несколько работ, посвящённых открытой им новой геометрии, его научный подвиг всё же не был оценён. Замечательные идеи Лобачевского не получили признания. Больше того, открытие Лобачевского было осмеяно, над ним издевались. Лобачевского унижали и оскорбляли. И когда в 1893 году, через 37 лет после смерти Лобачевского, Казанский университет обратился в министерство просвещения с просьбой разрешить отпраздновать столетие со дня рождения Лобачевского, министерство запросило университет: кто такой Лобачевский и какие научные заслуги он имеет. Не прекратились преследования Лобачевского и в последние годы его жизни. После всего того, что он сделал для Казанского университета, для народного образования, для науки, его, ещё полного сил, энергии и новых замыслов, уволили «на покой», как если бы он был дряхлым стариком. Тяжелее удара нельзя было нанести. Он одновременно был уволен и от должности профессора, и от должности ректора университета. Это было оскорбительно грубое отстранение заслуженного учёного от участия в делах того университета, которому он посвятил всю свою жизнь. Насильственное отстранение от деятельности в университете и вызванное этим ухудшение материального положения подорвали здоровье Лобачевского. Он ослеп и вскоре умер.

Н. И. Лобачевский.

Таких примеров можно было бы привести больше. Они говорят о том, что капитализм душит таланты, выходящие из народа. У нас же в стране в наше время для талантов открыты все дороги и пути. И как нам не радоваться этому! И как не отвечать на заботу Родины прославлением её успехами в науке и труде. Вот почему наши ученики, заинтересовавшиеся математикой, не должны терять времени. Ма-

тематикой надо упорно заниматься с младших классов. Времени и сил для этого не следует жалеть.

Часто думают, что для занятий математикой необходимы особые способности. Так ли это? Практика обучения математике в средних школах показывает, что это не так. Обычных средних способностей вполне достаточно для того, чтобы ученик, при правильном руководстве им, сознательно усвоил математику, преподающуюся в средней школе. Математические способности нужны для тех, кто посвятит всю свою жизнь математике. Какие же это способности? Иногда думают, что успех в математике основан на простом запоминании большого числа правил, формул, теорем и т. д. Конечно, хорошая память для занятий математикой нужна, но очень многие выдающиеся учёные-математики никакой особой памятью не обладали и именно занятия математикой помогали им развивать память. Значительно важней, чем память, для занятий математикой — умение находить удачные пути тождественных преобразований буквенных выражений, решения уравнений, задач и тому подобное. Очень важно также умение пользоваться геометрической наглядностью при изучении различных вопросов математики, при решении разнообразных задач (графические иллюстрации, графики и т. д.). Но особенно ценно для всех желающих заниматься математикой развитое логическое мышление, умение правильно, обоснованно и последовательно рассуждать. Все эти способности, необходимые для математиков, не даются человеку готовыми при рождении. Они развиваются и крепнут в ходе творческого изучения математики. Нужно только любить эту науку и упорно изучать ее. Прав известный советский математик А. Я. Хинчин, писавший, что «... в математике (как, вероятно, и во всякой другой науке) усвоение всего действительно ценного и значительного требует напряжённых усилий». Ещё больше усилий требует научное творчество в математике. Способности для специальных занятий математикой необходимы, но не достаточны. Математический талант — это прежде всего напряжённый, хорошо организованный труд. Помни об этом!

Часто говорят, что математика скучна. Так думают нерадивые ученики и люди, далеко стоящие от математики. Спроси кого-либо из математиков — кажется ли ему математика скучной? Ты услышишь — нет! Математика суха и скучна лишь для тех, кто дальше начатков её не ушёл.

Математика пленяет всех тех, кто достаточно продвинется в её изучении. Недаром выдающаяся русская женщина-математик Софья Васильевна Ковалевская* писала: «Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, смешивают её с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего времени** говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе». Даже об арифметике два с половиной века тому назад один из первых русских математиков — Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739 гг.) писал, что это «...художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее». [На рисунке 1 изображен титульный (заглавный) лист книги А. Ф. Магницкого «Арифметика»]. Даже в отдалённом прошлом у нас находилось немало людей — «числолюбцев», увлекавшихся решением арифметических и геометрических задач. С тех пор в математике очень многое изменилось, она расцвела пышным цветом. И в наши дни, пожалуй, не найдётся ни одного школьника, заинтересовавшегося математикой, который не мог бы не согласиться с такими словами талантливого советского математика Г. Н. Чеботарёва — «В математике красота играет громадную роль».

С. В. Ковалевская.

В этой книге собраны разнообразные задачи для учащихся V—VIII классов Многие из них в своё время печатались

* Прочитай о С. В. Ковалевской книгу: Л. Воронцова, Софья Ковалевская, изд. «Молодая гвардия», 1957.

**Имеется в виду выдающийся немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815—1897 гг.), у которого С. В. Ковалевская училась.

ТЧАНІЕМЪ
ОУЧЕНІЕМЪ
ГЕОМЕТРІА
АСТРОНОМІА
ОПТИКА
АРІѲМЕТІКА
МУЗЫКА
ГЕОГРАФІА
ОУТОПІКИ
АРХІТЕКТУРА
АРІѲМЕТІКА ЧТО ДѢЕТЪ:
НАСТОЛПАХЪ ТО ВСЕ ИМѢЕТЪ:
ДѢЕНІЕ
ПОУМНОЖЕНІЕ
ВЫЧИТАНІЕ
СЛОЖЕНІЕ
СЧИСЛЕНІЕ:
АРІѲМЕТІКА ПРАКТІКА
ИЛИ ДѢАТЕЛНАА.
ЧТО ЕСТЬ АРІѲМЕТІКА:
АРІѲМЕТІКА ИЛИ ЧИСЛИТЕЛНИЦА, ЕСТЬ ХУДОЖЕСТВО ЧЕСТНОЕ, НЕЗАВИСТНОЕ, И ВСѢМЪ ОУДОБОПОМЫТНОЕ, МНОГОПОЛЕЗНѢЙШЕЕ, И МНОГОХВАЛНѢЙШЕЕ, ѿ ДРЕВНѢЙШИХЪ ЖЕ И НОВѢЙШИХЪ, ВЪ РАЗНАА ВРЕМЕНА ОБРЕТЕННОЕ, И ИЗЛОЖЕННОЕ.
КОЛИКОУБА ЕСТЬ АРІѲМЕТІКА ПРАКТІКА;
ЕСТЬ СУГУБА
1 АРІѲМЕТІКА ПОЛІТІКА, ИЛИ ГРАЖДАНСКАА
2 АРІѲМЕТІКА ЛОГІСТИКА, НЕ КО ГРАЖДАНСТВУ ТОКМО, НО И К ДВИЖЕНІЮ НЕБЕСНЫХЪ КРУГОВ ПРИНАЛЕЖАЩАА.

Рис. 1.

в различных книгах по занимательной математике, а также на страницах газет и журналов. Но есть в этом сборнике и некоторые новые задачи. Найдутся в нём достаточно интересные задачи и для учащихся старших классов. Есть в нём лёгкие, есть и трудные, «замысловатые» задачи. Короче говоря, эта книга является своеобразной математической «шкатулкой».

«Математическая шкатулка» предназначена прежде всего для наших пионеров. Кому, как не им, быть застрельщиками в распространении интересных математических задач и в решении их!

Как же пользоваться «Математической шкатулкой»? Прежде всего пытайся сам решать понравившиеся тебе задачи. Думай над ними, соображай, ищи возможно более простые и «красивые» решения. Может случиться так, что задача тебе не будет «поддаваться». Тогда загляни в ответы и указания, но не злоупотребляй этим. Если же и указания тебе не помогут, то обратись за помощью к старшим товарищам, к вожатому, а ещё лучше — к твоему учителю. Если ты сам не можешь решить задачу, сильно этим не огорчайся. Конечно, лучше было бы, если бы ты её решил, но уже то полезно, что ты подумал над задачей, испробовал некоторые подходы к решению её. Размышления над задачами, поиски решений оставляют в голове заметные следы, развивают сообразительность, повышают уровень математической подготовки. В математике немало было в прошлом да и сейчас ещё есть не поддающиеся решению задачи. Такими задачами были, например, знаменитые задачи древности: а) при помощи циркуля и линейки разделить любой угол на три равные части; б) пользуясь циркулем и линейкой, построить квадрат, площадь которого была бы точно равна площади данного круга; в) при помощи циркуля и линейки построить ребро такого куба, объём которого был бы в 2 раза больше объёма данного куба. Такова же, например, задача о четырёх красках (см. стр. 49). Учёные, решавшие подобные задачи, часто не в состоянии были дойти до конца, но по дороге они делали замечательные открытия. Всё это не означает, конечно, что, немного подумав над задачей, которая «не выходит», ты можешь бросить её. Нет! Думай, думай и ещё раз думай! Ищи — и найдёшь, а если всё же не найдёшь сам, то тебе помогут другие.

Мало того, что ты сам будешь решать задачи. Втягивай в это своих товарищей. Давай им задачи, помогай находить

решения. Задачи, а потом и решения их можно помещать в стенных газетах, в особых математических бюллетенях, в рукописных журналах. Решением таких задач особенно много надо заниматься на занятиях математического кружка. Полезно проводить конкурсы по решению задач в отряде, в классе или в нескольких параллельных классах, а то и общешкольные. Попроси вожатого и учителя провести школьную математическую олимпиаду и сам помоги им в организации её. Одним словом, втягивай в решение интересных задач своих товарищей, заинтересовывай их, убеждай их в большой от этого пользе. Идёшь ли ты в туристский поход, прогуливаешься ли ты с товарищами, собираешься ли ты в лес или на реку, едешь ли ты в пионерский лагерь, — приготовь несколько интересных задач для размышлений на досуге, и, выбрав время, займись вместе со своими товарищами решением их.

Помни, что в математике самое интересное — это, пожалуй, задачи. Вместе с тем это, пожалуй, и самое трудное. Вот почему тебе следует больше решать задач*. А трудностей не бойся. Не забывай прекрасных слов Карла Маркса: «В науке нет широкой столбовой дороги, и только тот может достигнуть ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам».

---

* Много интересных задач ты найдёшь в получившей широкое распространение книге: Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, Гостехиздат, 1955.

Глава I

АРИФМЕТИКА

Изучите азы науки, прежде чем взойти на её вершины. Никогда не беритесь за последующее, не усвоив предыдущее.

И. П. Павлов

Большие числа (миллион, миллиард и другие)

1. Во сколько раз длина километра больше длины миллиметра?

2. Сколько суток составляет миллион минут?

3. Сколько лет составляет миллион часов?

4. Какое расстояние пройдёт человек, сделав миллион шагов, если средняя длина его шага $\frac{3}{4}$ *м*?

5. Сколько биений сделает сердце человека за 75 лет, если в 1 мин. оно делает в среднем 75 биений?

6. Сколько понадобится времени, чтобы отсчитать миллион перьев, если каждую минуту отсчитывать по 50 перьев и заниматься этим 8 час. в сутки?

7. Сколько потребовалось бы суток, чтобы написать подряд все числа от единицы до миллиона, если на запись каждой цифры расходовать 1 сек. и в сутки писать 8 час.?

8. Сколько квадратных миллиметров содержится в квадратном метре? в гектаре?

9. Сколько в кубическом метре содержится кубических сантиметров? кубических миллиметров?

10. Какой длины получится ряд, если один кубический метр разрезать на кубические миллиметры и уложить их вплотную друг к другу в один ряд?

11. Какой длины получится линия, если кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в одну линию?

12. Капля воды весит в среднем 0,08 *г*. Сколько капель в 1 куб. *м* воды?

13. Может ли человек поднять один кубический метр пробки (удельный вес пробки 0,2)?

14. В 1 *л* морской воды содержится в среднем 0,00001 *мг* золота. Сколько золота содержится в 1 куб. *км* морской воды?

Зависимость между данными числами и результатами действий над ними

15. Найти x, пользуясь зависимостью между компонентами (данными) и результатами действий:

1) $(64 - 10x) : 4 + 11 = 22$;
2) $(12 + 34x) \cdot 56 - 789 = 18\,923$;
3) $(10\,000 - 3333x) \cdot 10\,000 - 9999 = 1$;
4) $24\,960 : [3360 - \frac{300 \cdot (200 - 6x)}{115}] = 8$.

Задачи

Приведённые в этой главе задачи могут решаться учениками V и VI классов, не изучавшими ещё алгебраического способа решения задач (с помощью уравнений). Некоторые из этих задач легко решаются арифметически, другие, например 31, 32, 46, требуют искусственных приёмов. Ученики VII — VIII (и особенно VII) классов могут вернуться к этим задачам и воспользоваться для решения их уравнениями. Это полезно делать, так как основным методом решения задач является метод уравнений. Именно этим методом решения задач тебе и надо особенно хорошо овладеть.

Вместе с тем ученикам VII и VIII классов полезно пытаться решать эти задачи и не применяя уравнений. Дело в том, что арифметику часто называют «точильным камнем» способностей человека. И это до некоторой степени правильно.

16. Во время пионерского похода по родному краю участники его пользуются картой, масштаб которой 1 : 1 000 000. Сколько понадобится времени, чтобы проехать из одного города в другой на велосипедах со скоростью 12 *км* в час если на карте расстояние между этими двумя городами по дороге равно 0,6 *дм*?

17. Пионеры ехали на автомашине из лагеря в город. Когда они проехали $\frac{3}{4}$ пути, автомашина была остановлена для ремонта. Оставшуюся часть пути пионеры проделали пешком, затратив на это времени в 4 раза больше, чем они ехали на автомашине. Во сколько раз быстрей ехали пионеры на автомашине, чем шли пешком?

18. Из толстой железной проволоки в мастерской могут сделать цепь, состоящую из 80 или из 100 звеньев. Если сделать цепь из 100 звеньев, то каждое звено её будет на 5 *г* легче, чем в том случае, если бы цепь сделали из 80 звеньев. Сколько весит проволока?

19. 30 учебников стоят на 3 руб. дороже, чем 40 задачников. Те же 30 учебников стоят на 2 руб. 10 коп. дороже, чем 50 таких же задачников. Сколько стоит один учебник и один задачник?

20. На три склада доставлен груз. На первый и второй склады доставлено 400 *т*, на второй и третий 300 *т*, а на первый и третий 440 *т*. Сколько тонн груза было доставлено на каждый склад в отдельности?

21. Два брата разговорились о том, сколько они скопили денег. Старший говорит младшему: «Дай мне 80 коп., тогда у меня будет денег в два раза больше, чем у тебя». Младший, подумав, ответил: «Нет, у тебя и так больше денег, чем у меня. Лучше ты дай мне 80 коп., тогда денег у нас будет поровну». Сколько денег было накоплено каждым братом?

22. На двух кустах сидели 16 воробьёв. Скоро со второго куста совсем улетели 2 воробья, а затем с первого куста на второй перелетели 5 воробьёв. После этого на каждом кусте оказалось одно и то же число воробьёв. Сколько воробьёв было на каждом кусте вначале?

23. Велосипедист должен попасть в место назначения к определённому сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 *км* в час, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 *км* в час, то опоздает на 1 час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

24. Десять слив весят столько же, сколько три яблока и одна груша, а шесть слив и одно яблоко весят столько же, сколько груша. Сколько слив нужно взять, чтобы их вес был равен весу груши?

25. Рыбак поймал рыбу. Когда у него спросили, сколько весит пойманная рыба, он сказал: «Я думаю, что хвост её весит 1 *кг*, голова весит столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько же весит рыба?

26. Вода при замерзании увеличивается на $\frac{1}{11}$ часть своего объёма. На какую часть своего объёма уменьшится лёд при обратном превращении в воду?

27. Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось $\frac{4}{5}$ того, что уже протекло от начала суток?

28. Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?

29. Когда отцу было 37 лет, то сыну было только 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

30. Два мальчика играли в шашки. Положение первого игрока стало ухудшаться. Пока он обдумывал очередной ход, второй игрок рассматривал доску, на которой стояли шашки. Оказалось, что пустых клеток на доске было втрое больше, чем занятых шашками, и что у него двумя шашками больше, чем у первого игрока. Сколько шашек у каждого игрока было в это время на доске?

31. Ученику, работающему в столярной мастерской, дали доску длиной в 3 *м* и сказали, что надо разрезать её поперёк на 2 части так, чтобы число метров в большей части было бы равно числу дециметров в меньшей. Как этот ученик должен разрезать доску?

32. На дровяном складе имеются берёзовые и сосновые дрова, всего 100 *куб. м* на сумму 340 руб Кубический метр берёзовых дров стоит 4 руб., а сосновых 3 руб. Сколько было на складе берёзовых и сколько сосновых дров?

33. Имеющийся в магазине картофель был развешен в 24 пакета, по 5 *кг* и по 3 *кг*. Вес всех пакетов по 5 *кг* оказался равным весу всех пакетов по 3 *кг*. Сколько было тех и других пакетов?

34. Если на одну чашку весов положить кирпич, то для равновесия на вторую чашку придётся положить гири в 1,5 *кг* и полкирпича. Сколько весит кирпич?

35. На одну чашку весов положили кусок мыла, а на другую $\frac{3}{4}$ такого же куска и ещё $\frac{3}{4}$ *кг*. Установилось равновесие. Сколько весит кусок мыла?

36. На расстоянии 5 *м* друг от друга в один ряд посажено 16 молодых деревьев. Рядом с крайним деревом расположен колодец. Для поливки двух деревьев нужно ведро воды. Какой длины путь придётся сделать, чтобы полить все деревья, пользуясь только одним ведром?

37. Собака погналась за лисицей, находящейся от неё на расстоянии 120 *м*. Через сколько времени собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 *м*, а собака 350 *м* (в среднем)?

38. По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 *км*, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 *км* в час, а скорость второго 5 *км* в час, то второй нагоняет первого. С начала движения до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака, со средней скоростью 8 *км* в час. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за всё это время собака?

39. Яша идёт от дома до школы 30 мин., а брат его Петя 40 мин. Петя вышел из дома на 5 мин. раньше Яши. Через сколько минут Яша догонит Петю?

40. Два грузовика в одно время выехали из пункта *A* в пункт *B*. Достигнув пункта *B*, каждый из грузовиков повернул обратно в *A*. Первый грузовик двигался всё время с одной и той же скоростью, а второй из пункта *A* в *B* двигался со скоростью в 2 раза меньшей, чем первый, но зато обратно из *B* в *A* его скорость была в 2 раза больше скорости первого. Какой грузовик раньше вернётся в пункт *A*?

41. Собака погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 *м* от неё. Скачок собаки равен 2 *м*, скачок лисицы 1 *м*. В то время как лисица делает 3 скачка, собака делает 2 скачка. Какое расстояние должна пробежать собака, чтобы догнать лисицу?

42. Мать для трёх своих сыновей оставила утром тарелку слив, а сама ушла на работу. Первым проснулся старший

из сыновей. Увидев на столе сливы, он съел третью часть их и ушёл. Вторым проснулся средний. Думая, что его братья ещё не ели слив, он съел третью часть того, что было, и ушёл. Позднее всех встал младший. Увидев сливы, он решил, что братья ещё не ели их, а потому съел лишь третью часть лежавших на тарелке слив. Когда пришла домой мать, она насчитала на тарелке 8 слив. Сколько всего слив было вначале?

43. Три хозяйки, живущие в одной квартире, сговорились заготовить поровну для кухонной печи 6 *куб. м* дров. Первая из них заготовила 2,5 *куб. м*, вторая 3,5 *куб. м*, а третья вместо своей доли дров внесла 6 руб. Как хозяйки должны разделить между собой эти деньги?

44. Два охотника решили сообща сварить на костре кашу. Первый дал 400 *г* крупы, а второй 200 *г*. Только они сварили кашу, как подошёл третий охотник. За свою долю каши он внёс 10 коп. Как должны разделить эти деньги между собой первых два охотника?

45. Пять школьников перед началом учебного года пошли в магазин, чтобы купить тетради. Первый из них имел 20 коп., второй 15 коп., третий 5 коп., четвёртый 10 коп., а пятый 20 коп. Сколько тетрадей купили школьники на все имевшиеся у них деньги, если первый и второй вместе за их деньги получили в магазине 21 тетрадь?

46. С рынка возвращались две колхозницы. Одна из них спросила другую: «Что вы продавали?» Спрошенная ответила: «Я продавала цыплят и получилось так, что первому покупателю я продала половину всех цыплят и ещё полцыплёнка, второму — половину оставшихся у меня цыплят и еще полцыплёнка. Третьему покупателю я продала также половину оставшихся после второго покупателя цыплят и ещё полцыплёнка. Больше цыплят у меня не осталось». Сколько же цыплят продала эта колхозница?

47. Из сорока звеньев составлена цепь. Просвет каждого звена 12 *мм*, а толщина звена 3 *мм* (рис. 2). Какую длину имеет эта цепь?

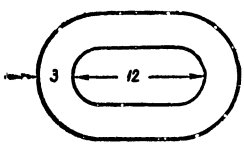


Рис. 2.

48. Поезд проходит мост длиной в 450 *м* за 45 сек., а мимо будки стрелочника — за 15 сек. Вычислить длину поезда и его скорость.

Некоторые старинные задачи*

49. Купил некто трёх сукон 106 аршин; единого взял 12-ю больше перед другим, а другого 9-ю больше перед третьим, и ведательно есть, колико коего сукна взято было. (Из старинной книги «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, начало XVIII века.)

50. Летело стадо гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — отвечает ему вожак стада, — если бы нас было столько, сколько теперь, да ещё столько, да полстолька, да четверть столька, да ещё ты, гусь, с нами, так тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стаде гусей? (Старинная русская задача.)

51. Говорят, что на вопрос о том, сколько у него учеников, древнегреческий математик Пифагор ответил так: «Половина моих учеников изучает математику; четверть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют 3 девы». Сколько учеников было у Пифагора?

52. Некий человек на вопрос, сколько он имеет денег, ответил: аще придастся к моим деньгам толико же, елико имам, и полтолика, и $\frac{3}{4}$, и $\frac{2}{3}$, и убавится из всего 50 рублёв, и тогда будет у меня 100 рублёв, и ведательно есть, колико той человек имяше денег**. (Магницкий.)

53. В клетке находятся фазаны и кролики. У всех животных 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке кроликов и сколько фазанов? (Задача из китайской математической книги «Киу-Чанг», составленной за 2600 лет до н. э.)

54. В некоей единой мельнице были трои жерновы, и едины жерновы в сутки могут смолоти 60 четвертей, а другие в толикое же время могут смолоти 54 четверти, третьи же в толикое же время могут смолоти 48 четвертей, и некий человек даде жита 81 четверть, желал в скорости оно смолоти, и насыпа на все три жерновы, и ведательно есть, в колико часов оно жито смолотися и колико на всякие жерновы достоит мельнику насыпати. (Магницкий.)

---

* В этом параграфе приведено несколько старинных задач. Старинные задачи есть и в некоторых других параграфах этой книги.

** Эта задача, по-видимому, предназначалась для упражнения в вычислениях с дробями. Ответ её неестествен.

55. В городе Афинах был водоём, в который проведены 3 трубы. Одна из труб может наполнить водоём в один час, другая, более тонкая, в два часа, третья, ещё более тонкая, в три часа. Итак, узнай, в какую часть часа все три трубы вместе наполняют бассейн. (Анания из Ширака, армянский математик VII века.)

56. В 336-ведёрное водохранилище всякие 2 часа одною трубою втекает воды 70 вёдер, а другою трубою вытекает 42 ведра. Спрашивается, в какое время то водохранилище наполнится. (Старинный задачник по арифметике Войтяховского.)

57. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет ту же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особо выпьет ту же кадь. (Магницкий.)

58. Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пёс съел овцу в три часа. Сколько бы они скоро, все три — лев, волк и пёс — ту овцу съели, сочти. (Математические рукописи XVII века.)

59. Четыре плотника у некоего гостя (купца) нанялись двор ставити. И говорит первый плотник так: только бы мне одному тот двор ставити, я бы его поставил един годом. А другой молвил: — я бы его поставил в два года. А третий молвил: — я бы его поставил в три года. А четвёртый так рек: — я бы его поставил в 4 года. Все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Сколь долго они ставили, сочти. (Математические рукописи XVII века.)

60. Один путник идёт от града в дом, а ходу его будет 17 дней, а другой путешественник от дому во град тот же путь творяше, может пройти в 20 дней, оба же сии человека пойдоша во един и тот же час от мест своих, и ведательно есть, в колико дней сойдутся. (Магницкий.)

61. Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который перебегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут 1300 сажен; спрашивается, в какое время собака догонит зайца. (Старинный задачник по арифметике Войтяховского.)

62. Одному курьеру приказано прибыть к назначенному месту в 12 дней, к которому он прежде, ехав всякие сутки по 228 вёрст, прибыл в 15 дней. Спрашивается, по сколько вёрст должен он проезжать в сутки, дабы поспеть к тому месту в назначенное время. (Задачник Войтяховского.)

63. Юноша некий пошёл с Москвы к Вологде, и идёт на всякий день по 40 вёрст. А другой пошёл после его на

следующий день, а на всякий день идёт по 45 вёрст. Во сколько дней тот юноша постиг прежнего юношу, сочти. (Математические рукописи XVII века.)

Знаешь ли ты проценты?

64. Пионеры одной дружины совершили туристский поход и провели экскурсию. Все они приняли участие в походе или в экскурсии, но многие из них были и в походе и на экскурсии. В походе участвовало 89% всех пионеров, а в экскурсии 78%. Сколько пионеров (в процентах) участвовали и в походе и в экскурсии?

65. Магазин продал одному покупателю 25% имевшегося в куске полотна, второму покупателю 30% остатка, а третьему 40% нового остатка. Сколько процентов полотна осталось непроданным?

66. Цены на промышленные и продовольственные товары снизились на 25%. На сколько процентов повысилась реальная заработная плата?

67. Заработная плата рабочего в денежном выражении возросла на 20% и одновременно с этим на 20% снизились цены на продукты питания и другие товары. На сколько процентов увеличилась реальная заработная плата?

68. Производительность труда при выполнении некоторой работы повысилась на 40%. На сколько процентов сократилось время, необходимое для выполнения этой работы?

69. Стоимость товара сначала снизили на 12%, а затем новую стоимость снизили ещё на 5%. Сколько процентов от первоначальной стоимости составляет окончательная стоимость этого товара после двух последовательных снижений и на сколько процентов в общем снижена была стоимость товара?

70. Двое рабочих вышли одновременно из одного и того же дома и пошли на один и тот же завод. У первого из них шаг был на 10% короче, чем у второго, но зато он делал шагов на 10% больше, чем второй. Кто из этих рабочих раньше придёт на завод?

71. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если периметр его увеличить на 10%?

72. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если длину прямоугольника увеличить на 20%, а ширину на 10%?

73. Выразить в процентах изменение площади прямоугольника, если длина его увеличится на 30%, а ширина уменьшится на 30%?

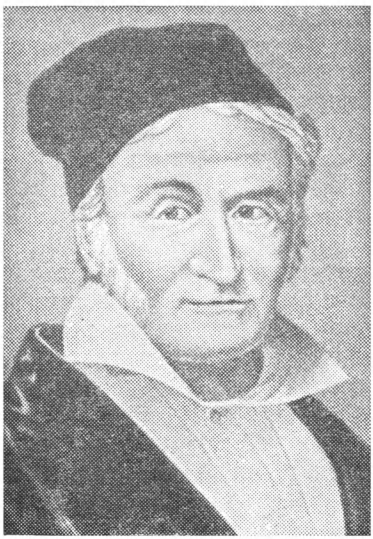
74. На сколько процентов увеличится объём прямоугольного параллелепипеда, если длину и ширину его увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

75. Имеется 735 *г* шестнадцатипроцентного раствора йода в спирте. Нужно получить десятипроцентный раствор йода. Сколько граммов спирта надо долить для этого к уже имеющемуся раствору?

Без карандаша и бумаги

(вычисли устно)

76. Три брата накопили вместе 9 руб. Младший накопил на 1 руб. меньше, а старший на 1 руб. больше, чем средний. Сколько накопил каждый?



К. Ф. Гаусс.

77. Если бы Коля купил 3 тетради, то у него осталось бы 5 коп., а если бы он захотел купить 9 тетрадей, то ему не хватило бы 5 коп. Сколько денег было у Коли?

78. 4 яблока и 3 груши стоят 25 коп., а 2 яблока и 2 груши 15 коп. Сколько придётся заплатить:
1) за 8 яблок и 7 груш?
2) за 8 яблок и 4 груши?

79. То да это, да половина того да этого — сколько это будет процентов от трёх четвертей того да этого?

80. Рассказывают, что в начальной школе, где учился мальчик Карл Гаусс, ставший потом знаменитым математиком, учитель, чтобы занять класс на продолжительное время самостоятельной работой, дал детям такое задание — вычислить сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

Но маленький Гаусс это задание моментально выполнил. Попробуй и ты быстро выполнить это задание.

81. В нашей квартире есть стенные часы с боем. Они отбивают целые часы и одним ударом каждые полчаса. Сколько ударов в сутки делают эти часы?

82. У известного русского художника Богданова-Бельского есть картина*, изображающая занятия устным счётом (рис. 3). В классе, возле доски сидит учитель, а около него стоят ученики. Ученики заняты устным решением трудного примера. Они сосредоточены и увлечены работой. Этот пример записан на классной доске. Вот он:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365};$$

реши и ты этот пример устно.

83. Как быстро вычислить сумму $1+3+5+7+9+\ldots+997+999$? Чему равна эта сумма?

84. Найди наиболее простой приём вычисления и воспользуйся им:

1) $99-97+95-93+91-89+\ldots+7-5+3-1$;

2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}$;

3) $\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\frac{1}{13\cdot14}+\frac{1}{14\cdot15}+\ldots+\frac{1}{98\cdot99}+\frac{1}{99\cdot100}$.

85. 1) Быстро найди, какое частное и какой остаток получаются при делении числа $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1$ на 5.

2) Вычисли устно: $1\,000\,000-(1\,000\,000-\{1\,000\,000-[1\,000\,000-(1\,000\,000-999\,999)]$.

Числовые головоломки

86. Циферблат часов нужно разрезать на 6 частей так, чтобы во всех частях сумма чисел была одинакова.

87. Записать, пользуясь тремя пятёрками и известными знаками действий: 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 5.

88. Пользуясь пятью двойками и знаками действий, записать число 28.

---

* На картине «Устный счёт» художник изобразил учеников сельской школы старого, дореволюционного времени. Учитель на этой картине — это известный педагог С. А. Рачинский. Сейчас эта картина хранится в Третьяковской галерее в Москве.

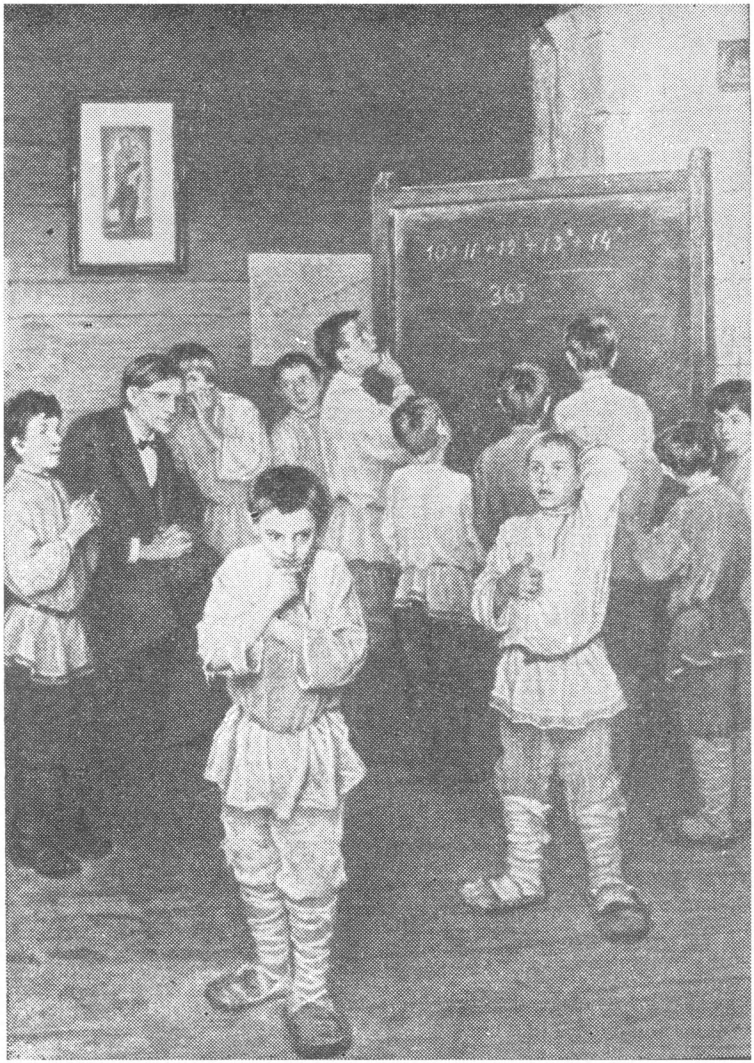


Рис. 3.

89. Пользуясь четырьмя двойками и знаками действий, записать число 111.

90. Записать число 100, пользуясь: 1) четырьмя девятками, 2) шестью девятками.

91. Написать 31: 1) пятью тройками, 2) шестью тройками, 3) пятью пятёрками.

92. Написать 100: 1) пятью единицами, 2) пятью тройками, 3) пятью пятёрками.

93. Напиши девять цифр: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Не меняя порядка этих цифр, расставь между ними плюсы и минусы, всего три знака, таким образом, чтобы в результате получилось 100.

94. С помощью четырёх четвёрок и известных тебе знаков действий запиши все натуральные числа от 1 до 10.

95. Что больше: 10^{20} или 20^{10}?

96. Что больше: 100^{20} или 9000^{10}?

97. а) Сумма каких двух натуральных чисел равна их произведению? б) Сумма каких двух натуральных чисел больше, чем их произведение?

98. Придумай таких два числа, чтобы сумма их, произведение и частное были равны между собой*.

99. Какое натуральное число в 7 раз больше цифры его единиц?

100. Какое наибольшее число можно записать при помощи: 1) трёх единиц? 2) четырёх единиц?

101. Написать возможно большее число, пользуясь только тремя двойками.

102. Напиши, пользуясь двумя цифрами и знаками действий, возможно меньшее число*.

103. Напиши, использовав 3 цифры, наибольшее возможное число.

104. В магазин привезли 6 бочек, в которых было 15, 16, 18, 19, 20 и 31 *дкл* керосина. В первый же день два колхоза купили 5 бочек, один из них две, а второй три бочки, причём оказалось, что первый купил вдвое менее керосина, чем второй. Какая бочка осталась в магазине?

105. Можно ли 5 яблок разделить между 6 мальчиками поровну так, чтобы не пришлось ни одного яблока резать больше, чем на 3 части?

106. Как 7 больших яблок разделить поровну между

---

* При решении задач 98 и 102 воспользуйся отрицательными числами.

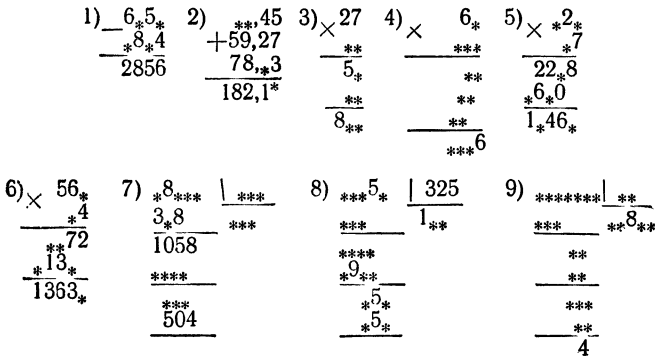
12 мальчиками, не разрезая ни одного яблока больше, чем на 4 части?

107. Найти наименьшее число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 4 даёт в остатке 3, при делении на 5 даёт в остатке 4 и при делении на 6 даёт в остатке 5.

108. Колхозница привезла на рынок для продажи корзину яиц. Продавала она их по одной и той же цене. После продажи яиц колхозница пожелала проверить, верно ли она получала деньги. Но вот беда: она забыла, сколько у неё было яиц. Вспомнила она только, что когда перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо; одно яйцо оставалось также при перекладывании яиц по 3, по 4, по 5, по 6. Когда же она перекладывала яйца по 7, то не оставалось ни одного. Помоги колхознице сообразить, сколько у неё было яиц.

109. Из 4 спичек сложено число VII (7). 1) Как можно переложить две спички, чтобы получилось число 5? 2) Как можно переложить одну спичку, чтобы получилось число 1?*

110. В примерах восстанови отсутствующие цифры, отмеченные звёздочками:



111. Сколько будет нулей в конце числа, выражающего произведение: 1) десяти последовательных натуральных чисел, начиная с 1; 2) двадцати чисел; 3) пятидесяти чисел; 4) ста чисел?

---

* Второй из этих вопросов предлагается для учащихся VIII класса.

В мире чисел (системы счисления)

112. В XVII веке на Руси была создана стройная система счисления, названная «великим словенским числом». Слово «тьма» обозначало тысячу тысяч, тьму тем называли легионом, легион легионов — леодром, леодр леодров — вороном. В одной из рукописей того времени есть упоминание и о большем числе, которое называлось колодой и равнялось десяти воронам. Об этом числе летописец говорит: «Сего числа несть больше». Какое же это число в переводе на современное счисление? Запиши его в виде степени 10. Верно ли, что нет числа больше этого?

113. Покажи, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы различных степеней числа 2 или в виде такой суммы, увеличенной на 1.

114. В какой системе счисления $2 \cdot 2 = 10$?

115. Один шестиклассник о себе написал так. «Пальцев у меня 24, на каждой руке 5, а на ногах 12». Как же так могло быть?

116. Сколько требуется цифр и каких, чтобы можно было любое натуральное число записать: 1) по десятичной системе счисления, 2) по пятеричной, 3) по восьмиричной, 4) по троичной, 5) по двоичной?

117. Записать: 1) число 2456 по пятеричной системе счисления, 2) 321 по троичной системе счисления, 3) 64 по двоичной*.

118. Записать в десятичной системе счисления следующие числа: 1) $100\,101_2$; 2) $120\,012_3$; 3) $403\,200_5$; 4) 5042_8.

119. Во сколько раз увеличится число 325_6, если: 1) приписать справа один нуль, 2) приписать справа три нуля?

120. Как изменится по величине число $212\,000_3$, если: 1) отбросить справа один нуль, 2) отбросить три нуля?

121. В какой системе счисления: 1) 23_{10} запишется как 212; 2) 33_{10} как 53; 3) 42_{10} как 52?

122. Выполнить указанные действия: 1) $3240_5 + 4023_5$; 2) $23\,265_8 - 4762_8$; 3) $322_5 \cdot 14_5$.

123. В какой системе счисления будет: 1) $2 \cdot 2 = 11$. 2) $4 \cdot 4 = 31$; 3) $3 \cdot 3 = 10$?

124. Установить, в какой системе счисления выпол-

---

* Данные в этой задаче записаны в десятичной системе счисления.

нялось каждое из следующих действий: 1) $23 + 14 = 42$; 2) $71 - 36 = 33$; 3) $14 \cdot 2 = 30$; 4) $55 : 4 = 13$?

125. Если $4 \cdot 4 = 20$, то чему равно произведение $5 \cdot 5$ (в той же системе счисления)?

126. Число, записанное в десятичной системе счисления, оканчивается цифрой 5. Будет ли это число кратно 5, если его записать в системе счисления с основанием 3?

127. Хорошо известны признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10 в десятичной системе счисления. Будут ли справедливы эти признаки в иных системах счисления, например при основании 3, 5?

128. Выполнить действия: 1) $1\,000\,000_2 : 1000_2$; 2) $11_2 : 100_2$; 3) $11_2 : 101_2$; 4) $12_3 : 100_3$; 5) $10_3 : 11_3$.

129. Запиши дроби $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ по аналогии с десятичной дробью в виде двоичных дробей.

130. Дроби $\frac{4}{27}$ и $\frac{4}{5}$ запиши в виде троичных дробей.

Разные вопросы и задачи

131. Какие четыре гири нужно иметь, чтобы с их помощью можно было на чашечных весах отвесить любое целое число килограммов, не превосходящее 40? (Реши эту задачу подбором. По теории вопроса прочитай параграф IX интересной книги: И. Я. Депман, Меры и метрическая система, Учпедгиз, 1954).

132. При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежных записей допустил следующие ошибки: цифру единиц 3 он принял за 9, цифру сотен 1 он принял за 7, наконец, цифру тысяч 5 он принял за 6. У ученика получилось 63 587. Может быть, можно помочь ученику найти верную сумму? Как это сделать?

133. Если от задуманного трёхзначного числа отнять 7, то получившееся число разделится на 7, если отнять от задуманного числа 8, то результат разделится на 8, а если отнять 9, то результат разделится на 9. Какое число было задумано?

134. Число 45 надо разбить на четыре части так, что если к первой части прибавить 2, от второй отнять 2, третью умножить на 2, а четвёртую разделить на 2, то все результаты будут равны. Найти эти части.

135. Напиши наименьшее трёхзначное число, крат-

ное 3, так, чтобы первая цифра его была 8 и все цифры были бы различны.

136. Напиши наименьшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы первая цифра его была 6 и все цифры были бы различны.

137. Если число 12 345 679 умножить на 9, то получится число 111 111 111 (проверь). На какое число нужно умножить 12 345 679, чтобы получилось число, записанное при помощи: 1) одних пятёрок, 2) одних девяток?

138. Какая из двух дробей $\frac{22}{35}$ и $\frac{110}{177}$ больше? Как проще сравнить эти дроби?

139. Дана дробь $\frac{11}{41}$. Какое число нужно прибавить к обоим членам этой дроби, чтобы она обратилась в $\frac{3}{8}$?

140. Дана дробь $\frac{29}{64}$. Какое число надо отнять от обоих членов её, чтобы получить дробь $\frac{2}{9}$?

141. Дана дробь $\frac{37}{63}$. Какое число нужно вычесть из её числителя и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получилось $\frac{3}{17}$?

142. Чтобы пронумеровать страницы книги, понадобилось 1164 цифры. Сколько в этой книге страниц?

143. Сколько цифр употреблено для нумерации книги, в которой 634 страницы?

144. Сколько всевозможных делителей имеет число: 1) $2^{10} \cdot 3^2$; 2) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$?

145. Все натуральные числа, начиная с 1, записаны в порядке их возрастания подряд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и т. д. Какая цифра в этой записи стоит на сотом месте?

---

2 Заказ 1898

Глава II

АЛГЕБРА

При помощи уравнений

Историческая задача алгебры заключается в том, что она служила и служит колыбелью для вновь возникающих идей и методов, которые впоследствии проникают в другие отделы математики и нередко начинают играть в них доминирующую роль.

Н. Г. Чеботарёв.

146. Несколько рабочих решили купить моторную лодку. Если каждый из них внесёт по 70 руб., то не хватит 30 руб., если же каждый внесёт по 80 руб., то 40 руб. будут лишними. Сколько было рабочих и сколько стоила моторная лодка?

147. Для экскурсии, проводимой школой, нужно было собрать определённую сумму денег. Если каждый участник экскурсии внесёт по 7 руб. 50 коп., то на расходы не хватит 44 руб., а если же каждый внесёт по 8 руб., то останется 44 руб. Сколько учеников намерены были участвовать в экскурсии?

148. У мальчика столько сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько братьев и сколько сестёр в этой семье?

149. Два брата получили путёвки в пионерский лагерь, расположенный в 20 *км* от города. Чтобы добраться до лагеря, они решили воспользоваться своим велосипедом. Но так как двоим ехать на велосипеде было нельзя, то братья договорились, что они отправятся в дорогу одновременно, но первый на велосипеде, а второй пешком. Проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до места, где будет оставлен велосипед, дальше поедет на нём и догонит первого у ворот лагеря. Где дол-

жен оставить велосипед первый брат и сколько времени уйдёт на дорогу, если скорость движения обоих братьев на велосипеде 10 *км* в час, а пешком 5 *км* в час?

150. Некий человек нанял работника на год, обещал ему дати 12 руб. и кафтан, но тот, проработав 7 месяцев, восхотел уйти, и просил достойныя платы с кафтаном; он же даде ему по достоинству расчёт 5 руб. и кафтан, и ведательно есть, коликой цены оный кафтан был. (Магницкий.)

151. Один пастух говорит другому: «Дай мне одну из твоих овец и у меня будет вдвое более овец, чем у тебя». Второй пастух отвечает: «Нет, лучше ты дай мне одну из твоих овец, тогда у нас будет овец поровну». Сколько овец было у каждого пастуха? (Старинная задача.)

152. Летят галки, лежат палки. Если на каждую палку сядет по галке, то одной галке не хватит палки, а если на каждую палку сядут по две галки, то одна палка останется без галок. Сколько лежало палок и сколько летело галок? (Старинная задача.)

153. На памятнике древнегреческому математику Диофанту имеется надпись: «Прохожий! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в старости. Шестую часть его жизни заняло детство, двенадцатую — отрочество, седьмую — юность. Затем протекла половина его жизни, после чего он женился. Через 5 лет у него родился сын, а когда сыну минуло 4 года, Диофант скончался». Сколько лет жил Диофант?

154. Отец сказал сыну: «10 лет тому назад я был в 10 раз старше тебя, а через 22 года я буду только в 2 раза старше тебя». Сколько лет теперь отцу и сколько сыну?

155. В 12 час. дня часовая и минутная стрелки часов совпадают. Через сколько минут после этого они снова совпадут?

156. Через сколько минут после того, как часы показывали 4 часа, минутная стрелка догонит часовую стрелку?

157. Мне было задано пятизначное число. К этому числу надо прибавить 200 000 и сумму умножить на 3. Вместо этого я приписал к заданному мне числу в конце его справа цифру 2 и получил правильный результат. Какое число было мне задано?

158. Решая некоторую задачу, один ученик должен был данное число умножить на 0,5 и к тому, что получится, прибавить 3. Вместо этого ученик по рассеянности данное

число разделил на 0,5 и от получившегося частного отнял 3. К счастью, результат получился такой, какой и должен был получиться. Определить то число, которое ученик должен был умножить.

159. Имеется некоторая дробь. К знаменателю этой дроби прибавили 1. 1) Какое число надо прибавить к числителю, чтобы получилась дробь, равная данной? 2) На какое число надо умножить числитель, чтобы получилась дробь, равная данной?

160. В артели было несколько квалифицированных рабочих и несколько неквалифицированных. Каждый квалифицированный рабочий получает за работу в неделю 21 руб., а каждый неквалифицированный 15 руб. Всего артель получила за неделю 174 руб. Сколько в артели было квалифицированных рабочих и сколько неквалифицированных?

161. Нужно разменять 100 руб. денежными знаками достоинством в 3 руб., 5 руб. и 25 руб. так, чтобы всего было 20 денежных знаков. Как это можно сделать?

162. Куплены тетради по 7 коп. и по 4 коп. за тетрадь, всего на сумму 53 коп. Сколько куплено тех и других тетрадей?

163. Для прокормления n лошадей и коров в течение t дней израсходовано P центнеров сена. Для одной лошади на день отпускается в среднем a килограммов сена, а для коровы b килограммов ($a > b$). Выразить формулами, сколько было коров и сколько лошадей.

Умеешь ли ты решать уравнения и неравенства?

164. Реши уравнение $x + (1 - a)y = 3$, принимая за неизвестное a ($y \neq 0$).

165. Реши уравнения:

1) $3x = 2(x - 3) + x + 4$; 2) $3x = 2(x - 3) + x + 6$;

3) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)(x+3)}$; 4) $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$

5) $\frac{2}{x-3} = \frac{5}{x-3}$.

166. Реши систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ 2x - 3y - 5z = 2 \\ x - 4y - 2z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - 3y - 5z = 3 \\ x - 4y - 2z = 2 \end{cases}$

167. Составь систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными: 1) не имеющую решений, 2) имеющую бесконечно много решений, 3) имеющую единственное решение $x = 2$, $y = -3$, $z = -1$.

168. Реши неравенства:

1) $x^2 + 1 > x^2$; 3) $\frac{x-1}{1-x} > 0$;

2) $x^2 + 1 < x^2$; 4) $\frac{x-2}{2-x} < 0$.

Вычисли!

169. Найди наиболее простой приём вычисления:

1) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2}$; 2) $11\frac{3}{4} \cdot 12\frac{1}{4}$; 3) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

170. Быстро найди числовое значение выражения:

1) $a^2(a + b^2)(a^4 - b^{10})(a^2 - b)$ при $a = 5$ и $b = 25$;

2) $\frac{m^2(m + n^2)(m^4 - n^8)(m^2 - n)}{m^2 + n^2}$ при $m = 4$ и $n = 16$;

3) $x^2 - 86x + 113$ при $x = 87$.

171. Упрости выражение $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}$ и найди числовое значение его при $a = 2$.

172. Чему равна разность $|a| - a$?

173. Чему равна сумма $|a| + a$?

174. Чему равна дробь $\frac{a + |a|}{2}$?

175. Найди возможно более простой способ вычисления суммы:

1) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$;

2) $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$.

176. У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев

ячменя, из каждого колоса может вырасти по семи мер зерна. Сколько мер зерна сохранится благодаря этим кошкам? (Египетский папирус — около 2000 лет до н. э.)

177. Некто хотел подковать свою лошадь и обратился к кузнецу с просьбой взять с него подешевле. Кузнец предложил: «Заплати мне только за гвозди, которых я затрачу 24 штуки. За первый гвоздь заплати мне $\frac{1}{4}$ коп., за второй $\frac{1}{2}$ коп., за третий 1 коп. и т. д., всё время удваивая плату за каждый следующий гвоздь». Сколько бы пришлось заплатить при таком способе расплаты только за последний гвоздь? (Старинная задача.)

178. Некто продаёт свою лошадь по числу подковных гвоздей, которых у неё 32. За первый гвоздь он просит 1 коп., за второй 2, за третий 4, за четвёртый 8 и всегда за следующий вдвое больше, чем за предыдущий. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь. (Задача Л. Эйлера.)

Подумай с карандашом в руках!

179. О натуральных числах p и q известно, что $p < q$ Как на числовой прямой располагаются точки, изображающие числа 1, $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{p}$? Какая из двух последних точек ближе лежит к точке, изображающей 1?

180. Найди наименьшее значение выражения $4x^2 - 12x + 10$.

181. При каком значении x дробь $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ будет иметь наименьшее значение?

182. Самолёт из Москвы летит в Киев и возвращается обратно в Москву. В какую погоду этот самолёт проделает весь путь быстрее: в безветренную или при ветре, дующем с одинаковой силой в направлении Москва — Киев?

183. Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 50 *км* в час, а обратно возвращался со скоростью 30 *км* в час. Какова была его средняя скорость?

184. На одном научном конгрессе математиков во время завтрака присутствующим была предложена следующая задача. Представьте себе, что каждый день в полдень из

Гавра (Франция) в Нью-Йорк (США) отправляется почтовый пароход и в то же время из Нью-Йорка отходит идущий в Гавр пароход той же компании. Каждый из этих пароходов находится в пути ровно 7 суток и все они идут по одному и тому же пути. Сколько пароходов своей компании встретит на всём пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк? Реши эту задачу.

185. От пристани Киров до пристани Соколки ежедневно в 12 час. дня отправляется пассажирский пароход, который находится в пути ровно трое суток. 20 мая в 12 час. дня от пристани Соколки в Киров отошёл моторный катер, который прибыл в Киров ровно через двое суток. Сколько пассажирских пароходов встретит во время своего пути катер?

Докажи!

186. Доказать, что квадрат нечётного числа есть нечётное число.

187. Доказать, что если квадрат некоторого числа есть число чётное, то и само это число — чётное.

188. Доказать, что квадрат чётного числа есть число, кратное 4.

189. Доказать, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел есть число нечётное.

190. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

191. Доказать, что сумма произведения двух последовательных натуральных чисел и большего из них равна квадрату большего числа.

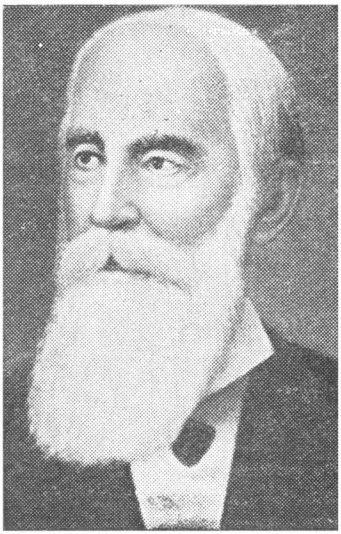
192. Доказать, что произведение двух последовательных чётных чисел есть число, кратное 8.

193. Доказать, что если взять какое-нибудь двузначное число с разными цифрами, переставить в нём цифры и вычесть из данного числа получившееся, то разность будет делиться на 9. Будет ли это верно для трёхзначных чисел (переставляются крайние цифры)?

194. Доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2 (n — чётное число)*.

195. Чтобы двузначное число, оканчивающееся цифрой 5, возвысить в квадрат, можно поступить так: число десятков надо умножить на число, которое на 1 больше числа

* Попытайся доказать, что данное утверждение верно и для нечётного n.



П. Л. Чебышев.

десятков, и к получившемуся произведению приписать 25. Так, $75^2 = 5625$. Доказать справедливость этого правила. Можно ли применить это правило для трёхзначных чисел? Вычисли: 35^2; 55^2; 65^2; 85^2; 125^2.

196. Доказать, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

197. На какие числа делится произведение любых трёх последовательных натуральных чисел, сумма которых — нечётное число?

198. Доказать, что число $m^3 - m$, при любом натуральном m, делится на 6.

199. Доказать, что число $m^2 - 1$, при m нечётном, делится на 8.

200. Доказать, что разность между кубом любого нечётного числа и самим числом делится на 24.

201. Доказать, что произведение нескольких чисел вида $4n + 1$ само есть число того же вида. Почему достаточно рассмотреть произведение двух чисел этого вида?

202. Доказать, что всякое число вида $n^4 + 4$, где $n > 1$, является составным*.

203. Доказать, что если каждое из двух данных чисел является суммой двух квадратов, то и произведение этих чисел может быть представлено в виде суммы двух квадратов.

204. Великим русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым было доказано, что между двумя натуральными числами n и $2n$ (при $n > 1$) имеется по крайней мере одно простое число. Воспользовавшись этим, докажи, что простых чисел бесконечно много.

---

* Это утверждение часто называют теоремой Софьи Жермен. С. Жермен (1776—1831 гг.) — французская женщина-математик. Прославилась она особенно исследованиями по теории упругости, за которые получила премию Парижской академии наук.

Графики*

Но кривая линия — геометрический эквивалент функции — гораздо больше говорит воображению, чем формула, и гораздо более легко обозрима, чем таблица числовых значений.

В. Л. Гончаров

205. Начерти график изменения промышленной продукции в СССР и некоторых капиталистических странах по следующим данным (промышленная продукция 1929 г. принимается за 100%)**:

	1929	1937	1943	1946	1949	1950	1952	1955
СССР . . .	100	429	573	466	870	1082	1421	2049
США . . .	100	103	215	153	164	190	210	234
Англия . .	100	124	—	118	144	153	153	181
Франция .	100	82	—	63	92	92	108	125

Когда быстрее всего росла промышленная продукция в СССР?

206. Начерти график изменения температуры за первые 20 дней ноября по следующим данным:

Дата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура	3	4	2	0	—1	—2	—5	—3	—1,5	—2
Дата	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Температура	0	3	1	—3	—6	—6,5	—7	—9	—12	—10

Ответь по графику на следующие вопросы: 1) когда была самая высокая температура, когда самая низкая?

---

* Прочитай очень полезную книжку: А. С. Смогоржевский, Метод координат, Гостехиздат, 1952.

** Н. С. Хрущёв, Отчетный доклад Центрального Комитета КПСС XX съезду партии, Госполитиздат, 1956, стр. 7.

2) Когда происходило похолодание и когда потепление? 3) Когда особенно резко изменялась температура и как (повышалась или понижалась)?

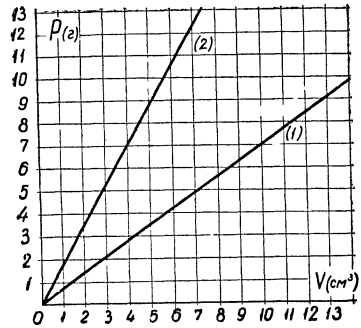


Рис. 4.

207. Рассмотри графики веса (P) бензина (1) и веса серной кислоты (2) в зависимости от объёма V (рис. 4).

Установи по графику: 1) Сколько весят: 12,5 *куб. см* бензина, 12,5 *л* бензина, 5,4 *л* серной кислоты? 2) Какой объём занимают: 1 *кг*, 8 *кг* бензина, 1 *кг*, 2,5 *кг* серной кислоты?

208. Известно, что 1 дюйм равен 2,54 *см*. Построй график перевода дюймов в сантиметры. С помощью этого графика установи, сколько дюймов будет в 6 *см*, в 4,5 *см*, в 1 *см* и сколько сантиметров в 2,4 дюйма, в 3,5 дюйма.

209. Рассмотри график движения трёх поездов (рис. 5)

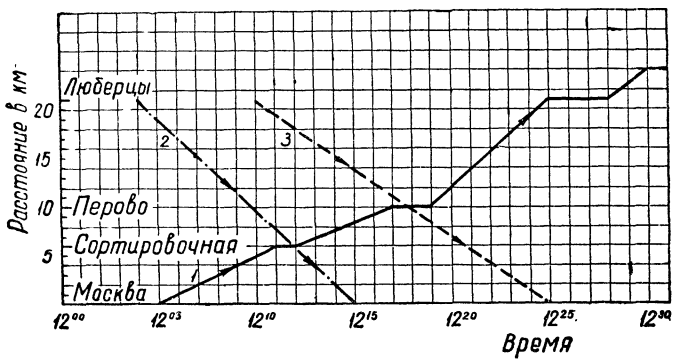


Рис. 5.

Ответь по графику на следующие вопросы:

1) Когда прибывает поезд № 1 на станцию Перово и долго ли он стоит на этой станции? 2) Где и когда встречаются поезда № 1 и 2? 3) На каком участке пути скорость поезда № 1 наибольшая? Вычисли её. 4) Какой из двух поездов, № 2 или 3, движется с большей ско-

ростью? 5) Сколько минут идёт поезд № 1 от станции Сортировочная до станции Люберцы?

210. Построй «ступенчатый» график зависимости между силой ветра в баллах и скоростью его в метрах в секунду по следующим данным:

Сила ветра	0	1		3	4	5
Скорость	0—0,5	0,6—1,7	1,8—3,3	3,4—5,2	5,3—7,4	7,5—9,8
Сила ветра	6	7	8	9	10	11
Скорость	9,9-12,4	12,5-15,2	15,3-18,2	18,3-21,5	21,6-25,1	2 -29,0

Скорость ветра откладывай по горизонтальной оси, а силу ветра по вертикальной.

211. Построй график зависимости между удельным весом картофеля и содержанием крахмала в картофеле по следующим данным:

Уд. вес	1,03	1,10	1,12	1,14	1,15
% крахмала	14	18	22,5	26,5	29,0

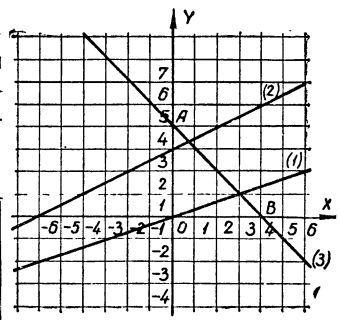


Рис. 6.

Вычисли, сколько крахмала содержится в 1 *т* картофеля с удельным весом: 1) 1,08; 2) 1,13.

212*. На чертеже (рис. 6) построены три графика зависимостей между переменными величинами x и y. Вырази эти зависимости формулами.

213. Взяли стальной стержень, длина которого при 0° была равна 1 *м*, и подвергли его нагреванию. При различ-

* Задача № 212 и следующие задачи этого параграфа предназначены для учащихся VIII и старших классов.

ных температурах ($t°$) измеряли удлинение этого стержня (l *мм*). Получились следующие результаты:

t	60	90	105	120	145	165	180	210	230
l	0,75	1,05	1,3	1,5	1,8	2	2,1	2,5	2,8

Построй по этим данным точки, проведи прямую линию так, чтобы эти точки лежали возможно ближе к ней. Вырази зависимость между температурой и удлинением стержня формулой. Вычисли, какую длину будет иметь стержень при температуре 200°, если при нуле градусов его длина была равна 3 *м*.

214. Тот же стальной стержень при температуре 0° подвергался растяжению (P *кг/см*²). Каждый раз измерялось его удлинение (l *мм*.) Результаты оказались такими:

P	750	1095	1200	1440	1800	1950	2220	2400	2550
l	0,35	0,50	0,55	0,65	0,85	0,9	1,0	1,1	1,2

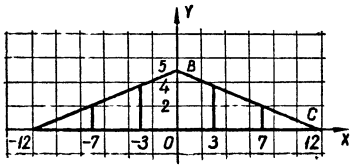


Рис. 7.

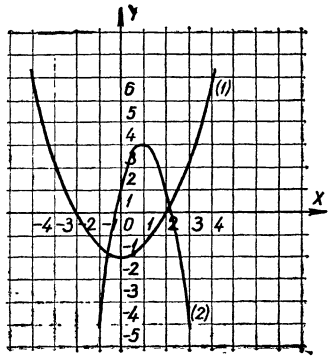


Рис. 8.

Какой вид имеет график этой зависимости? Какой будет длина стального стержня при растягивающем усилии в 2000 *кг* на квадратный сантиметр сечения, если до растяжения длина его была 3 *м*?

215. Нужно установить стропила для двухскатной крыши, ширина которой 24 *м*, а высота 5 *м*. Требуется определить длины четырёх стоек, поддерживающих стропила (рис. 7).

216. Если с поверхности земли бросить вертикально вверх камень с начальной скоростью 20 *м* в секунду, то высота (h *м*), на которой окажется этот камень через t сек. (если не учитывать сопротивление воздуха), выражается

формулой $h = 20t - 4{,}9t^2$. Начерти график этой зависимости. Установи, какой будет наибольшая высота подъёма камня и когда она будет достигнута. Через сколько секунд после начала движения камня он упадёт на поверхность земли?

217. На рисунке 8 построены 2 параболы. Найди квадратные трёхчлены, графиками которых являются эти параболы.

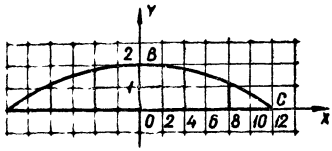


Рис. 9.

218. Арка моста имеет форму дуги параболы, вершина которой находится в середине этой дуги (рис. 9). Высота арки 2 *м*, а длина стягивающей её хорды 24 *м*. Арка имеет 5 вертикальных стоек, укреплённых в точках хорды, делящих эту хорду на равные части. Вычисли длины этих стоек.

219. В квадрат со стороной 2 *дм* вписывается другой квадрат так, что вершины его лежат на сторонах данного квадрата (рис. 10). Каким должно быть расстояние от вершины данного квадрата до ближайшей к ней вершины

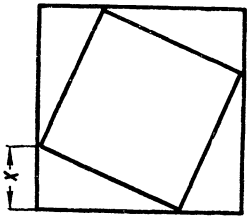


Рис. 10.

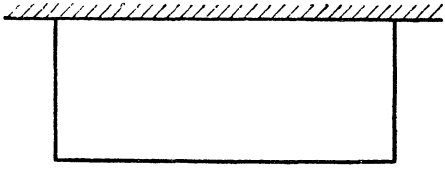


Рис. 11.

вписанного квадрата, чтобы вписанный квадрат имел наименьшую площадь? Вырази формулой зависимость между площадью вписанного квадрата и расстоянием между вершинами данного и вписанного квадратов, а затем построй график этой зависимости. А как эту задачу можно решить без графика?

220. Из проволоки, длина которой 16 *см*, нужно согнуть прямоугольник, имеющий наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этого прямоугольника?

221. Заготовлен материал для постройки забора длиной в 100 *м*. Требуется огородить этим забором прямоугольный участок для детской площадки. Забор этот должен примыкать к стене дома (рис. 11). Как поставить этот забор так, чтобы площадь участка была наибольшей?

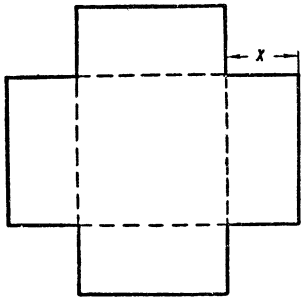


Рис. 12.

222. Из квадратного листа железа со стороной в 2 *дм* нужно сделать открытую сверху коробку. Для этого по углам вырезают равные квадраты и получившуюся «крестовину» перегибают по пунктирам (рис. 12). Каким должен быть размер квадратов, вырезаемых по углам, чтобы получилась коробка наибольшей ёмкости? Вырази объём коробки формулой в зависимости от x, построй график и по нему найди такое значение x, для которого ёмкость коробки будет наибольшей.

Глава III

ГЕОМЕТРИЯ

Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

Галилей.

Вычисли!

223. Измерь длину минутной стрелки ваших часов. Какой путь опишет конец её за сутки, за месяц (30 дней), за год (365 дней)?

224. Диаметр вала колодезного во́рота равен 0,24 *м*. Чтобы вытянуть ведро со дна колодца, приходится делать 10 оборотов. Какова глубина колодца?

225. Обхват дерева (длина окружности) 88 *см*. Вычислить площадь поперечного сечения дерева.

226. Диаметр опалённой площади тайги от взрыва Большого Тунгусского метеорита равен примерно 38 *км*. Какая площадь тайги была опалена?

227. Две водопроводные трубы одного и того же диаметра нужно заменить одной трубой, с той же пропускной способностью. Каким должен быть диаметр этой трубы по сравнению с диаметром каждой из заменяемых труб?

228. Кусок алюминия весит 654 *г*. Зная, что плотность алюминия 2,6, найти объём этого куска.

229. Две чугунные отливки весом в 26,2 *кг* и 29,7 *кг* имеют наружные объёмы в 3,77 $дм^3$ и 4,24 $дм^3$. Какая из этих отливок имеет внутри раковины (пустоты) и каков общий объём этих раковин, если удельный вес чугуна равен 7?

230. На никелирование чайника с поверхностью 7,5 $дм^2$ израсходовано 13,2 *г* никеля. Какова толщина слоя никеля, покрывающего чайник? (Удельный вес никеля 8,8.)

231. Масса Большого Тунгусского метеорита, по подсчётам учёных, достигала 50 000 *т*. Какие размеры имел

бы железный куб той же массы? (1 куб. *м* железа весит 7,8 *т*). Дай ответ с точностью до одного метра. Реши эту задачу подбором или же воспользуйся таблицей кубов чисел.

232. Как изменится объём ящика, если длину его увеличить на 50%, ширину оставить без изменения, а высоту уменьшить в $1\frac{1}{2}$ раза?

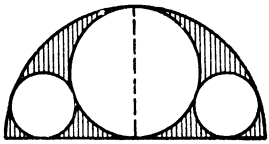


Рис. 13.

233. Кирпич, употребляемый для построек, весит 4 *кг*. Сколько весит игрушечный кирпичик, сделанный из того же материала, если все размеры его в 4 раза меньше?

234. Что больше, площадь трёх внутренних кругов или заштрихованной части полукруга (рис. 13)?

Докажи!

235. Рабочий, изготовлявший квадратные плитки из дуба для паркетного пола, проверял их так: он сравнивал длины их сторон, и если все четыре стороны оказывались равными, то считал квадрат вырезанным верно. Надёжна ли такая проверка?

236. Когда этому рабочему мастер сказал, что он проверяет неверно, то рабочий стал проверять, сравнивая длины диагоналей. Если обе диагонали оказывались равными, то он считал квадрат вырезанным правильно. Не допустил ли этот рабочий новой ошибки?

237. Когда рабочему указали, что он снова поступает неверно, то он решил проверять свою работу, сравнивая все четыре части, на которые диагонали плитки делятся точкой их пересечения. Если все эти четыре части оказывались равными, то рабочий считал квадрат вырезанным верно. Можно ли так проверять квадрат? А как следовало поступать рабочему?

238. Какой из всех прямоугольников с периметром, равным 36 *см*, имеет наибольшую площадь? Чтобы разобраться в этом вопросе, возьми несколько значений длины прямоугольника и составь табличку:

Длина прямоугольника					
Ширина прямоугольника					
Площадь прямоугольника					

Постарайся обосновать вывод, полученный из рассмотрения этой таблички (составь формулу, выражающую площадь прямоугольника, и исследуй её).

239. *Задача четырёх красок**. Географические карты обычно печатаются в несколько красок. Каждая страна или область страны окрашивается одним цветом. Для облегчения печатания таких карт обычно удовлетворяются окрашиванием в различные краски лишь примыкающих друг к другу стран или областей. Докажи (приведя примеры), что двух и трёх красок для печатания географических карт недостаточно.

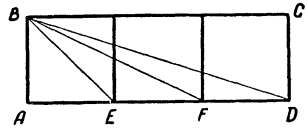


Рис. 14.

Многолетняя практика изготовления географических карт приводит к выводу, что четырёх красок достаточно. Однако никто ещё не мог логически доказать или опровергнуть это. Задача четырёх красок остаётся до сих пор нерешённой. Удалось лишь доказать, что любую карту можно раскрасить пятью красками.

240. Из трёх равных квадратов, как показано на рисунке 14, составлен прямоугольник. Из вершины B его проведены три луча BE, BF и BD. Доказать, что $\angle AEB + \angle AFB + \angle ADB = 90°$.

Построй!

241.** Два населённых пункта A и B расположены по разные стороны реки, берега которой параллельны (рис. 15). Где следует построить мост через реку, чтобы путь между двумя этими пунктами был кратчайшим?

---

* Эта задача впервые была поставлена английским математиком Кели в 1879 году. Более подробно о ней говорится в интересных книгах: 1) Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, ОНТИ, 1936; 2) Е. Дынкин и В. Успенский, Математические беседы, Гостехиздат 1952.

** Задачи № 241—249 реши построением. Дай доказательства верности построений.

242. Два посёлка A и B расположены по разные стороны и на разных расстояниях от реки. Где следует устроить лодочную станцию, чтобы она одинаково отстояла от обоих посёлков?

243. На одном и том же берегу речки, на разных расстояниях от неё, расположены два колхоза A и B (рис. 16). Эти колхозы решили совместно построить мост через реч-

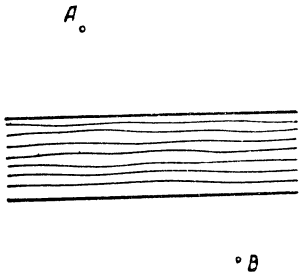


Рис. 15.

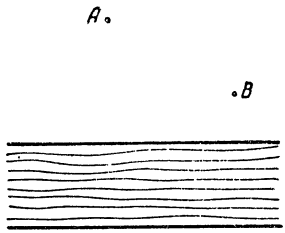


Рис. 16.

ку. Где следует построить этот мост, чтобы он отстоял от колхозов на одном и том же расстоянии?

244. На одном и том же берегу реки, на разных расстояниях от неё, расположены два колхоза (рис. 16). Как следует проложить дорогу между этими колхозами, чтобы она доходила до реки и имела бы наименьшую длину?

245. Построй геометрическое место центров окружностей, каждая из которых касается двух данных концентрических окружностей, имеющих радиусы R и r.

246. Даны две параллельные прямые и между ними окружность. Построй окружности, касающиеся данных параллельных прямых и данной окружности.

247. *Задача Потенота**. Наблюдатель, имеющий кар-

---

* В общем виде задача заключается в определении положения какой-либо точки на местности по двум углам (с вершиной в этой точке), образованным направлениями на три точки, положение которых известно Французский математик Л Потенот (1660—1732 гг.) дал одно из геометрических решений этой интересной и практически важной задачи. Еще раньше, в начале XVII века, задача была решена голландским математиком и астрономом В. Снеллиусом, а некоторые способы решения известны были уже в XVI веке. Всего известно более 100 решений этой задачи. Прочитай о задаче Потено-

ту некоторого участка земли, находится в одном из пунктов этого участка. Он видит три заметных ориентира (например, водонапорную башню железнодорожной станции А, здание школы B и силосную башню колхоза C), отмеченные на его карте (рис. 17). Из того пункта, в котором находится наблюдатель, он измеряет два угла α и β, под которыми видны на местности отрезки AB и BC. Как наблюдателю нанести на карту ту точку местности, где он находится?

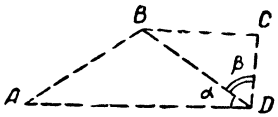


Рис. 17.

248. Как наиболее коротким путём по поверхности куба, ребро которого 2 *дм*, из одной вершины его попасть в противоположную? Какой длины этот путь?

249. Как наиболее коротким путём по поверхности прямоугольного параллелепипеда, длина которого 3 *дм*, ширина 2 *дм* и высота 4 *дм*, из одной вершины его попасть в противоположную? Какой длины этот путь?

Построения с препятствиями и ограничениями

250. Дан отрезок AB. Средняя часть его недоступна. Требуется к этому отрезку через середину его провести перпендикуляр. Как это сделать?

251. Вершина A треугольника ABC не уместилась на чертеже. Как построить высоту этого треугольника h_a?

252. Как провести в треугольнике, одна из вершин которого не уместилась на чертеже, медианы?

253. Даны две точки. Как с помощью циркуля и линейки провести через эти точки прямую линию, если линейка короче расстояния между ними?

254. Даны три точки: A, B и C. Точка B — вершина угла, а точки A и C лежат на сторонах этого угла. Пользуясь только циркулем, построить угол, равный данному, т. е. построить три точки A_1, B_1 и C_1 так, чтобы угол $A_1B_1C_1$ был равен углу ABC.

255. Пользуясь только циркулем, через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой, задан-

---

та в книге: Д. И Перепёлкин, Геометрические построения в средней школе, изд. АПН, 1947.

ной двумя её точками B и C, т. е. построить такую точку D, чтобы AD и BC лежали на параллельных прямых.

256. Пользуясь только циркулем: 1) построить точку, симметричную данной точке A, относительно прямой, заданной точками B и C; 2) из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC, т. е. построить ещё одну точку перпендикуляра к BC, проходящего через A.

257. Даны две точки A и B. Требуется, пользуясь только циркулем, построить точку, которая лежала бы на прямой, определяемой точками A и B.

258. Пользуясь только циркулем, построить углы в 30°, 60° и 90°.

259. Дан отрезок и вне его точка, удалённая от отрезка на расстояние, большее половины этого отрезка. На данном отрезке, как на диаметре, описана окружность. Требуется, пользуясь только линейкой, опустить из данной точки на данный отрезок перпендикуляр.

Непрерывное рисование

260. Можно ли нарисовать каждую из фигур 1—8 (рис. 18), не отрывая карандаш от бумаги и не прочерчивая линий по уже проведённым?

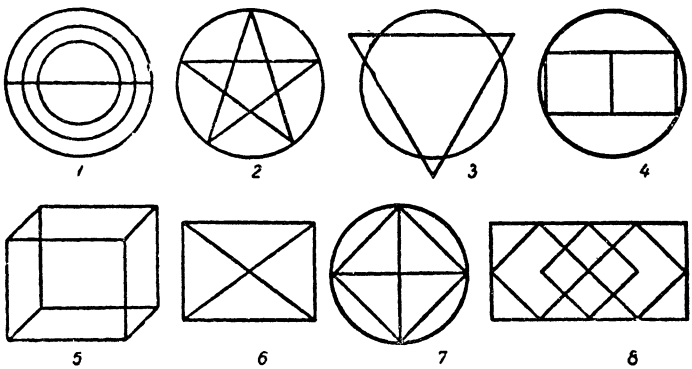


Рис. 18.

261. В 1736 году знаменитый математик Леонард Эйлер заинтересовался задачей о семи мостах. Вот эта задача. В городе Калининграде (называвшемся раньше Кенигсбер-

гом) во время Эйлера было 7 мостов, соединявших берега реки Прегель с островами на ней (рис. 19). Можно ли, совершая прогулку по городу, пройти все эти семь мостов, не проходя ни по одному из них дважды? Постарайся решить эту задачу. А если бы не было третьего и четвёртого мостов, тогда можно ли было бы обойти оставшиеся мосты?

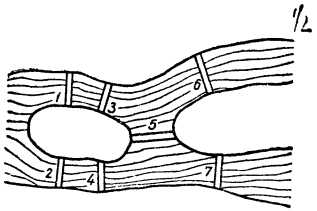


Рис. 19

Головоломки со спичками

262. Положи 12 спичек так, чтобы получилось 5 квадратов.

263. Из спичек сложена фигура, состоящая из 9 равных треугольников (рис. 20). Требуется убрать 5 спичек так, чтобы осталось 5 треугольников. Как это сделать?

264. Возьми ту же самую фигуру и переложи 6 спичек так, чтобы получилась фигура, составленная из 6 равных четырёхугольников.

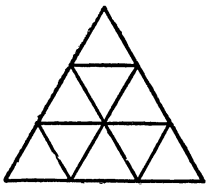


Рис. 20.

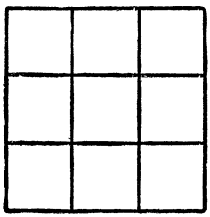


Рис. 21.

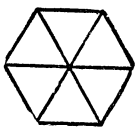


Рис. 22.

265. Из спичек сложена такая фигура (рис. 21). 1) Убери 4 спички так, чтобы осталось 5 квадратов. 2) Убери 8 спичек так, чтобы осталось 2 квадрата. 3) Убери 6 спичек так, чтобы осталось всего 3 квадрата.

266. Из спичек сложена фигура, состоящая из 6 равносторонних треугольников (рис. 22). Переложи 4 спички так, чтобы получилось 3 равносторонних треугольника.

267. Из 6 спичек сложи 4 равносторонних треугольника.

Геометрические головоломки

268. Как четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных так, как показано на рисунке 23?

269. Как разместить 6 кружков так, чтобы получились 3 ряда по 3 кружка и 6 рядов по 2 кружка?

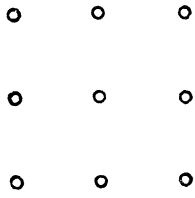


Рис. 23.

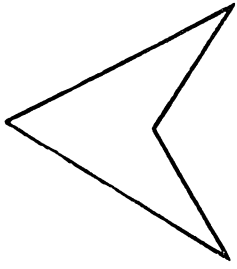


Рис. 24.

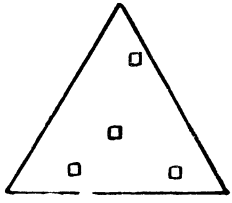


Рис. 25.

270. Как разместить 10 кружков на пяти равных отрезках так, чтобы на каждом из этих отрезков лежало по 4 кружка?

271. Изображённую на чертеже фигуру (рис. 24) требуется разделить на 6 частей, проведя всего лишь 2 прямых. Попытайся это сделать.

272. Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму равностороннего треугольника (рис. 25), надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади и чтобы на каждом из них было по колодцу. Как это сделать?

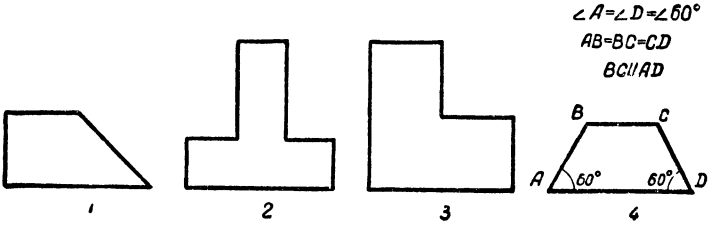


Рис. 26.

273. Дан прямоугольник, основание которого в два раза больше высоты.

1) Разрежь этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник.

2) Как нужно разрезать данный прямоугольник на две части, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник?

3) Как нужно разрезать данный прямоугольник на три части, чтобы из них можно было составить квадрат?

274. Нарисуй каждую из фигур (рис. 26) и разрежь её на четыре равные части.

275. Какой наиболее простой формы (с плоскими гранями) должен быть камень, чтобы первобытный человек, сделав в этом камне отверстие и насадив камень на палку, мог бы получившимся орудием пользоваться и как топором и как мотыгой?

Ответь на вопросы!

276. Сколько углов, меньших 360°, получится, если из одной точки на плоскости провести 3 луча?

277. Сколько получится острых углов, если внутри данного острого угла из его вершины провести 3 луча?

278. Сколько всего треугольников в каждой из двух фигур (рис. 27)?

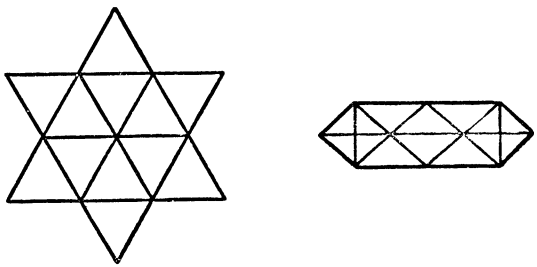


Рис. 27.

279. Имеется монета. Сколько нужно таких же монет, чтобы их можно было расположить вокруг данной монеты так, чтобы все монеты касались данной и попарно друг друга?

280. По окружности неподвижного круга перекатывается без скольжения другой круг, радиус которого в 3 раза

меньше радиуса неподвижного круга. Сколько раз обернётся вокруг себя движущийся круг за то время, в течение которого он прокатится вокруг большего круга один раз?

281. Какими простыми приспособлениями можно воспользоваться для нахождения центра круга?

282. В окружности, радиус которой 5 *см*, проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Из точки C, взятой на окружности, опущены перпендикуляры на эти диаметры, пересекающие их в точках A и B. Найти расстояние между точками A и B.

283. По углам бассейна квадратной формы стоят 4 столба. Потребовалось расширить этот бассейн так, чтобы площадь его стала в два раза больше, а форма осталась бы квадратной. Можно ли это сделать, не убирая столбов? Если можно, то как?

Замечательные кривые *.

284. *Спираль Архимеда.* Представь себе, что по радиусу равномерно вращающегося диска с постоянной скоростью ползёт муха. Путь, описанный мухой, — это кривая, называемая спиралью Архимеда. Начерти какую-нибудь спираль Архимеда.

285. *Синусоида.* Сделай из плотной бумаги, свернув её несколько раз, трубочку. Разрежь эту трубочку наклонно бритвой. Какую линию образует разрез, если развернуть одну из двух частей этой трубочки? Перерисуй эту линию на лист бумаги. Получится одна из замечательных кривых, называемая синусоидой. Особенно часто с ней приходится встречаться при изучении электротехники и радиотехники.

286. *Конхоида Никомеда***. Построй кривую линию, называемую конхоидой Никомеда. Сделать это можно так. На листе бумаги проведи прямую линию AB. Вне этой прямой возьми точку O (полюс). Затем выбери отрезок a, длина которого пусть будет меньше расстояния от точки O до прямой AB. Далее, через точку O проводи прямые и от точки пересечения каждой из этих прямых с прямой AB,

---

* О замечательных кривых прочитай книжки: 1) А. И. Маркушевич, Замечательные кривые, Гостехиздат, 1952; 2) Г. Н. Берман. Циклоида. Гостехиздат, 1951

** Никомед — греческий математик, живший в III веке до нашей эры.

откладывай на ней в обе стороны от AB отрезок a. Каждый раз ты получишь две точки искомой кривой. Конхоида Никомеда состоит из двух ветвей, лежащих по разные стороны от прямой AB.

Попытайся догадаться, какой вид будет иметь конхоида Никомеда, если длина отрезка a будет: 1) равна расстоянию от точки O до прямой AB, 2) больше этого расстояния.

Конхоида Никомеда имеет исторический интерес. За 200 лет до нашей эры она была применена к решению знаменитой задачи о делении произвольного угла на 3 равные части.

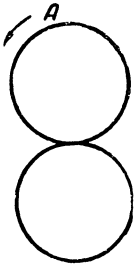


Рис. 28.

Такие же построения можно выполнить, взяв вместо прямой AB окружность. В этом случае полюс O можно брать по-разному. Рассмотри хотя бы два случая: 1) полюс O совпадает с центром окружности; 2) полюс O лежит на окружности и a равняется радиусу этой окружности. Какие линии (их называют улитками Паскаля*) получатся?

287. *Кардиоида.* Возьми два равных кружочка, вырезанных из фанеры (можно взять две одинаковые монеты). Один из этих кружочков закрепи. Второй приложи к первому, отметь на краю его точку A, наиболее удалённую от центра первого кружка (рис. 28). Затем кати без скольжения подвижный кружочек по неподвижному и наблюдай, какую линию опишет точка A. Начерти эту линию. Она является одной из улиток Паскаля и называется кардиоидой. В технике эта кривая очень часто используется для устройства кулачковых механизмов.

Сколько оборотов сделает второй кружок к тому времени, когда он вернётся в первоначальное положение? Ответ проверь, воспользовавшись для этого двумя одинаковыми монетами.

288. *Развёртка окружности.* Возьми кружочек, выпиленный из фанеры или дощечки, и закрепи его на листе бумаги, лежащем на столе. Намотай на этот кружочек нить. На конце этой нити сделай петлю, вставь в неё карандаш и, натягивая нить, сматывай её с кружочка. Тогда конец каран-

---

* Блез Паскаль — знаменитый французский математик (1623—1662 гг.).

даша на листе бумаги опишет некоторую кривую линию (спираль). Эта линия называется эвольвентой (развёрткой) окружности. По такой линии полетел бы с земли камень, если бы на него перестала действовать сила земного притяжения и не мешало бы сопротивление воздуха.

289. *Трактриса.* Возьми лист бумаги. Проведи на нём прямую линию AB. Возьми затем перочинный ножик, у которого лезвия были бы с двух концов. Раскрой эти лезвия, как показано на рисунке 29, и расположи ножик над

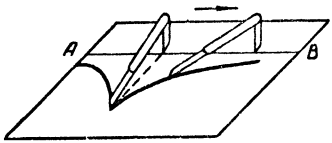


Рис. 29.

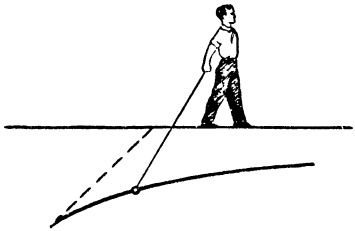


Рис. 30.

листом бумаги так, чтобы острия его находились на прямой, перпендикулярной AB. Кончик полураскрытого лезвия должен находиться на прямой AB. Свободно держа рукой за это лезвие, перемещай ножик так, чтобы кончик полураскрытого лезвия перемещался по прямой AB. Тогда второе, полностью раскрытое лезвие своим остриём прочертит на бумаге тонкую линию. Обведи её карандашом. Эта линия называется трактрисой (линией влечения).

Такую линию можно прочертить и на местности. На песчаной площадке проведи прямую линию, а затем возьми верёвочку и привяжи к ней камень. Встань на отмеченную прямую и расположи верёвочку с камнем так, чтобы она была перпендикулярна этой прямой и камень лежал бы на песке. Затем, держа конец верёвочки в руке, иди по отмеченной прямой и тяни за собой привязанный к верёвочке камень. Линия, прочерченная на песке камнем, и будет трактрисой (рис. 30).

Представь себе, что трактриса вращается вокруг прямой AB. Получится поверхность, напоминающая два бесконечных рупора, сложенных своими раструбами (рис. 31). Эта поверхность, играющая важную роль в геометрии, называется псевдосферой.

290. *Циклоиды.* Представь себе, что по прямой линии без скольжения катится круг. Проследи за тем путём, который опишет при этом точка A, взятая на окружности этого круга (рис. 32). Начерти получившуюся кривую. Она называется циклоидой. Циклоида обладает многими замечательными свойствами. Вот одно из них. Давно математики пытались решить такую задачу: какой формы должен быть гладкий жёлоб, соединяющий две точки, A и B (A — выше, чем B), чтобы гладкий металлический шарик скатился по этому жёлобу из точки A в точку B под действием своего веса в кратчайшее время. Можно подумать что жёлоб должен быть прямолинейным. Но это не так. Может быть, жёлоб следует выгнуть по дуге окружности, как думал известный итальянский физик, астроном и математик Галилей? Нет. Галилей ошибался. И только в 1696 году швейцарский математик И. Бернулли установил, что жёлоб должен быть выгнут по циклоиде, опрокинутой вниз (рис. 33).

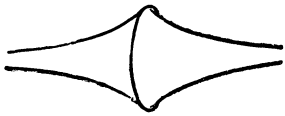


Рис. 31.

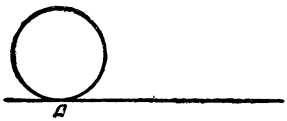


Рис. 32.

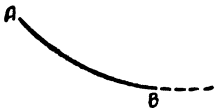


Рис. 33.

Пусть к кругу, катящемуся по прямой линии, радиально прикреплена тонкая планочка. Какую линию опишет точка, лежащая на этой планочке и отстоящая от центра круга на расстоянии, большем радиуса? А какая линия получится, если это расстояние будет меньше радиуса? Каждая из этих кривых называется также циклоидой, в первом случае — удлинённой, во втором — укороченной.

291. *Гипоциклоиды.* Возьми кусок толстого картона или фанеры и сделай круговой вырез радиуса 12 *см*. Из того же материала вырежь затем три кружка с радиусами 4 *см*, 3 *см* и 2 *см*. Положи кусок картона с вырезанным в

нём отверстием на лист бумаги и вложи в этот вырез первый из трёх кружков, чтобы он касался края выреза, и отметь на окружности этого кружка точку (рис. 34). Проследи за тем, какую линию опишет отмеченная точка, когда кружок покатится по окружности выреза без скольжения. Проделай то же самое со вторым и третьим кружками. Все получившиеся линии называются гипоциклоидами.

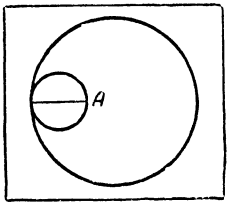


Рис. 34.

292. В математических рукописях XVII века можно встретить такое утверждение: фигуры с равными периметрами ограничивают равные площади. Верно ли это утверждение? (Приведи примеры.)

293. Установлено, что из всех замкнутых плоских кривых, имеющих одну и ту же длину, окружность ограничивает наибольшую площадь. Покажи, что площадь, ограниченная замкнутой плоской кривой, длина которой l, не может оказаться больше, чем $\frac{l^2}{4\pi}$.

Глава IV

ЛОГИКА В МАТЕМАТИКЕ

Учись правильно рассуждать

«Однажды, в самом начале учебного года, мне пришлось услышать разговор двух девочек. Старшая из них перешла в шестой класс, младшая — в пятый. Девочки делились своими впечатлениями об уроках, учителях, подругах, о новых предметах. Шестиклассницу очень удивили уроки геометрии: «Вот чудеса, — говорила она, — пришла учительница в класс, нарисовала на доске два равных треугольника, а потом целый урок доказывала нам, что они равны. Никак не пойму: зачем это нужно?» «А как же ты урок будешь отвечать?» — спросила младшая девочка. «Выучу по учебнику... вот только очень трудно запоминать, где какую букву нужно ставить...» Таким рассказом начинается интересная книжка «О доказательстве в геометрии» А. И. Фетисова (Гостехиздат, 1954).

Мне тоже много раз приходилось слышать от шестиклассников, что они не понимают, зачем нужно рассуждениями доказывать геометрические теоремы. «Что вертикальные углы равны, — говорили они, — это и так видно». «Что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны — это показывает чертёж. Чего же тут ещё рассуждать?» — удивлялись они. Нельзя было оставлять такие вопросы без ответа, вот и приходилось беседовать с учащимися о математических доказательствах. Об одной из таких бесед я и расскажу.

Шестиклассник Боря сказал мне, что геометрические теоремы надо доказывать чертежами. «Посмотришь на чертёж и сразу видно, что теорема верна. Глаз не обманет»,— говорил он. Тогда я показал Боре несколько имевшихся у меня под руками чертежей. «Сравни вот эти два отрезка по длине», — попросил я (рис. 35). Боря посмотрел

на чертёж и, усмехнувшись, сказал: «Конечно, вертикальный длиннее». «А сейчас?» — и я показал второй чертёж (рис. 36). «Ясно, что левый длиннее», — заявил

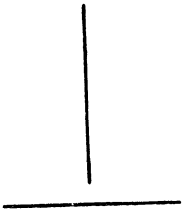


Рис. 35.

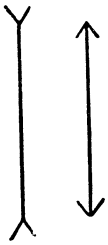


Рис. 36.

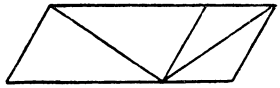


Рис. 37.

Боря. «А вот два параллелограмма (рис. 37) и в каждом из них проведена диагональ. Сравни их». И на этот раз Боря уверенно заявил, что левая диагональ длиннее. Тогда

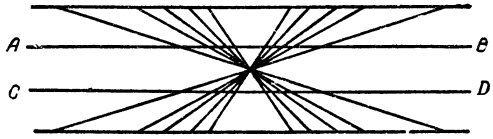


Рис. 38.

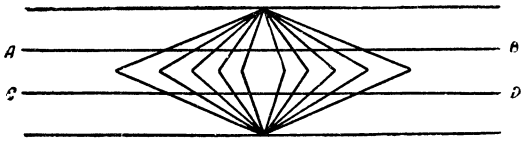


Рис. 39.

я попросил Борю взять линейку и измерить все сравниваемые отрезки. Он охотно сделал это, ничуть не сомневаясь, что измерения только подтвердят его ответы. Но измерения показали, что на каждом из этих чертежей сравниваемые отрезки равны. Боря не поверил этому и снова начал измерять. Новые измерения привели к тому же выводу —

отрезки равны. Лицо Бори выражало растерянность. Он моргал глазами, силясь понять, в чём же дело.

Затем я показал Боре ещё три чертежа (рис. 38, 39, 40) и попросил его установить, прямые или кривые линии *AB* и *CD* на этих чертежах. Ответ был таким: «Конечно, кривые». И снова Боря растерялся, когда приложил к этим линиям линейку и обнаружил, что все эти линии — прямые.

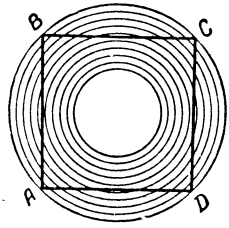


Рис. 40.

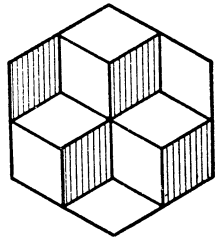


Рис. 41.

Наконец я показал Боре ещё один рисунок (рис. 41) и спросил, что изображено на нём. Он внимательно посмотрел и сказал: «Тут изображены три кубика: один вверху, а два внизу». «Посмотри снова, — попросил я, — так как мне кажется, что вверху два кубика, а под ними один». Боря снова внимательно посмотрел. «А ведь верно, два вверху и один внизу. Почему же мне вначале показалось, что наоборот? Постойте, постойте, опять два внизу, а один вверху». Боря удивлённо потёр глаза. «Как же так? Снова два сверху, а один снизу. Чудно».

После всего этого мне осталось спросить Борю, можно ли доказывать чертежами теоремы, не могут ли наши глаза обмануть нас. И Боря честно признал, что рассмотрение чертежей может привести к ошибкам, потом немного подумал и, оживившись, сказал: «Глазам доверять нельзя, а надо измерять». Пришлось мне продолжить беседу. Я сказал Боре, что всякие измерения неточны, да к тому же выполнить их часто бывает трудно Может, например, не оказаться под руками нужных инструментов. Но главное — в другом. Измерить можно один или несколько отрезков, один или несколько углов и т. д. Но все фигуры из-

мерить невозможно. И то, что верно для каких-нибудь двух измеренных треугольников, может оказаться неверным для других треугольников. Как же быть? Вывод сделал сам Боря. «Делать нечего, придётся учиться рассуждать, чтобы доказывать теоремы». Это был хороший вывод. Действительно, **надо учиться правильно, логически рассуждать.**

В заключение беседы я рассказал Боре то, что недавно слышал на одном уроке геометрии в VI классе. На этом уроке перед изучением теоремы о свойствах равнобедренного треугольника была проведена опытная работа. Каждый ученик в своей тетради начертил равнобедренный треугольник и с помощью транспортира измерил углы при основании этого треугольника. После этого был сделан вывод, что углы при основании равнобедренного треугольника оказываются равными. Сформулирована была теорема. Затем учитель сказал так: «Мы проверили теорему об углах при основании равнобедренного треугольника для 35 таких треугольников (на уроке было 35 учеников). Если эта теорема оказалась верной для 35 равнобедренных треугольников, то можно ли отсюда сделать вывод, что она будет верна для любого треугольника? А может быть для тридцать шестого треугольника, который мы начертим, она будет неверна? Если бы все вы занялись опытной проверкой этой теоремы, могли бы вы испытать всевозможные равнобедренные треугольники? Почему бы вы не могли проверить теорему опытным путём для всех равнобедренных треугольников, если бы занимались этим даже всю свою жизнь? А если бы все люди на земном шаре занялись этим, то и тогда полной уверенности в справедливости этой теоремы всё-таки не было бы. Как же быть? На помощь приходят рассуждения, и за 10 минут мы сделаем то, что невозможно сделать опытной проверкой, если бы даже этой проверкой занялись все ученики всех школ. При помощи логических рассуждений мы докажем теорему для всевозможных равнобедренных треугольников. Вот какую важную роль играют в геометрии рассуждения». Дальше на уроке было проведено доказательство этой теоремы.

Боря слушал меня очень внимательно. И когда мы расставались, он сказал, что теперь понял, зачем надо доказывать теоремы так, как это делается на уроках, и что растолкует всё это другим ученикам своего класса.

И ты, юный читатель этой книги, постарайся понять,

зачем нужно доказывать теоремы при помощи логических рассуждений, и сделай для себя вывод, что нужно настойчиво учиться правильно рассуждать.

Пойми, что доказательство теоремы — это цепочка логических рассуждений, сводящих доказываемую теорему к ранее доказанным теоремам и введенным аксиомам. Но ранее доказанные теоремы сводятся к теоремам, которые были доказаны ещё раньше. В конечном счёте, все теоремы опираются на принятые без доказательства, выведенные из опыта аксиомы.

Есть такая наука, она называется логикой, которая учит, как нужно рассуждать, чтобы наше мышление было определённым, связным, последовательным, доказательным и непротиворечивым. Как человек, не знающий правил арифметики и грамматики, не может правильно считать и грамотно писать, так и человек, не знающий правил логики, не может без ошибок рассуждать и действовать. Значит, советский человек, чтобы принести больше пользы своей великой Родине, делу построения коммунизма, должен хорошо знать логику.

Особенно много приходится рассуждать в математике. Человеку, занимающемуся математикой, очень часто приходится определять понятия, выяснять связи между ними, рассматривать, на какие группы (виды) могут быть подразделены фигуры, числа, уравнения и т. д. Но особенно часто в математике приходится путём рассуждений выводить разнообразные формулы, правила и доказывать теоремы. Не случайно находились такие математики, которые думали, что математика это наука «о производстве необходимых умозаключений». Такой взгляд на математику, конечно, ошибочен, но верно то, что без логики не может быть математики. А это значит, что для успешного изучения математики надо настойчиво учиться правильно рассуждать. Это значит также, что само изучение математики очень полезно для овладения правилами и законами мышления. Не без оснований называют иногда математику «оселком для ума». Не случайно М. И. Калинин говорил ученикам старших классов средних школ Ленинского района г. Москвы, что «...математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика — это гимнастика ума. Я не сомневаюсь, что голова у вас ломится от мыслей, но эти мысли надо упорядочить, дисциплинировать, направить, если можно так выразиться,

в русло полезной работы. Вот математика и поможет вам справиться с этой задачей».

Жизнь, особенно техника, а также другие науки, ставят перед математикой всё новые и новые задачи. Для решения этих задач математикам приходится разрабатывать вопросы математической теории и создавать методы, обеспечивающие успешное решение возникающих задач. Как же поступают математики? На помощь математикам приходят логические рассуждения. Решение всякой задачи по математике — это прежде всего цепь рассуждений. Вычисления и геометрические построения, которыми так часто приходится пользоваться для решения задач, невозможны без логических рассуждений, они направляются рассуждениями. Значит, в математике невозможно обойтись без логики.

Приведём несколько примеров. В 1781 году была открыта планета Уран. Наблюдения за движением этой планеты в конце XVIII и в начале XIX веков показали, что оно несколько отличается от теоретически вычисленного движения. Объяснить это отличие можно было лишь влиянием на Уран новой, неизвестной планеты, находящейся ещё дальше от Солнца. И вот французский учёный Леверье (1811—1877 гг.), исходя из отклонений в движении Урана, логически рассуждая и выполнив довольно сложные вычисления, указал положение этой планеты на небе. И действительно, в указанном Леверье участке неба 23 сентября 1846 года астроном Галле нашёл новую планету, названную потом Нептуном. Это открытие является одним из выдающихся достижений человеческого мышления. Так же была открыта девятая, следующая за Нептуном, планета Плутон.

Математика помогла также открытию многих малых планет, например Цереры. Цереру впервые наблюдал астроном Пиацци, но он из-за перерыва в наблюдениях потерял её. На помощь пришёл знаменитый математик Гаусс. Располагая некоторыми данными о новой планете, полученными Пиацци, он вычислил путь этой планеты. И действительно, по указаниям, данным Гауссом, она была вновь найдена.

Вот ещё один пример, иллюстрирующий значение логики в математике. Ещё в глубокой древности люди пытались опытным путём найти отношение длины окружности к её диаметру, т. е. пытались найти число, показывающее, во сколько раз длина окружности больше длины её диамет-

ра. Этим числом, обозначаемым буквой π (пи), приходится пользоваться, например, для вычисления по известному диаметру длины окружности и площади круга, а также для решения многих других важных задач. Значит, надо было с необходимой точностью определить число π. Опытное вычисление π могло дать лишь грубо приближённый результат. На ранних ступенях человеческой культуры пользовались этими неточными значениями числа π. В древнем Египте, например, свыше 3 тысяч лет тому назад π считали равным 3. В нашей стране в начале XVII века часто пользовались этим же значением π. Позднее употреблялись значения π, равные 3,14, иногда 3,16. В III веке до нашей эры один из величайших математиков древней Греции, талантливый изобретатель, верный сын своей родины, погибший в борьбе с врагами её, Архимед без измерений, одними лишь рассуждениями и вычислениями нашёл для числа π довольно точное значение $3\frac{1}{7}$ (архимедово число). Позднее другие математики, воспользовавшись открытием Архимеда, вычислили π с ещё большей точностью. Так, в XVI веке немецкий математик Лудольф, затратив очень много времени, вычислил 35 десятичных знаков этого числа. Лудольфово значение π равно

3,14 159 265 358 979 323 846 264 338 327 950 288.

Вычисления более точных значений π после Лудольфа не прекращались. В 1873 году малоизвестным математиком Шенксом вычислено было 527 десятичных знаков этого числа. Шенкс, правда, вычислил всего 707 десятичных знаков, но, начиная с 528-го его знаки ошибочны. Такое приближённое значение π, какое найдено было Шенксом, не имеет практической и теоретической ценности. И всё же в Англии и США нашлись математики, которые в 1946—1947 годах, в погоне за рекордом, вычислили 808 десятичных знаков числа π. Важно то, что логические рассуждения, позволившие развить геометрию и другие части математики, дают возможность вычислить число π с любой степенью точности, без каких бы то ни было измерений.

Всё сказанное о значении логических рассуждений заставляет сделать вывод о необходимости настойчивого овладения умением логически рассуждать. Каждому нашему школьнику надо упорно учиться правильно мыслить. Может быть, это следует делать лишь в старших классах средней школы? Нет! Учиться логически рассуждать нужно

много и постоянно во всех классах средней школы. Для учеников V — VIII классов в этом отношении будут очень полезны приводимые ниже вопросы и упражнения, развивающие логическое мышление. Попытайся разобраться в них. Отнесись к ним с должной вдумчивостью. Не торопись с ответами.

Верные и ошибочные утверждения

294. Какие из приведённых ниже утверждений верны и какие ошибочны:

1) Если произведение двух целых чисел делится на 6, то хотя бы один из множителей делится на 6.

2) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулём.

3) Сумма двух нечётных чисел есть нечётное число.

4) Не существует целого числа, куб которого оканчивался бы цифрой 2.

5) Для того чтобы $a^3 = a^2$, необходимо, чтобы $a = 1$.

6) Для того чтобы куб целого числа делился на 5, необходимо, чтобы это число делилось на 5.

7) Квадрат любого чётного числа делится на 4.

8) Всякое натуральное число, большее 1, делится хотя бы на одно простое число.

9) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

10) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

11) Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$.

Составные части математических утверждений

295. В каждом из приведённых ниже математических предложений выдели условие и заключение:

1) Сумма двух чётных чисел — чётное число.

2) Если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

3) Разность нечётных чисел — чётное число.

4) Квадрат чётного числа делится на 4.

5) Произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

6) Произведение двух чисел равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0.

296. Выдели в следующих утверждениях условия и заключения:

1) Если в треугольнике все стороны равны, то и все углы его равны.

2) Вертикальные углы равны.

3) Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

4) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

5) Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно сумме радиусов этих окружностей.

Обратная и противоположная теоремы

297. Для каждого из приведённых ниже утверждений сформулируй обратное и установи, будет оно верным или нет:

1) Если число оканчивается нулём, то оно делится на 5.

2) Если каждое из двух слагаемых есть чётное число, то сумма их — чётное число.

3) Сумма трёх нечётных чисел есть нечётное число.

4) Если a целое число, то $6a$ также целое число.

5) Если число делится на 2 и 3, то оно делится на 6.

6) Если число делится на 10, то оно делится на 5.

298. Для каждого из следующих утверждений сформулируй обратное и установи, верно или нет это обратное утверждение:

1) Если углы вертикальны, то они равны.

2) Всякий равносторонний треугольник — равнобедренный.

3) Всякий равносторонний треугольник — равноугольный.

4) Если в треугольнике один угол тупой, то два остальных острые.

5) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, то такие треугольники равны.

6) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

7) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

299. Для каждого из приведённых ниже верного или

неверного утверждения сформулируй обратное и установи, верно оно или нет:

1) Если один из двух множителей равен 0, то произведение их также равно 0.

2) Если диагонали четырёхугольника равны, то такой четырёхугольник — прямоугольник.

3) Если диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырёхугольник — ромб.

4) Если стороны одного острого угла соответственно перпендикулярны сторонам другого острого угла, то такие углы равны.

5) Симметричные фигуры равны.

300. Для теоремы: «Диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам», сформулируй обратную и докажи её. Сформулируй теоремы, противоположную прямой и противоположную обратной. Верны ли они?

301. Для теоремы. «Четырёхугольник, в котором диагонали точкой их пересечения делятся пополам, есть параллелограмм», сформулируй обратную. Верна ли она?

302. Для теоремы: «Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9», сформулируй обратную, противоположную и противоположную обратной. Верны ли они?

303. Верна ли теорема: «Четырёхугольник, у которого один из углов прямой и диагонали равны, есть прямоугольник»?

304. О треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC \neq A_1C_1$ и $BC \neq B_1C_1$. Равны ли эти треугольники?

305. Верна ли следующая теорема: «Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны»?

306. Сформулируй для теоремы «Прямые углы равны» — обратную, противоположную и противоположную обратной. Все ли эти теоремы верны?

Необходимые и достаточные условия

Условие называется **необходимым**, если оно вытекает из заключения. Условие называется **достаточным**, если из него вытекает заключение.

307. В каждом из следующих предложений вместо многоточия поставь: «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно».

1) Для того чтобы сумма двух целых чисел была чётным числом,..., чтобы каждое слагаемое было чётным.

2) Для того чтобы число делилось на 15,..., чтобы оно делилось на 5.

3) Для того чтобы число делилось на 3,..., чтобы оно делилось на 6.

4) Для того чтобы число делилось на 10,... чтобы оно делилось на 2 и 5.

5) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была больше 30,..., чтобы хотя бы одно из слагаемых было больше 15.

6) Для того чтобы произведение $(x - 3)(x + 2)(x - 5)$ было равно 0,..., чтобы $x = 3$.

7) Для того чтобы два квадрата имели одну и ту же площадь,..., чтобы стороны их были равны.

8) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2,..., чтобы каждое слагаемое делилось на 2.

9) Для того чтобы натуральное число делилось на 100,..., чтобы это число делилось на 10.

10) Для того чтобы натуральное число делилось на 100,..., чтобы это число делилось на 1000.

11) Для того чтобы четырёхугольник был прямоугольником,..., чтобы его диагонали были равны.

12) Для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом,..., чтобы все его стороны были равны.

13) Для того чтобы четырёхугольник был прямоугольником,..., чтобы все его углы были равны.

14) Для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом,..., чтобы его диагонали были равны.

15) Для того чтобы было верно неравенство $\frac{1}{x} < 1$,..., чтобы $x > 1$.

16) Для того чтобы было верно неравенство $\frac{1}{x} < 1$,..., чтобы было $x < 0$ или $x > 1$.

308. Для того чтобы в одном и том же круге (или в равных кругах) дуги были равны, необходимо и достаточно, чтобы стягивающие их хорды были равны. Какими двумя утверждениями можно заменить это утверждение?

309. Для того чтобы в одном и том же круге (или в равных кругах) хорды были равны, необходимо и достаточно, чтобы они были одинаково удалены от центра. Какими двумя утверждениями можно заменить это утверждение?

Несколько теорем и вопросов

310. Если сумма трёх целых чисел — число чётное, то что можно утверждать о произведении этих чисел?

311. Можно ли утверждать, что если каждый из сомножителей не делится нацело на данное число, то и произведение их не делится на это число?

312. Доказать, что если произведение некоторого двузначного числа на 5 есть двузначное число, то первая (слева) цифра двузначного сомножителя есть 1.

313. Произведение двух натуральных чисел оказалось нечётным числом. Чётным или нечётным числом будет сумма этих чисел? А если взять не два, а три числа?

314. Доказать, что если произведение двух натуральных чисел больше 82, то хотя бы одно из этих чисел больше 9. Сформулировать обратное предложение. Будет ли оно верно?

315. Какое равенство может получиться при почленном сложении (вычитании, умножении) двух неверных равенств? Приведи примеры.

Задачи

316. В школе 370 учащихся. Доказать, что среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, отмечающие своё рождение в один и тот же день.

317. В одном доме живут 13 учеников. Все они учатся в одной и той же школе. В этой школе 12 классов. Доказать, что хотя бы два ученика, живущие в этом доме, учатся в одном классе.

318. В одном хвойном лесу 550 000 елей. Ни на одной из них нет более 500 000 игл. Доказать, что по крайней мере у двух елей в этом лесу игл одинаковое число.

319. В одном из классов школы 23 ученика. Можно ли утверждать, что в этом классе найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы? А если бы в этом классе было 35 учеников?

320. Доказать, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить трёхрублёвками и пятирублёвками.

321. Доказать, что если даны какие-нибудь три натуральных числа, не делящиеся на 3, то либо сумма этих трёх чисел делится на 3, либо сумма двух из них делится на 3.

322. О некотором числе известно, что оно нечётно, не делится на 5 и что квадрат его оканчивается той же цифрой, что и само число. Узнать какая цифра стоит в конце этого числа.

323. В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее число яблок нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта?

324. В коробке лежат 4 цветных карандаша и 10 простых. Берут из этой коробки наугад несколько карандашей. Какое наименьшее число карандашей надо взять из коробки, чтобы среди них оказалось не менее: а) двух цветных, б) трёх простых?

325. Имеется 9 монет, не отличающихся по внешнему виду. Известно, что одна из этих монет фальшивая. Она имеет меньший вес.

Как, произведя только два взвешивания (без разновесов) на чашечных весах, выделить фальшивую монету? А если бы монет было 10?

326. В отдел контроля цеха принесли 26 одинаковых по внешнему виду металлических деталей. Известно, что одна из этих деталей имеет внутри пустоту. Как с помощью только трех взвешиваний (без разновесов) на чашечных весах, выделить эту деталь?

327. Имеется 80 монет. Среди них есть одна фальшивая, более лёгкая, чем все остальные, имеющие одинаковый вес. Как с помощью только четырёх взвешиваний монет на чашечных весах без разновесов выделить фальшивую монету?

328. Ученица шестого класса купила в магазине 9 тетрадей, несколько блокнотов по 6 коп. и 3 карандаша. Продавец выписал ей чек на 58 коп. Взглянув на чек, ученица сразу же сказала продавцу, что он ошибся. Продавец удивился, как могла ученица так быстро обнаружить ошибку. Пересчитав снова, продавец действительно нашёл ошибку. Как могла ученица, только взглянув на чек, заметить ошибку?

329. Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года тому назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену семьи?

330. Два пионера, живущие в одном колхозе, одновременно вышли в школу. Первый из них половину всего времени,

затраченного на дорогу, шёл со скоростью 5 *км* в час, а затем шёл со скоростью 4 *км* в час. Второй же первую половину всего пути от колхоза до школы шёл со скоростью 4 *км* в час, а вторую—со скоростью 5 *км* в час. Который из пионеров раньше пришёл в школу?

331. Произведение четырёх последовательных натуральных чисел равно 3024. Найти эти числа.

Затруднительные положения

332. Требуется разделить 7 одинаковых яблок поровну между восемью мальчиками. Как сделать так, чтобы разрезов пришлось сделать возможно меньше?

333. Как разделить на две равные части 12 вёдер хлебного кваса, находящегося в двенадцативедёрном бочонке, пользуясь для этого ещё двумя пустыми бочонками: восьмиведёрным и пятиведёрным?

334. Четырём колхозникам нужно было переправиться через реку. Подойдя к ней, они увидели небольшую лодку, в которой плыли два мальчика. Колхозники попросили мальчиков перевезти их через реку, но оказалось, что в лодку могут сесть только два мальчика или же один взрослый. Мальчикам очень хотелось помочь колхозникам, и они придумали, как это сделать. Через некоторое время колхозники на этой лодке переправились через реку. Что же придумали мальчики?

335. Человеку надо переправить через реку волка, козу и открытую корзину с капустой. Но вот беда: лодка так мала, что она может держать только человека, а с ним или только волка, или только козу, или только капусту. Оставить на одной стороне волка и козу, а также козу и капусту никак нельзя. Положение казалось безвыходным, но человек всё же нашёл выход. Всё в целости он перевёз на этой лодке через реку. Как он это сделал?

336. Вот что рассказал один человек «Проснувшись сегодня утром, я посмотрел на свои стенные часы. Они стояли. Других часов у меня не было. Радио молчало. Я подумал, как мне правильно поставить свои часы, и вот что я сделал. Встав, я отправился к приятелю, живущему через два квартала от меня. Придя к нему, я сразу же посмотрел на его часы, которые шли правильно. Побеседовав немного с приятелем, я простился с ним, посмотрел на его часы

ещё раз и пошёл домой. Как только пришёл домой, я немедленно поставил свои часы и поставил их почти точно. Как я это сделал? Догадайтесь».

337. В старинных задачниках по арифметике можно встретить такую задачу: «Отец завещал трём своим сыновьям 19 лошадей. Старший сын должен был получить $\frac{1}{2}$, средний $\frac{1}{4}$, а младший $\frac{1}{5}$ всех лошадей. Когда отец умер, сыновья никак не могли поделить между собой завещанных им лошадей и решили обратиться за помощью к приятелю отца. Тот, подумав, решил помочь братьям. Для этого он привёл свою лошадь, так что оказалось всего 20 лошадей. Из них 10 лошадей получил старший брат, 5 — средний, 4 — младший. Оставшуюся лошадь взял владелец её — приятель отца. Почему так получилось? Не допустил ли кто-нибудь ошибки? Разберитесь в этой задаче?

338. Три цветочницы перед входом в парк культуры и отдыха продавали букетики цветов. У первой было 33 букетика, у второй 29, а у третьей 27 Свои букетики цветочницы продавали одновременно по одинаковой цене. Распродав цветы, цветочницы подсчитали полученные ими деньги. Оказалось, что они получили за проданные цветы одну и ту же сумму денег. Как это могло случиться?

339. На сборе одного пионерского отряда затейники взяли пять одинаковых по размерам квадратиков бумаги: два из них белого цвета, а три — красного. Затем поставили рядом трёх пионеров: Васю, Колю и Петю и попросили каждого из них отвести одну руку за спину, и каждому, так, чтобы он не видел, вложили в эту руку квадратик красного цвета, а остальные два квадратика убрали. После этого каждому из трёх пионеров разрешили посмотреть какого цвета квадратики в руках у двух остальных, а затем каждому было предложено быстро сообразить, не отводя руки из-за спины, какого цвета у него квадратик. Коля первым догадался, какого цвета у него в руке квадратик. Как он рассуждал?

340. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи по 3 звена в каждом и попросили соединить их в одну цепь. Кузнец задумался, как выполнить этот заказ проще. Сколько же звеньев нужно разъединить, а затем вновь соединить, чтобы все обрывки образовали одну цепь? Подумав,

кузнец приступил к делу и, раскрыв только три звена, выполнил заказ. Как это сделал кузнец?

341. В детский сад, где было 50 детей, прислали яблоки: 60 крупных и 60 помельче. Было решено распределить их так: крупные раздать 30 детям по 2 штуки каждому, а мелкие — остальным 20 по 3 штуки. Таким образом, яблок хватало как раз на всех. Однако при перевозке оба сорта яблок смешались вместе. Тогда дежурный решил сделать так: зная, что крупных яблок надо давать по 2 на человека, а мелких по 3, он стал раздавать по 5 яблок из общей кучи на каждых двух человек. К его удивлению, для последних двух ребят яблок не осталось. Почему же так получилось?

342. Колхозница принесла для продажи на рынок в двух корзинах яблоки, по 30 штук в каждой корзине. Продавать эти яблоки она думала так: из первой корзины 2 яблока на 10 коп., а из второй 3 яблока на 10 коп. Всего колхозница рассчитывала выручить 2 руб. 50 коп. Пока она готовилась к продаже, ей пришла в голову мысль — смешать яблоки и продавать их по 20 коп. за 5 штук. Так она и сделала, рассчитывая выручить при таком способе продажи ту же самую сумму. Каково же было её удивление, когда оказалось, что она выручила не 2 руб., 50 коп., а 2 руб. 40 коп. Почему же так получилось?

343. Пионеру одного звена, хорошему рисовальщику, вожатый дал задание — нарисовать всех тех пионеров звена, которые не могут себя нарисовать. Пионер задумался; как же ему быть с самим собой? Если он себя может нарисовать, то он не должен себя рисовать, но если он себя не нарисует, то должен себя нарисовать. В самом деле, как же быть?

344. Из квадрата, сторона которого равна 3 единицам длины, нужно вырезать фигуру, представляющую собой развёртку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1. Как это можно сделать?

345. Поблизости один от другого расположены два населённых пункта *A* и *B*. Все жители *A* говорят только правду, а жители *B* всегда лгут. Жители *A* и *B* посещают друг друга. Ты находишься в каком-то из этих пунктов. Какой вопрос (только один) ты можешь задать первому встретившемуся тебе в этом пункте человеку, чтобы по ответу на этот вопрос ты мог установить, *A* это или *B*?

Математические софизмы

Софизмом называется умышленно ложное умозаключение, которое имеет видимость правильного. Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в математических софизмах скрыто выполняются запрещённые действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил. Иногда рассуждения ведутся с использованием ошибочного чертежа или опираются на приводящие к ошибочным заключениям «очевидности». Встречаются софизмы, содержащие и другие ошибки.

В истории развития математики софизмы играли существенную роль. Они способствовали повышению строгости в математических рассуждениях и содействовали более глубокому уяснению понятий и методов математики. Роль софизмов в развитии математики сходна с той ролью, какую играли непреднамеренные ошибки в математических доказательствах, допускаемые даже выдающимися математиками. Иван Петрович Павлов говорил, что «правильно понятая ошибка — это путь к открытию». Действительно, уяснение ошибок в математических рассуждениях часто содействовало развитию математики. Особенно поучительна в этом отношении история аксиомы Евклида о параллельных прямых. Формулируется эта аксиома, как известно, так: через данную точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Это утверждение на протяжении более чем двух тысяч лет пытались доказать, т. е. вывести из остальных аксиом геометрии, многие выдающиеся математики разных времён и разных народов*. Все эти попытки не увенчались успехом. Многочисленные «доказательства», какие были найдены, оказались ошибочными. «Строгого доказательства сей истины, — писал великий русский математик Н. И. Лобачевский в 1823 году в своём учебнике геометрии, — до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут назваться только пояснением, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами». И всё же, несмотря

* Аксиомы — это исходные положения опытного происхождения, принимаемые в математике без логических доказательств. Особенности аксиомы параллельных давали повод думать, что она может быть превращена в теорему, т. е. доказана с помощью остальных аксиом геометрии.

на ошибочность этих доказательств, они принесли пользу развитию геометрии. Были основательно выяснены связи между различными теоремами геометрии. Можно сказать, что эти «доказательства» подготовили одно из величайших открытий в области геометрии и всей математики — открытие новой неевклидовой геометрии. Честь этого открытия и разработки новой геометрии принадлежит нашему великому соотечественнику Н. И. Лобачевскому. Н. И. Лобачевский и сам сначала пытался доказать аксиому о параллельных, но скоро понял, что этого сделать нельзя. В 1826 году он установил, что утверждение, выражаемое аксиомой о параллельных, при помощи остальных аксиом геометрии доказать нельзя. Путь, идя которым Лобачевский установил невозможность доказательства аксиомы параллельных, и привел его к открытию новой геометрии. Это открытие было одним из тех, которые прославили русскую математику.

Примеров подобного рода можно было бы привести несколько. Они убеждают в том, что преодоление ошибок в математических рассуждениях содействует развитию математики.

Чем же полезны софизмы для изучающих математику? Что они могут дать?

Разбор софизмов прежде всего развивает логическое мышление, т. е. прививает необходимые в жизни навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку в софизме это значит осознать её, а осознание ошибки предупреждает повторение её в дальнейшем в других математических рассуждениях. Когда ребёнок раз притронется к горячему предмету, то впоследствии он постарается этого не делать. Он будет много осторожнее. Так и изучающий математику впоследствии проявит больше осторожности, чтобы не повторить осознанную ошибку.

Далее, что особенно важно, разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого математического материала, развивает наблюдательность, вдумчивость и критическое отношение к тому, что изучается. Когда изучающий математику разбирает софизм, он знает, что может попасть в западню, а поэтому старается обезвредить её. Чтобы не попасть в ловушку, приходится очень внимательно продвигаться вперёд и каждый шаг делать с большой осторожностью. Вопрос стоит так: кто кого подчинит себе, софизм ли разбирающего его, или наоборот. Значит, мате-

матические софизмы заставляют внимательно и насторожённо продвигаться вперёд, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей, за допустимостью обобщений, за законностью выполняемых операций. Всё это нужно и полезно.

Наконец, разбор софизмов увлекателен. Только очень сухого человека не может увлечь интересный софизм. Как приятно бывает обнаружить ошибку в математическом софизме и тем как бы восстановить истину в её правах. И чем труднее софизм, тем большее удовлетворение доставляет разбор его.

Имеется много разных книжек, в которых собраны различные софизмы. В конце XIX века и начале XX особенно большой известностью среди учащихся пользовалась книжка Обреимова «Математические софизмы». Этой книжкой зачитывались. Трудно было найти гимназиста, который не читал бы её. Василию Ивановичу Обреимову, передовому, революционно настроенному деятелю народного образования последних десятилетий XIX века и начала XX, удалось собрать и обработать интересные софизмы. Не этот ли сборник математических софизмов имел в виду В. И. Ленин, когда он в одной из своих статей писал, что такие сборники учащимся «приносят свою пользу»?

Следует подчеркнуть, что В. И. Ленину в той борьбе, которую он вёл с врагами рабочего класса, часто приходилось разбирать и разоблачать разнообразные политические софизмы своих противников. Рассуждения по вопросам политики, содержащие замаскированные ошибки, В. И. Ленин сравнивал с математическими софизмами. Он говорил, что эти рассуждения похожи «... как две капли воды, на те рассуждения, которые математики называют математическими софизмами и в которых, — строго логичным, на первый взгляд, путем, — доказывается, что дважды два пять, что часть больше целого и т. д.»*. Эти слова В. И. Ленина показывают, что он знал математические софизмы и, наверно, это знание помогало ему разоблачать софизмы в политике.

Из книг о математических софизмах, изданных в наше время, интересна небольшая книга В. Брадиса, В. Минковского и А. Харчевой: «Ошибки в математических рассуж-

---

* В. И. Ленин, Сочинения, т. 7, изд. 4, Госполитиздат, 1946, стр. 77—78.

дениях» (Учпедгиз, 1959). В этой книге, написанной для учителя, много поучительного найдёт и ученик*.

Книжки о математических софизмах трудно достать. Поэтому мы решили в нашей «Математической шкатулке» дать несколько софизмов. При разборе этих софизмов надо постараться самостоятельно найти содержащиеся в них ошибки и отчётливо понять их. Ну, а если ошибки не обнаруживаются и указания, данные в этой книжке, не помогают? Как же тогда быть? Если софизм «не поддаётся», то надо обязательно обратиться за разъяснениями к учителю. Очень важно добиться отчётливого понимания ошибок, иначе софизмы будут бесполезны и может быть даже вредны. Не забудь об этом!

346. *4 руб. = 40 000 коп.* Возьмём верное равенство 2 руб. = 200 коп. и возведём его по частям в квадрат. Получится 4 руб. = 40 000 коп. В чём ошибка?

347. *5 = 6.* Попытаемся доказать, что 5 = 6. С этой целью возьмём числовое тождество: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$. Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. $5(7 + 2 - 9) = 6(7 + 2 - 9)$. Разделим обе части этого равенства на общий множитель. Получим 5 = 6. В чём ошибка?

348. *2 · 2 = 5.* Найди ошибку в следующих рассуждениях. Имеем числовое тождество: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части этого тождества общий множитель. Получим $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны. Поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

349. *2 = 3.* Найди ошибку в следующем «доказательстве». Разности $4 - 10$ и $9 - 15$ равны. К каждой из них прибавим одно и то же число $\frac{25}{4}$, тогда получим равные числа, значит, $4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$. Это тождество можно переписать в таком виде: $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$. Отсюда $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$, или $2 = 3$.

350. *5 = 1.* Желая доказать, что 5 = 1, будем рассуждать так. Из чисел 5 и 1 по отдельности вычтем одно и то

---

* Прочитай также интересную книгу: Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах, Гостехиздат, 1953.

же число 3. Получим числа 2 и -2. При возведении в квадрат этих чисел получаются равные числа 4 и 4. Значит, должны быть равны и исходные числа 5 и 1. Где ошибка?

351. *$4 = 8$.* Возьмём систему уравнений:

$$2x + y = 8;\ x = 2 - \frac{y}{2}.$$

Решим эту систему способом подстановки. Получим: $4 - y + y = 8$, т. е. $4 = 8$. В чём здесь дело?

352. *Все числа равны между собой.* Попытаемся доказать, что все числа равны между собой. Пусть $m \neq n$. Возьмём тождество: $m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2nm + m^2$. Имеем $(m - n)^2 = (n - m)^2$. Отсюда $m - n = n - m$, или $2n = 2m$, а значит, $n = m$. В чём ошибка?

353. *Любое, отличное от нуля, число равно противоположному ему числу.* Какая ошибка допущена в следующих рассуждениях? Возьмём произвольное, отличное от 0, число a. Обозначим его буквой x, $x = a$. Обе части этого равенства умножим на $-4a$. Получим $-4ax = -4a^2$, или $-4ax + 4a^2 = 0$. К обеим частям этого равенства прибавим x^2. Получим $x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2$, или $(x - 2a)^2 = x^2$. Значит, $x - 2a = x$, но $x = a$, поэтому $a - 2a = a$, или $-a = a$.

354. *Любое число равно половине его.* Возьмём два равных числа a и b, $a = b$. Обе части этого равенства умножим на a и затем вычтем из них по b^2. Получим $a^2 - b^2 = ab - b^2$, или $(a + b)(a - b) = b(a - b)$. Отсюда $a + b = b$, или $a + a = a$, так как $b = a$. Значит, $2a = a$, или $a = \frac{a}{2}$. Какая ошибка допущена в этих рассуждениях?

355. *Отрицательное число больше положительного.* Возьмём два положительных числа, a и b. Сравним два отношения: $\frac{a}{-b}$ и $\frac{-a}{b}$. Они равны, так как каждое из них равно $-\frac{a}{b}$. Можем составить пропорцию: $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$. Но если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то и предыдущий член второго отношения больше своего последующего. В нашем случае $a > -b$, следовательно, должно быть $-a > b$, т. е. отрицательное число больше положительного. В чём ошибка?

356. *Любое число равно числу, в два раза большему его.* Пусть a — какое угодно число. Возьмём тождество: $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$. В левой части его вынесем a за скобки, а правую часть разложим на множители по формуле разности квадратов. Тогда получим: $(a - a)a = (a - a)(a + a)$. Упростив это тождество, получим $a = 2a$. В чём здесь ошибка?

357. *Любое число равно нулю.* Найди ошибку в таком рассуждении. Каково бы ни было число a, справедливы

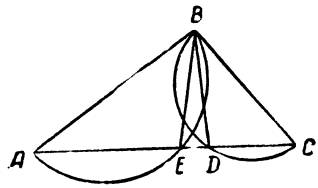


Рис. 42.

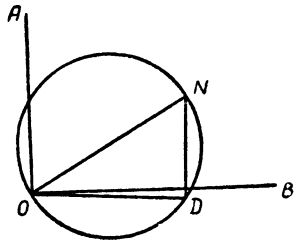


Рис. 43.

равенства: $(+a)^2 = a^2$ и $(-a)^2 = a^2$. Следовательно, $(+a)^2 = (-a)^2$, а значит, $+a = -a$, или $a + a = 0$, но тогда $2a = 0$ и поэтому $a = 0$.

358. *Из точки на прямую можно опустить два перпендикуляра.* Попытаемся доказать, что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмём треугольник ABC (рис. 42). На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D. Соединим точки E и D прямыми с точкой B. Угол AEB — прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр, угол BDC также прямой. Следовательно, $BE \perp AC$ и $BD \perp AC$. Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC. В чём ошибка?

359. *Из точки, взятой на прямой, можно восставить к этой прямой два перпендикуляра* (лежащие с ней в одной плоскости). Найди ошибку в таком «доказательстве»: Возьмём прямой угол AOB (рис. 43). Через вершину O проведём внутри угла произвольную прямую и на ней от точки O отложим произвольный отрезок ON. Из середины этого

отрезка, как центра, опишем окружность, проходящую через точки O и N. Проведём через точку N прямую, параллельную AO. Пусть эта прямая пересекает окружность в точке D. Соединим отрезком прямой точки O и D. Угол ODN, как вписанный, опирающийся на диаметр, — прямой, а так как $ND \parallel AO$, то угол DOA тоже прямой. Следовательно, $OB \perp AO$ и $OD \perp AO$.

360. *Через точку, лежащую вне прямой, можно провести две прямые, параллельные данной прямой.*

Дана прямая MN и вне её точка A. Проведём через точку A прямую AB, параллельную прямой MN. Возьмём на MN некоторую точку C. На отрезке AC, как на диаметре, построим полуокружность. Пусть D — точка пересечения этой полуокружности с перпендикуляром к прямой MN, проходящим через точку C. Через точки A и D проведём прямую. Так как угол CDA прямой, а $CD \perp MN$, то AD— прямая, параллельная MN. Следовательно, через точку A проходят две прямые, параллельные прямой MN (рис. 44). В чём ошибка?

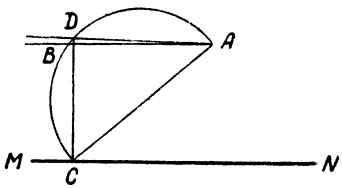


Рис. 44.

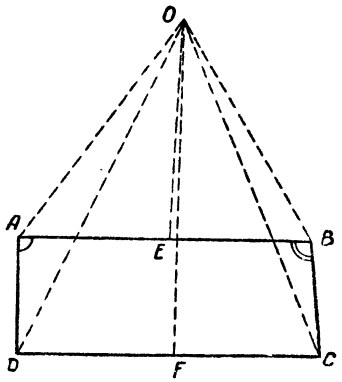


Рис. 45.

361. *Прямой угол равен тупому.* Попытаемся доказать, что прямой угол равен тупому. Для этого выполним следующее построение. Возьмём некоторый отрезок AB и при концах его A и B построим прямой угол и тупой (рис. 45). На сторонах этих углов от вершин их отложим равные отрезки $AD = BC$. Отрезки AB и DC разделим пополам и через точки деления проведём к этим отрезкам перпендикуляры. Так как AB и DC непараллельны, то эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O. Соединим точку O с точками A, B, C, D. Получившиеся треугольники AOD и BOC равны, так как $AO = OB$, $AD = BC$, $ДО =$

$= CO$. Значит, $\angle OAD = \angle OBC$, но $\angle EAO = \angle EBO$, поэтому $\angle DAE = \angle CBE$, т. е. прямой угол равен тупому.

Аналогично могут быть рассмотрены случаи, когда точка O лежит на AB и ниже AB (рис. 46). Вывод и в этих случаях будет такой же: прямой угол равен тупому. В чём же ошибка?

362. *Всякий треугольник — равнобедренный.* Пусть ABC (рис. 47) — произвольный треугольник. Проведём биссектрису угла A и перпендикуляр к стороне BC, проходящий через её середину D. Может оказаться так, что точка пе-

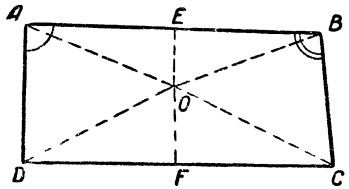


Рис. 46.

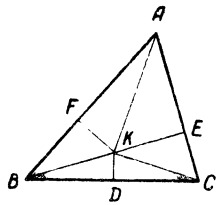


Рис. 47.

ресечения биссектрисы и перпендикуляра (K) будет лежать внутри треугольника ABC. Опустим из точки K перпендикуляры KE и KF на стороны AC и AB. Имеем $\triangle AEK = \triangle AFK$, а значит, $KE = KF$ и $AE = AF$. Треугольники BKD и CKD также равны, а поэтому $KB = KC$. Остаётся рассмотреть прямоугольные треугольники BKF и CKE. Они равны, так как $KE = KF$ и $KB = KC$. Из равенства этих треугольников вытекает, что $EC = FB$. Возьмём два равенства: $AE = AF$ и $CE = BF$. Сложив их по частям, получаем $AC = AB$. Аналогично можно провести рассуждения в случае, если точка K будет лежать вне треугольника ABC (рис. 48). Рассуждения в случае, если точка K будет лежать на стороне BC (совпадёт с D), также не сложны (проведи их сам). Во всех этих случаях приходим к выводу, что треугольник ABC — равнобедренный. Значит, любой треугольник — равнобедренный. Где ошибка?

363. *Всякая окружность имеет два центра.* Построим острый угол ABC (рис. 49) На сторонах его возьмём точки D и E и через них проведём перпендикуляры к сторонам угла. Пусть эти перпендикуляры пересекаются в точке F. Через три точки D, F и E проведём окружность. Эта

окружность пересечёт стороны угла в точках M и N. Отрезки MF и NF должны быть диаметрами построенной окружности, так как на них опираются вписанные в эту окружность прямые углы MDF и NEF. Середины отрез-

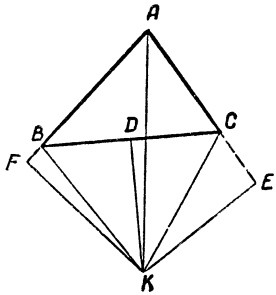


Рис. 48.

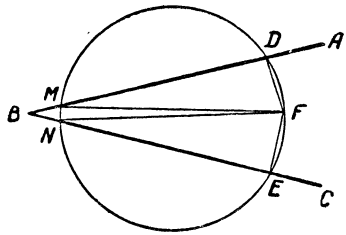


Рис. 49.

ков MF и NF должны быть центрами построенной окружности. Следовательно, окружность имеет два центра. Где ошибка?

364. *Внешний угол треугольника равен внутреннему, с ним не смежному.* Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором сумма углов A и C равна 180^0 (рис. 50). Через вершины D, A и B проведём окружность. Пусть эта окружность пересечёт сторону DC в точке E. Соединим точку E с точкой B отрезком прямой линии. Тогда $\angle C = 180^0 - \angle A$ (по построению), $\angle BED = 180^0 - \angle A$ (так как четырёхугольник $ABED$ — вписанный, а значит, сумма противоположных углов его BED и BAD равна 180^0). Следовательно, $\angle C = \angle BED$, но $\angle BED$ — внешний угол треугольника CBE, а $\angle C$ — не смежный с ним внутренний угол этого треугольника. Найди ошибку!

365. *Хорда, не проходящая через центр, равна диаметру.* Пусть в окружности проведён диаметр AB. Через точку B проведём какую-либо хорду BC, не проходящую через центр, затем через середину этой хорды D и точку A проведём новую хорду AE. Наконец, точки E и C соединим отрезком прямой (рис. 51). Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle EDC$. В этих треугольниках: $BD = DC$ (по построению), $\angle A = \angle C$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle BDA = \angle EDC$ (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответ-

ственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, $\triangle BDA = \triangle EDC$, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны Поэтому $AB = EC$. Где ошибка?

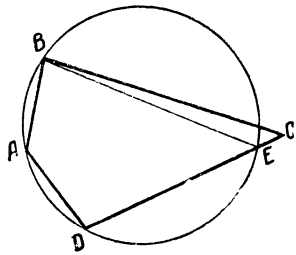


Рис. 50.

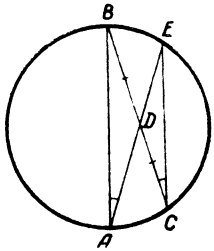


Рис. 51.

366. *64 = 65.* Квадрат со стороной, равной 8 единицам длины, разрезан на 4 части, как показано это на чертеже (рис. 52). Из этих частей сложен прямоугольник. Основа-

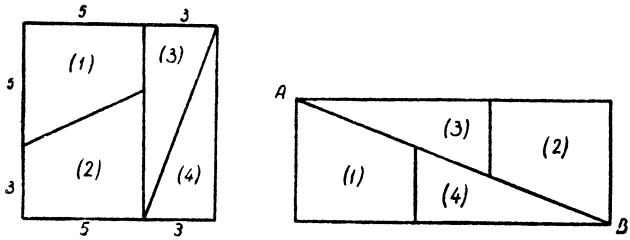


Рис 52.

ние этого прямоугольника оказалось равным 13 единицам длины, а высота — 5 единицам. Площадь исходного квадрата равна 64 квадратным единицам, а получившегося из него прямоугольника — 65 квадратным единицам. Значит, 64 = 65. В чём тут дело?

367. *Длины всех окружностей равны.* Соединим неподвижно относительно друг друга два круга разных радиусов так, чтобы центры их совпали. Заставим эти круги перемещаться так, чтобы больший из них покатился без

скольжения по прямой линии и сделал полный оборот (рис. 53). Тогда отрезок AB прямой линии будет иметь длину, равную длине окружности большего круга (с радиусом OA). Меньший круг, неподвижно скреплённый с большим, также сделает полный оборот. Отрезок A_1B_1 будет иметь длину, равную длине окружности меньшего

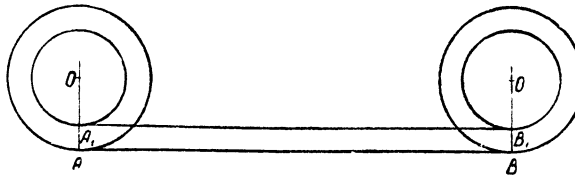


Рис. 53.

круга (с радиусом OA_1). А так как $AB = A_1B_1$ (как противоположные стороны прямоугольника), то, следовательно, длины этих двух окружностей равны. В чём тут дело?

368. *Несколько ученических ошибок.* 1) Ученику седьмого класса было предложено решить уравнение $2x^2 + 6x = 5x + 15$. Вот как поступил этот ученик. Обе части уравнения он разложил на множители и получил $2x(x + 3) = 5(x + 3)$. Так как слева и справа получился общий множитель $x + 3$, то на этот общий множитель ученик разделил уравнение по частям. Получилось: $2x = 5$, $x = 2\frac{1}{2}$. Какую грубую ошибку допустил этот ученик?

2) Ученик седьмого класса должен был решить уравнение: $2 + \frac{1}{x-3} = \frac{4-x}{x-3}$. Вот какое решение дал ученик: $2(x - 3) + 1 = 4 - x$, $2x - 6 + 1 = 4 - x$, $2x + x = 4 + 6 - 1$, $3x = 9$, $x = 3$. Какую грубую ошибку допустил в этом решении ученик?

3) Ученику восьмого класса было предложено решить уравнение: $x + x\sqrt{2} = 1$. Вот какое решение дал этот ученик: $x\sqrt{2} = 1 - x$, $2x^2 = 1 + x^2 - 2x$, $x^2 + 2x - 1 = 0$, $x = -1 \pm \sqrt{2}$. В чём ошибка?

Глава V

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Весёлые вопросы и задачи *

369. В каждом из четырёх углов комнаты сидит кошка. Напротив каждой из этих кошек сидят три кошки. Сколько всего в этой комнате кошек?

370. В клетке находятся три кролика. Три девочки попросили дать им по одному кролику. Просьба девочек была удовлетворена, каждой из них дали кролика. И всё же в клетке остался один кролик. Как могло так случиться?

371. Два отца и два сына разделили между собой три апельсина так, что каждому досталось по одному апельсину. Как это могло случиться?

372. У отца шесть сыновей. Каждый сын имеет сестру. Сколько всего детей у этого отца?

373. Двое пошли — пять грибов нашли. Четверо пойдут — много ли найдут?

374. Один пятиклассник написал о себе так: «Пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на обеих ногах 10». Как это так?

375. Представь себе, что ты машинист паровоза, ведущего пассажирский состав со станции Киров в Ленинград. Всего в составе поезда 13 вагонов. Обслуживается поезд бригадой в 30 человек. Начальнику поезда 46 лет. Кочегар на 3 года старше машиниста. Сколько лет машинисту паровоза?

376. Из Москвы в Киров вышел пассажирский поезд со скоростью 50 *км* в час. В то же время из Кирова навстречу первому поезду отправили скорый поезд, делающий 60 *км* в час. Какой из этих поездов будет дальше от Москвы в момент встречи их?

---

* Некоторые из предложенных здесь вопросов и задач являются шутками.

377. Летела стая уток. Одна впереди и две позади, одна позади и две впереди, одна между двумя и три в ряд Сколько летело уток?

378. В мастерской по пошиву одежды от куска сукна в 200 *м* ежедневно, начиная с 1 марта, отрезали по 20 *м*. Когда был отрезан последний кусок?

379. Два пильщика должны распилить бревно, длина которого $5\frac{1}{2}$ *м*, на полуметровые чурки. Во сколько минут они сделают это, если распиловка бревна поперёк продолжается каждый раз $2\frac{1}{2}$ мин.?

380. По стеблю растения, высота которого 1 *м*, от земли ползёт гусеница. Днём она поднимается на 3 *дм*, а ночью спускается на 2 *дм*. Через сколько суток гусеница доползёт до верхушки растения?

381. В книжном шкафу на одной полке стоят два тома собрания сочинений одного писателя. Первый том стоит слева от второго, рядом с ним. В первом томе 230 страниц, а во втором 325 страниц. Сколько всего страниц между первой страницей первого тома и последней страницей второго?

382. На уроке физкультуры ученики выстроились в линейку на расстоянии одного метра друг от друга. Вся линейка растянулась на 25 *м*. Сколько было учеников?

383. Пионеры Вася и Коля живут в многоэтажном доме: Вася на втором этаже, а Коля на четвёртом. Во сколько раз пол квартиры Коли расположен выше от поверхности земли, чем пол квартиры Васи (первый этаж начинается от поверхности земли и все этажи по высоте одинаковы)?

384. У Коли и Мани было поровну тетрадей. Коля из своих тетрадей дал две Мане. На сколько больше тетрадей стало у Мани, чем у Коли?

385. Книга в переплёте стоит 64 коп. Сколько стоит переплёт книги, если известно, что сама книга дороже переплёта её на 60 коп.?

386. Скорость течения реки 2 *км* в час. На сколько больше будет скорость движения катера по течению этой реки, чем против течения, при постоянной собственной скорости катера?

387. В двух классах 70 учеников. В одном из этих классов учащихся на 5 человек больше, чем в другом. Сколько учеников в каждом из этих классов?

388. Число увеличено на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить результат этого увеличения, чтобы получить первоначальное число?

389. Некоторое число было уменьшено на 25%. На сколько процентов нужно увеличить получившееся число, чтобы получить первоначальное число?

390. У старшего брата на 25% больше денег, чем у младшего. Сколько процентов своих денег старший должен дать младшему, чтобы у них стало денег поровну?

391. Изобретатели внесли три предложения по экономии электроэнергии, необходимой для работы мастерской. Одно из этих предложений даёт 30% экономии, другое 50%, а третье 20%. Решено было осуществить все три предложения. Можно подумать, что мастерской совсем не нужна будет электроэнергия. Так ли это?

392. Два землекопа за 2 часа работы выкопают 2 *м* канавы. Сколько нужно землекопов, чтобы они за 100 час. работы выкопали 100 *м* такой же канавы?

393. Сколько потребуется времени, чтобы поезд, длина которого 0,5 *км*, идущий со скоростью 60 *км* в час, прошёл тоннель, длиной в 0,5 *км*?

394. Хорошо известно, что пять в квадрате — это 25, десять в квадрате — 100, половина в квадрате — $\frac{1}{4}$, треть в квадрате — $\frac{1}{9}$. А чему равен угол в квадрате?

395. Число 666 требуется увеличить в полтора раза, не производя над этим числом никаких арифметических действий. Как это сделать?

396. Раздели число 188 пополам так, чтобы в результате получилась единица.

397. Требуется полсотни разделить на половину. Сколько получится?

398. Сколько получится десятков, если два десятка умножить на два десятка?

399. Какой знак надо поставить между 0 и 1, чтобы получить число, большее 0, но меньшее 1?

400. Сколько граней имеет неочиненный шестигранный карандаш?

401. Может ли быть сектор круга сегментом?

402. Существуют ли линии (отличные от окружности), все точки которых одинаково удалены от одной точки?

403. Контур какого предмета изображается одинаково, с какой бы точки зрения ни рисовать его?

Математическая викторина

Вопросы и задачи для математической викторины следует брать и из других разделов этой книги.

404. Арбуз стоит 10 коп. и ещё поларбуза. Сколько стоит арбуз?

405. Сколько сейчас времени, если оставшаяся часть суток в 2 раза больше прошедшей?

406. Имеется 9 *кг* крупы и гири в 50 *г* и 200 *г*. Как в три приёма на чашечных весах отвесить 2 *кг* крупы?

407. 6 рыбаков съели 6 судаков за 6 дней. За сколько дней 10 рыбаков съедят 10 судаков?

408. Половина — треть числа. Какое это число?

409. В классе 36 учеников. Мальчиков на 3 больше, чем девочек. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

410. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное, чтобы получить наибольшее трёхзначное число?

411. На сколько сумма всех чётных чисел первой сотни больше суммы всех нечётных чисел этой сотни?

412. Вычислить сумму наибольших однозначного, двузначного, трёхзначного и четырёхзначного чисел.

413. Вычислить: $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + \ldots + 100$.

414. Вычислить (возможно проще): $a^2 - 69a + 130$ при $a = 70$.

415. Сколько нулей в конце числа, выражающего произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots \cdot 14 \cdot 15$?

416. Вычислить: 1) $2^{2^{2^2}}$; 2) $[(2^2)^2]^2$; 3) $1^{3^{3^{3^3}}}$.

417. Можно ли указать наименьшее из всех дробных (положительных) чисел?

418. Какое число делится на все числа (без остатка)?

419. В каком случае произведение двух чисел равно множимому?

420. Когда частное равняется делимому?

421. Когда сумма двух чисел равна их разности?

422. Когда произведение двух чисел равно частному их?

423. Чему равен наибольший общий делитель двух чисел, если наименьшее общее кратное этих чисел равно произведению их?

424. Как записать 1000 при помощи восьми восьмёрок и знаков суммы?

425. Половина числа 12 оказалась равной 7. Как это могло случиться?

426. (Шутка). Две колхозницы шли в город и встретили по дороге ещё пять колхозниц. Сколько всего колхозниц шло в город?

427. (Шутка). Горело 5 свечей. Две из них потушили. Сколько свечей останется?

428. (Шутка). Что дороже: килограмм десятикопеечных монет или полкилограмма двадцатикопеечных?

429. (Шутка). Летела стая уток. Всего 5. Одну убили. Сколько осталось?

430. (Шутка). Угол в 1^0 рассматривают в лупу, дающую четырёхкратное увеличение. Какой величины покажется угол?

431. Кто впервые ввёл в употребление десятичные дроби?

432. Какую последнюю цифру имеет произведение всех нечётных двузначных чисел?

433. Кто предложил использовать запятую, как математический знак?

434. Кем было предложено обозначать отношение длины окружности к её диаметру буквой π (пи)?

435. Кем были предложены знаки умножения и деления ($\cdot$), (:)?

436. Когда у нас в стране была введена метрическая система мер в качестве обязательной?

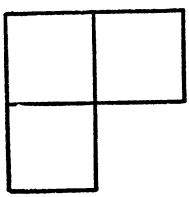


Рис. 54.

437. Заглавия каких литературных произведений начинаются с чисел: 3, 20, 80 000, 12?

438. Какой русский писатель окончил физико-математический факультет?

439. Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

440. В каком треугольнике высоты пересекаются в одной из его вершин?

441. Требуется провести прямую линию так, чтобы она пересекла все стороны треугольника. Как это сделать?

442. Как, не отрывая карандаш от бумаги, разделить фигуру (рис. 54) на шесть равных треугольников?

Развлечения.

443. *Угадай задуманное число.* Предложи своему товарищу задумать какое-либо трёхзначное число и приписать к нему точно такое же число. Получившееся шестизначное число попроси умножить на 2, результат разделить сначала на 7, затем, что получится на 11 и, наконец, на 13. Если твой товарищ скажет, что деление нацело не выполняется, то уверенно заяви, что товарищ ошибся, и предложи ему найти ошибку. После всего этого спроси, какой получился ответ, и ты немедленно назовёшь задуманное твоим товарищем число, разделив названный ответ на 2.

Подумай, почему так получается.

Вместо того чтобы умножать шестизначное число на 2, можно умножить его на 3, 5, 10 и другие числа. Тогда для получения задуманного числа названное товарищем число нужно делить соответственно на 3, 5, 10 и т. д.

444. *Угадай, сколько получится.* Предложи своим товарищам: «Задумайте каждый какое-либо трёхзначное число, но обязательно такое, чтобы цифра сотен не равнялась цифре единиц и не была бы на единицу меньше или больше её. Напишите для задуманного числа обращённое, т. е. число, изображаемое теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке. Из этих двух чисел (задуманного и обращённого) возьмите большее и вычтите из него меньшее. Для получившейся разности напишите снова обращённое число и вычислите сумму этой разности и обращённого для неё числа».

Когда всё это будет сделано, предложи одному из своих товарищей к получившемуся у него числу прибавить 100, другому 200, третьему 300 и т. д.

Ты можешь каждому сказать, какое число у него получилось. Для этого каждый раз прибавляй к 1089 то число, которое ты просил прибавить в конце. Так, у первого должно получиться 1189, у второго 1289 и т. д.

Ещё лучше будет, если эти числа ты заранее напишешь на листочках бумаги, заклеишь эти листочки в конверты, на конвертах напишешь имена своих товарищей, участвующих в этой игре, и, наконец, торжественно вручишь эти конверты с ответами своим товарищам.

Постарайся сам понять, в чём тут дело, а потом объясни и товарищам.

445. *Делимость на 11.* Предложи товарищу написать на классной доске или на бумаге любое многозначное число. К этому числу ты можешь быстро приписать справа или слева одну цифру так, что получившееся число разделится на 11. Если, например, твой товарищ напишет число 43 572, то тебе нужно будет приписать справа или слева к этому числу 1. Получившееся число 435 721 разделится на 11.

Знаешь ли ты, какую цифру нужно приписать к числу, чтобы получившееся после этого число делилось на 11? Чтобы разобраться в этом вопросе, воспользуйся признаком делимости на 11: на 11 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечётных местах, либо равна сумме цифр, занимающих чётные места, либо больше или меньше её на число, делящееся на 11.

Прежде чем выступать с этим номером, поупражняйся сам, а после выступления объясни товарищам «секрет» его.

446. *Делимость на 37.* На пионерском сборе ты можешь выступить с таким номером. Пусть кто-либо из пионеров на классной доске напишет какое-нибудь двузначное или трёхзначное число. Ты можешь очень быстро приписать к этому числу несколько цифр так, чтобы получившееся шестизначное число делилось на 37. Пусть, например, вызванный к доске напишет трёхзначное число 456. Тебе можно будет приписать слева или же справа к этому числу число 210, или 543, вообще такое трёхзначное число, чтобы оно в сумме с заданным трёхзначным числом дало трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами (в данном случае 666 или 999). Если зададут двузначное число, то его сначала надо дополнить какой-либо цифрой до трёхзначного. То же самое можно проделать и с четырёхзначным числом. Нужно только попросить написать такое четырёхзначное число, чтобы сумма числа тысяч и единиц не превосходила 9. Пусть, например, задано будет число 5674. Тогда слева придётся приписать цифры 3 и 2. Получится число 325 674. Найди объяснение.

447. *Угадай задуманное число.* В своей книге «Арифметика» Леонтий Филиппович Магницкий привёл следующий способ отгадывания задуманного двузначного числа: «Если кто задумает двузначное число, то ты скажи ему, чтобы он увеличил число десятков задуманного числа в 2 раза, к произведению прибавил бы 5 единиц, полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил сум-

му 10 единиц и числа единиц задуманного числа, а результат произведённых действий сообщил бы тебе. Если ты из указанного тебе результата вычтешь 35, то узнаешь задуманное число».

Почему так получается?

448. *Угадай сумму цифр задуманного числа.* Предложи своим товарищам каждому задумать какое-либо трёхзначное число, запись которого не содержит одинаковых цифр. Пусть затем, беря цифры задуманного числа по 2, каждый из задумавших число составит всевозможные двузначные числа (таких чисел будет 6) и вычислит сумму всех этих чисел. Спроси у любого участника этого развлечения, какая сумма получилась. Разделив эту сумму на 22, ты найдёшь сумму цифр задуманного твоим товарищем числа.

Пусть, например, твой товарищ задумал число 145. Сумма всех двузначных чисел для этого числа будет равна $14 + 15 + 45 + 41 + 51 + 54 = 220$. Если ты 220 разделишь на 22, то, действительно, получишь 10 — сумму цифр задуманного числа.

Почему так получается?

449. *Угадай зачёркнутую цифру.* Известен арифметический фокус. Состоит он в следующем. Предлагается написать любое трёхзначное или четырёхзначное число, состоящее из различных цифр. Какое именно число будет написано, отгадывающий не должен знать. Написавший число имеет право как угодно переставить цифры этого числа. Получатся два числа: записанное вначале и получившееся из него после перестановки цифр. Меньшее из этих чисел предлагается вычесть из большего, в полученной разности зачеркнуть одну цифру и вычислить сумму оставшихся. Эта сумма сообщается отгадывающему, и он говорит, какая цифра была вычеркнута.

Чтобы узнать, какая цифра была вычеркнута, отгадывающий поступает так: названную ему сумму цифр он дополняет до ближайшего бóльшего кратного 9 (9, 18, 27, 36 и т. д.). Дополняющее число и даёт вычеркнутую цифру. Если сумма окажется сама кратной девяти, то зачёркнута была одна из цифр: 0 или 9.

Объясни этот фокус.

450. *Быстрое суммирование.* Ты можешь удивить своих товарищей искусством суммирования чисел. Сделать это можно так. Напиши на классной доске какое-нибудь многозначное число, например 450 678. Можешь написать лю-

бое число, пусть только число единиц в этом числе будет не меньше 2. Предложи далее кому-либо из товарищей подписать под этим числом, как делается при сложении любое число, имеющее столько же знаков. Вслед за этим сам подпиши третье слагаемое, цифры которого дополняли бы соответствующие цифры второго слагаемого до 9. Пусть затем кто-либо из товарищей подпишет любое четвёртое слагаемое (с тем же числом знаков). Пятое слагаемое подпиши также сам, как и третье. Сумму получившихся пяти чисел ты можешь написать моментально. Начни с единиц. Их должно быть на 2 меньше, чем в первом числе. Дальше последовательно перепиши все цифры первого числа и впереди поставь 2. Вот и всё. На доске получится, например, такая запись:

$$\begin{array}{r} 450\,678 \\ 329\,157 \\ +670\,842 \\ 257\,934 \\ 742\,065 \\ \hline 2\,450\,676 \end{array}$$

Пусть твои товарищи проверят тебя.

То же самое можно проделать, взяв не пять, а семь слагаемых. Только в этом случае число единиц в сумме будет на 3 меньше числа единиц первого слагаемого и впереди придётся писать не 2, а 3.

Для разнообразия, вместо целых чисел можно брать десятичные дроби.

Постарайся сам понять «секрет» такого суммирования и объясни его товарищам.

451. *Мгновенное суммирование.* Пусть кто-нибудь из твоих товарищей молча запишет на доске пример на вычитание. Вычислять разность не нужно. Тот, кто записал первый пример, или вновь вызванный к доске должен будет далее написать новый пример на вычитание так, чтобы вычитаемым во втором примере было уменьшаемое первого примера. Производить вычисления также не нужно. Затем записывается третий пример на вычитание так, чтобы вычитаемое было равно уменьшаемому второго примера. Продолжая, можно записать на доске любое число таких примеров на вычитание. Пока это делается, ты на доску не смотри. Как только все примеры будут записаны, повернись лицом к доске, посмотри на записанные примеры и ты сра-

зу же можешь сказать, чему будет равна сумма всех записанных, но не вычисленных на доске разностей? Для этого ты должен будешь из уменьшаемого последней разности вычесть вычитаемое первой разности. Пусть, например, на доске будут записаны такие разности: 340 — 80; 450 — 340, 620 — 450, 680 — 620; 700 — 680, 825 — 700, 900 — 825. Сумма всех этих разностей будет равна 900 — 80, т. е. 820. Пусть твои товарищи проверят тебя, вычислив каждую разность, а затем и сумму их. Конечно, можно записывать разности не только целых чисел, но обыкновенных и десятичных дробей, а также рациональных (положительных и отрицательных) чисел.

Почему так получается? Разберись сам и объясни товарищам.

452. *Ещё одно удивительное суммирование.* Вырежь из картона 6 одинаковых полосок и каждую из них чёрточками раздели на 6 равных частей. Напиши на этих полосках числа:

на первой	— 345, 246, 741, 444, 642, 543;
на второй	— 125, 422, 323, 620, 224, 521;
на третьей	— 900, 405, 504, 108, 702, 306;
на четвёртой	— 238, 436, 535, 733, 832, 634;
на пятой	— 136, 235, 730, 532, 433, 631;
на шестой	— 484, 286, 880, 583, 682, 187.

Имея такие полоски, ты можешь удивить своих товарищей быстрым суммированием столбцов чисел, записанных на этих полосках. Положи приготовленные тобой полоски на стол так, чтобы они были рядом. В каком порядке ты возьмёшь полоски — безразлично. Не имеет значения и то, будут ли концы полосок лежать на одной прямой линии. Пусть, например, полоски разложены так, как показано на рисунке 55. Полных столбиков получилось 3. Ты легко можешь вычислить сумму шести чисел, стоящих в любом из этих столбиков. Поступай так. Найди сумму единиц этих чисел. Ты получишь число десятков и единиц искомой суммы. Чтобы получить число тысяч и сотен, нужно из 50 вычесть сумму единиц чисел столбца. Так, сумма чисел третьего полного столбца равна 3020 ($1 + 2 + 5 + 6 + 3 + 3 = 20$, $50 - 20 = 30$), а сумма чисел второго столбца 3218 ($4 + 4 + 6 + 2 + 0 + 2 = 18$, $50 - 18 =$

32). Постарайся самостоятельно разобраться, почему так получается.

125	422	323	620	224	521			
	345	246	741	444	642	543		
			238	436	535	733	832	634
900	405	504	108	702	306			
		484	286	880	583	682	187	
	136	235	730	532	433	631		

Рис. 55.

453. *Удивительная память.* Запиши заранее на классной доске или на листе бумаги 30 — 50, а можно и больше, многозначных чисел. При записи чисел нумеруй их. Числа записывай так. К номеру числа прибавь 9, возьми для получившегося числа обращённое. Это будет число миллионов. Дальше вычисли сумму цифр получившегося числа миллионов. Число единиц (только единиц) этой суммы даёт число сотен тысяч. Чтобы найти число десятков тысяч, вычисли сумму двух последних цифр (т. е. числа миллионов и числа сотен тысяч) и возьми опять только единицы этой суммы и т. д. Вот несколько примеров таких чисел, какие ты запишешь. № 5 41 561 785; № 11 2 246 066; № 16 52 796 516. Подготовив всё это, ты можешь удивить своих товарищей замечательной памятью. Отвернись от доски и скажи присутствующим, что ты запомнил все эти числа. Тебе не поверят. Тогда предложи им проверить твою память. Пусть кто-нибудь скажет тебе номер числа. Ты, производя в уме вычисления, будешь читать число, как бы медленно вспоминая его. Делай это так. Пусть номер числа 32. Тогда молча вычисляй: 32 + 9 = 41; обращённое число 14, и говори:

14 миллионов,
1 + 4 = 5 пятьсот,
4 + 5 = 9 девяносто,
5 + 9 = 14 4 четыре тысячи,
9 + 4 = 13 3 триста,
4 + 3 = 7 семьдесят,
7 + 3 = 10 0 единиц.

454. *Угадай возраст и дату рождения.* Пообещай своим товарищам угадать возраст и дату рождения каждого из них. Для этого заставь их проделать следующие вычисления. Порядковый номер месяца, в котором родился каждый из них, умножить на 100 и к получившемуся произведению прибавить число месяца, на которое приходится день рождения. Затем полученную сумму умножить на 2 и к тому, что получится, прибавить 8. Результат умножить на 5, к произведению прибавить 4 и получившуюся сумму умножить на 10. К тому, что получится остаётся прибавить полное число лет (возраст), увеличенное на 4. Пусть каждый, выполнивший все эти вычисления, запишет на листочке бумаги свою фамилию, получившееся число и передаст листочек тебе. Получив эти листочки ты каждому можешь сказать его возраст и дату рождения. Поступай так: из получившегося числа каждый раз вычитай 444 и разность разбивай на грани справа налево по две цифры в каждой. Тогда первая грань справа налево даст возраст, вторая — число и третья — порядковый номер месяца рождения.

Постарайся разобраться в «секрете» этого номера и объясни товарищам.

455. *Угадай задуманное число.* Приготовь семь карточек.

На первой из них напиши все числа, начиная с 1 до 100, через одно число, т. е. 1, 3, 5, 7, 9,... 99. (Вместо точек надо написать все полагающиеся числа.)

На второй напиши числа:
2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19,..., 98, 99.

На третьей напиши числа:
4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28,..., 92, 93, 94.

На четвёртой — числа:
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27,..., 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.

На пятой сначала напиши 16 последовательных натуральных чисел, начиная с 16, следующие 16 последовательных чисел, начиная с 32, — не записывай, затем запиши снова 16 чисел, начиная с 48, и т. д.

На шестой сначала запиши 32 последовательных натуральных числа, начиная с 32, следующие 32 числа не записывай и, наконец, припиши следующие числа с 96 до 100.

На последней карточке запиши все натуральные числа, начиная с 64 до 100.

Дай своему товарищу приготовленные 7 карточек. Пусть он задумает какое-либо число от 1 до 100, выберет карточки,

на которых это число записано. Только взглянув на эти карточки, ты можешь угадать задуманное число. Для этого нужно найти сумму первых чисел, записанных на выбранных карточках. Постарайся понять, почему так происходит.

456. *Любимая цифра.* Спроси у своих товарищей, кто какую цифру любит. Пусть один из них назовёт тебе цифру 4. Предложи ему 4 умножить на 9, а затем на получившееся произведение умножить такое число: 12 345 679. В результате у него получится число 444 444 444, т. е. число, записанное с помощью любимой им цифры. Если кто-нибудь скажет, что он любит 8, то предложи ему 8 умножить на 9, а затем умножить число 12 345 679 на получившееся произведение 72. У него получится число, записанное также с помощью лишь любимой им цифры 8. Если же кто-нибудь скажет, что он любит 0, то ответь, что 0, конечно, очень важная цифра, но ты лично её недолюбливаешь, и попроси назвать другую цифру.

Постарайся сам разгадать «секрет» этого номера и объясни его товарищам.

457. *Сравнение кривого с прямым.* Для выступления с этим номером подготовь две деревянные планочки (рис. 56), полоску бумаги и масштабную линейку.

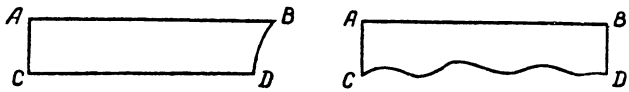


Рис. 56.

Возьми первую планочку и предложи на глаз сравнить два прямолинейных края её. Задай вопрос: на сколько сантиметров AB длинней CD? Ответы запиши на доске, а затем предложи кому-либо сравнить AB и CD при помощи масштабной линейки. Обычно два отрезка прямой линии на глаз сравниваются довольно точно. После этого покажи вторую планочку и спроси, на сколько сантиметров прямолинейный край её AB короче криволинейного края CD. Обычно правильных ответов не бывает; ошибки бывают грубыми. Покажи это, воспользовавшись полоской бумаги и масштабной линейкой.

458. *Удивительные поверхности.* Возьми бумажную ленту и склей её концы. Покажи товарищам, что получится. Спроси у них: можно ли окрасить эту поверхность так, что-

бы одна сторона была, например, красной, а другая синей? Может ли муха переползти с одной стороны на другую без перехода через край? Что получится, если разрезать эту поверхность по «средней» линии? Все эти вопросы твоих товарищей не затруднят.

Затем возьми такую же ленту, закрути её на 180° и снова склей. Покажи получившуюся поверхность товарищам.

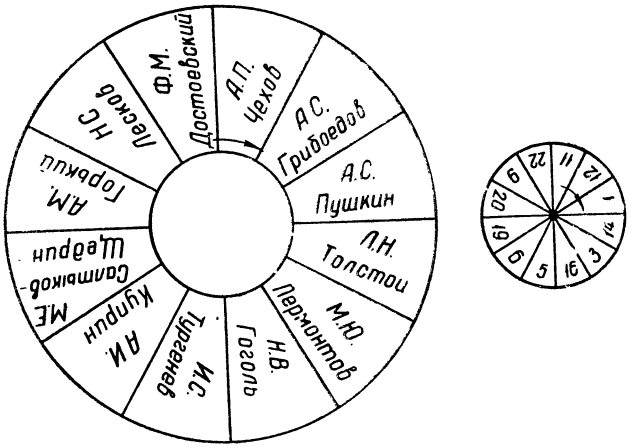


Рис. 57.

Задай такие же точно, как и раньше, вопросы, а затем покажи ошибочность большинства ответов. Получившаяся в этом случае поверхность называется листом Мёбиуса. Эта поверхность имеет только одну сторону. Муха, сидящая на такой ленте, может переползти из любой точки её в любую другую, не переползая через край. Краёв у этой ленты не два, а один. Вся эта поверхность непрерывно может быть закрашена в один цвет. Если её разрезать вдоль «средней» линии, то лента не распадётся на две части, а получится одна лента (уже двусторонняя). Наконец, возьми такую же ленту и перед склеиванием скрути её на 360°. Получится также двусторонняя поверхность. Если её разрезать по «средней» линии, то она распадётся на две замкнутые ленты, вдетые друг в друга.

459. *Угадай.* Сделай из картона два круга, как показано на рисунке 57. Радиус большего круга пусть будет 20 *см*, а меньшего 8 *см*.

Меньший круг наложи на больший и скрепи их так, чтобы меньший мог поворачиваться вокруг общего центра их. С помощью двух этих скреплённых кругов ты можешь отгадать, какого русского писателя задумает твой товарищ.

Делается это так. Товарищ должен задумать одного из писателей, фамилии которых записаны в секторах большого круга; затем посмотреть, какое число стоит против

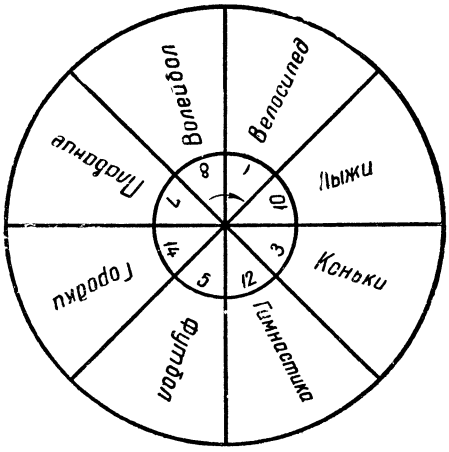


Рис. 58.

этой фамилии на меньшем круге, и повернуть меньший круг в направлении, указанном стрелкой, на столько делений (частичных секторов), каково это число. Какое положение занимает вначале меньший круг — безразлично. На сколько делений повернёт твой товарищ меньший круг, тебе также не нужно знать

Чтобы угадать задуманного писателя, тебе достаточно будет взглянуть, какое положение займёт меньший круг. Против фамилии задуманного писателя будет стоять всегда число 12

Постарайся разгадать «секрет» этих удивительных кругов. Вот ещё один вариант «волшебных кругов» (рис 58). С их помощью ты можешь узнать, какой вид спорта любит твой товарищ.

Глава VI

ПОЗНАКОМЬСЬ, СДЕЛАЙ, НАУЧИСЬ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ!

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужно главным образом знание, для практики, сверх того, и умение...

А. Н. Крылов

Научись пользоваться таблицей квадратных корней *

В вычислительной практике очень часто приходится пользоваться разнообразными таблицами. Пользуются, например, таблицами умножения и деления чисел, таблицами для процентных вычислений, таблицами обратных чисел, квадратов и кубов чисел, квадратных и кубических корней, длин окружностей, площадей кругов, тригонометрических величин и т. д. Применение таких таблиц существенно ускоряет, упрощает и облегчает работу вычислителя, а при умелом пользовании таблицами приводит к значительному снижению вычислительных ошибок. И тебе следует настойчиво учиться пользоваться таблицами. Вот, например, таблица квадратных корней (стр. 104).

Извлекать квадратные корни из чисел приходится при нахождении числовых значений алгебраических выражений, при решении уравнений, различных геометрических задач, на уроках физики и т. д. Пользоваться каждый раз известным правилом извлечения квадратного корня утомительно, да и времени на это идёт много. Вот тут и приходит на помощь таблица квадратных корней. Она очень проста. В ней всего лишь два столбика: столбик чисел и столбик квадратных корней из этих чисел, вычисленных с точностью

* Для учащихся VIII класса.

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
0,1	0,316	4,1	2,025	8,1	2,846	21	4,583	61	7,810
0,2	0,447	4,2	2,049	8,2	2,864	22	4,690	62	7,874
0,3	0,548	4,3	2,074	8,3	2,881	23	4,796	63	7,937
0,4	0,632	4,4	2,098	8,4	2,898	24	4,899	64	8,000
0,5	0,707	4,5	2,121	8,5	2,915	25	5,000	65	8,062
0,6	0,775	4,6	2,148	8,6	2,933	26	5,099	66	8,124
0,7	0,837	4,7	2,168	8,7	2,950	27	5,196	67	8,185
0,8	0,894	4,8	2,191	8,8	2,966	28	5,292	68	8,246
0,9	0,949	4,9	2,214	8,9	2,983	29	5,385	69	8,307
1,0	1,000	5,0	2,236	9,0	3,000	30	5,477	70	8,367
1,1	1,049	5,1	2,258	9,1	3,017	31	5,568	71	8,426
1,2	1,095	5,2	2,280	9,2	3,033	32	5,657	72	8,485
1,3	1,140	5,3	2,302	9,3	3,050	33	5,745	73	8,544
1,4	1,183	5,4	2,324	9,4	3,066	34	5,831	74	8,602
1,5	1,225	5,5	2,345	9,5	3,082	35	5,916	75	8,660
1,6	1,265	5,6	2,366	9,6	3,098	36	6,000	76	8,718
1,7	1,304	5,7	2,387	9,7	3,114	37	6,083	77	8,775
1,8	1,342	5,8	2,408	9,8	3,130	38	6,164	78	8,832
1,9	1,378	5,9	2,429	9,9	3,146	39	6,245	79	8,888
2,0	1,414	6,0	2,449	10,0	3,162	40	6,325	80	8,944
2,1	1,449	6,1	2,470	10,1	3,178	41	6,403	81	9,000
2,2	1,483	6,2	2,490	10,2	3,194	42	6,481	82	9,055
2,3	1,517	6,3	2,510	10,3	3,209	43	6,557	83	9,110
2,4	1,549	6,4	2,530	10,4	3,225	44	6,633	84	9,165
2,5	1,581	6,5	2,550	10,5	3,240	45	6,708	85	9,220
2,6	1,612	6,6	2,569	10,6	3,256	46	6,782	86	9,274
2,7	1,643	6,7	2,588	10,7	3,271	47	6,856	87	9,327
2,8	1,673	6,8	2,608	10,8	3,286	48	6,928	88	9,381
2,9	1,703	6,9	2,627	10,9	3,302	49	7,000	89	9,434
3,0	1,732	7,0	2,646	11,0	3,317	50	7,071	90	9,487
3,1	1,761	7,1	2,665	11	3,317	51	7,141	91	9,539
3,2	1,789	7,2	2,683	12	3,464	52	7,211	92	9,592
3,3	1,817	7,3	2,702	13	3,606	53	7,280	93	9,644
3,4	1,844	7,4	2,720	14	3,742	54	7,348	94	9,695
3,5	1,871	7,5	2,739	15	3,873	55	7,416	95	9,747
3,6	1,897	7,6	2,757	16	4,000	56	7,483	96	9,798
3,7	1,924	7,7	2,775	17	4,123	57	7,550	97	9,849
3,8	1,949	7,8	2,793	18	4,243	58	7,616	98	9,899
3,9	1,975	7,9	2,811	19	4,359	59	7,681	99	9,950
4,0	2,000	8,0	2,828	20	4,472	60	7,746	100	10,000

до 0,0005. Число, из которого нужно извлечь квадратный корень, берётся в первом столбике, а рядом с этим числом во втором столбике дан искомый квадратный корень.

Может оказаться так, что в первом столбике этой таблицы не окажется числа, из которого нужно извлечь квадратный корень. Пусть, например, нужно найти $\sqrt{7{,}64}$. В этом случае можно поступить так. По таблице находим:

$$\sqrt{7{,}6} = 2{,}757$$
$$\sqrt{7{,}7} = 2{,}775$$

Видно, что при увеличении числа на 0,1 квадратный корень из него увеличился на 0,018. Приближённо можно считать увеличение квадратного корня пропорциональным увеличению числа (что это означает графически?). Поэтому при увеличении числа на 0,01 корень увеличивается на $0{,}018 : 10 = 0{,}0018$, а при увеличении числа на 0,04 корень увеличится на $0{,}0018 \cdot 4 = 0{,}0072$, или округлённо на 0,007. Значит, $\sqrt{7{,}64}$ можно считать равным $2{,}757 + 0{,}007$, т. е. 2,764.

При вычислении квадратных корней из чисел, бо́льших, чем 100, удобно пользоваться формулой $\sqrt{n} = 10\sqrt{\frac{n}{100}}$, при вычислении квадратных корней из чисел, меньших, чем 1, формулой $\sqrt{n} = \frac{1}{10}\sqrt{100\,n}$.

Поупражняйся в пользовании этой таблицей.

Подумай, нельзя ли применить её для приближённого возведения чисел в квадрат.

«Считающий чертёж»

В приложении № 1 к этой книге дана номограмма («считающий чертёж») для процентных вычислений. Наклей её на картон. Пользуясь этой номограммой, ты можешь без всяких вычислений с достаточной степенью точности решать различные задачи на проценты.

а) Пусть нужно найти 3% от 825. Найди на горизонтальной оси OA точку 825 и отметь точку пересечения соответствующей вертикали с прямой $p = 3$. Передвигайся по горизонтальной прямой, проходящей через эту точку, и на вертикальной оси Oa прочитай соответствующее число. Получится приближённо 24,5.

б) Пусть нужно найти число, если 6% его составляют 42. Для решения этой задачи следует поступать наоборот. На оси Oa надо найти точку 42 и отметить точку пересечения соответствующей горизонтали и прямой $p = 6$. От этой точки надо передвигаться по вертикали до оси OA и там прочитать ответ. Получится приближённо 696.

в) Требуется найти процентное отношение числа 35 к 437. Для этого надо найти точку, для которой $a = 35$ и $A = 437$, а затем установить, какая наклонная прямая (с каким числом p) проходит через эту точку. Получится $p = 8$.

Процентный транспортир

Для построения секторных диаграмм очень удобно пользоваться процентным транспортиром. Сделать его не трудно. Вырежь из плотной бумаги по форме обычный (градусный) транспортир. Останется нанести по полуокружности процентные деления. Для этого надо полуокружность разделить на 50 равных частей. Одно процентное деление должно содержать 3°,6 (360 : 100 = 3,6), пять процентных делений — 18°, а десять процентных делений — 36°.

Пользуясь процентным транспортиром, начерти секторную диаграмму по следующим данным:

Площадь частей света

(в млн. *кв. км*)

Европа	10,0
Азия	43 5
Америка	42,5
Африка	30,0
Австралия и Океания	9,0
Антарктида	14,0

Предварительно вырази площадь частей света в процентах от всей площади суши.

«Палочки Непера»

Ты можешь сделать простой счётный прибор, называемый «палочки Непера». Когда-то этот прибор пользовался известностью. С тех пор были изобретены новые, значительно более совершенные счётные приборы (арифмометр,

логарфимическая линейка, различные счётные машины и другие приборы). И все же полезно познакомиться с этим прибором и научиться пользоваться им.

«Палочки Непера» применяются для умножения чисел. Делаются они очень просто. Вырежь из картона или плотной бумаги 20 или 30 полосок длиной 1 *дм* и и шириной 1,5 *см*,

0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Рис. 59.

Разграфи 10 полосок и напиши на них цифры так, как это показано на рисунке 59*. Сделай ещё 10 или 20 таких же полосок. Вот и всё.

Как пользоваться «палочками Непера»?

Пусть, например, нужно вычислить произведение 258 ·8. Возьмём полоски с верхними цифрами 2, 5 и 8 и положим их рядом (рис. 60). В восьмой строке (считая сверху) прочитаем произведение (справа налево): единиц 4, десятков 0 + 6 = 6, сотен 6 + 4 = 10, т. е. сотен 0 и тысяч 1, тысяч 1 + 1 = 2 (суммы берутся по «диагоналям»). Значит, произведение равно 2064.

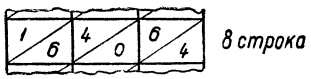


Рис. 60.

* Сообрази, как получаются те цифры, которые записываются на этих полосках.

Вот ещё пример: 3027 ·5. Взяв 4 полоски с верхними цифрами 3; 0; 2 и 7 и положив их рядом, читаем произведение по пятой сверху строке: единиц 5, десятков 0 + 3, сотен 0 + 1, тысяч 5 + 0, десятков тысяч 1. Получаем 15 135.

«Палочками Непера» можно пользоваться и для умножения многозначного числа на многозначное. Пусть нужно вычислить произведение 4375 ·347. Положим рядом 4 полоски с верхними числами 4; 3; 7; и 5 (рис. 61).

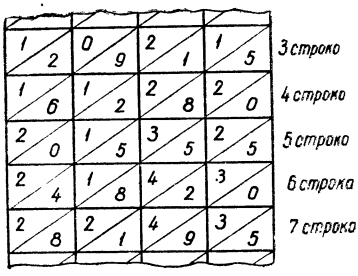


Рис. 61.

Прочитаем произведение числа 4375 на 7. Получим 30 625. Умножим далее 4 375 на 4 десятка. Получим 17500 десятков. Найдём ещё произведение 4375 на 3 сотни. Получим 13 125 сотен. Остаётся найти сумму получившихся произведений.

```
     30 625
+   175 000
   1312 500
  ---------
   1518 125
```

Конечно, суммирование удобнее выполнять на счётах.

Арифметическая счётная линейка

Арифметическая счётная линейка используется для умножения и деления многозначных чисел. Ею можно пользоваться также для выполнения умножения и деления десятичных дробей и для процентных вычислений.

Сделать такую линейку просто. В приложении № 2 к этой книге даны две числовые шкалы, которыми и можно воспользоваться. Нужно эти шкалы наклеить с двух сторон на полоску плотного картона или тонкую деревянную пластинку. Размеры полоски определяются размерами наклеиваемых на неё числовых шкал. Если для изготовления линейки будет использован картон, то края его до наклеивания шкал следует окантовать плотной цветной бумагой или тонкой материей.

Нужно сделать ещё движок. Для этого следует картонную полоску шириной в 26—30 *мм* сложить в виде хомутика и склеить так, чтобы этот хомутик при небольшом усилии перемещался по вдвинутой в него линейке. Останется с каждой стороны движка сделать прорезь так, чтобы в

неё видна была только одна колонка (столбик) чисел шкалы. Слева и справа от этой прорези надо написать числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 против второй, третьей, четвёртой и так далее строк.

Как пользуются арифметической счётной линейкой?

а) Пусть нужно найти произведение 78 ·8. Возьмём ту шкалу линейки, на которой в верхней строке есть число 78. Передвинем движок по линейке так, чтобы столбик с числом 78 вверху оказался в прорези его. Тогда против числа 8 на движке в прорези его прочитаем ответ 624 (рис. 62).

76		78		80
152	2	156	2	160
228	3	234	3	240
304	4	312	4	320
380	5	390	5	400
456	6	468	6	480
532	7	546	7	560
608	8	624	8	640
684	9	702	9	720
760	10	780	10	800

Рис. 62

б) Умножим 3425 на 7. Множимое 3425 содержит 34 сотни и 25 единиц. Умножим сначала 34 сотни на 7. Получим 238 сотен. Затем 25 единиц умножим на 7. Получим 175. Искомое произведение равно 23 800 + 175 = 23 975.

в) Пусть нужно 67 умножить на 98. Поступим так. Сначала 67 умножим на 9 десятков. Получим 603 десятка. Далее, 67 умножим на 8. Получим 535. Наконец, найдём сумму получившихся чисел 6030 + 536 = 6566.

г) Требуется 728 разделить на 8. Для нахождения частного на движке заметим число 8 и, смотря в прорезь движка, передвинем его так, чтобы против числа 8 движка оказалось делимое 728. Частное равно числу, оказавшемуся вверху прорези движка, т. е. 91.

д) Пусть нужно выполнить умножение 42,56 ·0,9. Сначала найдём произведение 4256 ·9. Получим 37 800 + 504 = = 38 304. Остаётся отделить запятой в получившемся результате 3 знака. Ответ 38, 304.

е) Попытайся с помощью линейки решить несколько задач на нахождение процентов от числа и числа по известным процентам его. Например: 1) Найти 7% от 8,24; 2) 9% неизвестного числа равны 6,57. Найти это число.

Счётные приборы и машины

Отличительной чертой нашей эпохи является небывало бурное развитие техники во всех отраслях производства.

Наше время — это время ускоренного технического прогресса. Быстрыми темпами идёт обновление машин и оборудования, растёт выпуск разнообразных машин и станков, большие работы проводятся по автоматизации различных производств. Для автоматического управления производственными процессами и для контроля за ними требуются приборы и оборудование. Широко внедряется в производство электричество и химия. Принимаются меры к полному и рациональному использованию сырья и энергетических ресурсов. Предстоят большие работы по мирному использованию атомной энергии.

Решение всех этих задач требует большой вычислительной работы. Разнообразные и многочисленные вычисления необходимы также для хозяйственной деятельности всех наших больших и малых предприятий, учреждений и организаций, для разработки наших планов, для учёта их выполнения. Всё это обязывает нас основательно овладеть техникой вычислений, совершенствовать её. И тебе, когда ты подрастёшь и будешь работать, много придётся вычислять. Готовься же к этому!

Из средств, облегчающих и ускоряющих вычисления, кроме таблиц и номограмм («считающих чертежей»), особенно ценны такие счётные приборы, как русские конторские счёты, арифмометр, счётная логарифмическая линейка и, конечно, новые счётные машины.

Русские конторские счёты, являющиеся изобретением русского народа, — это простой, но очень остроумный счётный прибор. Он хорошо уживается с новой вычислительной техникой. Очень легко выполняются на счётах действия сложения и вычитания, сложней — умножения и деления. Как пользоваться этим прибором, ты знаешь. Но нужны ещё навыки. Для развития и закрепления их будут полезны такие пособия: 1) А. И. Кононенко, Техника вычислений на счётах, изд. Харьковского университета, 1955; 2) Н. П. Юрьев, Счётная техника, Госстатиздат, 1952; 3) М. И. Иванов, Русские счёты и их использование в школе, Учпедгиз, 1953; 4) В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1954. В этих книгах подробно описано, как нужно пользоваться счётами, и даны упражнения. Пользуйся различными возможностями, чтобы научиться хорошо считать на счётах.

Одной из самых распространённых вычислительных

машин в нашей стране является арифмометр (рис. 63). Изобретён он был в 1874 году главным механиком русского Монетного двора инженером Однером и сразу же получил признание и широкое распространение. Основное назначение арифмометра механизировать действия умножения и деления. Можно производить на арифмометре также сложение и вычитание, но делать это не выгодно, так как требуется сравнительно много времени. Тебе надо научиться

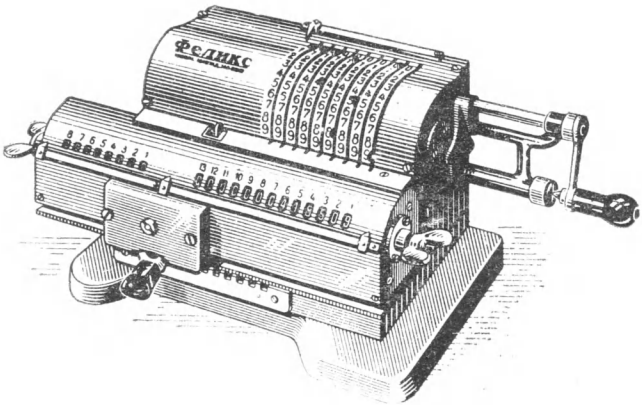


Рис. 63.

пользоваться арифмометром. Организуй для этого группу учащихся твоего класса и попроси учителя математики или какого-нибудь счётного работника позаниматься с вами. Если такую группу организовать нельзя, то ты можешь самостоятельно научиться пользоваться арифмометром по указанным выше книгам Н. П. Юрьева или В. М. Брадиса.

Логарифмическую счётную линейку ты изучишь в девятом классе.

В последние годы большое развитие получили электронные вычислительные машины, способные с огромной быстротой выполнять математические действия. С помощью одной из таких машин в 1952 году за 13 мин. было вычислено число $2^{1279} - 1$ и проверено, что это число (в обычной записи его 386 знаков) является простым. Кстати, наибольшее известное в настоящее время простое число есть $2^{2281} - 1$. Вычис-

ление этого числа и проверка того, что оно является простым, проведены были также при помощи счётной машины.

Современная быстродействующая счётная машина способна, например, с большой точностью рассчитать полёт снаряда за время, меньшее продолжительности полёта этого снаряда. Такие машины в настоящее время могут обеспечить точность вычислений до миллионных долей процента и быстроту выполнения действий с десятизначными числами в несколько десятков тысяч операций в секунду.

Электронные быстродействующие машины применяются с большим успехом для решения различных математических задач, а также задач физики, химии, статистики, астрономии и т. д. Но особенно важно то, что счётные электронные машины могут применяться для различных целей. Трудно назвать такую область науки и техники, в которой быстродействующие счётные машины не нашли бы применения. Такие машины выполняют не только математические операции, но и логические. Открываются возможности при помощи таких машин делать переводы книг с любого языка на любой другой, управлять полётами и посадкой самолётов, автоматически обрабатывать на станках сложные детали, автоматически регулировать уличное движение при помощи светофоров в целом районе или даже городе и т. д.

Коллективом советских инженеров под руководством академика С. А. Лебедева, построена быстродействующая электронная счётная машина Академии наук — БЭСМ (рис. 64). Эта машина выполняет в одну секунду в среднем 7 — 8 тысяч операций над девятизначными десятичными числами. Она заменяет труд десятков тысяч вычислителей. За несколько часов эта машина может выполнить такую вычислительную работу, какую опытный вычислитель не сможет выполнить за всю свою жизнь. Если, например, для проверки одного варианта профиля корпуса самолёта раньше требовалась десятидневная работа большой группы работников — техников, инженеров и математиков, то с помощью БЭСМ такая работа может быть выполнена за 10 минут. Недавно эта машина была использована и в качестве переводчика с английского языка на русский. Переводился текст из математической книги. Испытания прошли успешно.

Устроена БЭСМ сложно. Основные части её таковы:

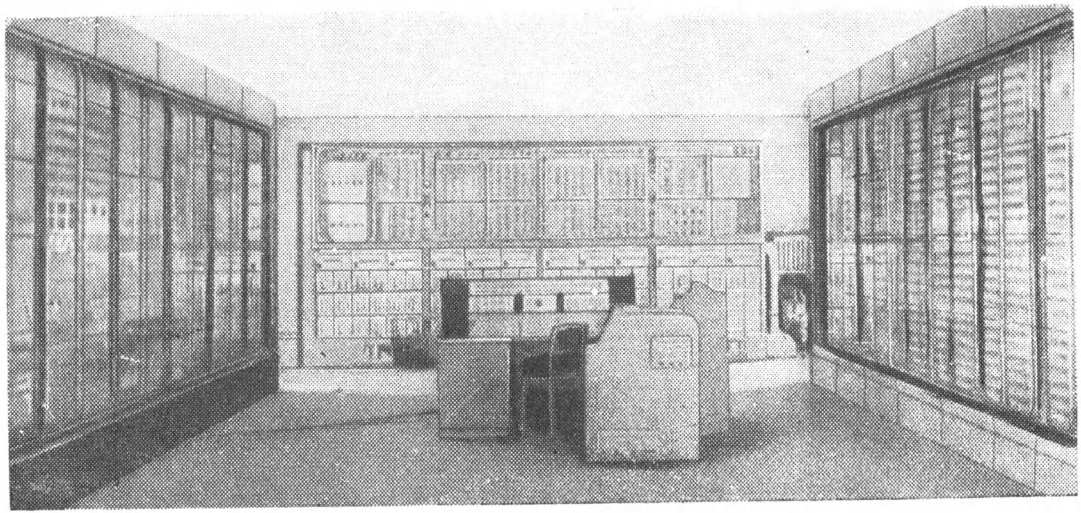


Рис. 64.

арифметическое устройство, с помощью которого выполняются все арифметические действия; оперативное запоминающее устройство, записывающее и сохраняющее программу вычислений, исходные данные и промежуточные результаты; магнитное запоминающее устройство, предназначенное для записи и хранения десятков и сотен тысяч чисел; устройство управления; устройство ввода программы и данных вычислений и устройство печати, выдающее результаты работы.

БЭСМ оперирует с числами, выраженными в двоичной системе счисления.

По конструкции БЭСМ, конечно, сложна. Она собрана из большого числа мелких стандартных блоков. Есть в ней фотоэлементы, электронно-лучевые трубки, электронные реле, электронные схемы, магнитофоны, фотопечатающие устройства и многое другое.

Конечно, такая машина не может заменить человека. Какие бы сложные операции она не выполняла, во всех своих действиях она подчиняется программе, составленной для неё человеком.

Кроме БЭСМ, в Советском Союзе имеются и другие быстродействующие электронные вычислительные машины: «Стрела», М-2, «Урал» и машины специального назначения. Но это только начало. По семилетнему плану у нас будет изготовлено много электронных вычислительных машин. Это позволит широко применять быстродействующую вычислительную технику в народном хозяйстве страны. А применение быстродействующих электронных счётных машин повлечёт за собой громадное повышение производительности труда в самых разнообразных областях человеческой деятельности и откроет новые богатые возможности познания явлений окружающего мира.

Электронные вычислительные машины далеко вышли за пределы счётного дела. Они нашли применение как управляющие машины. Разработка теории электронных счётных машин сыграла большую роль в развитии новой науки — кибернетики. Эта наука устанавливает общие закономерности процесса управления. Многие её выводы приложимы к живым организмам и к автоматическим устройствам. К проблемам кибернетики привлечено сейчас внимание не только математиков, но и физиков, физиологов, психологов. Перед советскими учёными стоит серьёзная и ответственная задача — обеспечить успешное развитие в нашей

стране нового, большого и важного научного направления — кибернетики.

Конструирование и производство электронных вычислительных машин приобретает в нашей стране большой размах. Эта новая область техники и науки вызывает к жизни новые профессии. Нужны инженеры, техники и квалифицированные рабочие для разработки, создания, монтирования электронных вычислительных машин и для управления ими.

Очень может быть, что и тебе со временем придётся создавать такие машины или пользоваться ими. Готовься к этому! Хорошо учись в школе!*

Эккер

Эккер употребляется для построения на местности прямых углов и, в частности, для построения прямых линий, перпендикулярных данной. Проще всего сделать эккер так. Из доски толщиной 10—20 *мм* или из многослойной фанеры нужно вырезать квадрат со стороной 200 *мм* и снизу прикрепить брусок с отверстием для установки эккера на штативе. На вырезанной доске надо отметить вершины квадрата несколько меньших размеров, чем сама доска. С этой целью на доске нужно прочертить диагональ, найти её середину и через получившуюся точку провести перпендикуляр к диагонали. Получится вторая диагональ. От точки пересечения этих диагоналей по ним в четырёх направлениях следует отложить отрезки, равные по длине 130 *мм*. Концы этих отрезков и будут искомыми вершинами. Это построение следует выполнить возможно точнее и проверить его. Для проверки построения нужно измерить стороны получившегося квадрата. Если они окажутся равными (с точностью до 0,5 *мм*), то в найденных вершинах квадрата следует забить (вертикально) булавки или тонкие гвоздики.

Какими геометрическими теоремами приходится пользоваться при отыскании точек для закрепления в них булавок?

Какие углы можно строить на местности с помощью эккера? Как это нужно делать?

---

* Прочитай книгу: Н. Кобринский и В. Пекелис, Быстрее мысли, изд. «Молодая гвардия», 1959.

Научись пользоваться эккером при проведении измерительных работ на местности.

Угломер

Для изготовления угломера надо из доски толщиной 15 *мм* вырезать круг, радиус которого был бы равен 80 *мм*. Если такой круг вырезать трудно, то можно его заменить квадратом со стороной равной 160 *мм*. Снизу к получившейся доске надо прикрепить брусок с отверстием для установки прибора на штативе. Сверху нужно наклеить бумажный круг (шкалу лимба) с градусными делениями по окружности радиуса 70 *мм*. Лучше всего было бы воспользоваться шкалой лимба фабричного изготовления, но если это окажется невозможным, то шкалу придется сделать самостоятельно. На листе плотной бумаги нужно будет начертить окружность указанного радиуса, возможно точнее разделить её на 360 равных частей и написать по окружности против соответствующих делений (по ходу часовой стрелки) числа: 0°, 10°, 20°,... до 350°, указывающие, сколько содержится градусов в дуге с началом, обозначенным числом 0° (см. приложение № 3).

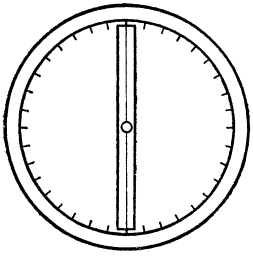


Рис. 65.

Останется сделать алидаду. Это планочка, длина которой 140 *мм*, ширина 15 *мм* и толщина 6 — 8 *мм*. Укрепить алидаду нужно при помощи винта в центре лимба. Она должна поворачиваться вокруг этого винта. На этой планочке надо прочертить линию, параллельную краям её и проходящую через центр лимба, а в концах этой линии, на расстоянии 60 *мм* от средней точки, укрепить булавки (рис. 65). Вместо булавок на концах алидады можно закрепить сделанное из жести приспособление для визирования. Это две прямоугольные пластинки. На одной из них вырезается узкая вертикальная щель, а на другой в более широкой прорези натягивается вертикально конский волос или ниточка. Пластинки прикрепляются к концам алидады вертикально.

Описанный угломер применяется для измерения углов в горизонтальной плоскости.

Эклиметр-нивелир

Эклиметр применяется для измерения углов в вертикальной плоскости, а нивелир для определения превышения одной точки местности над другой. Обе эти задачи можно решать с помощью одного и того же прибора.

Сделать этот прибор нетрудно. Нужно из 5-миллиметровой ровной фанеры вырезать сегмент, показанный на рисунке 66, и наклеить на него бумажный полукруг с градусными делениями (см. приложение № 4). Сверху этого полукруга к вырезанному из фанеры сегменту надо прикрепить гладкую деревянную планку длиной 200 *мм*, шириной 20 *мм* и толщиной 8—10 *мм*. На этой планочке посередине её надо провести линию, параллельную диаметру полукруга с делениями 90° — 90°, и в концах этой линии, на расстоянии 15 *мм* от краёв планочки, следует укрепить две булавки для визирования.

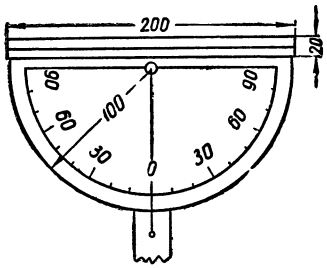


Рис. 66.

Фанерный сегмент винтом прикрепляется к верхнему концу круглого шестика с заострённым нижним концом. Он должен без больших усилий поворачиваться вокруг винта, скрепляющего его с шестиком. Остаётся к головке винта прикрепить нить отвеса с грузиком на конце. Длина нити отвеса должна быть около 110—120 *мм*.

Какое положение нужно придать фанерному сегменту, чтобы прибором можно было воспользоваться как нивелиром?

На какую теорему опирается использование этого прибора как эклиметра?

Научись пользоваться этим прибором как эклиметром и как нивелиром.

Мензула

Основные части мензулы — это мензульная доска и алидада. Мензульная доска делается в форме квадрата со стороной 300—350 *мм* из сухих досок толщиной 15—20 *мм*. Можно воспользоваться также фанерой, набив

её на рамку из деревянных планок. Снизу к этой доске прикрепляется деревянный брусок с отверстием для установки её на штативе. В качестве алидады проще всего воспользоваться трёхгранной масштабной линейкой. В этом случае визировать нужно будет по верхнему ребру линейки.

На какие теоремы опирается использование мензулы для съемки плана местности?

Научись пользоваться мензулой.

Пантограф

Пантограф применяется для увеличения или уменьшения размеров чертежа или рисунка (для построения плоской фигуры, подобной данной). Состоит он из четырёх одинаковых тонких деревянных планок, в которых сделаны на равных расстояниях небольшие отверстия для шарнирного скрепления планок при помощи винтов. Эти планки скрепляются таким образом, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом и чтобы точки E, D и F располагались на одной прямой (рис. 67).

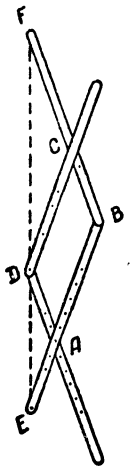


Рис. 67.

Пользуются этим пантографом так. Точку E (при помощи укреплённого в ней острия) неподвижно закрепляют в плоскости чертежа. В отверстии F закрепляют карандаш, а в отверстии D острый штифт. Затем обводят контур чертежа острым штифтом, укреплённым в D. Тогда карандаш, вставленный в отверстие F, опишет фигуру, подобную обводимому штифтом чертежу. Получившаяся при этом фигура будет бо́льших размеров, чем фигура на данном чертеже. Если же нужно получить уменьшенное изображение, то карандаш надо вставить в отверстие D, а штифт в F. Скрепляя по-разному планки, можно получить изображение различных размеров.

Познакомься с теорией пантографа, например, по учебнику геометрии Н. А. Глаголева (ч. 1).

На какие теоремы опирается применение пантографа?

Научись пользоваться пантографом.

Палетка

Для приближённого измерения площадей различных (в том числе и криволинейных) фигур небольших размеров можно пользоваться палеткой. Сделать её легко. Нужно взять лист прозрачной бумаги, например восковки или кальки, и нанести на него миллиметровую сетку (можно ограничиться квадратной сеткой с промежутком в 2 *мм*).

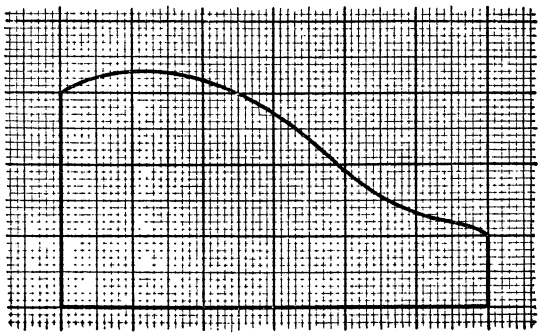


Рис. 68.

Если прозрачной бумаги нет, то можно взять обычную бумагу, нанести на неё сетку, а затем с обратной стороны этот лист бумаги протереть растительным маслом.

Пользоваться палеткой нужно так. Надо наложить её на фигуру, площадь которой должна быть измерена. Далее надо подсчитать число сантиметровых и число миллиметровых квадратиков палетки, оказавшихся внутри контура фигуры. Наконец, надо подсчитать число миллиметровых квадратиков палетки, через которые проходит контур фигуры, и найти половину этого числа. Останется подсчитать площадь фигуры.

Как при помощи палетки вычислить площадь земельного участка по плану его, если линейный масштаб плана задан?

На рисунке 68 изображена фигура с наложенной на неё палеткой. Подсчёт квадратиков палетки показывает, что площадь этой фигуры приблизительно равна:

$$100 \cdot 11 + 14 + 23 + 2 + 89 + 27 + 99 + 52 + 13 + (6 + 5 + 3 + 5 + 9 + 1 + 9 + 8) \cdot \frac{1}{2} = 1100 + 319 + 23 \approx 14{,}4 \ (см^2).$$

Измерительные работы на местности

В нашей хозяйственной деятельности, на всех наших больших и малых стройках, при проведении очень многих научных исследований, в ответственном деле укрепления обороноспособности нашей страны, в обыденной жизни весьма важное значение имеют измерительные работы на местности. Постройка различных дорог (железных, шоссейных и т. д.), прокладка линий метро, осушение и орошение земель, постройка плотин, гидростанций, мостов, сооружение линий электропередач, прокладка газо- и нефтепроводов, строительство водопровода, канализации, шахт, портов, строительство городов и сёл, заводов и фабрик, полёты на самолётах, плавание на кораблях, правильное использование государственных и колхозных земель и многое, многое другое требует проведения измерений на местности. Это такие измерения, которые человеку особенно часто приходится выполнять. Когда вы подрастёте, наверное и от вас потребуется умение проводить такие измерения. Поэтому к ним нужно готовиться.

Описанные выше самодельные приборы (эккер, угломер, эклиметр-нивелир, мензула и другие) помогут вам понять, как проводятся такие работы. Но понять мало. Нужны ещё упражнения в применении этих приборов. Идите в поле, в лес, к реке, во двор, на улицу, на площадь и проводите там различные измерительные работы. Для таких работ используйте туристские походы, длительные экскурсии, пребывание в пионерских лагерях. Выполняйте работы не в одиночку, а группами в 3—4 человека. Читайте книги, которые помогут вам узнать, как проводятся измерительные работы на местности. Из таких книг особенно полезны для вас: 1) С. Голицын, Хочу быть топографом, Детгиз, 1953; 2) П. Я. Дорф и А. О. Румер, Измерения на местности, изд. АПН, 1953.

Тебе понадобится найти среднюю длину твоего шага. Для этого отметь на местности вехами расстояние в 200—400 *м*, измерь рулеткой длину его, а затем ровным шагом пройди это расстояние не менее трёх раз и подсчитай каждый раз число твоих шагов. Шаги лучше считать парами,

под левую или правую ногу. Затем найди среднее арифметическое трёх получившихся чисел и раздели длину отмеченного тобой расстояния на это среднее арифметическое. Запомни среднюю длину твоего шага. Для облегчения перевода шагов в метры составь и запиши в твою записную книжку небольшую табличку.

Шаги	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Метры										

Умножая числа нижней строки на 10 и 100, ты получишь выражения в метрах десятков и сотен шагов. При переводе шагов в метры тебе останется лишь находить суммы чисел, выражающих измеряемое расстояние в метрах, по сотням, десяткам и единицам шагов.

Развивай свой глазомер. Он тебе пригодится в жизни и в труде. Идёшь ли ты в школу, совершаешь ли прогулку или поход, вышел ли ты на рыбалку, выехал ли ты в пионерлагерь, пользуйся случаем, оценивай на глаз различные расстояния и проверяй свои оценки путём измерения расстояний рулеткой, шагами, по показаниям счётчика велосипеда и т. д. Помни при этом, что когда освещение слабое, например в сумерки, расстояния кажутся больше. Если вдоль измеряемого расстояния имеются препятствия (строения, овраг и т. д.), то расстояние кажется меньше.

Пользуйся для определения расстояний таблицей различимости предметов.

Предметы	С какого расстояния они видны
Ветряные мельницы	15 *км*
Деревни и большие дома	8 *км*
Группы отдельных домов	5 *км*
Окна в домах	4 *км*
Трубы на крышах	3 *км*
Отдельные деревья	2 *км*
Километровые столбы	1 *км*
Стволы деревьев	850 *м*
Переплёты оконных рам	500 *м*
Движение ног человека	500 *м*
Цвет и части одежды	250 *м*
Лица людей	150 *м*
Выражение лица	100 *м*
Глаза	60 *м*

Такую табличку тебе следует уточнить.

Упражняйся также в глазомерном измерении углов, площадей участков и фигур, объёмов тел.

Большое практическое значение имеет ориентировка на местности с помощью компаса. Чтобы научиться пользоваться компасом, особенно важно хорошо усвоить, как находятся азимуты направлений на местности. Азимутом (магнитным) данного направления называется угол, отсчитываемый по ходу часовой стрелки, между направлением северного конца магнитной стрелки и данным направлением (рис. 69). Очевидно, величина азимута может изменяться от 0 до 360°.

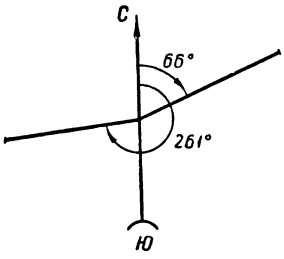


Рис. 69.

Сообрази, как следует пользоваться компасом при определении азимутов различных направлений на местности.

А как установить на местности направление, если задан азимут его?

Выйди с компасом в поле, в луга, к реке и поупражняйся в нахождении азимутов различных направлений и направлений по заданным азимутам их.

Во время одной из прогулок за городом составь маршрут этой прогулки, указывая на чертеже-схеме ориентиры, направления твоих перемещений (с помощью азимутов) и величины этих перемещений (в шагах или метрах).

Задачи *

460. Сделай верёвочный треугольник. Возьми для этого кусок шнура длиной в 6 *м*, скрепи его концы и краской отметь каждые 0,5 *м*. Таких отметок будет 12. На местности этот шнур при помощи трёх колышков можно натянуть так, что получится равносторонний треугольник со стороной в 2 *м*.

Как построить при помощи верёвочного треугольника углы в 60°, 30°, 90°? Какие ещё углы можно построить

* Для решения всех этих задач старайся придумать несколько способов и каждый раз устанавливай, на какие теоремы приходится опираться. Из придуманных способов выделяй наиболее удачные и пользуйся ими при проведении практических работ на местности.

при помощи этого треугольника? Как при помощи этого треугольника построить перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную на этой прямой точку?

461. Как при помощи эккера и рулетки измерить ширину круглой башни (диаметр круглой цветочной клумбы)?

462. Как, пользуясь эккером, расставить по окружности вехи, если даны концы одного из диаметров этой окружности?

463. На местности отмечены два направления. Точка пересечения этих направлений недоступна (рис. 70). а) Как провешить на местности биссектрису угла, образованного этими направлениями? б) Как на местности провести прямую через данную точку и недоступную точку пересечения этих направлений?

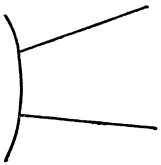


Рис. 70.

464. Как провешить прямую линию за препятствие, например, строение или группу деревьев (рис. 71)? А как провешить прямую линию через овраг?

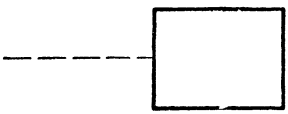


Рис. 71.

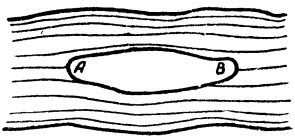


Рис. 72.

465. Как определить расстояние между двумя пунктами A и B, если один из них недоступен (например, ширину реки)?

466. Как найти расстояние между пунктами A и B, если оба они доступны для наблюдателя, но один пункт из другого не виден или они разделены препятствием, например озером?

467. Как найти расстояние между двумя недоступными пунктами A и B, например длину острова, не переправляясь на него (рис. 72)?

468. Как измерить высоту дерева?

469. Как измерить высоту фабричной трубы или радиомачты, если к основаниям их подойти нельзя?

470. Как измерить высоту небольшого холма, глубину оврага, высоту берега реки?

Глава VII

ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД*

У мальчишки трудная задача,
Допустил ошибку — час пропал,
Но малыш вздохнул и снова начал...
Разве мог он поступить иначе!
Ленин в детстве также поступал.

И. Антонов

Арифметика и алгебра

471. Два насоса откачивают из котлована воду. Один из них работал 2 мин., а другой 8 мин., и за это время они откачали 44 гектолитра. Если бы первый насос откачивал воду вдвое скорее, а второй вчетверо медленнее, то за то же время они откачали бы 32 гектолитра. Сколько воды откачивал каждый из этих насосов в 1 мин.?

472. Поезд проходит некоторое расстояние за 10 час. Если бы скорость его увеличилась на 10 *км* в час, то такое же расстояние он прошёл бы за 8 час. Определить это расстояние и скорость поезда.

473. В бак проведена труба. Так как эта труба засорилась, то приток воды через неё уменьшился на 10%. На сколько процентов больше потребуется в этом случае времени для наполнения бака?

474. В трёх школах города 1740 учащихся. $\frac{2}{3}$ числа учащихся первой школы равны 0,5 числа учащихся второй школы и $\frac{2}{5}$ числа учащихся третьей. Сколько учащихся в каждой школе?

475. Два велосипедиста выехали одновременно из пионерского лагеря для поездки в город: один со скоростью

* Ответов и указаний для этих задач мы не даём. Покажи твои решения учителю. Он скажет, верно ли ты решил задачи.

12 *км* в час, другой 14 *км* в час. Через $1\frac{1}{2}$ часа второй уменьшил скорость до 10 *км* в час. На каком расстоянии от пионерского лагеря первый велосипедист догонит второго?

476. Книжная база получила книги со скидкой 20% по отношению к указанной на них цене, а продавала по этой цене. Сколько процентов прибыли получила база?

477. В ящике лежат яблоки. Сначала из ящика взяли половину всех яблок и пол-яблока, затем половину остатка и ещё пол-яблока и, наконец, половину нового остатка и пол-яблока. В ящике после всего этого осталось 31 яблоко. Сколько яблок было в ящике вначале?

478. Одного человека спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил так: «10 лет тому назад я был в 4 раза старше своего сына, а через 10 лет я буду лишь вдвое старше его». Сколько лет этому человеку?

479. В воскресенье 11 мая из Ярославля отправились в очередные рейсы 3 парохода. Через сколько дней те же самые пароходы снова выйдут из Ярославля в воскресенье, если первый пароход выходит в рейс из Ярославля раз в 3 дня, второй — раз в 4 дня, третий — раз в 6 дней?

480. Мотоциклисту необходимо из одного города проехать к назначенному сроку в другой. Если он поедет со скоростью 35 *км* в час, то опоздает на 2 часа, а если скорость его будет 50 *км* в час, то приедет на 1 час раньше срока. Каково расстояние между городами?

481. По плану нужно было заготовить в течение 18 дней некоторое количество дров. Вся работа была выполнена за 2 дня до срока и при этом было заготовлено сверх плана 160 куб. *м* дров. Сколько кубических метров дров было заготовлено, если известно, что ежедневно сверх плана заготовляли по 85 куб. *м*?

482. Цена 1 пары клеёных лыж больше цены 1 пары простых лыж на $2\frac{3}{4}$ руб. 50 пар клеёных лыж стоят столько же, сколько 61 пара простых лыж. Определить цену пары лыж каждого сорта.

483. Когда 40 рабочих одного цеха завода стали работать по новому методу, продукция цеха увеличилась на 20%, а когда позднее 60% всех рабочих цеха стали работать по этому методу, то продукция увеличилась в $2\frac{1}{2}$

раза. Сколько рабочих было в этом цехе и во сколько раз увеличится продукция цеха, если все рабочие его будут работать по новому методу?

484. Белка за 20 мин. приносит орех в гнездо. Далеко ли от орешника её гнездо, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 *м* в секунду, а с орехом 3 *м* в секунду (на срывание ореха времени не затрачивает)?

485. Пешеход, идя по улице города, заметил, что через каждые 12 мин. его обгоняет трамвай, а через каждые 6 мин. он сам встречает трамвай. Считая, что пешеход и трамвай движутся равномерно, определить, через какой промежуток времени трамваи отправляются с конечных станций.

486. Митя едет в поезде, скорость которого 36 *км* в час. Выглянув в окно, Митя увидел идущий в противоположном направлении по параллельному пути скорый поезд. Мимо окна, из которого смотрел Митя, этот поезд проходил в течение 3 сек. Длина встречного поезда была 75 *м*. С какой скоростью шёл встречный поезд?

487. Два поезда идут навстречу друг другу по путям, расположенным рядом. Скорость первого поезда 30 *км* в час, а второго 40 *км* в час. Пассажир, сидящий у окна одного из вагонов второго поезда, заметил, что первый поезд проходил мимо него ровно 6 сек. Определить длину первого поезда.

488. Четыре пионера, живущие в одном доме, купили в складчину футбольный мяч. Первый из них внёс половину всей суммы, второй — одну треть того, что внесли остальные три, третий — одну четвёртую часть того, что остальные три, четвёртый оставшиеся 50 коп. Сколько стоил футбольный мяч?

489. В двух бидонах находится молоко: в первом бидоне его в 2 раза больше, чем во втором. Когда из первого бидона отлили 30 *л*, а из второго 20 *л*, то в первом осталось молока в 3 раза больше, чем во втором. Сколько молока было в каждом бидоне первоначально?

490. Цена билета для входа в ботанический сад была 15 коп. После снижения её количество посетителей увеличилось наполовину, а денежный сбор за билеты увеличился на одну четверть. На сколько снизили цену на билеты?

491. Пароход идёт от Горького до Астрахани 5 суток, а обратно 7 суток. Сколько времени должны плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

492. Дорога от A до B длиной в 11,5 *км* идёт сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. Пешеход, идя от A к B, прошёл всю дорогу за 2 часа 54 мин., а на обратный путь он затратил 3 часа 6 мин. Скорость его движения в гору 3 *км* в час, по ровному месту 4 *км* в час, под гору 5 *км* в час. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту?

493. Два завода взялись выполнить заказ на изготовление запасных частей к тракторам в 12 дней. Но через два дня после начала выполнения этого заказа завод A был остановлен на ремонт, а поэтому выполнение заказа было закончено только заводом B. Зная, что производительность завода B составляет $66\frac{2}{3}\%$ от производительности завода A, определить, через сколько дней после остановки завода A будет выполнен заказ.

494. Два велосипедиста выехали одновременно один из A в B, другой из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приезжая в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 40 *км* от B, второй раз в 20 *км* от A через 8 час. после первой встречи. Найти расстояние от A до B и скорости велосипедистов.

495. Восстановить стёртые цифры, обозначенные звёздочками:

1)
```
  23**85
×    ***5
-------
    ****2*
   *347**
  **9570
 *04***
--------
7********
```

2)
```
  *7***
×   743
-------
   *****5
  ******
 ******
--------
42***87*
```

496. Вычислить возможно проще сумму:

1) $$\frac{6}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 9}+\frac{6}{9\cdot 11}+\frac{6}{11\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 15}+\frac{6}{15\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 19}+\frac{6}{19\cdot 21};$$

2) $$\frac{20}{5\cdot 10}+\frac{20}{10\cdot 15}+\frac{20}{15\cdot 20}+\frac{20}{20\cdot 25}+\frac{20}{25\cdot 30}+\frac{20}{30\cdot 35}+\frac{20}{35\cdot 40}+\frac{20}{40\cdot 45}+\frac{20}{45\cdot 50}+\frac{20}{50\cdot 55}+\frac{20}{55\cdot 60}.$$

497. Упростить произведение (представить в виде суммы степеней числа 2):

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\ldots(2^{256}+1).$$

498. Существует ли дробь со знаменателем, равным 20, большая, чем $\frac{4}{13}$, и меньшая, чем $\frac{5}{13}$?

499. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{52367}{47633}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить дробь $\frac{17}{83}$?

500. Докажи, что число $43^{43} - 17^{17}$ делится без остатка на 10.

501. Упрости выражение: $(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a+b-c}{a+b+c}$.

502. Упрости выражение:

$$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 - (a+b+c)^3.$$

503. Представь в виде произведения: $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$.

504. Разложи на множители:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

505. Раздели $a^{128} - b^{128}$ на произведение $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$.

506. Сосуд ёмкостью 10 *л* наполнен керосином. Под руками имеются ещё два пустых сосуда, ёмкостью в 7 *л* и 3 *л*. Как разлить этот керосин в два сосуда так, чтобы в них было одно и то же число литров?

507. В саду собрали яблоки. Их разложили в 500 ящиков. Каждый из этих ящиков может вместить не более 240 яблок. Докажи, что хотя бы три ящика будут содержать по одинаковому числу яблок.

508. Докажи, что дробь, дополняющая несократимую дробь $\frac{p}{q}$ до 1, также несократима.

509. Докажи, что сумма 1 и несократимой дроби $\frac{p}{q}$ также несократима.

510. Докажи, что, каково бы ни было натуральное число n, число $n(n^2+5)$ делится на 6.

511. Докажи, что выражение $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ при m,

равном любому натуральному числу, будет натуральным числом.

512. Докажи, что выражение $m^5 - 5m^3 + 4m$ при любом натуральном m делится на 120.

513. Докажи, что сумма произведения четырёх последовательных натуральных чисел и 1 есть квадрат натурального числа.

514. Докажи, что всякое натуральное число, запись которого при любом основании системы счисления, превосходящем 4, есть 144, является точным квадратом.

515. Докажи, что всякое натуральное число, запись которого при любом основании системы счисления, превосходящем 2, есть 121, является точным квадратом.

516. Реши уравнения:

1) $|x| - 15 = \frac{|x| + 3}{4}$; 2) $\frac{7x + 4}{5} - x = \frac{|3x - 5|}{2}$;

3) $15x - 3|3x - 2| = 45 - 5(2x - 5)$.

517. Реши систему двух уравнений:

$$|x - 1| + |y - 5| = 1,$$
$$|x - 1| - |y - 5| = 0.$$

518. 1) Сколько нулей имеет на конце произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 50$?

2) Для нумерации страниц словаря иностранных слов потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц в этом словаре?

Геометрия

519. Участок под клубнику прямоугольной формы, длина которого в три раза больше ширины, окружён оградой, отстоящей от сторон участка на 2 *м*. Площадь, ограниченная оградой, на 128 *кв. м* больше площади самого участка. Определить длину ограды.

520. Сколько раз в сутки стрелки часов оказываются перпендикулярными друг другу?

521. Верна или нет теорема: если прямая проходит через середину боковой стороны треугольника и отрезок её, заключённый между боковыми сторонами, равен половине основания треугольника, то этот отрезок есть средняя линия треугольника?

522. От прямоугольного ковра, размеры которого 9 *м* и 12 *м*, отрезали прямоугольный кусок, размеры которого

8 *м* и 1 *м* (бо́льшая сторона отрезанного куска параллельна меньшей стороне ковра). Разрежь оставшуюся часть ковра на 3 части так, чтобы из них можно было сшить ковёр прямоугольной формы. А как разрезать оставшуюся часть на 3 части так, чтобы из них можно было сшить ковёр квадратной формы?

523. Как следует разрезать прямоугольник со сторонами 16 *см* и 9 *см* на 2 части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат?

524. Произвольный четырёхугольник следует разрезать на пять частей так, чтобы можно было из этих частей сложить прямоугольник. Как это сделать?

525. Докажи, что если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то треугольник — равнобедренный.

526. Докажи, что если медиана треугольника равна половине стороны, на которую она опущена, то треугольник — прямоугольный.

527. Докажи, что если 2 медианы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный.

528. Докажи, что если при пересечении сторон четырёхугольника с окружностью образуются 4 равные хорды, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны между собой.

529. Даны две взаимно перпендикулярные прямые. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по данным прямым. Найти геометрическое место центров тяжести получающихся при этом треугольников.

530. Даны 3 точки, не лежащие на одной прямой. Требуется провести 3 окружности с центрами в этих точках, попарно касающиеся друг друга.

531. Треугольник ABC — равносторонний. На продолжении CE стороны его AC построен другой равносторонний треугольник CDE (длина стороны может быть другой). Проведены отрезки AD и BE. Середины этих отрезков M и N соединены с точкой C. Требуется доказать, что треугольник CMN — равносторонний.

532. Докажи, что окружности, построенные на двух сторонах треугольника как на диаметрах, пересекаются на третьей стороне (или на её продолжении).

533. Дан угол ABC и точка M вне его. Через точку M требуется провести прямую, отсекающую треугольник заданного периметра $2p$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. В миллион раз. **2**. Приближённо 694. **3**. Приближённо 114. **4**. 750 *км*. **5**. Около 3 000 000 000. **6**. Почти 42 суток. **7**. Около 204 суток.
8. 1 000 000, 10 000 000 000. **9**. 1 000 000, 1 000 000 000.
10. 1000 *км*. **11** 1 000 000 *км*. **12**. Приближённо 12 500 000.
13. Нет (вес 200 *кг*). **14**. Около 10 *кг*. **15**. 1) 2; 2) 10; 3) 3; 4) 18.
16. 5 час. **17**. На автомашине пионеры проехали путь в 3 раза больший, чем путь, пройденный ими пешком, а времени затратили в 4 раза меньше. Значит, они ехали на автомашине в 12 раз быстрее, чем шли пешком. **18**. 2 *кг*. **19**. Учебник стоит 22 коп., задачник — 9 коп. **20** I — 270 *т*, II — 130 *т*, III — 170 *т*.
Указание. На все три склада был доставлен груз весом (400 + + 300 + 440): 2, т. е. 570 *т*. На третий склад было доставлено 570 — 400 = 170 (*т*), на первый 570 — 300 = 270 (*т*) и на второй 570 — 440 = 130 (*т*). **21**. У старшего 5 руб. 60 коп., у младшего 4 руб. **22**. 12 и 4. **23**. 12 *км* в час. **24**. 7 слив. **25**. 8 *кг*. **26**. $\frac{1}{12}$.
27. 13 час. 20 мин. **28**. Через 7 лет. **29**. 51 и 17. **30**. 7 и 9.
31. $2\frac{8}{11}$ *м* и $2\frac{8}{11}$ *дм*. **32**. 40 *куб. м* берёзовых и 60 *куб. м* сосновых.
33. 15 пакетов по 3 *кг* и 9 пакетов по 5 *кг*. **34**. 3 *кг*. **35**. 3 *кг*.
36. 640 *м*. Указание. Искомый путь равен 10 + 30 + 50 + + 70 + 90 + 110 + 130 + 150 = (10 + 150) + (30 + 130) + (50+ + 110) + (70 + 90) = 160 · 4 = 640 (*м*).
37. Через 4 мин. **38**. 16 *км*. Указание. Второй мальчик догонит первого через 2 часа. За это время собака пробежит путь, равный 16 *км*. **39** Через 15 мин. **40** Первый. Указание. Задача решается без вычислений. За то время, в течение которого первый

грузовик проделает путь в оба конца, второй грузовик достигнет лишь пункта *В* **41**. 120 *м*. **42**. 27.

43. Первая хозяйка должна получить 1,5 руб., а вторая 4,5 руб. **44**. Все деньги, данные третьим охотником, должен взять себе первый охотник. **45** 42 тетради. Указание. Первый и второй школьники вместе имели денег столько же, сколько остальные. Значит всего было куплено $20 \cdot 2$, т. е. 40 тетрадей.

46 7 цыплят. **47**. Длина цепи равна $12 \cdot 40 + 3 \cdot 2 = 486$ (*мм*) $\cong$ $\cong 0{,}5$ (*м*). **48** Длина поезда 225 *м*, скорость его 54 *км* в час Указание. 450 *м* паровоз проходит за $45 - 15 = 30$ (сек.) Поэтому скорость поезда равна $\frac{450}{30} = 15$ (*м* в сек.), или 54 *км* в час. Длина поезда равна $15 \cdot 15 = 225$ (*м*).

49. I — $46\frac{1}{3}$ аршина, II — $34\frac{1}{3}$ аршина, III — $25\frac{1}{3}$ аршина.

50. 36 гусей. **51**. 28 учеников. **52**. $38\frac{14}{47}$ руб. **53**. Кроликов 12, фазанов 23. **54** За 12 час.; I — 30 четвертей, II — 27 четвертей, III — 24 четверти. **55**. В $\frac{6}{11}$ часа. Указание. За 6 час. первая труба наполнит 6 таких водоёмов, вторая — 3, а третья — 2, всего 11 водоёмов. Значит, 3 трубы вместе наполнят один водоём за $\frac{6}{11}$ часа.

56 В 24 часа. **57**. В 35 дней. **58**. В математической рукописи, из которой взята эта задача, дано такое решение: за 12 час. лев съест 12 овец, волк 6, пёс 4, всего 22 овцы. Поэтому одну овцу лев, волк и пёс вместе съедят за $\frac{12}{22}$ часа, т. е. за $\frac{6}{11}$ часа. **59**. За 12 лет четыре плотника вместе могут построить 25 дворов, а один двор они построят за $\frac{12 \cdot 365}{25}$ дней, т. е. за $175\frac{1}{5}$ дня. **60**. $9\frac{7}{37}$ дня.

61 За 15 мин. **62**. По 285 вёрст.

63. В 8 дней. **64**. 67%. **65**. 31,5%. **66**. На $33\frac{1}{3}$%.

67. На 50%. **68**. На 28,6%. **69**. 83,6%; 16,4%. **70**. Второй. Указание. Скорость первого рабочего равна $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$ скорости второго, т. е. меньше скорости второго. **71**. На 21%. **72**. На 32%. **73**. Уменьшится на 9%. **74**. На 8,9%. **75**. 441 *г*. **76** 2 руб., 3 руб, 4 руб. **77**. 10 коп. **78**. 1) 55 коп.;2) 40 коп. **79** 200%. **80**. $101 \cdot 50 = 5050$. **81** $(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 12) \cdot 2 + 24 = 180$.

82. 2. Указание. $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{10^2+11^2+12^2}{365}+$ $+\frac{13^2+14^2}{365}=1+1=2.$

83. Сумму, которую надо вычислить, удобно представить в таком виде: $(1+999)+(3+997)+(5+995)+\ldots$ Всего таких пар слагаемых будет 250, так как нечётных чисел в первой тысяче 500. Сумма же в каждых скобках равна 1000. Поэтому искомая сумма равна $1000\cdot 250=250\,000$. **84** 1) $(99-97)+(95-93)+(91-$ $-89)+\ldots+(7-5)+(3-1)=2\cdot 25=50$; 2) перепишем сумму в таком виде:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1-$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-$$

$-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$; 3) $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+$ $+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{100}=\frac{9}{100}$.

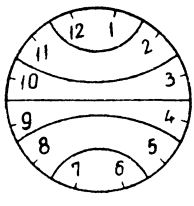


Рис. 73.

85 1) Частное равно $2\cdot 3\cdot 4\cdot 6=144$ остаток равен 1; 2) 1. **86.** См. рис. 73.

87. Например: 1) $\left(\frac{5}{5}\right)^5$;

2) $(5-5)^5$; 3) $\frac{5+5}{5}$; 4) $\frac{5\cdot 5}{5}$.

88. Например: $22+2+2+2$. **89.** Например: $\frac{222}{2}$. **90.** Например: 1) $99+\frac{9}{9}$; 2) $99+\frac{99}{99}$. **91.** Например: 1) $33-3+\frac{3}{3}$; 2) $3\cdot 3\cdot 3+3+\frac{3}{3}$; 3) $5\cdot 5+5+\frac{5}{5}$. **92.** Например: 1) $111-11$; 2) $33\cdot 3+\frac{3}{3}$; 3) $(5+5+5+5)\cdot 5$. **93.** $123-45-67+89$. **94.** Например: $\frac{4+4}{4+4}$, $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$, $\frac{4+4+4}{4}$, $4+(4-4)\cdot 4$, $\frac{4\cdot 4+4}{4}$ $\frac{4+4}{4}+4$, $4+4-\frac{4}{4}$ $\frac{(4+4)\cdot 4}{4}$, $4+4+\frac{4}{4}$, $4+4+4-\sqrt{4}$.

95. 10^{20} больше, чем 20^{10}, так как $20^{10} = (2 \cdot 10)^{10} = 10^{10} \cdot 2^{10}$, а $10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10}$. **96.** 100^{20} больше, чем 9000^{10}, так как $100^{20} = 100^{10} \cdot 100^{10}$, а $9000^{10} = (90 \quad 100)^{10} = 90^{10} \cdot 100^{10}$. **97.** а) $2 + 2 = 2 \cdot 2$, б) n и 1 ($n + 1 > n$ 1). **98.** $\frac{1}{2}$ и -1. **99.** 35. **100** 1) 111; 2) 11^{11}. **101.** 2^{22}. **102.** $(-9)^9$. **103.** 9^8. **104.** В 20 *дкл.*

105. Каждый должен получить $\frac{5}{6}$ яблока, но $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Значит, каждому нужно дать половину яблок и третью часть. **106.** $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. **107.** 59. Указание. Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться нацело на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел, равно $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. Следовательно, искомое число равно $60 - 1$, т. е. 59. **108.** $(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot n + 1$ должно делиться на 7. Наименьшее значение n, для которого это имеет место, равно 5. Следовательно, в корзине было 301 яйцо. Следующее подходящее значение n равно 12. Для него получается 721 яйцо, но корзина не может вместить такого числа яиц. **109.** 1) Число 7 из 4 спичек сложено так: VII. Число 5, перекладыванием двух спичек, можно получить так: $\frac{V}{I}$. 2) Единицу, перекладыванием одной спички, можно получить так: $\sqrt{I}$.

110. 1) 6750 — 3894; 2) 44,45 + 59,27 + 78,43; 3) 27 · 32. 4) 66 · 111; 5) 324 · 57; 6) 568 · 24; 7) 48384 : 126; 8) 52650 : 325; 9) 1089700 : : 12. **111.** 1) 2; 2) 4; 3) 12; 4) 24.

112. 10^{49}. Замечание. Можно было бы прочитать это число, например, так — 10 триллионов ундециллионов. Действительно, 10^6 — миллион. 10^9 — биллион или миллиард, 10^{12} — триллион, 10^{15} — квадриллион, 10^{18} — квинтиллион, 10^{21} — секстиллион, 10^{24} — септиллион, 10^{27} — октиллион, 10^{30} — ниллион, 10^{33} — децциллион, 10^{36} — ундециллион и т. д. Однако большие числа так не читают. Почти всегда их выражают при помощи степеней числа 10. Например, $2\,400\,000\,000\,000\,000\,000 = 24 \cdot 10^{17}$.

113. Любое натуральное число может быть записано в двоичной системе счисления. Например, $34 = 100\,010_2 = 2^5 + 2$, $19 = 10\,011_2 = 2^4 + 2 + 1$. Значит, любое натуральное число может быть представлено в таком виде, о каком говорится в этой задаче.

114. При основании 4. **115.** Ученик при записи чисел воспользовался системой счисления при основании 8. **116.** 1) 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2) 5 цифр: 0, 1, 2, 3, 4; 3) 8 цифр;

4) 3 цифры; 5) 2 цифры: 0, 1. **117.** 1) $34\,311_5$; 2) $102\,220_3$; 3) $1\,000\,000_2$. **118.** 1) 37; 2) 410; 3) 3550; 4) 2594. Указание. $5042_8 = 5 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8 + 2 = 2594$. **119.** 1) В 6 раз, 2) в 216 раз. **120.** 1) Уменьшится в 3 раза, 2) уменьшится в 27 раз. **121.** 1) При основании 3; 2) при основании 6; 3) при основании 8.
122. 1) $12\,313_5$; 2) $16\,303_8$; 3) $11\,113_5$. Указание.

$$\begin{array}{r} 322_5 \\ \times\ 14_5 \\ \hline +\ 2343_5 \\ 322_5 \\ \hline 11113_5 \end{array}$$

123 1) При основании 3; 2) при основании 5; 3) при основании 9. **124.** 1) При основании 5; 2) при основании 8; 3) при основании 8; 4) при основании 7. **125** $5 \cdot 5 = 31$. Основание системы счисления равно 8. **126.** Будет. **127.** В разных системах счисления признаки делимости чисел, вообще говоря, различны. **128.** 1) 1000_2; 2) $0{,}11_2$; 3) $0{,}10\,011\,001\,100\ldots_2$; 4) $0{,}12_3$; 5) $0{,}202\,020\ \ldots_3$.
129. $\frac{7}{16} = 0{,}0111_2$, $\frac{1}{3} = 0{,}010\,101\ \ldots_2$, $\frac{4}{5} = 0{,}11\,001\,100\ldots_2$. **130.** $\frac{4}{27} = 0{,}011_3$, $\frac{4}{5} = 0{,}21\,012\,101\ \ldots_3$. **131.** 1 *кг*, 3 *кг*, 9 *кг*, 27 *кг*. **132.** 61 981.
133. 504. **134.** 8; 12; 5; 20. **135.** 801. **136.** 60 129. **137.** 1) 45; 2) 81.
138. $\frac{22}{38} > \frac{110}{177}$, так как $\frac{22}{35} = \frac{110}{175}$. **139.** 7. Указание. От прибавления к числителю и знаменателю дроби одного и того же числа разность между новыми знаменателем и числителем (до сокращения получившейся дроби) будет та же самая, что и для данной дроби. Поэтому разность между новыми знаменателем и числителем должна быть равна $41 - 11 = 30$. Постараемся найти такую дробь, которая была бы равна $\frac{3}{8}$ и для которой разность между знаменателем и числителем была равна 30. Для дроби $\frac{3}{8}$ разность между знаменателем и числителем равна $8 - 3 = 5$. Чтобы получить разность, равную 30, достаточно знаменатель и числитель дроби $\frac{3}{8}$ умножить на $6 (30 : 5 = 6)$, отчего величина дроби не изменится. Получится дробь $\frac{18}{48}$, равная $\frac{3}{8}$. Сравнив дробь $\frac{18}{48}$ с дробью $\frac{11}{41}$, видим, что искомое число равно 7. **140.** 19. **141.** 22. Указание. Если из числителя данной дроби вычесть, а к знаменателю её прибавить одно и то же число, то сумма числителя и знаменателя не из-

менится. **142.** 424. Указание. Для нумерации страниц книги использованы 9 однозначных чисел — 9 цифр, 90 двузначных чисел — 180 цифр и какое-то число трёхзначных чисел. Это число трёхзначных чисел легко найти. Цифр во всех использованных трёхзначных числах имеется $1164 - (9 + 180) = 975$, значит, использовано $975 : 3 = 325$ трёхзначных чисел. Всего для нумерации страниц книги использовано $9 + 90 + 325 = 424$ числа. **143** 1794. **144.** 1) $(10 + 1)(2 + 1) = 33$; 2) $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$.
145. Указание. Однозначных чисел имеется 9. Они занимают первые 9 мест. Затем идут двузначные числа, которых 90. Цифры, выражающие их, занимают следующие 180 мест и т д. Значит, на сотом месте будет записана цифра некоторого двузначного числа. Найдём это число. $100 - 9 = 91$. 91 разделим на 2. В частном получим 45 и в остатке 1. Поэтому на сотом месте будет стоять первая цифра 46-го двузначного числа, а 46-е двузначное число равно 55. Следовательно, искомая цифра 5. **146.** 7 рабочих; 520 руб.
147. 176 учеников. **148** 4 брата и 3 сестры. **149** На расстоянии 10 *км* от города; 3 часа. **150.** 4 руб. 80 коп. **151.** 7 овец и 5 овец. **152.** 3 палки и 4 галки. **153.** 84 года. **154.** 50 лет и 14 лет. **155** Через $65\frac{5}{11}$ мин. **156.** Через $21\frac{9}{11}$ мин. **157.** 85 714. **158.** 4. **159.** 1) Данную дробь. 2) На число $1 + \frac{1}{b}$, где b — знаменатель данной дроби.
160. Квалифицированных рабочих 4, неквалифицированных 6. Указание. Пусть x — число квалифицированных рабочих, а y — число неквалифицированных. Тогда $210x + 150y = 1740$, или $7x + 5y = 58$. Второе уравнение составить нельзя, но следует иметь в виду, что x и y — целые неотрицательные числа. Давая x последовательно значения 0, 1, 2, 3 и т. д., можно вычислить соответствующие значения y, Результаты вычислений можно записать в виде таблицы:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y=\frac{58-7x}{5}$	$\frac{58}{5}$	$\frac{51}{5}$	$\frac{44}{5}$	$\frac{37}{5}$	6	$\frac{23}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$

Больше 8 значения x брать не следует, так как соответствующие значения y для них будут отрицательными. Получившаяся таблица показывает, что только при x, равном 4, соответствующее значе-

ние y будет целым положительным числом. Ответом на вопрос задачи и будут эти значения x и y. **161.** Задача разрешима. Действительно, по её условию можно составить два уравнения с тремя неизвестными, а именно: $3x + 5y + 25z = 100$

$$x + y + z = 20.$$

Исключив из этих уравнений x, получим $y + 11z = 20$. Отсюда $y = 20 - 11z$. По условию задачи $y \leqslant 20$ (но больше или равно 0). Значит, z может быть равным только 0 и 1. Имеем две возможности: 1) $z = 0$, $y = 20$, $x = 0$; 2) $z = 1$, $y = 9$, $x = 10$. **162.** Задача имеет два решения, а именно: а) 3 тетр. по 7 коп. и 8 по 4 коп., б) 7 тетр. по 7 коп. и 1 тетр. по 4 коп. (Смотреть решение 160-й задачи.)

163. $\frac{ant - 100P}{(a-b)t}$ — коров, $\frac{100P - bnt}{(a-b)t}$ — лошадей. **164.** $a = 1 - \frac{3}{y} + \frac{x}{y}$.

165. 1) Уравнение не имеет корней; 2) любое число является корнем этого уравнения; 3) уравнение не имеет корней: число -2 не будет корнем его, так как при $x = -2$ обе части уравнения теряют смысл; 4) и 5) уравнения не имеют корней.
166. 1) Система не имеет решений; 2) система имеет бесконечно много решений ($14y + 4$, y, $1 + 5y$, где y — произвольное число). **167.** Проверь себя, решив составленные тобой системы.
168. 1) Любое число является решением этого неравенства; 2) и 3) не имеют решений; 4) решение — любое число, отличное от 2.
169. 1) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} = \left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(7 - \frac{1}{2}\right) = 7^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 48\frac{3}{4}$; 2) $\left(12 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(12 + \frac{1}{4}\right) = 144 - \frac{1}{16} = 143\frac{15}{16}$; 3) искомая сумма равна $199 + 195 + 191 + \ldots + 7 + 3 = (3 + 199) \cdot 25 = 5050$ (сначала пользуемся формулой разности квадратов). **170.** 1) 0; 2) 0; 3) 200. Указание. В первом случае последний множитель $a^2 - b$ при $a = 5$ и $b = 25$ обращается в 0. В третьем случае: $87^2 - 86 \cdot 87 + 113 = 87(87 - 86) + 113 = 87 + 113 = 200$.
171. Получится $\frac{32}{1 - a^{32}}$. При $a = 2$ это выражение равно $-\frac{32}{4\,294\,967\,295}$. Указание. Следует суммируемые дроби последовательно, начиная с первых двух, приводить к общему знаменателю. **172.** При $a \geqslant 0$ разность $|a| - a$ равна 0, при $a < 0$ она равна

$2|a|$. **173.** При $a \geqslant 0$ сумма $|a| + a$ равна $2a$, при $a < 0$ она равна 0. **174** При $a \geqslant 0$ дробь $\frac{a + |a|}{2}$ равна a, при $a < 0$ она равна 0.

175. 1) $2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}$,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}.$$

Из первого равенства вычтем по частям второе. Получим: $S = 2 - \frac{1}{1024} = \frac{2047}{1024} = 1\frac{1023}{1024}$.

2) $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{33} + 2^{34}$,
$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{33}$. Из первого равенства вычтем по частям второе. Получим: $S = 2^{34} - 1$. Остаётся вычислить 2^{34}. Это проще сделать так: $2^3 = 8$, $2^9 = 8^3 = 512$, $2^{27} = 512^3 = 134217728$, $2^{54} = 134217728^2 = 18\,014\,398\,509\,481\,984$, $2^{10} = 2^9 \cdot 2 = 1024$, $2^{34} = 2^{54} \cdot 2^{10} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$. Следовательно, $S = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 \approx 184 \cdot 10^{17}$.

176. 16 807 мер. **177.** 20 971 руб. 52 коп.

178. 42 949 672 руб. 95 коп. **179.** Точка, изображающая число 1, лежит между точками, изображающими дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$, так как $\frac{p}{q}$ — правильная дробь, а $\frac{q}{p}$ — неправильная. Ближе к точке 1 лежит точка $\frac{p}{q}$, так как $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$, а $\frac{q}{p} - 1 = \frac{q-p}{p}$, но дробь $\frac{q-p}{q}$ меньше, чем $\frac{q-p}{p}$. **180.** Наименьшее значение 1. Указание. $4x^2 - 12x + 10 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 + 1 = (2x - 3)^2 + 1$. Данное выражение будет иметь наименьшее значение при наименьшем значении $(2x - 3)^2$, а наименьшее значение выражения $(2x - 3)^2$ равно 0 (при $x = \frac{3}{2}$). Полезно построить график данного трёхчлена. **181.** При $x = 0$. Указание. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$. Разность $1 - \frac{2}{x^2 + 1}$ будет наименьшей, когда дробь $\frac{2}{x^2 + 1}$ будет наибольшей. Но дробь $\frac{2}{x^2 + 1}$ будет наибольшей тогда, когда знаменатель её будет наименьшим. Знаменатель $x^2 + 1$ будет иметь наименьшее значение при $x = 0$.

182. В безветренную погоду времени для полёта понадобится меньше. Это следует учитывать всем работникам транспорта.

Указание. Пусть расстояние между Москвой и Киевом a *км*, собственная скорость самолёта v *км* в час, а скорость ветра u *км* в час. Тогда время полёта туда и обратно в безветренную погоду будет равно $\frac{2a}{v}$ (час.), а при ветре $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}$ (час.). Сумму $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}$ можно преобразовать так: $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}=$ $=\frac{av-au+av+au}{v^2-u^2}=\frac{2av}{v^2-u^2}=\frac{2a}{v-\frac{u^2}{v}}$. Сравнивая два выражения: $\frac{2a}{v}$ и $\frac{2a}{v-\frac{u^2}{v}}$, замечаем, что первое из них меньше второго, так как знаменатель его больше знаменателя второго выражения, а числители их равны. **183.** 37,5 *км* в час. Указание. Обозначим расстояние между городами через a *км*. Тогда весь путь между городами (туда и обратно) автомобиль проделает за $\frac{a}{50}+\frac{a}{30}$ (час.). Значит, средняя скорость будет равна $\frac{2a}{\frac{a}{50}+\frac{a}{30}}=\frac{2a}{a\frac{8}{150}}=\frac{300}{8}=$ $=37{,}5$ *км* в час.

184 15. В это число входят и те два парохода, с которыми встречается пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк: в Гавре (в момент

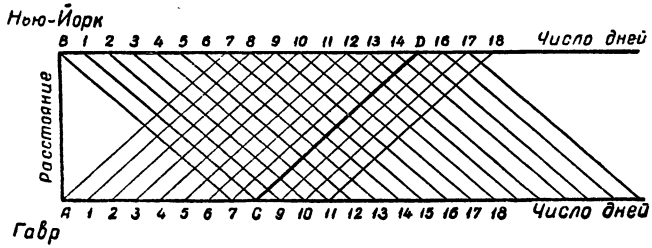


Рис. 74.

отхода) и в Нью-Йорке (в момент прихода). Указание. Эта задача изящно решается графически. На рисунке 74 построены графики движения пароходов. По горизонтальной прямой откладывается число дней, а по вертикали — пройденный пароходами путь. Отрезок AB изображает расстояние от Гавра до Нью-Йорка

(по пути движения пароходов). Точки пересечения графиков движения пароходов изображают встречи пароходов (вспомни графики движения поездов). Если проследить за графиком движения одного из пароходов, идущих из Гавра в Нью-Йорк (на чертеже — отрезок CD), то непосредственный подсчёт точек пересечения этого графика с графиками движения пароходов, идущих из Нью-Йорка в Гавр, даёт число 15. Значит, будет 15 встреч.

185. 6 (считая пароход, прибывающий на пристань Соколки в момент отхода катера, и пароход, отчаливающий от пристани Киров в момент прихода туда катера). Эта задача так же, как и предшествующая, легко решается графически. **186.** $(2n-1)^2 = 2(2n^2-2n)+1$. **187.** Само число не может быть нечётным, так как тогда квадрат его (см. предшествующую задачу) был бы нечётным числом. **188.** $(2n)^2 = 4n^2$. **189.** $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. **190.** $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$. **191.** $n(n+1)+(n+1) = (n+1)^2$. **192.** $2n(2n+2) = 4n(n+1)$. Одно из чисел n и $n+1$ — чётное. Значит, $4n(n+1)$ — кратно 8. **193.** Пусть a — число десятков и b — число единиц данного числа. Тогда $(10a+b)-(10b+a) = 9(a-b)$, $a \neq b$. В случае трёхзначного числа разность будет делиться на 99. **194.** $1+3+5+7+\ldots+(2n-7)+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)$. Возьмём суммы таких пар чисел: $1+(2n-1)=2n$, $3+(2n-3)=2n$, $5+(2n-5)=2n$ и т. д. Всего таких сумм будет $\frac{n}{2}$. Каждая из них равна $2n$, следовательно, искомая сумма равна $2n\frac{n}{2}=n^2$ **195.** $(10a+5)^2 = 100a^2+100a+25 = 100a(a+1)+25$; $35^2 = 1225$; $55^2 = 3025$; $125^2 = 15\,625$. **196.** $n(n+1)(n+2)$. Одно или даже два из этих чисел чётные и одно обязательно кратно 3. Следовательно, произведение их делится на 6. **197.** Если сумма трёх последовательных чисел (натуральных) есть нечётное число, то первое из этих чисел чётно, второе нечётно, третье чётно. Значит, два числа из трёх данных делятся на 2. Больше того, одно из этих двух чисел делится на 4. Кроме того, одно из трёх последовательных натуральных чисел обязательно делится на 3. Следовательно, произведение таких трёх последовательных натуральных чисел делится на 2, на 4, на 8, на 3, на 6, на 12, на 24.

198. $m^3 - m = m(m+1)(m-1) = (m-1)m(m+1)$. Имеем произведение трех последовательных натуральных чисел, которое обязательно делится на 6 (см. № 196). **199.** $m = 2n-1$, $(2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n(n-1) = 4(n-1)n$. Числа $n-1$ и n — последовательные натуральные числа. Одно из них обязательно чётное. Значит, $4(n-1)n$ всегда делится на 8.

200 $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$. Числа $m-1$ и $m+1$ — чётные. Значит, одно из них делится на 2, а другое на 4, т. е. произведение их делится на 8. Кроме того, одно из трёх последовательных натуральных чисел делится на 3. Поэтому рассматриваемая разность делится на 24. **201.** $(4n+1)(4m+1) = 16nm + 4m + 4n + 1 = 4(4mn + m + n) + 1$. **202.** $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2+2+2n)(n^2+2-2n) = [(n+1)^2+1][(n-1)^2+1]$. **203.** $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.

204. Возьмём числа: 2, 4, 8, 16, 32, 64 и так без конца. Каждое из них в 2 раза больше предшествующего. Все эти числа можно записать в виде степеней числа 2, тогда получим 2^1, 2^2, 2^3, 2^4... . Показатели этих степеней — последовательные натуральные числа, а натуральных чисел, как известно, бесконечно много. Значит, получается бесконечно много промежутков между последовательными степенями числа 2, а каждый из этих промежутков содержит хотя бы одно простое число. Поэтому простых чисел бесконечно много

212. 1) $y = \frac{1}{3}x$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 3$; 3) $y = -x + 4$. Указание. Третью зависимость можно выразить формулой так. Общий вид искомой формулы $y = ax + b$, потому что графиком зависимости между x и y является прямая линия. Для вычисления a и b возьмём две точки, через которые проходит график этой зависимости, например $A(0,4)$ и $B(4,0)$, и координаты их подставим в уравнение $y = ax + b$. Получим: $4 = b$ и $0 = 4a + b$. Значит, $b = 4$, $a = -1$.

213. Графиком зависимости в данном случае служит прямая линия, проходящая через начало координат. Поэтому общий вид формулы должен быть таким: $l = at$. Нужно вычислить a. Но так как построенная прямая проходит через точку с координатами $t = 165$ и $l = 2$, то должно быть $2 = 165a$, откуда $a = \frac{2}{165}$. Значит, $l \approx \frac{2t}{165}$.

214. Графиком этой зависимости (с достаточной точностью) служит прямая линия, проходящая через начало координат. Формула зависимости в этом случае будет такой: $l \approx \frac{l}{2220}$. Р. Длина стержня $\approx$ $\approx 13{,}003$ *м*.

215. Найдём уравнение прямой BC. Общий вид его $y = ax + b$. Подставим для определения a и b координаты точек B и C. Получим систему $\begin{cases} 5 = b \\ 0 = 12a + b. \end{cases}$ Решим её: $b = 5$, $a = -\frac{5}{12}$. Значит, уравне-

ние прямой BC таково: $y = -\frac{5}{12}x + 5$. Мéньшая стойка равна ординате этой прямой при $x = 7$, т. е. $-\frac{5}{12} \cdot 7 + 5 \cong 2{,}03$ (*м*). Бóльшая стойка имеет длину $-\frac{5}{12} \cdot 3 + 5 = 3{,}75$ (*м*).

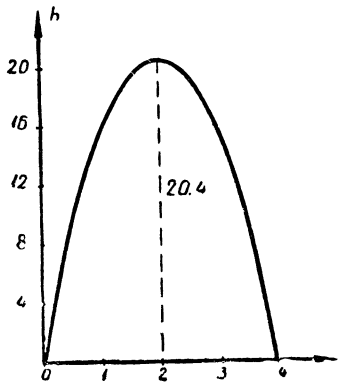


Рис. 75.

216. График зависимости между t и h в данном случае таков (рис. 75). Наибольшая высота подъёма камня 20,4 *м*. На этой высоте камень будет через 2 сек. Упадёт на землю камень через 4 сек.

217. Первая парабола является графиком функции $y = ax^2 + c$, где a и c — неизвестные коэффициенты. (В данном случае в общем виде квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + cb = 0$, так как вершина параболы лежит на оси Oy). Возьмём координаты каких-либо двух точек параболы, например (0, — 2) и (2,0), и подставим их в уравнение $y = ax^2 + c$. Получим два уравнения 1-й степени с двумя неизвестными $\begin{cases} -2 = c \\ 0 = 4a + c. \end{cases}$

Решая эту систему, находим $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$. Значит, парабола (1) является графиком функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Вторая парабола, вершина которой не лежит на оси Oy, является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — неизвестные коэффициенты. Для определения этих коэффициентов возьмём координаты каких-либо трёх точек этой параболы, например (0,1), (1,3) и (2,1), и подставим их в уравнение $y = ax^2 + bx + c$. Получим систему трёх уравнений $\begin{cases} 1 = c \\ 3 = a + b + c \\ 1 = 4a + 2b + c \end{cases}$. Решив эту систему, найдём $c = 1$, $a = -2$, $b = 4$. Значит, $y = -2x^2 + 4x + 1$.

218 Уравнение параболы в данном случае имеет вид $y = ax^2 + c$. Для определения a и c подставим в это уравнение координаты точек B и C $\begin{cases} 2 = c \\ 0 = 14\,4a + c \end{cases}$ $c = 2$, $a = -\frac{1}{72}$, а потому $y = -\frac{x^2}{72} + 2$. Для вычисления длин стоек надо найти значения y для значений x, равных 4 и 8. Получим: 1,78 *м* и 1,11 *м*.

219*. Сторона вписанного квадрата по теореме Пифагора равна $\sqrt{x^2 + (2 - x)^2}$, т. е. $\sqrt{2x^2 - 4x + 4}$, а значит, площадь этого квадрата равна $S = 2x^2 - 4x + 4$. Чтобы найти, при каком значении x площадь вписанного квадрата, равная $2x^2 - 4x + 4$, будет наименьшей, поступим так: $2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 2) = 2\,[(x^2 - 2x + 1) + 1] = 2\,[(x - 1)^2 + 1]$. Здесь $(x-1)^2$ наименьшее значение имеет при $x - 1 = 0$, т. е. при $x = 1$. Поэтому наименьшее значение площади вписанного квадрата будет при $x = 1$, и оно будет равно 2.

220. Если длину прямоугольника обозначим через x, то ширина его будет $8 - x$, а, значит, площадь его будет $S = x(8 - x)$, т. е. $S = -x^2 + 8x$. Надо установить, при каком значении x будет иметь наибольшее значение S. Можно поступить так: $-x^2 + 8x = -(x^2 - 8x + 16 - 16) = -[(x - 4)^2 - 16] = -(x - 4)^2 + 16$. Получившееся выражение будет наибольшим при $x - 4 = 0$, т. е. при $x = 4$.

221. Обозначим длину участка через x, тогда ширина его будет $\frac{100 - x}{2}$, значит, площадь участка, огороженного этим забором, будет равна $S = x\frac{100 - x}{2}$, или $S = -\frac{1}{2}x^2 + 50x$. Но $-\frac{1}{2}x^2 + 50x = -\frac{1}{2}(x^2 - 100x + 2500 - 2500) = -\frac{1}{2}[(x - 50)^2 - 2500] = -\frac{1}{2}(x - 50)^2 + 1250$. Получившееся выражение будет наибольшим при $x - 50 = 0$, т. е. при $x = 50$. Длина участка равна 50 *м*, а ширина его 25 *м*.

222 Сторона квадрата, служащего дном коробки, будет равна $2 - 2x$, а, значит, объём коробки будет равен $V = (2 - 2x)^2x$, или $V = 4x^3 - 8x^2 + 4x$. Для построения графика этой функции составим таблицу $(0 < x < 1)$:

---

* Задачи 219—221 могут быть решены графически. Надо построить графики получающихся функций и по ним найти нужные величины.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
V	0,32	0,51	0,59	0,58	0,5	0,38	0,25	0,13

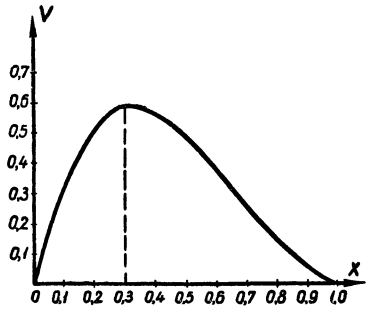


Рис. 76.

По графику (рис. 76) видно, что объём коробки будет наибольшим при $x \approx \approx 0{,}3$ *дм*.

224. $\approx$ 7,5 *м*. **225.** $\approx$ 616 *кв. см*. **226.** $\approx$ 1130 *кв. см*. **227.** $\sqrt{2}d$, где d — диаметр каждой из заменяемых труб. **228.** 252 *куб. см*. **229.** Первая отливка имеет внутри пустоты, общий объём которых равен 0,03 *куб. дм*. **230.** 0,02 *мм*. **231.** Ребро куба было бы больше 18 *м*, но меньше 19 *м*. **232.** Останется без изменения. **233.** 62,5 *г*. **234.** Площадь трёх внутренних кругов больше. **235.** Такая проверка ненадёжна. У ромба, не являющегося квадратом, стороны тоже равны. **236.** И это проверка ненадёжна. Прямоугольник, не являющийся квадратом, также имеет равные диагонали.

237 Такая проверка тоже ненадёжна. Рабочему следовало воспользоваться одним из признаков квадрата, например равенством сторон и равенством диагоналей.

238. Квадрат. Указание. Пусть длина прямоугольника равна x. Тогда ширина равна $18 - x$, а, значит, площадь будет равна $x(18 - x)$, или $-x^2 + 18x$. Но $-x^2 + 18x = -(x^2 - 18x) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 81 - 81) = -[(x - 9)^2 - 81]$. Выражение $-[(x - 9)^2 - 81]$ будет иметь наибольшее значение при $x - 9 = 0$. Значит, длина прямоугольника должна быть равна 9 *см*, а тогда и ширина будет 9 *см*. Получается квадрат. **239.** Например, для раскраски четырёх областей, изображённых на рисунке 77, двух и даже трёх красок недостаточно.

240. Целесообразно вспомогательное построение, показанное на рисунке 78. Прямоугольник $BLMC$ равен прямоугольнику $ABCD$. Как и данный прямоугольник, он составлен из таких же трёх квадратов. Треугольник BKD — прямоугольный, равнобедренный, так

как $BK = KD$, $\angle BKD = 90^0$. Значит, $\angle BDK = 45^\circ$. Кроме того, $\angle AEB = 45^\circ$, $\angle AFB = \angle MDK$. Поэтому $\angle AEB + \angle AFB + \angle ADB = \angle BDK + \angle MDK + \angle ADB = 90^\circ$.

241. См. рис. 79. **242.** См. рис. 80.

243. См. рис. 81. **244.** См. рис. 82.

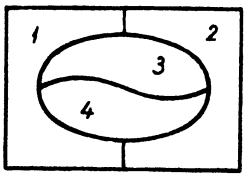


Рис. 77.

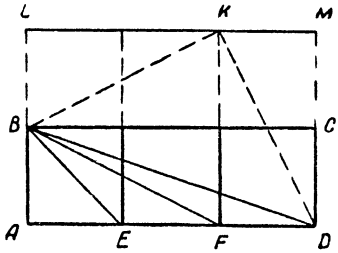


Рис. 78.

245. Искомое геометрическое место — две окружности, концентрические данным, с радиусами, равными $\frac{R+r}{2}$ и $\frac{R-r}{2}$. О второй окружности с радиусом $\frac{R-r}{2}$ часто забывают.

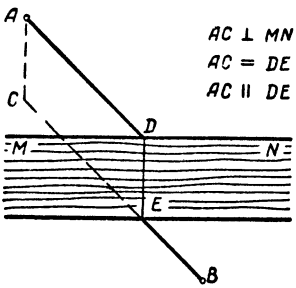


Рис. 79.

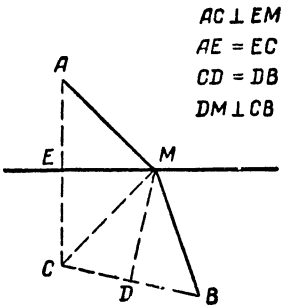


Рис. 80.

246. В общем случае получаются четыре окружности. Центры двух из них лежат на прямой линии, равно удалённой от данных прямых, и находятся от центра данной окружности на расстоянии $r + \frac{d}{2}$, где r — радиус данной окружности, а d — расстояние между параллель-

ными. Центры двух других окружностей лежат на той же прямой и удалены от центра данной окружности на расстояние $\frac{d}{2} - r$. Эти две окружности часто не замечают.

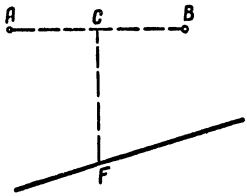


Рис. 81.

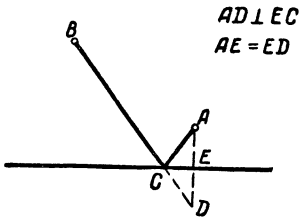


Рис. 82.

247. На карте нужно построить геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом α, и геометрическое место точек, из которых отрезок BC виден под углом β (рис. 83). Построенные геометрические места точек пересекаются в двух точках D и D_1. Одна из этих точек и будет искомой. Какая именно из этих двух точек будет искомой, устанавливается по положению наблюдателя на местности относительно ориентиров A, B и C. Возможен случай, когда дуги ADB и BDC окажутся дугами одной окружности. В этом случае задача будет неопределённой.

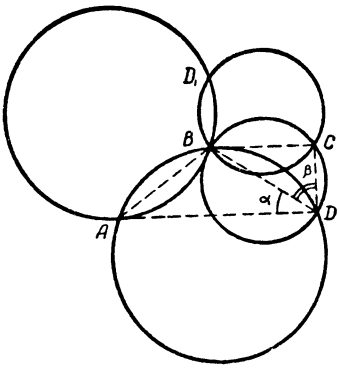


Рис. 83.

248. Из вершины A нужно наиболее коротким путём пройти в вершину C_1 (рис. 84). Можно передвигаться по граням $ABCD$ и DCC_1D_1. Развернём эти две грани так, чтобы они расположились в одной плоскости. Наиболее коротким путём из точки A в точку C_1 будет путь по отрезку AC_1. Таким же будет наименьший путь и по другим граням. Длина отрезка AC_1 приближённо равна 4,5 *дм*. (На рисунке 85 отрезок AB изображает ребро куба в 2 *дм*.)

249. Наиболее коротким путём из вершины A в вершину C_1 будет путь по граням ADD_1A_1 и DCC_1D_1 или по граням ABB_1A_1 и BCC_1B_1 (рис. 86). Развернув грани ADD_1A_1 и DCC_1D_1, так чтобы они расположились в одной плоскости, получим прямоугольник ACC_1A_1. Диагональ AC_1 этого прямоугольника и будет кратчайшим путём. Длина её 6,4 *дм*. Путь по граням $ABCD$ и CDD_1C_1 или по граням ABB_1A_1 и $B_1A_1D_1C_1$ будет более длинным. **250**. Построение понятно

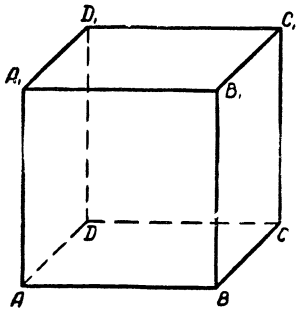


Рис. 84.

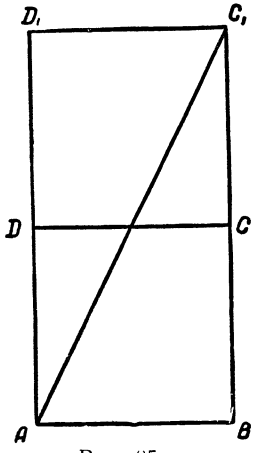


Рис. 85.

из чертежа (рис. 87). **251**. Построение иллюстрирует чертёж (рис. 88). $A_1D \perp BC$, ED — часть искомой высоты. (Возможны и иные решения.)

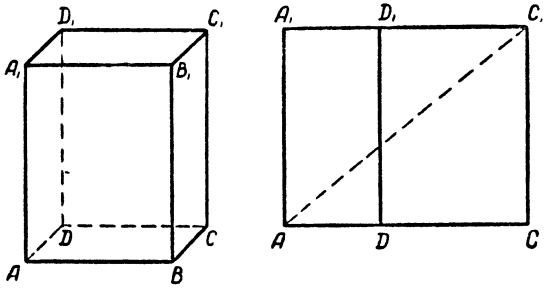


Рис. 86.

252. Точка D, делящая сторону BC на две равные части, может быть найдена. Середины двух других сторон можно найти, проведя через D прямые DE и DF, параллельные этим сторонам. Тогда две медианы, BE и CF, легко провести. Третья медиана должна прой-

ти через точку D и точку пересечения первых двух медиан (рис. 89)

253 Приняв данные точки A и B за центры, опишем две пересекаю

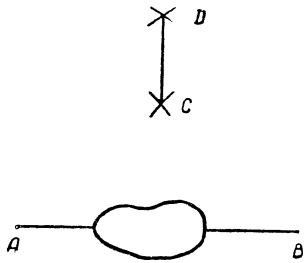


Рис. 87.

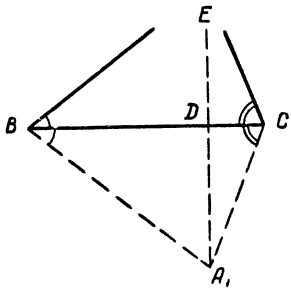


Рис 88.

щиеся дуги одного и того же радиуса. Приняв, далее, за центры две точки пересечения этих дуг, C и D, опишем из них дуги одного и того же радиуса, меньшего чем AC (рис. 90). Получим точки E и F, которые лежат на искомой прямой.

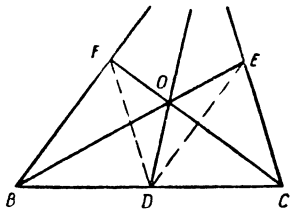


Рис. 89.

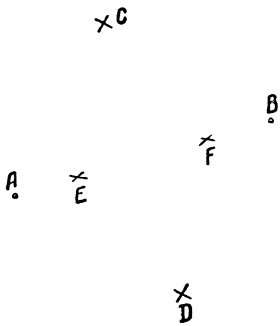


Рис. 90.

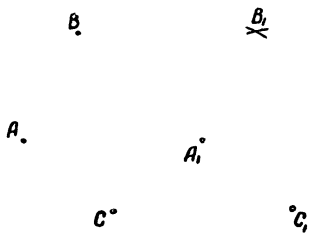


Рис. 91.

254. Строим точки A_1 и C_1 расстояние между которыми равно AC. Из точки A_1 радиусом, равным AB, описываем дугу и из точки C_1 радиусом, равным CB, — вторую дугу (рис. 91). Точка пересечения этих дуг и будет искомой точкой B_1.

255. Из точки C, как центра, радиусом, равным AB, опишем дугу. Затем из точки A, как центра, радиусом, равным BC, опишем вторую дугу (рис. 92). Точка пересечения этих дуг и будет искомой точкой D.

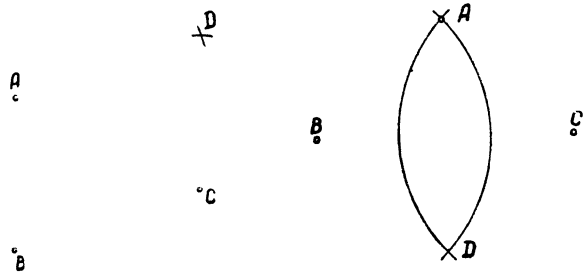


Рис. 92. Рис. 93.

256. 1) Из точки B, как центра, опишем дугу радиусом AB, а из точки C — радиусом AC (рис. 93). Вторая точка пересечения этих двух дуг D и будет искомой точкой. 2) Построение то же самое.

257. Из точек A и B, как центров, описываем две пересекающиеся дуги. Из двух точек пересечения этих дуг, С и D, описываем две

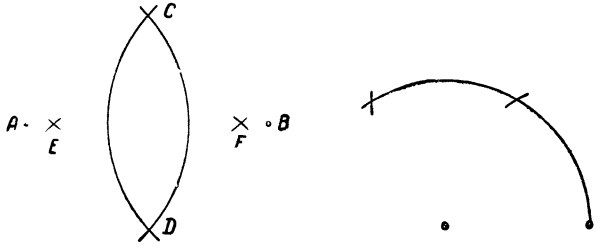


Рис. 94. Рис. 95.

пересекающиеся дуги одного и того же радиуса (рис. 94). Точки пересечения этих дуг, E и F, лежат на прямой AB.

258. Сначала следует построить угол в 60°. Делением этого угла пополам получим угол в 30°. Угол в 90° можно построить так. Сначала построим угол в 120°, взяв два угла по 60°. Затем один из этих углов разделим пополам. Тогда сумма угла в 30° и угла в 60° даст угол в 90° (рис. 95).

259. Данную точку A соединим отрезками прямой с концами данного отрезка BC. Точки D и E пересечения этих отрезков с окружностью

соединим с концами данного отрезка. Получим отрезки CD и BE (рис. 96). Эти отрезки будут высотами треугольника ABC. Третья высота и будет перпендикуляром к BC, проведённым через точку A. Эта третья высота должна пройти через точку A и точку пересечения двух высот O.

260 Можно — 1, 2, 3, 4, 8; нельзя — 5, 6, 7. Указание. Чётной вершиной фигуры назовём такую вершину её, из которой выходит чётное число линий, а если линий нечётное число, то назовём вершину нечётной. Для того чтобы установить, можно ли начертить

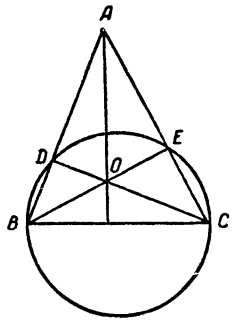


Рис. 96.

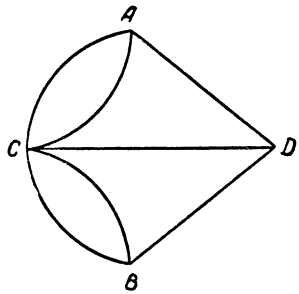


Рис. 97.

фигуру непрерывным движением, следует прежде всего установить, имеются ли у этой фигуры нечётные вершины и сколько их. Всякая чётная вершина проходима. Каждый раз, придя в неё, можно и выйти. В случае нечётной вершины дело обстоит иначе. С такой вершины можно начать движение или закончить его в ней, так как путей, ведущих к нечётной вершине, нечётное число. Поэтому, если нечётных вершин больше двух, то такую фигуру начертить непрерывным движением нельзя. В случае, когда фигура имеет две нечётные вершины, её вычерчивание надо начинать от одной из этих вершин и заканчивать в другой. **261**. Эта задача Эйлера равносильна следующей задаче: начертить непрерывным движением фигуру, изображённую на чертеже (рис. 97), где точки A и B изображают берега, точки C и D — острова, а линии, соединяющие эти точки, — мосты. Рассмотрение этой фигуры заставляет сделать вывод, что непрерывным движением её начертить нельзя, так как все четыре вершины её — нечётные. Значит, обойти 7 мостов, о которых говорится в задаче Эйлера, не проходя ни по одному мосту дважды, нельзя. Если бы не было третьего и четвёртого мостов, то оставшиеся мосты можно было бы обойти так, как это требуется в задаче.

262. См. рис. 98. **263.** См. рис. 99. **264.** См. рис. 100. **265.** 1) См. рис. 101. 2) См. рис. 102. 3) См. рис. 103. **266.** См. рис. 104.
267. См. рис. 105. Получается пространственная фигура (тетраэдр).

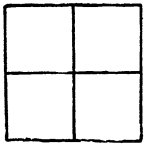


Рис. 98.

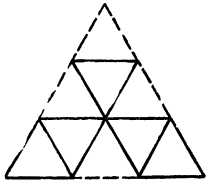


Рис. 99.

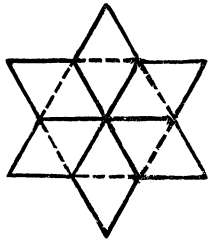


Рис. 100.

268 См. рис. 106. **269.** См. рис. 107. **270.** См. рис. 108. **271.** См. рис. 109. **272.** См. рис. 110. **273.** См. рис. 111. **274.** См. рис. 112. **275.** Пи-

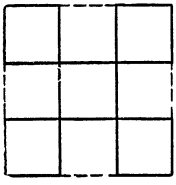


Рис. 101.

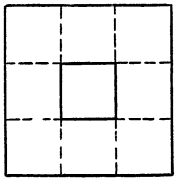


Рис. 102

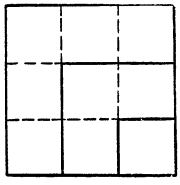


Рис. 103.

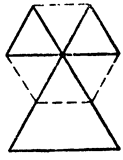


Рис. 104

рамида с треугольным основанием (тетраэдр, см. рис. 113). **276.** 6. **277.** 10. **278.** 1) 20, 2) 28. **279.** 6. **280.** 4 раза. **281.** См. рис. 114. $\angle CAD = 90^0$, AB — биссектриса этого угла. Можно воспользо-

Рис. 105.

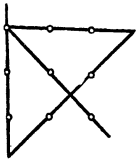


Рис. 106.

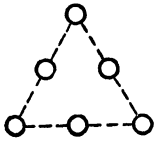


Рис. 107.

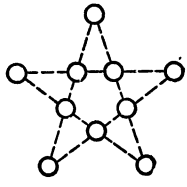


Рис. 108.

ваться также чертёжным угольником. В том и другом случаях надо провести два диаметра.
282. 5 *см.* Указание. Отрезок AB равен радиусу окружности.
283. См. рис. 115.
284. См. рис. 116. **285.** См. рис. 117. **286.** См. рис. 118.
287. См. рис. 119. **288.** См. рис. 120. **289.** См. рис. 121. **290.** См. рис. 122.

291. См. рис. 123. **292** Утверждение ошибочно. Сравни, например, квадрат и прямоугольник с равными периметрами.

293. Площадь, ограниченная замкнутой кривой, длина которой l,

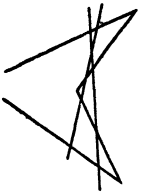


Рис. 109.

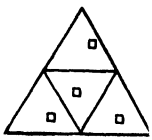
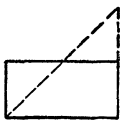
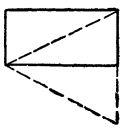


Рис. 110.





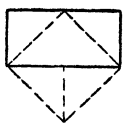


Рис. 111.

не больше площади круга, ограниченного окружностью, длина которой l. Но площадь такого круга может быть вычислена: $R = \frac{l}{2\pi}$,

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{l^2}{4\pi}.$$

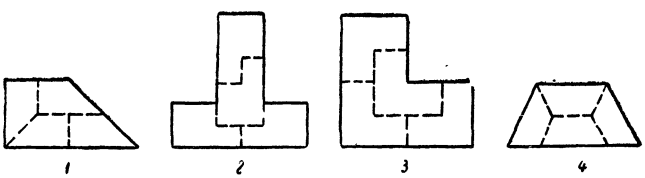


Рис. 112.

294. Верны 6), 7), 8) и 10) утверждения, ошибочны 1), 2), 3), 4) 5), 9) и 11).

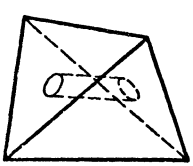


Рис. 113.

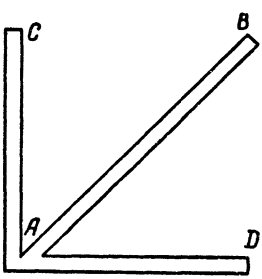


Рис. 114.

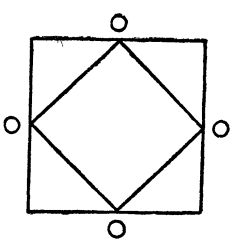


Рис. 115.

300 Верны. **301**. Верна. **302**. Верны. **303**. Неверна. **304**. Треугольники могут быть равными, могут быть и неравными.

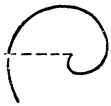


Рис. 116.

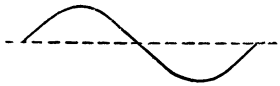


Рис. 117.

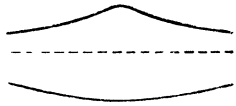


Рис. 118.

305. Неверна. **306**. Обратная и противоположная теоремы неверны. **307**. Условие необходимо, если оно вытекает из заключения, т. е.

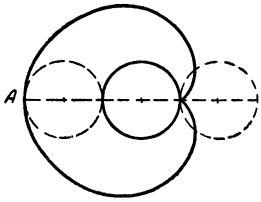


Рис. 119.

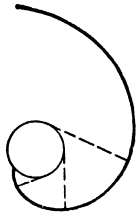


Рис. 120.

Рис. 121.

если справедлива обратная теорема. Условие достаточно, если заключение вытекает из него, т. е. если справедлива прямая теорема.

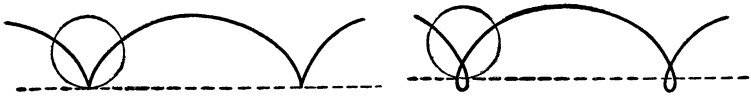


Рис. 122.

Условие необходимо и достаточно, если справедливы прямая и обратная теоремы. 1) Достаточно; 2) необходимо; 3) достаточно; 4) не-

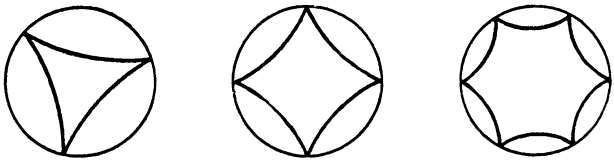


Рис. 123.

обходимо и достаточно; 5) необходимо; 6) достаточно; 7) необходимо и достаточно; 8) достаточно; 9) необходимо; 10) достаточно; 11) необходимо; 12) достаточно; 13) необходимо и достаточно; 14) не дос-

таточно и не необходимо; 15) достаточно; 16) необходимо и достаточно.

308. а) Если в круге (или в равных кругах) дуги равны, то и стягивающие их хорды равны. б) Если в круге (или в равных кругах) хорды равны, то и стягиваемые ими дуги равны.

310 Произведение будет чётным числом. **311**. Нельзя. **313.** В случае двух чисел сумма будет чётным числом, а в случае трёх чисел — нечётным. **315**. Может получиться и верное равенство.

316. Год — это 365 или 366 дней. Если бы каждый день только один ученик отмечал день своего рождения, то лишь 365 или 366 человек могли бы отметить день рождения. Но учащихся было 370. Противоречие, к которому мы пришли, заставляет отбросить предположение. Значит, должны быть такие дни, когда несколько учеников будут отмечать день своего рождения. **318**. Если бы у всех елей было различное число игл, то всех елей в лесу могло быть не больше 500 001, так как на каждой ели игл не более 500 000. На самом же деле в лесу было 550 000 елей. Поэтому нельзя предполагать, что у всех елей игл разное число. Значит, найдутся ели с одинаковым числом игл. **319**. Если в классе 23 ученика, то нельзя утверждать, что в нём найдутся два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы. Действительно, всех букв в нашем алфавите 33, и, если даже выбросить такие буквы, как *й*, *ь*, *ы*, с которых обычно не начинаются фамилии, их останется больше, чем учеников в классе. Совсем иное дело, если в классе будет 35 учеников. Тогда обязательно найдутся в классе хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы. **320**. Достаточно доказать, что трёхрублёвками и пятирублёвками можно уплатить 8, 9 и 10 рублей, так как последующие числа можно получить прибавлением к этим числам числа, кратного 3. Но $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$ и $10 = 5 + 5$. **321**. Натуральные числа, не делящиеся на 3, имеют вид $3n + 1$ и $3n + 2$. Возможны только такие случаи: 1) все три числа — числа первого вида, тогда сумма их разделится на 3; 2) среди трёх чисел два числа первого вида и одно — второго, тогда сумма числа первого вида и числа второго вида разделится на 3; 3) одно число первого вида и два числа второго, тогда будет, как во втором случае; 4) все три числа — числа второго вида, сумма их разделится на 3. **322.** Так как число нечётное, то последней цифрой его может быть 1, 3, 5, 7 и 9. Но число не делится на 5, значит, оно не может оканчиваться цифрой 5. Наконец, учтём, что квадрат числа оканчивается той же цифрой, что и само число. Этим свойством обладают числа, оканчивающиеся 1, а числа, оканчивающиеся цифрами 3, 7 и 9 им не обладают. Значит, в конце числа стоит 1. **323**. 3. **324**. а) 12, б) 7. **325** На одну чашку весов положим 3 монеты и на другую 3. Если установится рав-

новесие, то фальшивая монета находится среди трёх оставшихся. Если же равновесия не будет, то фальшивая монета находится среди тех трёх монет, которые весят меньше. Выделив 3 монеты, среди которых находится фальшивая, возьмём две из них и положим по одной на чашки весов. Если установится равновесие, то фальшивой будет оставшаяся монета. Если равновесия не будет, то фальшивая монета — это более лёгкая. **326.** Сначала на чашки весов кладём по 9 деталей. С помощью этого взвешивания выделим 9 или 8 деталей, среди которых находится имеющая внутри пустоту. Затем на чашки весов положим по 3 детали и выделим 3 или 2 детали, среди которых находится интересующая нас. Наконец, положим на чашки весов по одной детали и выделим нужную нам. **328.** Стоимость всей покупки должна делиться на 3, так как на 3 делится стоимость всех тетрадей, потому что их 9, стоимость всех карандашей, потому что их 3, и стоимость всех блокнотов, потому что каждый из них стоит 6 коп. Но 58 коп. не делятся на 3.

329 Четыре года тому назад всем четырём членам семьи было на 15 лет меньше (73 — 58), а не на 16. Значит, самого младшего члена семьи (сына) ещё не было. Следовательно, сыну сейчас 3 года, дочери 5 лет, матери 31 и отцу 34 года.

330. Первый. **331.** Если бы каждое из этих чисел было больше 10, то их произведение было бы больше 10 000. Далее, ясно, что среди этих чисел нет 5 и 10. Поэтому искомыми числами могут быть 1, 2, 3, 4 или 6, 7, 8, 9. Произведение первых четырёх чисел равно всего лишь 24. Остаются числа 6, 7, 8, 9. Произведение их действительно равно 3024.

332. Можно поступить так: 4 яблока разрезать на половинки, 2 яблока не четвертушки и 1 яблоко на 8 равных частей. Каждый мальчик должен получить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ яблока.

333. Можно это сделать, например, так, как показывает следующая табличка:

	вначале	после переливаний						
12-ведёрный бочонок	12	4	4	9	9	1	1	6
8-ведёрный бочонок	0	8	3	3	0	8	6	6
5-ведёрный бочонок	0	0	5	0	3	3	5	0

334. Берег, на котором находятся колхозники, обозначим буквой *A*, а другой берег — буквой *B*. Вначале оба мальчика переправляются на берег *B*, и один из них остаётся на нём. Второй мальчик до-

ставляет к колхозникам лодку, а сам высаживается на берег A. В лодку садится один колхозник и переправляется через реку. Затем мальчик, остававшийся на берегу B, приводит лодку к берегу A, сажает в него второго мальчика и т. д.

336. Перед уходом к приятелю я завёл свои часы и заметил показание их. Вернувшись от приятеля, я снова посмотрел на свои часы. Сравнив первое и второе показания их, я установил, сколько времени мне понадобилось на посещение приятеля. Из этого времени я вычел время, проведённое мной в квартире приятеля, и получившуюся разность разделил на 2. Тем самым я нашёл время, затраченное мной на дорогу от приятеля к себе домой. Значит, в момент прихода домой я должен поставить свои часы так, чтобы их показание было равно сумме времени, показанного часами приятеля в момент моего ухода от него, и времени, потребовавшегося мне на дорогу. **337.** Ошибка была допущена завещателем. Он упустил из виду, что $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ в сумме составляют не 1, а $\frac{19}{20}$. Этим упущением и воспользовался приятель завещателя. Фактически старший сын получил не $\frac{1}{2}$, а $\frac{10}{19}$, средний не $\frac{1}{4}$, а $\frac{5}{19}$ и младший не $\frac{1}{5}$, а $\frac{4}{19}$. **338.** Цветочницы продавали букетики одновременно по одинаковой цене, но не постоянно по одной и той же. Например, сначала первая продала 3, вторая 5 и третья 6 букетиков по 1 руб. за букетик, а оставшиеся букетики они продавали по 1 руб. за 3 букетика. Тогда каждая из них выручит по 13 рублей. **339.** Коля рассуждал так: у Васи и Пети — красные квадратики. Значит, у меня может быть либо белый квадратик, либо красный. Если бы у меня был белый квадратик, то либо Петя, либо Вася быстро сообразили бы, что у него красный квадратик. В самом деле, Петя, например, мог бы рассуждать так: у Коли белый квадратик, а у Васи красный, значит, у меня красный, так как если бы у меня был белый, то Вася сразу бы сказал, что у него красный, потому что белых квадратиков всего два, а остальные красные. Так же мог бы рассуждать и Вася. Но они молчат. Значит, у меня не белый квадратик, а красный. **340.** Кузнец взял один обрывок и 3 звена его разъединил. Этими тремя звеньями он соединил затем 4 оставшихся обрывка в одну цепь. **341** Одновременно по 2 крупных и 3 более мелких яблока можно было дать всего 20 раз, т. е. 40 детям. После этого осталось бы 20 крупных яблок. Если бы давать по 2 штуки, то их получили бы остальные 10 детей, но на самом деле давали по 5 яблок на двоих. Поэтому оставшиеся

20 яблок получат не 10 детей, а $(20 : 5) \cdot 2$, т. е. 8. Значит, 2 детям яблок не достанется. **342.** По 2 яблока из первой корзины и по 3 из второй одновременно колхозница могла продать только 10 раз. После этого в первой корзине осталось бы 10 яблок, за которые колхозница должна была получить 50 коп. На самом же деле за эти 10 яблок она получила 40 коп., так как за каждые 5 яблок она брала 20 коп. **343.** Вожатый звена должен был точно указать, как рисовальщику быть с самим собой. **344.** Требуемую фигуру можно вырезать так, как это показано на рисунке 124. **345.** Можно задать вопрос: «Вы в этом селении живёте?» Если тот, кому вы зададите этот вопрос, ответит «да», то это селение *A*, если «нет», то *B*. (Первый встретившийся вам человек может быть как жителем селения *A*, так и жителем селения *B*.) В селении *A* житель этого селения и оказавшийся здесь житель селения *B* на твой вопрос ответят «да», а в селении *B* «нет».

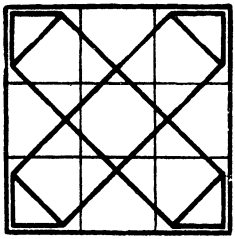


Рис. 124.

346*. Возведение в квадрат некоторой суммы денег не имеет смысла. В квадрат возводятся числа, а не величины. **347.** Нельзя части равенства делить на $7 + 2 - 9$, так как $7 + 2 - 9 = 0$. **348.** Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$. **349.** Если $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$, то должно быть $-\left(2 - \frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{5}{2}$, а не $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$. Если квадраты чисел равны, то это ещё не означает, что и сами числа равны. Из равенства квадратов двух чисел вытекает лишь, что равны абсолютные величины этих чисел. **350.** Такая же ошибка, как и в задаче № 349.

351. Уравнения системы несовместны. Поэтому получилось неверное равенство $4 = 8$. **352.** и **353.** Такая же ошибка, как и в задаче № 349.

354. Нельзя делить на $a - b$, так как $a - b = 0$. **355.** Свойство: если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то и предыдущий член второго отношения больше сво-

* По параграфу «Математические софизмы» мы ограничиваемся краткими указаниями. Подробно и основательно многие из приведённых здесь софизмов разъяснены в книжках Дубнова, Брадиса, Минковского и Харчевой (см. стр. 79—80).

его последующего — может оказаться неверным, если некоторые члены пропорции отрицательны. **356** Деление на $a - a$ недопустимо. **357.** Ошибка в переходе от равенства квадратов к равенству чисел, возводимых в квадрат. **358.** Рассуждения опирались на ошибочный чертёж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной AC в одной точке, т. е. BE совпадает с BD. **359.** Точка

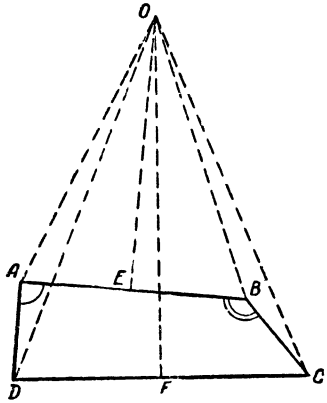


Рис. 125.

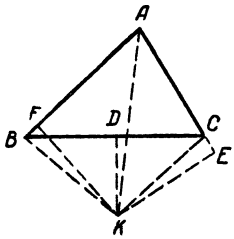


Рис. 126.

D должна лежать на прямой OB. **360.** Точка D должна лежать на прямой AB. **361.** Случаи, рассмотренные в рассуждении, невозможны. Единственно возможный случай иллюстрируется рисунком 125. **362** Единственно возможный случай, если треугольник ABC не является равнобедренным, иллюстрируется рисунком 126.

363 и **364.** Ошибки в чертежах. **365** Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то это ещё не означает, что треугольники равны. **366** (1) и (4) части прямоугольника неплотно примыкают ко (2) и (3) частям его. Между ними образуется «щель» в виде вытянутого параллелограмма, площадь которого равна 1 квадратной единице. **367.** Отрезок A_1B_1 будет иметь длину, превосходящую длину окружности меньшего круга, так как меньший круг покатится по прямой AB_1 со скольжением.

368. 1) Делить обе части уравнения на выражение, содержащее неизвестное, нельзя, так как получится, вообще говоря, уравнение, не равносильное данному. 2) Найдя $x=3$, ученик должен был проверить, не обращается ли при этом значении x общий знаменатель левой и правой частей уравнения в 0. Число 3 не будет корнем данного уравнения, так как при этом значении x общий знаменатель $x - 3$ обращается в 0. Данное уравнение корней не имеет. 3) Ученик не выделил посторонний корень — $1 - \sqrt{2}$. Конечно, возводить в

квадрат уравнение по частям не было никакой необходимости. **369.** 4. **370.** Одной девочке дали клетку с кроликом.
371. Всего было 3 человека: сын, отец и дед. **372.** 7. **373.** Задача неопределённа. **344.** Ученик забыл поставить двоеточие между словами «двадцать» и «пять». **375.** Машинисту паровоза столько лет, сколько тому, кто решает эту задачу, так как в условии сказано: «Представь себе, что ты машинист паровоза...» **376.** Оба поезда в момент встречи их будут находиться от Москвы на одном и том же расстоянии.
377. 3. **378.** 9 марта. **379.** 25 мин.

380. Через $7\frac{1}{2}$ суток. **381.** Только переплёты.

382. 26. **383.** В 3 раза. **384.** На 4. **385.** 2 коп.
386. На 4 *км*. **387.** Задача не имеет решения.

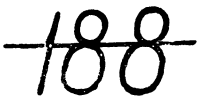


Рис. 127.

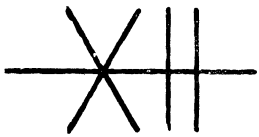


Рис. 128.

388 На 20%. **389** На $33\frac{1}{3}$%. **390.** 10%. **391** Расход энергии составит 28% первоначального. **392.** 2.
393. 1 мин. **394.** 90^0. **395.** Листок бумаги, на котором записано число 666, следует повернуть на 180^0 (чтобы низ стал верхом). Получится число 999. **396.** Надо записать это число и провести черту, как показано на рисунке 127. Получившееся можно истолковать так, что 100 делится на 100. **397.** 100. **398.** 40 десятков.
399. Запятую. **400.** 8. **401.** Может. Полукруг можно считать и сектором и сегментом. **402.** Этим свойством обладает любая линия, лежащая на поверхности шара.
403. Контур шара.
404. 20 коп. **405.** 8 час. **406.** Сначала, не пользуясь гирями, надо развесить крупу по 4,5 *кг*. Затем 4,5 *кг* крупы, тоже без гирь, надо развесить по 2,25 *кг*. Наконец, взяв 2,25 *кг* крупы при помощи гирь в 200 *г* и 50 *г* надо отвесить 250 *г* крупы. Оставшаяся после этого отвешивания крупа будет весить 2 *кг*.

407. За 6 дней. **408.** $1\frac{1}{2}$. **409.** Задача не имеет решения.

410. 10 раз. **411.** На 50. **412.** 11 106. **413.** 1050. **414.** 200.
415. Три. **416.** 1) 65 536. 2) 256; 3) 1. **417.** Среди дробных чисел нет наименьшего.

418. 0. **419.** Когда множитель равен 1. **420.** Когда делитель равен 1. **421.** Если одно из слагаемых и вычитаемое равны 0.

422. Когда один из сомножителей и делитель равны 1 или — 1. **423.** 1. **424.** 888 + 88 + 8 + 8 + 8. **425.** Запиши 12 римскими цифрами и проведи черту, как показано на рисунке 128. Можно дать и такой ответ: $12_{12} : 2_{12} = 7_{12}$.

426. Две. **427.** Две (остальные три свечи сгорят).

428. Килограмм металла всегда дороже, чем полкилограмма такого же металла. **429.** Останется одна, остальные улетят.

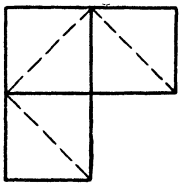


Рис. 129.

430. В 1°. **431.** Самаркандский математик Гиясэддин Каши Джемшид (умер в 1456 г.), а через полтора века фламандский учёный Симон Стевин (1548—1620 гг.). **432.** 5.

433. Шотландский математик Джон Непер (1550—1617 гг.).

434. Леонардом Эйлером (в 1736 г.) и У. Джонсом (в 1706 г.).

435. Выдающимся немецким математиком Г. Лейбницем (в 1698 и 1684 гг.). **436** 14 сентября 1918 года Советом Народных Комиссаров под председательством В. И. Ленина было принято постановление о введении в нашей стране метрической системы мер. **438.** А. С. Грибоедов. **439.** Нельзя. **440.** В прямоугольном треугольнике **441.** Прямую нужно провести через вершину треугольника так, чтобы она пересекала противолежащую этой вершине сторону. **442.** См. рис. 129. **443.** Приписывание к трёхзначному числу такого же числа равносильно умножению самого числа на 1001, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. **444** Пусть задумано число $100a + 10b + c$ и $a > c$. Обращённое число $100c + 10b + a$, а разность их $99a - 99c$. Эта разность равна $100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c)$, где $a - c - 1$ — число сотен, $10 - a + c$ — число единиц. Обращённое для разности число $100(10 - a + c) + 90 + a - c - 1$. Сумма будет $100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c) + 100(10 - a + c) + 90 + a - c - 1 = 100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089$. **446** Пусть сумма двух трёхзначных чисел $a + b$ есть трёхзначное число, записанное при помощи трёх одинаковых цифр (например, 666). Это трёхзначное число делится на 37, так как 111 делится на 37. Приписывание справа к числу a числа b даёт число $10^3 a + b = 1000a + b = 999a + (a + b)$. Получившиеся слагаемые $999a$ и $a + b$ делятся на 37. Разделится и число $10^3a + b$. **447.** $10a + b$ — задуманное число. Получится: $(2a + 5)5 + 10 + b = 10a + 25 + 10 + b = 10a + b + 35$.

448 Каждая цифра задуманного числа в записи шести двузначных чисел встретится 4 раза, причём 2 раза она будет показывать число

десятков и 2 раза число единиц. Следовательно, сумма шести двузначных чисел при делении на 22 даст в частном сумму цифр задуманного числа.

449. Известно, что сумма цифр любого натурального числа при делении на 9 даёт тот же остаток, какой получится при делении на 9 самого числа. У двух чисел, записанных одними и теми же цифрами, остатки от деления на 9 должны быть равны. Поэтому разность этих чисел будет делиться на 9 без остатка. Значит, чтобы найти вычеркнутую цифру, необходимо сумму оставшихся цифр дополнить до ближайшего числа, кратного 9.

450. Четыре последних числа из пяти записанных таковы, что сумма цифр какого-либо разряда в них равна $9 \cdot 2 = 18$. Значит, сумма единиц пяти записанных чисел будет равна сумме 18 и числа единиц первого числа, т. е. единиц в сумме пяти этих чисел, будет на 2 меньше числа единиц первого числа и, кроме того, получатся 2 десятка. Число десятков этой суммы будет равно сумме 18,2 и числа десятков первого числа, т. е. получится число десятков первого числа и 2 сотни. Число сотен суммы пяти чисел будет равно числу сотен первого числа и 2 тысяч и т. д. Каждый раз будут переходить в более высокий разряд два десятка предыдущего разряда. **451** Пусть $a - b$ — первая разность. Тогда вторая будет $c - a$, третья $d - c$, четвёртая $e - d$, пятая $f - e$. Если ограничиться пятью разностями, то сумма их будет равна $a - b + c - a + d - c + e - d + f - e = f - b$.

452. Всё дело в подборе чисел. Особенности чисел, записанных на полосках картона, таковы. Средние цифры у всех чисел одной и той же полоски одинаковы. Одинаковы и суммы крайних цифр у всех этих чисел (для первой полоски они равны 8, для второй 6, для третьей 9, для четвёртой 10, для пятой 7 и для шестой 8). Наконец, сумма средних цифр всех шести полосок, обозначающих число десятков, равна 20. Что же получается при вычислении суммы шести трёхзначных чисел одного столбика? При сложении единиц всех шести чисел мы действительно получим число десятков и число единиц искомой суммы. Чтобы найти число сотен, мы можем поступить так. Из суммы всех сумм крайних цифр для шести чисел одного и того же столбца, равной $48(8 + 6 + 9 + 10 + 7 + 8)$, вычтем число единиц этих шести чисел, т. е. сумму крайних правых цифр. У нас получится сумма крайних левых цифр этих шести чисел, т. е. сумма сотен их. Да ещё нужно будет прибавить 2 сотни, получающиеся от сложения десятков данных чисел. Иначе, для нахождения сотен искомой суммы нужно из $48 + 2$, т. е. из 50, вычесть сумму единиц данных чисел.

454. Пусть m — порядковый номер месяца, t — число этого месяца

и n — число лет. Тогда $\{[(100\ m + t)2 + 8]\ 5 + 4\}10 + n + 4 = 10\,000m + 100\,t + n + 444$.

455. В основе этого развлечения лежит представление числа в двоич-

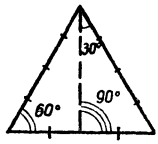


Рис. 130.

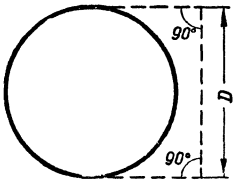


Рис. 131.

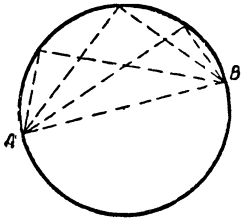


Рис. 132.

ной системе счисления. Возьмём, например, число 23. Его можно представить в виде суммы степеней числа 2 и 1 таким образом: $23 = 2^4 + 2^2 + 2 + 1$. Существенно, что такое представление —

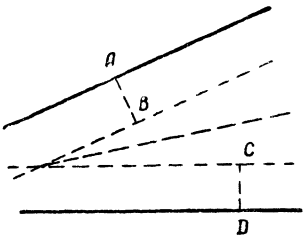


Рис. 133.

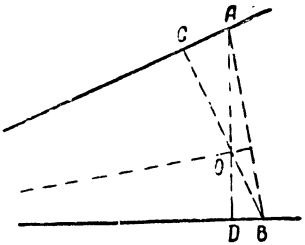


Рис. 134.

единственно. Чтобы можно было угадать это число по карточкам, оно должно быть записано только на первой, второй, третьей и пя-

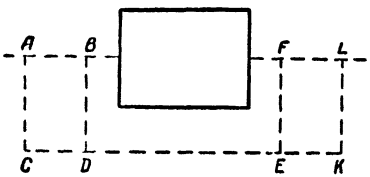


Рис. 135.

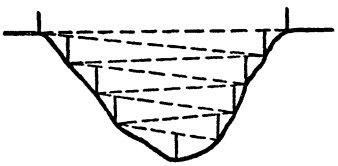


Рис. 136.

той карточках. Так оно и есть. Значит, первые числа карточек — это те степени числа 2, которые входят в представление задуманного числа в виде суммы степеней числа 2 (с разными показателями) и, может быть, 1.

456 12 345 679 9 = 111 111 111. **459.** Весь «секрет» в подборе чисел, характеризующих повороты меньшего круга.
460. См. рис. 130. **461** См. рис. 131. **462.** См. рис. 132.
463. а) К данным прямым построим перпендикуляры. На этих перпендикулярах от оснований их отложим равные отрезки AB и CD. Через концы их B и C проведём прямые, параллельные данным пря-

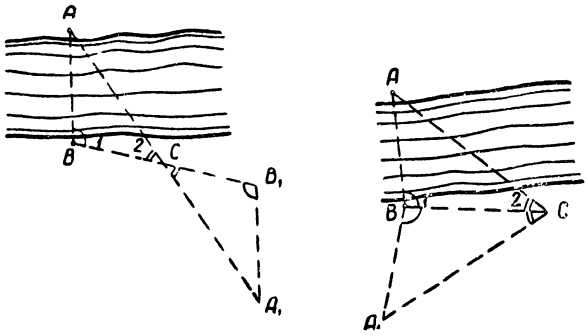


Рис. 137.

мым (рис. 133.) (Длины равных отрезков AB и CD следует взять такими, чтобы вспомогательные прямые, параллельные данным пересекались в доступной точке.) Останется построить биссектрису получившегося угла. б) Через данную точку O проведём перпендикуляры к данным прямым (рис. 134). Точки пересечения этих перпен-

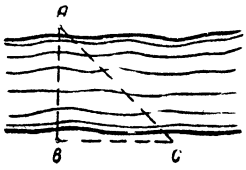


Рис. 138.

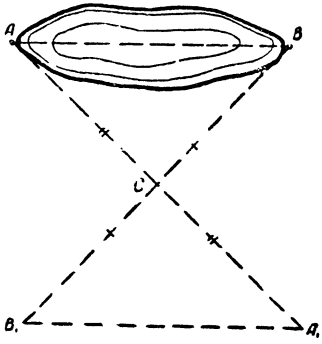


Рис. 139.

дикуляров A и B с данными прямыми (не являющиеся основаниями перпендикуляров) будем рассматривать как две вершины треугольника, третья вершина которого — точка пересечения данных пря-

мых — недоступна. Тогда BC и AD можно считать высотами этого треугольника. Эти высоты пересекаются в точке O. Третья высота треугольника, проходящая через третью (недоступную) вершину его, должна проходить через точку O и должна быть перпендикулярна к стороне AB. Это и будет искомая прямая.

464. Решения поясняют чертежи 135 и 136.

465. Можно построить на местности по стороне BC и двум прилежащим к ней углам 1 и 2 треугольник CA_1B_1 (CA_1B), равный треуголь-

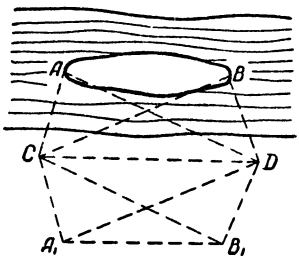


Рис. 140.

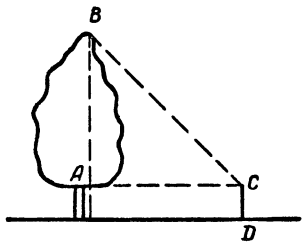


Рис. 141.

нику CAB. Останется измерить сторону A_1B_1(A_1B) (рис. 137). Вместо построения треугольника CA_1B_1 (CA_1B) на местности можно было бы, выбрав подходящий масштаб, начертить треугольник $A_1B_1C_1$ на бумаге, измерить отрезок A_1B_1 по чертежу и, учтя масштаб чертежа, вычислить расстояние AB.

Можно также воспользоваться свойством прямоугольного равнобедренного треугольника (рис. 138).

466. Можно построить на местности треугольник, равный треугольнику ABC (рис. 139). (Точка C выбирается так, чтобы можно было измерить стороны AC и CB.) Остаётся измерить сторону A_1B_1.

Можно также воспользоваться теоремой о средней линии треугольника. Надо измерить среднюю линию треугольника ABC, параллельную AB, и получившуюся длину умножить на 2.

467. Можно на местности построить два треугольника CDA_1 и CDB_1, равных треугольникам CDA и CDB. Это можно сделать по стороне CD и прилежащим к ней углам (рис. 140). Останется измерить расстояние между вершинами A_1 и B_1 этих треугольников.

468. Можно на местности по катету AC и прилежащему острому углу ACB построить прямоугольный треугольник ABC (рис. 411). Сумма длины второго катета этого треугольника и длины отрезка CD даст искомую высоту дерева. Можно воспользоваться также свойством равнобедренного прямоугольного треугольника.

469. Можно построить на местности треугольник ABC по стороне AC

и прилежащим к ней углам A и C. В этом треугольнике из вершины B надо провести высоту, измерить её и прибавить длину CD

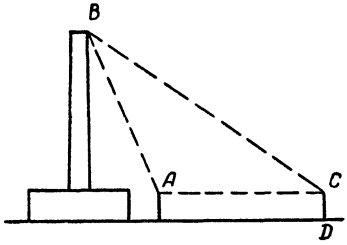


Рис. 142.

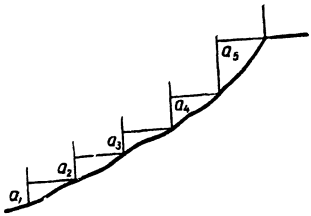


Рис. 143.

(рис. 142). **470.** Можно воспользоваться рейками с дециметровыми и сантиметровыми делениями и уровнем или нивелиром (как показано на рис. 143). Высота берега будет равна $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 2
Прочитай! 3

Глава I. **Арифметика**

Большие числа (миллион, миллиард и другие) . . . 17
Зависимость между данными числами и результатами действий над ними 18
Задачи 18
Некоторые старинные задачи 23
Знаешь ли ты проценты? 25
Без карандаша и бумаги (вычисли устно) 26
Числовые головоломки 27
В мире чисел (системы счисления) 31
Разные вопросы и задачи 32

Глава II. **Алгебра**

При помощи уравнений 34
Умеешь ли ты решать уравнения и неравенства? . . 36
Вычисли! 37
Подумай с карандашом в руках! 38
Докажи! 39
Графики 41

Глава III. **Геометрия**

Вычисли! 47
Докажи! 48
Построй! 49
Построения с препятствиями и ограничениями . . . 51

Непрерывное рисование 52
Головоломки со спичками 53
Геометрические головоломки 54
Ответь на вопросы! 55
Замечательные кривые 56

Глава IV. Логика в математике

Учись правильно рассуждать 61
Верные и ошибочные утверждения 68
Составные части математических утверждений . . . —
Обратная и противоположная теоремы 69
Необходимые и достаточные условия 70
Несколько теорем и вопросов 72
Задачи . . . . . —
Затруднительные положения 74
Математические софизмы 77

Глава V. Математические развлечения

Весёлые вопросы и задачи 88
Математическая викторина 91
Развлечения 93

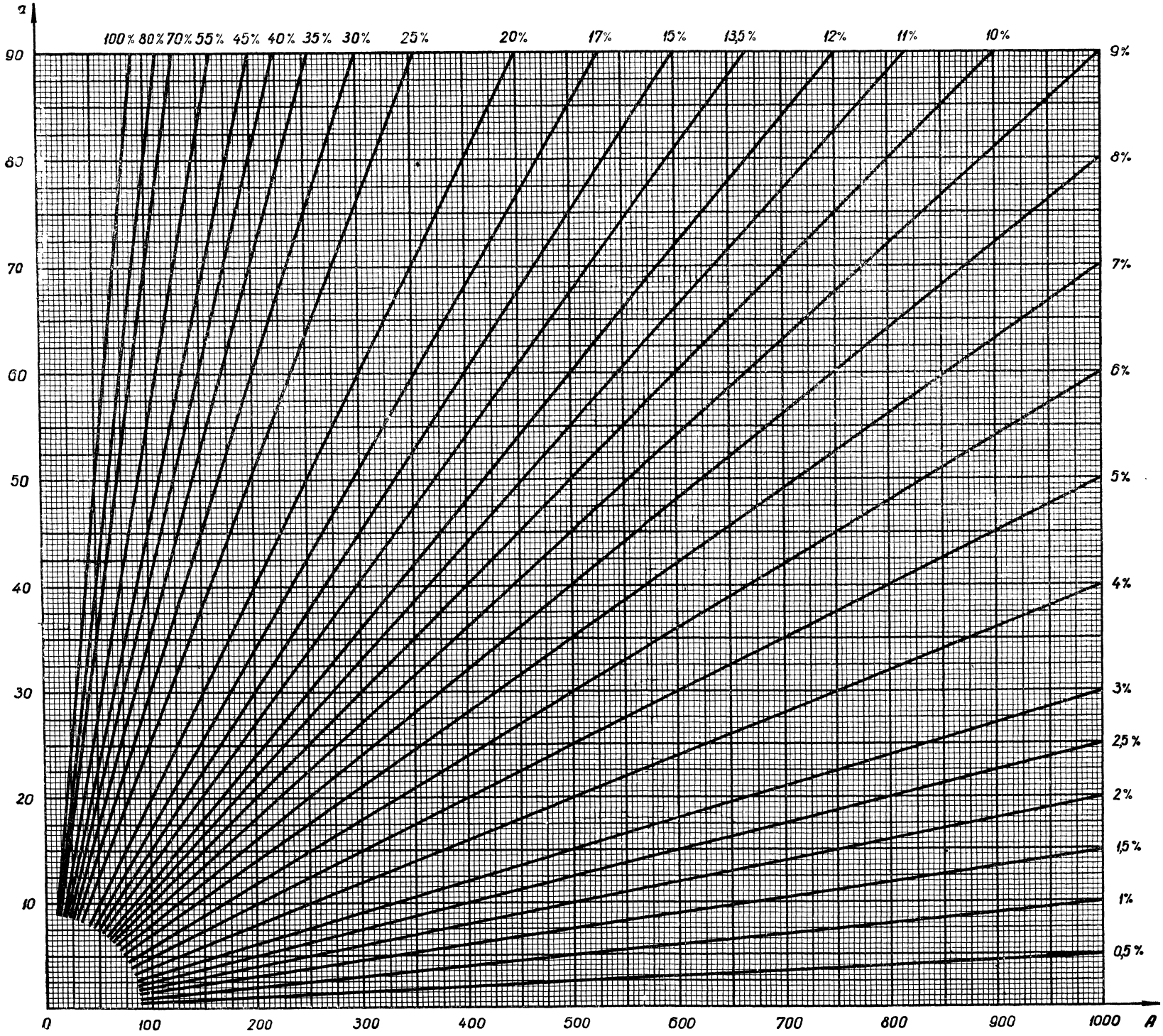
Глава VI. Познакомься, сделай, научись пользоваться!

Научись пользоваться таблицей квадратных корней . 103
«Считающий чертёж» 105
Процентный транспортир 106
«Палочки Непера» . . . . . —
Арифметическая счётная линейка 108
Счётные приборы и машины 109
Эккер 115
Угломер 116
Эклиметр-нивелир 117
Мензула . . . . . —
Пантограф 118
Палетка 119
Измерительные работы на местности 120
Задачи 122

Глава VII. Задачи для математических олимпиад

Арифметика и алгебра 124
Геометрия 129
Ответы и указания 131

Федор Федорович Нагибин
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА
Редактор *С. А. Пономарев*
Художественный редактор *Б. М. Кисин*
Технический редактор *Т. В. Карпова*
Корректор *Р. К. Куркина*
Сдано в набор 12/IX 1960 г. Подписано
к печати 12/I 1961 г. $84 \times 108^1/_{32}$.
Печ. л. 10,5 (8,61) + 0,5 (0,41) вкл.
Уч.-изд. л. 8, 32 + 0,44 вкл.
Тираж 150 тыс. экз. А 00017
Учпедгиз. Москва, 3-й проезд
Марьиной рощи, 41.
Полиграфкомбинат
Саратовского совнархоза
г. Саратов, Чернышевского, 59.
Цена без переплета 23 коп., переплет 8 коп
Заказ № 1898.


a
100% 80% 70% 55% 45% 40% 35% 30% 25% 20% 17% 15% 13,5% 12% 11% 10%
9%
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2,5%
2%
1,5%
1%
0,5%
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
A

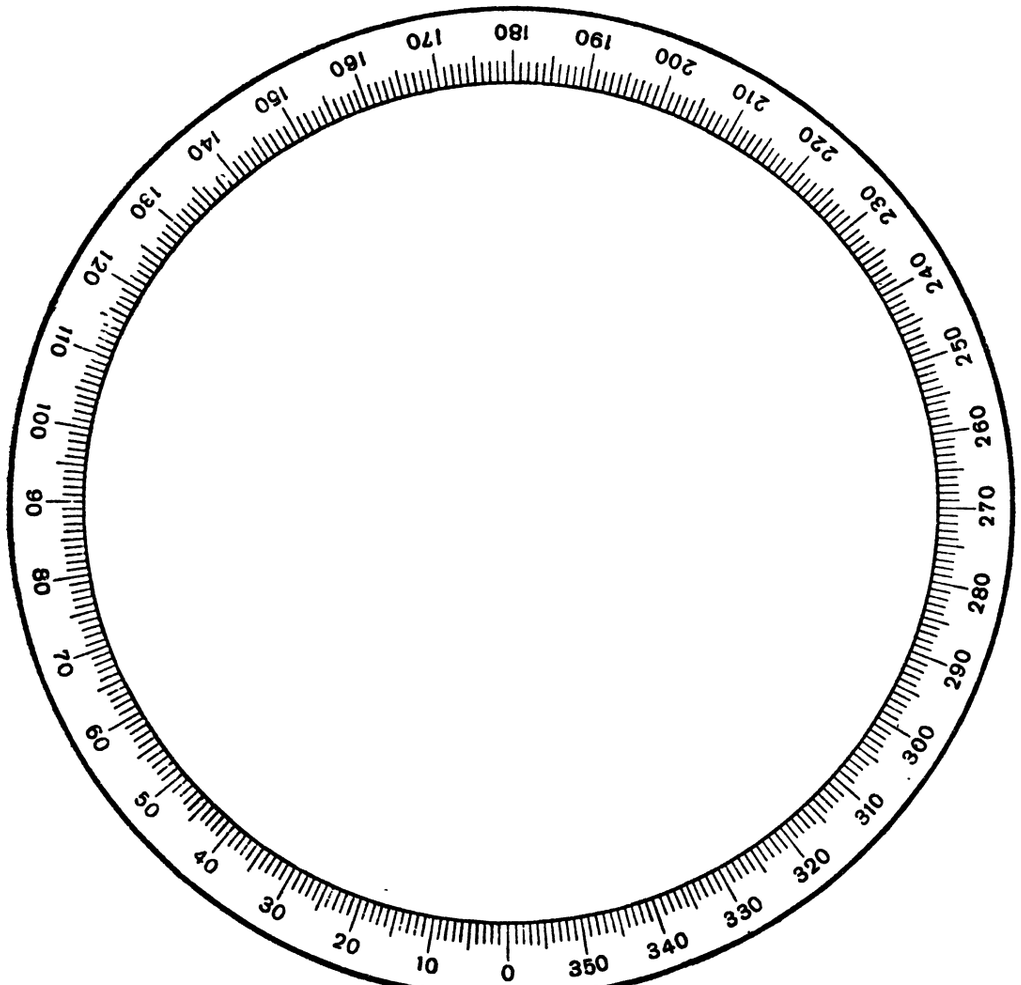
Приложение №2

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144	147	150
	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250
	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	246	252	258	264	270	276	282	288	294	300
	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	287	294	301	308	315	322	329	336	343	350
	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392	400
	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	369	378	387	396	405	414	423	432	441	450
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130	132	134	136	138	140	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	182	184	186	188	190	192	194	196	198	200
153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	183	186	189	192	135	198	201	204	207	210	213	216	219	222	225	228	231	234	237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285	288	291	294	297	300
204	208	212	216	220	224	228	232	236	240	244	248	252	256	266	264	268	272	276	280	284	288	292	296	300	304	308	312	316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	356	360	364	368	372	376	380	384	388	392	396	400
255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500
306	312	318	324	330	336	342	348	354	360	366	372	378	384	390	396	402	408	414	420	426	432	438	444	450	456	462	468	474	480	486	492	498	504	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600
357	364	371	378	385	392	399	406	413	420	427	434	441	448	455	462	469	476	483	490	497	504	511	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	588	595	602	609	616	623	630	637	644	651	658	665	672	679	686	693	700
408	416	424	432	440	448	456	464	472	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	640	648	656	664	672	680	688	696	704	712	720	728	736	744	752	760	768	776	784	792	800
459	468	477	486	495	504	513	522	531	540	549	558	567	576	585	594	603	612	621	630	639	648	657	666	675	684	693	702	711	720	729	738	747	756	765	774	783	792	801	810	819	828	837	846	855	864	873	882	891	900
510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000

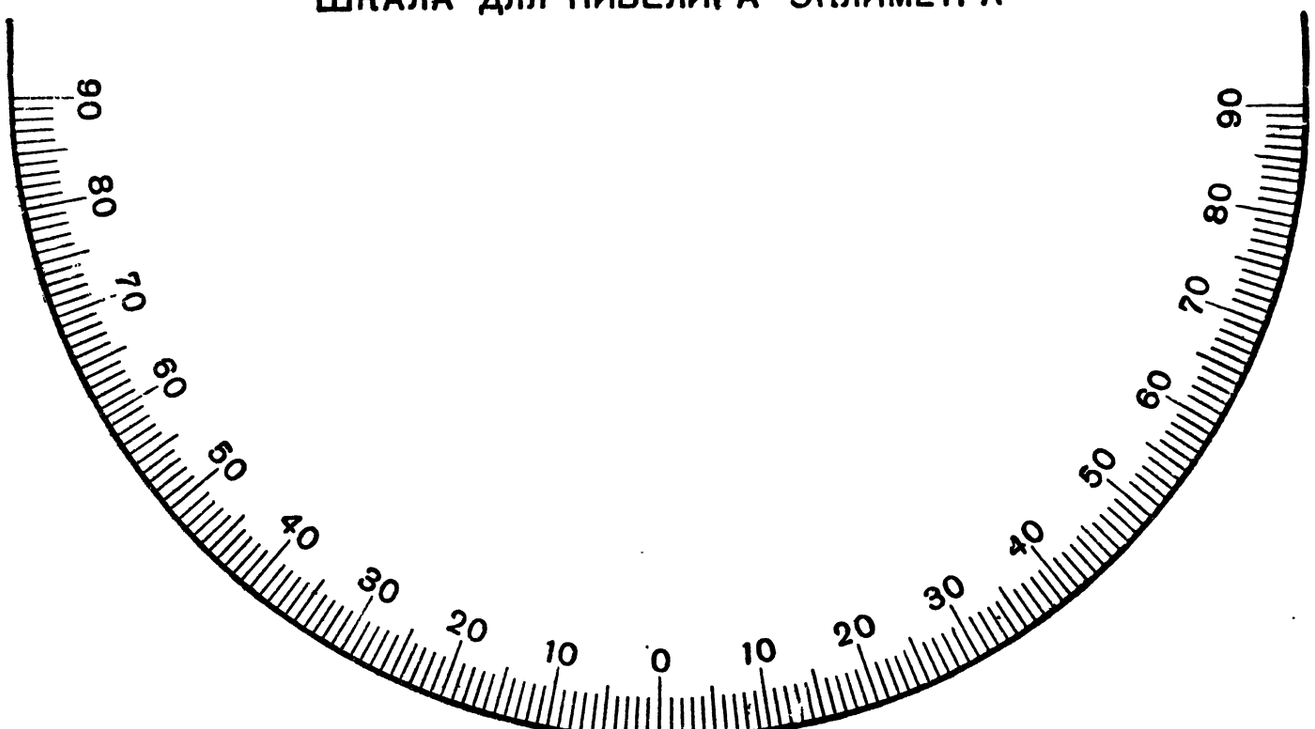
Приложение 3

ШКАЛА ДЛЯ ЛИМБА УГЛОМЕРА



ШКАЛА ДЛЯ НИВЕЛИРА-ЭКЛИМЕТРА

Приложение 4



Цена 31 коп.