К. Берж

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИГР НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

ФМ

К. БЕРЖ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИГР НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Перевод с французского
И. В. СОЛОВЬЕВА

Под редакцией
В. Ф. КОЛЧИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

C. BERGE

Maître de Recherches
au Centre National de la Recherche Scientifique

THÉORIE GÉNÉRALE DES JEUX A n PERSONNES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXXXVIII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1957

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В книге подробно излагается общая теория игр нескольких лиц. Без доказательства приводится лишь малая часть теорем, которые по своему содержанию отступают от основной линии изложения. Главы I, II и III посвящены играм нескольких лиц в развернутой форме. Особенностью излагаемой теории является введение отношений предпочтения для игроков на всем множестве проходимых позиций игры, что часто позволяет получить для бесконечных игр результаты, аналогичные результатам для игр ограниченной длительности с конечным числом альтернатив. В главе IV изучаются топологические игры в нормальной форме. Основное внимание уделено обобщениям важнейшей теоремы теории игр — теоремы фон Неймана о минимаксе. В главе V излагается теория коалиций в играх нескольких лиц. Автор впервые в общей форме дает строгое и достаточно полное изложение современного состояния этих разделов теории.

Хотя для понимания книги предварительных знаний по теории игр не требуется и без объяснений употребляются лишь элементарные сведения из алгебры, теории множеств и топологии, книга рассчитана на читателя, обладающего высокой математической культурой.

В. Ф. Колчин

ВВЕДЕНИЕ

Если оставить в стороне предварительные работы Цермело [45] и Бореля [8], то общая теория игр была создана довольно недавно; первое систематическое исследование, принадлежащее Дж. фон Нейману и О. Моргенштерну, относится к 1944 г. После появления этого фундаментального труда [27] выводы теории все время усовершенствовались и обобщались.

Цель настоящей работы — в общей форме изложить некоторые недавние теоретические результаты. Всюду, где это возможно, мы стремились избавиться от следующих основных ограничений:

а) в любой момент партии у игрока имеется конечное число альтернатив;

б) длительность партии конечна и ограничена заранее заданным числом ходов;

в) от одной позиции игры к другой можно переходить только по единственному, строго определенному пути.

Ж. Виль [42] первый изучал игры, не удовлетворяющие п. а), и нашел, что большинство положений для «конечных» игр без труда можно распространить с помощью непрерывности на «бесконечные» игры. Отметим, однако, что теоретики бесконечных игр предполагают большей частью, что множество, в котором игрок производит свой выбор, может быть перенумеровано (гипотеза счетности); это ограничение, очевидно, излишне при теоретико-множественном определении. Известны игры, в которых множество альтернатив имеет мощность выше мощности континуума.

Устранение гипотезы б) с самого начала привело к странным явлениям; в частности, именно при таком предположении Гейл и Стюарт [13] обнаружили, что основная теорема Цермело—фон Неймана может не выполняться. Для того чтобы избежать таких аномалий, мы определим цель игрока посредством отношений предпочтения на всех проходимых им позициях. Это позволит нам, в частности, получить аналогичные результаты для игр ограниченной длительности и для игр неограниченной длительности.

Устраняя гипотезу в), мы прежде всего имели в виду применить к теории игр некоторые изящные выводы алгебры многозначных отображений [2]. Классическая теория, приводящая всякую игру к упорядоченной форме, является в этом отношении менее гибкой, и в том случае, когда в конечный платеж не входят все проходимые позиции, она вводит в данные, определяющие «позицию», элементы, посторонние для самой задачи. Наконец, другое преимущество неупорядоченной формы состоит в том, что в нее естественно входят понятия динамического программирования (см. R. Bellman, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38** (1952), стр. 716), машин (см. J. Riguet, C. r. Acad. sci. **242** (1956), стр. 435), заданий (missions, см. M. Verhulst, Naval. Research Logistic Quarterly **3** (1956), стр. 45) (как игр с одним лицом).

Так как игру на абстрактном пространстве X можно рассматривать как «структуру», определенную совокупностью правил и предпочтений, мы, естественно, изучаем в главах II и IV случаи, когда X есть топологическое пространство. Интуитивное понятие «смежной» позиции имеется во многих известных играх, как например, игры преследования. Если, кроме того, правила и предпочтения непрерывны, можно говорить о «топологической игре» с таким же основанием, как, например, о «топологических группах». Возможности этой новой аналогии еще недостаточно исследованы.

В главе V мы будем анализировать алгебраическую структуру коалиций. Экономист найдет здесь лишь некоторые общие методы, а не конкретные задачи, которые его интересуют. Относительно частных методов, например для игр трех лиц, мы рекомендуем обратиться к [27].

Мы старались требовать от читателя лишь элементарных сведений из алгебры и теории множеств и иногда кратко напоминаем некоторые основные положения; в главах II и IV мы предполагаем в виде исключения, что читателю известны понятия топологии, впрочем очень простые. Каждую главу можно читать отдельно.

ГЛАВА I

ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

§ 1. Основные положения алгебры множеств. Пусть X и Y — два множества; *многозначное отображение* (или просто *отображение*) *X в Y* есть закон Γ, который ставит в соответствие всякому элементу x множества X подмножество Γx множества Y, вполне определенное и зависящее только от x. Говорят, что Γ есть *отображение, определенное в X*, если для любого x в X множество Γx содержит по меньшей мере один элемент; иначе говоря, если через O обозначить *пустое множество* (не содержащее ни одного элемента), то

$$\{x \mid \Gamma x = O\} = O.$$

Если Γx содержит один и только один элемент (для всякого x в X), говорят, что Γ есть *однозначное отображение*. Если A есть подмножество множества X, *образом A* называется множество

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x.$$

Если $\Gamma X = Y$, говорят, что Γ есть *отображение X на Y*.

Если Γ_1 и Γ_2 — два отображения X в X, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$, I, 0 обозначают отображения X в X, определенные следующими равенствами:

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\, x = \Gamma_1 x \cup \Gamma_2 x,$$
$$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)\, x = \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x,$$
$$(\Gamma_1 \Gamma_2)\, x = \Gamma_1 (\Gamma_2 x),$$
$$\mathrm{I}x = x,$$
$$0x = O.$$

Если Γ есть отображение X в X, пара (Γ, X) по определению составляет *граф*; граф изображается на чертеже множеством точек (которые полагают находящимися во взаимно однозначном соответствии с X); далее, если $y \in \Gamma x$, точку x соединяют с точкой y прямолинейным отрезком, направленным от x к y. Если $y \in \Gamma x$, то говорят также, что точка y связана с точкой x *бинарным отношением* (Γ). (Для изучения графов см. [48].)

Множество I и отображение, ставящее в соответствие всякому i в I подмножество A_i в X, составляют по определению *семейство множеств в* X; семейство множеств обозначается $\mathfrak{A} = (A_i \mid i \in I)$, причем I называется *множеством индексов* семейства $\mathfrak{A}$.

Набор $\{A, B, C, \ldots\}$ различных множеств можно всегда рассматривать как семейство множеств: за индекс i множества A принимается само множество A; в этом случае говорят, что имеется *правильное семейство множеств*. В правильном семействе все множества A_i различны; наоборот, в произвольном семействе $(A_i \mid i \in I)$ могут найтись два равных множества A_i и A_j при $i \neq j$.

Семейство множеств $\mathfrak{A} = (A_i \mid i \in I)$ есть *разбиение множества* X, если:

1) $A_i \in X$, $A_i \neq O$ (для всякого i);
2) если $i \neq j$, то $A_i \cap A_j = O$;
3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$.

$\mathfrak{A}$ есть *структура* (по отношению к операциям $\cup$ и $\cap$), если для любого множества $J \subset I$

1) $\bigcup\limits_{i \in J} A_i \in \mathfrak{A}$;
2) $\bigcap\limits_{i \in J} A_i \in \mathfrak{A}$.

В частности, упорядоченное семейство, образованное всеми подмножествами множества X, есть структура, обозначаемая $\mathfrak{P}(X)$; ее называют также *полной структурой* множества X.

Если через A'_i обозначить дополнение к A_i, то *дополнением к* $\mathfrak{A}$ называют семейство

$$\mathfrak{A}' = (A'_i \mid i \in I).$$

Семейство $\mathfrak{A} = (A_i \mid i \in I)$ называют *дополненным*, если из отношения

$$A_i \in \mathfrak{A} \text{ следует } A'_i = A_j \in \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{P}(X)$ есть, очевидно, семейство множеств, дополненное в X.

Рассмотрим конечное семейство $\mathfrak{A}=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$; его называют также *n-набором множеств. Произведением (топологическим)* множеств A_i называется множество *n-наборов элементов* $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, при $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... это множество обозначается $\prod_{i=1}^{n} A_i$; *проекция на* A_j есть однозначное отображение произведения $\prod_{i=1}^{n} A_i$ в A_j, которое ставит в соответствие элементу $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элемент

$$a_j = \underset{A_j}{\text{проек}}\ a.$$

Топологической суммой множеств A_i называется множество, образованное парами вида (i, a_i), при $a_i \in A_i$; это множество обозначается $\sum_{i=1}^{n} A_i$. Мы будем также обозначать через A_j (для сокращения) множество

$$\{x \mid x \in \sum_{i=1}^{n} A_i,\ x=(j, a_j),\ a_j \in A_j\}.$$

$\sum_{i=1}^{n} A_i$ есть, таким образом, множество, для которого семейство $\mathfrak{A}=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ является разбиением.

Бинарное отношение $\mathfrak{R}$, определенное в множестве X, называется *отношением квазиупорядоченности*, если оно:

1) *рефлексивно*: $x\mathfrak{R}x$;
2) *транзитивно*: из отношений $x\mathfrak{R}y$ и $y\mathfrak{R}z$ следует $x\mathfrak{R}z$;
3) *полно*: если $x, y \in X$, то либо $x\mathfrak{R}y$, либо $y\mathfrak{R}x$.

Это отношение обозначают знаком $\geqslant$, а симметричное отношение знаком $\leqslant$. Таким образом, по определению

$$x \geqslant y \quad \text{равносильно} \quad y \leqslant x.$$

Если $x \geqslant y$, то говорят, что *x предпочтительнее y*; если $x \geqslant y$ и не может быть $x \leqslant y$, то говорят, что *x строго предпочтительнее y* и пишут $x > y$; если $x \geqslant y$ и $x \leqslant y$, то говорят, что *x эквивалентно y* и пишут $x \equiv y$.

Легко проверить, что отношение $\equiv$ есть *эквивалентность* в обычном смысле, т. е. что оно

1) рефлексивно: $x \equiv x$;
2) симметрично: если $x \equiv y$, то $y \equiv x$;
3) транзитивно: если $x \equiv y$, $y \equiv z$, то $x \equiv z$.

§ 2. Общее определение игры с полной информацией. Рассмотрим разбиение $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ абстрактного множества X и n индивидуумов, называемых *игроками*, которых мы будем обозначать цифрами (1), (2), ..., (n); положим $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и будем различать две категории игроков — *активных*, составляющих множество N^+, и *пассивных*, составляющих множество N^-.

Тогда мы скажем, что для этих игроков дана *игра* на указанном разбиении, если имеется: 1) многозначное отображение Γ множества X самого в себя, называемое *правилом игры*; 2) n отношений квазиупорядоченности $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ на X; отношение $\mathfrak{R}_i$, обычно обозначаемое $\overset{i}{\geqslant}$, есть *отношение предпочтения игрока* (i).

Элементы множества X называются *позициями игры*. Если позиция x принадлежит X_i, мы говорим, что *ход* (право сделать выбор) в позиции x принадлежит игроку (i).

Партия проводится, исходя из *начальной позиции* x_0, следующим образом: если $X_1 \ni x_0$, игрок (1), имеющий ход, выбирает позицию игры x_1 в множестве Γx_0. Если $X_i \ni x_1$, игрок (i) должен в свою очередь выбрать позицию x_2 в множестве Γx_1, и т. д. Если какой-либо игрок выберет позицию x, такую, что $\Gamma x = O$, партия прекращается.

Положим $X_0 = \{x \mid \Gamma x = O\}$ и, в случае необходимости изменяя Γ, будем считать $\Gamma X_i \cap X_i = O$.

Отношение $\mathfrak{R}_i$ чаще всего определяется при помощи числовой ограниченной функции $f_i(x)$ следующим образом:

$$x \overset{i}{\geqslant} y \text{ равносильно } f_i(x) \geqslant f_i(y).$$

Тогда говорят, что f_i есть *функция предпочтения* для игрока (i); если для каждого игрока имеется функция предпочтения, игра по определению есть *игра с платежом* [1]), обозначаемая

$$(\Gamma, f), \quad \text{где} \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Точно так же, если f_i есть характеристическая функция

---

[1]) Можно легко проверить, что не всякая игра приводит к игре с платежом. Пусть X есть множество точек (x, y) плоскости и положим, что $(x, y) > (x', y')$, если $x > x'$ или если $x = x'$, $y > y'$; таким образом, определено отношение квазиупорядоченности, которое может изображать предпочтение игрока. Предположим, что суще-

множества K_i, мы говорим, что K_i есть *предпочтительное множество* для игрока (i), и мы имеем по определению *матовую игру* (Γ, K), где $K=(K_1, K_2, \ldots, K_n)$. Когда $x \overset{i}{\geqslant} y$, мы говорим, что позиция x *предпочтительнее* для (i), чем y.

Цели игрока (i) различны для $i \in N^+$ и для $i \in N^-$.

I. *Если $i \in N^+$, игрок (i) стремится получить хотя бы раз в течение партии возможно более предпочтительную позицию в смысле отношения $\overset{i}{\geqslant}$.*

В игре с платежом рассматривается множество S позиций, появляющихся в течение партии, и *выигрышем игрока* (i) называется число $f_i^+(S) = \sup\limits_{x \in S} f_i(x)$. Цель игрока ($i$) — получить как можно больший выигрыш. Таким образом, выигрыш игрока (i) можно связать с денежной суммой, которую получает (i) в конце партии; если $f_i^+(S)$ отрицательно, это означает, что (i) должен заплатить $|f_i^+(S)|$.

II. *Если $i \in N^-$, игрок (i) стремится к тому, чтобы никогда не получать менее предпочтительных позиций в смысле отношения $\overset{i}{\geqslant}$.*

В игре с платежом *выигрыш игрока* (i) будет при этом определяться числом $f_i^-(S) = \inf\limits_{x \in S} f_i(x)$.

Цель игрока (i) — получить возможно больший численный выигрыш.

Пример 1. *Шахматы.* Рассмотрим шахматную игру, в которой каждый игрок имеет только одну цель — дать мат своему противнику. Пусть m_α — позиция на шахматной доске M

ствует функция предпочтения $f(x, y)$, соответствующая этому отношению $\geqslant$, и рассмотрим два числа y_1 и y_2, причем $y_1 \leqslant y_2$.

Всякому числу x можно поставить в соответствие замкнутый интервал

$$I_x = [f(x, y_1), \quad f(x, y_2)];$$

если x' отлично от x, интервал $I_{x'}$ не пересекается с I_x, так как, если, например $x > x'$, получаем

$$f(x, y_i) > f(x', y_j) \qquad (i=1, 2;\ j=1, 2).$$

Семейство I_x — счетное, потому что можно последовательно перенумеровать интервалы с рациональными концами; следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между числами x, которые нельзя перенумеровать, и интервалами вида I_x, которые можно перенумеровать, т. е. мы получили противоречие.

фигуры (α); с каждой *диаграммой* $(m_\alpha \mid \alpha)$ мы свяжем целое число i из множества $N=\{1, 2\}$ и возьмем $i=1$, если ход белых, и $i=2$, если ход черных. Позиция игры будет определена элементом $x=(m_\alpha \mid \alpha) \times i$ пространства произведений $\prod\limits_\alpha M_\alpha \times N$.

В этом случае получается матовая игра, в которой два игрока являются активными, а K_1 и K_2 представляют два вполне определенных подмножества множеств X_1 и X_2; кроме того, $K_1 \cup K_2 \subset X_0$, $K_1 \cap K_2 = O$.

Пример 2. *Игра преследования*. В метрическом пространстве M («море») две подвижные точки m_1 и m_2 («преследующие корабли») пытаются достигнуть подвижной точки m_3 («преследуемый корабль»). Эта ситуация есть предел игры с платежом, в которой три игрока (1), (2), (3), управляющие соответственно кораблями m_1, m_2, m_3, ходят поочередно, например через каждую секунду. С каждой диаграммой m_1, m_2, m_3 связывается целое число из множества $N=\{1, 2, 3\}$, которое принимается равным i, когда ход принадлежит игроку (i). Позицию игры можно определить элементом $x=(m_1, m_2, m_3, i)$ пространства произведений $M \times M \times M \times N$.

Правило Γ определяется следующим образом. Пусть $B_{v_i}(m)$ — шар с центром в m, радиус которого v_i равен наибольшему расстоянию, которое (i) может пройти в одну секунду. Если $m_1 \neq m_3$ и $m_2 \neq m_3$, положим:

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 1) = B_{v_1}(m_1) \times m_2 \times m_3 \times 2,$$
$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 2) = m_1 \times B_{v_2}(m_2) \times m_3 \times 3,$$
$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 3) = m_1 \times m_2 \times B_{v_3}(m_3) \times 1.$$

Если $m_1 = m_3$ или $m_2 = m_3$, положим

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, i) = O.$$

Определим теперь функции предпочтения игроков. Поскольку цель игрока (1) — захватить игрока (3), положим для $(1) \in N^+$

$$f_1(m_1, m_2, m_3, i) = 0, \text{ если } m_3 \neq m_1, \ m_3 \neq m_2;$$
$$f_1(m_1, m_2, m_3, i) = 1, \text{ если } m_3 = m_2 \text{ или } m_3 = m_1.$$

Поскольку единственная цель беглеца — не быть пойманным, положим для $(3)\in N^-$

$$f_3(m_1, m_2, m_3, i)=0, \text{ если } m_3=m_1 \text{ или } m_3=m_2;$$
$$f_3(m_1, m_2, m_3, i)=1, \text{ если } m_3\neq m_1 \text{ и } m_3\neq m_2.$$

Предположим, наконец, что игрок (2), не будучи в состоянии догнать беглеца, стремится как можно больше приблизиться к кораблю (3). Если $d(m_2, m_3)$ есть расстояние от m_2 до m_3, мы положим для $(2)\in N^+$

$$f_2(m_1, m_2, m_3, i)=-d(m_2, m_3).$$

Заметим, что в определенной таким образом игре всегда $(3)\in N^-$ и иначе быть не может; мы имеем матовую игру для игроков (1) и (3) и игру с платежом для игрока (2). Кроме того, игра является *поочередной,* т. е.

$$\Gamma X_1\subset X_2, \quad \Gamma X_2\subset X_3, \quad \Gamma X_3\subset X_1.$$

Пример 3. *Упорядоченная игра с m ходами.* Игра называется *упорядоченной,* если $\Gamma x\cap\Gamma y=O$ при $x\neq y$. Если,

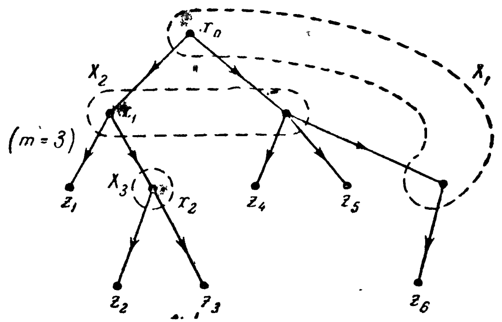

Рис. 1.

кроме того, ее продолжительность ограничена числом m, то пару (X, Γ) можно изобразить нисходящим деревом (рис. 1), каждая ветвь которого имеет самое большее m вершин, кроме самой верхней вершины x_0; на множестве Z конечных вершин задаются функции $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_n(z)$.

Исходя из x_0, игрок (1) выбирает вершину x_1, спустившись по одной ветви, потом игрок (i), указанный вершиной x_1, выбирает в свою очередь таким же способом вершину x_2, и т. д.

Рассматривая каждую вершину x как особую позицию и полагая $a_i = \inf\limits_{z \in Z} \lambda_i(z)$, получаем игру с платежами при $(i) \in N^+$:

$$f_i(x) = a_i \qquad (x \notin Z),$$
$$f_i(x) = \lambda_i(x) \qquad (x \in Z).$$

Заметим, что эта игра, как и шахматы, *монотонна*, т. е. для

$$y \in \Gamma x,$$

имеем

$$y \overset{i}{\geqslant} x \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 3. Стратегия и равновесие. В пространстве X *оператор области* $D(\subset X)$ есть однозначное отображение области D в X. Если дана игра $(\Gamma, \mathfrak{R})$ на $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то *стратегией игрока* (1) называется любой оператор σ_1 области $X_1 - X_0$, такой, что

$$\sigma_1 x \in \Gamma x \qquad (x \in X_1 - X_0).$$

По определению игрок (1) *применяет стратегию* σ_1, если он решает заранее выбирать в любой позиции x множества $X_1 - X_0$ позицию $x' = \sigma_1 x$; для игрока (i) применять некоторую стратегию — это значит установить заранее свой метод игры. Пространство стратегий игрока (1) мы будем обозначать Σ_1. Рассмотрим теперь n-набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, образованный стратегиями разных игроков; если $x \in X_i - X_0$, мы положим

$$\sigma x = \sigma_i x.$$

Таким образом, σ есть оператор, определенный в области $X - X_0$. Пусть $P = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ — подмножество множества

$$N = \{1, 2, \ldots, n\},$$

пусть

$$\sigma_P = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k})$$

обозначает k-набор, соответствующий подмножеству P, а Σ_P обозначает множество k-наборов σ_P. Мы пишем также

$$\sigma = \sigma_N = (\sigma_P, \sigma_{N-P}).$$

Если начальная позиция x_0 задана раз навсегда и если каждый игрок (i) применяет стратегию σ_i, n-набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ полностью определяет партию, а множество пройденных позиций обозначается

$$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\rangle.$$

Для всех n-наборов σ с помощью отношения квазиупорядоченности легко установить *отношение предпочтения* для игрока (i), которое мы опять обозначим $\overset{i}{\geqslant}$. Предположим для определенности, что $i \in N^+$; для двух n-наборов σ и τ полагаем $\sigma \overset{i}{\geqslant} \tau$ (σ для (i) предпочтительнее τ), если для любого

$$z \in X, \quad z \overset{i}{\geqslant} x \quad (x \in \langle\sigma\rangle)$$

имеет место

$$z \overset{i}{\geqslant} y \quad (y \in \langle\tau\rangle).$$

Непосредственно видно, что отношение $\overset{i}{\geqslant}$ есть отношение квазиупорядоченности.

В игре с платежами полагаем точно так же

$$f_i(\sigma) = \sup\{f_i(x) \mid x \in \langle\sigma\rangle\}, \qquad \text{если } i \in N^+,$$
$$f_i(\sigma) = \inf\{f_i(x) \mid x \in \langle\sigma\rangle\}, \qquad \text{если } i \in N^-.$$

В этом случае отношение $\sigma \overset{i}{\geqslant} \tau$ равносильно отношению

$$f_i(\sigma) \geqslant f_i(\tau).$$

По определению n-набор σ есть *точка равновесия*, если

$$(\tau_i, \sigma_{N-i}) \overset{i}{\leqslant} \sigma \qquad (i \in N;\ \tau \in \Sigma).$$

Другими словами, это значит, что игрок (i) ничего не выиграет, если только он один изменит свою стратегию.

§ 4. Отображения, обратные к данному. Если X и Y — два множества, если Γ — отображение множества X в Y и если B — непустое множество в Y, полагаем

$$\Gamma^+ B = \{x \mid \Gamma x \subset B;\quad \Gamma x \neq O\},$$
$$\Gamma^- B = \{x \mid \Gamma x \cap B \neq O\}.$$

Если $B=O$, полагаем

$$\Gamma^+(O)=\Gamma^-(O)=O.$$

Γ^+ и Γ^- суть два отображения, определенные в структуре $\mathfrak{P}(Y)$ подмножеств множества Y и называемые соответственно *верхнее* и *нижнее отображения, обратные* Γ; всегда имеет место $\Gamma^+B\subset\Gamma^-B$.

В отличие от верхнего отображения Γ^+, введенного прежде всего для целей теории игр, нижнее отображение Γ^- есть отображение множества Y в X (это есть обратное отображение в обычном понимании теории отображений).

В следующих предложениях мы принимаем, что Γ есть отображение, определенное на X, т. е. $\{x\mid\Gamma x=O\}=O$.

Предложение 1. *Пусть* $A\subset X$, $B\subset Y$. *Имеем*

$$\begin{array}{ll}
\Gamma^+\Gamma A\supset A, & \Gamma^-\Gamma A\supset A,\\
\Gamma\Gamma^+B\subset B, & \Gamma\Gamma^-B\supset B\cap\Gamma X,\\
(\Gamma^+B)'=\Gamma^-B', & (\Gamma^-B)'=\Gamma^+B',\\
\Gamma^+(B_1\cup B_2)\supset\Gamma^+B_1\cup\Gamma^+B_2, & \Gamma^-(B_1\cup B_2)=\Gamma^-B_1\cup\Gamma^-B_2.
\end{array}$$

Справедливость этих соотношений очевидна.

Предложение 2. *Множества* P *в* Y *такие, что* $\Gamma^+P=\Gamma^-P$, *называются чистыми*; *они образуют структуру с дополнениями* $\mathfrak{P}$ *на* Y.

В самом деле, если $P\in\mathfrak{P}$, имеем $P'\in\mathfrak{P}$, так как

$$\Gamma^+P'=(\Gamma^-P)'=(\Gamma^+P)'=\Gamma^-P'.$$

С другой стороны, если $\{P_i\mid i\in I\}\subset\mathfrak{P}$, имеем

$$\Gamma^-(\cup P_i)=\cup\Gamma^-P_i=\cup\Gamma^+P_i\subset\Gamma^+(\cup P_i).$$

Поскольку обратное включение также имеет место, $\cup P_i\in\mathfrak{P}$. Имеем также $\cap P_i\subset\mathfrak{P}$, так как

$$(\cap P_i)'=\cup P_i'\subset\mathfrak{P}.$$

Предложение 3. *Множества* S *в* X *такие, что* $\Gamma^-\Gamma S=S$ *называются* Γ-*устойчивыми*; *они образуют структуру с дополнениями* $\mathfrak{S}$ *на* X.

В самом деле, $\cup S_i\subset\mathfrak{S}$, так как

$$\Gamma^-\Gamma(\cup S_i)=\cup\Gamma^-\Gamma S_i=\cup S_i.$$

Кроме того, $S' \subset \mathfrak{S}$, а следовательно, $\bigcap S_i \subset \mathfrak{S}$, так как

$$(\bigcap S_i)' = \bigcup S_i' \subset \mathfrak{S}.$$

Предложение 4. *Множества $F \subset X$ такие, что $\Gamma^+\Gamma F = F$, называются Γ-замкнутыми; $\Gamma^+\Gamma$ есть топологическое замыканце.*

В самом деле, соответствие, которое сопоставляет множеству A множество $\Gamma^+\Gamma A$, является

1) *экстенсивным*: $\Gamma^+\Gamma A \supset A$;

2) *монотонным* (сохраняющим порядок): если $A \supset B$, то $\Gamma^+\Gamma A \supset \Gamma^+\Gamma B$;

3) *идемпотентным*: $\Gamma^+\Gamma(\Gamma^+\Gamma A) = \Gamma^+\Gamma A$.

Следствие. *Если $\{F_i \mid i \in I\}$ есть семейство Γ-замкнутых множеств, то их пересечение $F = \bigcap F_i$ есть Γ-замкнутое множество.*

В самом деле, на основании монотонности

$$\Gamma^+\Gamma F \subset \Gamma^+\Gamma F_i = F_i,$$

откуда

$$\Gamma^+\Gamma F \subset \bigcap F_i = F.$$

Поскольку отношение $\Gamma^+\Gamma$ экстенсивно, можно также написать обратное включение, и, следовательно,

$$\Gamma^+\Gamma F = F.$$

Заметим, кроме того, что $\Gamma^+\Gamma A$ есть Γ-замкнутое множество и что оно является пересечением всех Γ-замкнутых множеств, содержащих A.

§ 5. Гарантированные позиции и выигрыши игрока.

Допустим теперь, что $(1) \in N^+$; мы говорим, что в начальной позиции x_0 игрок (1) *строго гарантирует позицию y*, если для заданного им целого m он может получить позицию игры, более предпочтительную, чем позиция y, раньше m-го хода независимо от действий других игроков. Иначе говоря, игрок (1) может задать себе предельное время, чтобы привести позицию игры в верхнюю область $\Delta_y = \{x \mid x \overset{1}{\geqslant} y\}$. Множество начальных позиций x, в которых игрок (1) может строго гарантировать y, обозначается $\overline{G}_y$.

В том случае, если игрок (1) в состоянии получить позицию, более предпочтительную, чем позиция y, но не может задать предельное время, мы говорим, что он *гарантирует позицию* y; множество начальных позиций x, в которых игрок (1) может гарантировать y, будет обозначаться G_y.

Для игры с платежами мы говорим, что игрок (1) *гарантирует выигрыш* γ, если он может привести позицию игры в область $\Delta_\gamma = \{x \mid f_1(x) \geqslant \gamma\}$ независимо от действий других игроков; множество начальных позиций x, в которых игрок (1) может гарантировать γ, будем обозначать G_γ. Положим

$$\varphi_1(x) = \sup\{\gamma \mid G_\gamma \ni x\}.$$

В позиции игры x игрок (1) может гарантировать сколь угодно близкий к $\varphi_1(x)$ выигрыш, меньший, чем $\varphi_1(x)$, и не может гарантировать выигрышей, превосходящих $\varphi_1(x)$. На этом основании $\varphi_1(x)$ называется *наилучшим выигрышем игрока* (1) и φ_1 есть его *функция наилучшего выигрыша.*

Таким же образом определяется *функция строго наилучшего выигрыша игрока* (1) $\overline{\varphi}_1$. Очевидно, если продолжительность игры ограничена, эти две функции совпадают.

Замечание. Необходимо отметить, что при изучении стратегий начальная позиция x_0 считается заданной раз навсегда. Напротив, в последующем изложении исследуется игра при всей совокупности возможных позиций x_0. Таким образом, одна точка зрения является «локальной», а другая «глобальной».

Теорема 1 [2]. *В игре n лиц множество $\overline{G}_y$ позиций, в которых игрок* (1) *может строго гарантировать y, определяется после приведения по модулю* (1) *формулой*

$$\overline{G}_y = \overline{\lim_{m\to\infty}}\,(1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^m \Delta_y.$$

Приведение игры по модулю (1) определяется следующим образом: если игроки (2), (3), ..., (n) вступают в коалицию и играют как одно лицо, то начальную игру можно заменить игрой двух лиц (+) и (—), где множества $X_+ = X_1$, $X_- = \bigcup_{i\neq 1} X_i$.

Положим

$$B_+ A = A \cap X_+, \quad B_- A = A \cap X_-.$$

Преобразование $\overline{\Gamma}$ приведенной игры определяется как

$$\overline{\Gamma} x = \Gamma x \qquad (x \in X_+),$$

$$\overline{\Gamma} x = B_+ \Gamma x \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma x) \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma)^2 x \cup \ldots (x \in X_-).$$

Предположим теперь, что игра приведена по модулю (1), что не меняет множество G_y; игроки (1) и (—) играют попеременно. Обозначим через $G_y(m)$ множество позиций, в которых игроку (1) можно достигнуть позицию в верхней области $\Delta_y = \{x \mid x \overset{1}{\geqslant} y\}$ самое большее в m ходов. Легко убедиться в справедливости соотношений:

$$B_+ G_y(m) = \Gamma^- B_- G_y(m-1) \cup B_+ G_y(m-1),$$
$$B_- G_y(m) = \Gamma^+ B_+ G_y(m-1) \cup B_- G_y(m-1).$$

Складывая почленно, получим

$$G_y(m) = (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)\, G_y(m-1).$$

Таким образом, получается соотношение

$$G_y(m) = (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^m \Delta_y;$$

$\overline{G}_y$ есть множество элементов, принадлежащих множеству $G_y(m)$ по крайней мере для одного значения целого числа m; следовательно, по определению верхнего предела последовательности множеств

$$\overline{G}_y = \varlimsup_{m \to \infty} (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^m \Delta_y.$$

Теорема 2. *В игре n лиц, приведенной по модулю* (1), *множество G_y позиций, в которых игрок* (1) *может гарантировать y, определяется формулой*

$$G_y = \sup_\alpha (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^\alpha \Delta_y,$$

где α обозначает любое порядковое трансфинитное число.

Полагаем, как принято в теории трансфинитных чисел,

$$\begin{aligned}
G_y(0) &= \Delta_y,\\
G_y(m+1) &= (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)\, G_y(m),\\
G_y(\omega) &= \overline{G}_y,\\
G_y(\omega+1) &= (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)\, G_y(\omega)\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Если для порядкового трансфинитного числа α начальная позиция принадлежит множеству $G_y(\alpha)$, то мы говорим, что позиция y гарантирована при порядке α. Если, например, игрок (1) гарантирует y при порядке 2ω, то это значит, что существует число m такое, что если игрок (1) играет разумно, он сможет вычислить раньше m-го хода число m' такое, что он получит позицию более предпочтительную, чем y, самое большее за m' ходов. G_y есть объединение множеств вида $G_y(\alpha)$, когда α пробегает множество порядковых чисел, и мы получаем формулу теоремы.

Следствие. *Имеем*

$$G_y = (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)\, G_y.$$

В самом деле, достаточно показать, что из условия

$$x \in \Gamma^+ B_+ G_y \cup \Gamma^- B_- G_y \text{ следует } x \in G_y.$$

Если $x \in \Gamma^+ B_+ G_y$, имеем

$$\Gamma x \in G_y \cap X_+.$$

По теореме произвольного выбора существует порядковое трансфинитное число α такое, что

$$\Gamma x \subset G_y(\alpha) \cap X_+,$$

откуда

$$x \in G_y(\alpha + 1) \subset G_y.$$

Если $x \in \Gamma^- B_- G_y$, то при помощи аналогичного рассуждения мы пришли бы к тому же выводу; итак, формула доказана.

Теорема 3 (обобщенная теорема Цермело). *В игре с платежами* (Γ, f, g) *с двумя игроками имеют место следующие равносильные предложения:*

А) *Для некоторого числа* γ *и любого малого положительного* ε *существует стратегия* σ_1^0, *позволяющая игроку* (1) *гарантировать* $\gamma - \varepsilon$, *и стратегия* σ_2^0, *позволяющая игроку* (2) *добиться того, что выигрыш игрока* (1) *не будет превосходить* $\gamma + \varepsilon$.

Б) *Для любого положительного числа* ε *для игроков* (1) *и* (2) *существуют две стратегии* σ_1^0 *и* σ_2^0 *такие, что*

$$f(\sigma_1, \sigma_2^0) - \varepsilon \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2) + \varepsilon \quad (\sigma \in \Sigma).$$

В) *Величины*

$$V = \sup_{\sigma_1} \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{и} \quad W = \inf_{\sigma_2} \sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2)$$

равны.

Докажем, например, предложение А. Зададим положительное ε. Пусть x_0 — начальная позиция, и положим

$$\gamma = \sup\{\lambda \mid G_\lambda \ni x_0\}.$$

Поскольку $x_0 \in G_{\gamma-\varepsilon}$, существует стратегия, позволяющая игроку (1) получить позицию в области $\Delta_{\gamma-\varepsilon} = \{x \mid f(x) \geqslant \gamma - \varepsilon\}$; таким образом, остается показать, что игрок (2) может добиться того, что позиции игры никогда не будут принадлежать области $\Delta_{\gamma+\varepsilon}$.

Предположим для определенности, что $x_0 \in X_1$; имеем

$$x_0 \notin G_{\gamma+\varepsilon} = (1 \cup \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^- B_2)\, G_{\gamma+\varepsilon}.$$

Отсюда

$$x_0 \notin \Gamma^- B_2 G_{\gamma+\varepsilon}, \qquad x_0 \notin \Delta_{\gamma+\varepsilon}.$$

Если $\Gamma x_0 = O$, предложение доказано; если $\Gamma x_0 \neq O$, то $\Gamma x_0 \cap G_{\gamma+\varepsilon} = O$; позиция x_1, выбранная игроком (1), будет, следовательно, такой, что

$$x_1 \notin G_{\gamma+\varepsilon} = (1 \cup \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^- B_2)\, G_{\gamma+\varepsilon},$$

откуда

$$x_1 \notin \Gamma^+ B_1 G_{\gamma+\varepsilon}, \qquad x_1 \notin \Delta_{\gamma+\varepsilon}.$$

Если $\Gamma x_1 = O$, теорема доказана; если $\Gamma x_1 \neq O$, то $\Gamma x_1 \not\subset G_{\gamma+\varepsilon}$. Игрок (2) может, если пожелает, выбрать позицию x_2, не принадлежащую множеству $G_{\gamma+\varepsilon}$, и мы получаем, как и раньше, условие: $x_2 \notin G_{\gamma+\varepsilon}$. Таким образом, у игрока (2) имеется стратегия, позволяющая исключить позицию игры на бесконечное время из $\Delta_{\gamma+\varepsilon}$.

Доказательство равносильности предложений (А), (Б), (В).

1. *Из* (А) *вытекает* (Б). Пусть ε — положительное число; согласно предложению (А) существует стратегия σ^0 такая, что

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2) \qquad (\sigma_2 \in \Sigma_2),$$

$$\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant f(\sigma_1, \sigma_2^0) \qquad (\sigma_1 \in \Sigma_1).$$

В частности,

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leqslant \gamma + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leqslant \gamma + \frac{\varepsilon}{2} = \gamma - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2) + \varepsilon,$$

$$f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \geqslant \gamma - \frac{\varepsilon}{2} = \gamma + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \geqslant f(\sigma_1, \sigma_2^0) - \varepsilon,$$

и мы получаем предложение (Б).

2. Из (Б) вытекает (В). Согласно (Б) имеем

$$\sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2^0) \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \varepsilon,$$

$$\inf_{\sigma_2} f(\sigma_1^0, \sigma_2) \geqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) - \varepsilon,$$

откуда

$$W \leqslant f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \varepsilon \leqslant \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1^0, \sigma_2) + 2\varepsilon \leqslant V + 2\varepsilon.$$

С другой стороны, если $F(x, y)$ — функция двух переменных, то известно и можно, впрочем, немедленно доказать, что

$$\sup_x \inf_y F(x, y) \leqslant \inf_y \sup_x F(x, y).$$

В частности, имеем, следовательно, $V \leqslant W$. Отсюда

$$0 \leqslant W - V \leqslant 2\varepsilon.$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым, получаем $V = W$.

3. Из (В) вытекает (А). В самом деле, положим $\gamma = V = W$ и зададим положительное число ε. Игрок (1) имеет стратегию σ_1^0, такую, что

$$\inf_{\sigma_2} f(\sigma_1^0, \sigma_2) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2) - \varepsilon = \gamma - \varepsilon.$$

Точно так же игрок (2) имеет стратегию σ_2^0, такую, что

$$\sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2^0) \leqslant \inf_{\sigma_2} \sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon = \gamma + \varepsilon,$$

и мы получаем предложение (А).

Пример. Применим эту теорему, например, к шахматной игре, где

$f(x) = +1$, если мат черным,
$f(x) = -1$, если мат белым,
$f(x) = 0$, если получилась ничья.

Для $\gamma = \varphi(x_0)$ имеются только три возможных значения:
$\gamma = +1$: у белых имеется способ наверняка выиграть;
$\gamma = -1$: у черных имеется способ наверняка выиграть;
$\gamma = 0$: и у белых, и у черных имеется способ гарантировать ничью.

Мы не знаем, к какому случаю нужно отнести шахматы, но следует полагать, что случай $\gamma = -1$ исключен.

Замечание. Рассмотрим ситуацию, в которой игроки (1) и (2) играли бы неопределенно долго следующим образом: Игрок (1) выбирает число $a(1)$, равное 0 или 1, потом игрок (2) выбирает таким же образом число $a(2)$; затем игрок (1) выбирает таким же образом число $a(3)$ и т. д. В каждый момент m полученную позицию можно изобразить точкой отрезка $[0,1]$, а именно:

$$x = \frac{a(1)}{2} + \frac{a(2)}{2^2} + \frac{a(3)}{2^3} + \ldots + \frac{a(m)}{2^m}.$$

2-набору (σ_1, σ_2) будет соответствовать рациональное или иррациональное число $x(\sigma_1, \sigma_2)$ единичного отрезка. Возьмем в качестве $f(\sigma_1, \sigma_2)$ характеристическую функцию некоторого подмножества K_1 этого отрезка.

Гейл и Стюарт [13] показали, что, вообще говоря, у игрока (1) нет стратегии, гарантирующей, что позиция $x(\sigma_1, \sigma_2)$ будет в K_1, а у игрока (2) нет стратегии, препятствующей попаданию $x(\sigma_1, \sigma_2)$ в K_1; поэтому теорема 3 представляется неверной. В действительности здесь имеет место явный парадокс, так как функция $f(\sigma_1, \sigma_2)$ в данном случае не имеет форму

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sup \{f(x) \mid x \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle\}.$$

§ 6. Циклы игры. Множество $C \subset X$, по определению, есть *цикл*, если $\Gamma C \subset C$; если позиция игры в данный момент находится в цикле, то она останется в нем в течение всей партии.

Структурой циклов называется семейство $\mathfrak{D}$ всех циклов. Это действительно структура, так как если $(C_\lambda \mid \lambda)$ — семейство циклов, то

$$\bigcup_\lambda C_\lambda \in \mathfrak{D}, \qquad \bigcap_\lambda C_\lambda \in \mathfrak{D}.$$

Если $A \subset X$, множество $\hat{\Gamma} A = A \cup \Gamma A \cup \Gamma^2 A \cup \ldots$ называется *циклом, порожденным множеством* A, а отображение $\hat{\Gamma}$ есть *транзитивное замыкание отображения* Γ.

Предложение 1. *Если C — цикл,* то ΓC *также цикл, так как* $\Gamma(\Gamma C)\subset\Gamma C$.

Предложение 2. *Если C — цикл, то его Γ-замыкание $C'=\Gamma^{+}\Gamma C$ есть не меньший и Γ-замкнутый цикл.*

В самом деле, имеем

$$\Gamma C^{*}=(\Gamma\Gamma^{+})\,\Gamma C\subset\Gamma C\subset C\subset C^{*}.$$

Следовательно, все множество X, которое не может быть увеличено Γ-замыканием, есть Γ-замкнутый цикл; пересечение Γ-замкнутых циклов есть Γ-замкнутый цикл (§ 4, предложение 4).

Замечания. Предыдущие предложения можно обобщить, заменив понятие цикла более общим понятием. Множество C пространства X есть, по определению, *псевдоцикл для множества P игроков*, если в позиции игры, принадлежащей множеству C, игроки множества P могут гарантировать, что позиция игры останется в C в течение всей партии.

Рассмотрим для простоты игру двух лиц; если C есть псевдоцикл для игрока (1) и если $x\in C\cap X_1$, то имеет место по крайней мере одно из двух соотношений:

$$\Gamma x=O,$$
$$\Gamma x\cap C\neq O.$$

Если $x\in C\cap X_2$, имеет место по крайней мере одно из двух соотношений:

$$\Gamma x=O,$$
$$\Gamma x\subset C,\quad \Gamma x\neq O.$$

Иначе говоря, C есть псевдоцикл для игрока (1) тогда и только тогда, когда

$$C\cap X_1\subset\Gamma^{-}C\cup X_0,$$
$$C\cap X_2\subset\Gamma^{+}C\cup X_0.$$

Очевидно, объединение псевдоциклов есть также псевдоцикл; этого нельзя сказать об их пересечении.

§ 7. Теорема Цермело — фон Неймана. Если x есть какая-либо позиция, мы обозначим через $f_i(x;\,\sigma)$ выигрыш игрока (i) в партии с начальной позицией x, в которой игроки применяют n-набор $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$; σ называется *точкой*

равновесия по отношению к позиции x, если

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(x;\ \sigma) \qquad (i \in N,\ \tau \in \Sigma).$$

Если эти неравенства справедливы для любой позиции x, σ называется *точкой абсолютного равновесия* или просто *точкой равновесия*.

Если в игре с платежами $(\Gamma, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ множества $\{f_i(x) \mid x \in X\}$ конечны для всякого i, то игра называется *игрой с простыми платежами*. Имеем:

Теорема Цермело — фон Неймана[1]). *Если в игре с простыми платежами не существует партий, длительность которых превышает данное число m, то игра имеет точку абсолютного равновесия.*

Рассмотрим циклы:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{x \mid \Gamma x = O\}, \\ C_1 &= (1 \cup \Gamma^+)\, C_0, \\ C_2 &= (1 \cup \Gamma^+)\, C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m &= (1 \cup \Gamma^+)\, C_{m-1}. \end{aligned}$$

Имеем $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_m$ и $X = C_m$.

Оператор, полученный из n-набора σ, когда область его определения ограничена C_k, обозначим σ^k.

Мы хотим построить точку равновесия σ в цикле $C_m = X$. Определим условно σ^0 соотношением

$$\sigma^0 x = x \qquad (x \in C_0).$$

Определив σ^k, мы определяем σ^{k+1} следующим образом:

1) если $x \in C_k$, полагаем

$$\sigma^{k+1} x = \sigma^k x;$$

2) если $x \notin C_k$, возьмем i такое, что $X_i \ni x$; выберем позицию $y = \sigma^{k+1} x$ в Γx так, чтобы было

$$f_i(y;\ \sigma^k) = \sup_{z \in \Gamma x} f_i(z;\ \sigma^k).$$

Очевидно, σ^0 есть точка равновесия в C_0. Покажем теперь,

---

[1]) Эту теорему для игр n лиц доказал Кун [19]. Приведенное здесь предложение является более общим, чем предложение Куна, который рассматривал упорядоченную игру с простыми платежами.

что если σ^k есть точка равновесия в C_k, то σ^{k+1} есть точка равновесия в C_{k+1}, т. е. что можно написать

$$f_i(x;\ \sigma^{k+1}_{N-i},\ \tau^{k+1}_i) \leqslant f_i(x;\ \sigma^{k+1}) \qquad (i \in N,\ x \in C_{k+1},\ \tau \in \Sigma). \quad (A)$$

Очевидно, соотношение (A) выполняется, если x принадлежит C_k; поэтому рассмотрим x, находящееся в $C_{k+1} - C_k$, и рассмотрим произвольную стратегию τ.

Если $X_i \ni x$, положим для простоты

$$\sigma^{k+1}_i x = \sigma x = \sigma_i x = y,$$
$$\tau^{k+1}_i x = \tau x = \tau_i x = z.$$

Имеем

$$f_i(z;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(z;\ \sigma) \leqslant f_i(y;\ \sigma).$$

Отсюда легко выводится соотношение (A), ибо

1) если $f_i(x) \leqslant f_i(z;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i), \quad i \in N^+,$

имеем

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) = f_i(z;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(y;\ \sigma) \leqslant f_i(x;\ \sigma);$$

2) если $f_i(x) \geqslant f_i(z;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i), \quad i \in N^+,$

имеем

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) = f_i(x) \leqslant f_i(x;\ \sigma);$$

3) если $f_i(x) \geqslant f_i(y;\ \sigma), \quad i \in N^-,$

имеем

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(z;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(y;\ \sigma) = f_i(x;\ \sigma);$$

4) если $f_i(x) \leqslant f_i(y;\ \sigma), \quad i \in N^-,$

имеем

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(x) = f_i(x;\ \sigma).$$

Если $X_j \ni x$, $j \neq i$, можно написать такие же неравенства; следовательно, соотношение (A) всегда выполняется.

Следствие. *В игре с платежами, не содержащей партий, длительность которых превосходит данное число m, для всякого $\varepsilon\ (>0)$ существует точка ε-равновесия, т. е. n-набор σ такой, что*

$$f_i(x;\ \sigma_{N-i},\ \tau_i) \leqslant f_i(x;\ \sigma) + \varepsilon \qquad (i \in N;\ x \in X;\ \tau \in \Sigma).$$

В самом деле, можно заменить игру $(\Gamma, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ игрой $(\Gamma, f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$ с простыми платежами такой, что

$$|f'_i(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (x \in X).$$

Так как для второй игры существует точка равновесия, то для первой игры существует точка ε-равновесия.

Замечание. Из вышеизложенной теоремы можно вывести теорему 3 (§ 5) в частном случае, когда длительность игры ограничена. В самом деле, рассмотрим игру с платежами (Γ, f_1, f_2), в которой игрок (1) активен, а игрок (2) пассивен, и, кроме того,

$$f_1(x) = f(x),$$
$$f_2(x) = -f(x).$$

При фиксированной начальной позиции x для 2-набора τ выигрыши двух игроков будут соответственно

$$f_1(\tau) = f(\tau), \qquad f_2(\tau) = -f(\tau).$$

Если (σ_1, σ_2) означает точку ε-равновесия игры, имеем, следовательно,

$$f(\tau_1, \sigma_2) \leqslant f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon \qquad (\tau \in \Sigma),$$
$$-f(\sigma_1, \tau_2) \leqslant -f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon \quad (\tau \in \Sigma).$$

Отсюда заключаем

$$f(\tau_1, \sigma_2) - \varepsilon \leqslant f(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant f(\sigma_1, \tau_2) + \varepsilon \quad (\tau \in \Sigma),$$

и мы получили предложение (Б) теоремы 3 (§ 5).

Распространение теоремы Цермело — фон Неймана на некоторые неограниченные игры. Если игра определена *глобально*, т. е. если не задана заранее начальная позиция x_0, то можно различать несколько замечательных классов бесконечных игр.

Игра называется *Γ-конечной*, если множество Γx конечно для любого x; игра *Γ^--конечна*, если множество $\Gamma^- x$ конечно для любого x; игра *Γ^+-конечна*, если для любого конечного множества A множество $\Gamma^+ A$ конечно.

Мы называем последовательность (конечную или бесконечную) $x_1, x_2, \ldots$ элементов множества X *последовательностью игры*, если $x_{i+1} \in \Gamma x_i$ для всякого индекса i. Если последовательность игры имеет $m+1$ элементов, то говорят, что ее длительность равна m. Если конечная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такова, что $x_1 = x_m$, то она называется *циклической последовательностью* игры.

Наконец, если X_0 есть множество конечных позиций, мы положим, как принято в теории порядковых трансфинитных чисел,

$$(1 \cup \Gamma^+)^{\omega} X_0 = \lim_{m \to \infty} (1 \cup \Gamma^+)^m X_0,$$
$$(1 \cup \Gamma^+)^{\omega+1} X_0 = (1 \cup \Gamma^+)\left[(1 \cup \Gamma^+)^{\omega} X_0\right].$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если дано порядковое трансфинитное число α и если

$$X \subset (1 \cup \Gamma^+)^{\alpha} X_0,$$
$$X \not\subset (1 \cup \Gamma^+)^{\beta} X_0 \qquad (\beta < \alpha),$$

то говорят, что *игра имеет порядковое число* α. Не всякая игра имеет порядковое число; чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть игру, определенную графом рис. 2.

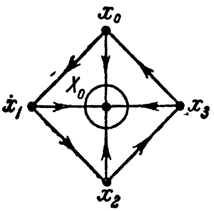

Рис. 2.

Если $x' \in \Gamma x$, эти две точки соединяем направленным отрезком $\overrightarrow{xx'}$. Очевидно, игра не имеет порядкового числа, потому что

$$(1 \cup \Gamma^+) X_0 = X_0.$$

Если длины последовательностей игры, начинающихся с позиции x, конечны, игра называется *локально конечной в* x; если они ограничены в совокупности, игра называется *локально ограниченной в* x. Игра, локально ограниченная в каждой из своих точек, называется *локально ограниченной*; игра, локально конечная в каждой из своих точек, называется *локально конечной*. Игра называется *ограниченной числом* m, если она не имеет последовательностей, длина которых превышает m, и называется *конечной*, если множество X конечно. Наконец, если игра с правилом Γ^- имеет свойство (L), то мы говорим, что игра с правилом Γ *имеет свойство* (L) *регрессивно*.

Пример 1. Игра может быть локально конечной и не быть регрессивно локально конечной, как игра, изображенная на рис. 3.

Эта игра не является регрессивно локально ограниченной ни в одной из своих точек (за исключением x_0); ее порядковое число равно $\omega+1$. Кроме того, в x_0 игра локально конечна, но не локально ограничена.

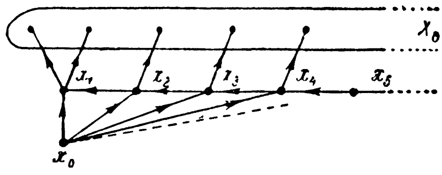

Рис. 3.

Пример 2. В качестве примера можно рассмотреть шахматы. Это — конечная игра, так как множество диаграмм конечно; она, в частности, Г-конечна, Γ^--конечна и Γ^+-конечна.

Шахматная игра могла бы не быть локально конечной, если бы не условились прекращать игру в следующих случаях:

1) в течение 50 последовательных ходов ни одна пешка не была продвинута и ни одна фигура не была взята;

2) в последовательности $(x_i \mid i=1, 2, \ldots)$ позиций игры, имевших место в течение партии, не имеется последовательности вида

$$(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+q})(x_{i+q+1}, x_{i+q+2}, \ldots, x_{i+2q})\, x_{i+2q+1},$$

где

$$x_{i+1}=x_{i+q+1}=x_{i+2q+1},$$
$$x_{i+2}=x_{i+q+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Слегка изменив правила и сохранив закон (2), можно было бы получить шахматную игру, не являющуюся локально конечной (Морз, Гедленд).

Теорема 1 (Кениг). *Игра, локально конечная в x и Г-конечная, является также локально ограниченной в x.*

Действительно, если бы игра не была локально ограничена в x, то существовала бы точка x_1 в Γx такая, что игра не была бы локально ограниченной в x_1 (так как в противном случае игра была бы локально ограничена в x, поскольку Γx конечно). В Γx_1 нашлась бы также точка x_2, обладающая этим свойством, и т. д. Поскольку последовательность игры $x, x_1, x_2, \ldots$ бесконечна, это противоречит условию, что игра локально конечна в x.

Теорема 2. *Игра имеет порядковое число тогда и только тогда, когда она локально конечна.*

Покажем прежде всего, что если игра имеет порядковое число, то она не имеет бесконечных последовательностей.

В самом деле, элементы такой последовательности не принадлежат множеству X_0; если для порядкового числа α, конечного или бесконечного, они не принадлежат множеству $(1 \cup \Gamma^+)^\beta X_0$ для любого $\beta < \alpha$, они также не принадлежат множеству $(1 \cup \Gamma^+)^\alpha X_0$, и согласно принципу трансфинитной индукции они, следовательно, не принадлежат множеству X, так как игра имеет порядковое число.

Обратно, покажем, что если игра не имеет бесконечных последовательностей, то она имеет порядковое число.

В самом деле, допустим обратное и пусть A — не пустое множество точек в X, не принадлежащих ни одному из множеств вида $(1 \cup \Gamma^+)^\alpha X_0$. Если $x_1 \in A$, то $\Gamma x_1 \neq O$ (так как $x_1 \notin X_0$) и в Γx_1 существует элемент x_2, входящий в A; точно так же в Γx_2 найдется элемент x_3, принадлежащий множеству A, и т. д., и последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ бесконечна, что противоречит нашему условию.

Следствие. *Игра на конечном множестве X имеет порядковое число тогда и только тогда, когда она не имеет циклических последовательностей.*

Основная теорема. *Локально конечная игра с простыми платежами имеет точку абсолютного равновесия.*

Это предложение вытекает непосредственно из теоремы 2, если учесть, что на основании рассуждений, примененных при доказательстве теоремы Цермело — фон Неймана, можно построить точку равновесия σ путем трансфинитной индукции.

Следствие. *Локально конечная игра имеет точку абсолютного ε-равновесия.*

§ 8. Игры Ним. Мы рассмотрим в этом пункте поочередные матовые игры: n игроков играют поочередно в неизменном порядке, причем (πi) означает игрока, следующего за игроком (i). Всякая позиция $x = (\bar{x}, i)$ будет рассматриваться как пара, состоящая из диаграммы $\bar{x}$ и индекса i игрока, имеющего в данный момент право хода. Через $\Gamma_i \bar{x}$ обозначим множество диаграмм элементов множества $\Gamma(\bar{x}, i)$, а саму игру обозначим

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \bar{X}) = (\Gamma, \bar{X}),$$

где Γ — сокращенное обозначение n-набора

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n).$$

Рассматривая m различных поочередных игр $(\Gamma^k, \overline{X}^k)$, можно определить на $\prod \overline{X}^k$ многозначное отображение Γ как

$$\Gamma_i \overline{x} = \Gamma_i (\overline{x}_1^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}_m) =$$
$$= [(\Gamma_i^1 \overline{x}^1), \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m] \cup [\overline{x}^1, (\Gamma_i^2 \overline{x}^2), \overline{x}^3, \ldots, \overline{x}^m] \cup \ldots$$

Тогда говорят, что $\Gamma = (\prod)\Gamma^k$ есть *композиционное произведение отображений* Γ^k. В более общем случае можно определить *композиционное произведение порядка* p отображений Γ^k как многозначное отображение $\Gamma = \prod^{(p)} \Gamma^k$ такое, что

$$\Gamma_i (\overline{x}^1 \cdot \overline{x}^2 \ldots \overline{x}^m) =$$
$$= \bigcup_{1 \leqslant k_1 < k_2 \ldots < k_p \leqslant k_m} [\overline{x}^1, (\Gamma_i^{k_1} \overline{x}^{k_1}), \overline{x}^2, \ldots, (\Gamma_i^{k_p} \overline{x}^{k_p}), \overline{x}^{m-1}, \overline{x}^m].$$

В интуитивном смысле игра $\prod \Gamma^k$ представляет ситуацию, в которой каждый игрок мог бы играть, когда он имеет ход, в одной из игр Γ^k, а игра $\prod^{(p)} \Gamma^k$ представляет ситуацию, в которой он мог бы играть сразу в p играх Γ^k.

П р и м е р. *Шахматы*. Рассмотрим шахматную партию в тот момент, когда ход принадлежит белым. Обозначив через $\overline{x}^\lambda$ позицию белой фигуры λ на шахматной доске, определим Γ^λ: $\Gamma_1^\lambda \overline{x}^\lambda$ есть множество полей, которые фигура λ может занимать на пустой шахматной доске, а поскольку фигура белая, $\Gamma_2^\lambda \overline{x}^\lambda = O$; диаграмма игры есть элемент $\overline{x} = (\overline{x}_\lambda \mid \lambda)$ множества $\overline{X} = \prod \overline{X}^\lambda$. Обозначим через S_1 множество диаграмм, разрешенных правилами игры (две белые фигуры не могут быть на одном поле, белый король не находится под шахом); обозначим через T_1 множество позиций, влекущих за собой автоматическое изменение σ диаграммы (устранение с доски черной фигуры, продвижение белой пешки). Имеем

$$\Gamma_1 \overline{x} = \Gamma_1 (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m) = [(\prod_\lambda \Gamma_1^\lambda)\, \overline{x} \cap S_1] \cup \sigma\, [(\prod_\lambda \Gamma_1^\lambda)\, \overline{x} \cap T_1].$$

Если поочередная матовая игра двух лиц с противоположными интересами игроков такова, что $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и предпочтительные множества K_1 и K_2 симметричны, то по определению это есть *игра Ним*. Таким образом, для игры Ним можно написать

$$\Gamma(\bar{x},\ 1) = (\Gamma\bar{x},\ 2),$$
$$\Gamma(\bar{x},\ 2) = (\Gamma\bar{x},\ 1),$$
$$K_1 = (K,\ 1) \cup (L,\ 2), \quad K_2 = (L,\ 1) \cup (K,\ 2),$$
$$K \cap L = 0, \qquad K \cup L = \overline{X}_0 = \{x \mid \Gamma\bar{x} = 0\}.$$

Игра Ним обычно обозначается $(\Gamma,\ K,\ L)$.

Пример 1. *Игра Фан-Тан или простая игра Ним.* Рассмотрим n неодинаковых кучек спичек; два игрока поочередно устраняют из игры по меньшей мере одну спичку, но каждый раз удаляемые спички должны быть взяты из одной кучки; игрок, удаливший последнюю спичку, выигрывает партию.

Здесь $K = O$; L образовано одной диаграммой, представляющей n кучек по 0 спичек.

Пример 2. *Игра Ним порядка p* (Мур [26]). Два игрока играют поочередно, как в предыдущем случае, но каждый раз они могут брать спички в p разных кучках.

Игра Ним $(\Gamma,\ K,\ L)$ на множестве $\overline{X}$ диаграмм может быть представлена любым направленным графом, конечные позиции которого разбиты на два множества K и L.

Обратно, направленный граф $(\Gamma,\ X)$ будет рассматриваться как игра Ним типа $(\Gamma,\ O,\ L)$.

Для игры Ним $(\Gamma,\ K,\ L)$ мы будем называть функцию $g(\bar{x})$ на $\overline{X}$ *функцией Гранди*, если она удовлетворяет следующим условиям: если $\bar{x} \in L$, то $g(\bar{x}) = 0$; если $\bar{x} \in K$, то $g(\bar{x}) = 1$, если $\bar{x} \notin K$, $\bar{x} \notin L$, то $g(\bar{x})$ есть наименьшее из целых чисел, не входящих в $\{g(\bar{y}) \mid \bar{y} \in \Gamma\bar{x}\}$. Будут рассматриваться как конечные целые числа, так и порядковые трансфинитные числа, если, например $\{g(\bar{y}) \mid \bar{y} \in \Gamma\bar{x}\}$ состоит из всех конечных целых чисел, то $g(\bar{x}) = \omega$, где ω — первое из порядковых трансфинитных чисел, и т. д.

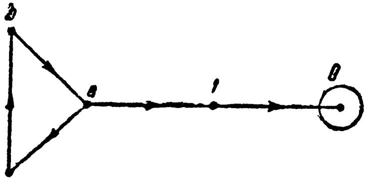

Рис. 4.

Если игра Ним Г-конечна, функция Гранди принимает конечные целочисленные значения. Функция Гранди не всегда существует, как можно видеть из графа рис. 4.

Если $g(a) \neq 0$, то $g(b) = 0$, откуда $g(c) = 1$, следовательно, $g(a) = 0$, т. е. мы получили противоречие. Если

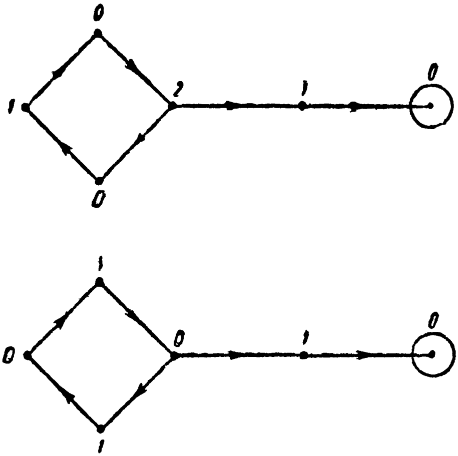

Рис. 5.

$g(a) = 0$, то $g(b) = 1$, откуда $g(c) = 0$, следовательно, $g(a) = 2$, и мы опять получили противоречие.

Кроме того, функция Гранди не обязательно единственная, как можно видеть из графов рис. 5.

Теорема 1 (Ричардсон). *Если граф* (ΓX) *Г-конечен и* Γ^{-}*-конечен и если не существует циклических последовательностей нечетной длительности, то функция Гранди существует.*

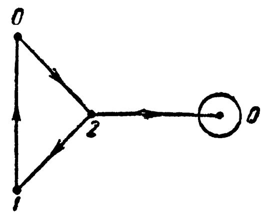

Рис. 6.

За доказательством мы отсылаем к [36].

Мы замечаем, что если даже существует циклическая последовательность нечетной длительности, функция Гранди может существовать, как видно из рис. 6. Однако, если существует циклическая последовательность длительностью 1, т. е. если $\bar{x} \in \Gamma\bar{x}$ для $\bar{x}$ в $\bar{X}$, то функция Гранди не существует.

Теорема 2. *Если игра Ним* (Γ, K, L) *локально ограничена, существует одна и только одна функция Гранди, которую можно найти рекуррентным способом.*

В самом деле, на основании теоремы 2 (§ 7) граф $(\Gamma, \bar{X})$ имеет порядковое число. Функция Гранди определена однозначно в $\bar{X}_0 = K \cup L$, а если она определена однозначно в $(1 \cup \Gamma^+)^\alpha \bar{X}_0$ для любого $\alpha < \alpha_0$, она также определена однозначно в $(1 \cup \Gamma^+)^{\alpha_0} X_0$.

Она может быть также определена трансфинитной индукцией в $\bar{X}$.

Теорема 3 (Гранди). *Если в игре Ним существует функция Гранди* $g(\bar{x})$ *и если позиция* $(\bar{x}, 2)$ *в данный момент такова, что* $g(\bar{x}) = 0$, *то игрок* (1) *может либо выиграть, либо воспрепятствовать окончанию партии.*

В самом деле, следующая диаграмма $\bar{y}$ будет такая, что $g(\bar{y}) \neq 0$, а следовательно, игрок (1) сможет всегда выбрать после $\bar{y}$ диаграмму $\bar{z}$ такую, что $g(\bar{z}) = 0$ [за исключением случая, когда $y \in K$, но тогда игрок (1) выиграл]; если он придерживается этого способа игры, он наверное выиграет или воспрепятствует окончанию партии.

Теорема 4. *Если для игры* (Γ^k, O, L^k) *существует функция Гранди, которую мы запишем в двоичном виде,*

$$g_k(\bar{x}^k) = c_k^0 + 2c_k^1 + 2^2c_k^2 + \ldots \qquad (0 \leqslant c_k^j < 2),$$

то существует функция Гранди для игры $(\prod \Gamma^k, O, \prod L^k)$, *которая в точке* $(\bar{x} = \bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^m)$ *будет равна*

$$g(\bar{x}) = \Big[\sum_k c_k^0\Big]_{\mathrm{mod}\,2} + 2\Big[\sum_k c_k^1\Big]_{\mathrm{mod}\,2} + 2^2\Big[\sum_k c_k^2\Big]_{\mathrm{mod}\,2} + \ldots$$

Если $\delta < g(\bar{x})$ и если $\Gamma\bar{x} = O$, то в $\Gamma\bar{x}$ можно будет получить диаграмму $\bar{y}$ такую, что $g(\bar{y}) = \delta$; в самом деле, рассмотрим наибольший индекс j, для которого

$$\delta = d^0 + 2d^1 + 2^2d^2 + \ldots \qquad (0 \leqslant d^k < 2)$$

$$d^j \Big[\sum_k c_k^j\Big]_{\mathrm{mod}\,2} = c^j;$$

играя только в одной игре, можно уменьшить значение c^j; играя разумно, можно также восстановить равенство для индексов $j-1$, $j-2$ и т. д.

Поскольку, кроме того, в $\Gamma\bar{x}$ не существует диаграммы y такой, что $g(\bar{y})=g(\bar{x})$, теорема доказана.

Применение. Эта теорема позволяет быстро установить, является ли какая-нибудь диаграмма в простой игре Ним (пример 1) выигрышной или проигрышной; в самом деле, если $\bar{x}^1$ изображает состояние первой кучки спичек из h_1 спичек, имеем $g_1(\bar{x}^1)=h_1$.

Для игры Ним порядка p (пример 2) можно показать точно таким же способом, как для теоремы 4, что функция Гранди в точке $(\bar{x}=\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^m)$ равна

$$g(\bar{x})=\Big[\sum_k c_k^0\Big]_{\mathrm{mod}\,(p+1)}+(p+1)\Big[\sum_k c_k^1\Big]_{\mathrm{mod}\,(p+1)}+\ldots$$

Теорема 5 (Шютценбергер). *Если игра* (Γ, K, L) *допускает функцию Гранди* $g(\bar{x})$ *и если* $\Gamma^+\{x\,|\,g(x)=0,1\}=O$, *то игра в поддавки, связанная с* (Γ, K, L), *также допускает функцию Гранди* $g'(\bar{x})$, *равную* 0, *если* $g(\bar{x})=1$, *равную* 1, *если* $g(\bar{x})=0$, *и равную* $g(\bar{x})$, *если* $g(\bar{x})\neq 0$ *или* 1.

Докажем, что g' есть функция Гранди для (Γ, K, L).

1. Если $\Gamma\bar{x}\neq O$ и если δ — целое число, меньшее $g'(\bar{x})$, то существует в $\Gamma\bar{x}$ такое $\bar{y}$, что $g'(\bar{y})=\delta$.

В самом деле, если $g'(\bar{x})=1$, то $g(\bar{x})=0$. Следовательно, поскольку

$$\Gamma^+\{x\,|\,g(x)\neq 0,1\}=O,$$

имеется такое $\bar{y}$, что $g(\bar{y})=1$, т. е. $g'(\bar{y})=0$. Если, кроме того, $g'(\bar{x})>1$, то $g'(\bar{x})=g(\bar{x})$ и существует еще одно $\bar{y}$ такое, что $g'(\bar{y})=\delta$.

2. Не существует $\bar{y}$ такого, что $g'(\bar{y})=g'(\bar{x})$, так как отсюда следовало бы, что $g(\bar{y})=g(\bar{x})$.

ГЛАВА II

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИГРЫ

§ 9. Полунепрерывные отображения. Пусть Γ—отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y; по определению Γ называется *полунепрерывным снизу в* X, если для любого открытого множества Ω в Y множество $\Gamma^{-}\Omega$ открыто в X; оно называется *полунепрерывным сверху в* X, если для любого открытого множества Ω в Y множество $\Gamma^{+}\Omega$ открыто и если, кроме того, Γx компактно для всякого x. Если эти свойства имеют место одновременно, то Γ называется *непрерывным в* X. Если Γ — однозначное отображение, то каждое из этих определений совпадает с обычным определением непрерывности.

В последующем изложении всюду будет идти речь только об *отделимых* топологических пространствах или *хаусдорфовых пространствах.*

Теорема 1. *Если отображение* Γ *полунепрерывно сверху, то образ* ΓK *компактного множества* K *есть компактное множество.*

В самом деле, пусть $\{\omega_i \mid i \in I\}$ есть открытое покрытие образа ΓK; поскольку Γx компактно, его можно покрыть конечным числом множеств ω_i, объединение которых мы обозначим Ω_x.

$\{\Omega_x \mid x \in K\}$ есть открытое покрытие образа ΓK, а $\{\Gamma^{+}\Omega_x \mid x\}$ есть открытое покрытие компактного множества K, следовательно, из него можно выделить конечное покрытие $\{\Gamma^{+}\Omega_{x_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда Ω_{x_i} покрывают ΓK, т. е. множество ΓK может быть покрыто конечным числом множеств ω_i.

Теорема 2. *Если* Γ_1 — *отображение* X *в* Y, *полунепрерывное снизу (соответственно сверху), и если* Γ_2 — *ото-*

бражение Y в Z, полунепрерывное снизу (соответственно сверху), то $\Gamma = \Gamma_2 \cdot \Gamma_1$ есть отображение X в Z, полунепрерывное снизу (соответственно сверху).

В самом деле, если Ω — открытое множество в Z, то

$$\Gamma^{-}\Omega = \{x \mid \Gamma_2 \cdot \Gamma_1 x \cap \Omega \neq O\} = \{x \mid \Gamma_1 x \cap \Gamma_2^{-}\Omega \neq O\} = \Gamma_1^{-}\Gamma_2^{-}\Omega.$$

Если Γ_1 и Γ_2 полунепрерывны снизу, Γ также полунепрерывно снизу.

Если Γ_1 и Γ_2 полунепрерывны сверху, то $\Gamma x = \Gamma_2(\Gamma_1 x)$ компактно на основании теоремы 1, и одновременно мы имеем

$$\Gamma^{+}\Omega = \{x \mid \Gamma_2 \cdot \Gamma_1 x \subset \Omega\} = \{x \mid \Gamma_1 x \subset \Gamma_2^{+}\Omega\} = \Gamma_1^{+} \cdot \Gamma_2^{+}\Omega.$$

Следовательно, Γ также полунепрерывно сверху.

Теорема 3. *Если дано семейство $\{\Gamma_i \mid i \in I\}$ полунепрерывных снизу отображений X в Y, то отображение $\Gamma = \bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$ полунепрерывно снизу.*

В самом деле, если Ω — открытое множество в Y, то

$$\Gamma^{-}\Omega = \{x \mid \bigcup_{i \in I} \Gamma_i x \cap \Omega \neq O\} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i^{-}\Omega.$$

Следовательно, для любого открытого множества Ω множество $\Gamma^{-}\Omega$ открыто.

Теорема 4. *Если дано конечное семейство*

$$\{\Gamma_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

полунепрерывных сверху отображений X в Y, то отображение $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$ полунепрерывно сверху.

В самом деле, поскольку $\Gamma_i x$ компактно для любого i, множество

$$\Gamma x = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i x$$

компактно. Далее

$$\Gamma^{+}\Omega = \{x \mid \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i x \subset \Omega\} = \bigcap_{1}^{n} \Gamma_i^{+}\Omega.$$

Следовательно, для любого открытого множества Ω множество $\Gamma^{+}\Omega$ открыто.

Теорема 5. *Если* Γ_i — *полунепрерывное снизу отображение пространства* X *в пространство* Y_i, *то отображение* $\Gamma x = \prod_{i=1}^{n} \Gamma_i x$ *пространства* X *в топологическое произведение* $\prod_{i=1}^{n} Y_i$ *полунепрерывно снизу.*

В самом деле, пусть $\Omega = \bigcup_j \omega_j$ — открытое множество пространства $\prod_{i \in I} Y_i$, где

$$\omega_j = \prod_{i \in I} \omega_j^i$$

принадлежит базису пространства. Имеем

$$\Gamma^- \omega_j = \{x \mid \Gamma_i x \cap \omega_j^i \neq O \text{ для всякого } i\} = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i^- \omega_j^i.$$

Следовательно, множество $\Gamma^- \omega_j$ открыто, как и множество $\Gamma^- \Omega = \bigcup_j \Gamma_i^- \omega_j$.

Следствие. *Если* Γ_1 *и* Γ_2 — *два полунепрерывные снизу отображения пространства* X *в векторное пространство* Y, *отображение* $\Gamma x = \Gamma_1 x + \Gamma_2 x$ *полунепрерывно снизу.*

В самом деле, отображение $\Gamma_0 x = \Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ пространства X в $Y \times Y$ полунепрерывно снизу (теорема 5), как и отображение $f(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ пространства $Y \times Y$ в Y.

Следовательно, на основании теоремы 2 отображение $\Gamma = f \cdot \Gamma_0$ полунепрерывно снизу.

Теорема 6. *Если* Γ_i — *полунепрерывные сверху отображения пространства* X *в* Y_i (*для* $i = 1, 2, \ldots, n$), *то отображение* $\Gamma x = \prod_{i=1}^{n} \Gamma_i x$ *пространства* X *в топологическое произведение* $\prod_{i=1}^{n} Y_i$ *полунепрерывно сверху.*

Возьмем для определенности отображение $\Gamma x = \Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ в $Y_1 \times Y_2$. Множество $\Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ компактно, так как компактны $\Gamma_1 x$ и $\Gamma_2 x$ (теорема Тихонова).

Кроме того, пусть Ω — открытое множество пространства $Y_1 \times Y_2$ и пусть x — элемент множества $\Gamma^+ \Omega$; поскольку Γx компактно и содержится в Ω, то его можно покрыть конечным числом входящих в базис подмножеств множества Ω, которые мы обозначим $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$.

Если $y_1 \in \Gamma_1 x$, обозначим через $\omega(y_1)$ объединение множеств ω^k, пересекающих $\{y_1\} \times \Gamma_2 x$; таким же образом определим $\omega(y_2)$, где $y_2 \in \Gamma_2 x$. Наконец, положим

$$\omega_1 = \bigcap_{y_2 \in \Gamma_2 x} \operatorname*{проек}_{Y_1} \omega(y_2), \qquad \omega_2 = \bigcap_{y_1 \in \Gamma_1 x} \operatorname*{проек}_{Y_2} \omega(y_1).$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2 \text{ входит в базис пространства } Y_1 \times Y_2,$$

и

$$\Gamma^+\omega = \{x \mid \Gamma_1 \times \Gamma_2 x \subset \omega_1 \times \omega_2\} = \Gamma_1^+\omega_1 \cap \Gamma_2^+\omega_2.$$

Следовательно, $\Gamma^+\omega$ открыто; далее, имеем

$$\Gamma x \subset \omega \subset \Omega$$

или

$$x \in \Gamma^+\omega \subset \Gamma^+\Omega.$$

Следовательно, множество $\Gamma^+\Omega$, как множество, содержащее окрестности каждой из своих точек, открыто.

Следствие. *Если Γ_1 и Γ_2 — два полунепрерывные сверху отображения пространства X в векторное пространство Y, то отображение $\Gamma x = \Gamma_1 x + \Gamma_2 x$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство такое же, как для следствия предыдущей теоремы.

Теорема 7. *Если $g(y)$ — непрерывная числовая функция, определенная в Y, и если Γ — непрерывное отображение пространства X в Y, то $M(x) = \max\limits_{y \in \Gamma x} g(y)$ есть непрерывная числовая функция, и отображение G, определенное как*

$$Gx = \{y \mid y \in \Gamma x,\ g(y) = M(x)\},$$

полунепрерывно сверху.

1. Покажем, что G полунепрерывно сверху.

Пусть Ω — открытое множество, содержащее Gx_0; для положительного числа ε имеем

$$g(y) \leqslant M(x_0) - 2\varepsilon \quad (y \in \Gamma x_0 - \Omega).$$

Пусть ω — открытое множество, содержащее $\Gamma x_0 - \Omega$ такое, что

$$g(y) \leqslant M(x_0) - \varepsilon \quad (y \in \omega).$$

Существуют две окрестности $v_1(x_0)$ и $v_2(x_0)$ такие, что

$$\Gamma x \subset \Omega \cup \omega \quad [x \in v_1(x_0)],$$

$$\Gamma x \cap \{y \mid g(y) > M(x_0) - \varepsilon\} \neq O \qquad [x \in v_2(x_0)].$$

Следовательно,

$$Gx \subset \Omega \qquad [x \in v_1(x_0) \cap v_2(x_0)].$$

Итак, множество $G^+\Omega$ открыто; кроме того, Gx_0 компактно для любого x_0 как пересечение замкнутого множества $\{x \mid g(x) \geqslant M(x)\}$ и компактного множества Γx_0.

2. $M(x) = g(Gx)$ полунепрерывно сверху (теорема 2) и, следовательно, непрерывно, так как это есть однозначное отображение.

Теорема 8. *Если Γ — непрерывное отображение пространства X в $Y = R$, то существует непрерывное однозначное отображение σ пространства X в Y такое, что*

$$\sigma x \in \Gamma x \qquad (x \in X).$$

В самом деле, достаточно взять $g(y) = y$, $\sigma x = \max\{\Gamma x\}$. Следует заметить, что эта теорема доказывается таким же образом в гораздо более общих случаях (например, если Γx выпукло в R^n). Мы примем ее для всех отображений Γ, которые мы будем здесь рассматривать.

Отображение Γ пространства X в Y называется *замкнутым*, если для $y_0 \notin \Gamma x_0$ существуют окрестности $V(y_0)$ и $v(x_0)$ такие, что

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = O.$$

Теорема 9. *Если Γ — отображение пространства X в Y, полунепрерывное сверху, оно замкнуто; если Y компактно, то имеет место обратное предложение.*

Пусть $y_0 \notin \Gamma x_0$. Поскольку Γx_0 компактно, существует открытое множество Ω, содержащее Γx_0, и окрестность $V(y_0)$ точки y_0, которые не пересекаются.

С другой стороны, для окрестности $v(x_0)$ имеем

$$\Gamma x \subset \Omega \qquad [x \in v(x_0)],$$

откуда

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = O.$$

Следовательно, Γ замкнуто.

Обратно, если Γ замкнуто и Y компактно, то Γx замкнуто и содержится в компактном пространстве, следовательно, компактно.

Пусть Ω — открытое множество, содержащее Γx_0. Если $y \notin \Omega$, существуют окрестности $V(y)$ точки y и $v_y(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$\Gamma v_y(x_0) \cap V(y) = O.$$

Поскольку $Y - \Omega$ компактно, его можно покрыть окрестностями $V(y_1)$, $V(y_2)$, ..., $V(y_n)$. Положим $v(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} v_{y_i}(x_0)$.

Тогда имеем

$$\Gamma v(x_0) \subset \Omega.$$

Следовательно, Γ полунепрерывно сверху.

Теорема 10. *Если $\{\Gamma_i \mid i \in I\}$ — семейство замкнутых отображений пространства X в Y, отображение $\Gamma = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ замкнуто.*

В самом деле, при $y_0 \notin \Gamma x_0$ имеем $y_0 \notin \Gamma_i x_0$ для некоторого индекса i; следовательно, существуют окрестности $V(y_0)$ и $v(x_0)$ такие, что

$$\Gamma_i v(x_0) \cap V(y_0) = O,$$

откуда

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = O.$$

Следовательно, Γ замкнуто.

Теорема 11. *Если Γ_1 — замкнутое отображение пространства X в Y, и Γ_2 — полунепрерывное сверху отображение пространства X в Y, то отображение $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ полунепрерывно сверху.*

Γx, очевидно, компактно для любого x; пусть Ω — открытое множество, содержащее пересечение $\Gamma_1 x_0 \cap \Gamma_2 x_0$. Покажем, что существует окрестность $v(x_0)$ такая, что

$$\Gamma v(x_0) \subset \Omega.$$

Если $\Omega \supset \Gamma_2 x_0$, наша цель достигнута; если это не так, то поставим в соответствие любому элементу y множества $\Gamma_2 x_0 - \Omega = K$ окрестности $V(y)$ и $v_y(x_0)$, причем

$$\Gamma_1 v_y(x_0) \cap V(y) \neq O.$$

Поскольку K компактно, существуют элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ множества K такие, что $\bigcup\limits_1^n V(y_i) = V(K)$ будет окрестностью множества K.

Определим окрестность $w(x_0)$ следующим образом: $x \in w(x_0)$, если $\Gamma_2 x \subset \Omega \cap V(K)$. Положим

$$v_{y_1}(x_0) \cap v_{y_2}(x_0) \cap \ldots \cap v_{y_n}(x_0) \cap w(x_0) = v(x_0).$$

Имеем

$$\Gamma_1 v(x_0) \cap V(K) \neq O,$$
$$\Gamma_2 v(x_0) \subset \Omega \cup V(K),$$

откуда окончательно

$$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)\, v(x_0) \subset \Omega.$$

Теорема 12. *Если $\{\Gamma_i \mid i \in I\}$ — семейство полунепрерывных сверху отображений пространства X в Y, то отображение $\Gamma = \bigcap\limits_{i \in I} \Gamma_i$ полунепрерывно сверху.*

Это вытекает из теорем 10 и 11.

Теорема 13. *Если $\{\Gamma_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ — конечное семейство полунепрерывных снизу отображений, то отображение $\Gamma = \bigcap\limits_{i=1} \Gamma_i$ полунепрерывно снизу.*

Пусть Ω — открытое множество в Y. Имеем

$$\Gamma^{-}\Omega = \{x \mid \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_i x \cap \Omega \neq O\} = \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_i^{-}\Omega.$$

Следовательно, множество $\Gamma^{-}\Omega$ открыто.

§ 10. Общее определение топологических игр (с полной информацией). Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — топологические пространства, их *топологическая сумма* есть топологическое пространство $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, определенное следующим образом:

1) X_i образуют разбиение пространства X;

2) открытые множества пространства X суть множества вида $\Omega = \bigcup\limits_1^n \Omega_i$, где Ω_i — открытое множество пространства X_i.

Заметим, в частности, что X_i есть открытое и замкнутое множество пространства X.

По определению, игра $(\Gamma, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ является *топологической сверху для игрока* (i) *на* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если

1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — топологические пространства (отделимые);

2) Γ есть непрерывное отображение пространства $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ самого в себя;

3) $f_i(x)$ полунепрерывная сверху числовая функция в X.

Игра называется *топологической снизу для игрока* (i), если вместо условия 3) имеет место

3′) $f_i(x)$ есть полунепрерывная снизу функция в X.

В последующем изложении[1]) мы будем предполагать для определенности, что игроки активны: выигрыш игрока (i)

---

[1]) Поскольку читатель освоился с понятием полунепрерывной функции, мы полагаем здесь, что игра является игрой с платежами; отметим, впрочем, что это несущественно.

Отношение квазиупорядоченности $\overset{i}{\geqslant}$ на топологическом пространстве X называется *полунепрерывным сверху* в x_0, если всякому x_1 ($\overset{i}{>} x_0$) (если таковое существует) можно поставить в соответствие окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такую, что $x \overset{i}{<} x_1$, если $x \in V(x_0)$. Изменив знак неравенства на обратный, можно определить точно так же отношение квазиупорядоченности, *полунепрерывное снизу;* если имеются оба свойства одновременно, отношение $\overset{i}{\geqslant}$ называется *непрерывным.*

В игре с платежами отношение $\overset{i}{\geqslant}$ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда функция $f_i(x)$ полунепрерывна сверху, т. е. если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие окрестность $v(x_0)$ такую, что

$$f_i(x) < f_i(x_0) + \varepsilon \quad \text{для} \quad x \in V(x_0).$$

Напомним, что это условие равносильно утверждению, что множество $\{x \mid f_i(x) \geqslant a\}$ замкнуто для любого числа a. (Разумеется, сказанное выше об отношениях, полунепрерывных сверху, справедливо также для отношений, полунепрерывных снизу.)

Отметим также, что обобщение, получающееся в последующих теоремах при использовании понятия непрерывной квазиупорядоченности, является фиктивным, если X сепарабельно и связно. Действительно, Дебре доказал следующую теорему: *если отношение квазиупорядоченности непрерывно на сепарабельном и связном пространстве X, то существует функция предпочтения, непрерывная на X* (Cowles Commision Papers, new series, № 97, Chicago, 1954).

равен

$$f_i(\sigma) = \sup \{f_i(x) \mid x \in \langle\sigma\rangle\};$$

если игрок (i) пассивен, рассуждения совершенно аналогичны.

В некоторых задачах рассматривают отдельно множество $X_0 = \{x \mid \Gamma x = O\}$ и заменяют множество X_i множеством $X_i - X_0$; чтобы отличить этот подход от предыдущего, мы будем говорить, что дана игра *топологическая сверху на* $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ *для игрока* (i), если

1) $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — отделимые топологические пространства;

2) Γ непрерывное отображение пространства $X = \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$ в X;

3) $f(x)$ полунепрерывна сверху в X.

Эти два подхода не вполне равнозначны.

Пример. Рассмотрим игру преследования, описанную выше (§ 2); чтобы сделать трех игроков активными, мы положим здесь, что цель корабля — достигнуть замкнутого множества F (гавани) пространства M, где он будет в безопасности. Покажем, что при этом получается игра, топологическая сверху на (X_1, X_2, X_3) для игрока (3) и одновременно сверху и снизу для игрока (2).

1. Пространства X_i $(i = 1, 2, 3)$ — метрические, с расстоянием, равным

$$d[(m_1, m_2, m_3, i), (m_1', m_2', m_3', i)] = \max_k d(m_k, m_k').$$

Следовательно, для малого ε окрестность точки $x_0 = (m_1, m_2, m_3, 1)$ определяется сферой

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x \in X_1, \ d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\} = \\ = B_\varepsilon(m_1) \times B_\varepsilon(m_2) \times B_\varepsilon(m_3) \times 1.$$

2. Покажем, что Γ — многозначная непрерывная функция. Отображение $\overline{\Gamma}$, определенное на $X - X_0$, очевидно непрерывно, так как

$$B_\varepsilon(x_0) \subset \overline{\Gamma}^+ B_\varepsilon(\Gamma x_0),$$

$$B_\varepsilon(x_0) \subset \overline{\Gamma}^- B_\varepsilon(x) \qquad (x \in \overline{\Gamma} x_0).$$

Оно, кроме того, непрерывно как многозначная функция, определенная в X, так как множество X_0 замкнуто в X.

3. $f_2(x) = -d(m_2, m_3)$ есть непрерывная функция в X; $f_3(x)$ полунепрерывна сверху, так как $\{x \mid f_3(x) = 1\}$ замкнуто.

Приняв вторую точку зрения, мы не сможем сказать, что игра является топологической на (X_0, X_1, X_2, X_3), так как Γ непрерывно только в том случае, если о пространстве M приняты дополнительные допущения; но если отображение теперь и не является непрерывным, зато мы имеем непрерывные функции предпочтения; действительно, $f_3(x)$ теперь непрерывна, поскольку множество $\{x \mid f_3(x) = 1\}$ одновременно открыто и замкнуто в X_0.

Обозначим (ср. § 5) множество позиций, в которых игрок (1) может гарантировать γ, через G_γ, множество позиций, в которых игрок (1) может строго гарантировать γ, через G^*_γ, соответствующие области через $\Delta_\gamma \doteq \{x \mid f_1(x) \geqslant \gamma\}$ и через Δ^*_γ. Мы имеем следующее фундаментальное предложение.

Теорема 1. *В игре, топологической снизу (соответственно сверху), длительность которой ограничена числом m, множество G^*_γ открыто (соответственно G^*_γ замкнуто).*

Рассмотрим сначала игру двух лиц (+) и (—); на основании теоремы 1 (§ 5) имеем

$$G^*_\gamma = (1 \cup \Gamma^- B_- \cup \Gamma^+ B_+)^m \Delta^*_\gamma,$$

где

$$B_+ x = x \cap X_+, \qquad B_- x = x \cap X_-;$$

если игра — топологическая снизу для игрока (1), область Δ^*_γ открыта; B_+, B_-, Γ^+, Γ^- оставляют открытые множества открытыми, и, следовательно, G^*_γ — открытое множество.

(Доказательство будет таким же для игры, топологической сверху).

В случае игры с n игроками мы приведем ее к игре с двумя игроками (+) и (—) и положим

$$\overline{\Gamma} x = \Gamma x \qquad (x \in X_+),$$

$$\overline{\Gamma} x = B_+ \Gamma x \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma) x \cup \ldots \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma)^m x \; (x \in X_-).$$

Если Γ непрерывно, $B_+\Gamma$ и $B_-\Gamma$ также непрерывны (теорема 2 § 9), и на основании теорем 3 и 4 (§ 9) $\overline{\Gamma}$ также непрерывно. Таким образом, мы приходим к предыдущему случаю.

Следствие. *В игре, топологической снизу (соответственно сверху) для игрока* (1) *на* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *с ограниченной длительностью, функция наилучшего выигрыша* $\varphi_1(x)$ *полунепрерывна снизу (соответственно сверху).*

Рассмотрим в игре, топологической снизу, точку x_0 множества

$$A = \{x \mid \varphi_1(x) > \gamma\}.$$

Пусть $\varphi_1(x_0) > \delta > \gamma$, и следовательно, $x_0 \in G_\delta^* \subset A$. Тогда множество A открыто, и $\varphi_1(x)$ есть функция, полунепрерывная снизу (для игры, топологической снизу, доказательство аналогично).

Теорема 2. *Рассмотрим игру, топологическую снизу для игрока* (1) *и такую, что для данного числа m можно утверждать, что игрок* (1) *будет иметь право хода до m-го хода (для любой рассматриваемой начальной позиции); множество G_γ^* позиций, в которых игрок* (1) *может строго гарантировать γ, открыто.*

В самом деле, имеем, как и выше для приведенной игры,

$$\overline{\Gamma}x = B_+\Gamma x \cup B_+\Gamma(B_-\Gamma)x \cup \ldots \cup B_+\Gamma \qquad (B_-\Gamma)^m x \, (x \in X_-).$$

Следовательно, $\overline{\Gamma}$ — непрерывное отображение; тогда теорема вытекает из формулы

$$G_\gamma^* = \bigcup_{\lambda=1}^{m} (1 \cup \overline{\Gamma}^+ B_+ \cup \overline{\Gamma}^- B_-)^\lambda \, \Delta_\gamma^*.$$

Заметим, что теорему 2 можно применить, в частности, ко всякой топологической игре с двумя игроками или, в общем случае, ко всякой топологической игре с n игроками, играющими поочередно.

§ 11. Пространство Σ_1 стратегий игрока (1) для локально конечной игры. Мы будем здесь предполагать, что игра локально конечна: для любой начальной позиции x и для любого n-набора σ множество проходимых позиций $\langle x; \sigma\rangle$ конечно; кроме того, мы примем вторую точку зрения: X_0 будет одновременно открыто и замкнуто. Предположим также, что пространство X_i метрическое, т. е. что топологию пространства X_i можно определить расстоянием $d_i(x_i, y_i)$. Тогда пространство $X = \sum_{i=0}^{n} X_i$ также является метрическим.

В самом деле, для любого i возьмем произвольную точку ξ_i^0 в X_i и положим

$$d(x_i, y_i) = d_i(x_i, y_i), \text{ если } x_i, y_i \in X_i,$$
$$d(x_i, x_j) = d_i(x_i, \xi_i^0) + 1 + d_j(y_j, \xi_j^0),$$
$$\text{если } x_i \in X_i,\ y_j \in X_j,\ i \neq j.$$

Топология пространства X соответствует d и, кроме того, d — действительно расстояние, так как

1) $d(x, y) \geqslant 0$; $d(x, x) = 0$;
2) $x = y$, если $d(x, y) = 0$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$;
4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Пусть X_1^* — пространство однозначных отображений X_1 в X, Σ_1 — пространство стратегий игрока (1) и Σ_1^c — пространство непрерывных стратегий игрока (1). Имеем

$$X_1^* \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_1^c.$$

Мы рассматриваем X_1^* как метрическое пространство с расстоянием

$$d(\sigma_1, \sigma_1') = \sup_{x \in X_1} d(\sigma_1 x, \sigma_1' x).$$

Теорема 1. *Во всякой топологической игре множества Σ_1 и Σ_1^c замкнуты в X_1^*.*

В самом деле, если Γ непрерывно, то из теоремы 8 (§ 9) вытекает, что $\Sigma_1^c \neq O$. Кроме того, если $\sigma_1^0 \notin \Sigma_1$, $\sigma_1^0 \in X_1^*$, существует точка x в X такая, что $\sigma_1^0 x \notin \Gamma x$; поскольку Γx замкнуто, существует такое число ε, что

$$\sigma_1 x \notin \Gamma x, \qquad \text{если} \qquad d(\sigma_1 x, \sigma_1^0 x) \leqslant \varepsilon,$$

откуда окончательно

$$\sigma_1 \notin \Sigma_1, \quad \text{если} \qquad d(\sigma_1, \sigma_1^0) \leqslant \varepsilon;$$

отсюда также вытекает, что множество $\Sigma_1^c = X_1^{*c} \cap \Sigma_1$ замкнуто в X_1^*.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma^0 \in \Sigma_N^c$, и положим

$$\langle x^0;\ \sigma^0 \rangle = (x^0,\ x_1^0, x_2^0, \ldots,\ x_m^0)$$

и

$$\langle x;\ \sigma_P,\ \sigma^0_{N-P}\rangle = (x, x_1, x_2, \ldots, x_{m'}).$$

Любому положительному числу ε *можно поставить в соответствие положительное число* η *такое, что если*

$$d(x, x^0) \leqslant \eta, \quad d(\sigma_i, \sigma_i^0) \leqslant \eta \qquad (i \in P),$$

то

$$m' = m, \quad d(x_p, x_p^0) \leqslant \varepsilon \quad (p \leqslant m).$$

Мы здесь предполагаем, что позиции x_p^0 различны, и, следовательно, можно положить $\varepsilon < \frac{1}{2} \inf\limits_{i \neq j} d(x_i^0, x_j^0)$; обозначим через $i(p)$ игрока, которому принадлежит ход в позиции x_p^0. Последовательно можно найти числа $\eta_m, \eta_{m-1}, \ldots, \eta_0$; η_m таково, что

$$x_m \in X_{i(m)} \quad \text{для} \quad d(x_m, x_m^0) < \eta_m;$$

если $i(m-1) \notin P$, возьмем η_{m-1} такое, что если $d(x_{m-1}, x_{m-1}^0) < \eta_{m-1}$, то

$$x_{m-1} \in X_{i(m-1)}, \quad d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leqslant \inf(\eta_m, \varepsilon);$$

если $i(m-1) \in P$, возьмем η_{m-1} такое, что

$$d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leqslant \frac{1}{2} \inf(\eta_m, \varepsilon) \text{ для } d(x_{m-1}, x_{m-1}^0) < \eta_{m-1};$$

Тогда получим также

$$d(\sigma x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leqslant d(\sigma x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}) + \\ + d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leqslant \inf(\eta_m, \varepsilon)$$

при условии, что

$$d(\sigma_i, \sigma_i^0) \leqslant \frac{1}{2} \inf(\eta_m, \varepsilon).$$

Наконец, если мы возьмем η меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$, меньше η_0 и меньше всех чисел $\frac{1}{2}\eta_k$, то мы и получим утверждение теоремы.

Следствие 1. *В игре, топологической сверху (соответственно снизу) для игрока* (i), *функция* $f_i(x;\ \sigma^0)$ *полунепрерывна сверху (соответственно снизу) по* x, *если* $\sigma^0 \in \sum^c$.

Следствие 2. *В игре, топологической сверху (соответственно снизу) для игрока* (i), *функция* $f_i(\sigma_P, \sigma^0_{N-P})$**
полунепрерывна сверху (соответственно снизу) по σ_P *в точке* σ^0_P, *если* $(\sigma^0_P, \sigma^0_{N-P}) \in \Sigma^c$.

Теорема 3. *Если игра является топологической сверху для игрока* (1), *то множество* S^γ_1 *стратегий* σ_1, *при которых игрок* (1) *может гарантировать* γ, *замкнуто.*

Игрок (1) может гарантировать γ стратегиями σ_1, если

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cap \Delta_\gamma \neq 0 \quad (\sigma_2 \in \Sigma_2);$$

если $\sigma^0_1 \notin S^\gamma_1$, то существует стратегия σ^0_2 такая, что

$$\langle \sigma^0_1, \sigma^0_2 \rangle \subset \{x \mid f_1(x) < \gamma\} = \Omega_\gamma;$$

здесь стратегии σ^0_1 и σ^0_2 определены лишь на конечном множестве $\langle \sigma^0_1, \sigma^0_2 \rangle$ и, следовательно, их можно продолжить во всем пространстве X непрерывными стратегиями.

Поскольку Ω_γ открыто, на основании теоремы 2 $\langle \sigma_1, \sigma^0_2 \rangle \subset \Omega_\gamma$ для $d(\sigma_1, \sigma^0_1) \leqslant \eta$, следовательно, $\sigma_1 \notin S^\gamma_1$. Итак, S^γ_1 является замкнутым множеством.

Следствие 1. *В игре, топологической сверху для игрока* (1), *множество* S_1 *оптимальных стратегий игрока* (1) *замкнуто.*

В самом деле, имеем

$$S_1 = \bigcap_{\gamma < \varphi_1(x_0)} S^\gamma_1.$$

Согласно этой формуле, существование оптимальной стратегии было бы обеспечено, если бы Σ_1 было компактным; к сожалению, несмотря на теорему Асколи и работы Монтеля, у нас нет простых критериев для X и Γ, которые обеспечивали бы выполнение этого условия. Тем не менее, мы имеем:

Следствие 2. *Если пространство* X_{N-1} — *полное и если диаметр* $\delta(S^\gamma_1)$ *стремится к нулю, когда* γ *стремится к* $\varphi_1(x_0)$, *то существует одна и только одна оптимальная стратегия для игрока* (1).

Действительно, в этом случае X^*_1 есть полное пространство; поскольку замкнутые множества S^γ_1 убывающие, их пересечение, как известно, сводится к одной точке.

§ 12. Исследование пространства Σ_1 в случае, если игра не является локально конечной. Если мы не ставим условие, что множество $\langle x_0; \sigma\rangle$ конечно, то обычную топологию нельзя применить. Мы предположим в этом случае, что начальная позиция x_0 задана раз навсегда, и будем говорить, что две точки σ и σ' *равны*, если $\langle\sigma\rangle = \langle\sigma'\rangle$.

Мы определим на Σ *псевдометрическую топологию Хаусдорфа* следующим образом.

Рассмотрим отображение B_λ, где

$$B_\lambda x = \{y \mid y \in X,\ d(x, y) \leqslant \lambda\}.$$

Положим

$$d(\sigma, \tau) = \inf\{\lambda \mid B_\lambda\langle\sigma\rangle \supset \langle\tau\rangle;\ B_\lambda\langle\tau\rangle \supset \langle\sigma\rangle\};$$

$d(\sigma, \tau)$ есть псевдорасстояние, которое определяет на Σ псевдометрическую топологию, обозначаемую $\mathfrak{C}$.

Теорема 1. *Если в игре, топологической сверху для игрока* (1), *любое множество* $\langle\sigma\rangle$ *компактно, то множество* S_1 *оптимальных стратегий игрока* (1) *замкнуто в* Σ_1 *в топологии* $\mathfrak{C}$.

Доказательство такое же, как доказательство теоремы 3 (§ 11).

ГЛАВА III

ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

§ 13. Общее определение. Рассмотрим разбиение $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ множества X и положим $N = \{1, 2, \ldots, n\}$; мы говорим, что имеется *игра для игроков* (1), (2), (3), ..., (n) *на этом разбиении*, если определены:

1) отображение Γ множества X самого в себя, называемое *правилом игры*; предполагается, что $\{x \mid \Gamma x = O\} = X_0$;

2) для всякого $i\,(\in N)$ разбиение $\mathfrak{U}_i\,\{U, V, \ldots\}$ множества X_i, или *информационная схема игрока* (i). Если $U \in \mathfrak{U}_i$, мы говорим, что U есть *информационное множество игрока* (i); предполагается, что для всех x в U множества Γx имеют одну и ту же мощность;

3) для любого U семейство $\nu_U = \{\nu_h \mid h \in H_U\}$ однозначных отображений U в X таких, что если $x \in U$, то

а) $\nu_h x \neq \nu_k x$ для $h \neq k$; h, $k \in H_U$;

б) $\{\nu_h x \mid h \in H_U\} = \Gamma x$;

если $y = \nu_h x$, то мы говорим, что h есть *индекс позиции y относительно x*;

4) *основное распределение вероятностей*

$$\pi_0(x),$$

где $x \in X$; полагаем $A_0 = \{x \mid \pi_0(x) \neq 0\}$, $\Gamma^- A_0 = O$;

5) для всякого $i\,(\in N)$ действительная функция $f_i(x)$, определенная на X и называемая *функцией предпочтения игрока* (i).

Обычно полагают $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$; тогда игра определяется пятеркой $(\Gamma, \mathfrak{U}, \nu, \pi_0, f)$. Элементы x множества X_i, по определению, суть *позиции с ходом игрока* (i).

Партия проводится следующим образом: в A_0 выбирается случайно, с вероятностью $\pi_0(x_0)$, начальная позиция x_0; если информационное множество U, содержащее x_0, принадлежит $\mathfrak{U}_1$, игрок (1) будет знать не позицию x_0, но лишь содержащее ее информационное множество U.

Имеем

$$\Gamma x_0 = \{\nu_h x_0 \mid h \in H_U\}.$$

Игрок (1) выбирает в H_U индекс h_0 и этим определяется позиция игры $x_1 = \nu_{h_0} x_0$. Если $x_1 \in X_i$, игрок (i), ничего не знающий о том, что произошло перед этим, узнает, что позиция игры находится в множестве V разбиения $\mathfrak{U}_i$ и выбирает индекс h_1 в H_V; это приводит к новой позиции игры $x_2 = \nu_{h_1} x_1$ и т. д. [1]).

Игра прекращается, если позиция игры x такова, что $\Gamma x = O$.

Стратегия σ_i *игрока* (i) есть, по определению, отображение, ставящее в соответствие каждому множеству U разбиения $\mathfrak{U}_i$ индекс $h = \sigma_i U$ такой, что $\sigma_i U \in H_U$; их совокупность обозначается $\sum_i$. Говорят, что *игрок* (i) *применяет* σ_i, если всякий раз, когда позиция игры находится в $U (\subset \mathfrak{U}_i)$, он выбирает индекс $h = \sigma_i U$.

Множество позиций игры, возникающих из исходной позиции x_0, если каждый игрок (i) применяет определенную стратегию σ_i, есть вполне определенное множество, которое мы обозначаем как

$$\langle x_0; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\rangle = \langle x_0; \sigma_N\rangle.$$

Иногда множество

$$T(\sigma) = \bigcup_{x \in A_0} \langle x; \sigma\rangle$$

называют *следом* *n-набора* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. *Выигрыш игрока* (i) определяется как

$$f_i(x_0; \sigma) = \sup \{f_i(x) \mid x \in \langle x_0, \sigma\rangle\}.$$

Ожидаемый выигрыш игрока (i) есть математическое ожидание выигрыша, т. е.

$$F_i(\sigma) = \sum_{x \in A_0} \pi_0(x) f_i(x; \sigma).$$

---

[1]) Может оказаться, что случай участвует не только на первом ходе, но и неоднократно в течение партии; тогда нетрудно свести дело к описанной выше формулировке.

Цель игрока (i) — получить наибольшее возможное значение ожидаемого выигрыша [1]). Как и в гл. I, мы говорим, что σ есть *точка равновесия,* если

$$F_i(\sigma_{N-\{i\}}, \tau_i) \leqslant F_i(\sigma_N) \qquad (\tau_i \in \Sigma_i).$$

На интуитивном языке игроков это означает, что если применяется σ, то ни один игрок не сможет безнаказанно изменить свою стратегию отдельно от других.

Пример. *Бридж.* Рассмотрим партию бриджа в активной стадии (после объявлений); «юг» является «болваном».

Тогда мы имеем игру двух лиц, в которой игроком (1) является сторона «север—юг», а игроком (2)—сторона «восток—запад»; исходное множество A_0 изображает различные возможные сдачи. Обозначим через C, $Ю$, B, $З$ множества карт, находящихся в данный момент в руках «севера», «юга», «востока» и «запада», через $\overline{R}$ — множество уже выбывших из игры карт, с указанием их происхождения и игрока, который их выиграл, через $\overline{T}$ — множество карт, выложенных на столе для текущей взятки, с указанием их происхождения (если $T = O$, $\overline{T}$ указывает, кому принадлежит ход).

---

[1]) Чтобы определить отношение предпочтения, в котором случай уже не участвует, т. е. определить математическое ожидание выигрыша, мы предполагаем в данном случае, что мы имеем игру с платежами. Но и в противном случае можно все же определить математическое ожидание выигрыша аксиоматическим путем. Любой паре чисел (p, q), где $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, и любой паре $(x; y)$, где $x, y \in X$, ставится в соответствие элемент множества X, обозначаемый $px + qy$, так, чтобы соответствие удовлетворяло равенствам:

А. $px + qy = qy + px$;
Б. $p'(px + qy) + q'y = pp'x + (1 - pp')y$.

Отношение квазиупорядоченности $\geqslant$, определенное на X, должно обладать следующими свойствами:

В. $x < px + qy$ для $x < y$;
Г. $x > px + qy$ для $x > y$;
Д. для $x < z < y$ существует пара (p, q) такая, что $px + qy < z$;
Е. для $x > z > y$ существует пара (p, q) такая, что $px + qy > z$.

Можно показать [27, стр. 617], что в этом случае имеется игра с платежами, т. е. что существует функция предпочтения $f(x)$ такая, что:

1) если $x > y$, то $f(x) > f(y)$;
2) $f(px + qy) = pf(x) + qf(y)$.

Позиция игры x определяется множествами C, $Ю$, B, $З$ и «ориентирующими» множествами $\overline{R}$ и $\overline{T}$. Имеем $f_1(x)=g_1(\overline{R})$, $f_2(x)=g_2(\overline{R})$, где g_1 и g_2 — две возрастающие функции, зависящие от принятой системы расчета. Например, если ход принадлежит «западу», то информационным множеством U_0, содержащим позицию игры $x_0=(C_0, Ю_0, B_0, З_0, \overline{R}_0, \overline{T}_0)$, будет множество позиций $(C, Ю, B, З, \overline{R}, \overline{T})$, причем

$$\begin{gathered} З=З_0, \\ Ю=Ю_0, \\ B\cup C=B_0\cup C_0, \\ \overline{T}=\overline{T}_0, \\ \overline{R}=\overline{R}_0. \end{gathered}$$

§ 14. Основные виды информационных схем. 1. Игры без информации. Пусть $\mathfrak{U}_i^0$ — разбиение множества X_i, образованное множествами вида

$$U_x=\{y \mid y\in X_i,\ \Gamma y\sim\Gamma x\}$$

($\Gamma y\sim\Gamma x$ означает, что множества Γx и Γy могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие).

Очевидно, всякая информационная схема есть подразбиение разбиения $\mathfrak{U}_i^0$, или, что равносильно, $\mathfrak{U}_i^0$ является наименее мелкой из информационных схем. Таким образом, эта информационная схема соответствует полному незнанию.

Если игрок (i) участвует в игре с такой схемой, то о позиции игры у него нет никаких сведений, кроме числа элементов в Γx; правила игры не позволяют даже помнить встречавшиеся раньше позиции.

2. Игры с полной информацией. Пусть $\mathfrak{U}_i^1=(\{x\}\mid x\in X_i)$ — дискретное разбиение множества X_i. Это, очевидно, самая мелкая информационная схема игрока (i). Если игрок участвует в игре с этой информационной схемой, он будет знать все о позиции игры, и мы приходим к определению игры, данному в предыдущих главах.

Заметим, что если игрок (i) играет с двумя различными схемами $\mathfrak{U}_i'=\{U_\lambda'\}$ и $\mathfrak{U}_i''=\{U_\mu''\}$, он может иметь также информационную схему — произведение

$$\mathfrak{U}_i'\times\mathfrak{U}_i''=\{U_\lambda'\cap U_\mu''\mid\lambda_1\mu_1U_\lambda'\cap U_\mu''\neq O\}.$$

3. Одновременные игры. Игра называется *одновременной*, если информационная схема каждого игрока i есть $\mathfrak{U}_i = \{x_i\}$ и если ему принадлежит ход один раз в течение партии.

Чаще всего одновременная игра описывается как ситуация, в которой игрок (i) выбирает индекс h_i в множестве H_i, причем эти выборы совершаются одновременно. Для n-набора $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ функция $f_i(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ указывает выигрыш игрока (i).

Две игры, (Γ, f) и $(\overline{\Gamma}, \overline{f})$, называются *эквивалентными*, если их стратегии можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, что при $\sigma_i \leftrightarrow \overline{\sigma}_i$ будем иметь

$$F_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \overline{F}_i(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n).$$

Для данной игры всегда существует эквивалентная ей одновременная игра, которая определяется следующим образом: каждый игрок (i) выбирает независимо стратегию σ_i и получает при этом выигрыш $F_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

По определению эта новая игра есть *нормальная форма* первоначальной игры (в оригинале «forme simultanée).

Часто бывает удобно изучать игру в ее нормальной форме; однако многие свойства игры не охватываются изучением нормальной формы. На языке современной алгебры нормальная форма есть представитель «класса эквивалентности» игр, и в нормальной форме можно изучать лишь те свойства, которые являются общими для всех элементов класса эквивалентности.

4. Изовалентные игры[1]). Игра называется *изовалентной* для игрока (i), если для $x \neq y$; x, $y \in U (\subset \mathfrak{U}_i)$ мы имеем $y \notin \hat{\Gamma} x$.

Это означает, что в течение одной и той же партии не может встретиться два раза одно и то же информационное множество.

Игра называется *вполне изовалентной*, если, кроме того, из

$$U,\ V \in \mathfrak{U}_i; \qquad U \neq V; \qquad \hat{\Gamma} U \cap V \neq O,$$

следует $U \cap \hat{\Gamma} V = O$.

---

[1]) Все игры, которые исследовали авторы, писавшие на английском языке, изовалентны.

Игра в бридж, определенная выше, является вполне изовалентной игрой; напротив, игра, изображенная графом рис. 7 изовалентна, но не вполне изовалентна.

5. Игры с полной информацией об игроке (i). Говорят, что игрок (k) *имеет полную информацию об игроке* (i), если он знает при своем ходе информационные множества, встреченные игроком (i) раньше, а также выбранные им индексы.

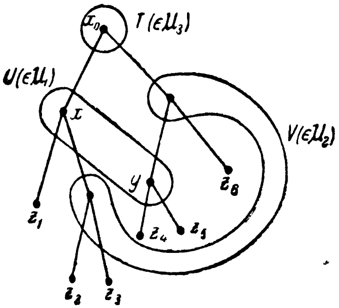

Рис. 7.

Говорят, что *имеется почти полная информация для игрока* (i), если игрок (i) имеет полную информацию о всех других игроках и если игроки множества $N-\{i\}$ имеют полную информацию об игроке (i).

6. Игры с полной памятью для игрока (i). Игра называется *игрой с полной памятью для игрока* (i), если игрок (i) имеет полную информацию о самом себе.

Рассмотрим, например, игру, изображенную на рис. 8. В V_1 игрок (1) забывает то, что он знал, а в V_2 игрок (2) забывает то, что он выбрал; U_1 и U_1' суть *мгновенные информационные множества* для игрока (1), а U_2 — мгновенное информационное множество для игрока (2). Игра является игрой с полной памятью для игрока (i) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}_i$ не содержит мгновенных информационных множеств.

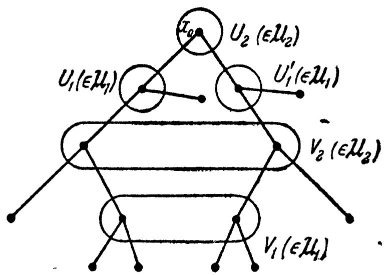

Рис. 8.

Замечание. Если игрок (i) не имеет информации с памятью, можно всегда разделить $\mathfrak{U}_i$ на различные разбиения $\mathfrak{U}_i^1, \mathfrak{U}_i^2, \ldots, \mathfrak{U}_i^k, \ldots$, непересекающихся подмножеств $X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^k, \ldots$ $(\subset X_i)$ так, что каждая схема $\mathfrak{U}_i^k$ будет с памятью. В этом случае $\mathfrak{U}_i^k$ называется *информационной схемой k-го агента игрока* (i).

Другими словами, у игрока (i) имеются *агенты*, если личность игрока (i) можно разделить на $(i)^1, (i)^2, (i)^3, \ldots, (i)^k, \ldots$ так, чтобы каждый игрок $(i)^k$ мог знать в момент своего хода то, что знал $(i)^k$ и как он играл раньше.

Так, в схематизированном бридже (пример в § 13) север и юг суть два агента игрока (1), восток и запад — два агента игрока (2).

§ 15. Смешанные стратегии. В играх, не имеющих полной информации, появляются два новых фактора, которые могут определить исход партии: случай и хитрость.

Случай, как мы видели выше, можно исключить из наших рассуждений, если заменить понятие «выигрыш» понятием «математическое ожидание выигрыша». Такая же задача возникает относительно хитрости, которая проявляется в весьма различных видах: как умение скрывать от своего соперника свое знание игры («притворство»), как умение обманывать его относительно своих намерений («блеф»), как умение распознавать самые сокровенные его мысли («проницательность»). Хитрость может быть также единственным фактором, влияющим на исход партии; в частности, это имеет место в игре «чет или нечет» или в игре «бумага, камень, ножницы». Чтобы исключить влияние хитрости в момент решения, Борель ввел понятие *смешанной стратегии.*

Предположим для определенности, что множество стратегий игрока (1) конечно, т. е. $\Sigma_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_i^m\}$, и рассмотрим распределение вероятностей $s_i = \{s_i^k \mid k = 1, 2, \ldots, m\}$ на Σ_i. Имеем

$$s_i^k \geqslant 0 \qquad (k \leqslant m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} s_i^k = 1.$$

По определению вектор $s_i = (s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m)$ есть ***смешанная стратегия игрока*** (i). Будем считать, что простая стратегия σ_i^k есть также смешанная стратегия вида $s_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Говорят, что игрок (i) *применяет смешанную стратегию* $s_i = (s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m)$, если он выбирает случайно простую стратегию σ_i^k в Σ_i с вероятностью s_i^k.

В § 13 был определен след $T(\sigma_N)$ n-набора стратегий σ_N; вообще, если $P=\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ есть подмножество множества N, *след k-набора стратегий* $\sigma_P=(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k})$, по определению, есть множество

$$T(\sigma_P)=\bigcup_{\tau} T(\sigma_P, \tau_{N-P}).$$

След смешанной стратегии $s_i=(s_i^k \mid k=1, 2, \ldots, m)$ игрока (i) есть, по определению, множество

$$T(s_i)=\bigcup_{s_i^k \neq 0} T(\sigma_i^k).$$

Таким образом, след стратегии s_i есть множество всех позиций, которые могут встретиться в ходе игры, если игрок (i) применяет смешанную стратегию s_i.

Если игроки (1), (2), $\ldots$, (n) применяют соответственно смешанные стратегии $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то *ожидаемый выигрыш игрока* (i) есть, по определению,

$$F_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)=\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n} F_i(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \ldots, \sigma_n^{k_n}).$$

Множество смешанных стратегий s_i игрока (i) обозначается S_i; множество n-наборов $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где $s_i \in S_i$ для каждого i, обозначается S или S_N.

Теорема фон Неймана—Нэша. *Всякая игра имеет точку равновесия $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ для смешанных стратегий.*

Это значит, что для всякого i

$$F_i(t_i, s_{N-\{i\}}) \leqslant F_i(s) \qquad (t_i \in S_i).$$

Эта теорема будет доказана дальше в более общем виде.

Следствие. Теорема о минимаксе [31]. *Для всякого игрока (i) существует седловая точка для смешанных стратегий, т. е. n-набор s такой, что*

$$F_i(t_i, s_{N-\{i\}}) \leqslant F_i(s) \leqslant F_i(s_i, t_{N-\{i\}}) \qquad (t \in S).$$

Другими словами, это означает, что, применяя s_i, игрок (i) на основании второго неравенства может гарантировать себе ожидаемый выигрыш, по меньшей мере равный $F_i(s)$, и на основании первого неравенства не может гарантировать бо́льшей величины. Таким образом, s_i представляет для него «хорошую» смешанную стратегию.

Заметим, что эту теорему можно написать так:

$$\max_s \min_t F_i(s_i, t_{N-\{i\}}) = \min_t \max_s F_i(s_i, t_{N-\{i\}}).$$

Отсюда название теоремы — «теорема о минимаксе».

Пример. *Игра «крик»* (Кун). Рассмотрим игру, определенную графом рис. 9. Имеются два игрока, и $f_1(x) = -f_2(x) = f(x)$ указана у конечных ветвей дерева.

Ожидаемый выигрыш

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}[f(x_1; \sigma_1, \sigma_2) + f(x_2; \sigma_1, \sigma_2)]$$

указывается для различных возможных стратегий следующей таблицей:

		$\sigma_2' T = 1$	$\sigma_2'' T = 2$
$\sigma_1' S = 1;$	$\sigma_1' U = 1$	0	$-\frac{1}{2}$
$\sigma_1'' S = 1;$	$\sigma_1'' U = 2$	0	$\frac{1}{2}$
$\sigma_1''' S = 2;$	$\sigma_1''' U = 1$	$\frac{1}{2}$	0
$\sigma_1^{IV} S = 2;$	$\sigma_1^{IV} U = 2$	$-\frac{1}{2}$	0

Эта игра описывается конкретно следующим образом. Игрок (1) состоит из двух агентов (1′) и (1″), которые не могут прямо сообщаться между собой, а игрок (2) состоит лишь из одного агента. Две карты, одна «высшая», другая — «низшая», раздаются наудачу агентам (1′) и (2); агент, имеющий «высшую» карту, получает один франк от агента, имеющего «низшую» карту, и может либо продолжить, либо прекратить игру. Если игра продолжается, агент (1″), не зная расклада, может

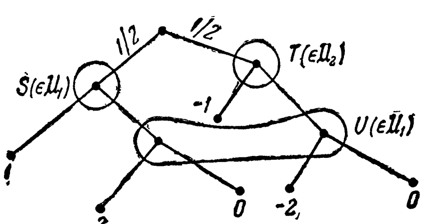

Рис. 9.

приказать агенту (1′) оставить карту у себя или переменить ее с картой игрока (2). Владелец «высшей» карты опять получает один франк от владельца низшей карты.

Если бы (σ_1, σ_2) была точкой равновесия, то она была бы седловой точкой, и мы имели бы

$$F(\tau_1, \sigma_2) \leqslant F(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant F(\sigma_1, \tau_2) \qquad (\tau \in \Sigma).$$

Но из таблицы сразу видно, что не существует точки (σ_1, σ_2), удовлетворяющей этому условию.

Рассмотрим теперь общее выражение ожидаемого выигрыша $F(s_1, s_2)$ в смешанных стратегиях и возьмем

$$s_1 = \left(s_1' = 0,\ s_1'' = \frac{1}{2},\ s_1''' = \frac{1}{2},\ s_1^{\mathrm{IV}} = 0\right),$$

$$s_2 = \left(s_2' = \frac{1}{2},\ s_2'' = \frac{1}{2}\right).$$

Мы получим тогда

$$F(s_1, \sigma_2') = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4},$$

$$F(s_1, \sigma_2'') = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{4}.$$

Отсюда находим

$$F(t_1, s_2) \leqslant F(s_1, s_2) = \frac{1}{4} = F(s_1, t_2) \qquad (t_1 \in S_1,\ t_2 \in S_2).$$

Следовательно, (s_1, s_2) есть точка равновесия, и наибольший средний выигрыш, на который может надеяться игрок (1), равен $\frac{1}{4}$; следовательно, если бы игра продолжалась много раз, он мог бы избрать раз и навсегда «хорошую стратегию» s_1.

Практические способы вычисления седловой точки для смешанных стратегий будут исследованы дальше (§ 25).

Замечание. Мы предположили здесь, что множество Σ_i конечно; в противном случае *смешанной стратегией игрока* (i) называется любое распределение вероятностей $s_i = (p(\sigma_i) \mid \sigma_i \in \Sigma_i)$ на Σ_i. Тогда ожидаемый выигрыш игрока (i) будет $F_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) =$

$$= \int\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \int\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \ldots \int\limits_{\sigma_n \in \Sigma_n} F_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\, dp(\sigma_1)\, dp(\sigma_2) \ldots dp(\sigma_n).$$

Мы увидим дальше (§ 23), что, вообще говоря, теорема фон Неймана — Нэша применима к этому случаю.

§ 16. Упорядоченные игры и упорядоченная форма игры. Игра называется *упорядоченной*, если

$$\Gamma x \cap \Gamma y = 0 \quad \text{для} \quad x \neq y.$$

Говорят, что в упорядоченной игре x *предшествует* y, $x \leqslant y$, если $y \in \hat{\Gamma} x$. Мы сразу видим, что $\leqslant$ есть отношение упорядоченности.

Всякой игре, определенной *локально*, т. е. по отношению к начальной позиции x_0, можно поставить в соответствие эквивалентную упорядоченную игру, которую можно описать следующим образом: «позицией» $\bar{x}$ новой игры мы назовем любую последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, где k — любое целое число и где $x_p \in \Gamma x_{p-1}$ $(p \geqslant 1,\ p \leqslant k)$. Правило $\bar{\Gamma}$ новой игры определяется равенством

$$\bar{\Gamma}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \Gamma x_k).$$

Функции предпочтения $\bar{f}_i(\bar{x})$ определяются как

$$\bar{f}_i(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sup\{f_i(x_p) \mid p \geqslant 0,\quad p \leqslant k\}.$$

Информационному множеству U ставится в соответствие информационное множество

$$\bar{U} = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid k \geqslant 0;\ x_p \in \Gamma x_{p-1}\ (p \leqslant k);\ x_k \in U\}.$$

Определенная таким образом игра называется *упорядоченной формой* первоначальной игры.

Рассмотрим, например, игру рис. 10. Упорядоченная форма этой игры изображается графом рис. 11.

Первоначальная конечная игра стала бесконечной упорядоченной игрой, но число информационных множеств не изменилось; заметим, что игра в упорядоченной форме является *монотонной*.

$$\bar{f}_i(\bar{y}) \geqslant \bar{f}_i(\bar{x}) \quad \text{для} \quad \bar{y} \in \bar{\Gamma}\bar{x}.$$

Если игра имеет ограниченную длительность, функции предпочтения игроков достаточно задать лишь на конечных позициях игры.

Часто бывает удобно провести локальное исследование игры в ее упорядоченной форме; тем не менее, некоторые позиционные свойства игры исчезают при исследовании упорядоченной формы. Точнее говоря, упорядоченная форма есть

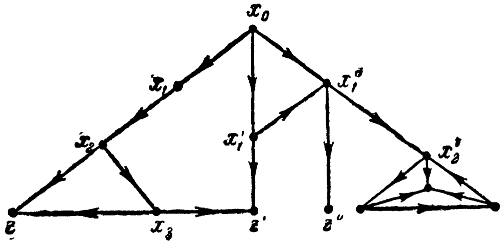

Рис. 10.

представитель «класса эквивалентности» игр, и в упорядоченной форме можно изучать лишь те свойства, которые являются общими для всех элементов класса эквивалентности.

Мы заметили в гл. I, что не всякая стратегия упорядоченной игры может быть стратегией первоначальной игры.

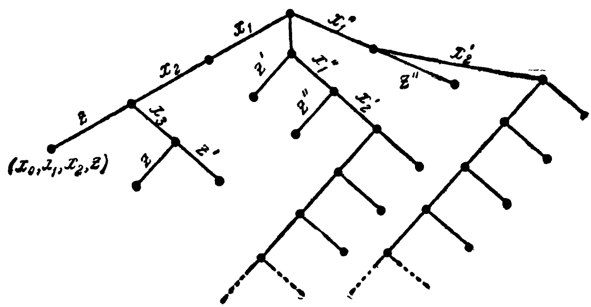

Рис. 11.

Напротив, в играх с информационными схемами можно поставить во взаимно однозначное соответствие стратегии первоначальной игры и стратегии ее упорядоченной формы: первоначальная и упорядоченная формы будут иметь одинаковые чисто стратегические свойства.

Теорема 1. *Если в неупорядоченной игре имеется полная информация, то в ее упорядоченной форме может не быть полной информации.*

Теорема 2. *Всякая нормальная игра упорядочена.*

Теорема 3. *Упорядоченная форма изовалентна тогда и только тогда, когда первоначальная игра изовалентна; упорядоченная форма вполне изовалентна тогда и только тогда, когда первоначальная игра вполне изовалентна.*

Теорема 4. *В упорядоченной форме игрок* (k) *имеет полную информацию об игроке* (i) *тогда и только тогда, когда в первоначальной игре игрок* (k) *имеет полную информацию об игроке* (i).

Следствие I. *В упорядоченной форме почти полная информация для игрока* (i) *имеет место тогда и только тогда, когда это имеет место в первоначальной игре.*

Следствие II. *В упорядоченной форме полная память для игрока* (i) *имеет место тогда и только тогда, когда это имеет место в первоначальной игре.*

§ 17. Циклы. Рассмотрим игру $(\Gamma, \mathfrak{U}, \nu, \pi_0, f)$ в упорядоченной форме. *Цикл*, по определению, есть множество C в X такое, что

1) $\Gamma C \subset C$;

2) если $C \cap U \neq O$, $U \in \mathfrak{U}$, то $U \subset C$;

3) если $C \cap U = O$, $C \cap \hat{\Gamma} U \neq O$, $U \in \mathfrak{U}$, то для некоторого индекса h имеет место соотношение $C \subset \hat{\Gamma}\nu_h U$;

4) $C = \hat{\Gamma} B$, где $B = \{x \mid x \in C,\ \Gamma^{-} x \cap C = O\}$. Множество B называется *базой цикла* C.

Теорема 1. *Если* C_1 и C_2 — *такие циклы, что один не содержит другого, то*

1) $C_1 \cap C_2$ *есть цикл с базой* $B_1 \cap B_2$;

2) $C_1 \dot{-} C_2$ *есть цикл с базой* $B_1 - B_2$.

Можно исключить случай, когда $B_1 \supset B_2$ или $(B_2 \supset B_1)$, так как тогда мы бы имели

$$C_1 = \hat{\Gamma} B_1 \supset \hat{\Gamma} B_2 = C_2.$$

Можно исключить случай, когда $\hat{\Gamma}(B_1 - B_2) \cap B_2 \neq O$, так как тогда существовало бы множество U такое, что

$$U \cap B_1 \neq O, \quad \hat{\Gamma} U \cap B_2 \neq O.$$

Для этого множества U и для некоторого индекса h можно написать на основании условия 3:

$$C_1 \supset \hat{\Gamma} U \supset \hat{\Gamma} \nu_h U \supset C_2.$$

Таким образом, полагая

$$\hat{\Gamma}(B_1 - B_2) \cap B_2 = \hat{\Gamma}(B_2 - B_1) \cap B_1 = O, \quad B_1 \not\supset B_2,$$

получаем отсюда

$$\hat{\Gamma}(B_1 - B_2) \subset C_1 - C_2,$$
$$\hat{\Gamma}(B_2 - B_1) \subset C_2 - C_1,$$
$$\hat{\Gamma}(B_1 \cap B_2) \subset C_1 \cap C_2,$$
$$\hat{\Gamma}(B_1 - B_2) \cup \hat{\Gamma}(B_2 - B_1) \cup \hat{\Gamma}(B_1 \cap B_2) = C_1 \cup C_2.$$

Итак,

$$\hat{\Gamma}(B_1 - B_2) = C_1 - C_2,$$
$$\hat{\Gamma}(B_2 - B_1) = C_2 - C_1,$$
$$\hat{\Gamma}(B_1 \cap B_2) = C_1 \cap C_2,$$

Мы сразу видим, что $C_1 \cap C_2$ есть цикл с базой $B_1 \cap B_2$. Для $C_1 - C_2$ условия 1 и 2 выполняются. Покажем, что выполняется условие 3. Если

$$U \cap (C_1 - C_2) = O, \quad \hat{\Gamma} U \cap (C_1 - C_2) \neq O,$$

то не могло бы быть $U \subset C_2$, так как отсюда следовало бы, что $\hat{\Gamma} U \subset C_2$ и $\hat{\Gamma} U \cap (C_1 - C_2) = O$. Следовательно,

$$U \cap C_1 = O.$$

Поскольку $\hat{\Gamma} U \cap C_1 \neq O$, существует индекс h такой, что

$$C_1 \subset \hat{\Gamma} \nu_h U.$$

Тем более

$$C_1 - C_2 \subset \hat{\Gamma} \nu_h U,$$

что и требовалось доказать.

Пусть C — цикл множества X и пусть $x \in B$. Обозначим через $p(x, \sigma)$ вероятность иметь x при $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. По определению, *ограничением игры циклом* C называется игра $\overline{\Gamma}=(\overline{\Gamma}, \overline{\mathfrak{U}}, \overline{\nu}, \overline{\pi}_0, \overline{f})$ с множеством позиций C, определенная следующим образом:

1) $\overline{\Gamma}x=\Gamma x \quad (x \in C)$;

2) ν не меняется;

3) $\overline{\mathfrak{U}}$ есть ограничение $\mathfrak{U}$ циклом C;

4) за вероятность позиции $x\,(\in B)$ берется число

$$\overline{\pi}_0(x)=\frac{p(x, \sigma)}{\sum\limits_{x \in B} p(x, \sigma)},$$

независимое от σ; если $x \notin B$, принимаем $\overline{\pi}_0(x)=0$;

5) $\overline{f}_i(x)=f_i(x) \quad (x \in C)$.

Если дан n-набор смешанных стратегий $\overline{s}=(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots$ $\ldots, \overline{s}_n)$ для этой новой игры, то *игрой, дополнительной к* $\overline{\Gamma}$ *относительно* $\overline{s}$, называется игра $\Gamma^*(s)=(\Gamma^*, \mathfrak{U}^*, \nu^*, s^*, f^*)$ на $(X-C) \cup B$, определенная следующим образом:

1) $\Gamma^*x=\Gamma x\,(x \in X-C)$; $\Gamma^*x=O\,(x \in B)$;

2) ν не меняется;

3) $\mathfrak{U}^*$ есть ограничение $\mathfrak{U}$ множеством $X-C$;

4) $\pi_0^*(x)=\pi_0(x)$;

5) если $x \in X-C$, полагаем

$$f_i^*(x)=f_i(x);$$

если $x \in B$, полагаем

$$f_i^*(x)=\sum_{h_1, h_2, \ldots} F_i(x; \overline{\sigma}_1^{h_1}, \overline{\sigma}_2^{h_2}, \ldots, \overline{\sigma}_n^{h_n})\, \overline{s}_1^{h_1} \overline{s}_2^{h_2} \ldots \overline{s}_n^{h_n}.$$

Теорема 2 [19]. *Пусть s есть n-набор смешанных стратегий и C — такой цикл, что $T(s) \cap C \neq O$;*

s есть точка равновесия тогда и только тогда, когда ее ограничение $\overline{s}$ циклом C есть точка равновесия игры $\overline{\Gamma}$ на множестве C и когда ее ограничение s^* множеством $X-C$ есть точка равновесия в игре $\Gamma^*(\overline{s})$.

Если $\overline{s}$ и s^* — точки равновесия в играх $\overline{\Gamma}$ и $\Gamma^*(\overline{s})$, то s есть точка равновесия для игры Γ, так как иначе существовала бы такая стратегия t_i, что

$$F_i(s_{N-\{i\}}, t_i) > F_i(s),$$

или, обозначив через F_i^* и G_i^* ожидаемые выигрыши в играх $\Gamma^*(\bar{s})$ и $\Gamma^*(\bar{s}_{N-\{i\}}, t_i)$, мы бы имели

$$G_i^*(s^*_{N-\{i\}}, t_i^*) > F_i^*(s^*).$$

С другой стороны, поскольку $\bar{s}$ есть точка равновесия в игре $\bar{\Gamma}$, имеем

$$F_i^*(u^*) \geqslant G_i^*(u) \quad (u \in S),$$

откуда

$$F_i^*(s^*_{N-\{i\}}, t_i^*) > F_i^*(s^*),$$

а это противоречит допущению, что s^* есть точка равновесия.

Обратно, если s^* не есть точка равновесия, то существует такая стратегия $\bar{t}_i$, что

$$\bar{F}_i(\bar{s}_{N-\{i\}}, \bar{t}_i) > \bar{F}_i(\bar{s}).$$

Если $T(s) \cap C \neq O$, имеем

$$F_i(s_{N-\{i\}}, s_i^* \otimes \bar{t}_i) > F_i(s).$$

Следовательно, s не есть точка равновесия в Γ. Такое же рассуждение справедливо для s^*.

Теорема 3 [6]. *Если $T(s_{i_0}) \cap C \neq O$, $T(s_i) \cap C \neq O$ $(i \neq i_0)$, n-набор s есть точка равновесия тогда и только тогда, когда существует такой n-набор $\bar{t}$, что*

1) $\bar{t}_i = \bar{s}_i$ $(i \neq i_0)$;

2) $\bar{F}_i(\bar{t}) \geqslant \bar{F}_i(t_{N-\{i\}}, \bar{u}_i)$ $(u_i \in S_i)$;

3) *s^* есть точка равновесия в игре* $\Gamma^*(\bar{t})$.

Доказательство такое же, как доказательство предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Если $T(s_{i_S}) \cap C = O$, $T(s_{i_1}) \cap C \neq O$, то n-набор s есть точка равновесия тогда и только тогда, когда s^* есть точка равновесия в игре $\Gamma^*(\bar{t})$ относительно n-набора $\bar{t}$ игры $\bar{\Gamma}$.*

Доказательство то же.

Замечание. Если $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — попарно непересекающиеся циклы множества X, то можно определить таким же образом дополнительную игру множества игр с опорными циклами $C_1, C_2, \ldots, C_k$ относительно множества стратегий $\bar{s}^1$, $\bar{s}^2, \ldots, \bar{s}^k$ этих различных игр. Теоремы 2, 3 и 4 остаются в силе.

§ 18. Разложение информационной схемы. Две информационные схемы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ называются эквивалентными, т. е. $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{V}$, если существует взаимно однозначное соответствие $\sigma_i \longrightarrow \tau_i$ между множеством $\Sigma_i^{\mathfrak{U}}$ стратегий σ_i с информацией $\mathfrak{U}$ и множеством $\Sigma_i^{\mathfrak{V}}$ стратегий τ_i с информацией $\mathfrak{V}$ такое, что для $\sigma_1 \longrightarrow \tau_1, \sigma_2 \longrightarrow \tau_2, \ldots, \sigma_n \longrightarrow \tau_n$ имеем

$$p(x, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = p(x, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \quad (x \in X).$$

Это соответствие естественно распространяется на смешанные стратегии. Если $s_i \longrightarrow t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеем

$$F_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = F_i(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Лемма 1. *Если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — две эквивалентные информационные схемы, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — точка равновесия с информацией $\mathfrak{U}$ и $s_i \longrightarrow t_i$ для всякого i, то n-набор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ есть точка равновесия с информацией $\mathfrak{V}$.*

В самом деле, при этом имеем

$$F_i(u_i, s_{N-\{i\}}) \leqslant F_i(s) \quad (u_i \in S_i^{\mathfrak{U}}).$$

Следовательно,

$$F_i(v_i, t_{N-\{i\}}) \leqslant F_i(t) \qquad (v_i \in S_i^{\mathfrak{V}}),$$

что и требовалось доказать.

Информационная схема $\overline{\mathfrak{U}}$ называется *непосредственным разложением* (относительно i) *информационной схемы* $\mathfrak{U}$, если для всех k каждое информационное множество из $\mathfrak{U}_k$ принадлежит также $\overline{\mathfrak{U}}_k$, за исключением множества U, такого, что

1) $U = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \in \mathfrak{U}_i$, $\overline{U}_1, \overline{U}_2 \in \overline{\mathfrak{U}}_i$);

2) если $T(\sigma_i) \cap \overline{U}_1 \neq O$, то $T(\sigma_i) \cap \overline{U}_2 = O$.

Рассмотрим, например, информационную схему $\mathfrak{U}$ рис. 12. Ее непосредственное разложение указано на рис. 13.

Можно всегда определить путем последовательных разложений информационную схему $\overline{\mathfrak{U}}^t$, не зависящую от принятого порядка разложений, которая уже не может быть разложена. Эта информационная схема по определению называется *полным разложением множества* $\mathfrak{U}$. Отныне (§ 18, 19, 20, 21) мы будем всегда предполагать, что информация изовалентна.

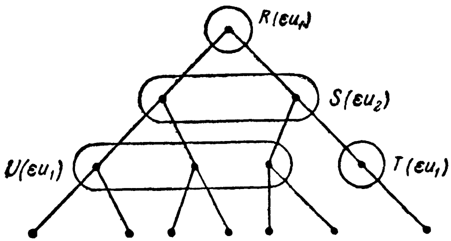

Рис. 12.

Лемма 2 (Дальки). *Две информационные схемы* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{B}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их полные разложения* $\overline{\mathfrak{U}}^t$ *и* $\overline{\mathfrak{B}}^t$ *совпадают.*

Фундаментальная теорема [6]. *Пусть в конечной игре* $P(\subset N)$ — *множество игроков, для которых ин-*

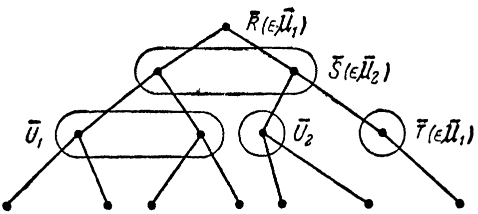

Рис. 13.

формация $\overline{\mathfrak{U}}^t$ *почти полная; существует точка равновесия вида*

$$s=(s_{N-P},\ \sigma_P), \quad \textit{где} \quad s_{N-P}\in S_{N-P},\ \sigma_P\in\Sigma_P.$$

Достаточно показать, что при информации $\overline{\mathfrak{U}}^t$ существует точка равновесия вида $(\bar{s}_{N-P},\ \bar{\sigma}_P)$. В самом деле, поскольку схемы $\mathfrak{U}$ и $\overline{\mathfrak{U}}^t$ эквивалентны (лемма 2), для

$$s_{N-P}(\longrightarrow \bar{s}_{N-P}\in \Sigma^{\overline{\mathfrak{U}}^t}_{N-P}) \quad \text{и} \quad \sigma_P(\longrightarrow \bar{\sigma}_P\in \Sigma^{\overline{\mathfrak{U}}^t}_{P})$$

точка (s_{N-p}, σ_p) есть точка равновесия с информацией $\mathfrak{U}$ (лемма 1).

Рассмотрим при информации $\overline{\mathfrak{U}}^t$ семейство всех циклов C, строго содержащихся в X и таких, что X есть единственный цикл, строго содержащий C. На основании теоремы 1 (§ 17) можно всегда предположить, что рассматриваемые циклы попарно не пересекаются; поступим таким же образом с каждым из этих циклов и т. д. Поскольку игра конечна, придет момент, когда уже нельзя будет разлагать полученные циклы. Таким путем образуется дерево, начальная вершина которого лежит в X, а конечные ветви — неразложимые циклы.

Точка равновесия смешанных стратегий строится постепенно, начиная с конечных ветвей фундаментального дерева циклов, точно так же, как для теоремы Цермело—фон Неймана (§ 7); используя замечание (§ 17), нетрудно довести до конца остальные пункты доказательства.

Следствие 1. *Если $\overline{\mathfrak{U}}^t$ — почти полная информация для игрока (i), то этот игрок может гарантировать себе посредством чистых стратегий такой же выигрыш, как и посредством смешанных стратегий.*

Следствие 2. *Если информация $\overline{\mathfrak{U}}^t$ — полная для всех игроков, то существует точка равновесия $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n)$ в чистых стратегиях.*

Обратное предложение (Берч). *Рассмотрим информацию, вполне изовалентную и не почти полную для игрока (i); тогда можно найти функции предпочтения, при которых мы получим для всякой точки равновесия $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ отношение $s_i \notin \Sigma_i$.* О построении такой игры см. [6].

§ 19. Стратегии поведения. Любому информационному множеству $U (\subset \mathfrak{U}_i)$ поставим в соответствие распределение вероятностей $\pi_i^0 = \pi_i^0(h)$ $(h \in H_0)$ на

$$\pi_i^U(h) \geqslant 0, \quad \sum_h \pi_i^0(h) = 1;$$

$\pi_i = \pi_i^U$ $(U \in \mathfrak{U}_i)$ есть, по определению, *стратегия поведения* игрока (i).

Мы говорим, что игрок (i) *применяет* стратегию поведения π_i, если во всяком информационном множестве $U (\subset \mathfrak{U}_i)$

индекс выбирается случайно согласно функции распределения π_i^U.

След $T(\pi_i)$ стратегии поведения π_i определяется, так же как для смешанных стратегий, как множество позиций, которые можно будет встретить, если игрок (i) применяет π_i.

Пусть z — элемент в X_0, и пусть z_0 — первая встреченная начальная позиция в множестве $\hat{\Gamma}^{-}z$; если каждый игрок (k) применяет стратегию поведения π_k, то вероятность получить z равна

$$p(z;\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = \pi_0(z_0) \prod_{\substack{U \in \mathfrak{U}_1, \\ U \cap \hat{\Gamma}^{-} z \neq O, \\ \hat{\Gamma}\nu_h U \cap \hat{\Gamma}^{-} z \neq O}} \pi_1^U(h) \ldots \prod_{\substack{U \in \mathfrak{U}_n, \\ U \cap \hat{\Gamma}^{-} z \neq O, \\ \hat{\Gamma}\nu_h U \cap \hat{\Gamma}^{-} z \neq O}} \pi_n^U(h).$$

Мы обозначим ожидаемый выигрыш игрока (i), когда игрок k применяет стратегию поведения π_k, через

$$F_i(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = \sum_{z \in X_0} f_i(z)\, p(z;\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n).$$

При применении некоторой стратегии поведения наилучший ожидаемый выигрыш игрока (i) равен

$$\sup_{\pi_i} \inf_{\sigma_{N-\{i\}}} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

Пример. Рассмотрим опять игру «крик», описанную выше (§ 15); мы видели, что наилучший выигрыш, который может получить игрок (1), применяя смешанные стратегии, равен $\frac{1}{4}$. Положим

$$\alpha = \pi_1^S(1), \qquad 1 - \alpha = \pi_1^S(2);$$
$$\beta = \pi_1^U(1), \qquad 1 - \beta = \pi_1^U(2).$$

Стратегию поведения игрока (1) можно обозначить $\pi(\alpha, \beta)$. Имеем

$$F_1(\pi_1, \sigma_2') = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \beta - \alpha\beta,$$
$$F_1(\pi_1, \sigma_2'') = +\frac{1}{2}\alpha - \alpha\beta.$$

Следовательно,

$$\sup_{\pi_1} \inf_{\sigma_2} F(\pi_1, \sigma_2) = 0.$$

Следовательно, наилучший ожидаемый выигрыш игрока (1) для стратегии поведения равен нулю; он меньше наилучшего ожидаемого выигрыша игрока (1) для смешанной стратегии, равного $\frac{1}{4}$.

§ 20. Сравнительное исследование смешанных стратегий и стратегий поведения. Если дана смешанная стратегия s_i, то существует стратегия поведения π_1, в которой выборам игрока (i) назначаются такие же вероятности и которая определяется как

$$\pi_i^U(h) = \frac{\sum\limits_{\substack{k \mid U \cap T(\sigma_i^k) \neq O \\ \sigma_i^k(U) = h}} s_i^k}{\sum\limits_{k \mid U \cap T(\sigma_i^k) \neq O} s_i^k}$$

(если $U \cap T(s_i) = O$, то $\pi_i^0(h)$ определяется произвольно). Тогда пишут $s_i \longrightarrow \pi_i$.

Подобно этому, если дана стратегия π_i, ей можно поставить в соответствие эквивалентную смешанную стратегию соотношением

$$s_i^k = p(\sigma_i^k) = \prod_{U \in \mathfrak{U}_i} \pi_i^U(\sigma_i^k U).$$

Мы пишем тогда $\pi_i \longrightarrow s_i$.

Теорема 1. *Для* $\pi_i \longrightarrow s_i$ *имеем*

$$p(x;\, s_i,\, \sigma_{N-\{i\}}) = p(x;\, \pi_i,\, \sigma_{N-\{i\}}),$$

где

$$x \in X_0;\quad \sigma_{N-\{i\}} \in \Sigma_{N-\{i\}}.$$

Это вытекает непосредственно из определения соответствия $\pi_i \longrightarrow s_i$.

Следствие. *Наилучший ожидаемый выигрыш, гарантированный посредством стратегии поведения, не больше наилучшего ожидаемого выигрыша, гарантированного посредством смешанной стратегии:*

$$\sup_{\pi_i} \inf_{\sigma} F_i(\pi_i,\, \sigma_{N-\{i\}}) \leqslant \sup_{s_i} \inf_{\sigma} (s_i,\, \sigma_{N-\{i\}}).$$

Действительно, если $\pi_i \longrightarrow s_i$, то

$$F_k(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = F_k(s_i, \sigma_{N-\{i\}}) \quad (k \in N).$$

Теорема 2. *Для того чтобы при* $s_i \longrightarrow \pi_i$ *имело место*

$$p(x; s_i, \sigma_{N-\{i\}}) = p(x; \pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \quad (x \in X_0, \ \sigma \in \Sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы игра была с полной памятью для игрока (i).

За доказательством мы отсылаем читателя к работе [19].

Теорема 3. *Пусть* P *— множество игроков, у которых имеется полная память, и пусть* s *есть n-набор смешанных стратегий; если* $s_i \longrightarrow \pi_i$ $(i \in P)$, *то*

$$F_k(s) = F_k(\pi_P, s_{N-P}) \quad (k \in N).$$

В самом деле, теорема 2 доказывается таким же образом, если рассматривается множество игроков P вместо изолированного игрока (i); отсюда непосредственно вытекает теорема 3.

Следствие 1. *Если имеется игра с полной памятью для игрока* (i), *то наилучший ожидаемый выигрыш, который может гарантировать игрок* (i) *посредством стратегии поведения, равен наилучшему ожидаемому выигрышу, гарантированному посредством смешанной стратегии:*

$$\sup_{\pi} \inf_{\sigma} F_k(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = \sup_{s} \inf_{\sigma} F_k(s_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

В самом деле, если $s_i \longrightarrow \pi_i$, то на основании теоремы 2

$$\inf_{\sigma} F_k(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = \inf_{\sigma} F_k(s_i, \sigma_{N-\{i\}}),$$

откуда

$$\sup_{\pi} \inf_{\sigma} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \geqslant \sup_{s} \inf_{\sigma} F_i(s_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

Поскольку справедливо также обратное неравенство, теорема доказана.

Следствие 2. *Если имеется игра с полной памятью для всех игроков, то существует точка равновесия* $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ *для стратегий поведения.*

Это вытекает из теоремы 3.

Замечание. Для игры с полной памятью понятие стратегии поведения эквивалентно понятию смешанной стратегии и гораздо удобнее. В частности, стратегии поведения оказались очень удобными для различных вариантов покера [19].

§ 21. Составные стратегии. Пусть $\mathfrak{W}_i$ — семейство мгновенных информационных множеств игрока (i) (§ 14); *следом ограничения* $\bar{\sigma}_i$ *стратегии* σ_i *множеством* $\mathfrak{W}_i$ мы назовем множество

$$T(\bar{\sigma}_i) = \bigcup_{\substack{\tau \in \Sigma_i \\ \bar{\tau}_i = \bar{\sigma}_i}} T(\tau_i).$$

Составная стратегия для игрока (i) определяется распределением вероятностей $\bar{s}_i = p(\bar{\sigma}_i)$ $(\bar{\sigma}_i \in \bar{\Sigma}_i)$ на множестве $\bar{\Sigma}_i$ приведенных стратегий $\bar{\sigma}_i$ и семейством стратегий поведения $\pi_i(\bar{\sum}_i)$ для ограничений множеством $T(\bar{\sigma}_i)$ первоначальной игры (когда $\bar{\sigma}_i$ меняется).

Мы говорим, что игрок (i) *применяет составную стратегию* $c_i = (\bar{s}_i, \pi_i(\bar{\Sigma}_i))$, если он выбирает приведенную стратегию $\bar{\sigma}_i$ согласно функции распределения $\bar{s}_i$ и затем применяет стратегию поведения $\pi_i(\bar{\sigma}_i)$ для игры, ограниченной множеством $T'(\bar{\sigma}_i)$.

Теорема. *Существуют соответствия* $s_i \to c_i$ *между смешанными стратегиями и составными стратегиями такие, что если* s_i *соответствует* c_i *для всякого* $i\,(\in P)$, *то*

$$F_k(s) = F_k(s_{N-P}, c_P) \qquad (k \in N).$$

Доказательство этой теоремы такое же, как доказательство теоремы 3 (§ 20), поскольку, как мы замечаем, ограничение игры множеством $T(\bar{\sigma}_i)$ приводит к полной памяти для игрока (i).

Замечание. Составные стратегии представляют нечто среднее между стратегиями поведения и смешанными стратегиями; подобно стратегиям поведения, которые удобно использовать для игр с полной памятью, составные стратегии можно использовать в любых играх. Действенность составных стратегий была, в частности, оценена в различных вариантах бриджа [41].

ГЛАВА IV

НОРМАЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

§ 22. Общее определение. Мы рассмотрим нормальную игру $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$: игрок (1) выбирает независимо точку x_i пространства X_i, и это приводит для игрока (k) к выигрышу $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта игра называется *выпуклой для игрока* (i), если:

1) множество X_i есть выпуклое пространство, т. е. выпуклое подмножество векторного пространства;

2) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть выпуклая функция по x_i: для любых положительных чисел p и p', сумма которых равна 1, и для любых элементов x_i и x'_i множества X_i имеет место

$$f_i(px_i+p'x'_i, y_{N-i}) \leqslant pf_i(x_i, y_{N-i})+p'f_i(x'_i, y_{N-i}) \quad (y \in X).$$

Понятие выпуклости можно обобщить; функцию $h(t)$ называем *квазивыпуклой,* если множество $\{t \mid h(t) \leqslant a\}$ — выпуклое для всякого a. Очевидно, всякая выпуклая функция является и квазивыпуклой, но обратное положение неверно; например, в пространстве R^1 всякая монотонная функция является квазивыпуклой.

Нормальная игра называется *квазивыпуклой для игрока* (i), если вместо условия (2) имеем:

2′) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квазивыпукла по x_i. Наконец, нормальная игра $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *вогнута для игрока* (i) — соответственно *квазивогнута для игрока* (i), если нормальная игра $(f_{N-i}, -f_i)$ выпукла для игрока (i) — соответственно квазивыпукла для игрока (i).

Независимо от вышеизложенного, нормальная игра называется *топологической сверху для игрока* (i), если

1) X_i — топологическое компактное пространство;

2) $f_i(x)$ — функция полунепрерывная сверху в топологическом пространстве X_i.

Нормальная игра $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ называется *топологической снизу для игрока* (i), если игра $(f_{N-i}, -f_i)$ — топологическая сверху для игрока (i); наконец, нормальная игра называется *топологической*, если каждое пространство X_i — топологическое и компактное и каждая функция $f_i(x)$ непрерывна на $X = \prod_{i \in N} X_i$. Разумеется, если говорится о выпуклой топологической игре, нужно подразумевать, что топология пространства X_i совпадает с топологией выпуклого пространства X_i.

Игра с конечным числом стратегий при переходе к смешанным стратегиям (§ 15) становится выпуклой топологической игрой, поскольку ожидаемый выигрыш игрока (i) линеен относительно всех переменных. Но существуют другие примеры выпуклых топологических игр, в которых нет линейности.

Пример. Рассмотрим в плоскости R^2 («море») две движущиеся точки m_1 и m_2, где m_1 представляет подводную лодку, обнаружившую неприятельское судно m_2. Пользуясь наступлением ночи, судно m_2 ускользает; естественно предположить, что множество точек, в которых m_2 может оказаться с наступлением утра, есть выпуклое компактное пространство X_2; подводная лодка также имеет возможность достигнуть в течение ночи любой точки выпуклого компактного пространства X_1.

Пусть x_1 и x_2 — точки пространств X_1 и X_2, которых два судна решили достигнуть с наступлением утра, и пусть $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ — расстояние от x_1 до x_2. Если цель судна m_1 — приблизиться к m_2, то его функция предпочтения будет

$$f_1(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2);$$

для m_2 примем

$$f_2(x_1, x_2) = +f(x_1, x_2).$$

Функция $f(x_1, x_2)$, очевидно, непрерывна в X_1. Кроме того, $f(x_1, x_2)$ выпукла по x_1, так как

$$|(p'x_1' + p''x_1'') - x_2| = |p'(x_1' - x_2) + p''(x_1'' - x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant p'|x_1' - x_2| + p''|x_1'' - x_2|.$$

Игра является топологической выпуклой для m_2 и топологической вогнутой для m_1. Здесь для m_1 есть, очевидно, наилучшая стратегия, состоящая в том, чтобы приблизиться как можно ближе к «центру» выпуклого множества X_2. Если $X_2 - X_1 \neq O$, беглец m_1 также имеет наилучшую стратегию — удаляться как можно больше от X_1. В общем случае здесь нет точки равновесия.

§ 23. Существование точек равновесия для квазивогнутых игр. В том случае, когда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — локально выпуклые векторные пространства, существование точки равновесия вытекает непосредственно из обобщения известной теоремы Какутани.

Теорема 1 (Тихонов — Какутани [22]). *Если K — выпуклое компактное подмножество локально выпуклого векторного пространства X и если Γ — полунепрерывное сверху отображение множества K в K такое, что Γx выпукло и непусто для всякого X в K, то существует точка x_0 в K такая, что $x_0 \in \Gamma x_0$.*

1. Если V — замкнутая окрестность нуля, многозначное отображение $B_1 x = x + V$ замкнуто. В самом деле, если $y_0 \notin B_1 x_0$, существует симметричная окрестность нуля W такая, что

$$(x_0 + V) \cap (y_0 + W + W) = O,$$

откуда

$$(x + V) \cap (y_0 + W) = O \qquad (x \in x_0 + W).$$

Если K — компактное множество, отображение $B_2 x \equiv K$ полунепрерывно сверху и согласно теореме 11 (§ 9) отображение $B_3(x) = (B_1 \cap B_2) x$ полунепрерывно сверху. Согласно теореме 2 (§ 9) отображение $B_4 x = (B_3 \cdot \Gamma) x = (\Gamma x + V) \cap K$ также полунепрерывно сверху, так же как и

$$B_5 x = (B_4 \cap 1) x = B_4 x \cap \{x\}.$$

Следовательно, множество $F_V = \{x \mid x \in (\Gamma x + V) \cap K\}$ замкнуто, так как его дополнение $B_5^+ O$ открыто.

2. Покажем, что если V — симметричная выпуклая окрестность нуля, множество F_V — непустое.

Существуют точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в K такие, что

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V);$$

выпуклая оболочка C этих n точек есть выпуклое компактное множество пространства R^n; отображение $B_4x = (\Gamma x + V) \cap C$, как мы видели, полунепрерывно сверху; B_4x — выпуклое множество, содержащееся в C для всякого $x (\in C)$; кроме того, B_4x непусто (для всякого x в C), так как из того, что $O \neq \Gamma x \subset K \subset C + V$, вытекает

$$(\Gamma x + V) \cap C \neq O.$$

Следовательно, можно применить теорему о неподвижной точке, доказанную Какутани [18] для пространств R^n: существует точка x в C, такая, что $x \in B_4x = (\Gamma x + V) \cap C$. Отсюда $F_V \neq O$.

3. Если V_1 и V_2 принадлежат фундаментальной базе $\mathfrak{B}$ симметричных выпуклых замкнутых окрестностей нуля, можно написать

$$F_{V_1} \cap F_{V_2} \supset F_{V_1 \cap V_2}.$$

Множества F_V — замкнутые и содержащиеся в компактном множестве — всегда имеют конечное непустое пересечение, и, следовательно,

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} F_V \neq O.$$

Пусть x_0 — точка этого пересечения; $x_0 \in \Gamma x_0$, так как в противном случае x_0 не принадлежала бы F_V при надлежащем выборе V, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (Фон Нейман—Нэш). *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — локально выпуклые пространства; если на этих пространствах нормальная игра является топологической и квазивогнутой для всякого (i), то существует точка равновесия $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\prod_{i \in N} X_i$.*

Рассмотрим многозначное непрерывное отображение

$$\Gamma_i x_{N-i} = \{x_{N-i}\} \times X_i$$

и отображение G_i, определенное равенством

$$G_i x_{N-i} = \{y \mid y \in \Gamma_i x_{N-i},\ f_i(y) = \max_{z \in \Gamma_i x_{N-i}} f_i(z)\}.$$

На основании теоремы 7 (§ 9) G_i полунепрерывно сверху, а на основании теоремы 2 (§ 9) это относится и к отображению

$$B_i x = \underset{X_i}{\text{проек}}\, G_i \underset{X_{N-i}}{\text{проек}}\, x.$$

На основании теоремы 6 (§ 9) отображение $B = \prod_{i \in N} B_i$ также полунепрерывно сверху. Кроме того, множество $G_i x_{N-i}$ — выпуклое непустое множество, что верно также и для $B_i x$ и Bx. Следовательно, можно применить теорему 1, и для всякого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет $x \in Bx$, или

$$x_i \in B_i x = \underset{X_i}{(\text{проек})}\, G_i x_{N-i} \qquad (i \in N).$$

Отсюда

$$f_i(x_i, x_{N-i}) = \max_y f_i(y_i, x_{N-i}) \qquad (i \in N).$$

Следовательно, x есть точка равновесия.

Следствие 1 [30]. *Если X_i — множество $\mathfrak{P}_{h_i}$ распределений (на h_i точках) $p_i = (p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^{h_i})$ и если выигрыши имеют форму*

$$f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} a_i(k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

то существует точка равновесия.

В самом деле, в этом случае X_i есть выпуклое компактное множество пространства R^{h_i}, и можно применить теорему 2.

Следствие 2 [42]. *Если X_i — множество распределений (на единичном отрезке), имеющих равностепенно непрерывные плотности*

$$p_i = p_i(t)\ (t \in [0, 1])$$

и если

$$f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 p_1(t_1) \cdot p_2(t_2) \ldots$$
$$\ldots p_n(t_n) \cdot a_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdot dt_2 \ldots dt_n,$$

то существует точка равновесия.

X_i есть выпуклое компактное множество банахова пространства, и можно применить теорему 2.

Следствие 3 [2]. *Если X_i — множество равномерно дискретных* *) *распределений* $p_i = (p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^k, \ldots)$ *и если*

$$f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{\infty} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} a_i(k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

то существует точка равновесия, когда выигрыши удовлетворяют условию

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{\infty} a_i^2(k_1, k_2, \ldots, k_n) < +\infty \qquad (i \in N).$$

Здесь X_i представляет собой выпуклое компактное множество гильбертова пространства.

Следствие 4 [32]. *Если* $X_1 = \mathfrak{P}_m$, $X_2 = \mathfrak{P}_n$ *и если*

$$f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2) = \frac{(x_1, Ax_2)}{(x_1, Bx_2)},$$

где A и B — два линейных отображения пространства R^n в R^m и B таково, что скалярное произведение $(x_1, Bx_2) > 0$ $(x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$, то существует точка равновесия.

В самом деле, в этом случае $f_1(x_1, x_2)$ квазивыпукла и квазивогнута относительно двух переменных.

Теорема 3. *В нормальной топологической игре множество S^ε точек ε-равновесия компактно.*

Поскольку произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X$ компактно, нужно доказать, что S^ε — замкнутое множество. Рассмотрим точку x^0 $(\notin S^\varepsilon)$. Существует положительное число ε', индекс i и элемент y_i в X_i такие, что

$$f_i(y_i, x^0_{N-i}) > f_i(x^0) + \varepsilon + \varepsilon'.$$

*) По-видимому, под термином «totalement discontinues» — «равномерно дискретные» автор подразумевает следующее: множество X дискретных распределений $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ называется множеством равномерно дискретных распределений, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \varepsilon$ для всех $p \in X$. (*Прим. ред.*)

Поскольку $f_i(x)$ непрерывна, существует окрестность $V(x_0)$ такая, что

$$|f_i(y_i, x^0_{N-i}) - f_i(y_i, x_{N-i})| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2},$$
$$|f_i(x^0) - f_i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} \qquad [x \in V(x_0),\ y \in X].$$

Следовательно, S^ε замкнуто, так как при $x \in V(x^0)$

$$f_i(y_i, x_{N-i}) + \frac{\varepsilon'}{2} \geqslant f_i(y_i, x^0_{N-i}) \geqslant f_i(x_0) + \varepsilon + \varepsilon' \geqslant$$
$$\geqslant f_i(x) + \varepsilon + \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Следствие. *В нормальной топологической игре множество точек равновесия компактно.*

В самом деле, имеем

$$S^0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^\varepsilon.$$

§ 24. Другие теоремы о существовании точки равновесия. Предыдущие теоремы не могут дать никакого указания на то, как действительно определить точку равновесия. Кроме того, может оказаться полезным иметь критерий, не основанный на предположении, что пространство локально выпукло или что $f_i(x)$ непрерывна относительно множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы изложим здесь другие теоремы существования с менее сильными топологическими условиями и более сильными условиями выпуклости, чем в предыдущих теоремах; они опираются на следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть X — выпуклое компактное множество в векторном топологическом пространстве, и пусть $\mathfrak{F}$ — семейство функций $f(x)$, выпуклых и полунепрерывных снизу на X; если для всякого $x_i\ (\in X)$ существует $f_i\ (\in \mathfrak{F})$ такая, что $f_i(x) > 0$, то существует функция $f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k f_k(x)$ (при $f_k \in \mathfrak{F}$, $p_k > 0$, $\sum_1^n p_k = 1$) такая, что*

$$\inf_{x \in X} f(x) > 0.$$

Любому $x_i (\in X)$ можно поставить в соответствие положительное число ε_i такое, что

$$f_i(x_i) > \varepsilon_i > 0.$$

Множества $\Omega_i = \{ x \mid f_i(x) > \varepsilon_i \}$ образуют открытое покрытие пространства X, и можно, следовательно, выделить из него конечное покрытие, скажем, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Рассмотрим отображение пространства X в R^n, определенное соотношением

$$x \longrightarrow \overline{x} = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Образ $\overline{X}$ множества X не пересекается с конусом K пространства R^n, выраженным уравнениями

$$\xi_i < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

То же самое относится к выпуклой оболочке множества $\overline{X}$, так как в противном случае существовали бы элементы x_1, $x_2, \ldots, x_m$ в X такие, что

$$\xi^0 = p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2 + \ldots + p_m\overline{x}_m \in K, \; p_k > 0, \; \sum_k p_k = 1.$$

Это неверно, так как для индекса k можно написать

$$[\xi^0]_k = p_1 f_k(x_1) + p_2 f_k(x_2) + \ldots + p_m f_k(x_m) \geqslant$$
$$\geqslant f_k(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m) > \varepsilon_k.$$

Поскольку K — выпуклое открытое непустое множество, выпуклая оболочка $\overline{X}$ — выпуклое множество, непересекающееся с K, и оба множества содержатся в R^n, их можно разделить замкнутой гиперплоскостью вида

$$\sum_1^n p_k\xi_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \; p_k > 0, \; \sum_k p_k = 1.$$

Отсюда получим

$$\sum_1^n p_k f_k(x) \geqslant \sum_1^n p_k\varepsilon_k > 0 \qquad (x \in X).$$

Следствие 1 [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — выпуклое семейство функций $f(x)$, выпуклых и полунепрерывных снизу на выпуклом компактном множестве X. Если любой $f (\in \mathfrak{F})$ можно поставить в соответствие $x_f (\in X)$ такое, что*

$f(x_j) \leqslant 0$, *то существует* $x_0 (\in X)$ *такое, что*

$$f(x_0) \leqslant 0 \qquad (f \in \mathfrak{F}).$$

В самом деле, если бы это было не так, то всякому x в $\mathfrak{F}$ можно было бы поставить в соответствие элемент f семейства $\mathfrak{F}$ такой, что $f(x) > 0$. На основании теоремы 1 тогда найдется функция f в $\mathfrak{F}$ такая, что

$$f(x) > 0 \qquad (x \in X).$$

Но это противоречит условию.

Следствие 2. *Если нормальная игра двух игроков с противоположными интересами вогнута для обоих игроков* (1) *и* (2) *и является топологической сверху для игрока* (2), *то наибольший выигрыш* V, *который может гарантировать игрок* 1, *равен наименьшему выигрышу* W, *который может гарантировать игрок* (2).

Если функция предпочтения равна

$$f(x, y) = f_1(x, y) = -f_2(x, y),$$

то

$$V = \sup_x \inf_y f(x, y),$$
$$W = \inf_y \sup_x f(x, y).$$

Поскольку $W \geqslant V$, проверим обратное неравенство; имеем

$$\inf_y f(x, y) \leqslant V \qquad (x \in X).$$

Возьмем положительное число ε и положим

$$F_x(y) = f(x, y) - V - \varepsilon.$$

Всякой функции вида

$$F(y) = \sum_{k=1}^{q} p_k F_{x_k}(y), \quad p_k > 0, \quad \sum p_k = 1$$

можно поставить в соответствие $y_0 (\in X)$ такое, что

$$F(y_0) = \sum_{k=1}^{q} p_k F_{x_k}(y_0) \leqslant F_{\sum p_k x_k} \qquad (y_0) \leqslant 0.$$

На основании следствия 1 существует y_0 такое, что

$$F_x(y_0) \leqslant 0 \qquad (x \in X),$$

откуда

$$f(x, y_0) \leqslant V + \varepsilon \qquad (x \in X),$$
$$\inf_y \sup_x f(x, y) \leqslant V + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, имеем $W \leqslant V$.

Следствие 3. *Если нормальная игра двух игроков с противоположными интересами вогнута и является топологической сверху для каждого из двух игроков, то существует точка равновесия.*

В самом деле, в этом случае следствие 2 можно записать как

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y).$$

Точка равновесия (x_0, y_0) определяется соотношениями

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x \min_y f(x, y),$$
$$\max_x f(x, y_0) = \min_y \max_x f(x, y).$$

Теорема 2. *Пусть X_i — выпуклое компактное множество $(i \leqslant n)$ и $\mathfrak{F}$ — выпуклое семейство n-наборов $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i(x_i)$ — функция, определенная на X_i, выпуклая и полунепрерывная снизу. Если для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\prod_{i=1}^{n} X_i$ существует n-набор f такой, что $f_i(x_i) > 0$ для всякого i, то существует n-набор f^0 такой, что*

$$\inf_{x_i} f_i^0(x_i) > 0 \qquad (i \leqslant n).$$

Рассмотрим выпуклое семейство $\mathfrak{F}_1$, образованное функциями g_1, для которых существует элемент f в $\mathfrak{F}$ такой, что

$$f_i(x_i) > 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$
$$f_1 = g_1.$$

На основании теоремы 1 существует g_1 в $\mathfrak{F}$ такое, что

$$\inf_{x_1} g_1(x_1) > 0.$$

Рассмотрим теперь выпуклое семейство $\mathfrak{F}_2$ функций g_2, для которых существует элемент f в $\mathfrak{F}$ такой, что

$$f_i(x_i) > 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, n),$$
$$\inf_{x_1} f_1(x_1) > 0, \quad f_2 = g_2.$$

В этом семействе, которое согласно вышеизложенному непусто, существует g_2 такое, что

$$\inf_{x_2} g_2(x_2) > 0.$$

Таким образом, мы получим постепенно семейство искомых f.

Следствие. *Если в игре, топологической сверху для всех игроков, $\Phi_i(y_i, x) = f_i(x) - f_i(y_i, x_{N-i})$ вогнуто по x, то множество S^ε точек ε-равновесия выпукло и непусто.*

§ 25. Основное приложение: как играть в нормальную игру. Рассмотрим нормальную игру с двумя игроками, в которой результат выбора индекса (i) игроком (1) и индекса (j) игроком (2) есть

$$f_1(i, j) = +a_j^i,$$
$$f_2(i, j) = -a_j^i.$$

Для определенности рассмотрим матрицу (a_j^i), определенную следующими числами:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=1$	0	-2	2
$j=2$	1	2	-2

Если игрок (1) может использовать лишь «чистую стратегию», то он в качестве хорошей стратегии выберет $i = 1$, так как $\min_j a_j^1 = 0$, тогда как

$$\min_j a_j^2 = \min_j a_j^3 = -2.$$

Однако, если он выберет эту стратегию «$i = 1$», иногда называемую также «максиминной» стратегией, он может гарантировать лишь выигрыш $v = 0$. Его оптимальная смешанная стратегия, а именно, $p_0 = \left(\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{1}{5}\right)$, обеспечивает ему бо́льшую величину математического ожидания выигрыша $v = \frac{2}{5}$, и на основании теоремы о минимаксе не может быть существенно лучшей стратегии. Таким образом, игрок (1) должен применить механизм, который выберет наудачу чистую стратегию $\left(i = 1\right.$ с вероятностью $p_1 = \frac{4}{5}$, $i = 3$ с вероятностью $\left.p_3 = \frac{1}{5}\right)$ и, таким образом, он может придти к тому, что выберет стратегию с индексом $i = 3$, которая совсем не является максиминной. В частности, отсюда видно, почему хорошие игроки в покер иногда «блефуют».

Заметим, что если математическое ожидание выигрыша $v = \frac{2}{5}$ бесспорно предпочтительнее гарантированного выигрыша $v = 0$, когда игра повторяется достаточно много раз, это менее очевидно, когда имеется лишь одна партия. Тем не менее, мы согласимся с этим, не желая возобновлять здесь старые споры об основах понятия «математическое ожидание».

Мы видим согласно вышеизложенному, что главной алгоритмической задачей теории игр является вычисление оптимальной смешанной стратегии. В посвященной этому вопросу литературе были предложены многочисленные алгоритмы, более или менее действенные, но мы ограничимся здесь краткими указаниями.

Рассмотрим матрицу A с m строками и n столбцами, где пересечение строки i и столбца j есть a_j^i. Положим $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A = a_N^M$. Если $I \subset M$, $J \subset N$, то матрица a_J^I получается, если вычеркнуть в a_N^M строки с индексами, не содержащимися в I, и столбцы с индексами, не содержащимися в J; для вектора x_N (рассматриваемого как матрица-строка) таким же образом определим x_J.

Обозначим через $\varepsilon_N = (1, 1, \ldots, 1)$ вектор, у которого n составляющих равны 1, через $0_N = (0, 0, \ldots, 0)$ — вектор, у которого n составляющих равны нулю, через $e_N^i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — вектор, у которого i-я составляющая равна 1, а остальные равны нулю. Наконец, если a_N^N — квадратная матрица, через $|a_N^N|$ обозначим ее определитель, через a^{*N}_{N} — транспонированную матрицу (с $a^{*j}_{i} = a^{i}_{j}$), через $\overline{a}^{N}_{N}$ — присоединенную матрицу (с $\overline{a}^{j}_{i} = (-1)^{i+j} \left| a^{N-\{i\}}_{N-\{j\}} \right|$).

Мы хотим определить точки равновесия (x^0, y^0) в нормальной игре двух игроков, где x выбирается из $X = \mathfrak{P}_m$, y из $Y = \mathfrak{P}_n$ и где платеж равен скалярному произведению x на преобразование $a^{M}_{N} y$ вектора y; иначе говоря,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a^{i}_{j} x_i y_j = (x_M, a^{M}_{N} y_N).$$

На основании предшествующих теорем точки равновесия (x^0, y^0) образуют множество $S \times T$ в $R^m \times R^n$, где S и T — выпуклые компактные непустые множества.

С другой стороны, известно, что если C — выпуклое компактное множество в локально выпуклом векторном пространстве (каким является R^m), то $C = \tilde{\ddot{C}}$, где $\ddot{C}$ обозначает множество крайних точек C, и где $\tilde{A}$ обозначает выпуклую оболочку множества A.

Чтобы найти множество S оптимальных стратегий для игрока (1), достаточно, таким образом, отыскать все крайние точки, которые определяются следующей теоремой.

Теорема Шепли — Сноу. *Если $x \in \ddot{S}, y \in \ddot{T}$, то можно выделить из a^{M}_{N} квадратную матрицу a^{I}_{J} такую, что*

$$x_i = \frac{(\varepsilon_J, \overline{a}^{J}_{I} e^{i}_{I})}{(\varepsilon_J, \overline{a}^{J}_{I} \varepsilon_I)}, \qquad y_i = \frac{(e^{j}_{J}, \overline{a}^{J}_{I} \varepsilon_I)}{(\varepsilon_J, \overline{a}^{J}_{I} \varepsilon_I)}. \tag{A}$$

Обратно, если для квадратной матрицы a^{I}_{J} формулы (А) *определяют оптимальные стратегии x и y, то $x \in \ddot{S}$, $y \in \ddot{T}$.*

Эта теорема легко доказывается в случае, когда $|a^{I}_{J}| \neq 0$ (ср. [38]); в противном случае к каждому коэффициенту a^{i}_{j} мы прибавим постоянное число b, что не изменит ни оптимальные стратегии, ни формулы (А).

Замечание 1. Можно также выразить формулы (А) в сжатых тензорных обозначениях. Отождествим вектор x_N с матрицей-строкой и обозначим через x^N транспонированную матрицу-столбец. Отождествим также число α с матрицей, состоящей из одной строки и одного столбца. Тогда в качестве произведения матриц можно рассматривать скалярное произведение $(x_N, y_N) = x_N \cdot y^N$. Далее, преобразование x_N матрицей a_N^N будет $y^M = a_N^M x^N$.

Из формул (А) следует:

$$\frac{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot e^{iI}}{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^J} = x_1 e^{iI} \qquad (i \in I),$$

$$\frac{e_J^j \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^I}{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^J} = e_J^i y^J \qquad (j \in J).$$

Таким образом, можно заменить систему (А) системой

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J}{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^I}, \quad x_{M-I} = 0_{M-I}, \\ y^J &= \frac{\bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^I}{\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^I}, \quad y^{N-J} = 0^{N-J}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}')$$

Цена игры равна

$$V = (x,\ a_N^M y) = x_I \cdot a_J^I \cdot y^I = \frac{(\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J) \cdot a_J^I \cdot (\bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^J)}{(\varepsilon_J \cdot \bar{a}_I^J \cdot \varepsilon^I)^2}.$$

Поскольку $\bar{a}_I^J \cdot a_J^I = \delta_J^I |a_J^I|$, окончательно имеем

$$V = \frac{|a_J^I|}{(\varepsilon_J,\ \bar{a}_I^J \varepsilon_I)}. \qquad (\text{Б})$$

Замечание 2. Практически для отыскания $\ddot{S}$ испытывают квадратную матрицу a_J^I, вычисляя V по формуле (Б). Векторы x и y, определенные формулами (А), принадлежат $\ddot{S}$ и $\ddot{T}$ тогда и только тогда, когда

$$x_i \geqslant 0 \quad (i \in I),\ y_j \geqslant 0 \qquad (j \in J),$$

$$(e^i,\ a_J^i y_J) \leqslant V \qquad (i \notin I),$$

$$(x_I,\ a_J^I e^j) \geqslant V \qquad (j \notin J).$$

В самом деле, другие соотношения будут всегда выполняться; например, всегда имеет место

$$\sum_{i \in M} x_i = \sum_{i \in I} x_i = \frac{(\varepsilon_J,\ \bar{a}_I^J \varepsilon_I)}{(\varepsilon_J,\ \bar{a}_I^J \varepsilon_I)} = 1.$$

ГЛАВА V
КОАЛИЦИИ

§ 26. Общие определения. Мы рассмотрим здесь игру n лиц в нормальной форме: каждый игрок (i) выбирает чистую стратегию в пространстве X_i и в случае выбора точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $X = \prod_{i \in N} X_i$ игрок (i) получает выигрыш $f_i(x)$. Подмножество P множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *коалицией,* если игроки P имеют возможность обсуждать между собой ситуацию, чтобы выбрать совместно стратегию, которую они будут применять.

Иначе говоря, если P — коалиция, то она предписывает своим членам выбор точки x_P в $X_P = \prod_{i \in P} X_i$, и если $i \in P$, то наибольший гарантированный выигрыш игрока (i) будет

$$v_i(P) = \inf_y f_i(x_P, y_{N-P}).$$

Если числа $v_i(P)$ известны до образования коалиции, то мы говорим, что они образуют *систему платежей*; тогда игра имеет следующий вид.

Рассмотрим семейство $\mathfrak{H}_i$ подмножеств множества N, могущих составить коалицию для игрока (i); если $H \in \mathfrak{H}_i$, это значит, что $i \in H$ и что коалиция H разрешена правилами игры. Предполагается, что всегда $\{i\} \in \mathfrak{H}_i$.

Игрок (i) независимо от других игроков выбирает множество H_i в $\mathfrak{H}_i$; обозначим буквой K такое множество, что $K = H_i$ для всякого i в K, и буквой L — множество, состоящее из одного элемента i_0, не принадлежащего ни одному множеству K. Очевидно, семейство, образованное множествами K и множествами L, есть разбиение множества N; множество этого разбиения, содержащее i, называется *коалицией игрока* (i) и обозначается D_i.

Цель игрока (i) — сделать число $v_i(D_i)$ возможно большим. Таким образом, получается нормальная игра n лиц, в которой выигрыш игрока (i) равен $g_i(H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n) = v_i(D_i)$.

При такой формулировке возможность кооперироваться не ставит новых задач перед игроками, за исключением выбора системы платежей $\{v_i(P) \mid i \in P, P \in N\}$; он определяется в различных случаях различными аксиомами.

1. Аксиома общей выгоды.

$$\sum_{i \in P} v_i(P) = \sup_x \inf_y \left[\sum_{i \in P} f_i(x_P, y_{N-P}) \right] = v(P).$$

2. Аксиома устойчивости. *Для любого множества $Q(\subset P)$ существует $i \in Q$ такое, что*

$$v_i(P) \geqslant v_i(Q).$$

Первая аксиома означает, что члены коалиции P действуют с целью наибольшей общей выгоды сообщества P: они стремятся прежде всего увеличить насколько возможно общий выигрыш

$$f_P(x) = \sum_{i \in P} f_i(x).$$

Вторая аксиома означает, что внутри коалиции P никакое подмножество Q не имеет желания отделиться от остальной коалиции, что неизбежно произошло бы, если бы было

$$v_i(P) < v_i(Q) \qquad (i \in Q).$$

Можно всегда удовлетворить первой аксиоме (с точностью до ε, если пространство X бесконечно); напротив, вторая аксиома вполне может оказаться неосуществимой. Тогда можно принять различные варианты аксиомы устойчивости.

3. Аксиома индивидуальной устойчивости.

$$v_i(P) \geqslant v_i(\{i\}) = v(i) \qquad (i \in P).$$

4. Аксиома общей устойчивости. *Для любого множества* $Q(\subset P)$

$$\sum_{i \in Q} v_i(P) \geqslant \sum_{i \in Q} v_i(Q).$$

5. Аксиома эффективности. *Если существуют множества K и $P(\supset K)$ такие, что*

$$\sum_{i \in K} v_i(K) \geqslant \sum_{i \in Q} v_i(Q) \qquad (K \subset Q \subset P),$$

то

$$v_i(P)=0 \qquad (i \in P-K).$$

Третья аксиома, очевидно, есть следствие второй аксиомы (когда мы ограничиваемся множествами Q из одного элемента). Далее, из аксиомы общей устойчивости вытекает аксиома устойчивости. Понятие эффективности есть вариант понятия устойчивости для тех игр, в которых общий выигрыш $f_P(x)$ можно разделить всевозможными способами между игроками коалиции P (*трансферабельность*).

Когда какая-нибудь аксиома оказывается неосуществимой, можно все же попытаться найти иной подход к задаче. Поскольку понятие индивидуального предпочтения недостаточно, мы введем другие, более сложные понятия.

Отношения предпочтения в $X=\prod\limits_{i \in N} X_i$.

Отношение предпочтения игрока (i) в X предполагается известным; это отношение квазиупорядоченности $\overset{i}{\geqslant}$

1) рефлексивное: $x \overset{i}{\geqslant} x$,

2) транзитивное: если $x \overset{i}{\geqslant} y$, $y \overset{i}{\geqslant} z$, то $x \overset{i}{\geqslant} z$;

3) полное: для любого x и любого y имеет место либо $x \overset{i}{\geqslant} y$, либо $y \overset{i}{\geqslant} x$.

Отношения предпочтения в $X_P=\prod\limits_{i \in P} X_i$. Полагаем $x_P \overset{i}{\geqslant} y_P$, если любой точке x_{N-P} в X_{N-P} можно поставить в соответствие точку y_{N-P} в X_{N-P} такую, что

$$(x_P,\ x_{N-P}) \overset{i}{\geqslant} (y_P,\ y_{N-P}).$$

Другими словами, игрок (i), если он не знает выборов игроков множества $N-P$, должен предпочесть x_P, а не y_P. Мы видим, что это также отношение квазиупорядоченности: рефлексивное, транзитивное и полное.

Отношение $\overset{P}{\geqslant}$ и $\underset{P}{\geqslant}$. Если $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ..., $\mathfrak{R}_n$ — отношения в множестве X и если $P \subset N=\{1, 2, ..., n\}$, то их *объединение* $\mathfrak{R}_P$ или $[\bigcup\limits_{i \in P} \mathfrak{R}_i]$ определяется как отношение следующим образом: $x\mathfrak{R}_P y$ тогда и только тогда, когда $x\mathfrak{R}_i y$ по меньшей мере для одного элемента i в P.

Аналогично определяется *пересечение* $\mathfrak{R}^P$ или $[\bigcap_{i\in P} \mathfrak{R}_i]$: $x\mathfrak{R}^P y$ тогда и только тогда, когда $x\mathfrak{R}_i y$ для любого i в P. Таким образом, $x \underset{P}{\geqslant} y$ означает, что по меньшей мере один игрок множества P предпочитает x, а не y, а $x \overset{P}{\geqslant} y$ означает, что всякий игрок множества P предпочитает x, а не y. Отношение $\overset{P}{\geqslant}$ есть отношение рефлексивное и транзитивное. Отношение $\underset{P}{\geqslant}$ обладает свойством полноты: для любых x и y имеет место $x \underset{P}{\geqslant} y$ или $y \underset{P}{\geqslant} x$.

Отношение $\overset{P}{\equiv}$ есть эквивалентность, но отношение $\underset{P}{\equiv}$ не является эквивалентностью.

Дополнительные отношения. Если $\mathfrak{R}$ — отношение в X, то *дополнительное* отношение $\overline{\mathfrak{R}}$ определяется условием: $x\overline{\mathfrak{R}}y$ тогда и только тогда, когда $x\mathfrak{R}y$ неверно. Непосредственно проверяем, что отношения, дополнительные к $\overset{i}{\geqslant}$, $\overset{P}{\geqslant}$, $\underset{P}{\geqslant}$, суть соответственно $\overset{i}{<}$, $\underset{P}{<}$, $\overset{P}{<}$.

Отношение предпочтения сообщества P. Если отношения определены функциями предпочтения $f_i(x)$, отношение $\overset{P}{\succeq}$ определяется следующим образом: $x \overset{P}{\succeq} y$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i\in P} f_i(x) \geqslant \sum_{i\in P} f_i(y).$$

Непосредственно проверяем, что $\overset{P}{\succeq}$ есть отношение квазиупорядоченности, и отсюда выводится строгое отношение $\overset{P}{\succ}$ и отношение эквивалентности $\overset{P}{\sim}$; имеем

1. $x\,[\overset{P}{\geqslant} \cap \underset{P}{>}]\,y \Longrightarrow x \overset{P}{\succ} y \Longrightarrow x \underset{P}{>} y;$

2. $x \overset{P}{\geqslant} y \Longrightarrow x \overset{P}{\succeq} y \Longrightarrow x\,[\underset{P}{>} \cup \overset{P}{\equiv}]\,y;$

3. $x \overset{P}{\equiv} y \Longrightarrow x \overset{P}{\sim} y \Longrightarrow x\,[(\underset{P}{>} \cap \underset{P}{<}) \cup \overset{P}{\equiv}]\,y.$

P можно рассматривать как одного игрока, имеющего отношение предпочтения $\overset{P}{\succsim}$; тогда P называется *сообществом,* и $\overset{P}{\succsim}$ называется *отношением предпочтения* этого *сообщества.*

Если игра не является игрой с платежами, можно тем не менее доказать существование отношения квазиупорядоченности, удовлетворяющего пунктам 1, 2, 3. Поскольку это отношение не единственное, чаще всего за отношение $\overset{P}{\succsim}$ принимают отношение $[\overset{P}{\geqslant} \cap \underset{P}{>}]$, которое является транзитивным, но не рефлексивным.

Замечание. Если игроки не имеют возможности вступить в коалицию, можно рассматривать другие модели переговоров, вообще менее эффективные, чем коалиция, имеющие, впрочем, одинаковые задачи; упомянем следующие:

А. Двустороннее соглашение. Двустороннее соглашение есть «предварительная игра», которая проводится следующим образом:

Первый этап. Игрок (i) может предложить игроку (k) следующую сделку: если игрок (k) обязуется выбрать свою стратегию в подмножестве X_k^i множества X_k, игрок (i) обязуется выбрать свою точку x_i в подмножестве X_i^k множества X_i.

Второй этап. Игрок (k) принимает или отвергает сделку; обсуждаются другие предложения.

Третий этап. Игроки играют одновременно; если игрок (i) принял множества $X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^n$, то он должен выбрать точку x_i в множестве $\bigcap_{k \in N} X_i^k$, которое предполагается непустым.

Такая же сделка может быть, очевидно, совершена между несколькими игроками (многостороннее соглашение).

Б. Угроза. Игра с угрозой есть неодновременная игра, которая проводится следующим образом:

Первый этап. Каждый игрок (i) выбирает точку z_i множества X_i, называемую *угрозой.*

Второй этап. Все игроки объявляют свои угрозы.

Третий этап. Независимо от других игроков, игрок (i) устанавливает значение u_i выигрыша, который он считает возможным получить.

Четвертый этап. Если существует в X точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что

$$f_i(x) \geqslant u_i \qquad (i \in N),$$

то требования u_i совместимы, и каждый игрок (i) обязан применить x_i; он получит только u_i. Если требования несовместимы, то каждый игрок (i) обязан применять свою угрозу z_i.

Другими словами, если $\delta(u) = \delta(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ есть функция, равная 1, если требования совместимы, и 0 в противном случае, то игрок (i) получит

$$F_i(z, u) = u_i \delta(u) + f_i(z)[1 - \delta(u)].$$

Для игры двух лиц задачи определения «справедливых» требований решены Нэшем [29].

В. Соглашение с трансферабельностью. Мы говорим, что имеется *трансферабельность*, когда игрок имеет право уступить часть своего выигрыша другому игроку в возмещение за оказанные услуги. Если P — сообщество игроков с трансферабельностью, то общий выигрыш $f_P(x) = \sum_{i \in P} f_i(x)$ может быть распределен всевозможными способами. Трансферабельность не только не усложняет задачу, но, как мы увидим дальше, значительно ее упрощает.

§ 27. Различные экстремальные точки пространства X. Понятие точки равновесия, изученное в предыдущих главах, может привести к многочисленным обобщениям, если предположить, что игроки могут заключать взаимные соглашения; поэтому необходимо дать классификацию этих понятий.

Точка x называется *улучшаемой для множества игроков* P, если существует точка y_P множества $X_P = \prod_{i \in P} X_i$ такая, что

$$x \, [\underset{P}{<} \cap \overset{P}{\leqslant}] \, (y_P, x_{N-P}).$$

В противном случае точка называется *неулучшаемой для* P, и мы имеем

$$x\,[\overset{P}{\geqslant} \cup \underset{P}{>}]\,(y_P,\ x_{N-P}) \qquad (y \in X).$$

Игра называется *паретовой на множестве* A *пространства* X, если для всякой точки x в A не найдется другой точки, принадлежащей A и лучшей, чем x, для множества N. Игра называется *паретовой,* если она паретова на X. Это понятие, принадлежащее Парето, хорошо известно экономистам; читатель может сам перевести его на интуитивный язык экономики. С чисто математической точки зрения, которая нас интересует, мы замечаем, что паретовы игры представляют обобщение игр с соперничеством, в которых

$$\sum_{i \in N} f_i(x) = 0$$

для всякого x («игр с нулевой суммой»).

Теорема 1. *Всякая точка простого равновесия в игре с сообществами* P_1, P_2, ..., P_k *не улучшаема для* P_1, P_2, ..., P_k.

Это вытекает из § 26.

Точка x называется *вполне улучшаемой для множества игроков* P, если существует точка y_P такая, что

$$x \overset{P}{<} (y_P,\ x_{N-P}).$$

В противном случае x называется *P-насыщенной,* и мы имеем

$$x \underset{P}{\geqslant} (y_P,\ x_{N-P}) \qquad (y \in X).$$

Точка x называется *точкой равновесия для множества игроков* P, если

$$x \overset{P}{\geqslant} (y_P,\ x_{N-P}) \qquad (y \in X).$$

Точка простого равновесия есть точка равновесия для всякого множества $\{i\}$; *точка сильного равновесия* есть точка равновесия для всякого множества $N - \{i\}$; точка равновесия для множества N называется *оптимальной точкой.*

Если $\mathfrak{P}=(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ — разбиение множества N, то x называется *точкой равновесия типа* $\mathfrak{P}$, если она является точкой равновесия для каждого из множеств $P_1, \ldots, P_k$.

В общем случае x есть *точка равновесия для P относительно множества игроков K*, или *точка равновесия для P/K*, если

$$x \overset{P}{\geqslant} (y_K, x_{N-K}) \qquad (y \in X).$$

Теорема 2. *Если $\mathfrak{P}'$ — подразбиение разбиения $\mathfrak{P}$, то точка равновесия типа $\mathfrak{P}$ есть также точка равновесия типа $\mathfrak{P}'$.* $\mathfrak{P}'=(P'_1, P'_2, \ldots, P'_j)$ называется *подразбиением* разбиения $\mathfrak{P}=(P_1, P_2, \ldots, P_k)$, если

1) $\mathfrak{P}'$ есть разбиение множества N;

2) для $P'_\alpha \cap P_\beta \neq O$ имеет место $P'_\alpha \subset P_\beta$.

Предложение следует из того, что при $P' \subset P$ точка равновесия для P есть также точка равновесия для P'.

Следствие. *Всякое равновесие типа $\mathfrak{P}$ есть простое равновесие.*

Это непосредственно вытекает из предложения 2.

Теорема 3. *Всякая точка равновесия типа $\mathfrak{P}= =(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ есть точка простого равновесия в игре для сообществ $P_1, P_2, \ldots, P_k$.*

Это непосредственно вытекает из § 26.

Теорема 4. *В игре, паретовой на множестве $A= =\prod A_i$ пространства X_N, все точки сильного равновесия множества A эквивалентны в смысле $\overset{N}{\equiv}$ и хуже в смысле $\overset{N}{\leqslant}$, чем другие точки равновесия множества A.*

Действительно, если x в A есть точка сильного равновесия, а y — другая точка равновесия, то

$$x \overset{N-1}{\geqslant} (x_1, y_{N-1}).$$

Поскольку x — неулучшаемая точка для N, имеем также

$$x \overset{1}{\leqslant} (x_1, y_{N-1}).$$

Поскольку y — точка равновесия, заключаем отсюда, что

$$x \overset{1}{\leqslant} y.$$

Поскольку игрок (1) выбран произвольно,

$$x \overset{N}{\leqslant} y.$$

Кроме того, если x и x' — две точки сильного равновесия, они являются также точками простого равновесия и можно написать

$$x \overset{N}{\leqslant} x', \qquad x' \overset{N}{\leqslant} x,$$

или

$$x \overset{N}{\equiv} x'.$$

Следствие (Фаркарсон). *В паретовой игре двух игроков все точки равновесия эквивалентны в смысле* $\overset{N}{\equiv}$.

Действительно, в игре с двумя игроками всякая точка равновесия есть точка сильного равновесия.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ — *разбиение множества* N *и* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ — *подмножества* N; *если в игре со смешанными стратегиями можно поставить в соответствие всякому* x *и всякому* y *точку равновесия вида* (y_{Q_j}, A_{N-Q_j}), *то существует точка равновесия типа* $(P_1/Q_1, P_2/Q_2, \ldots, P_k/Q_k)$.

Доказательство такое же, как доказательство теоремы фон Неймана — Нэша (§ 23).

Пример. *Конкуренция на экономическом рынке.* Три фабриканта (1), (2), (3), конкурирующие на рынке, могут продавать либо по высокой цене (+), либо по низкой цене (—); прибыль каждого из них определяется в единицах прибыли следующей таблицей:

	Цены			Выигрыши		
a	+	+	+	3	3	3
b	+	+	—	0	0	12
c	+	—	+	0	12	0
d	+	—	—	1	5	5
e	—	+	+	12	0	0
f	—	+	—	5	1	5
g	—	—	+	5	5	1
h	—	—	—	1	1	1

Точки простого равновесия: d, f, g, h.
Точки равновесия для $P=\{1, 2\}$: нет.
Неулучшаемые точки для $P=\{1, 2\}: c$, d, e, f, g.
Насыщенные точки для $P=\{1, 2\}: c$, d, e, f, g.
Насыщенные точки для $P=\{1, 2, 3\}: a$, b, c, d, e, f, g.
Точки равновесия для сообщества $P=\{1, 2\}: c$, d, e, f.
Точки равновесия для сообщества $P=\{1, 2, 3\}: b$, c, e.
Платежи: $v(\{i\})=1$; $v(\{1, 2\})=6$; $v(\{1, 2, 3\})=12$.

Игрок (1) при отсутствии переговоров и информации выбирает низкую цену, которая гарантирует ему единицу прибыли; при трехсторонних соглашениях или при игре с угрозами он получит a; при двустороннем соглашении между игроками (1) и (2) он получит g или h.

Если допускается трансферабельность, то можно получить

$$v_1(1)=\frac{1}{1}, \quad v_1(\{1, 2\})=\frac{6}{2}=3, \quad v_1(\{1, 2, 3\})=\frac{12}{3}=4.$$

Тогда каждому игроку выгодно составить коалицию $P=\{1, 2, 3\}$, что приведет к прибылям b, c или e.

§ 28. Характеристические функции $v(P)$. Для того чтобы измерить полезность коалиции, нет необходимости знать все данные, определяющие игру; в частности, можно ограничиться чрезвычайно упрощенной характеристикой игры, а именно ее характеристической функцией.

Характеристической функцией игры называется функция $v(P)$, определенная на подмножествах P множества N и равная наибольшему выигрышу, который может гарантировать коалиция P. Имеем

$$v(P)=\sup_x \inf_y f_P(x_P, y_{N-P}).$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция $v(P)$, определенная на подмножествах P множества N, была характеристической функцией игры, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. $v(O)=0$;
2. $v(P_1 \cup P_2) \geqslant v(P_1)+v(P_2)$, если $P_1 \cap P_2 = O$.

Условие необходимо. В самом деле, положив $f_O(x)=0$, имеем пункт (1). С другой стороны, если P_1 и P_2

не пересекаются, зададим положительное число ε; тогда существуют x_{P_1} и x_{P_2} такие, что

$$f_{P_1}(x_{P_1}, y_{N-P_1}) \geqslant v(P_1) - \varepsilon \quad (y \in X),$$
$$f_{P_2}(x_{P_2}, y_{N-P_2}) \geqslant v(P_2) - \varepsilon \quad (y \in X).$$

Следовательно,

$$f_{P_1 \cup P_2}(x_{P_1}, x_{P_2}, y_{N-P_1-P_2}) \geqslant v(P_1) + v(P_2) - 2\varepsilon \quad (y \in X),$$

откуда

$$v(P_1 \cup P_2) = \sup_x \inf_y f_{P_1 \cup P_2}(x_{P_1 \cup P_2}, y_{N-P_1-P_2}) \geqslant$$
$$\geqslant v(P_1) + v(P_2) - 2\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, пункт 2 доказан.

Условие достаточно. Рассмотрим игру, в которой игрок (i) выбирает подмножество H_i множества N такое, что $H_i \ni i$. Отметим множества K такие, что $H_i = K (i \in K)$, затем множества L такие, что $L = \{i_0\}$, $H_{i_0} \neq K$ для всякого K.

Не может быть ни $K \cap K' \neq O$, если $K \neq K'$, ни $K \cap L \neq O$, ни $L \cap L' \neq O$, если $L \neq L'$; отмеченные множества не пересекаются.

С другой стороны, если i не принадлежит ни одному множеству L, множество H_i есть множество K_0 такое, что $i \in K_0$. Следовательно, отмеченные множества образуют разбиение множества N.

Обозначим через D_i отмеченное множество, содержащее i, через $|D_i|$ — число элементов D_i и положим

$$f_i(H_1, H_2, \ldots, H_n) = \frac{1}{|D_i|} v(D_i).$$

Если игроки (i_1), (i_2), ..., (i_k) образуют коалицию $P = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и если они выбирают $H_{i_1} = H_{i_2} = \ldots$ $\ldots = H_{i_k} = P$, то коалиция P может гарантировать

$$\sum_{i \in P} f_i(H_1, H_2, \ldots, H_n) = v(P).$$

На основании пункта 2 они не могут гарантировать больше этого; следовательно, $v(P)$ есть характеристическая функция определенной таким образом игры.

§ 29. Характеристическая мера $m(P)$. В нижеследующем тексте мы будем предполагать, что

$$v(N)-\sum_{i\in N} v(i)>0.$$

В самом деле, в противном случае никакая коалиция не будет представлять интереса для игроков, и теория будет тривиальной. При этом *характеристической мерой игры* мы назовем функцию

$$m(P)=\frac{v(P)-\sum\limits_{i\in P} v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N} v(i)}.$$

Мы сразу увидим интуитивный смысл этой функции, если заметим, что величина $m(P)$ выражает выгодность этой коалиции для игроков множества P; если $m(P)=0$, игроки множества P не заинтересованы в образовании коалиции, а если $m(P)=1$, игроки множества P не заинтересованы в расширении своей коалиции.

Теорема.

1. $m(O)=0$;
2. $m(P_1\cup P_2)\geqslant m(P_1)+m(P_2)$, если $P_1\cap P_2=O$;
3. $m(i)=0$;
4. $m(N)=1$.

Это вытекает непосредственно из предыдущей теоремы.

Следствие 1. $m(P)\geqslant 0$.

Другими словами, $m(P)$ есть супер-аддитивная мера.

Следствие 2. *$m(P)$ есть характеристическая функция, и всякая характеристическая функция, удовлетворяющая равенствам 3 и 4, совпадает со своей мерой.*

Действительно, если характеристическая функция $v(P)$ удовлетворяет равенствам 3 и 4, ее мера равна

$$m(P)=\frac{v(P)-\sum\limits_{i\in P} v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N} v(i)}=v(P).$$

Игра с характеристической функцией $m(P)$ называется также *приведенной формой игры с характеристической функцией* $v(P)$ или просто *приведенной формой игры* $v(P)$.

Следствие 3. *Множество характеристических мер есть выпуклое множество M. Если $n \leqslant 4$, экстремальные точки множества M суть характеристические функции, принимающие лишь значение 0 или 1.*

В самом деле, если $m(P)$, $m'(P) \in M$; $p, p' \geqslant 0$; $p + p' = 1$, то $w(P) = pm(P) + p'm'(P)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, 4. Итак, на основании следствия 2, это есть характеристическая мера.

С другой стороны, если $m(P)$ равна 0 или 1, то это есть экстремальная точка множества M. При $n \leqslant 4$ справедливо также обратное предложение (см. [27]).

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ пространства R^n называется *предпосылкой игры* $v(P)$, если

1) $\alpha_i \geqslant v(i) \quad (i \in N)$;
2) $\sum_{i \in N} \alpha_i \leqslant v(N)$.

Таким образом, предпосылка есть способ представления возможных выигрышей игроков после окончания партии; естественно принять пункт 1, так как игрок (i) не примет никакого соглашения, если он не будет уверен в том, что получит столько же, как и играя изолированно; пункт 2 вытекает из определения функции $v(N)$. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *сильной предпосылкой*, если

1) $\alpha_i \geqslant v(i)$;
2) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$.

Игра называется *кооперативной*, если игроки имеют возможность обсуждать между собой ситуацию и обязаны на первое место ставить выгоду сообщества N. Другими словами, в кооперативной игре с трансферабельностью возможные выигрыши игроков суть сильные предпосылки (в частности, это имеет место, если $\sum_{i \in N} f_i(x) = 0$ для любого x).

В кооперативной игре без трансферабельности сильные предпосылки суть векторы вида $[v_1(N), v_2(N), \ldots, v_n(N)]$, удовлетворяющие аксиоме общей выгоды и аксиоме индивидуальной устойчивости (§ 26).

Приведенной форме $m(P)$ игры $v(P)$ соответствует *приведенная предпосылка*, представляющая собой вектор

$a_i = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный соотношением

$$a_i = \frac{\alpha_i - v(i)}{v(N) - \sum\limits_{k \in N} v(k)}.$$

Имеем:

1. $a_i \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_1^n a_i \leqslant 1$.

Если a — приведенная сильная предпосылка, то

1. $a_i \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_1^n a_i = 1$.

§ 30. Эквивалентные игры. Первая задача, с которой встретились в теории коалиций, состояла в следующем: сравнить две игры $v(P)$ и $\bar{v}(P)$ такие, что вся коалиция имеет сравнимые выгоды в той и другой игре; были предложены три отношения эквивалентности.

1) *Сильная эквивалентность*: полагаем $v(P) \sim \bar{v}(P)$, если $m(P) = \bar{m}(P)$ для любого множества P.

2) *Эквивалентность*: полагаем $v(P) \simeq \bar{v}(P)$, если существует взаимно однозначное соответствие $\simeq$ между предпосылками этих двух игр, так что если $\alpha \simeq \bar{\alpha}$, $\beta \simeq \bar{\beta}$, то

$$\frac{v(P) - \sum\limits_{i \in P} \alpha_i}{v(P) - \sum\limits_{i \in P} \beta_i} = \frac{\bar{v}(P) - \sum\limits_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{v}(P) - \sum\limits_{i \in P} \bar{\beta}_i}.$$

3) *Слабая эквивалентность*: полагаем $v(P) \cong \bar{v}(P)$, если существует взаимно однозначное соответствие между предпосылками этих двух игр, так что если $\alpha \cong \bar{\alpha}$, $\beta \cong \bar{\beta}$, то

1) $\alpha_i > \beta_i$ эквивалентно $\bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i$;

2) $\left.\begin{array}{c} \alpha_i > \beta_i \\ \text{(для всякого } i \text{ в } P) \\ \sum\limits_{i \in P} \alpha_i \leqslant v(P) \end{array}\right\}$ эквивалентно $\left\{\begin{array}{c} \bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i \\ \text{(для всякого } i \text{ в } P) \\ \sum\limits_{i \in P} \bar{\alpha}_i \leqslant \bar{v}(P). \end{array}\right.$

Эти три отношения рефлексивны, симметричны и транзитивны и являются, следовательно, отношениями эквивалентности.

Теорема 1. *Для того чтобы было $v(P) \sim \bar{v}(P)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали константы C, c_1, c_2, ..., c_n такие, что*

1) $C > 0$;

2) $v(P) = C\bar{v}(P) + \sum\limits_{i \in P} c_i \quad (P \subset N)$.

Условие необходимо. Если $m(P) = \bar{m}(P)$, то

$$\frac{v(P) - \sum\limits_{i \in P} v(i)}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)} = \frac{\bar{v}(P) - \sum\limits_{i \in P} \bar{v}(i)}{\bar{v}(N) - \sum\limits_{i \in N} \bar{v}(i)}.$$

Положив

$$C = \frac{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)}{\bar{v}(N) - \sum\limits_{i \in N} \bar{v}(i)},$$

$$c_i = v(i) - C\bar{v}(i),$$

мы получим соотношения 1 и 2.

Условие достаточно. Если имеют место соотношения 1 и 2, то

$$m(P) = \frac{v(P) - \sum\limits_{i \in P} v(i)}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)} =$$

$$= \frac{C\bar{v}(P) + \sum\limits_{i \in P} c_i - C\sum\limits_{i \in P} \bar{v}(i) - \sum\limits_{i \in P} c_i}{C\bar{v}(N) + \sum\limits_{i \in N} c_i - C\sum\limits_{i \in N} \bar{v}(i) - \sum\limits_{i \in N} c_i} = \bar{m}(P).$$

Теорема 2. *Сильная эквивалентность влечет за собою эквивалентность, а эквивалентность влечет за собою слабую эквивалентность.*

В самом деле, если $v(P) \sim \bar{v}(P)$, то

$$v(P) = C\bar{v}(P) + \sum\limits_{i \in P} c_i.$$

Рассмотрим взаимно однозначное соответствие, определенное равенством

$$\alpha_i = C\bar{\alpha}_i + c_i.$$

Имеем

$$\frac{v(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i}{v(P) - \sum_{i \in P} \beta_i} = \frac{C\bar{v}(P) + \sum_{i \in P} c_i - C\sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i - \sum_{i \in P} c_i}{C\bar{v}(P) + \sum_{i \in P} c_i - C\sum_{i \in P} \bar{\beta}_i - \sum_{i \in P} c_i} = \frac{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i}.$$

Следовательно, $v(P) \approx \bar{v}(P)$.

Рассмотрим теперь две предпосылки α и β и их образы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ при отношении $\approx$. Покажем, что это отношение определяет также слабую эквивалентность.

1. Если $\alpha_i > \beta_i$, то

$$0 \leqslant \frac{v(i) - \alpha_i}{v(i) - \beta_i} = \frac{\bar{v}(i) - \bar{\alpha}_i}{\bar{v}(i) - \bar{\beta}_i} < 1.$$

Поскольку $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — предпосылки для $\bar{v}$, имеем также $\bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i$.

2. Если $\alpha_i > \beta_i$ $(i \in P)$, $\sum_{i \in P} \alpha_i \leqslant v(P)$, то

$$v(P) - \sum \beta_i > v(P) - \sum \alpha_i \geqslant 0.$$

Для числа k $(k \geqslant 0,\ p < 1)$ можно написать

$$\frac{v(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i}{v(P) - \sum_{i \in P} \beta_i} = \frac{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i} = k.$$

Отсюда

$$\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i = k\,[\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i] \geqslant k\,[\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i].$$

Следовательно,

$$\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i \geqslant 0.$$

Таким образом, можно написать

$$\overline{\alpha}_i > \overline{\beta}_i \quad (\text{для всякого } i \text{ в } P),$$
$$\sum_{i \in P} \overline{\alpha}_i \leqslant (P).$$

что и требовалось доказать.

Лемма. *Если установлено взаимно однозначное соответствие между векторами множества*

$$\mathfrak{P}_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \geqslant 0, \sum_1^n a_i = 1 \}$$

и если при $a_i > b_i$, $\overline{a} \leftrightarrow a$, $\overline{b} \leftrightarrow b$ *имеет место* $\overline{a}_i > \overline{b}_i$, *то*

$$a = \overline{a} \quad (a \in \mathfrak{P}_n).$$

Лемма очевидна для $n = 1$ или $n = 2$. Будем рассуждать по индукции и предположим, что лемма справедлива для $n - 1$. Покажем сначала, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightarrow (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ и если $a_1 = 0$, то $\overline{a}_1 = 0$. В самом деле, если $\overline{a}_1 > 0$, рассмотрим вектор $\overline{b}$ из $\mathfrak{P}_n$ такой, что

$$\overline{b}_1 = 0 < \overline{a}_1,$$
$$\overline{b}_i = \overline{a}_i + \frac{\overline{a}_1}{n-1} > a_i \qquad (i \geqslant 2, \; i \leqslant n).$$

Образ b вектора $\overline{b}$ удовлетворяет отношению $b_1 < a_1 = 0$, что нелепо.

Итак, $\leftrightarrow$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами вида $(0, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, и, следовательно, образ такого вектора равен

$$\overline{a} = (0, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Для вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, не имеющего нулевых компонент, имеем $a_1 + a_2 < 1$, и можно написать

$$b = (b_1 = 0, \; b_2 = a_1 + a_2, \; b_3 = a_3, \ldots, b_n = a_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \overline{b} = (0, \; a_1 + a_2, \; a_3, \ldots, a_n).$$

Поскольку $a_i = b_i$ для $i \geqslant 3$, имеем также

$$\overline{a}_i = \overline{b}_i = a_i \qquad (i \geqslant 3).$$

Поскольку это рассуждение можно провести с другими компонентами, кроме первых двух, мы получаем $a=\bar{a}$.

Теорема 3 [24]. *В кооперативной игре слабая эквивалентность, эквивалентность и сильная эквивалентность совпадают.*

На основании теоремы 2 достаточно показать, что для $v(P)\cong\bar{v}(P)$ имеем $v(P)\sim\bar{v}(P)$.

Взаимно однозначное соответствие $\alpha\cong\bar{\alpha}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие $a\leftrightarrow\bar{a}$ между приведенными предпосылками, так что равенство

$$a_i=\frac{\alpha_i-v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)}>b_i=\frac{\beta_i-v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)}$$

равносильно равенству

$$\bar{a}_i=\frac{\bar{\alpha}_i-\bar{v}(i)}{\bar{v}(N)-\sum\limits_{i\in N}\bar{v}(i)}>\bar{b}_i=\frac{\bar{\beta}_i-\bar{v}(i)}{\bar{v}(N)-\sum\limits_{i\in N}\bar{v}(i)};$$

2) соотношение

$$a_i>b_i\,(i\in P),\qquad \sum_{i\in P}a_i\leqslant m(P)$$

равносильно соотношению

$$\bar{a}_i>\bar{b}_i\,(i\in P),\qquad \sum_{i\in P}\bar{a}_i\leqslant\bar{m}(P).$$

Следовательно, на основании леммы мы имеем $a=\bar{a}$, откуда

$$m(P)=\bar{m}(P).$$

§ 31. Функция Шепли Ф (v). Мы видели, что когда игроки образуют коалицию P с трансферабельностью, необходимо условиться заранее о способе дележа общего выигрыша коалиции $f_P(x)$; эта задача решена Л. С. Шепли.

По определению, $\Phi(v)$ называется *функцией Шепли*, если она ставит в соответствие всякой числовой функции $v(P)$, определенной для подмножеств P в N, вектор

$$\Phi(v)=(\Phi_1(v),\ \Phi_2(v),\ \ldots,\ \Phi_n(v))$$

пространства R^n так, что имеют место следующие условия.

1. Аксиома симметрии. *Если* π *обозначает перестановку в* N, $v(P)$ *и* $\overline{v}(P)$ — *две числовые функции такие, что* $v(P) = \overline{v}(\pi P)$ *для любого* P, *то*

$$\Phi_{\pi i}(\overline{v}) = \Phi_i(v).$$

2. Аксиома эффективности. *Если* K — *подмножество множества* N *такое, что* $v(P) = v(P \cap K)$ *для любого* $P (\subset N)$, *то*

$$\sum_{k \in K} \Phi_k(v) = v(K).$$

3. Аксиома линейности. *Если* v *и* w — *две функции множества* $P (P \subset N)$, λ *и* μ — *действительные числа, то*

$$\Phi(\lambda v + \mu w) = \lambda \Phi(v) + \mu \Phi(w).$$

Лемма 1. *Если* K *таково, что* $v(P) = v(P \cap K)$ *для любого* P, *то*

$$\Phi_i(v) = 0 \quad (i \in K).$$

В самом деле, если $i \in K$, то множество $K \cup \{i\}$ удовлетворяет для любого P соотношению

$$v(P \cap [K \cup \{i\}]) = v(P \cap K \cap [K \cup \{i\}]) = v(P \cap K) = v(P).$$

Поэтому можно написать

$$\sum_{k \in K} \Phi_k(v) = v(K) = v(K \cup \{i\}) = \sum_{k \in K} \Phi_k(v) + \Phi_i(v)_i.$$

Итак, мы имеем $\Phi_i(v) = 0$.

Лемма 2. *Если* K *обозначает подмножество множества* N, $v_K(P)$ — *характеристическую функцию, равную* 1, *если* $P \supset K$, *и* 0, *если* $P \not\supset K$, *то характеристическая функция* $v(P)$ *может быть записана как*

$$v(P) = \sum_{K \neq O} c_K v_K(P) \qquad (P \subset N),$$

где

$$c_K = \sum_{Q \subset K} (-1)^{|K| - |Q|} v(Q).$$

В самом деле, если дано множество P, можно написать

$$\sum_{K} c_K v_K(P) = \sum_{K \subset P} c_K = \sum_{Q \subset P} v(Q) \Big[\sum_{\substack{K \supset Q \\ K \subset P}} (-1)^{|K|-|Q|} \Big] =$$

$$= \sum_{Q \subset P} v(Q) \Big[\sum_{k=q=|Q|}^{k=p=|P|} (-1)^{k-q} \frac{(k-q)!}{(p-q)!\,(k-p)!} \Big].$$

Величина в скобках равна 0, если $p \neq q$, и равна 1, если $p = q$; следовательно, предложение доказано.

Теорема 1 [39]. *Для игры $v(P)$ существует функция Шепли $\Phi(v)$, притом единственная.*

1. Единственность. Пусть $\Phi(v)$ — функция, удовлетворяющая трем аксиомам (если она существует); покажем сначала, что должно быть

$$\Phi_k(v_K) = \begin{cases} \dfrac{1}{|K|}, & \text{если } k \in K; \\ 0, & \text{если } k \notin K. \end{cases}$$

В самом деле, пусть даны $i\,(\in K)$, $j\,(\in K)$; рассмотрим перестановку π в N такую, что $\pi K = K$ и $\pi i = j$; имеем

$$\bar{v}_K(P) = v_K(\pi^{-1}P) = v_K(P),$$
$$\Phi_j(v_K) = \Phi_{\pi i}(\bar{v}_K) = \Phi_i(v_K).$$

На основании аксиомы об эффективности можно написать для всякого k в K

$$1 = v_K(K) = \sum_{i \in K} \Phi_i(v_K) = |K|\,\Phi_k(v_K).$$

Отсюда

$$\Phi_k(v_K) = \frac{1}{|K|}.$$

Кроме того, на основании леммы 1 можно написать для всякого k в $N - K$

$$\Phi_k(v_K) = 0.$$

Наконец, используя лемму 2, можно написать

$$\Phi_i(v) = \Phi_i\Big(\sum_{K \neq O} c_K v_K\Big) = \sum_{K \neq O} c_K \Phi_i(v_K) = \sum_{K \ni i} \frac{c_K}{|K|}.$$

2. Существование. Непосредственно убеждаемся, что трем аксиомам удовлетворяет функция

$$\Phi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{c_K}{|K|}.$$

Теорема 2. *Вкладом игрока* (i_k) *в перестановку* $\pi N = (i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$ *называется число*

$$V_{i_k}(\pi) = v(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\});$$

$\Phi_i(v)$ *равна среднему значению* $\frac{1}{n!}\sum_{\pi} V_i(\pi)$ *вкладов игрока* (i).

Имеем

$$\Phi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{1}{|K|} \sum_{Q \subset K} (-1)^{|K| - |Q|} v(Q) =$$

$$= \sum_{Q \ni i} v(Q) \sum_{k=q=|Q|}^{k=n} \frac{(-1)^{k-q}}{k} \frac{(n-q)!}{(k-q)!\,(n-k)!} -$$

$$- \sum_{Q \ni i} v(Q) \sum_{k=q}^{n} \frac{(-1)^{k-q}}{k} \frac{(n-q-1)!}{(k-q-1)!\,(n-k)!},$$

или

$$\Phi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} v(K) - \sum_{K \not\ni i} \frac{k!\,(n-k-1)!}{n!} v(K) =$$

$$= \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} [v(K) - v(K - \{i\})].$$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

Следствие. $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(v), \ldots, \Phi_n(v))$ *есть сильная предпосылка игры* $v(P)$.

В самом деле, $V_i(\pi) \geqslant v(i)$ для всякой перестановки π, откуда

$$\Phi_i(v) \geqslant v(i);$$

с другой стороны, на основании аксиомы об эффективности имеем

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N).$$

Основное применение. Положим

$$v^K(P) = v(K \cap P),$$
$$v_i(K) = \Phi_i(v^K).$$

Покажем, что в том случае, если допускается трансферабельность, эти числа $v_i(K)$ можно принять как систему платежей (см. § 26) и что на основании определения Φ этот способ распределения является единственным симметричным и аддитивным.

В самом деле, $v_i(K)$ удовлетворяют аксиоме общей выгоды, так как

$$\sum_{i \in K} v_i(K) = v^K(K) = v(K).$$

Они удовлетворяют аксиоме эффективности: если для двух множеств K и P имеет место соотношение

$$v(Q) = v(P) \qquad (K \subset Q \subset P),$$

то имеет место также

$$v_i(P) = 0 \qquad (i \in P - K).$$

Они удовлетворяют аксиоме индивидуальной устойчивости

$$v_i(P) \geqslant v(i).$$

Можно спросить, удовлетворяют ли они также аксиоме устойчивости, т. е. существует ли во всяком множестве $Q(\subset P)$ такое i, что

$$v_i(P) \geqslant v_i(Q).$$

Можно установить, что в большинстве случаев это имеет место.

Пример 1. Рассмотрим *игру голосования* $(q;\ w_1, w_2, \ldots, w_n)$ с n игроками; положительное число w_i есть число голосов, которыми располагает избиратель (i), а положительное число q есть число голосов, необходимое для избрания одного представителя. Итак, m — число представителей, которых может избрать коалиция P,— равно частному от деления $\sum_{i \in P} w_i$ на q. Игру можно сделать трансферабельной, предположив, что каждый избранный представитель, чтобы отблагодарить своих избирателей, распределяет между ними некоторую денежную сумму *), которую мы примем равной 1; тогда $v(P)=m$.

Чтобы разделить эту сумму m согласно симметричному и аддитивному способу, удовлетворяющему аксиоме эффективности, нужно приписать игроку (i) долю, равную $v_i(P)$.

Рассмотрим для определенности трех избирателей (1), (2) и (3), при $w_1=1$, $w_2=3$, $w_3=4$, $q=5$. В перестановке π вклад $V_i(\pi)$ может быть равен лишь 0 или 1, и он будет равен 1 для игроков, обозначенных жирными цифрами в таблице:

1	1	2	2	3	3
2	**3**	1	**3**	**1**	**2**
3	2	**3**	1	2	1

Отсюда находим на основании теоремы 2

$$v_1(\{1,\ 2,\ 3\})=v_2(\{1,\ 2,\ 3\})=\frac{1}{6},\quad v_3(\{1,\ 2,\ 3\})=\frac{2}{3},$$

$$v_1(\{1,\ 2\})=v_2(\{1,\ 2\})=0,$$

$$v_1(\{1,\ 3\})=v_3(\{1,\ 3\})=v_2(\{2,\ 3\})=v_3(\{2,\ 3\})=\frac{1}{2},$$

$$v_1(1)=v_2(2)=v_3(3)=0.$$

Мы видим, что эта система удовлетворяет аксиоме устойчивости: если P — коалиция, то никакое подмножество Q коалиции не будет стремиться выйти из коалиции, так как найдется $i\in Q$, для которого не выполняется неравенство.

$$v_i(Q)>v_i(P).$$

Заметим, что если $P=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Q=\{2,\ 3\}$, то

$$v(Q)=\sum_{i\in Q}v_i(Q)=1>\frac{5}{6}=\sum_{i\in Q}v_i(P).$$

Следовательно, эта система не удовлетворяет аксиоме общей устойчивости.

Пример 2. Рассмотрим определенную выше (§ 27) игру, описывающую конкуренцию на экономическом рынке; значе-

---

*) Таким образом, в условия игры включены подкуп избирателей и их неравноправность. Такая «игра голосования» чужда идеологии советского читателя. Однако задача моделирует некоторые реальные явления, сопутствующие буржуазной демократии и с математической стороны представляет несомненный интерес. (*Прим. ред.*)

ния функции Шепли $v_i(P)$ равны

$$v_1(\{1, 2, 3\}) = v_2(\{1, 2, 3\}) = v_3(\{1, 2, 3\}) = 4,$$
$$v_1(\{1, 2\}) = v_2(\{1, 2\}) = \ldots = 3,$$
$$v_1(1) = v_2(2) = v_3(3) = 1.$$

Эти числа удовлетворяют аксиоме устойчивости и даже аксиоме общей устойчивости: для любого подмножества Q в P имеем

$$\sum_{i \in Q} v_i(P) \geqslant v(Q).$$

§ 32. Теория фон Неймана — Моргенштерна. Фон Нейман и Моргенштерн в своей теории не рассматривают полную систему платежей $\{v_i(P) \mid i \in P,\ P \subset N\}$, но занимаются исключительно возможными предпосылками $\alpha = \{v_i(N) \mid l \in N\}$.

Итак, пусть A — множество предпосылок.

Если даны две предпосылки α и β в A, то говорят, что α *доминирует над* β, и пишут $\alpha \succ \beta$ в следующих случаях:

1. $\sum_1^n \alpha_i \geqslant \sum_1^n \beta_i : \alpha \succ \beta$ тогда и только тогда, когда существует непустое множество игроков P такое, что

$$\alpha_i > \beta_i \ (i \in P), \ \sum_{i \in P} \alpha_i \leqslant v(P);$$

2. $\sum_1^n \alpha_i < \sum_1^n \beta_i : \alpha \succ \beta$ тогда и только тогда, когда существует непустое множество игроков Q такое, что

$$\alpha_i > \beta_i \ (i \in Q), \ \sum_{i \in N-Q} \alpha_i \geqslant v(N-Q).$$

В первом случае сообществу N выгодно предпочесть α, а не β; если предложены две предпосылки α и β, существует множество P игроков, предпочитающих α, и эти игроки имеют право вынести решение ввиду того, что сообщество P особенно «притесненное». Во втором случае сообщество N предпочитает β, а не α, но единственные игроки, которые могли бы воспротивиться выбору α — это игроки множества $N-Q$, которые не имеют влияния, вследствие того, что сообщество $N-Q$ получит все же больше своей доли.

Мы замечаем, что отношение $\succ$ нерефлексивно: ни для одного α в A не может быть $\alpha \succ \alpha$.

Теперь возникает задача — определить точки α в A, которые следует предпочесть другим в смысле отношения $\succ$; если бы $\succ$ было отношением строгой упорядоченности на конечном множестве A, то нужно было бы выбрать «максимальный элемент»; поэтому нам нужно обобщить понятие максимума для нерефлексивных отношений $\succ$, которые необязательно будут отношениями упорядоченности.

Множество $S\,(\subset A)$ будет по определению *решением игры*, если:

1) $\alpha \not\succ \beta$ для α, $\beta \in S$;

2) для любого $\beta \notin S$ существует α в S такое, что $\alpha \succ \beta$.

Пункт 1) говорит, что никакая точка в S не может быть подчинена другой точке множества S; пункт 2) говорит, что всякая точка, не входящая в S, может быть подчинена точке множества S.

Если S — решение, то α принадлежит S тогда и только тогда, когда она не подчинена ни одному элементу множества S; итак, решение есть наибольшее множество точек, которые не могут доминировать одна над другой.

Если A — конечное числовое множество и если $\succ$ есть отношение «превосходит», то существует лишь одно решешение, и это решение будет состоять из одного элемента — наибольшего из всех чисел множества A. Вообще предположим, что отношение $\succ$ можно представить деревом, причем, $\alpha \succ \beta$ означает, что α и β находятся на одной ветви, причем α находится ближе к конечной точке ветви, а β ближе к начальному элементу α_0; в этом случае решение также является единственным и есть множество всех конечных точек.

Теорема 1. *Кооперативная игра с трансферабельностью имеет решение $S = \{\alpha_0\}$ из одного элемента тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i \in N} v(i) = v(N)$; в этом случае S есть единственное решение игры.*

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} v(i) = v(N)$, то сильная предпосылка $\alpha = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$ представляет единственное решение.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} v(i) < v(N)$ и если игра имеет решение, состоящее из одного элемента α, то для $\beta \neq \alpha$ имеет место $\alpha \succ \beta$.

Мы построим предпосылку β, для которой это будет неверно.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i).$$

Следовательно, для индекса i_0 имеем

$$\alpha_{i_0} > v(i_0).$$

Положим $\varepsilon = \alpha_{i_0} - v(i_0) > 0$ и рассмотрим предпосылку β, определенную соотношениями

$$\beta_{i_0} = \alpha_{i_0} - \varepsilon,$$

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n-1} \qquad (i \neq i_0).$$

Поскольку мы допускаем трансферабельность, то β действительно есть сильная предпосылка множества A и, кроме того, $\beta \neq \alpha$. Далее, если $\alpha \succ \beta$, то пусть P — множество игроков такое, что

$$\alpha_i > \beta_i \qquad (i \in P),$$

$$\sum_{i \in P} \alpha_i \leqslant v(P).$$

Из первого условия вытекает $P = \{i_0\}$, что противоречит второму условию.

Теорема 2. *Если предпосылка α принадлежит решению S, то*

$$\min_{\pi} V_i(\pi) \leqslant \alpha_i \leqslant \max_{\pi} V_i(\pi) \qquad (i \in N).$$

Обозначим, как и раньше, через

$$V_{i_k}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = v(i_1, i_2, \ldots, i_k) - v(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$$

вклад игрока (i_k) в перестановку $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Положим $b_i = \max_k V_i(\pi)$ и предположим, что для предпосылки α, принадлежащей решению S, и для индекса i имеет место $\alpha_i > b_i$.

Мы покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим вектор $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, где

$$\beta_i=\alpha_i-(n-1)\varepsilon,$$
$$\beta_j=\alpha_j+\varepsilon \quad (j\neq i),$$
$$\varepsilon>0.$$

Если взять ε достаточно малым, β будет предпосылка (так как $\alpha_i>b_i\geqslant 0$). Покажем, что β доминирует над α. Имеем

$$\alpha_i>b_i\geqslant v(N)-v(N-i),$$
$$\sum_{j\in N}\alpha_j=v(N).$$

Отсюда

$$\sum_{j\in N-i}\alpha_j<v(N-i),$$

откуда, беря ε достаточно малым, получим

$$\sum_{j\in N-i}\beta_j<v(N-i).$$

Поскольку $\beta_j>\alpha_i$ для всякого $j(\neq i)$, это показывает, что β доминирует над α.

В частности, поскольку $\alpha\in S$, имеем $\beta\notin S$. Следовательно, существует предпосылка γ, которая доминирует над β, и для множества игроков Q получаем

$$\gamma_j>\beta_j \qquad (j\in Q),$$
$$\sum_{i\in Q}\gamma_j\leqslant v(Q),$$

откуда

$$\gamma_j>\beta_j>\alpha_j \qquad (j\in Q-i).$$

Следовательно, поскольку γ не может доминировать над α (потому что $\alpha\in S$, $\gamma\in S$), имеем

$$\sum_{j\in Q-i}\gamma_j>v(Q-i).$$

Из этого неравенства заключаем, что $i\in Q$ и что

$$\alpha_i-(n-1)\varepsilon=\beta_i<\gamma_i=$$
$$=\sum_{j\in Q}\gamma_j-\sum_{j\in Q-i}\gamma_j<v(Q)-v(Q-i)\leqslant b_i.$$

Поскольку это справедливо для сколь угодно малого ε, то мы доказали, что $\alpha_i\leqslant b_i$, а это противоречит условию теоремы, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если предпосылка* α *удовлетворяет аксиоме общей устойчивости, т. е. если*

$$\sum_{i \in P} \alpha_i \geqslant v(P) \qquad (P \subset N),$$

то эта предпосылка α *принадлежит любому решению* S.

В самом деле, если $\alpha \notin S$, то существует предпосылка β в S такая, что для множества P имеем

$$\beta_i > \alpha_i \qquad (i \in P),$$

$$\sum_{i \in P} \beta_i \leqslant v(P).$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{i \in P} \alpha_i < v(P).$$

Следовательно, α не может удовлетворять условию теоремы.

Приведем теперь несколько теорем о существовании решения, которые вытекают непосредственно из теории игр Ним (§ 8).

Пусть X — множество предпосылок игры n лиц. Если $x \in X$, обозначим через Γx множество предпосылок, которые могут доминировать над x. Положим $X_0 = \{x / \Gamma x = O\}$ и рассмотрим подмножество A множества X_0.

Множество S_A в X есть, по определению, *решение относительно* A, если

1) $y \notin \Gamma x$ для $x, y \in S_A$;

2) для $x \notin S_A$, $x \notin A$ существует y в S_A такое, что $y \in \Gamma x$.

S_O есть *решение в смысле фон Неймана — Моргенштерна;* S_{X_0} есть *слабое решение*, т. е. наибольшее множество всех элементов x, которые доминируют над всяким элементом, не находящимся в S_{X_0}, который является подчиненным.

Теорема 4. *Если игра Ним* $(\Gamma, A, X_0 - A)$ *допускает функцию Гранди* $g(x)$, *то множество* $\{x \mid g(x) = 0\} = S_A$ *есть решение относительно* A.

Теорема 5 (Ричардсон). *Если граф* (Γ, X) Γ*-конечен и* Γ^-*-конечен и не содержит циклических последова-*

тельностей с нечетным числом членов, то существует решение S_A *для всякого* $A\,(\subset X_0)$.

В самом деле, в этом случае существует функция Гранди (§ 8, теорема 1).

Теорема 6 (фон Нейман — Моргенштерн). *Если граф* (Γ, X) *локально конечен, то любому множеству* A *в* X_0 *соответствует решение* S_A, *притом единственное.*

В самом деле, в этом случае существует функция Гранди для игры Ним $(\Gamma, A, X_0 - A)$, притом единственная.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Bellman, D. Blackwell, Some two-person games involving bluffing (Proc. Nat. Acad. Sc., t.35, 1949, p. 600).

[2] C. Berge, Sur l'isovalence et la regularite des transformateurs (C. R. Acad. Sc., t. 231, 1950, p. 1404); Sur l'inversion des transformateurs (Ibid., t.232, 1951, p. 134); Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs (J. Math. pures et appl., t.32, 1953, p.129).

[3] C. Berge, Sur les ensembles purs et les ultrafiltres (C. R. Acad. Sc., t. 238, 1954, p. 2136).

[4] C. Berge, Sur une convexite reguliere non lineaire et ses applications à la theorie des jeux (Bull. Soc. Math. Fr., t.82, 1954, p. 301).

[5] C. Berge, Sur une généralisation du théorème de Zermelo — von Neumann (C. R. Acad. Sc., t. 241, 1955, p. 455); Topological games with perfect. information (Ann. of Math. St., n° 39, p. 165, Princeton, 1957).

[6] B. J. Birch, On games with almost complete information (Proc. Cambridge Phil. Soc., t.51, 1955, p. 275).

[7] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, L. S. Shapley, Games with continuous convex pay-off 20, p. 181.

[8] E. Borel, La théorie du jeu et les equations à noyau symétrique gauche (C. R. Acad. Sc., t.173, 1921, p. 1304); Sur les jeux ou le hasard se combine avec l'habilete des joueurs (Ibid., t.178, 1924, p.24); Sur les systèmes de formes lineaires à determinant symetrique gauche et la théorie générale du jeu (Ibid., t. 184, 1927, p. 52).

[9] G. Choquet, Convergences (Ann. Univ. Grenoble, t. 23, 1947, p. 57).

[10] N. Dalkey. Equivalence of information patterns and essentially determinate games, [21], p. 217.

[11] R. Duncan, Luce, A Definition of stability for n-person games (Ann. of Math., t.59, 1954, p. 357).

12] R. Farquharson, Sur une généralisation de la notion d'equilibrium (C. R. Acad. Sc., t.240, 1955, p.46).

[13] D. Gale, F. M. Stewart, Infinite games with perfect information, [21], p. 245.

[14] G. T. Guilbaud, Les problèmes de partage (Econ. appl., t.5, 1952, p. 93).

[15] G. T. Guilbaud, Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agregation (Econ. appl., t.5, 1952, p. 501).

[16] P. M. Grundy, Mathematics and games (Eureka, t.2, 1939, p.6).

[17] H. Kneser, Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux (C. R. Acad. Sc., t.234, 1952, p. 2418).
[18] S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem (Duke Math. J., t.8, 1941, p. 457).
[19] H. W. Kuhn, A simplified two-person poker, [20], p. 97; Extensive games and the problem of information, [21], p. 193.
[20] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Contributions to the theory of games, vol. 1, (Ann. of Math. Study, N 24, Princeton, 1950).
[21] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Contributions to the theory of games. vol. 2. (Ann. of Math. Study, N 28, Princeton, 1953).
[22] Ky Fan, Fixed points and minimax theorems in locally convex topological linear spaces (Proc. Nat. Acad. Sc., t.38, 1952, p. 121).
[23] A. Lichnerowicz, Une civilisation méconnue (La vie int., 1953, p. 81).
[24] J. C. C. Mackinsey, Isomorphism of games and strategic equivalence, [20], p. 117.
[25] J. W. Milnor, Sums of position games, [21], p. 291.
[26] E. H. Moore, A generalization of the game called Nim (Ann. of Math., t.11, 1909, p. 93).
[27] O. Morgenstern, J. von Neumann, Theory of games and economic behavior, 1-е изд., Princeton, 1944; 2-е изд., Princeton, 1947.
[28] J. Mycielski, A. Zieba, On infinite games (Bull. Acad. Polon. Sc., t.3, 1955, p. 133).
[29] J. F. Nash, Two-person cooperative games (Econometrica, t. 21, N 1, 1953); Non cooperative games (Ann. of Math., t.54, 1951, p. 286).
[30] J. F. Nash, Equilibrium points in n-person games (Proc. Nat. Acad. Sc., t.36, 1950, p. 48).
[31] J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftspiele (Math. Ann., t. 100, 1928, p. 295).
[32] J. von Neumann (Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, t.8, 1937, p. 73).
[33] O. Ore, Graphs and matching theorems (Duke Math., J., t.22, 1955, p. 625).
[34] R. Otter, J. Dunne, Games with equilibrium points (Proc. Nat. Acad. Sc., t.39, 1953, p. 310).
[35] R. de Possel, Jeux de hasard et de reflexions (Act. Sc. et Ind., N 426, 1936).
[36] M. Richardson, On weakly ordered systems (Bull. Amer. Math. Soc., t. 52, 1946, p. 113); Extensions theorems for solutions of irreflexive relations (Proc. Nat. Acad. Sc., t.39, 1953, p. 649; Ann. of Math., t.58, 1953, p. 573).
[37] J. Robinson, An iterative method of solving a game (Ann. of math., t.54, 1951, p. 296).
[38] M. P. Schützenberger, A tentative classification of goal-seeking behaviours (J. of Mental Sc., t.100, 1954, p. 7); C. Berge et M. P. Schützenberger, Jeux de Nim et solutions (C. R. Acad. Sc., t.242, 1956, p. 1672).
[39] L. S. Shapley, A value for n-person games, [21], p. 307.

[40] L. S. Shapley, R. N. Snow, Basic solutions of discrete games [20], p. 27.
[41] G. L. Thompson, Bridge and signaling, [21], p. 279, Signaling strategies in n-person games [21], p. 267.
[42] J. Ville, Sur la théorie générale des jeux ou intervient l'habileté des joueurs (Traité du calcul des probabilites et de ses applications, E. Borel, t.IV, fasc. 2, Paris, 1938, p. 105).
[43] J. Ville, M. P. Schützenberger, Les problèmes de diagnostic séquentie (C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, p. 206).
[44] P. Wolfe, The strict determinateness of certain infinite games (Pacific J. of Math., t.5, 1955, p. 841).
[45] E. Zermelo, Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels (Proc. Fifth Int. Cong. Math., Cambridge, 1912, t.11, 501).
[46] A. Zieba, Un théorème de la théorie de poursuite (Coll. Math. Wroclaw, 1949, t.11, p. 303).
[47] S. Zubrzycki, On the game of Banach and Mazur (Colloquium Mathematicum).
[48] G. Berge, Theorie des graphes et ses applications, Dunod, 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Клод Берж.

Общая теория игр нескольких лиц.

Редактор *Л. А. Соловьева.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Е. А. Белицкая.*

Сдано в набор 5/V 1961 г. Подписано к печати 13/IX 1961 г.
Бумага 84 × 108 1/32. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,56.
Уч.-изд. л. 5,95. Тираж 18 000 экз.
Цена книги 30 к. Заказ 1789.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Цена 30 коп.