

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ

АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА
И АРХИТЕКТУРЫ СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ,
РАБОТАЮЩИХ
В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ
СТАДИИ

ГОССТРОИЗДАТ

МОСКВА

1961

АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА

Выпуск 7

Под. ред.

Д-ра техн. наук, проф. А. В. ГЕММЕРЛИНГА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛИТЕРАТУРЫ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ, АРХИТЕКТУРЕ
И СТРОИТЕЛЬНЫМ МАТЕРИАЛАМ

Москва 1961

В статьях сборника изложены методы расчета различных конструкций в упруго-пластической стадии. Рассмотрены методы расчета отдельных стержней и балок, простейших рам, труб, плит, оболочек, предварительно напряженных балок, мачт линий электропередач, а также некоторые общие вопросы расчета конструкций из упруго-пластического материала. Многие решения доведены до конечных формул и примеров расчета и подтверждены экспериментами.

Сборник предназначен для инженеров-проектировщиков, аспирантов и научных работников.

Приводится описание экспериментов с пологими цилиндрическими оболочками и дается сравнение данных теории с результатами экспериментов.

Г. Е. Бельский в своей статье «Устойчивость центрально сжатых стержней и рам в упруго-пластической стадии» дает распространение теорий Энгессера — Шенли и Энгессера — Ясинского — Кармана на упруго заземленные стержни и рамы на основе аналитического представления криволинейной диаграммы «напряжение — деформация» степенным законом. Влияние пластических деформаций учитывается введением поправочных коэффициентов к жесткостям стержней в зависимости от величин осевых напряжений в момент потери устойчивости всей системы.

В статье В. И. Трофимова «Развитие пластических деформаций в строительных сталях при однородном и неоднородном напряженных состояниях» приводятся результаты экспериментальных исследований пластических деформаций строительной стали в условиях сложного нагружения при однородном и неоднородном напряженных состояниях. Показано, что неравномерность пластических деформаций при неоднородном напряженном состоянии проявляется слабее, чем при однородном.

*Дирекция ЦНИИ
строительных конструкций*

Д-р техн. наук А. В. ГЕММЕРЛИНГ

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Несущая способность конструкции является одной из важнейших ее характеристик, поэтому точность ее определения существенно влияет на экономические показатели.

Исчерпанием несущей способности называется такое состояние конструкции, при котором быстрый рост ее деформаций возможен без увеличения нагрузки.

При действии на конструкцию статических нагрузок исчерпание ее несущей способности наступает либо в результате полного использования прочности хотя бы в одном сечении, необходимым для сохранения неизменяемости системы, либо в результате потери устойчивости.

В последнее время появляется много новых материалов и конструктивных форм. К числу новых материалов относятся алюминиевые сплавы, пластмассы, легкие бетоны, стали и бетоны повышенной прочности и т. д. Новыми конструктивными решениями являются весьма гибкие железобетонные элементы ферм и панелей, гибкие виброкирпичные панели, тонкостенные оболочки и др.

Для всех этих материалов характерно сравнительно низкое отношение модуля упругости к пределу текучести или прочности, за счет чего конструкции из этих материалов становятся все более гибкими, а устойчивость — решающей для их несущей способности. Свойства ползучести, присущие многим из указанных материалов, еще более осложняют расчет. Все это указывает на значительное расширение класса конструкций, несущая способность которых определяется устойчивостью. В этот класс постепенно начинает входить все большее количество железобетонных и каменных элементов, для которых еще совсем недавно вопросы устойчивости почти не имели практического значения.

Многообразие форм деформирования под нагрузкой различных конструкций из разных материалов, взаимное влияние местных прочностных разрушений конструкции на ее потерю устойчивости или местной потери устойчивости отдельных элементов на прочность всей конструкции, замена расчета всей конструкции расчетом отдельных ее элементов — все эти и подобные им обстоятельства привели к тому, что расчет конструкций в проектных организациях производится в основном по эмпирическим формулам, полученным для определенных случаев и соотношений.

Применение таких формул к конструкциям иных форм, выполненных из других материалов, не позволяет полностью использовать их несущую способность.

В этих условиях переход на расчет по теоретически обоснованным формулам является особенно необходимым.

Следует сказать, что многообразие применяемых материалов и конструктивных форм приводит к весьма различным формам исчерпания несущей способности различных конструкций. Так, например, сжатый кирпичный столб нередко раскалывается на ряд тонких столбиков, которые затем теряют устойчивость. Стеновая железобетонная или виброкирпичная панель, работающая на сжатие, нередко оказывается нагруженной со значительным эксцентриситетом в своей плоскости, что приводит к неравномерности напряжений по ширине панели и постепенному выкрашиванию материала в перенапряженной зоне.

Подобные разрушения являются в достаточной степени специфическими для определенных конструкций и материалов и здесь рассматриваться не будут.

В данной статье анализируются лишь конструкции и их элементы, исчерпание несущей способности которых наступает в результате возникновения определенного напряженного состояния, при котором начинается быстрый рост деформаций без увеличения нагрузки.

2. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ

Условия прочности и устойчивости элемента конструкции (для простоты будем предполагать сжатый или сжато-изогнутый стержень) записываются, как известно, совершенно различно.

Условие прочности формулируется в виде неравенства, гласящего, что действующее усилие не должно превышать разрушающего усилия для сечения элемента, т. е. такого, при котором во всех точках сечения будет опасное напряжение.

Условие устойчивости формулируется в виде неравенства, гласящего, что действующее усилие не должно превышать критической величины, т. е. такой, при которой отпорность элемента (его способность противодействовать отклонениям от достигнутого состояния равновесия) становится минимально необходимой.

Повышения прочности конструкции можно достигнуть повышением прочности материала; для повышения устойчивости необходимо увеличение жесткости.

В практике в большинстве случаев прочность материала задана (исключением иногда является бетон, марка которого может меняться); заданной является и длина элемента, сильно влияющая на его жесткость. Таким образом, в большинстве случаев и увеличение прочности, и повышение устойчивости элемента осуществляются путем увеличения размеров его поперечного сечения.

Это обстоятельство явилось одним из оснований мнения о эквивалентности или даже о тождественности критериев прочности и устойчивости, о возможности замены одного из них другим. Дополнительные трудности в разграничении этих явлений вносит их взаимное влияние, проявляющееся при исследовании ряда конструкций, что можно показать на отдельных примерах.

Сравнительно гибкий стержень, столб или панель из хрупкого материала (камень, бетон) нагружается внецентренно приложенной сжимающей силой. Нередко можно наблюдать, что при определенной нагрузке начинается растрескивание материала в наиболее сжатой зоне, затем выкрашивание его и вслед за этим потеря устойчивости.

Первые признаки разрушения имеют явно выраженный прочностной характер, однако коль скоро исчерпание несущей способности наступает при нагрузке, значительно меньшей той, которая способна привести к исчерпанию прочности всего сечения, то это явная потеря устойчивости, хотя и ускоренная местным нарушением прочности материала, приводящим к уменьшению отпорности конструкции. Следует сказать, что попытка повысить несущую способность такой конструкции повышением прочности материала тем менее эффективна, чем больше гибкость элемента или конструкции.

В качестве второго примера можно привести металлическую сжатую панель из сравнительно тонкого листа, подкрепленного профилями. Обычно лист на участках между профилями теряет устойчивость и выпучивается. Сразу вслед за этим или после некоторого увеличения нагрузки происходит разрушение профилей, которое при массивных профилях имеет характер исчерпания прочности. Количество подобных примеров можно увеличить.

В указанных примерах вопросы прочности и устойчивости переплетаются и затрудняют формулирование критерия несущей способности для конструкции в целом.

Условия устойчивости в первом примере и условие прочности во втором должны составляться для состояний конструкций, отличных от их первоначальных состояний, так как не все сечение элемента оказывается одинаково работоспособным к моменту исчерпания несущей способности. Таким образом, в расчет должны входить не первоначальные характеристики ненагружен-

ной конструкции, а скорректированные расчетные характеристики, позволяющие правильно оценить свойство конструкции в рассматриваемом состоянии.

Наиболее существенным является здесь то, что в условие прочности входит полная величина внутренних усилий в сечении, а в условие устойчивости — только приращение этих усилий при отклонении конструкции от рассматриваемого состояния равновесия. Таким образом, величины расчетных сечений, входящие в расчет на прочность и в расчет на устойчивость, различны. В дальнейшем они называются соответственно первым и вторым расчетными сечениями.

Такая форма расчета, введенная в работе автора [1], не является, конечно, единственно возможной, но, как показывает рассмотрение широкого класса задач, она весьма удобна с практической точки зрения и позволяет более четко отразить в расчете физическую сторону задачи.

Поскольку метод двух расчетных сечений используется в ряде последующих статей, то ниже дается краткое его изложение.

3. МЕТОД ДВУХ РАСЧЕТНЫХ СЕЧЕНИЙ

При выполнении условия прочности, а также для определения деформаций конструкции необходимо составить условия равновесия внешних и внутренних сил в каждом сечении.

Рассмотрим для примера сжато-изогнутый стержень (рис. 1). Для него условия равновесия записываются в следующем виде:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad (3.1)$$

$$M = \int_F y \sigma dF. \quad (3.2)$$

Если материал стержня характеризуется криволинейной диаграммой работы σ — ϵ , как это показано на рис. 2, то напряжение σ в некоторой точке сечения с относительной деформацией ϵ будет равно

$$\sigma = E_c \epsilon = \eta E \epsilon. \quad (3.3)$$

Величины

$$E_c = \frac{\sigma}{\epsilon} = \operatorname{tg} \varphi_c; \quad \eta = \frac{E_c}{E} \quad (3.4)$$

называются секущим и относительным секущим модулями.

Если каждую элементарную площадку dF действительного сечения стержня, изображенного сплошной линией на рис. 2, б, умножить на величину относительного секущего модуля η , отвечающего действующему в данной площадке напряжению σ , то получим некоторое приведенное сечение, показанное на рис. 2, б пунктиром, которое и называем первым расчетным сечением.

Физический смысл этого расчетного сечения заключается в том, что оно может рассматриваться как сечение стержня из упругого материала с модулем упругости E :

$$E = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.5)$$

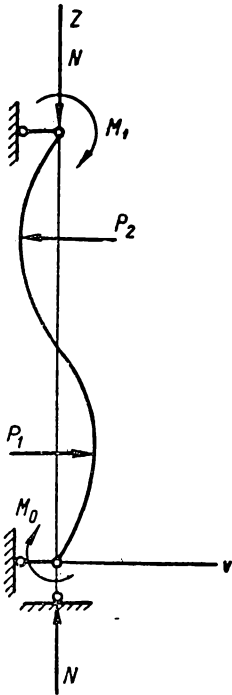


Рис. 1. Сжато-изогнутый стержень

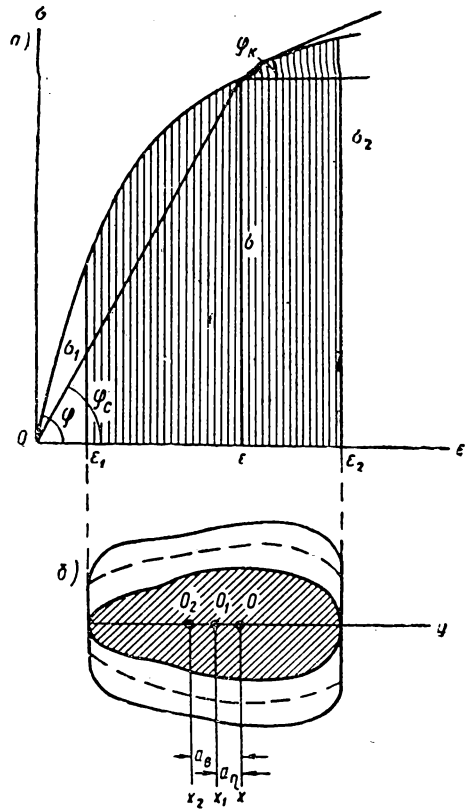


Рис. 2. Первое и второе расчетные сечения

Это позволяет вместо действительного стержня из упруго-пластического материала, характеризующегося криволинейной диаграммой работы $\sigma - \epsilon$, рассматривать прочность и деформации упругого стержня, имеющего первое расчетное сечение, геометрические характеристики которого определяются из следующих формул:

$$F_{\eta} = \int_F \eta dF; \quad S_{\eta} = \int_F y \eta dF; \quad J_{\eta} = \int_F y^2 \eta dF; \quad a_{\eta} = \frac{S_{\eta}}{F_{\eta}}, \quad (3.6)$$

где F_{η} — площадь первого расчетного сечения;

S_{η} — статический момент первого расчетного сечения относительно центральной оси Ox действительного сечения;

J_η — момент инерции первого расчетного сечения относительно той же оси;

a_η — координата центра тяжести первого расчетного сечения.

Для расчета необходим также момент инерции первого расчетного сечения относительно его собственной центральной оси O_1x_1 . Обозначим его J_1 :

$$J_1 = J_\eta - a_\eta^2 F_\eta. \quad (3.7)$$

Пользуясь геометрическими характеристиками (3.6) и (3.7), весь расчет сжато-изогнутого стержня можно вести так, как будто бы рассчитывается стержень из упругого материала.

Напряжение в точке сечения с координатой y равно

$$\sigma = \eta \left[\frac{N}{F} + \frac{M - Na_\eta}{J_1} (y - a_\eta) \right], \quad (3.8)$$

где η — относительный секущий модуль для рассматриваемой точки сечения.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет следующий вид:

$$EJ_1 v'' + Nv = M_{pz} - Na_\eta, \quad (3.9)$$

где M_{pz} — изгибающий момент в сечении z от одних поперечных нагрузок (включая концевые моменты).

Расчетное сечение переменное по длине стержня, кроме того, оно изменяется и с ростом нагрузок, таким образом уравнения (3.8) и (3.9) могут быть применены лишь для определенного состояния стержня, характеризующегося определенными величинами нагрузок.

Проинтегрировать уравнение (3.9) с переменными коэффициентами можно лишь для отдельных частных случаев. В то же время достаточная для практики точность во многих случаях может быть получена в предположении искривления оси стержня по части дуги синусоиды. Это является точным для стержня постоянного по длине сечения и нагруженного только на концах. Чем ближе рассматриваемый стержень к такому стержню, тем точнее будет и приближенное решение.

Для внецентренно сжатого шарнирно закрепленного стержня приближенное решение дает следующее значение прогиба f в середине длины:

$$f = \frac{m_0 - a_\eta}{\frac{N_1}{N} - 1}, \quad (3.10)$$

где m_0 — концевые эксцентриситеты;

a_η — координата центра тяжести первого расчетного сечения в середине длины стержня;

$$N_1 = \frac{\pi^2 EJ_1}{l^2}, \quad (3.11)$$

где l — длина стержня;

J_1 — момент инерции первого расчетного сечения относительно его собственной центральной оси в середине длины стержня.

При выполнении условия устойчивости необходимо составить условия равновесия приращений внешних и внутренних сил в каждом сечении при той или иной форме отклонения конструкции от достигнутого состояния равновесия.

Рассмотрим опять для примера сжато-изогнутый стержень (рис. 1) и изгибную форму его потери устойчивости в плоскости действия моментов.

Для такого стержня условия приращений внешних и внутренних сил записываются в следующем виде:

$$\int_F \sigma' dF = 0; \quad (3.12)$$

$$Nv_1 = \int_F \sigma' y dF. \quad (3.13)$$

Величину сжимающей силы N в момент потери устойчивости считаем постоянной.

Если материал стержня характеризуется криволинейной диаграммой (рис. 2), то приращение напряжения σ' в некоторой точке сечения с приращением относительной деформации $\varepsilon' = d\varepsilon$ будет равно

$$\sigma' = E_k \varepsilon' = \theta E \varepsilon', \quad (3.14)$$

где

$$E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \varphi_k; \quad \theta = \frac{E_k}{E} \quad (3.15)$$

называются касательным и относительным касательным модулем.

Если каждую элементарную площадку dF действительного сечения стержня, изображенного на рис. 2, б, умножить на величину относительного касательного модуля θ , отвечающего действующему в данной площадке напряжению σ , то получим некоторое приведенное сечение, заштрихованное на рис. 2, б, которое и называем вторым расчетным сечением.

Физический смысл второго расчетного сечения заключается в том, что оно может рассматриваться как сечение стержня из упругого материала с модулем упругости E . Это позволяет вместо определения устойчивости действительного стержня из материала с криволинейной диаграммой $\sigma - \varepsilon$ рассматривать устойчивость упругого стержня, имеющего второе расчетное сечение, геометрические характеристики которого определяются из следующих формул:

$$F_\theta = \int_F \theta dF; \quad S_\theta = \int_F y \theta dF; \quad J_\theta = \int_F y^2 \theta dF; \quad a_\theta = \frac{S_\theta}{F_\theta}, \quad (3.16)$$

где F_0 — площадь второго расчетного сечения;
 S_0 — статический момент второго расчетного сечения относительно центральной оси Ox действительного сечения;
 J_0 — момент инерции второго расчетного сечения относительно той же оси;
 a_0 — координата центра тяжести второго расчетного сечения.

Для расчета необходим также момент инерции второго расчетного сечения относительно его собственной центральной оси O_2x_2 (рис. 2,б). Обозначим его через J_2 :

$$J_2 = J_0 - a_0^2 F_0. \quad (3.17)$$

Пользуясь геометрическими характеристиками (3.16), дифференциальное уравнение устойчивости сжато-изогнутого стержня можно записать в следующем виде:

$$EJ_2 v_1'' + Nv_1 = 0. \quad (3.18)$$

Второе расчетное сечение, так же как и первое, переменено по длине стержня и изменяется с ростом нагрузки. Таким образом, уравнение (3.18) может быть применено лишь для определенного состояния стержня, характеризующегося определенной величиной нагрузок.

Проинтегрировать уравнение (3.18) с переменным коэффициентом J_2 можно лишь для отдельных частных случаев. В то же время достаточная для практики точность может быть получена в предположении дополнительных искривлений $v_1(z)$ стержня в момент потери устойчивости по части дуги синусоиды. Это является точным для стержня постоянного сечения. Чем ближе рассматриваемый стержень к такому стержню, тем точнее будет и приближенное решение.

Для стержня с шарнирно закрепленными концами величина критической сжимающей силы в этом случае определяется из обобщенной формулы Эйлера:

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2}. \quad (3.19)$$

При иных закреплениях стержня вместо действительной длины в уравнение (3.19) подставляется расчетная длина стержня l_p .

Второе расчетное сечение в зависимости от формы деформирования может в момент потери устойчивости определяться как с учетом, так и без учета разгрузки части сечения. Для разгружающейся части сечения касательный модуль принимается равным модулю упругости E , а относительный касательный модуль $\theta = 1$.

4. О МЕТОДЕ ЭНГЕССЕРА — ШЕНЛИ

В последние годы все более широкое распространение для расчета на устойчивость центрально сжатых стержней получает метод Энгессера — Шенли, являющийся полным повторением первого предложения Энгессера, внесенного им в 1889 г. и исправленного им же позднее под влиянием критики Ясинского.

Результатом этих исправлений и экспериментальной проверки Кармана явился общеизвестный метод Энгессера — Ясинского — Кармана, учитывающий упругую разгрузку в части объема

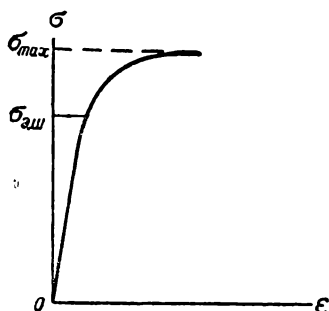


Рис. 3. Диаграмма сжатия стержня

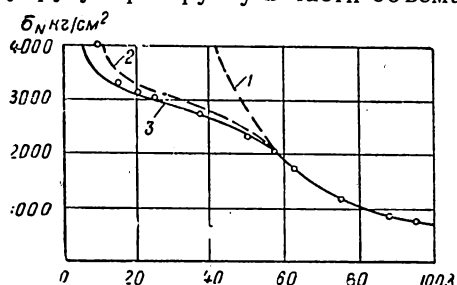


Рис. 4. Критические напряжения для центрально сжатого круглого стержня из алюминиевого сплава 17 ST

1 — по Эйлеру; 2 — по Энгессеру — Ясинскому — Карману; 3 — по Энгессеру — Шенли; о — экспериментальные точки

стержня при его потере устойчивости. Можно считать, что за свою более чем полувековую жизнь этот метод получил хорошее экспериментальное подтверждение.

Несмотря на это, в 1946 г. Шенли выступил с доказательством возможности искривления прямого центрально сжатого стержня при сжимающей силе, получаемой в предположении отсутствия упругой разгрузки в сечении. Это доказательство основано на предположении, что во всех точках сечения происходит увеличение деформаций и, следовательно, поведение материала во всех точках сечения характеризуется касательным модулем E_k .

Сжимающая сила, при которой происходит искривление стержня, продолжает после этого возрастать и достигает максимума при увеличивающихся искривлениях. Зависимость среднего напряжения сжатия σ и относительного укорочения оси ϵ при этом дана на рис. 3, где $\sigma_{ЭШ}$ — напряжение, при котором начинается искривление; σ_{max} — максимальное (критическое) напряжение.

Поскольку величина σ_{max} сравнительно немного превышает $\sigma_{ЭШ}$, то за критическое напряжение в запас надежности прини-

мается $\sigma_{\text{Э,Ш}}$, которое и называют критическим напряжением по Энгессеру — Шенли, или по касательному модулю.

Далее под напряжением, или силой Энгессера — Шенли, и будет пониматься величина $\sigma_{\text{Э,Ш}}$ или отвечающая ему сжимающая сила $N_{\text{Э,Ш}}$.

Следует сказать, что величина $N_{\text{Э,Ш}}$ сравнительно немного отличается от величины критической силы $N_{\text{к}}$, определенной с учетом упругой разгрузки части сечения, как это следует из метода Энгессера — Ясинского — Кармана. В ряде работ, где имеются сравнительные вычисления на основе обоих методов, это расхождение не превышает 10 — 15% для стержней малых гибкостей. По мере увеличения гибкости это расхождение уменьшается до нуля. На рис. 4 приведено такое сравнение для центрально сжатых стержней из алюминиевого сплава 17 ST (рис. взят из [2]).

Необходимо отметить, что такое сравнение мало обоснованно, так как каждый из методов отвечает своему закону нагружения конструкции.

Метод Энгессера — Ясинского — Кармана дает величину критической силы для случая статического нагружения конструкции. При этом рассматривается устойчивость того или иного элемента или всей конструкции под неизменной нагрузкой. В то же время метод Энгессера — Шенли дает критическое значение нагрузки, возрастающей в рассматриваемый момент времени.

Таким образом, каждый из методов отвечает вполне определенным условиям нагружения конструкции.

Если говорить об условиях нагружения строительных конструкций, то они весьма различны.

Собственный вес, снег, давления жидкостей и сыпучих, большинство полезных нагрузок в промышленных зданиях относятся к категории статических нагрузок. Скорость их возрастания, как правило, столь невелика, что никак не может быть соизмерима со скоростями деформирования конструкций при их потере устойчивости. Это указывает на то, что величины усилий в момент потери устойчивости должны считаться неизменными, и, следовательно, расчет таких конструкций на устойчивость должен производиться на основе теории Энгессера — Ясинского — Кармана. Необходимо отметить, что большинство строительных конструкций подвержено воздействию именно таких нагрузок.

В то же время такие воздействия, как ветровое, сейсмическое, движущийся мостовой кран или транспорт различных видов, создают в различных конструкциях и их элементах усилия, изменяющиеся с довольно большими скоростями. Для тех конструкций, для которых скорости возрастания усилий соизмеримы со скоростями деформаций при потере устойчивости, должны

применяться методы расчета, основанные на теории Энгессера — Шенли.

Следует сказать, что применение метода Энгессера — Шенли и в этих случаях должно быть ограничено сравнительно небольшими скоростями изменения усилий и во всяком случае не распространяться на конструкции, скорость изменения усилий в которых измеряется долями секунды, т. е. не распространяться на случаи так называемой динамической потери устойчивости, при которой, как известно, происходит повышение критических сил.

Кроме скорости изменения нагрузки, на выбор того или иного метода расчета влияют и другие факторы. Так, например, теория Энгессера — Ясинского — Кармана более правильно отражает существо явления при потере устойчивости какого-то элемента конструкции в результате перераспределения усилий в статически неопределимой системе, вызванного развитием местных разрушений или деформаций ползучести.

Тем более нет оснований для применения концепции Энгессера — Шенли в тех случаях, когда потеря устойчивости возникает не в результате роста нагрузок, а вследствие снижения отпорности конструкции, вызванного оттаиванием зимней кладки, ростом прогибов в результате развития пластических деформаций (ползучести) и других подобных причин.

Ко всему этому следует добавить, что для конструкций из материалов с диаграммой $\sigma - \epsilon$, близкой к идеализированной упруго-пластической с горизонтальной площадкой текучести, концепция Энгессера — Шенли дает результаты, тождественные с получаемыми из концепции Энгессера — Ясинского — Кармана, так как вся отпорность такой конструкции связана только с упругими ядрами, а в них касательные модули E_k равны модулю Юнга E .

Простота расчета, которая иногда выдвигается как положительная черта метода Энгессера — Шенли, относится только к рассмотрению конструкций из абсолютно прямолинейных элементов.

В этом случае, действительно, постоянство касательного модуля по сечению дает упрощение расчета.

Однако элементы действительных конструкций весьма редко имеют столь малые искривления, что с ними можно не считаться. Если же элемент искривлен, то напряжения в его сечениях не одинаковы по величине, отпорность сечения и в этом случае должна определяться для второго расчетного сечения [1]. Таким образом, техника вычислений в обоих случаях будет одинакова.

Можно полагать, что концепция Энгессера — Шенли получила столь широкое признание лишь потому, что она приводит к более низким значениям теоретических критических сил, т. е. повышает надежность конструкций. Поскольку до настоящего времени большая часть аварий всевозможных конструкций и соору-

жений так или иначе связана с потерей устойчивости, то возможность понизить допускаемые нагрузки кажется заманчивой.

Такой подход к выбору рабочей гипотезы вряд ли можно считать целесообразным.

Резюмируя, можно сказать, что теория Энгессера — Шенли может применяться только при расчете конструкций, подверженных сравнительно быстро возрастающим воздействиям. В обычных же случаях статического нагружения концепция Энгессера — Ясинского — Кармана более правильно отражает существо явления потери устойчивости, и получающиеся на ее основе более высокие значения критических сил вполне оправданы.

5. О КАЧЕСТВЕННОМ ИЗМЕНЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВТОРОГО РОДА

В литературе весьма широко распространено разделение задач устойчивости на два класса — на потерю устойчивости первого и второго родов. Основным критерием потери устойчивости первого рода считается появление в критическом состоянии качественно новых форм деформирования (бифуркация), в то время как при потере устойчивости второго рода форма деформирования стержня (конструкции) считается неизменной, а признаком критического состояния является определенная величина деформации, при которой дальнейшее ее увеличение становится возможным без увеличения нагрузки.

При решении задач устойчивости первого рода говорится о критическом состоянии конструкции, о критической силе, о потере устойчивости в эйлеровом смысле. Наибольшее количество методов расчета связывается именно с этим случаем. Конструкция при этом наделяется определенными идеальными свойствами — все ее элементы считаются лишенными каких-бы то ни было дефектов (искривлений, неравномерности свойств материала по сечениям и т. д.), а все внешние нагрузки предполагаются действующими строго по оси каждого элемента конструкции.

Поскольку реальные конструкции всегда отличны от таких идеальных схем, то в последнее время все чаще рассматривается устойчивость второго рода. В этом случае обычно говорится не о критическом, а о предельном состоянии или о состоянии предельного равновесия, не о критической силе, а о предельной нагрузке, об исчерпании несущей способности и устойчивой прочности конструкции.

В большинстве случаев потеря устойчивости второго рода связывается с упруго-пластической стадией работы конструкции.

Методы расчета для подобных случаев разработаны значительно слабее, причем нередко задача предельного равновесия трактуется как чисто прочностная.

Следует сказать, что столь различная терминология и методы расчета в обоих указанных случаях не могут считаться обоснованными.

Прежде всего необходимо отметить, что метод предельного равновесия пригоден для решения задач и прочности, и устойчивости.

Если условие предельного равновесия формулируется как достижение в сечении элемента конструкции определенного напряженного состояния, опасного для прочности его материала, то это есть условие прочности. Для изогнутого или сжато-изогнутого стержня условие прочности определяет достижение в сечении полного пластического шарнира. Если же для некоторого сечения элемента, способного терять устойчивость, условие предельного равновесия составляет как равенство приращений внутреннего и внешнего усилий (с учетом прогибов стержня), то это — условие устойчивости. Состояние предельного равновесия в этом случае наступает ранее достижения пластического шарнира в наиболее напряженном сечении статически определенного стержня. Критерием в этом случае является величина отпорности стержня, т. е. его способность противодействовать отклонениям от достигнутого состояния равновесия.

Понятие отпорности является общим. Оно применимо к прямому и искривленному стержню, к упругому и находящемуся в упруго-пластической стадии, к стержню, составленному из более или менее однородных элементов или имеющему жесткие прямые и малоустойчивые элементы. Понятие отпорности включает в себя, как частный случай, и жесткость упругого стержня.

В работе автора [1] было показано, что стальной двутавровый стержень (рис. 5, а), нагруженный сжимающей силой N , концевыми изгибающими моментами M_0 и поперечной сосредоточенной силой $2P$ в среднем сечении достигает предельного равновесия при определенной величине упругого ядра, которое на рис. 5, а заштриховано.

Если взять центрально сжатый стержень переменного сечения (рис. 5, б) с законом изменения жесткости по длине, точно таким же, как закон изменения жесткости упругого ядра у первого стержня, то критическая сжимающая сила N_k оказывается равной величине силы N при предельном равновесии первого стержня.

Таким образом, можно говорить о равной устойчивости обоих стержней, что объясняется их одинаковой отпорностью.

Можно также показать, что при достижении каждым сжато-изогнутым стержнем состояния предельного равновесия в характере его деформирования происходит качественное изменение.

Рассмотрим для простоты шарнирно закрепленный внецентренно сжатый стержень прямоугольного сечения из материала, подчиняющегося идеализированной упруго-пластической диаграмме.

Для такого стержня можно построить зависимость прогиба в середине длины f от величины сжимающей силы N . Это будет диаграмма состояний равновесий стержня, изображающаяся на

рис. 6 линией $OAMB$. Точка A отвечает появлению на вогнутой стороне стержня краевой текучести, а точка M дает максимальное значение сжимающей силы N , которое обозначим N_k .

Каждая точка кривой состояний равновесия должна быть определена из расчета стержня переменной жесткости, определяемой по величинам секущих модулей (первое расчетное сечение).

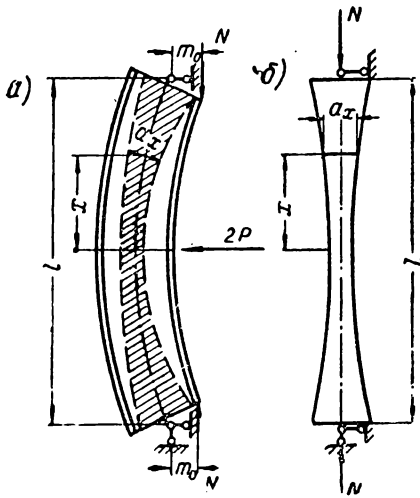


Рис. 5. Расчетная схема центрально сжатого стержня

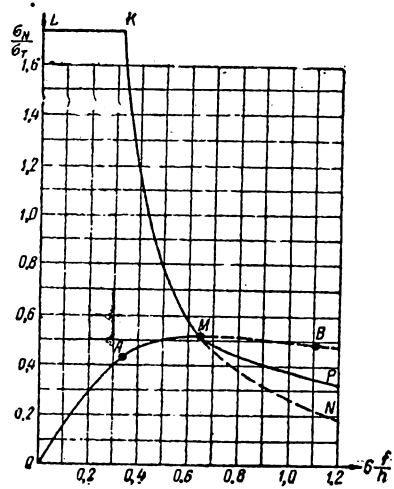


Рис. 6. Диаграммы прогибов и отпорности отклонениям от состояний равновесия для стального стержня прямоугольного сечения гибкостью 70

Для каждого состояния равновесия стержня можно определить величину его отпорности отклонениям от достигнутого состояния равновесия, мерой которой может быть некоторая условная критическая сила $N_{кр}$.

Условность этой силы состоит в том, что при возрастании сжимающей силы N напряженное состояние стержня изменится, пластические зоны станут большими и отпорность стержня уменьшится.

Таким образом, сила $N_{кр}$ характеризует не стержень как таковой, а лишь его определенное состояние.

Отпорность определяется величинами касательных модулей (второе расчетное сечение).

Отношение ординат линий KL и OA для каждой абсциссы определяет коэффициент запаса стержня на устойчивость. Величина этого запаса с ростом силы N понижается:

$$n = \frac{N_{кр}}{N} \quad (5.1)$$

В упругой стадии жесткость стержня постоянна, поэтому и отпорность его определяется горизонтальной линией KL с ординатами, равными эйлеровой силе.

По мере развития пластических деформаций отпорность стержня начинает понижаться (кривая KM).

Коэффициент запаса при этом начинает снижаться не только за счет роста силы N , но и за счет снижения отпорности стержня $N_{кр}$, причем эта вторая причина оказывается, как правило, более действенной.

В точке M обе кривые пересекаются. Отпорность стержня становится равной действующей сжимающей силе, наступает критическое состояние стержня, для которого

$$N = N_{кр} = N_k, \quad (5.2)$$

а коэффициент запаса на устойчивость становится равным единице.

В статически неопределимых системах стержень может работать и в закритической стадии. Производя вычисления, аналогичные предыдущим, можно получить продолжение кривой состояний равновесия MB и кривой отпорности MN , которая всегда будет ниже кривой MB .

Поскольку сжато-изогнутый стержень, работающий в упруго-пластической стадии, не может нести сжимающую силу, превышающую критическую, то, следовательно, состояния равновесия, определяемые кривой MB , не могут иметь места. В каждом состоянии равновесия должно также соблюдаться условие, при котором действующая сжимающая сила не превышает отпорности стержня.

Следовательно, уравнение кривой состояний равновесия стержня в закритической стадии определяется из трех исходных условий:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M = N(m_0 + f); \quad N = N_{кр}. \quad (5.3)$$

Первые два из этих уравнений для стержня прямоугольного сечения из материала с диаграммой Прандтля при односторонней текучести дают

$$N \left(m_0 + f + \frac{h}{2} - \frac{a}{3} \right) = th \sigma_T \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{3} \right), \quad (5.4)$$

где t и h — ширина и высота поперечного сечения.

Если для выражения отпорности принять достаточно точную, с практической точки зрения, формулу Эйлера, то

$$N = N_{кр} = \frac{\pi^2 E I a^3}{12 l^2}, \quad (5.5)$$

где a — глубина упругого ядра в среднем по длине стержня сечении.

Уравнения (5.3) или система уравнений (5.4) и (5.5) позволяют построить кривую состояний равновесия для закритической стадии стержня. Задавшись определенным значением глубины упругого ядра a , из (5.5) находится величина N , а затем из (5.4) находится прогиб f .

По этим результатам строится кривая MP , определяющая состояния равновесия стержня в закритической стадии.

Таким образом, полная диаграмма состояний равновесия стержня определяется двумя кривыми OAM и MP , сходящимися друг с другом в точке M под некоторым углом. Из этого следует, во-первых, что после достижения критического состояния дальнейшего равновесие сжато-изогнутого стержня возможно только при снизившейся сжимающей силе и, во-вторых, и это особенно важно, что в критическом состоянии стержня, работающего в упруго-пластической стадии, происходит скачкообразная смена форм равновесия стержня.

Как известно, упругий сжато-изогнутый стержень постоянного сечения и нагруженный только концевыми нагрузками искривляется по части синусоиды (рис. 7) с расстояниями между точками перегиба l_0 :

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EJ}{N}}. \quad (5.6)$$

С ростом сжимающей силы N это расстояние уменьшается, плавно приближаясь к критическому l_0^k , получаемому из (5.6) подстановкой вместо N величины Эйлеровой силы N_e для данного стержня с учетом его действительных закреплений.

Расстояния l_0 характеризуют формы деформирования стержня в упругой стадии (участок кривой OA на рис. 6).

При появлении в стержне пластических деформаций жесткость его понижается и расстояние между смежными точками перегиба начинает сокращаться быстрее.

В большинстве случаев после появления пластических деформаций жесткость стержня становится переменной по длине, поэтому формула (5.6) становится несправедливой. Однако для качественного анализа, а во многих случаях и для практических расчетов, она может быть использована, если жесткость стержня в упруго-пластической стадии считать постоянной и равной жесткости первого расчетного сечения в наиболее ослабленном по длине месте.



Рис. 7. Форма искривления упругого стержня

В этом случае расстояние между смежными точками перегиба будет равно l_1 :

$$l_1 = \pi \sqrt{\frac{EJ_1}{N}}. \quad (5.7)$$

Величина l_1 приближенно определяет истинную форму деформирования стержня в состояниях равновесия, изображаемых участком кривой AM на рис. 6.

В то же время кривая отпорности на участке LM отвечает некоей условной критической деформации, которая определяется жесткостью второго расчетного сечения стержня EJ_2 . Этой деформации отвечает своя форма деформирования, которая условно может быть также принята за синусоиду, но уже с расстояниями между смежными точками перегиба l_2 , равными

$$l_2 = \pi \sqrt{\frac{EJ_2}{N}}. \quad (5.8)$$

До достижения критического состояния эта форма деформирования является лишь воображаемой, поскольку истинные значения сжимающей силы N менее критических.

Величина l_2 определяется условиями закрепления стержня на его концах.

Для шарнирно закрепленного стержня величина l_2 равна действительной его длине l .

Начиная от точки M , все дальнейшие состояния равновесия стержня, описываемые кривой MP , являются критическими, поэтому для них формы деформирования, характеризующиеся длиной l_2 , становятся действительными. Следовательно, в критическом состоянии (в точке M) происходит скачкообразно качественное изменение формы деформирования стержня.

Более наглядно смену форм равновесия в критическом состоянии можно показать на стержне с концами, упруго закрепленными против угловых поворотов.

Рассмотрим внецентренно сжатый стержень с одинаковыми жесткостями упругих закреплений на обоих концах.

В упругой стадии работы стержень искривляется по части дуги синусоиды с расстоянием между смежными точками перегиба, определяемыми из (5.6).

Расстояние l_0 превышает действительную длину стержня до тех пор, пока сжимающая сила N меньше Эйлеровой силы для шарнирно закрепленного стержня:

$$N < \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (5.9)$$

После появления в стержне пластических деформаций расстояние между смежными точками перегиба определяется из

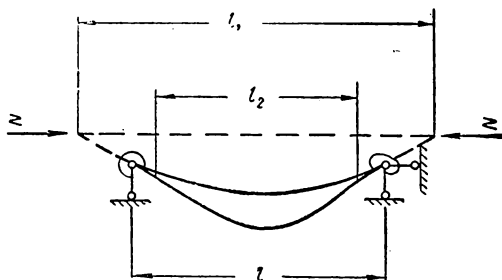
(5.7). Оно становится равным l_1 , которое меньше l_0 . Однако и это расстояние вплоть до критического состояния более действительной длины стержня l (рис. 8).

Можно сказать, что до критического состояния происходит принудительное деформирование стержня сжимающей силой N и концевыми изгибающими моментами M_0 , причем эти моменты частично воспринимаются упругими закреплениями на концах стержня и только частично самим стержнем.

Это условие записывается в таком виде:

$$M_0 = M_A + r_A \theta_A, \quad (5.10)$$

Рис. 8. Формы искривления внецентренно сжатого упруго закрепленного стержня в докритической и закритической стадиях



где M_0 — полный внешний момент в опорном сечении стержня;
 M_A — изгибающий момент на конце стержня;
 r_A — жесткость упругого закрепления;
 θ_A — угол поворота конца стержня.

При потере устойчивости стержня при постоянной сжимающей силе происходит его отклонение от достигнутого состояния равновесия, за счет которого его концы дополнительно поворачиваются на некоторые углы θ_1 . За счет этих поворотов в упругих закреплениях возникают дополнительные изгибающие моменты, равные $r_A \theta_{1A}$. Таким образом, момент в упругом закреплении становится равным

$$M_{\text{закр}} = r_A (\theta_A + \theta_{1A}) \geq r_A \theta_A. \quad (5.11)$$

В то же время внешний изгибающий момент при этом отклонении остается неизменным. Из этого следует, что изгибающий момент, передающийся на стержень, уменьшится и станет равным

$$M_A - r \theta_{1A} < M_A. \quad (5.12)$$

Уменьшение концевых изгибающих моментов при одновременном увеличении прогибов стержня приводит к образованию в пределах длины l точек перегиба (рис. 8). Таким образом, вместо бесперегибной формы деформирования в докритической стадии в критическом состоянии стержня появляется новая форма деформирования с двумя точками перегиба в пределах его действительной длины.

В этом случае качественное изменение формы деформирования стержня еще более наглядно и легко обнаруживается при испытаниях, как это было показано Г. Е. Бельским¹.

Определение величины сжимающей силы, при которой отпорность стержня оказывается исчерпанной, ничем не отличается от определения критической сжимающей силы в эйлеровом смысле для прямого центрально сжатого стержня переменного сечения.

В начале предыдущего параграфа подробно говорилось о тех различиях, которые обычно отмечаются в задачах устойчивости первого и второго рода. Но оказывается значительно более существенным является то общее, что имеется в этих задачах.

На основе вышесказанного можно констатировать, что во всех случаях критическое состояние стержня характеризуется сменой форм равновесия, качественно отличных одна от другой. Эта смена происходит весьма быстро и объясняется тем, что в докритической стадии условие устойчивости удовлетворяется автоматически и никак не влияет на форму деформирования, в закритической же стадии именно условие устойчивости определяет максимально возможную величину сжимающей силы для каждой величины отпорности стержня.

Величина критической сжимающей силы во всех случаях определяется величиной отпорности стержня (конструкции) отклонениям от достигнутого состояния равновесия.

Это одинаково справедливо для упругих и неупругих конструкций, при осевых и внецентренных приложениях сжимающих сил, при наличии или отсутствии поперечных нагрузок и т. д.

Отпорность упругого стержня или конструкции равна его жесткости, поэтому методы расчета, разработанные для проверки устойчивости стержней и конструкций в смысле Эйлера, применимы и к так называемым задачам устойчивости второго рода. Это справедливо, конечно, лишь до тех пор, пока величины искривлений элементов конструкции находятся в таких пределах, что учет их не приводит к существенным погрешностям. Если говорить о строительных конструкциях, то это требование удовлетворяется в подавляющем большинстве случаев.

6. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИИ

В предыдущем параграфе речь шла об отдельных стержнях, шарнирно закрепленных или имеющих на концах упругие крепления. Однако совершенно очевидно, что все сказанное справедливо и для более сложных конструкций. Упругое закрепление конца стержня можно представить себе в виде отдельного стержня или даже группы стержней, каждый из кото-

¹ См. статью Г. Е. Бельского «Теоретические и экспериментальные исследования деформативности и устойчивости упруго защемленных стержней» в этом сборнике.

рых может быть сжатым, растянутым или сжато-изогнутым. Все это не внесет никаких качественных изменений в работу стержня с упруго закрепленными концами. Таким образом, усложняя рассматриваемую систему, можно получить любую стержневую конструкцию — раму, ферму и т. д., которая в расчетном отношении может быть представлена в виде сжато-изогнутого стержня и одной или нескольких поддерживающих систем. Такой прием неоднократно использовался рядом авторов.

Все это позволяет сказать, что в критическом состоянии такие системы также будут претерпевать качественное изменение форм деформирования, а величина критической нагрузки и в этом случае определяется величиной отпорности.

Для такой системы также можно построить диаграмму состояний равновесия OAM (рис. 9) и диаграмму отпорности KLM . Последняя для различных систем может иметь различные очертания, однако во всех случаях по мере приближения к критическому состоянию системы она становится более полой. Для всех рассматриваемых пока случаев состояние равновесия системы, определяемое точкой M , является точкой пересечения обеих диаграмм. Это состояние с одинаковым основанием может быть названо и состоянием предельного равновесия (максимум на диаграмме состояний равновесия), и критическим состоянием (первая точка диаграммы отпорности, отвечающая реально действующей нагрузке).

В то же время имеются конструкции, для которых при определенных видах нагружения диаграмма отпорности может пересечь диаграмму состояния равновесия ранее достижения ею своего максимума M . Такие диаграммы даны на рис. 10 ($K'L'M'$).

Это явление происходит с конструкциями при таких видах нагрузки, которые вызывают деформации, отличные по своему характеру от деформаций, соответствующих наименьшей критической силе.

Рассмотрим, например, шарнирно закрепленный стержень, нагруженный на концах сжимающими силами с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению эксцентрицитетами (рис. 11,а).

Если стержень имеет сравнительно небольшую гибкость и относится по терминологии Н. В. Корноухова к «коротким», то наибольшие изгибающие моменты будут в его концевых участках, где и появятся пластические деформации. На рис. 11,б пластические деформированные зоны заштрихованы. Эпюра моментов инерции J_2 второго расчетного сечения при такой деформации показана на рис. 11,в.

Для такого стержня может быть построена диаграмма состояний равновесия OAM (рис. 12) и диаграмма отпорности KLM .

Такая «принудительная» деформация, обусловленная действующими внешними силами, отвечает искривлению стержня

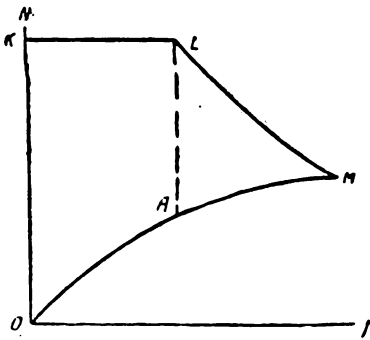


Рис. 9. Диаграммы состояний равновесия и отпорности для конструкции

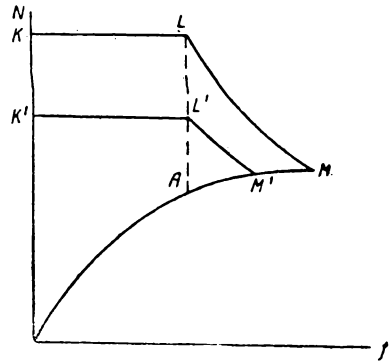


Рис. 10. Диаграммы состояний равновесия и отпорностей для конструкции

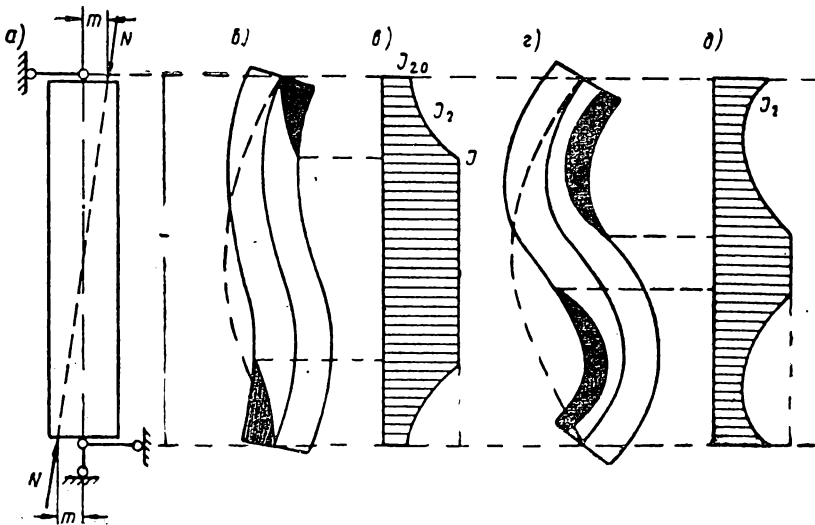


Рис. 11. Формы деформирования сжато-изогнутых стержней

по двум полуволнам. Таким образом, если в критическом состоянии характер деформаций стержня не изменится, то это будет потеря устойчивости по второй форме — одна из высших форм потери устойчивости. Величина критической сжимающей силы при этом будет равна

$$N_{кр2} \approx \frac{C_2 EJ_{20}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}. \quad (6.1)$$

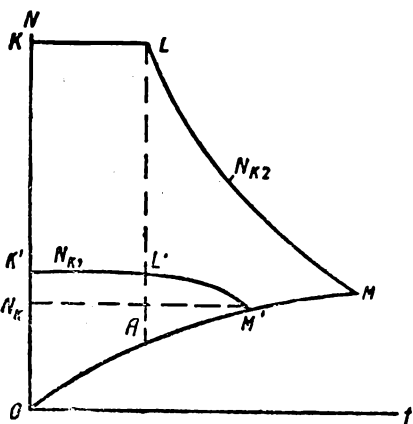


Рис. 12. Диаграммы состояний равновесия и отпорностей для стержня, изгибаемого по двум полуволнам

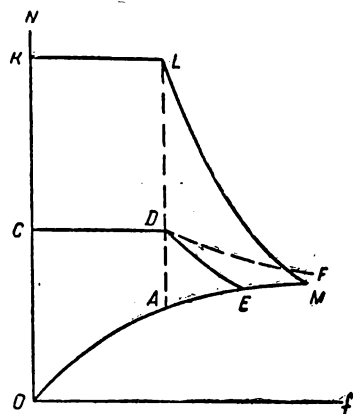


Рис. 13. Диаграммы состояний равновесия и отпорностей для двуглава, сжатого с эксцентриситетом в плоскости стенки

Коэффициент C_2 зависит от формы эпюры J_2 . Величина J_{20} — это момент инерции второго расчетного сечения в концевых сечениях стержня. Величина отпорностей $N_{кр2}$ с развитием пластических деформаций снижается довольно быстро (кривая LM на рис. 12).

Кроме такой формы потери устойчивости по двум полуволнам, возможна также потеря устойчивости и по одной полуволне, показанная пунктиром на рис. 11,б. При такой деформации нижняя пластическая зона закроется, так как приращение деформации при потере устойчивости будет происходить в направлении, противоположном предшествующему. Вторая форма потер устойчивости по одной полуволне, показанная пунктиром на рис. 11,б.

Критическая сила (отпорность) $N_{кр1}$ от деформации, будет равна

$$N_{кр1} = \frac{C_1 EJ}{l^2}. \quad (6.2)$$



Поскольку пластические деформации в таком стержне развиваются лишь на самом его конце, то они мало влияют на величину отпорности, поэтому величина C_1 будет мало отличаться от π^2 и будет медленно снижаться с развитием пластических деформаций. На рис. 12 эта диаграмма отпорностей изобразится кривой $L'M'$, которая пересекает диаграмму состояний равновесия стержня OAM ниже ее максимума M .

Для такого стержня критическое состояние наступает при критической силе N_k , определяемой ординатой точки M' , в то время как достижение предельного состояния возможно лишь при силе $N_{крз}$, определяемой ординатой точки M .

Таким образом, стержень, деформации которого под воздействием внешних сил отвечают по своей форме деформации при высших формах потери устойчивости, теряет устойчивость ранее достижения состояния предельного равновесия.

Если стержень более гибкий, то его искривления значительней (рис. 11,2), эпюра J_2 принимает вид, показанный на рис. 11,2, кривая отпорностей $N_{кр1}$ снижается более резко, чем это показано на рис. 12, однако качественная сторона явления и в этом случае остается такой же, как это изображено на рис. 12.

Вторым примером несовпадения состояний предельного равновесия и критического может быть тонкостенный внецентренно сжатый стержень, имеющий жесткость в плоскости эксцентриситета, значительно большую, чем в перпендикулярном направлении. Допустим, что стержень имеет двутавровое сечение, а плоскость изгиба совпадает с плоскостью стенки.

Для такого стержня также может быть построена диаграмма состояний равновесия OAM (рис. 13), где f — прогиб в середине длины стержня. На этом же рис. 13 изображена диаграмма KLM отпорностей этого стержня отклонениям его в плоскости стенки. Однако, как известно, тонкостенный стержень может терять устойчивость и при изгибно-крутильных деформациях, причем для многих тонкостенных двутавров это будет при более низкой критической нагрузке. Диаграмма CDE отпорностей изгибно-крутильным деформациям также показана на рис. 13. Для такого стержня также характерна потеря устойчивости нижней формы (изгибно-крутильная) ранее достижения состояния предельного равновесия, отвечающего потере устойчивости в виде изгиба стержня в плоскости стенки, которая для рассматриваемого стержня является высшей формой потери устойчивости. Совершенно очевидно, что такая форма потери устойчивости, нарушающая «естественный» ход деформирования стержня, должна быть весьма резкой.

Из сказанного, однако, не следует, что все тонкостенные стержни, сжатые с эксцентриситетом в плоскости большей жесткости, должны терять устойчивость при изгибно-крутильных деформациях ранее достижения состояния предельного равновесия.

В работе автора [1] на рис. 98 показаны величины прогибов и углов поворота для четырех стальных двутавровых стержней, испытанных с одинаковыми на обоих концах эксцентриситетами в плоскости стенки. Эти рисунки приведены на рис. 14. Из них отчетливо видно, что в момент потери устойчивости стержней № 5 и 9 значительную величину имели только прогибы f_y в плоскости стенки; прогибы же f_x в перпендикулярном направлении и параметр Δ (полуразность смещений полок в направлении, перпендикулярном стенке) оставались незначительными.

Это указывает на то, что у этих стержней отпорность их изгибно-крутильным деформациям в упруго-пластической стадии была выше отпорности изгибу в плоскости стенки. Таким образом, низшая форма потери устойчивости этих стержней (за счет большого снижения жесткости на изгиб в плоскости стенки от пластических деформаций) была изгибная в плоскости стенки, совпадающая с формой деформирования стержня в докритической стадии. В этом случае состояние предельного равновесия совпадает с критическим, и величина критической сжимающей силы определяется ординатой точки M .

Диаграмма отпорностей изгибно-крутильным деформациям для таких стержней изобразится кривой DF , показанной на рис. 13 пунктиром.

Подобные же явления могут иметь место и с внецентренно сжатыми стержнями, обладающими большой жесткостью на кручение, в силу чего работающими на косоу изгиб со сжатием.

Направление изгиба таких стержней в процессе увеличения нагрузки непрерывно изменяется (см. [1]). Если изобразить траекторию перемещения, например, центра тяжести среднего сечения такого стержня, то это будет некоторая кривая OAB (рис. 15). Пусть точка B отвечает критическому состоянию стержня.

Если форма деформирования стержня в докритической стадии была близка к форме деформирования, отвечающей низшей критической силе, то потеря устойчивости стержня произойдет в виде резкого развития деформаций докритической стадии (линия BC на рис. 15). Если же докритическая деформация сильно отличалась от нее, потеря устойчивости произойдет в каком-то другом направлении (линия BD на рис. 15).

Аналогичным примером может служить симметричная и симметрично нагруженная рама. Этот случай подробно рассмотрен ниже¹. Такая рама может терять устойчивость при кососимметричных деформациях (низшая форма) ранее достижения состояния предельного равновесия при симметричной форме деформирования, поскольку последняя отвечает высшей форме потери устойчивости рамы.

¹ См. статью А. В. Геммерлинга и Г. Е. Бельского «Несущая способность рам в упруго-пластической стадии» в этом же сборнике.

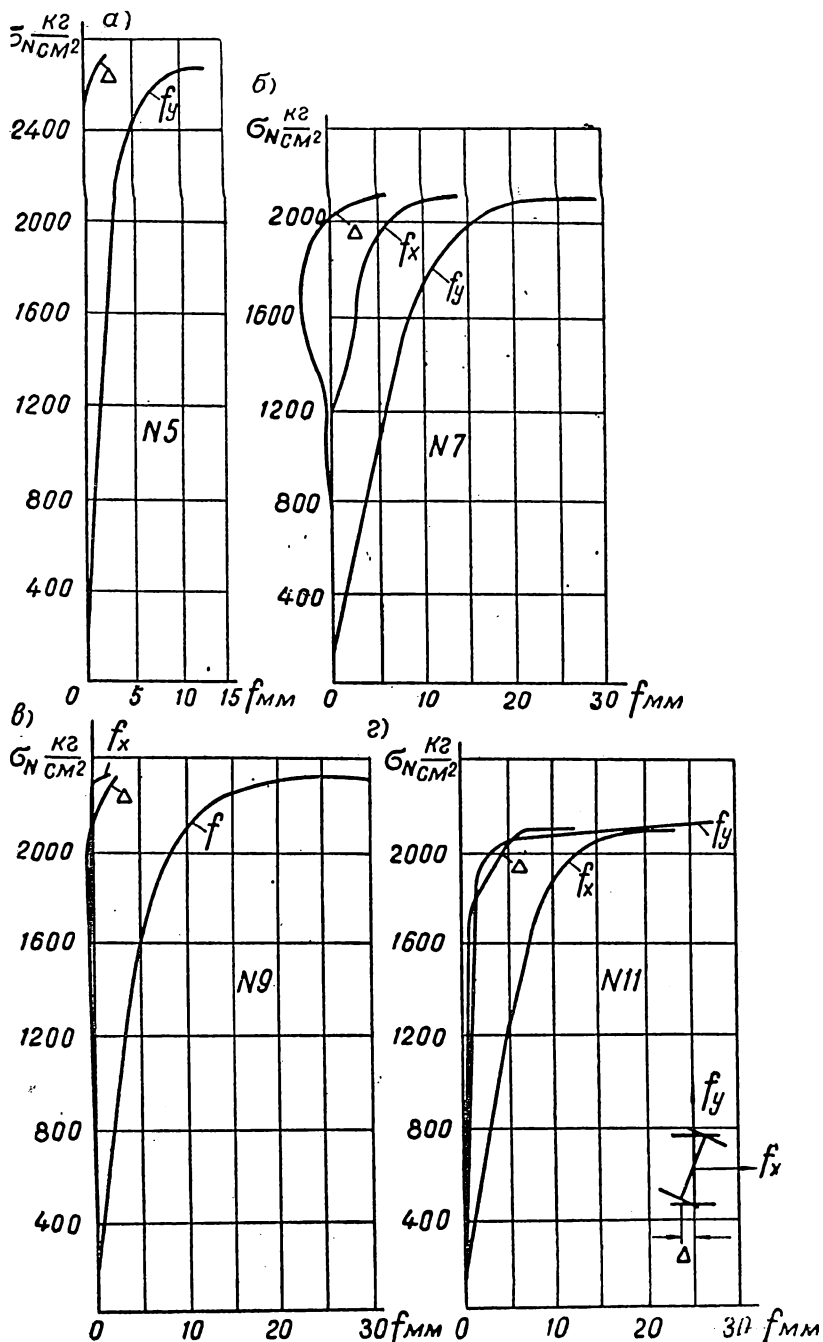


Рис. 14. Перемещения средних сечений двутавровых стержней

Перечисленные примеры, количество которых может быть значительно увеличено, позволяют сделать общий вывод, что состояние предельного равновесия определяет наивысшую возможную несущую способность конструкции, которая, однако, достижима только в тех случаях, когда форма деформирования конструкции совпадает или близка к форме потери устойчивости конструкции при низшей критической нагрузке. В этом случае расчет конструкций методами теорий устойчивости первого и второго родов дают совпадающие результаты.

Если же внешние нагрузки вызывают деформации, отвечающие высшей форме потери устойчивости или комбинации нескольких высших форм, то потеря устойчивости происходит ранее достижения состояния предельного равновесия в форме деформирования, отвечающей низшей критической нагрузке.

В этом случае расчет конструкции методами теории устойчивости второго рода дает завышенную критическую нагрузку.

При всякой потере устойчивости в конструкции имеются определенные зоны с наиболее значительными деформациями. При всех изгибных и изгибно-крутильных формах потери устойчивости таковыми являются зоны действия наибольших дополнительных моментов, возникающих вследствие начавшегося отклонения от положения равновесия.

Чем больше в этих зонах жесткости элементов конструкции, противодействующих развитию дополнительных деформаций (отпорность), тем меньше дополнительные деформации и тем, следовательно, выше критическая нагрузка.

Наиболее неблагоприятными с точки зрения устойчивости являются случаи, когда зоны наибольших дополнительных деформаций совпадают с зонами наименьшей жесткости (отпорности) элементов конструкции, обусловленных, например, развитием пластических деформаций. В таких случаях эти зоны имеют решающее значение, так как именно за счет них дополнительные деформации развиваются особенно сильно.

Это явление имеет место при таких формах потери устойчивости, при которых зоны наибольших дополнительных моментов совпадают с зонами наибольшего развития пластических деформаций в элементах конструкции от внешних нагрузок.

Если такое совпадение «решающих» зон при докритической и критической формах деформирования имеет место, то конструкция может достигнуть состояния предельного равновесия. Если же эти формы деформирования сильно отличаются друг от друга и при переходе от одной к другой в одной или нескольких решающих зонах изменяются направления деформаций на об-

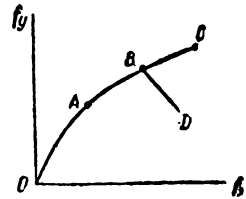


Рис. 15. Траектория перемещения центра тяжести стержня при ко-сом изгибе со сжа-тием

ратные, а сама докритическая деформация имеет форму, резко отличную от отвечающей нижней критической нагрузке, то возможна потеря устойчивости конструкции ранее достижения ею состояния предельного равновесия.

Все вышесказанное позволяет сформулировать несколько общих положений.

1. При всякой потере устойчивости происходит качественное изменение формы деформирования конструкции. Это относится, в частности, и к случаям так называемой потери устойчивости второго рода, в том числе и к внецентренно сжатому стержню с шарнирно закрепленными концами.

2. Критическое состояние конструкции совпадает с состоянием предельного равновесия только в тех случаях, когда зоны наибольших деформаций в докритической стадии совпадают с зонами наибольших дополнительных деформаций при потере устойчивости. Это справедливо, в частности, и для случаев, когда формы деформирования конструкции в докритической стадии и в критическом состоянии сильно отличаются друг от друга. В качестве примера можно привести внецентренно сжатый стержень с упруго закрепленными концами, который (см. рис. 8) в докритической стадии искривляется по плавной кривой, а потеря устойчивости его происходит в форме кривой с двумя точками перегиба.

Несмотря на столь значительное различие форм деформирования, критическое состояние для такого стержня совпадает с состоянием предельного равновесия, поскольку и при докритической и критической деформациях наиболее напряженной является средняя зона.

3. В случае несовпадения наиболее напряженных зон при докритической деформации и дополнительных деформациях при потере устойчивости критическое состояние может наступить ранее достижения предельного равновесия. Это, в частности, возможно при докритической деформации от внешних нагрузок в форме, отвечающей высшей форме потери устойчивости конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геммерлинг А. В., Несущая способность стержневых стальных конструкций, Госстройиздат, 1958.

2. Блейх Ф., Устойчивость металлических конструкций, Физматгиз, 1959.

*Д-р техн. наук А. В. ГЕММЕРЛИНГ,
канд. техн. наук Г. Е. БЕЛЬСКИЙ*

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАМ В УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Расчет статически неопределимых конструкций, работающих в упруго-пластической стадии, является задачей, весьма громоздкой, не имеющей до настоящего времени практического решения. В упруго-пластической стадии трудно предлагать какие-то общие решения, поскольку и схема конструкции, и форма поперечных сечений элементов не могут игнорироваться. Ниже рассматриваются плоские рамные системы. Во всех случаях осевые деформации элементов рамы как в упругой, так и в упруго-пластической стадии не учитываются.

1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАМ

Рамы являются широко распространенными конструкциями и применяются в самых различных зданиях и сооружениях. Все или часть элементов рамы, как правило, воспринимают сжимающие силы и изгибающие моменты, поэтому наличие сжато-изогнутых стержней в раме является одной из ее основных особенностей, весьма существенно влияющих на поведение рамы под нагрузкой и на ее несущую способность.

Применяемые рамы весьма разнообразны по материалу, по их степени статической неопределимости, по соотношению величин изгибающих моментов и осевых сил в отдельных их элементах, по гибкостям сжато-изогнутых стержней и по ряду других признаков. Это привело к различным методам определения несущей способности стальных рам, достаточно широко освещенным в литературе.

Рассмотрим все эти методы и построим графически на рис. 1 получающиеся при этом зависимости между нагрузкой на раму P и прогибом в каком-то характерном сечении f . Независимо от

количества нагрузок, действующих на раму, все их будем считать изменяющимися пропорционально одному параметру.

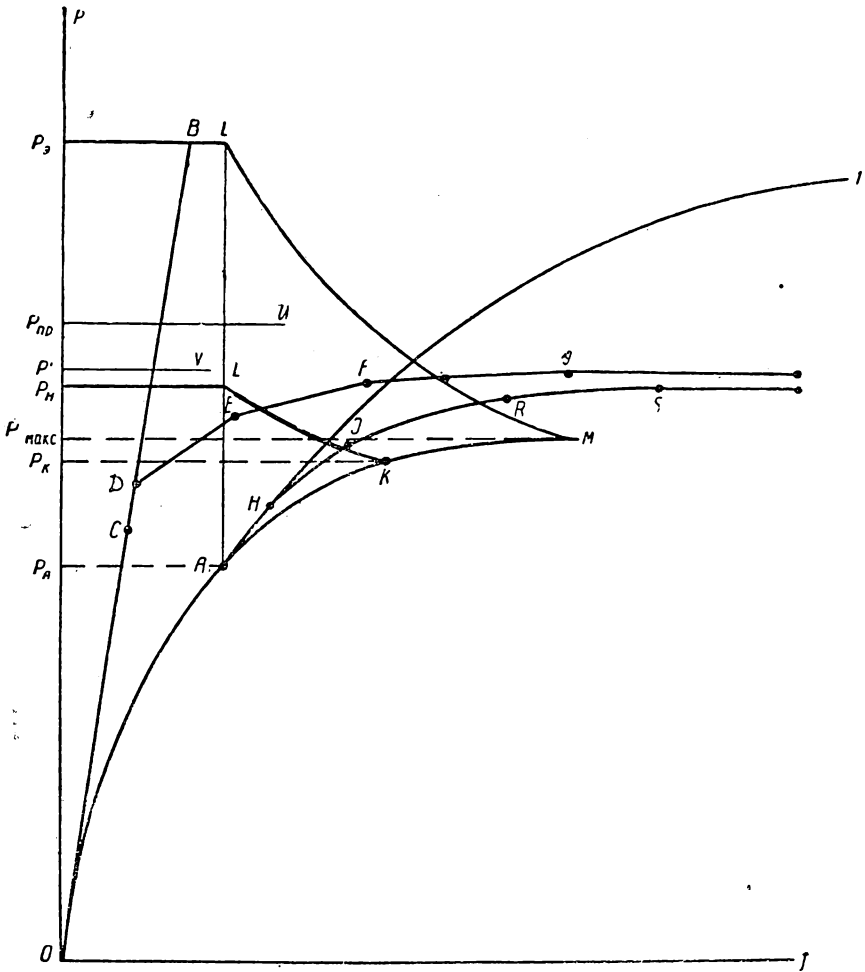


Рис. 1. Сравнение различных методов расчета рам

а) Общепринятый метод расчета рам

В практике проектных организаций определение усилий в элементах рамы производится, как правило, по **недеформированной** схеме, т. е. рама считается линейно деформируемой системой (прямая ODB на рис. 1). По усилиям, определенным из такого расчета, проверяются прочность и устойчивость отдельных стержней. Внешняя нагрузка P , при которой в одном или нескольких

элементах рамы возникают расчетные усилия, равные по величине расчетной несущей способности этих элементов, и принимается за предельную нагрузку для всей рамы (точка C на рис. 1).

Таким образом, в стадии определения усилий в элементах рамы сама рама считается упругой системой с неизменной схемой деформирования, а в стадии проверки сечений каждый элемент предполагается работающим в упруго-пластической стадии. С принципиальной точки зрения такой метод явно противоречив, однако во многих случаях он дает достаточную для практики точность.

б) Метод расчета на устойчивость упругих рам

Рамы, применяемые в строительстве, имеют, как правило, сжатые или сжато-изогнутые элементы, в силу чего возможна их потеря устойчивости.

До последнего времени строительная механика развивалась в основном в направлении усовершенствования методов расчета упругих систем, поэтому наибольшее количество теоретических исследований посвящено методам расчета упругих рам. Наиболее крупными являются исследования Н. В. Корноухова, А. Ф. Смирнова, В. Г. Чудновского.

В этих исследованиях критическая (Эйлерова) нагрузка на раму определяется из условия возможности появления новых форм равновесия системы, отличных от предшествующих (разветвление форм равновесия). В докритической стадии все элементы рамы предполагаются прямолинейными, что приводит к необходимости сосредоточения всех нагрузок, действующих на раму, в ее узлах.

Если под характерной деформацией рамы подразумевать прогиб в каком-то ее сечении, то на рис. 1 зависимость между нагрузкой P и деформацией f при этом методе расчета изобразится ломаной линией OP_3B ; если же под деформацией f понимать сближение концов какого-то сжатого стержня рамы, то эта зависимость изобразится ломаной OBL .

Поскольку узловая нагрузка на раму является весьма редким случаем, то такой расчет для большинства рам следует рассматривать как весьма условный и не позволяющий оценить действительное поведение рамы в процессе возрастания нагрузки.

в) Метод расчета на устойчивость рам при узловых нагрузках в упруго-пластической стадии

Этот метод является развитием предыдущего метода, применяемого к рамам из материала с криволинейной зависимостью между напряжением и относительным удлинением.

Рассматриваемый здесь вид потери устойчивости также является потерей устойчивости в смысле Эйлера. В связи с этим критическая нагрузка на раму также определяется из условия

возможности появления новых форм равновесия системы, качественно отличных от педшестующих. В докритической стадии все элементы рамы предполагаются прямолинейными, что приводит к необходимости рассмотрения рам только при узловых нагрузках.

При расчете рам по этому методу нужно учитывать, что жесткости на изгиб сжатых стержней зависят от величин осевых напряжений в этих стержнях в момент потери устойчивости.

В зависимости от характера изменения внешней нагрузки на раму в момент ее потери устойчивости существует два метода определения жесткостей сжатых элементов. Если нагрузка неизменна ($\Delta P=0$), применяется теория Энгессера — Ясинского — Кармана; при этом жесткости сжатых стержней становятся равными $E_{пр} J$. Если же исследуется потеря устойчивости рамы при возрастающей нагрузке ($\Delta P>0$), применяется теория Энгессера — Шенли; при этом жесткости сжатых стержней равны $E_k J$.

Если под характерной деформацией рамы подразумевать прогиб в каком-то ее сечении, то на рис. 1 зависимость между внешней нагрузкой и деформацией при расчете по теории Энгессера — Ясинского — Кармана изображается ломаной линией $OP_{пр}U$; при расчете по теории Энгессера — Шенли — ломаной линией $OP'V$. Этому методу присущи те же недостатки, что и предыдущему.

г) Метод расчета упругих рам на устойчивую прочность

Указанные в п. «б» недостатки расчета упругих рам на устойчивость при узловых нагрузках побудили Н. В. Корноухова [1] разработать метод расчета упругих рам по деформированной схеме, который был им назван расчетом на устойчивую прочность. Каждый стержень при этом рассматривается нагруженным изгибающими моментами и осевой силой (сжимающей или растягивающей), что позволяет учесть нелинейный характер деформирования рамы.

Следует отметить, что этот метод может применяться в случае небольших деформаций рам, когда справедлива теория малых деформаций изгиба. В противном случае для состояний рам, близких к критическим, расчет становится недопустимо неточным.

При помощи этого метода могут быть определены форма и величины деформации рамы, которые изображены на рис. 1 кривой OAT , асимптотически приближающейся к горизонтальной прямой с ординатами $P_{кр}$. Величина критической силы $P_{кр}$ определяется при этом из расчета упругой рамы, однако величина ее может несколько отличаться от силы P_s , полученной для линейно деформируемой системы (на рис. 1 разница между P_s и $P_{кр}$ не показана, и они приняты одинаковыми, потому что в большинстве случаев их величины достаточно близки).

Для определения величин деформаций рамы этим методом приходится решать громоздкие системы трансцендентных уравнений; это явилось одной из причин сравнительно слабого внедрения этого метода в практику.

Второй, не менее важной причиной явилось то, что весь расчет производится для упругой рамы, следовательно, он справедлив лишь до появления в элементах рамы пластических деформаций. Таким образом, этот метод расчета может быть применен лишь при принятии за критерий несущей способности рамы появления в ее наиболее напряженном сечении краевой текучести, что не позволяет полностью использовать несущую способность рамы. Состояние рамы в момент появления краевой текучести на рис. 1 изображается точкой *A*. Следовательно, при расчете рамы этим методом нагрузка P_a должна приниматься за предельную.

д) Метод последовательного образования пластических шарниров (вариант расчета по недеформированной схеме)

Как экспериментальные, так и теоретические исследования давно уже выявили, что несущая способность рам сохраняется и после появления в ее элементах пластических деформаций. Это послужило причиной новых методов расчета, позволяющих более правильно оценить несущую способность рам и получить за счет этого более экономичные решения.

В связи с тем, что учет деформированной схемы рамы сопряжен с необходимостью громоздкого решения системы трансцендентных уравнений, были сделаны предложения считать статически неопределимую раму упругой линейно деформируемой системой до момента развития в одном из ее сечений полного пластического шарнира (линия *OD* на рис. 1). Далее считать, что в этот момент в системе произошло мгновенное изменение за счет появления в наиболее напряженном сечении идеального шарнира, воспринимающего, однако, полную величину усилий, приведших к его появлению. Такой шарнир называют пластическим. Все дальнейшее увеличение нагрузки воспринимается системой с одним новым идеальным шарниром. Поскольку степень статической неопределимости системы при этом снизилась на единицу, то жесткость рамы уменьшилась.

Такая изменившаяся система вновь предполагается упругой линейно деформируемой, однако рост деформаций в ней происходит быстрее (линия *DE* на рис. 1), чем до появления первого пластического шарнира.

Полученная система предполагается неизменной до момента появления второго пластического шарнира в одном из сечений рамы.

Повторяя все эти рассуждения, можно получить $n+1$ пластический шарнир в системе, n раз статически неопределимой. После этого система превращается в механизм и ее несущая способ-

ность оказывается исчерпанной. Все стадии расчета рамы после появления второго пластического шарнира изображаются на рис. 1 ломаной линией *EFG* с количеством прямых отрезков $n+1$.

Такой метод расчета носит название метода последовательного образования пластических шарниров и разрабатывается многими советскими и зарубежными учеными и инженерами (Н. С. Стрелецкий, Е. И. Беленя, Л. И. Меламент, Neal, Girkmann, J. F. Baker и многие другие).

При таком методе расчета полностью игнорируются все вопросы устойчивости рамы в целом и отдельных ее элементов, поэтому этот метод по своему существу является расчетом рамы на прочность. Результаты расчета рам этим методом неоднократно проверялись экспериментально, что доказало достаточную точность в определении предельной нагрузки для ряда различных рам. В то же время применение этого метода в других случаях может привести к существенным ошибкам не в запас надежности. Одним из существенных недостатков этого метода является также невозможность учета изменения формы деформирования рамы, сопровождающегося уменьшением пластических деформаций в одном из «шарниров».

е) Метод последовательного образования пластических шарниров (вариант расчета, учитывающий деформации рамы)

Отличие этого метода от предыдущего состоит в том, что при раскрытии статической неопределимости рамы величины единичных реакций определяются с учетом влияния осевых сил на прогибы стержней, т. е. конструкция считается нелинейно деформируемой, но упругой до образования первого пластического шарнира.

Дальнейшее приращение нагрузки воспринимается новой конструкцией, имеющей идеальный шарнир в месте образования первого пластического шарнира; при этом рама опять считается упругой нелинейно деформируемой системой.

Такая схема сохраняется до образования второго пластического шарнира и т. д.

За предельную нагрузку принимается нагрузка, отвечающая образованию $n+1$ пластического шарнира. На рис. 1 результаты такого расчета изображены отрезками выпуклых кривых (*OAHJRS*) с точками перелома, отвечающими появлению каждого из пластических шарниров.

Следует сказать, что этот метод расчета применяется в основном в зарубежных странах (работы J. F. Baker, M. R. Hognе и др.) для расчета стальных рам со сравнительно гибкими стойками.

ж) Метод расчета на устойчивость рам в упруго-пластической стадии

Из расчета упругой рамы со сжато-изогнутыми стержнями (по деформированной схеме) можно получить форму и величины ее деформаций. Такой расчет справедлив до появления в наиболее напряженном сечении рамы краевой текучести. На рис. 1 это состояние определяется точкой A на кривой OAT .

Начиная с этого момента, по мере развития пластических деформаций в элементах рамы жесткость этих элементов и всей рамы в целом начнет все более уменьшаться и деформации будут увеличиваться быстрее, чем в упругой раме. На рис. 1 зависимость между P и f изобразится некоторой кривой AM , более пологой, чем кривая AT для упругой рамы.

По мере увеличения нагрузки P и связанного с этим увеличения пластических зон в элементах рамы кривая AM будет становиться все более пологой и, наконец, в точке M достигнет максимума.

Однако истинное значение критической нагрузки P_k может быть равно P_{max} , но может быть и меньше его.

Для каждого действительного состояния рамы, характеризующегося какой-то точкой кривой состояний равновесий OAM , можно определить величину условной критической нагрузки $P_{кр}$, при которой произойдет потеря устойчивости рамы, если нагрузка будет увеличиваться, а жесткость рамы будет оставаться неизменной.

В упругой стадии работы рамы величина условной критической нагрузки либо вовсе не меняется, либо изменяется очень медленно за счет увеличения или уменьшения сжимающих сил в элементах рамы. Поэтому можно считать, что состояниям равновесия рамы в упругой стадии (кривая OA) будут отвечать условные критические нагрузки $P_{кр}$, изображающиеся прямыми линиями $P_{ЭL}$ (или $P_{нL'}$).

После появления в элементах рамы пластических деформаций ее жесткость начинает снижаться, за счет чего снижается и ее отпорность — способность сопротивляться отклонениям от достигнутого состояния равновесия. Таким образом, в упруго-пластической стадии работы рамы изменение условных критических нагрузок, характеризующих ее отпорность, на рис. 1 изображается кривыми LM (или $L'K$).

В первом случае кривая LM пересекает кривую состояний равновесия в точке M ее максимума. В этом случае ордината точки M дает величину критической нагрузки на раму, совпадающую с величиной максимальной нагрузки P_{max} .

Такое пересечение обеих кривых в точке M имеет место в тех случаях, когда внешние силы P вызывают деформации рамы, близкие по своей форме к деформациям, отвечающим потере устойчивости по низшей форме, которой отвечает минимальная из

всех возможных критических сил. В этом случае, действительно, деформации рамы нарастают достаточно плавно до достижения критического состояния.

Если же внешние силы вызывают какие-то иные по своей форме деформации, отвечающие, например, одной из высших форм потери устойчивости или комбинации нескольких высших форм, то в этом случае картина будет иной.

Для такой рамы необходимо построить еще одну кривую условных критических нагрузок, характеризующих отпорность рамы для отклонений в форме деформаций, отвечающих низшей форме потери устойчивости рамы.

Эта диаграмма начинается с точки P_n , отвечающей значению низшей критической нагрузки в Эйлеровом смысле для рассматриваемой рамы. Пока рама находится в упругой стадии, величина этой отпорности меняется мало, что на рис. 1 условно изображено горизонтальной линией $P_n L'$.

После появления в элементах рамы пластических деформаций отпорность ее отклонениям, отвечающим низшей форме потери устойчивости, также начинает понижаться (кривая $L'K$); однако это снижение происходит медленнее, чем это определялось кривой LM , поскольку в этом случае часть пластических зон может закрываться.

В точке K в момент пересечения обеих диаграмм наступает критическое состояние рамы и происходит ее потеря устойчивости при деформациях, качественно отличных по своей форме от деформаций рамы в докритической стадии. Деформирование рамы при этом должно быть тем более резким, чем сильнее отличаются друг от друга эти формы деформирования.

2. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Из рис. 1 и из сказанного в п. 1 видно, что разные методы определения несущей способности рам основаны на совершенно различных принципах и на разных критериях предельного состояния рамы. В силу этого величины предельных нагрузок для одних и тех же рам, определенные различными методами, могут весьма сильно отличаться друг от друга. Количественно это различие в разных случаях может быть и очень небольшим, и очень значительным, поэтому определение возможных областей применения каждого из методов является совершенно необходимым.

Все сравнения различных методов будем вести с последним, седьмым, методом, поскольку он один позволяет учесть все факторы, влияющие на несущую способность рамы.

Следует отметить, что выполнение такого сравнения в общем виде затруднено, поэтому оно не претендует на исчерпывающую полноту. В то же время оно представляется совершенно необходимым, поскольку во многих работах, посвященных изучению того или иного из описанных методов, вопросы возможной об-

ласти его применения совершенно не затрагиваются, что может приводить в отдельных случаях к применению не пригодных для данной рамы методов расчета и к большим ошибкам в величине, полученной из расчета несущей способности рамы.

1. Метод, изложенный в действующих НиТУ 121—55, может быть существенно улучшен, если коэффициенты приведения будут даны отдельно для стоек свободных рам и рам, закрепленных от горизонтальных смещений в уровне верхнего ригеля. При этом должны быть даны возможно более полные указания, позволяющие определить, к какой из этих двух групп должна быть отнесена та или иная рама.

Коэффициент увеличения приближенно может быть получен из линейной интерполяции между свободными и несвободными рамами.

2. Метод последовательного образования пластических шарниров (вариант расчета по недеформированной схеме) дает тем меньшие ошибки, чем меньше гибкость стоек рамы и чем большая доля сечения стоек используется на восприятие изгибающих моментов по сравнению с долей, используемой на восприятие сжимающих сил. В соответствии с этим метод может считаться приемлемым для расчета рам со стойками гибкостью не более 50—60 и при изгибающих моментах, для восприятия которых используется не менее $\frac{2}{3}$ площади сечения.

Нужно отметить, что этот метод недопустим для расчета рам, исчерпание несущей способности которых происходит при деформациях, качественно отличных по форме от деформаций, вызванных внешними воздействиями. Это ограничение относится также и к варианту расчета с учетом деформированной схемы, который, однако, сохраняет приемлемую точность для рам с несколько более гибкими стойками и позволяет более правильно определить места максимальных изгибающих моментов.

3. Метод расчета на устойчивость рам, как упругих систем, дает достаточную точность только при больших гибкостях стоек. Для несвободных рам этот метод, как правило, следует считать неприемлемым, а для свободных рам он допустим при гибких стойках и сравнительно слабом ригеле. Эти же ограничения справедливы и для метода расчета на устойчивость рам при узловой нагрузке в упруго-пластической стадии.

4. Метод расчета на устойчивую прочность следует считать приемлемым в тех же случаях, что и метод расчета упругих рам.

5. Метод расчета рам на устойчивость в упруго-пластической стадии следует рассматривать как единственный общий метод, справедливый во всех случаях и позволяющий правильно оценить несущую способность рамы. Из этого вытекает необходимость дальнейшей разработки этого метода.

3. ОТДЕЛЕНИЕ РАСЧЕТА НА ДЕФОРМАТИВНОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ ОТ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Расчет рам методом двух расчетных сечений может выполняться различно. Для определения деформированного состояния простых рам можно рекомендовать составление их из отдельных, порознь рассчитанных стержней.

Решение этой задачи ниже производится при следующих упрощающих предпосылках:

а) диаграмма работы материала принимается идеализированная упруго-пластическая с горизонтальной площадкой текучести;

б) форма сечения стоек рамы принимается в виде двутавра с одинаковыми поясами. Толщина поясов предполагается малой по сравнению с высотой стенки, за счет чего в расчетной схеме сечения вся площадь пояса сосредоточивается в линии нулевой толщины;

в) ригель рамы предполагается работающим в упругой стадии. Деформации ригеля определяются без учета действующих в нем осевых сил.

После определения деформированного состояния рамы производится расчет ее на устойчивость при нагрузках, перенесенных в узлы. При этом стойки предполагаются прямолинейными с постоянной по длине жесткостью.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Первый этап расчета может быть выполнен при помощи метода начальных параметров в несколько измененном виде — с заданием всех четырех граничных условий на одном из концов стержня.

Такое упрощение, естественно, приводит к тому, что часть полученных решений окажется неприемлемой по тем или иным условиям задачи. Это увеличивает количество вычислений. Существенное упрощение их получается при применении вычислительных машин. При проведении данного исследования была использована электронная цифровая вычислительная машина «Урал-1».

Формулы метода начальных параметров для упругого сжато-изогнутого стержня при отсутствии поперечных нагрузок имеют, как известно [1], следующий вид (рис. 2):

$$v_z = v'_0 + \frac{1}{k} \varphi_0 \sin kz - \frac{M_0}{N} (1 - \cos kz) - \frac{Q_0}{N} \cdot \frac{1}{k} (kz - \sin kz); \quad (4.1)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 \cos kz - \frac{M_0}{N} k \sin kz - \frac{Q_0}{N} (1 - \cos kz); \quad (4.2)$$

$$M_z = EJk \varphi_0 \sin kz + M_0 \cos kz + Q_0 \frac{1}{k} \sin kz; \quad (4.3)$$

$$Q_z^s = N \varphi_0 \cos kz - M_0 k \sin kz + Q_0 \cos kz. \quad (4.4)$$

В формулах (4.1) — (4.4) обозначено

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (4.5)$$

Написанные формулы дают возможность построить эпюры v_z , φ_z , M_z и Q_z^s в зависимости от условий в начальном сечении стержня.

Эти формулы могут быть использованы также для исследования формы равновесия сжато-изогнутого стержня, работающего в упруго-пластической стадии.

В работе [2] доказано, что формулы для определения деформаций упругих стержней и стержневых систем могут быть использованы также для расчета таких конструкций при работе их за пределами упругих деформаций. В этом случае в расчетных формулах изгибная жесткость стержней определяется моментом инерции первого расчетного сечения.

Следовательно, для определения величин v_z , φ_z , M_z и Q_z^s при работе стержня за пределами упругости в формулы (4.1) — (4.5) нужно вводить геометрические характеристики первого расчетного сечения.

Нужно отметить, что, поскольку пластические деформации при изгибе стержня захватывают различную часть высоты сечений вдоль длины стержня, стержень постоянного сечения, находящийся в стадии упруго-пластических деформаций, эквивалентен упругому стержню переменного сечения. Разбивая стержень, находящийся в упруго-пластической стадии, на короткие участки и считая постоянной жесткостью (соответственно сечение) на каждом из них, можно определить усилия и перемещения на каждом участке не аналитически, а путем численного суммирования их на всем стержне.

На каждом участке жесткость стержня определяется моментом инерции первого расчетного сечения, который в свою очередь зависит от действующих усилий. Благодаря этому в пределах каждого участка можно пользоваться формулами (4.1) — (4.5) метода начальных параметров для упругого сжато-изогнутого стержня. Величины, определяемые по этим формулам в конце

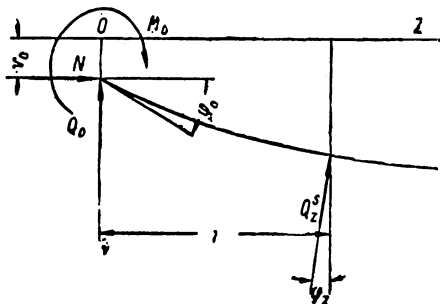


Рис. 2. Расчетная схема конца стержня

участка, являются начальными параметрами для следующего участка.

Расчет стержней, работающих в упруго-пластической стадии, может быть сделан по следующей схеме.

Рассмотрим стержень длиной l и сжатый силой N с известными условиями на одном из его концов (в начале координат) v_0, φ_0, M_0 и Q_0 (см. рис. 3). При этом комбинация начальных условий может быть различна в зависимости от того, имеем ли мы шарнирное, жесткое или упругое опирание в начале координат.

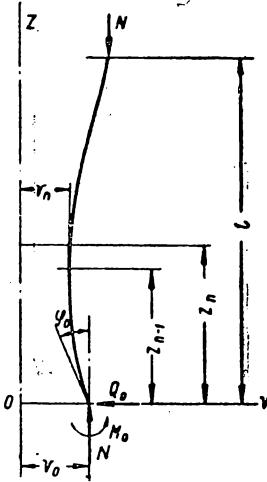


Рис. 3. Расчетная схема сжато-изогнутого стержня

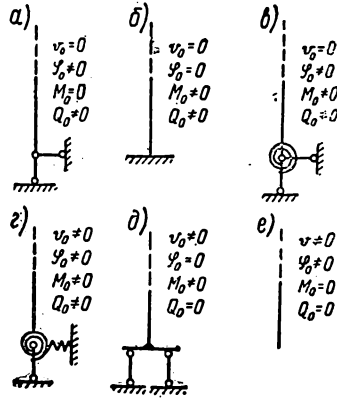


Рис. 4. Схемы опорений концов стержней

На рис. 4 показаны возможные схемы опирания стержней и граничные условия, характеризующие каждую схему опирания. Нужно отметить, что сечение в начале координат может находиться как в стадии упругих, так и упруго-пластических деформаций.

Длину стержня разбиваем на равные части. В дальнейших выкладках принято, что длина каждого участка (рис. 3) определяется по формуле

$$z_n - z_{n-1} = 0,25h, \quad (4.6)$$

где h — высота сечения стержня в плоскости изгиба.

С учетом сказанного формулы начальных параметров могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{v_n}{h} = \frac{v_{n-1}}{h} + m_{n-1} \cos 0,25A_{n-1} + \frac{1}{A_{n-1}} \times \\ \times (\varphi_{n-1} + q_0) \sin 0,25A_{n-1} - m_{n-1} - q_0 \cdot 0,25; \quad (4.7)$$

$$\varphi_n = -A_{n-1} m_{n-1} \sin 0,25A_{n-1} + (\varphi_{n-1} + q_0) \cos 0,25A_{n-1} - q_0; \quad (4.8)$$

$$m_n = m_{n-1} \cos 0,25 A_{n-1} + \frac{1}{A_{n-1}} (\varphi_{n-1} + q_0) \sin 0,25 A_{n-1}; \quad (4.9)$$

$$q_n^s = -m_{n-1} A_{n-1} \sin 0,25 A_{n-1} + (\varphi_{n-1} + q_0) \cos 0,25 A_{n-1}. \quad (4.10)$$

В формулах (4.7) — (4.10) обозначено

$$\begin{aligned} m_{n-1} &= \frac{M_{n-1}}{Nh}; \quad q_0 = \frac{Q_0}{N}; \quad q_n^s = \\ &= \frac{Q_n^s}{N}; \quad A_{n-1} = h \sqrt{\frac{N}{EJ_{1(n-1)}}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

При помощи формул (4.7)—(4.11) и условий в начале координат v_0 , φ_0 , m_0 и q_0 путем последовательного расчета имеется возможность определить величины v_n , φ_n , m_n и q_n^s в любом сечении стержня, работающего как в стадии упругих, так и упруго-пластических деформаций.

Для каждой стадии напряженно деформированного состояния сечения сжато-изогнутого стержня вид формул (4.7)—(4.11) остается неизменным, но выражения для A_{n-1} принимают различные значения в зависимости от того, имеются ли упруго-пластические деформации.

а) Односторонняя текучесть

Из условий равновесия внешних и внутренних сил (рис. 5,б)

$$N = \sigma_N F = \sigma_T F - \frac{1}{2} \sigma_1 at - F_1 \sigma_1 \quad (4.12)$$

определяем величину напряжения σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{F(\sigma_T - \sigma_N)}{0,5at + F_1}. \quad (4.13)$$

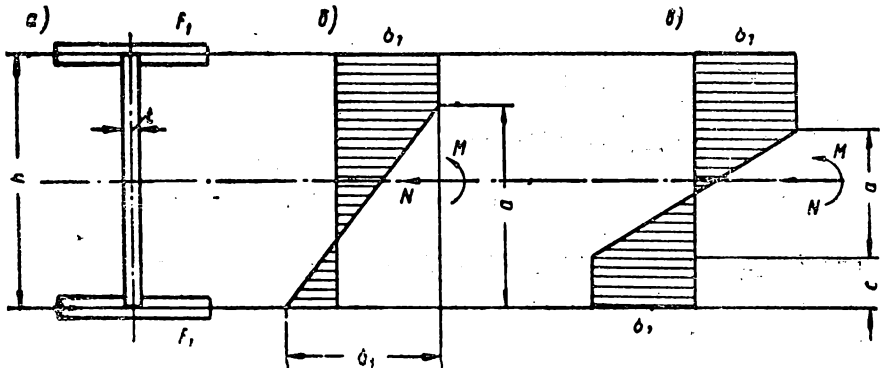


Рис. 5. Нормальные напряжения при односторонней и двусторонней текучести

Предел односторонней текучести соответствует условию

$$\sigma_1 = 2\sigma_T.$$

Откуда

$$a = \frac{F}{t} \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right) - 2 \frac{F_1}{t}. \quad (4.14)$$

Подставляя полученное значение a в условие равновесия внешних и внутренних моментов

$$M = F (\sigma_T - \sigma_N) \frac{h}{2} - \frac{1}{6} \sigma_1 a^2 t, \quad (4.15)$$

после преобразований получим

$$m_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_N} \cdot \frac{3\beta_0 - 2}{6\beta_0} - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \cdot \frac{\beta_0}{3} + \frac{1}{6}, \quad (4.16)$$

где

$$m_2 = \frac{M_2}{Nh}; \quad \beta_1 = \frac{F_1}{th}; \quad \beta_0 = 2\beta_1 + 1. \quad (4.17)$$

В этом случае сжимающая сила изменяется в пределах

$$0 \leq \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \leq \frac{1}{\beta_0}. \quad (4.18)$$

Если

$$\frac{1}{\beta_0} < \frac{\sigma_N}{\sigma_T} < 1, \quad (4.19)$$

для m получим значение

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right). \quad (4.20)$$

Пределы изменения m , при которых справедливы формулы односторонней текучести, определяются следующими значениями:

$$m_1 \leq m \leq m_2, \quad (4.21)$$

где m_1 соответствует краевой текучести, а m_2 определяется из (4.16) или (4.20).

Величина A_{n-1} определяется по формуле

$$A_{n-1} = h \sqrt{\frac{N}{EJ_{1(n-1)}}}, \quad (4.22)$$

где $J_{1(n-1)}$ — момент инерции первого расчетного сечения при односторонней текучести, который для заданного напряженного состояния является функцией глубины упругого ядра $\alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{h}$.

Для определения $J_{1(n-1)}$ при известных величинах $\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$ и m_{n-1} воспользуемся условиями равновесия внешних и внутренних

сил и моментов. В формулу (4.15) подставим значение σ_1 из (4.13). После преобразований получим квадратное уравнение относительно α_{n-1} вида:

$$2\alpha_{n-1}^2 + 3 \frac{2 \frac{\sigma_N}{\sigma_T} (|m_{n-1}| + 0,5) - 1}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T}} \alpha_{n-1} + 6\beta_1 \frac{2 \frac{\sigma_N}{\sigma_T} (|m_{n-1}| + 0,5) - 1}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T}} = 0. \quad (4.23)$$

Определив величину α_{n-1} из (4.23), значение $J_{1(n-1)}$ можно вычислить по формуле

$$\frac{J_{1(n-1)}}{th^3} = \frac{J_\eta}{th^3} - \frac{S_\eta^2}{F_\eta} \cdot \frac{1}{th^3}, \quad (4.24)$$

в которую входят геометрические характеристики первого расчетного сечения. Методика определения этих величин дана в работе [2]; здесь же приведены лишь конечные рабочие формулы:

$$\frac{F_\eta}{th} = \beta_1 + \alpha + \beta_1 \omega_1 - w \ln \omega_1; \quad (4.25)$$

$$\frac{S_\eta}{th^2} = 0,5 [-\beta_1 - \alpha(1 - \alpha) + \beta_1 \omega_1 + 2w(1 - \alpha) + w(2w + 1 - 2\alpha) \ln \omega_1]; \quad (4.26)$$

$$\frac{J_\eta}{th^3} = \frac{\beta_1}{4} + \frac{\alpha^3}{12} + \frac{\alpha(1 - \alpha)^2}{4} + \frac{\beta_1}{4} \omega_1 + 0,5w\alpha(1 - \alpha) - w(w + 0,5 - \alpha)(1 - \alpha) - w(w + 0,5 - \alpha)^2 \ln \omega_1. \quad (4.27)$$

В формулах (4.25) — (4.27) обозначено

$$w = \frac{(2\beta_1 + \alpha)\alpha}{2\beta_0 \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T}\right)}; \quad \omega_1 = \frac{w}{w + 1 - \alpha}. \quad (4.28)$$

В формулах (4.25) — (4.28) для упрощения записи опущен индекс $(n - 1)$ при α .

б) Двусторонняя текучесть

Условия равновесия внешних и внутренних сил и моментов могут быть записаны в виде (рис. 5, в)

$$N = F \sigma_N = F \sigma_T - \frac{ta}{2} 2\sigma_T - tc 2\sigma_T - F_1 \cdot 2\sigma_T; \quad (4.29)$$

$$M = F (\sigma_T - \sigma_N) \frac{h}{2} - ta \sigma_T \left(c + \frac{a}{3}\right) - \frac{tc^2}{2} 2\sigma_T. \quad (4.30)$$

Определяя из (4.29) величину c и подставляя ее в (4.30), получим

$$M = Fh \sigma_T \left(B - \frac{\alpha^2}{12\beta_0} \right), \quad (4.31)$$

где

$$B = \left(\frac{1}{2} + \beta_1 \right) \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right) - \frac{\beta_0^2}{4} \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right)^2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_0}. \quad (4.32)$$

Полный пластический шарнир получится при подстановке в (4.31) $\alpha = 0$:

$$M = Fh \sigma_T B. \quad (4.33)$$

Из формулы (4.33) получим

$$m_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_N} \cdot \frac{2\beta_0 - 1}{4\beta_0} - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \cdot \frac{\beta_0}{4}. \quad (4.34)$$

При этом сжимающая сила меняется в пределах

$$0 \leq \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \leq \frac{1}{\beta_0}. \quad (4.35)$$

Пределы изменения m , при которых справедливы формулы двусторонней текучести, могут быть записаны в виде

$$m_2 \leq m \leq m_3, \quad (4.36)$$

где m_2 определяется из (4.16), а m_3 — из (4.34).

Величина A_{n-1} определяется по формуле

$$A_{n-1} = h \sqrt{\frac{N}{EJ_{1(n-1)}}}, \quad (4.37)$$

где $J_{1(n-1)}$ — момент инерции первого расчетного сечения при двусторонней текучести, который является функцией упругого ядра α_{n-1} .

Из формулы (4.31) определяем

$$\alpha_{n-1} = 2 \sqrt{3\beta_0 \left(B - m_{n-1} / \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right)}. \quad (4.38)$$

Момент инерции первого расчетного сечения определяется по формуле (4.24), в которую подставляются геометрические характеристики J_η , S_η и F_η в зависимости от α_{n-1} из (4.38). Формулы для определения этих величин при двусторонней текучести имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{F_\eta}{th} &= \beta_1 \left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\xi} \right) + \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \ln \omega_2 \omega_3 \right); \\ \frac{S_\eta}{th^2} &= \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{\alpha}{\alpha + 2\xi} \right) + \frac{\alpha}{2} (1 - \alpha) - \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$-\frac{\alpha}{2}(1-\alpha-2\xi)\left(1+\frac{1}{2}\ln\omega_2\omega_3\right); \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_n}{ih^3} &\approx \frac{\alpha^3}{12} + \frac{\beta_1}{4}\left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{\alpha}{\alpha+2\xi}\right) + \\ &+ \frac{\alpha}{4}[(1-2\alpha-2\xi)(\alpha+\xi-1) + \xi] + \\ &+ \frac{\alpha}{8}(1-\alpha-2\xi)^2(2+\ln\omega_2\omega_3). \end{aligned} \quad (4.41)$$

В формулах (4.39) — (4.41) обозначено

$$\omega_2 = \frac{2-\alpha-2\xi}{\alpha}; \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{\alpha}{2-\alpha-4\xi}; \quad (4.42)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\beta_0 \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right) - \alpha - 2\beta_1 \right]. \quad (4.43)$$

В формулах (4.39) — (4.43) для упрощения записи опущен индекс $(n-1)$ при α .

При пользовании полученными формулами нужно иметь в виду, что для определения глубины упругого ядра α_{n-1} (см. 4.23 и 4.38) величина m берется по модулю $|m_{n-1}|$. В формулы начальных параметров [см. (4.7) — (4.10)] величина m_{n-1} подставляется с учетом своего знака.

Ввиду большого количества вычислительных операций при расчете по указанному методу оказалось целесообразным механизировать вычислительный процесс, применив для этой цели электронную цифровую вычислительную машину «Урал-1». Произведено преобразование всех соотношений и формул, определяющих напряженно деформированное состояние сжато-изогнутых стержней, к виду, удобному для программирования. Составлена программа для расчета сжато-изогнутых стержней на машине «Урал-1». Исходные данные, какими являются начальные условия, физические и геометрические характеристики стержня вводятся с пульта управления вручную. Дальнейший ход задачи полностью автоматизирован. Машина «Урал-1» выдает все искомые величины в каждом сечении стержня¹.

На рис. 6 графически изображены результаты, полученные на вычислительной машине, для стержня симметричного двутаврового сечения, расчетные характеристики которого следующие:

$$\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2; \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad \beta_1 = 1; \quad \beta_0 = 3.$$

¹ Все работы по механизации вычислительного процесса были проведены на счетно-вычислительной станции ЦНИИСКА под руководством канд. техн. наук Н. С. Чаусова.

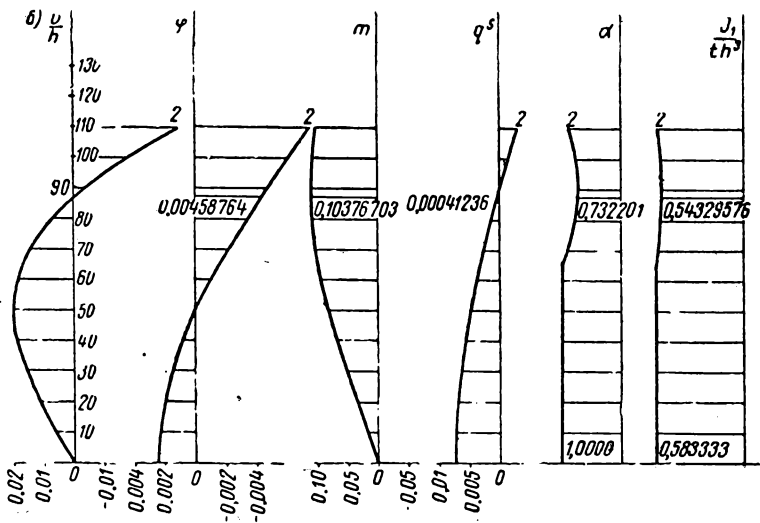
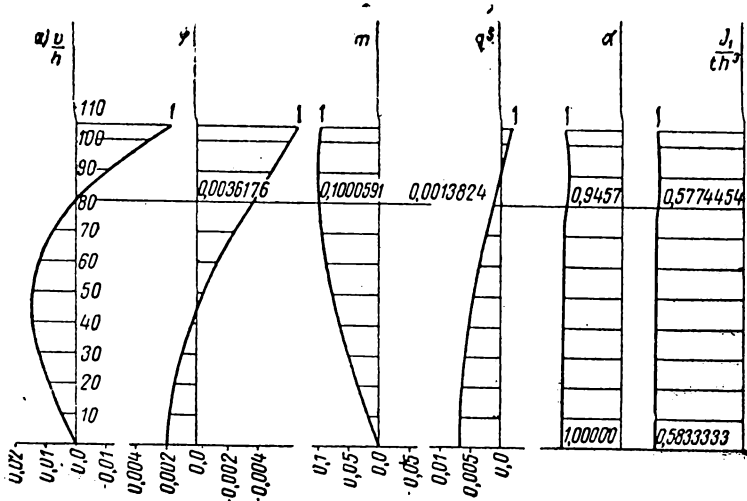
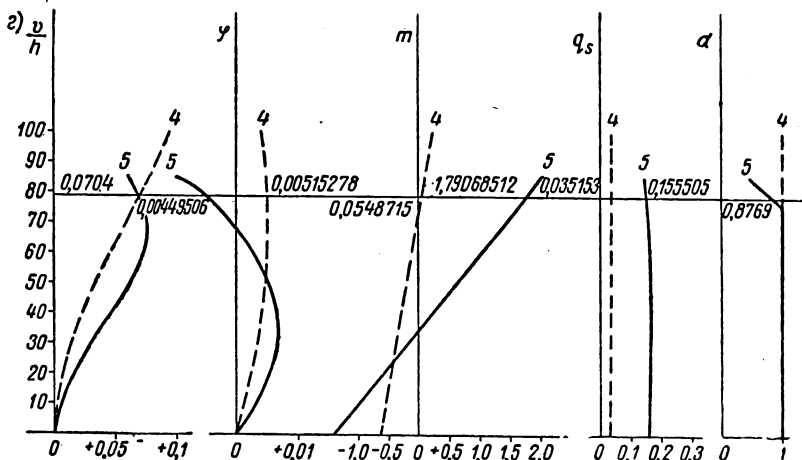
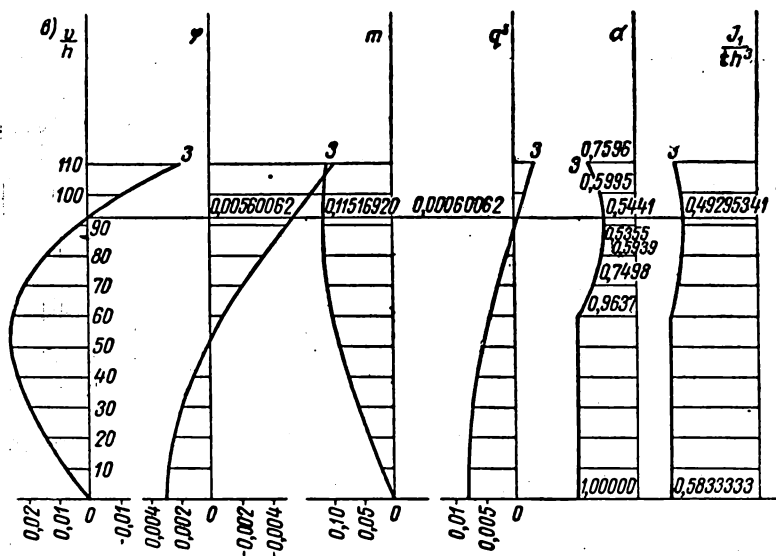


Рис. 6. Эпюры деформаций и



усилий в сжато-изогнутом стержне

Величины осевых напряжений, действующих в стержнях, а также начальные условия в начале координат приведены в табл. 1.

Таблица 1

Стержни	$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$	$\frac{v_0}{h}$	φ_0	m_0	q_0
1	0,8	0	0,002	0	0,005
2	0,8	0	0,0025	0	0,005
3	0,8	0	0,003	0	0,015
4	0,16	0	0	-0,6	0,03
5	0,19	0	0	-1,4	0,16

Начальные условия первых трех стержней отвечают шарнирному опиранию, двух последних — жесткому защемлению.

Графики на рис. 6 дают эпюры $\frac{v}{h}$, φ , m , q^s , α и J_1 для стержней, находящихся либо в стадии упругих (стержень 4), либо упруго-пластических деформаций (стержни 1, 2, 3, 5).

5. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ РАМ, РАБОТАЮЩИХ В СТАДИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Имея эпюры величин v , φ , m и q_s , показанные на рис. 6, можно сконструировать рамы простейших типов, находящиеся под воздействием определенных нагрузок, вызывающих в определенных зонах рамы пластические деформации.

Нужно отметить, что ответа на вопрос, является ли полученное состояние равновесия рамы критическим, устойчивым или неустойчивым, из такого расчета получить нельзя. Для этого нужно определить отпорность рамы отклонениям от достигнутых состояний равновесия и сравнить ее с величиной внешней нагрузки, действующей на раму. Об этом будет сказано в следующем параграфе. Сейчас определим прогибы и углы поворота узлов рамы, а также зоны развития пластических деформаций в стержнях.

На рис. 7 показана П-образная, симметрично загруженная рама. Для ее компоновки воспользуемся результатами исследования стойки, показанными на рис. 6, *в*.

При симметричной нагрузке узлы 1 и 2 (рис. 7) являются неподвижными ($v_1 = v_2 = 0$). Это условие сразу определяет высоту рамы (см. рис. 6, *в*), так как оно выполняется в сечении стойки, удаленном на 92,5 шага от начала координат

$$H = 92,5 \cdot 0,25h = 23,1h,$$

где h — высота сечения стойки.

Принимая размеры стенки двутаврового сечения $t \cdot h = 1,30$ см, получим $H = 23,1 \cdot 30 = 693$ см.

Нормальная сила, действующая в стойках рамы, будет равна ($\beta_1 = 1$)

$$N = 0,8 \cdot 2400 \cdot 90 = 172\,800 \text{ кг} = 172,8 \text{ т.}$$

Изгибающий момент, действующий в узле 1 рамы, равен

$$M = mNh = 0,1151692 \cdot 172,8 \cdot 0,3 = 5,97 \text{ тм.}$$

Сжимающее усилие в ригеле определится из [1]:

$$q^s = q_z + v'_z, \quad (5.1)$$

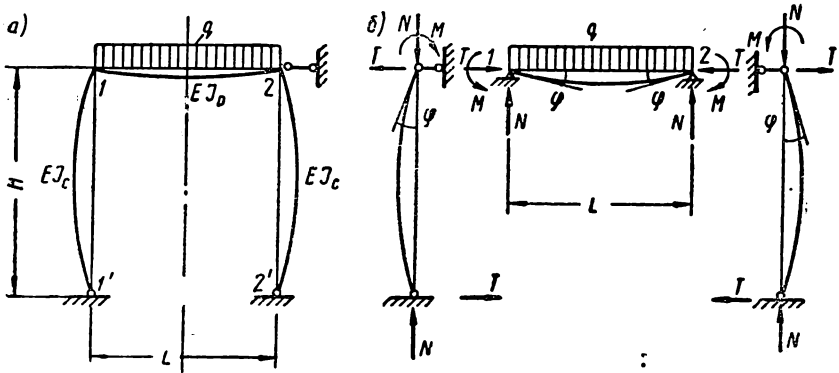


Рис. 7. П-образная рама и форма ее деформирования

откуда

$$\begin{aligned} T &= q_z N = N (q^s - v'_z) = \\ &= 172,8 (-0,00060062 + 0,00560062) = 172,8 \cdot 0,005 = 0,864 \text{ т.} \end{aligned}$$

Угол поворота верхнего узла рамы получим из рис. 6, в.

$$\varphi = 0,00560062.$$

На основании полученных величин деформаций и усилий, действующих в узлах 1 и 2, можно рассмотреть равновесие ригеля 1—2 (рис. 7, б).

Из условия равенства нулю суммы проекций всех действующих сил на вертикальную ось имеем следующую зависимость:

$$qL = 2N. \quad (5.2)$$

Рассматривая равновесие ригеля как сжато-изогнутого стержня, можно получить выражение для угла поворота узла 1 (или 2) при упругой работе ригеля [3]:

$$\varphi = \frac{qL^3}{24EJ_p} \cdot \frac{3 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu_p}{2} - \frac{\nu_p}{2} \right)}{\left(\frac{\nu_p}{2} \right)^3} - \frac{ML}{2EJ_p} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\nu_p}{2}}{\frac{\nu_p}{2}}, \quad (5.3)$$

где

$$v_p = L \sqrt{\frac{T}{EJ_p}}. \quad (5.4)$$

Усилие в ригеле T сравнительно мало и его влиянием на углы поворота сечений ригеля можно пренебречь. В этом случае формула (5.3) получит обычный вид:

$$\varphi = \frac{qL^3}{24EJ_p} - \frac{ML}{2EJ_p}. \quad (5.5)$$

Подставляя значение q из формулы (5.2) в формулу (5.5), получим

$$\varphi = \frac{NL^2}{12EJ_p} - \frac{ML}{2EJ_p}. \quad (5.6)$$

Дальнейшее решение может быть дано в двух вариантах.

Если известно сечение ригеля (J_p), из формулы (5.6) можно определить пролет рамы по формуле

$$L = 3 \frac{M}{N} + \sqrt{9 \frac{M^2}{N^2} + \frac{12EJ_p \varphi}{N}}. \quad (5.7)$$

Если задан пролет рамы L , легко определяется момент инерции ригеля J_p :

$$J_p = \frac{L}{2E\varphi} \left(\frac{NL}{6} - M \right). \quad (5.8)$$

Для рассматриваемой рамы формула (5.7) имеет вид

$$L = 10,35 + \sqrt{107,2 + 0,817J_p}. \quad (5.9)$$

Принимаем, например, момент инерции ригеля

$$J_p = 30J_c = 30 \cdot 15\,720 = 472\,000 \text{ см}^4.$$

В этом случае $L = 10,35 + 622 = 632,35 \text{ см}$.

Поперечная нагрузка на ригеле при этом будет равна

$$q = \frac{2N}{L} = \frac{2 \cdot 172,8}{6,3235} = 54,6 \text{ т/пог. м.}$$

На рис. 8 показан график зависимости L от J_p , построенный по формуле (5.9), в предположении, что ригель работает в упругой стадии.

На рис. 9 показана П-образная рама с защемленными в основании стойками. Рама подвергается действию вертикальной и горизонтальной нагрузки. Воспользуемся результатами расчета двух стоек, показанными на рис. 6, *г*.

Высота рамы определяется из условия $v_1 = v_2$.

Как видно из рис. 6, *г*, это условие выполняется в сечениях стоек, расположенных на расстоянии 78 шагов от начала координат.

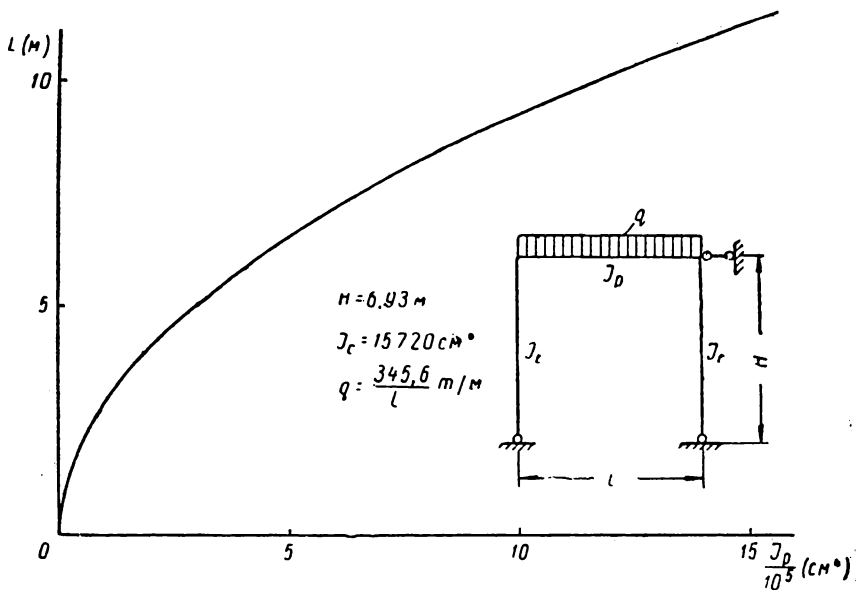


Рис. 8. Зависимость L от J_D для П-образной рамы

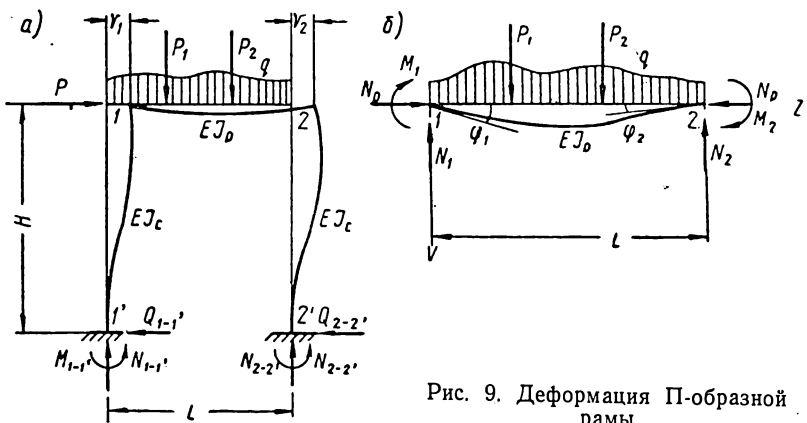


Рис. 9. Деформация П-образной рамы

Из рис. 6, ε устанавливаем $H=78 \cdot 0,25 h=19,5 h$.

Принимая размеры стоек $t \cdot h=1 \cdot 30$ см, получим $H=19,5 \times 30=585$ см.

Нормальные силы, действующие в стойках рамы, равны

$$N_{1-1'} = 0,16 \cdot 2400 \cdot 90 = 34\,500 \text{ кг};$$

$$N_{2-2'} = 0,19 \cdot 2400 \cdot 90 = 41\,000 \text{ кг}.$$

Изгибающие моменты, действующие в узлах $1'$ и $2'$, равны

$$M_{1'} = 30 \cdot 34\,500 \cdot 0,6 = 621\,000 \text{ кгсм};$$

$$M_{2'} = 30 \cdot 41\,000 \cdot 1,4 = 1\,720\,000 \text{ кгсм}.$$

Поперечные силы, передающиеся на стойки $1-1'$ и $2-2'$, будут равны

$$Q_{1-1'} = 0,03 \cdot 34\,500 = 1035 \text{ кг};$$

$$Q_{2-2'} = 0,16 \cdot 41\,000 = 6560 \text{ кг}.$$

Из условий равновесия всей рамы определяем горизонтальную нагрузку

$$P = Q_{1-1'} + Q_{2-2'} = 7595 \text{ кг}.$$

Усилие в ригеле

$$N_p = Q_{2-2'} = 6560 \text{ кг}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению равновесия ригеля (см. рис. 9). На обоих концах ригеля известны четыре условия:

$$v_{1p} = v_{2p} = 0;$$

$$\varphi_1 = 0,00515278, \quad \varphi_2 = -0,00449506;$$

$$M_1 = 56\,900 \text{ кгсм}, \quad M_2 = 2\,200\,000 \text{ кгсм};$$

$$Q_1 = N_1 = 34\,500 \text{ кг}, \quad Q_2 = N_2 = -41\,000 \text{ кг}.$$

Пользуясь методом начальных параметров, при упругой работе ригеля можно записать условия на втором его конце:

$$v_{2p} = v_{1p} + \frac{1}{k} \varphi_1 \sin kL - \frac{M_1}{N_p} (1 - \cos kL) - \frac{Q_1}{N_p} \cdot \frac{1}{k} (kL - \sin kL) + \Delta v_L; \quad (5.10)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cos kL - \frac{M_1}{N_p} k \sin kL - \frac{Q_1}{N_p} (1 - \cos kL) + \Delta \varphi_L; \quad (5.11)$$

$$M_2 = EJ_p k \varphi_1 \sin kL + M_1 \cos kL + Q_1 \frac{1}{k} \sin kL + \Delta M_L; \quad (5.12)$$

$$Q_2 = N_p \varphi_1 \cos kL - M_1 k \sin kL + Q_1 \cos kL + \Delta Q_L - N_p \varphi_2, \quad (5.13)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{N_p}{EJ_p}}. \quad (5.14)$$

Принимая, например, величины L и J_p заданными, можно записать систему уравнений (5.10) — (5.13) в виде

$$B_1 = \Delta v_L; \quad (5.15)$$

$$B_2 = \Delta \varphi_L; \quad (5.16)$$

$$B_3 = \Delta M_L; \quad (5.17)$$

$$B_4 = \Delta Q_L, \quad (5.18)$$

где B_1, B_2, B_3 и B_4 — постоянные величины;
 $\Delta v_L, \Delta \varphi_L, \Delta M_L$ и ΔQ_L — величины, учитывающие влияние пролетных факторов (нагрузок и первоначальных деформаций в пролете стержня); они определяются как «балочные» величины.

Внешняя нагрузка должна быть задана таким количеством параметров, чтобы система уравнений (5.15) — (5.18) имела единственное и вполне определенное решение. Поскольку эти величины являются функциями начальных параметров, принятых на нижнем конце стойки, частью из которых приходится задаваться произвольно, то возможны и неудачные решения, которые следует отбрасывать.

После того, как определено равновесное состояние рамы, можно определить размеры зон развития пластических деформаций (как по длине каждого стержня, так и по глубине распространения их по сечению) и установить закон изменения жесткости второго расчетного сечения в каждом стержне рамы.

В рассмотренных примерах из расчета определялись генеральные размеры рамы и действующая на нее нагрузка. В такой постановке задача обычно не решается, так как в большинстве случаев генеральные размеры конструкции заданы.

Для удобного осуществления практических расчетов целесообразным будет построение вспомогательных графиков, связывающих генеральные размеры определенных типов рам с величиной внешней нагрузки, как это сделано для шарнирно опертых стержней, работающих в упруго-пластической стадии. На основании таких графиков могут быть предложены более правильные рекомендации по вопросу расчетных длин стоек.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ, РАБОТАЮЩИХ В СТАДИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

При исследовании устойчивости равновесных состояний нужно иметь в виду, что форма потери устойчивости может качественно отличаться от формы деформирования рамы в докрити-

ческой стадии. Особенно ярко это обстоятельство проявляется в симметричных свободных рамах, работающих на симметричную нагрузку. Так, например, для П-образной рамы характер ее деформирования под действием вертикальной нагрузки показан на рис. 10, а. Соответствующая этой деформации эпюра моментов показана на рис. 10, б. Величины деформаций рамы имеют малые, но конечные и вполне определенные значения; изгибающие

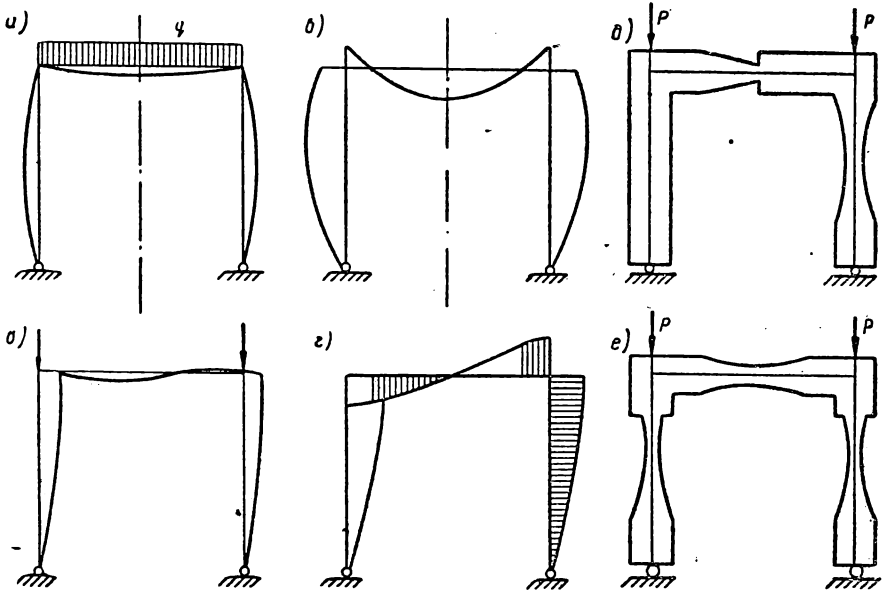


Рис. 10. Характер деформирования и форма потери устойчивости П-образной рамы

моменты в сечениях стержней также вполне определены. Когда значение нагрузки q приближается к своей критической величине, симметричная форма изгиба переходит в несимметричную форму потери устойчивости.

Характер деформирования рамы в момент потери устойчивости показан на рис. 10, в; эта форма потери устойчивости накладывается на основную деформацию рамы, показанную на рис. 10, а. Эпюра моментов, соответствующая деформации рамы из рис. 10, в, показана на рис. 10, г. Величины деформаций и моментов в этом случае являются бесконечно малыми и определяются с точностью до постоянного параметра как в обычных задачах Эйлеровой устойчивости.

Сопоставляя эпюры моментов, показанные на рис. 10, б и 10, г, можно заключить, что при потере устойчивости на одних участках стержней рамы изгибающие моменты имеют то же на-

правление, что и при изгибе под действием внешней нагрузки (эти участки на рис. 10, *г* заштрихованы); на других участках — противоположное. Это значит, что в первом случае (при догрузке) пластические деформации в стержнях рамы продолжают развиваться в прежнем направлении и жесткость этих стержней определяется жесткостью вторых расчетных сечений; во втором случае (при разгрузке) пластические деформации в стержнях рамы закрываются и их жесткость определяется моментом инерции всего сечения ($J_2=J$). Закон изменения жесткости рамы при ее потере устойчивости схематично показан на рис. 10, *д*.

Если горизонтальное смещение ригеля рамы предотвращено, форма ее потери устойчивости имеет примерно такой же вид, как и характер деформирования под действием внешней нагрузки (рис. 10, *а*). В этом случае закон изменения жесткости рамы в момент ее потери устойчивости схематично показан на рис. 10, *е*.

Как видно из рис. 10, *д* и *е*, жесткость стержней по их длинам может меняться по различным достаточно сложным законам. В связи с этим замкнутое решение, основанное на интегрировании дифференциальных уравнений, получить практически невозможно.

Приближенный метод расчета таких рам на устойчивость достаточно детально разработан в работе [4]. В основу расчета приняты: метод деформаций в канонической форме, графоаналитический прием решения и аппроксимация изогнутых осей отдельных стержней в момент потери устойчивости всей системы в целом. Получены формулы единичных реакций метода деформаций для рамных стержней, жесткость которых по длине может изменяться по любому закону.

Окончательные формулы для определения реактивных моментов и поперечных сил от единичных смещений приведены в табл. 2. Методика вывода этих формул была принята такая же, как и для упруго закрепленных стержней¹.

При исследовании устойчивости всей рамы в целом методом деформаций выбор основной системы и определение степени кинематической неопределимости производятся точно так же, как это делается в статике сооружений.

Так, например, при определении методом деформаций критической нагрузки при симметричной форме потери устойчивости рамы, показанной на рис. 10, *е*, основная система и единичная эпюра показаны на рис. 11.

Условие устойчивости такой рамы имеет следующий вид:

$$3i \Phi_1(\nu) + 2i_p = 0. \quad (6.1)$$

¹ См. статью Г. Е. Бельского «Теоретические и экспериментальные исследования деформативности и устойчивости упруго защемленных стержней» в этом сборнике.

В формуле (6.1) функция $\Phi_1(\nu)$ берется из табл. 2:

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{3 \left(G_3 + \frac{\nu^2 S_2 D_1}{1 - \nu^2 B_1} \right)}. \quad (6.2)$$

Обозначения в формуле (6.2) ясны из табл. 2.

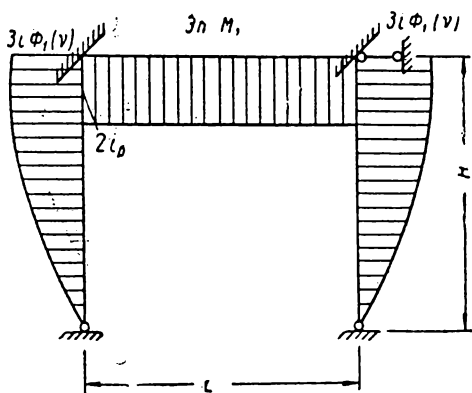


Рис. 11. Единичная эпюра П-образной рамы при симметричной форме потери устойчивости

Аппроксимируя форму изогнутой оси подходящим уравнением, из (6.1) получим условие для определения критического параметра ν .

Необходимо отметить, что условием критического состояния рамы при таком решении всегда будет алгебраическое уравнение относительно параметра ν .

Из расчета на устойчивость рамы со стержнями переменного сечения определяем величину критической нагрузки $P_{кр}$ и сравниваем ее с величиной действующей внешней

нагрузки P . Если окажется, что $P_{кр} < P$, имеем устойчивое состояние равновесия; если $P_{кр} > P$, рама находится в неустойчивом состоянии равновесия. Критическому состоянию равновесия отвечает условие $P_{кр} = P$.

7. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СИММЕТРИЧНОЙ РАМЫ

Сделаем анализ несущей способности симметричной рамы, схема которой показана на рис. 12, а. Расчет такой рамы производился [4] путем расчленения ее на отдельные упруго защемленные и шарнирно опертые стержни. Схема расчленения рамы показана на рис. 12,б. На рис. 13 показана схема развития пластических деформаций в стойках рамы под действием внешней нагрузки.

Результаты расчета приведены на рис. 14. Здесь кривая OAM изображает состояния равновесия рамы в упругой (OA) и упруго-пластической (AM) стадиях ее работы. По вертикальной оси отложены величины средних сжимающих напряжений в стойках, по горизонтальной — углы поворота верхнего узла рамы. Этим состоянием равновесия отвечает симметричная деформа-

Реактивные моменты и поперечные силы от единичных смещений для стержней переменного поперечного сечения

№ п/п	Вид смещения и эпюра M	Изогнутая ось	Значения единичных реакций	Поправочные коэффициенты	Прогиб в середине стержня	Ординаты изогнутой оси стержня	Случай, когда P = 0	Принятые обозначения	Выражения для интегралов
1		$v_z = fa_z$	$X_1 = 3i \Phi_1(v)$ $Q = \frac{3i}{l} \Phi_1(v)$	$\Phi_1(v) = \frac{1}{3 \left(G_3 + \frac{\nu^2 S_2 D_1}{1 - \nu^2 B_1} \right)}$	$f = \frac{X_1}{i} \cdot \frac{D_1}{1 - \nu^2 B_1} l$	$v_p = \nu^2 f \left(\frac{\lambda p}{l} E_1 - \bar{E}_1 \right) + \frac{X}{i} l \left(\frac{\lambda p}{l} A_2 - \bar{A}_3 \right)$	$X_1^0 = \frac{3i}{3G_3}$ $Q^0 = \frac{3i}{3lG_3}$	I. $A_1 = G_1 - G_2; A_2 = G_2 - G_3;$ $A_3 = G_1 - 2G_2 + G_3;$ $A_4 = G_1 G_3 - G_2^2$	$G_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{k_z} dz$ $G_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{1}{k_z} z dz$ $G_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{1}{k_z} z^2 dz$ $S_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} dz$
2		$v_z = fa_z$	$X_1 = 4i \Phi_2(v)$ $X_2 = 4i \Phi_2(v) \Phi_3(v)$ $Q = \frac{4i}{l} \Phi_2(v) [1 + \Phi_3(v)]$	$\Phi_2(v) = \frac{1}{4 \left(\frac{A_4}{A_3} + \frac{\nu^2 C_1 D_2}{1 - \nu^2 B_2} \right)}$ $\Phi_3(v) = \frac{A_2 + \nu^2 (A_2 \bar{E}_1 - \bar{A}_2 E_1)}{A_3 (1 - \nu^2 B_2)}$	$f = \frac{X_1}{i} \cdot \frac{D_2}{1 - \nu^2 B_2} l$	$v_p = -\nu^2 f \bar{E}_1 + \frac{X_2}{i} l \bar{A}_3 - \frac{X_1}{i} l \bar{A}_2$	$X_1^0 = \frac{4iA_3}{4A_4}$ $X_2^0 = \frac{4iA_2}{4A_4}$ $Q^0 = \frac{4iA_3}{4lA_4} \left(1 + \frac{A_2}{A_3} \right)$	II. $\bar{A}_1 = \frac{1}{2} \bar{G}_1 - \bar{G}_2; \bar{A}_2 = \frac{1}{2} \bar{G}_2 - \bar{G}_3;$ $A_3 = \frac{1}{2} \bar{G}_1 - \frac{3}{2} \bar{G}_2 + \bar{G}_3$	$S_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} z dz$ $\bar{G}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{k_z} dz$ $\bar{G}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{1}{k_z} z dz$ $\bar{G}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{1}{k_z} z^2 dz$
3		$v_z = la_z$	$X_1 = \frac{3i}{l} \Phi_4(v)$ $Q = \frac{3i}{l^2} \times \left[\Phi_4(v) - \frac{\nu^2}{3} \right]$	$\Phi_4(v) = \frac{1 - \nu^2 (S_2 - G_3)}{3G_3}$	-	$v_p = \nu^2 \left[\frac{\lambda p}{l} (S_1 - G_2) - \bar{E}_1 + \bar{A}_2 \right] + \frac{X_1}{i} l \left(\frac{\lambda p}{l} G_2 - \bar{A}_2 \right)$	$X_1^0 = \frac{3i}{3lG_3}$ $Q^0 = \frac{3i}{3l^2G_3}$	III. $\bar{A}_1 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \bar{G}_2; \bar{A}_2 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_2 - \bar{G}_3;$ $\bar{A}_3 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \left(1 + \frac{\lambda p}{l} \right) \bar{G}_2 + \bar{G}_3$	$\bar{S}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} dz$ $\bar{S}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} z dz$ $\bar{S}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} z^2 dz$
		$v_z = la_z$	$X_1 = \frac{6i}{l} \Phi_5(v)$ $X_2 = \frac{6i}{l} \Phi_6(v)$ $Q = \frac{6i}{l^2} \left[\Phi_5(v) + \Phi_6(v) - \frac{\nu^2}{6} \right]$	$\Phi_5(v) = \frac{1 - \nu^2 B_3}{6 \frac{A_4}{A_1}}$ $\Phi_6(v) = \frac{1}{6} \left[\frac{\nu^2 (S_1 - G_2)}{A_1} + \frac{(1 - \nu^2 B_3) G_2}{A_4} \right]$	-	$v_p = \nu^2 (\bar{A}_2 - \bar{E}_1) + \frac{X_2}{i} l \bar{A}_3 - \frac{X_1}{i} l \bar{A}_2$	$X_1^0 = \frac{6i\varphi_2}{6lA_4}$ $X_2^0 = \frac{6iG_2}{6lA_4}$ $Q^0 = \frac{6iG_1}{6l^2A_4}$	IV. $E_1 = S_1 - S_2$ V. $\bar{E}_1 = \frac{1}{2} \bar{S}_1 - \bar{S}_2$ VI. $\bar{E}_1 = \frac{\lambda p}{l} \bar{S}_1 - \bar{S}_2$ VII. $B_1 = \frac{1}{2} E_1 - \bar{E}_1;$ $B_2 = \frac{E_1}{A_3} \bar{A}_3 - \bar{E}_1;$ $B_3 = S_2 - S_1 \frac{A_2}{A_1} - \frac{A_4}{A_1}$ VIII. $C_1 = S_2 \frac{A_1}{A_3} - S_1 \frac{A_2}{A_3}$ IX. $D_1 = \frac{1}{2} A_2 - \bar{A}_2;$ $D_2 = \frac{A_2}{A_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_2$ X. $\nu^2 = \frac{P}{EJ_0} l^2; i = \frac{EJ_0}{l}; k_z = \frac{J_z}{J_0}$	$\bar{G}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\lambda p} \frac{1}{k_z} dz$ $\bar{G}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\lambda p} \frac{1}{lk_z} z dz$ $\bar{G}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^{\lambda p} \frac{1}{k_z} z^2 dz$ $\bar{S}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\lambda p} \frac{a_z}{k_z} dz$ $\bar{S}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\lambda p} \frac{a_z}{k_z} z dz$

ция рамы, соответствующая внешней нагрузке. Кривая OAM имеет максимум в точке M , соответствующий критической нагрузке P_k . В этой точке выполняется известный критерий критического состояния вида

$$\frac{dP}{d\Delta} = 0. \tag{7.1}$$

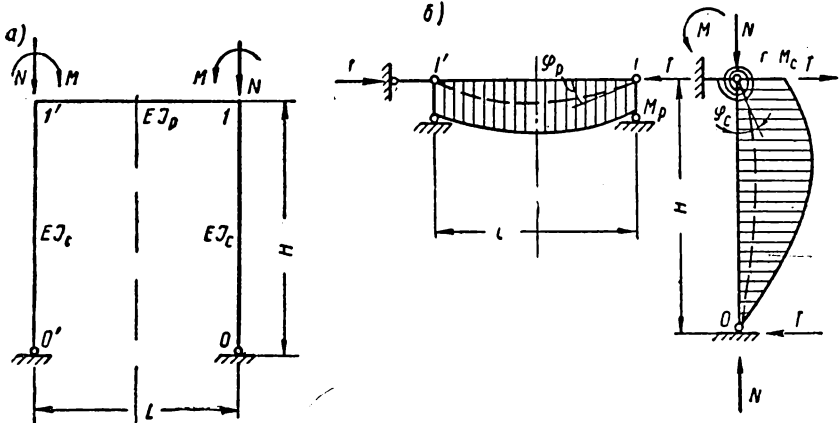


Рис. 12. Деформации П-образной рамы

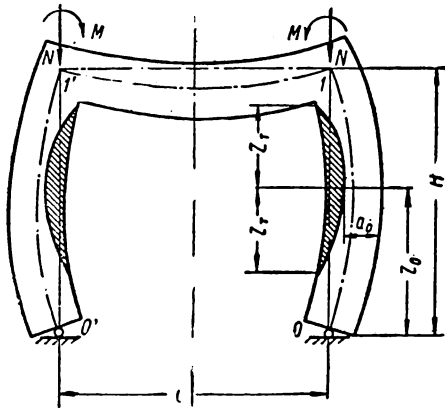


Рис. 13. Схема развития пластических деформаций в раме

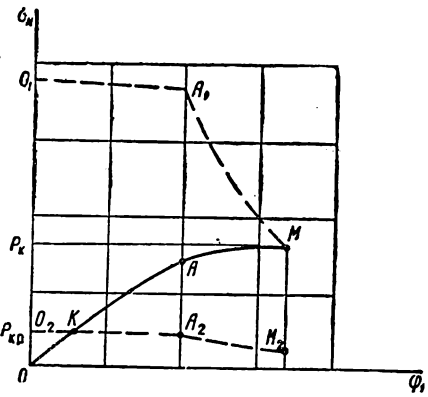


Рис. 14. Диаграммы деформаций и отпорности для П-образной рамы

Это значение критической силы может быть достигнуто только в случае, если предотвращены боковые перемещения деформированной рамы, т. е. если рама является несвободной.

Кривая O_1A_1M изображает диаграмму отпорности рамы отклонениям от достигнутых состояний равновесия для симметричной формы потери устойчивости (для несвободной рамы).

Если рама является свободной, она становится неустойчивой при меньшем значении критической силы $P_{кр}$. Этому значению силы соответствует кососимметричная форма потери устойчивости; кривая $O_2KA_2M_2$ дает диаграмму отпорности для этой же рамы при кососимметричной форме потери устойчивости. В данном случае такая потеря устойчивости происходит еще задолго до появления в раме пластических деформаций. Поэтому здесь можно воспользоваться условием упругой устойчивости в виде [1]

$$\frac{i_p}{i_c} = \frac{1}{6} \nu \operatorname{tg} \nu, \quad (7.2)$$

где i_p — погонная жесткость ригеля;

i_c — погонная жесткость стоек.

Из формулы (7.2) получаем значение критической силы $P_{кр}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Корноухов Н. В., Прочность и устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1949.
2. Геммерлинг А. В., Несущая способность стержневых стальных конструкций, Госстройиздат, 1958.
3. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Бельский Г. Е., Устойчивость сжатых стальных стержней с упругими защемлениями концов. Научное сообщение ЦНИИСК, Госстройиздат, 1959.
5. Блейх Ф., Устойчивость металлических конструкций, Физматгиз, 1959.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАСКОСОВ ОПОР ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ С БОЛТОВЫМИ УЗЛАМИ

В настоящее время разработаны одностоечные опоры линий электропередач (ЛЭП), в которых значительная часть раскосов ствoла присоединяется к поясам при помощи черных болтов.

В большинстве опор решетка перекрестная. В верхних секциях применяется иногда «елочная» решетка. При обеих этих схемах решетки узлы в смежных гранях не совпадают, поэтому возможны их упругие смещения в направлении, перпендикулярном плоскости грани.

Опоры ЛЭП при сборке их на болтах в части изготовления, транспортирования и монтажа имеют преимущества перед сварными, вследствие чего предполагается их массовое применение. Однако достаточно обоснованных рекомендаций по расчету таких конструкций еще нет, несмотря на то, что работа конструкций с болтовыми узлами сильно отличается от работы аналогичных сварных систем.

В таких опорах раскосы, несущие различные по знаку усилия, примыкают к полкам уголка пояса с противоположных сторон, в результате чего продольная сила, действующая в раскосе, оказывается приложенной вне контура сечения, что сильно снижает его несущую способность. С другой стороны, направления изгиба раскоса как в процессе нагружения, так и при потере устойчивости не совпадают с плоскостями граней опор, вследствие чего болтовой узел может рассматриваться шарнирным лишь в плоскости грани, в остальных же направлениях присоединение раскоса оказывается жестким. Это оказывает положительное влияние на работу раскоса. При оценке несущей способности опоры учет отмеченных двух факторов весьма существенен.

Оказывается, что если учесть жесткость болтового узла, то критическая сила для раскоса увеличивается примерно в 2 раза по сравнению с силой, отвечающей узлам в виде простран-

ственных шарниров. Если же отказаться от учета эксцентриситетов, то при жестких раскосах ($\lambda=60 \div 70$) критическая сила получается завышенной в 2—2,5 раза; в гибких раскосах это завышение не столь велико и при $\lambda=150 \div 170$ не превышает 30—40%.

Такое неодинаковое влияние эксцентриситетов на несущую способность жестких и гибких сжато-изогнутых стержней вынуж-

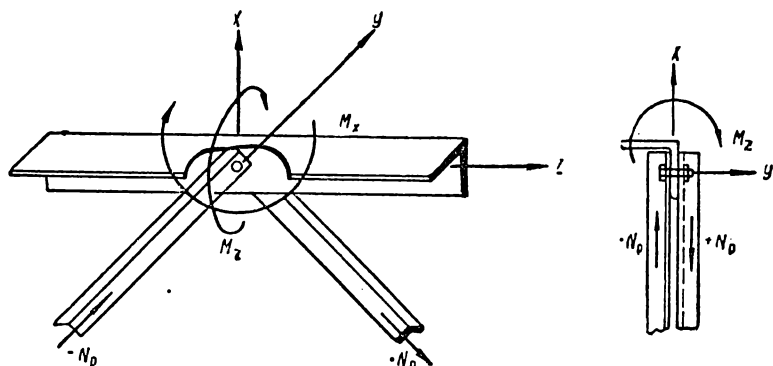


Рис. 1. Моменты, действующие в болтовом узле

дило расчетную длину раскоса поставить в зависимость не только от жесткости пояса, но и гибкости раскоса, что принципиально отличает предлагаемый способ расчета от ранее практиковавшихся способов.

Постараемся представить характер деформирования раскоса в составе всего конструктивного комплекса.

В результате внецентренного действия усилий в сжатом и растянутом раскосах узел нагружается двумя изгибающими моментами, действующими относительно осей X и Z , перпендикулярных оси болта Y (рис. 1).

На эти моменты узел работает как жесткий, т. е. поворот опорных сечений сжатого и растянутого раскосов одинаков и равен повороту всего узла.

При нагружении системы моменты, приходящиеся на узел, практически возрастают пропорционально нагрузке и соответственно линейно увеличивается угол поворота узла.

В начальной стадии нагружения (пока эффект сжато-изогнутости невелик) между нарастанием прогиба сжатого раскоса и поворотом узлов соблюдается так же почти линейная зависимость. При этом эпюра изгибающих моментов по длине раскоса однозначна, и упругая линия не имеет точек перегиба.

При увеличении нагрузки происходит ускоренное нарастание прогиба без соответствующего поворота узлов, что приводит к появлению точек перегиба. По мере нарастания нагрузки эти точки сближаются.

Таким образом, степень влияния жесткости узлов системы на деформирование решетки возрастает по мере увеличения нагрузки. При исследовании несущей способности сжатого раскоса учитывается эта особенность деформирования решетки в составе всего конструктивного комплекса.

В теоретическом исследовании использовано предложение А. В. Геммерлинга [1] оценивать деформативность и устойчивость системы за пределом упругости так называемыми «расчетными» сечениями F_1 и F_2 , позволяющими рассматривать систему упругой. Эти сечения равны

$$F_1 = \frac{1}{E} \int_F E_c dF; \quad F_2 = \frac{1}{E} \int_F E_k dF, \quad (1.1)$$

где E_c и E_k — соответственно секущий и касательный модули для точек действительного сечения.

Как показано в работе [1], усилие, отвечающее максимуму диаграммы состояний равновесия сжато-изогнутого стального стержня, полученное с использованием первого расчетного сечения ($N_{(F_1)}^{\max}$), оказывается равным критической силе для прямого стержня такой же длины, но с поперечным сечением, равным упругому ядру ($N_{(F_2)}$), т. е. в предельном состоянии равновесия соблюдается равенство

$$N_{(F_1)}^{\max} = N_{(F_2)} = \frac{\pi^2 E J_2}{l_p^2}, \quad (1.2)$$

где J_2 — момент инерции упругого ядра сечения.

Допустим, что в упруго-пластической стадии работы раскосов соотношение между главными моментами инерции J_x и J_y как для первого, так и для второго расчетных сечений не зависит от величины пластической зоны и остается таким же, как и в упругой стадии (как показано ниже, такое допущение идет в сравнительно небольшой запас прочности). Тогда поставленную задачу можно расчлнить на две части.

В первой части произвести исследование устойчивости раскосов в упругой постановке и найти зависимость коэффициента μ_p^y приведения расчетной длины от соотношения $\frac{i_n}{i_p}$ жесткостей панели пояса и раскоса.

После этого, во второй части расчета исследовать деформативность раскосов в упруго-пластической стадии и, используя ранее определенные расчетные длины, найти $N_{(F_1)}$ и $N_{(F_2)}$. При этом наличие пластических зон учесть уменьшением жесткости раскосов (i_p), для чего в зависимость $\mu_p^y = \frac{i_n}{i_p}$ соответственно подставить значения моментов инерции первого и второго расчетных сечений раскоса.

Варьированием величины пластической зоны достигается выполнение равенства (1.2), при этом значения $N_{(F_1)}$ и $N_{(F_2)}$ оказываются критическими.

При исследовании устойчивости расколов (первая часть расчета) рассматривается свободно стоящая пространственная система, на конце которой приложены увеличивающийся крутящий момент и постоянная по величине продольная сила, действующая центрально или внецентренно. Ее значение всегда меньше критической силы для системы. Определение критического значения крутящего момента, а не продольной силы, как обычно принято в задачах устойчивости, объясняется тем обстоятельством, что чаще расчетные нагрузки на расколы определяются «аварийным» режимом работы опоры, т. е. обрывом проводов крайней фазы и загрузением системы возрастающим крутящим моментом.

Приняты следующие допущения:

- 1) материал конструкции работает упруго;
- 2) при косом изгибе элементов отсутствует кручение;
- 3) соотношение между внутренними усилиями подсчитывается, исходя из первоначальной геометрии системы;
- 4) продольные деформации элементов не учитываются.

Игнорирование кручения объясняется сравнительно большой гибкостью расколов ($\lambda \approx 120 \div 160$). Как показано В. З. Власовым [2], Ф. Блейхом [3] и др., при таких гибкостях критические силы для стержня уголкового профиля, полученные при учете изгибно-крутильной формы потери устойчивости и при плоской изгибной форме, практически оказываются одинаковыми.

Предельное равновесие расколов (вторая часть исследования) определяется приближенно на основании следующих допущений:

1) раскол рассматривается как шарнирно опертый внецентренно нагруженный стержень переменной длины. В начальный момент нагружения его длина принимается равной геометрической; по мере нарастания нагрузки точки перегиба перемещаются от опор и к моменту краевой текучести расстояние между ними становится равным расчетной длине раскола.

2) в упруго-пластической стадии работы длина раскола принимается равной расчетной длине, полученной с использованием соответствующих расчетных сечений;

3) сжимающее усилие в расколе приложено по оси болта на расстоянии от внешней грани, равном половине толщины полки поясного уголка. Раскол принимается искривленным в плоскости перпендикулярной оси наименьшей жесткости на $\frac{1}{750}$ его действительной длины;

4) диаграмма работы материала совпадает с идеализированной диаграммой Прандтля;

5) расчетные сечения определяются для сечений с максимальным развитием пластических деформаций и принимаются постоянными по всей длине.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСКОСОВ

Рассмотрим опору квадратного поперечного сечения с параллельными поясами (рис. 2). Пусть площади поясов и раскосов соответственно одинаковы.

От действия крутящего момента смежные панели пояса, а также каждая пара встречных раскосов рассматриваемой системы испытывают усилия, по величине равные друг другу, но противоположные по знаку. Если нормальная сила N приложена в центре сечения опоры, то от совместного действия крутящего момента и нормальной силы в поясах через одну панель возникнут одинаковые усилия — в одних панелях $N_{п}^I$, в соседних $N_{п}^{II}$. При таких внутренних усилиях податливость поперечному смещению и повороту концов любых раскосов (исключая крайние) окажется одинаковой. Если нормальную силу сместить по направлению к передней грани, то пояса этой грани будут более напряжены и окажут меньшее сопротивление смещению концов раскосов (рис. 2, а).

При достижении крутящим моментом критического значения в первом случае нагружения одновременно потеряют устойчивость все раскосы; во втором случае первыми потеряют устойчивость раскосы между более напряженными поясами. Но независимо от места приложения продольной силы вследствие симметрии системы и действующих усилий произойдет симметричное или кососимметричное деформирование теряющих устойчивость раскосов.

Рассмотрим эти две формы искривления.

а) Симметричная форма потери устойчивости раскосов

Примем в расчетной схеме присоединение раскосов к поясам при помощи цилиндрических шарниров, не нарушающих цельности пояса. Оси этих шарниров совпадают с осями болтов. Тогда, как отмечалось выше, в плоскости грани присоединение раскосов к поясу будет шарнирным, в остальных направлениях узел окажется жестким.

Допустим, что нормальная сила смещена к передней грани и происходит потеря устойчивости раскосов только этой грани.

Введем две системы координатных осей: общую (X, Y, Z) и частные (x, y, z) . Оси x и y совпадают с главными центральными осями инерции поперечного сечения стержней поясов и раскосов, а ось z совпадает с их осями. Оси общей системы координат располагаем так, чтобы ось Z была параллельна осям теряющих устойчивость раскосов, а ось Y — параллельна осям цилиндрических шарниров (рис. 2, а).

При принятом положении осей общей системы координат и примыкании раскосов к поясам под углом 45° матрицы направляющих косинусов будут иметь вид:

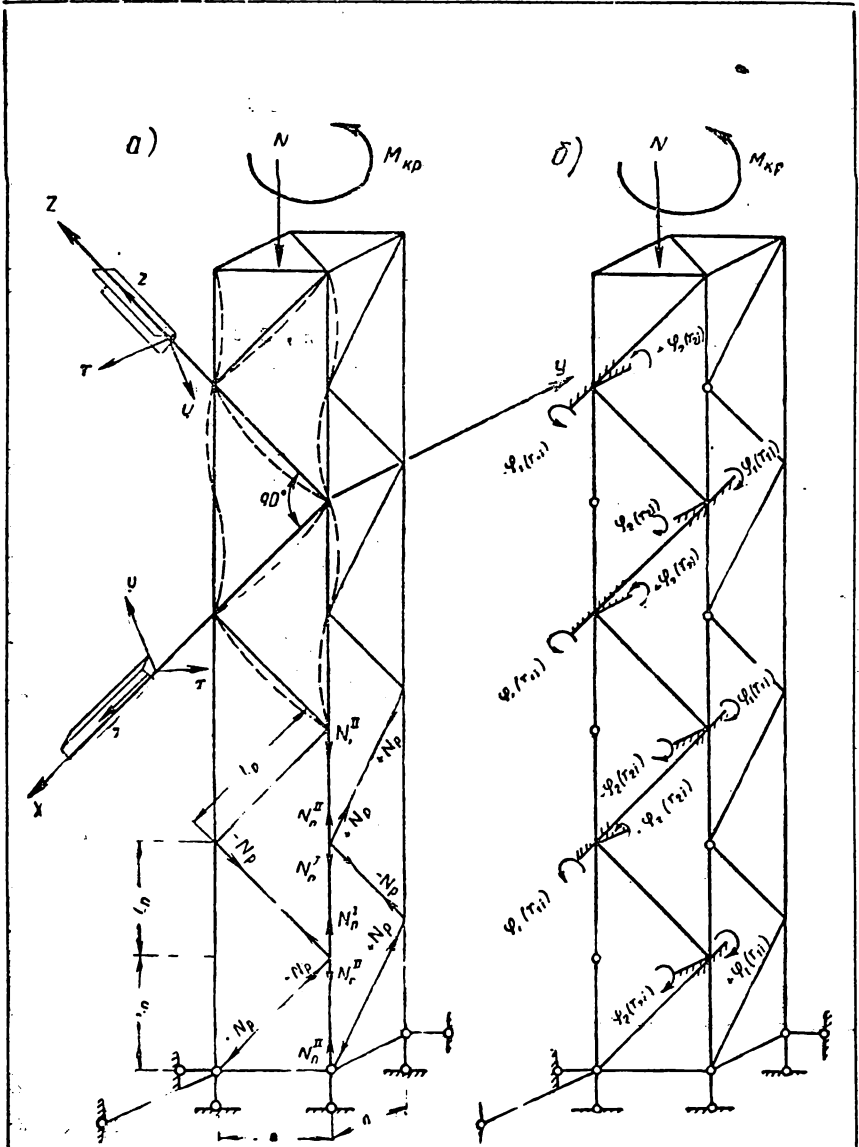


Рис. 2

a — характер деформирования системы при симметричной форме потери устойчивости раскосов; b — основная система

$$\begin{aligned}
 A(\text{сжатый раскос}) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,707 & -0,707 & 0 \\ 0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 A(\text{растянутый раскос}) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0,707 & -0,707 \\ 0 & 0,707 & 0,707 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 A(\text{пояс}) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,5 & 0,707 & -0,5 \\ 0,5 & 0,707 & 0,5 \\ 0,707 & 0 & -0,707 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ — косинусы углов, образованные осью x с осями X, Y , и Z ;

$\eta_1 \eta_2 \eta_3$ — косинусы углов, образованные осью y с осями X, Y , и Z ;

$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ — косинусы углов, образованные осью z с осями X, Y , и Z ;

При симметричной форме потери устойчивости произойдет искривление раскосов, узлы повернутся, но не сместятся (рис. 2, а).

Тогда, пренебрегая жесткостью сжатого раскоса на кручение и учитывая симметрию системы и нагрузок, будем иметь лишь две независимые деформации: поворот всего узла на угол φ_1 , относительно оси X и поворот только концевого сечения сжатого раскоса на угол φ_2 относительно оси Y (поскольку параллельно оси Y располагаются оси цилиндрических шарниров).

Основную систему метода деформации получим, наложив на узлы фиктивные связи, препятствующие их повороту (рис. 2, б).

Канонические уравнения для определения критической нагрузки запишутся в виде системы двух уравнений:

$$r_{11}\varphi_1 + r_{12}\varphi_2 = 0; \quad (1.4)$$

$$r_{21}\varphi_1 + r_{22}\varphi_2 = 0. \quad (1.5)$$

Величину критической силы получим, приравняв нулю определитель

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (1.6)$$

При одновременном повороте узлов эпюра моментов для пояса пересечет его ось в месте примыкания раскосов боковых граней. Если пренебречь жесткостью поперечных раскосов, то окажется возможным в этом месте пояса поставить шарниры.

Это условие позволяет коэффициенты канонических уравнений определить по табличным схемам, не прибегая к уравновешиванию моментов.

Напишем значение реактивных сил в одном узле от одновременного поворота нескольких узлов в заданном направлении на единицу (кручением элементов, как отмечалось раньше, пренебрегаем):

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 4 (i_p^x \cdot \varphi_2^x \cdot \varepsilon_1^2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_1^2) + 6 (i_n^x \varphi_1^x \cdot \varepsilon_1^2 + i_n^y \varphi_1^y \cdot \eta_1^2) - \\
 &\quad - 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_1^2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_1^2); \\
 r_{22} &= 4 (i_p^x \varphi_2^x \varepsilon_2^2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_2^2) - 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_2^2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_2^2); \\
 r_{12} &= 4 (i_p^x \varphi_2^x \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_1 \eta_2) - \\
 &\quad - 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_1 \eta_2),
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\varphi_1^x, \varphi_1^y, \varphi_2^x, \varphi_2^y, \varphi_3^x, \varphi_3^y$ — трансцендентные функции, учитывающие сжато-изогнутость относительно главных центральных осей инерции $x-x$ и $y-y$.

Величины их определяются по таблицам А. Ф. Смирнова [4] как функции параметров ν , равных:
для раскосов

$$\nu_p^x = l_p \sqrt{\frac{N_p}{EJ_p^x}} \quad \text{и} \quad \nu_p^y = l_p \sqrt{\frac{N_p}{EJ_p^y}},$$

для панели пояса

$$\nu_n^x = l_n \sqrt{\frac{N_n}{EJ_n^x}} \quad \text{и} \quad \nu_n^y = l_n \sqrt{\frac{N_n}{EJ_n^y}},$$

где $i_p^x, i_p^y, i_n^x, i_n^y$ — погонная жесткость раскоса и панели пояса относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения $x-x$ и $y-y$.

Величина усилия в поясе N_n может определяться только от действия сжимающей силы N (рис. 2, а).

Усилия в поясах от крутящего момента оказывают малое влияние на величины реактивных сил [5], и поэтому не учитываются. Подставив в (1.7) значения косинусов из матрицы (1.3) и учитывая, что в равнобоких прокатных уголках $\frac{J_x}{J_y} \approx 3,86$, найдем:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 2i_p^y (3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 1,5i_n^y (3,86\varphi_1^x + \varphi_1^y) - \\
 &\quad - i_p^y (3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y); \\
 r_{22} &= 2i_p^y (3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) - i_p^y (3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y); \\
 r_{12} &= 2i_p^y (-3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) - i_p^y (-3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y).
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив значения реактивных сил в (1.6), получим уравнение устойчивости в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[2 (3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 1,5 \frac{i_n}{i_p} (3,86\varphi_1^x + \varphi_1^y) - 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y \right] \times \\ & \times \left[2 (3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) - 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y \right] - \left[2 (-3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + \right. \\ & \left. + 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Задав определенные величины усилия в поясе и коэффициента приведения расчетной длины раскоса (μ_p^y), получаем значения трансцендентных функций, подставив которые в уравнение (1.9), определим соответствующее значение $\frac{i_n}{i_p}$.

Верхнее значение μ_p^y , равное единице, будет при $\frac{i_n}{i_p} = 0$. В этом случае расчетная схема раскоса приобретает вид шарнирно опертого стержня, теряющего устойчивость относительно оси $y-y$.

Нижнее значение $\mu_p^y = 0,69$ будет при $\frac{i_n}{i_p} = \infty$. В этом случае расчетная схема раскоса приобретает вид стержня, опирающегося на цилиндрические шарниры, оси которых параллельны полке уголка.

Наложив на концы такого стержня фиктивные связи, препятствующие возможному их повороту, получим основную систему. Приравняв нулю реакцию в связи (от встречного поворота концов раскоса), запишем уравнение устойчивости, которое после сокращений принимает следующий вид:

$$3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y - 1,93\varphi_3^x - 0,5\varphi_3^y = 0. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) удовлетворяется при $\mu_p^y = 0,69$. Как видно, результаты, полученные по формулам (1.9) и (1.10), совпали. Попутно заметим, что устойчивость уголкового стержня, опирающегося на ножевые опоры, расположенные параллельно полке, рассмотрена А. Н. Динником [6]. Полученные по формуле (1.10) результаты совпали с его решением.

Постараемся оценить погрешность, связанную с принятым допущением, что в упруго-пластической стадии работы раскоса отношение главных моментов инерции остается неизменным.

Наиболее часто раскосы искривлены внутрь мачты, при этом текучесть материала начинается со стороны обушка и к моменту достижения предельного состояния распространяется на 0,15—0,20 высоты полки. Если принять высоту упругого ядра равным 0,8 h , то отношение главных моментов инерции упругого ядра сечения составит $\frac{J_{2x}}{J_{2y}} = 5,02$ (вместо 3,84 для всего сечения).

Соответственно с этим уравнение устойчивости (1.9) примет вид

$$\begin{aligned} & \left[2 (5,02\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 1,5 \frac{i_n}{i_p} (5,02\varphi_1^x + \varphi_1^y) - \right. \\ & \left. - 5,02\varphi_3^x - \varphi_3^y \right] \left[2 (5,02\varphi_2^x + \varphi_2^y) - 5,02\varphi_3^x - \varphi_3^y \right] - \\ & - \left[2 (-5,02\varphi_3^x - \varphi_3^y) + 5,02\varphi_3^x - \varphi_3^y \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Сопоставлением коэффициентов приведения расчетных длин, определенных по формулам (1.9) и (1.11), можно определить величину ошибки (ниже приводятся эти сравнения).

б) Кососимметричная форма потери устойчивости раскосов со смещением узлов

При рассматриваемой форме потери устойчивости концы сжатых раскосов повернутся в одном направлении и сместятся из плоскости грани в разные стороны (рис. 3, а).

Учитывая симметрию системы и нагрузок, будем иметь три независимые деформации: поворот всего узла относительно оси X на угол φ_1 , поворот относительно оси Y на угол φ_2 только сечения сжатого раскоса и смещения концов раскоса по оси Y на величину $\pm y_1$.

В результате смещения узлов в поясах возникнут изгибающие моменты. Эпюра моментов пересечет ось пояса в местах примыкания поперечных раскосов. Если так же, как и при рассмотрении симметричной формы потери устойчивости, пренебречь жесткостью поперечных раскосов, то окажется возможным при смещении узлов на $y_1 = \pm 1$ рассматривать пояс в этих узлах прорезанным шарнирами.

В запас устойчивости будем считать, что при повороте узлов на $\varphi_1 = \pm 1$ и $\varphi_2 = \pm 1$ пояс работает по той же расчетной схеме (с шарнирами). Наложив на узлы связи, препятствующие их повороту и смещению, получим основную систему (рис. 3, б).

Канонические уравнения примут вид

$$\begin{aligned} r_{11}\varphi_1 + r_{12}\varphi_2 + r_{13}y_1 &= 0; \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}\varphi_2 + r_{23}y_1 &= 0; \\ r_{31}\varphi_1 + r_{32}\varphi_2 + r_{33}y_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Величину критической силы получим, приравняв нулю определитель

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = r_{11} (r_{22}r_{33} - r_{23}^2) - \\ & - r_{21} (r_{12}r_{33} - r_{13}r_{23}) + r_{31} (r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

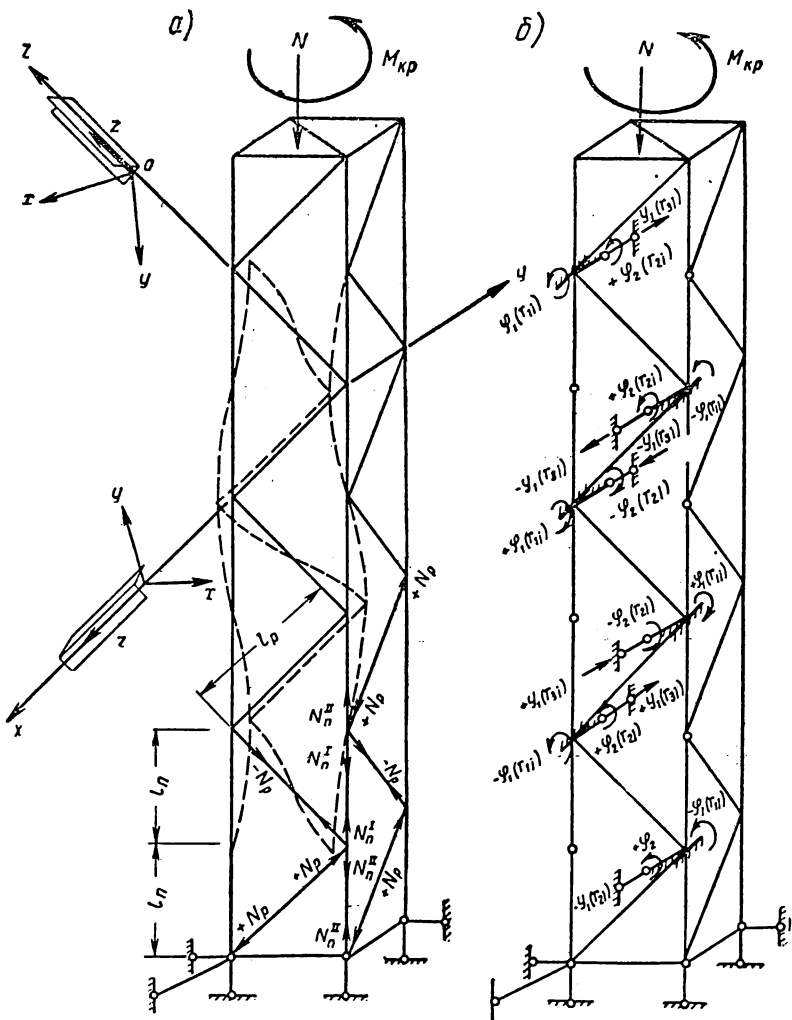


Рис. 3. Характер деформирования системы при кососимметричной форме потери устойчивости раскосов со смещением узлов

Напишем выражение реактивных сил в одном узле от одновременного поворота (или смещения) нескольких узлов в заданном направлении на единицу:

$$\left. \begin{aligned}
 r_{11} &= 4 (i_p^x \varphi_2^x \varepsilon_1^2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_1^2) + 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_1^2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_1^2) + \\
 &\quad + 6 (i_n^x \varphi_1^x \varepsilon_1^2 + i_n^y \varphi_1^y \eta_1^2); \\
 r_{22} &= 4 (i_p^x \varphi_2^x \varepsilon_2^2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_2^2) + 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_2^2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_2^2); \\
 r_{33} &= \frac{12 \cdot 2}{l_p^2} (i_p^x \eta_2^x \varepsilon_2^2 + i_p^y \eta_2^y \eta_2^2) + \\
 &\quad + \frac{6}{l_n^2} (i_n^x \eta_2^x \varepsilon_1^2 + i_n^y \eta_1^y \eta_2^2); \\
 r_{12} &= 4 (i_p^x \varphi_2^x \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_p^y \varphi_2^y \eta_1 \eta_2) + \\
 &\quad + 2 (i_p^x \varphi_3^x \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_p^y \varphi_3^y \eta_1 \eta_2); \\
 r_{13} &= \frac{12}{l_p} (\varphi_4^x i_p^x \varepsilon_1^2 + i_p^y \varphi_4^y \eta_1^2); \\
 r_{23} &= - \frac{2 \cdot 6}{l_p} (\varphi_4^x i_p^x \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_p^y \varphi_4^y \eta_1 \eta_2).
 \end{aligned} \right\} (1.14)$$

Подставив значения реактивных сил из (1.14) в (1.13) и проделав соответствующие сокращения, уравнение устойчивости приведем к следующему виду:

$$\left[\begin{aligned}
 &2(3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y + 1,5 \frac{i_n}{i_p} (3,86\varphi_1^x + \varphi_1^y) \Big] \times \\
 &\times \{ [2(3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y] [2(3,86\eta_2^x + \eta_2^y) + \\
 &\quad + \frac{i_n}{i_p} (3,86\eta_1^x + \eta_1^y)] - 6(3,86\varphi_4^x - \varphi_4^y)^2 \} - \\
 &- [2(3,86\varphi_2^x - \varphi_2^y) + 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y] \{ [2(3,86\varphi_2^x - \varphi_2^y) + \\
 &\quad + 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y] [2(3,86\eta_2^x + \eta_2^y) + 3,86\eta_1^x + \eta_1^y] - \\
 &\quad - 6(3,86\varphi_4^x + \varphi_4^y)(3,86\varphi_4^x - \varphi_4^y) \} + \\
 &\quad + 6(3,86\varphi_4^x + \varphi_4^y) \{ [2(3,86\varphi_2^x - \varphi_2^y) + \\
 &\quad + 3,86\varphi_3^x - \varphi_3^y] (3,86\varphi_4^x - \varphi_4^y) - \\
 &\quad - (3,86\varphi_4^x + \varphi_4^y) [2(3,86\varphi_2^x + \varphi_2^y) + 3,86\varphi_3^x + \varphi_3^y] \} = 0.
 \end{aligned} \right\} (1.15)$$

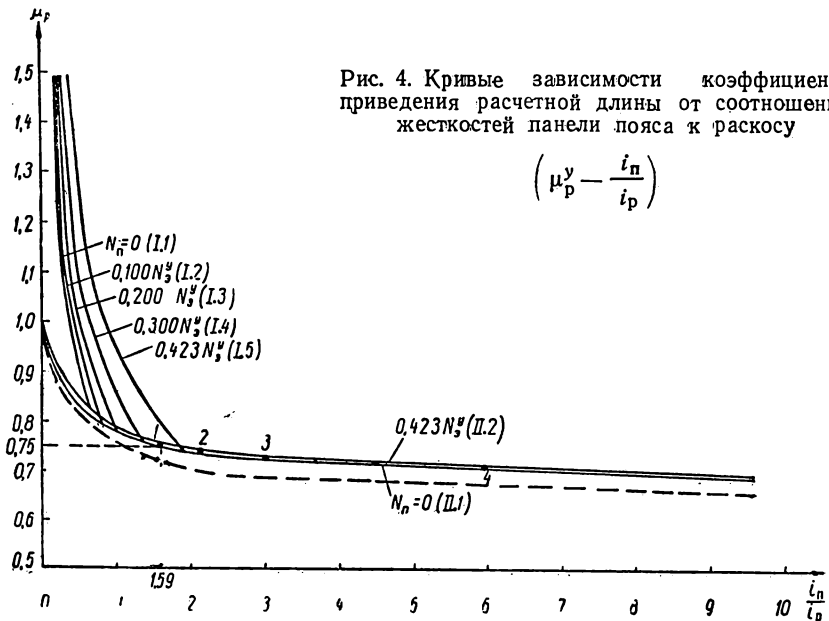
Уравнение (1.15) решается относительно $\frac{i_n}{i_p}$. Здесь, так же как и при решении уравнения (1.9), вначале задаемся усилиями в поясе N_n и коэффициентом приведения расчетной длины раскоса (μ_p^y).

Определив ν_p^x и ν_p^y , ν_n^x и ν_n^y и подобрав по таблицам соответствующие трансцендентные функции, подставляем их значения в уравнение (1,15), решая которое находим $\frac{i_n}{i_p}$.

Нижнее значение μ_p^y будет при $\frac{i_n}{i_p} = \infty$, тогда y_1 и φ_1 , равны нулю и при кососимметричной потере устойчивости (поворот опорных сечений в одном направлении относительно оси параллельной полке) расчетная схема раскоса приобретает вид стержня длиной, равной $\frac{l_p}{2}$, опирающегося на цилиндрические шарниры, оси которых параллельны полкам уголка. Для такого стержня $\mu_p^y = \frac{0,69}{2} = 0,345$.

в) Определение расчетных длин раскосов

На рис. 4 приводятся кривые зависимости $\mu_p^y - \frac{i_n}{i_p}$ при различной сжимающей силе в поясе (N_n). Максимальное значение N_n принималось равным $0,423 N_y^E$, где N_y^E —Эйлерова сила для



панели пояса при шарнирном ее опирании и потере устойчивости относительно оси y .

Как показано Ф. Блейхом и Г. Блейхом [7], а также К. Гиркманом [8], при такой нагрузке происходит потеря устойчивости пояса.

Семейство кривых $I.1 — I.5$ построено по формуле (1.15) и отвечает кососимметричной форме потери устойчивости раскосов. Две кривые $II.1—II.2$ построены по формуле (1.9) и отвечают симметричной форме потери устойчивости. Пунктирная кривая построена по формуле (1.11) и отражает симметричную форму потери устойчивости раскосов при упруго-пластических деформациях в раскосе. Как видно из рис. 4, характер кривых $I.5$, с одной стороны, и кривых $II.1$ и $II.2$, с другой, различный: первые круто поднимаются вверх, вторые пологие. Расположение пунктирной кривой ниже кривой $II.1$ указывает на то, что принятое в теоретическом исследовании допущение о постоянстве соотношения главных моментов инерции как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях работы раскосов идет в запас устойчивости. При наиболее распространенных соотношениях $i_n/i_p = 5,7$ расхождение между ординатами пунктирной и сплошной кривых составляет около 5%, т. е. сравнительно невелико.

Максимальное значение μ_p^y будет соответствовать тому минимальному значению $\frac{i_n}{i_p}$, при котором система окажется равноустойчивой, т. е. произойдет одновременная потеря устойчивости раскосов и пояса. Определим эти значения μ_p^y .

Зная критическую нагрузку для пояса при его загрузении по концам ($N_n^{кр} = 0,423 N_y$), представим пояс в виде шарнирно опертого стержня длиной, равной $2l$.

Действие отброшенной части и средней опоры заменим фиктивной связью, ограничивающей изгиб стержня осью $n—n$, относительно которой момент инерции J_n определим из равенства

$$0,423 N_y = \frac{\pi^2 E J_n}{(2l_n)^2}, \quad (1.16)$$

откуда $J_n^y = 1,692 J_p$.

Пусть по концам стержня приложены силы N_n^n (от действия на систему нормальных сил) и в середине его длины N_n^k (от действия крутящего момента).

Когда действует только N_n^n , рассматриваемая расчетная схема стержня точно воспроизводит работу пояса. Допустим, что и при совместном действии N_n^n и N_n^k принятое направление изгиба сохраняется. Тогда потеря устойчивости стержня проявится в виде его изгиба в плоскости, перпендикулярной оси $n—n$, при котором среднее сечение сместится на некоторую величину и повернется в этой плоскости на некоторый угол (поскольку из-за наличия силы N_n^k стержень становится несимметричным относительно своего среднего сечения).

Наложив в точке приложения N_n^k фиктивные связи, препятствующие повороту и смещению сечения, получим основную сис-

тему. Решением соответствующего уравнения устойчивости были определены расчетные длины и критическая нагрузка $N_{II}^{кр}$ в зависимости от соотношения $\frac{N_I}{N_{II}}$ усилий сжатия в полупанелях. Как и

следовало ожидать, расчетные длины при $0 < \frac{N_I}{N_{II}} < 0,333$ совпали с результатами, полученными С. П. Тимошенко [9].

На рис. 5 дана зависимость величины k от $\frac{N_I}{N_{II}}$, где $k = \frac{N_{II}^{кр}}{N_{II}^y}$.

Максимальное значение k (при действии одного крутящего момента) в 4 раза превосходит минимальное. Однако, если учесть наиболее распространенную гибкость пояса реальных конструкций ($\lambda \approx 100$), то минимальные критические напряжения (от действия нагрузки по концам стержня) будут равны

$$\sigma_{\min}^{кр} = \frac{\pi^2 E}{(M\lambda)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2100000}{(1,19 \cdot 100)^2} = 1460 \text{ кг/см}^2. \quad (1.17)$$

Максимальные критические напряжения естественно не могут превышать σ_T , тогда

$$N_{II(\max)}^{кр} = N_{II(\min)}^{кр} \frac{\sigma_T}{\sigma_{\min}^{кр}} = 0,423 \frac{2400}{1460} N_{II}^y = 0,696 N_{II}^y. \quad (1.18)$$

В соответствии с этим высоту графика на рис. 5 ограничим значением $k=0,696$.

Если также учесть, что в реальных конструкциях раскосы прикрепляются внецентренно и от крутящего момента в поясах возникают значительные напряжения изгиба, то станет очевидным, что полученное верхнее значение критической силы, как предельное по условию прочности, также не может быть достигнуто.

Это подтвердилось экспериментальным исследованием отсеков мачт на совместное действие нормальной силы и крутящего момента, проведенным в ЦНИИСКе [10], которое показало, что с возрастанием крутящего момента

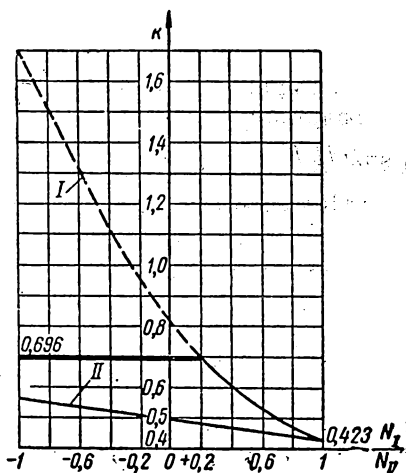


Рис. 5. Графики зависимости $k = \frac{N_{II}^{кр}}{N_{II}^y}$

критическая сила на пояс возрастает незначительно. Так, при $\frac{N_I}{N_{II}} = 0,54 N_{II}^{кр}$ повышается

не на 28%, как это следует из графика на рис. 5, а всего на 6—7%.

Очевидно применительно к реальным конструкциям более правильно принять экспериментальную зависимость.

На рис. 5 прямой *II* аппроксимируются экспериментальные данные. Пользуясь этой прямой и предполагая одновременную потерю устойчивости пояса и раскосов, определим максимальные значения μ_p^y при различных усилиях в поясах (N_n^k).

Выразим усилие, приходящееся на пояс от крутящего момента, через критическую силу для раскоса. Тогда при угле наклона раскосов 45° получим

$$N_n^k = \frac{0,707 \pi^2 E J_p^y}{(\mu_p^y l_p)^2}. \quad (1.19)$$

Значения μ_p^y определим из уравнения

$$N_n^n = k N_{\text{Э}}^y - N_n^k = N_{\text{Э}}^y \left[k - \frac{1}{1,98 \frac{i_n}{i_p} (\mu_p^y)^2} \right]. \quad (1.20)$$

При действии одного крутящего момента ($N_n^n = 0$ и $k = 0,56$) уравнение (1.20) примет вид

$$\frac{i_n}{i_p} (\mu_p^y)^2 = 0,895. \quad (1.21)$$

На кривой *I.1* или *II.1* (рис. 4) находим точку, в которой удовлетворяется равенство (1.21). Такая точка найдена на кривой *II.1*. Она соответствует $\mu_p^y = 0,75$ и $\frac{i_n}{i_p} = 1,59$.

Полученное значение μ_p^y является максимальным, на рис. 4 оно отмечено пунктирной линией.

Аналогичным способом определены точки, в которых удовлетворяется равенство (1.20) при $N_n^n = 0,1 N_{\text{Э}}^y$; $0,2 N_{\text{Э}}^y$ и $0,3 N_{\text{Э}}^y$. Эти точки оказались между кривыми *II.1* и *II.2* и обозначены соответствующим цифрами 2, 3 и 4 (рис. 4).

Учитывая, что указанные точки располагаются значительно правее кривых *I.1—I.5*, можно сделать заключение, что в реальных конструкциях опор ЛЭП кососимметричная форма потери устойчивости раскосов не может проявиться (так как она возможна лишь при нагрузках, превышающих критические для пояса).

Близкое расположение кривых *I.1* и *I.2* друг к другу указывает на незначительное влияние усилий в поясах на устойчивость раскосов. Значение μ_p^y при $\frac{i_n}{i_p} > 1,59$ следует брать между кривыми *I.1* и *II.2* и не учитывать усилий в поясах.

При $\frac{i_p}{i_p} < 1,59$ нарушается равноустойчивость поясов и раскосов. Пояса становятся менее устойчивыми, чем раскосы, для которых в этом случае следует принимать

$$\mu_p = 0,75.$$

2. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ РАСКОСОВ

Как указывалось выше, при решении этой задачи раскос рассматривается в виде шарнирно опертого стержня переменной длины, имеющего начальное искривление в плоскости главной оси сечения $x - x$.

На стержень действует продольная сила с эксцентриситетом относительно двух главных осей сечения.

При таком нагружении стержень уголкового профиля, как и любой стержень открытого профиля, искривляется в пространстве, при этом его среднее сечение закручивается и линейно перемещается в направлении двух главных осей сечения.

Наложим на стержень связи, препятствующие его закручиванию, и рассмотрим вначале характер деформирования уголкового стержня при сжатии с косым изгибом.

Как показано С. П. Тимошенко [9], при продольном сжатии искривленного в плоскости одной главной оси сечения стержня прогиб в середине его длины определяется по формуле

$$f_1 = \frac{f_n N}{N_{\text{Э}} - N}, \quad (1.22)$$

где f_n — начальный прогиб.

Прогиб прямого стержня, но внецентренно нагруженного также по одной главной оси сечения, подсчитывается по формуле

$$f_2 = \frac{4m N}{\pi (N_{\text{Э}} - N)} = \frac{1,27 m N}{N_{\text{Э}} - N}. \quad (1.23)$$

Очевидно, общий прогиб при наличии начального искривления и эксцентриситета получим как сумму (1.22) и (1.23):

$$f = f_1 + f_2 = (1,27 m + f_n) \frac{N}{N_{\text{Э}} - N}. \quad (1.24)$$

На основе уравнения (1.24) можно записать прогибы при наличии эксцентриситетов относительно двух главных осей сечения.

В направлении главных осей прогибы окажутся равными

$$f_x = \frac{N (1,27 m_x + f_{nx})}{N_{\text{Э}}^x - N}; \quad (1.25)$$

$$f_y = \frac{1,27 m_y N}{N_{\text{Э}}^y - N}, \quad (1.26)$$

где m_x и m_y — эксцентриситеты приложения продольной силы.

$$N_y^y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \quad \text{и} \quad N_x^x = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}.$$

Зная прогибы и добавив к ним величины эксцентриситетов m_x и m_y , получим полные эксцентриситеты сжимающей силы

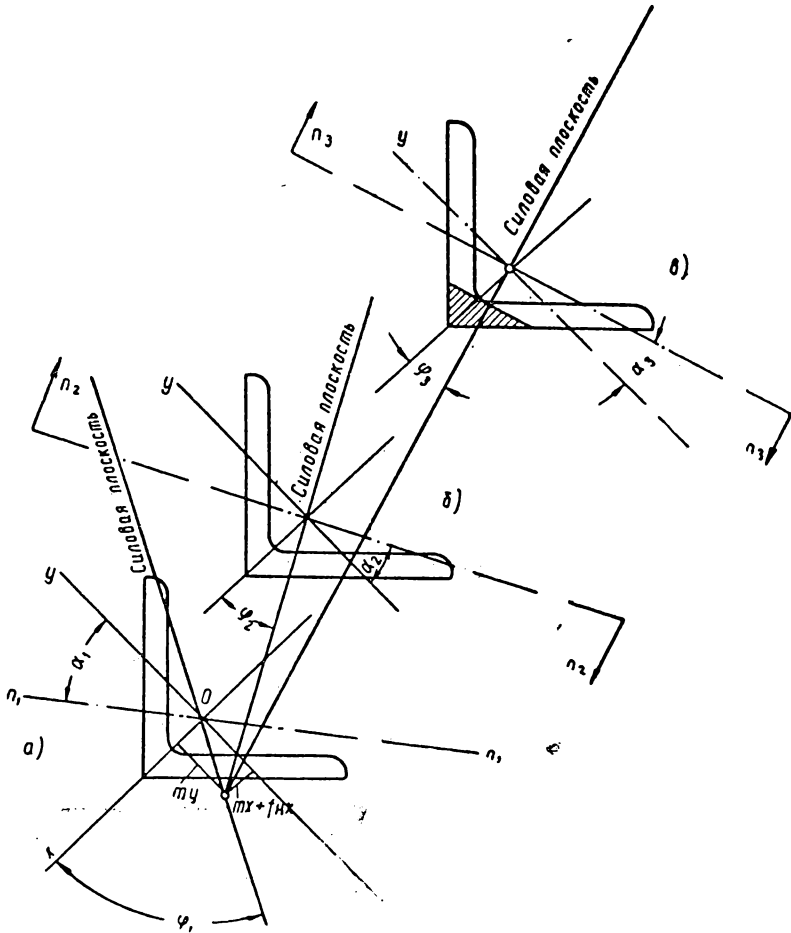


Рис. 6. Положение нулевой линии в сечении раскоса

N , отношение которых дает тангенс угла φ_n между силовой плоскостью и осью $x-x$. Каждому значению φ_n соответствует определенный угол наклона нулевой линии α_n (рис. 6,а). Взаимосвязь между φ_n и α_n устанавливается при помощи общеизвестной формулы косоугольного изгиба:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_y}{J_x} \operatorname{tg} \varphi_n. \quad (1.27)$$

При возрастании сжимающей силы прогибы стержня увеличиваются в направлении меньшей жесткости значительно быстрее, поэтому соотношение $\frac{f_y}{f_x}$ непрерывно уменьшается.

Одновременно с изменением $\frac{f_y}{f_x}$ происходит поворот нулевой линии сечения $n-n$ в направлении приближения к оси $y-y$ (рис. 6, б). Как показали эксперименты и аналитический расчет при наиболее распространенных гибкостях раскосов, угол α к моменту появления краевой текучести составляет примерно $10-12^\circ$, и момент инерции, взятый относительно оси $n-n$, составляет при этом

$$J_{n(\alpha=12^\circ)} = 1,12 J_y.$$

Предположим, что в этот момент происходит потеря устойчивости стержня в виде изгиба в направлении, перпендикулярном оси $n-n$. Тогда критическую нагрузку получим по формуле Эйлера, подставляя в нее значение момента инерции

$$J_{n(\alpha=12^\circ)}.$$

Следует отметить, что при обычных для раскосов гибкостях $= 120 \div 180$ критическая сила для стержня без связей в пролете, способного терять устойчивость при изгибно-крутильных деформациях, практически не отличается от критической силы, отвечающей изгибу в плоскости наименьшей жесткости.

Таким образом, если предположить упругую работу материала, то потеря устойчивости рассматриваемого стержня, лишенного связи, будет происходить при силе $N_{кр}^u$, значения которой ограничены следующими пределами:

$$\frac{1,12 \pi^2 E J_y}{l^2} > N_{кр}^u > \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}.$$

В действительности потеря устойчивости раскоса наступает в упруго-пластической стадии его работы. При заданных в решаемой задаче эксцентриситетах пластические деформации развиваются со стороны обушка и к моменту достижения предельного состояния проникают вглубь сечения $u = (0,15 \div 0,2) h$. В этом случае критическое состояние раскоса определяется геометрическими характеристиками упругого ядра сечения.

На рис. 7 пунктирными линиями показаны зависимости момента инерции упругого ядра J_2 от глубины зоны пластических деформаций $u = h - a$ (по вертикальной оси откладывается $\frac{J_2}{J_y}$, по горизонтали $\frac{a}{h} = \frac{h-u}{h}$). Каждая кривая дает эту зависимость при определенном угле наклона нулевой линии.

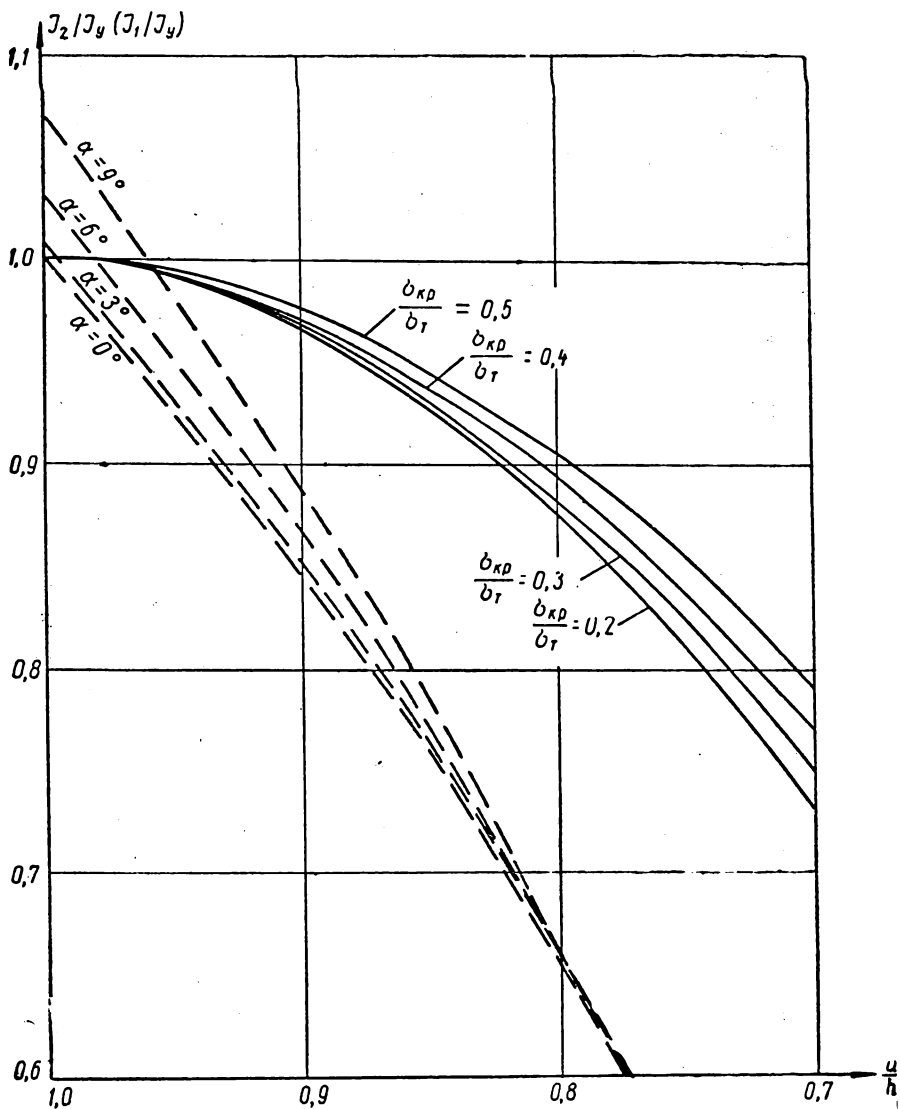


Рис. 7. Графики зависимости расчетных сечений от глубины пластической зоны

Как видно из рис. 7, с развитием пластических деформаций отношения $\frac{J_2}{J_y}$ уменьшаются, и, что характерно, разница между значениями J_2 для различных углов наклона нулевой линии также уменьшается, а при $\frac{d}{h} < 0,83$ почти пропадает. Поскольку в состоянии предельного равновесия при $\frac{u}{h} = 0,15 \div 0,20$ изменение угла наклона нулевой линии в диапазоне $0 < \alpha < 12^\circ$ практически не сказывается на величине момента инерции упругого ядра, можно сделать заключение, что происходящий в процессе нагружения некоторый поворот сечения весьма мало влияет на величину критической силы. Это позволяет считать допустимым рассмотрение раскоса в условиях сжатия с косым изгибом.

Критическую силу для раскоса, длина которого (расстояние между точками перегиба) по мере нагружения уменьшается до расчетной, определяем приближенно следующим образом. Задаемся сжимающей силой, при которой появляется фибровая текучесть, и разбиваем ее на n одинаковых сил.

Принимаем такое же количество расчетных схем раскоса шарнирно опертых стержней длиной l_1, l_2, \dots, l_n , отличающихся друг от друга по длине на одинаковую величину. Пусть первая длина равна геометрической ($l_1 = l_r$), последняя — расчетной ($l_n = l_{rp}$).

Рассматривая раскос как шарнирно опертый стержень длиной $l_1 = l_r$, загружаем его силой N_1 , и по формулам (1.25) и (1.26) определяем прогибы f_{1x} и f_{1y} в середине длины. Предположив искривление стержня l_1 , по полуволне синусоиды определим прогибы y_{2x} и y_{2y} (рис. 8), на которые увеличиваются эксцентриситеты сжимающей силы N_2 , действующей на стержень длиной l_2 .

$$\left. \begin{aligned} y_{2x} &= (f_{1x} + f_{1x}) \sin \frac{\pi(l_1 - l_2)}{2l_1}; \\ y_{2y} &= f_{1y} \sin \frac{\pi(l_1 - l_2)}{2l_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Далее закрепляем изогнутую ось на длине l_2 и прорезаем стержень в местах этих опор шарнирами.

Загружаем этот стержень силой N_2 и определяем его прогибы в середине длины по формулам

$$f_{2x} = \frac{N_2(1,27 m_{2x} + f_{1x2})}{N_{\text{Э}(2)}^x - (N_1 + N_2)}; \quad (1.29)$$

$$f_{2y} = \frac{N_2(1,27 m_{2y} + f_{1y2})}{N_{\text{Э}(2)}^y - (N_1 + N_2)}, \quad (1.30)$$

где

$$m_{2x} = y_{2x} + m_x;$$

$$m_{2y} = y_{2y} + m_y;$$

$$f_{нх2} = f_{нх} + f_{1х} + m_x - m_{2х};$$

$$f_{ны2} = f_{1у} + m_y - m_{2у};$$

$$N_{\text{Э}}^x = \frac{\pi^2 EJ_x}{l_2^2}; \quad N_{\text{Э}}^y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l_2^2}.$$

Аналогично предыдущему, определяем прогибы второго стержня в местах концов третьего стержня длиной l_3 :

$$\left. \begin{aligned} y_{3x} &= (f_{нх} + f_{1х} + f_{2х} + m_x - m_{2х}) \sin \frac{\pi (l_2 - l_3)}{2l_2}; \\ y_{3y} &= (f_{1у} + f_{2у} + m_y - m_{2у}) \sin \frac{\pi (l_2 - l_3)}{2l_2}. \end{aligned} \right\} (1.31)$$

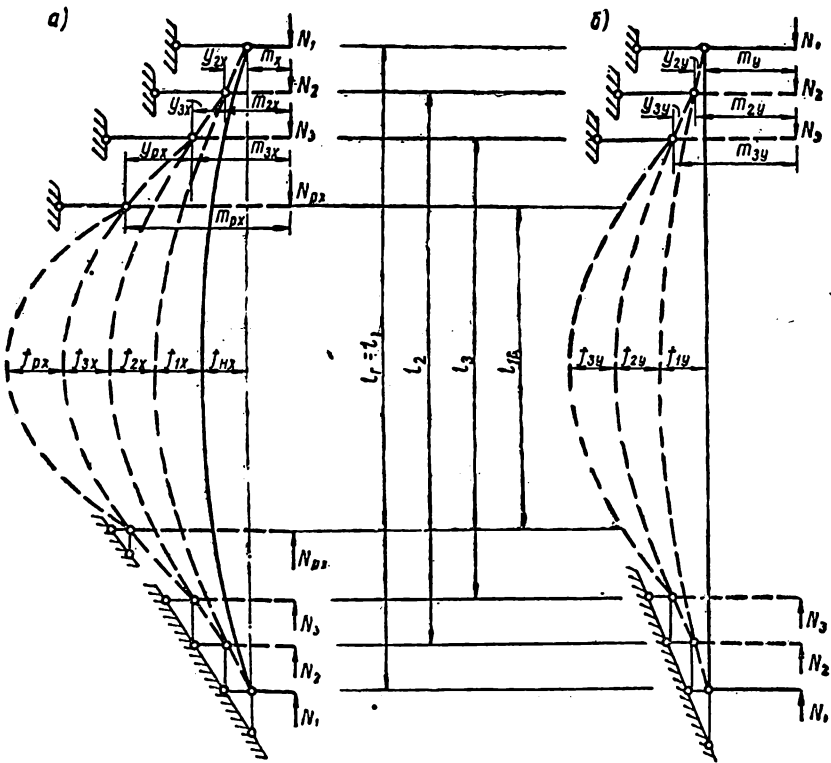


Рис. 8. Расчетная схема раскоса

Снова закрепляем изогнутую ось стержня, но уже на длине l_3 и в местах новых опор прорезаем стержень шарнирами. Загрузив новый стержень силой N_3 , определяем прогиб в середине длины:

$$f_{3x} = \frac{N_3(1,27 m_{3x} + f_{нх3})}{N_{\Xi(3)}^x (N_1 + N_2 + N_3)}; \quad (1.32)$$

$$f_{3y} = \frac{N_3(1,27 m_{2y} + f_{нy3})}{N_{\Xi(3)}^y (N_1 + N_2 + N_3)}, \quad (1.33)$$

$$m_{3x} = y_{3x} + m_{2x};$$

$$m_{3y} = y_{3y} + m_{2y};$$

$$f_{нх3} = f_{нх} + f_{1x} + f_{2x} + m_x - m_{3x};$$

$$f_{нy3} = f_{1y} + f_{2y} + m_y - m_{3y};$$

$$N_{\Xi(3)}^x = \frac{\pi^2 E J_x}{l_3^2}; \quad N_{\Xi(3)}^y = \frac{\pi^2 E J_y}{l_3^2}$$

и т. д. Таким образом, по мере увеличения сжимающей силы и ее эксцентриситетов расчетная длина стержня уменьшается. Определив эксцентриситеты и прогиб для последнего стержня длиной l_n и найдя полные прогибы стержня, равные сумме прогибов n стержней, по трехчленной формуле находим максимальное напряжение в среднем сечении раскоса. Если это напряжение оказывается близким пределу текучести, то переходим к исследованию работы раскоса в упруго-пластической стадии.

Прогибы внецентренно сжатого стержня в упруго-пластической стадии его работы могут быть найдены при использовании соответствующих геометрических характеристик первого расчетного сечения по следующим формулам [1]:

$$f_{1x} = \frac{N(N_{1x} - N)m_x}{(N_{1x} - N)(N_{1y} - N)}; \quad (1.34)$$

$$f_{1y} = \frac{N(N_{1y} - N)m_y}{(N_{1x} - N)(N_{1y} - N)}, \quad (1.35)$$

где

$$N_{1x} = \frac{\pi^2 E J_{1x}}{l^2}; \quad N_{1y} = \frac{\pi^2 E J_{1y}}{l^2};$$

здесь J_{1x} и J_{1y} — экваториальные моменты инерции первого расчетного сечения относительно его главных осей.

Заметим, что при определении прогибов необходимо для каждого значения сжимающей силы задаваться зоной пластических деформаций.

Определив прогибы, необходимо найти напряженное состояние в сечении и убедиться в том, что действительная зона пластических деформаций соответствует заданной. После этого можно еще увеличить силу, определить новые прогибы и снова установить напряженное состояние в сечении и т. д.

Таким образом, постепенно увеличивая силу (и определяя напряженное состояние), можно подойти к ее предельному значению.

В гибких раскосах развитие пластических деформаций невелико, поэтому при гибкостях порядка $\lambda = 150 : 200$ после нагрузки, отвечающей краевой текучести, сразу рассматриваем раскос в состоянии предельного равновесия.

В общем случае сжатия с косым изгибом величина момента инерции J_1 первого расчетного сечения определяется углом наклона эпюры нормальных напряжений (разностью краевых напряжений), глубиной зоны пластических деформаций и положением нулевой линии в плоскости сечения.

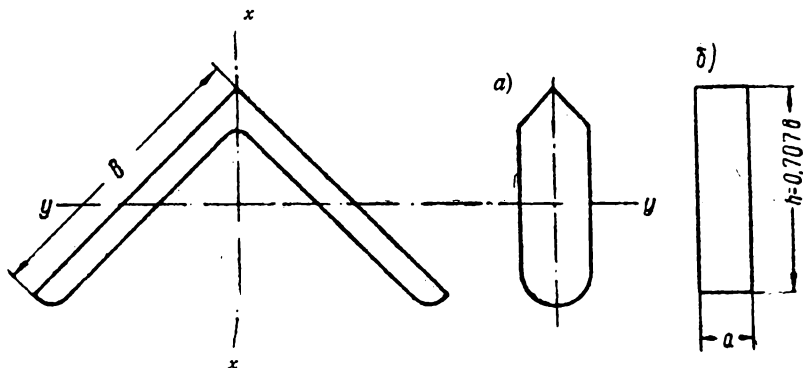


Рис. 9. Действительное и эквивалентное ему расчетное сечение

Учитывая, что в раскосах с болтовыми узлами в предельном состоянии угол α составляет не более $5-8^\circ$, можно при определении J_1 принять $\alpha = 0$.

Это допущение сильно облегчает расчет и в то же время незначительно влияет на конечные результаты (расхождение не более $2-3\%$). Приняв $x-x$ за направление изгиба, совместим с этой осью стороны уголка. На рис. 9 изображены действительное сечение уголка и эквивалентное ему расчетное сечение.

Задача упрощается еще более, если расчетное сечение представить в виде прямоугольника с таким же моментом инерции и высотой $h = 0,707 b$ (рис. 9, б). Это второе упрощение вносит определенные неточности.

Для прямоугольного сечения на вычислительной станции ЦНИИСК при помощи электронной машины «Урал» определены моменты инерции первого расчетного сечения.

На рис. 7 сплошными линиями даны графики зависимости отношения момента инерции первого расчетного сечения J_1 к моменту инерции J всего сечения от отношения глубины упругого ядра a к высоте всего сечения h для различных значений $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_t}$.

Учитывая, что для встречающихся в практике гибкостей раскосов отношение $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_t}$ изменяется в пределах $0,2-0,5$, на

рис. 7 приведено лишь четыре кривые для $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{т}} = 0,2; 0,3; 0,4$ и $0,5$.

Как видно из рис. 7, при небольшом развитии пластических деформаций $\left(\frac{a}{h} = 0,90-0,85\right)$ изменение $\sigma_{кр}:\sigma_{т}$ оказывает незначительное влияние на J_1 , и с ним можно не считаться.

Возвращаемся к исследованию работы раскоса при наличии пластических зон. Расчет начинаем с определения критической силы по упругому ядру $N_{(F_2)}$.

Для этой цели задаемся отношением глубины упругого ядра к высоте сечения $\left(\frac{a}{h} \approx 0,80-0,85\right)$ и по пунктирным кривым на рис. 7 определяем момент инерции упругого ядра J_2 .

Отметим, что при определении J_2 угол наклона нулевой линии нас не интересует, поскольку при развитии пластических деформаций со стороны обухка на $(0,15-0,20)h$ момент инерции упругого ядра при возможных в данном случае углах α практически одинаков.

Используя J_2 , подсчитываем соотношение погонных жесткостей пояса к раскосу $\frac{i_{п}}{i_{р}} = \frac{J_{п} l_{р}}{l_{п} J_2}$ и по графикам на рис. 4 находим расчетную длину раскоса $l_{2р}$. Тогда

$$N_{(F_2)} = \frac{\pi^2 E J_2}{l_{2р}^2}. \quad (1.36)$$

По $N_{(F_2)}$ нетрудно подсчитать $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{т}}$.

Далее, пользуясь сплошными графиками на рис. 7, по ранее заданной глубине зоны пластических деформаций $\left(\frac{u}{h}\right)$ для полученного $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{т}}$ определяем момент инерции первого расчетного сечения J_1 . После этого подсчитываем отношение погонных жесткостей пояса к раскосу $\frac{i_{п}}{i_{р}} = \frac{J_{п} l_{р}}{l_{п} J_1}$ и по графикам на рис. 4 находим новую расчетную длину $l_{1р}$, отвечающую точкам перегиба упругой линии.

Откладываем на изогнутой оси раскоса (см. рис. 8) расчетную длину $l_{1р}$ и подсчитываем в плоскости оси X стрелку искривления на длине $l_{1р}$.

Если предположить, что на рис. 8 l_3 соответствует расстоянию между точками перегиба упругой линии, при котором появляется фибровая текущая, то смещение $y_{рх}$ концов стержня длиной $l_{1р}$ будет равно

$$y_{рх} = (f_{нх} + f_{1х} + f_{2х} + f_{3х} + m_x - m_{3х}) \sin \frac{\pi(l_3 - l_{1р})}{2l_3}. \quad (1.37)$$

Далее, закрепив концы стержня длиной l_{1p} шарнирами, загружаем его расчетной силой

$$N_{px} = N_{(F_2)} - \Sigma N_n, \quad (1.38)$$

где ΣN_n — общая сила, действующая на раскос при появлении краевой текучести.

Полагая, что дальнейшее искривление раскоса будет происходить в направлении оси x , определяем: прогиб в середине длины стержня l_{1p} от силы N_{px} :

$$f_{px} = \frac{N_{px}(1,27 m_{px} + f_{np})}{N_{\Sigma}^x - N_{(F_2)}}, \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} m_{px} &= y_{px} + m_{3x}; \\ f_{np} &= f_{nx} + f_{1x} + f_{2x} + f_{3x} + m_x - m_{px}; \\ N_{\Sigma}^x &= \frac{\pi^2 EJ_1}{l_{1p}^2}. \end{aligned}$$

Используя выражение для кривизны, определим фибровое напряжение σ_r на кромке сечения противоположной пластическим деформациям при действии на раскос силы $N_{(F_2)}$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pi^2 f}{l_{1p}^2} = \frac{\sigma_r - \sigma_1}{Ea}, \quad (1.40)$$

где

$$\sigma_1 = \sigma_r - \frac{\pi^2 f E a}{l_{1p}^2}; \quad (1.41)$$

f — общий прогиб стержня на длине l_{1p} , равный

$$\Sigma f_{nx} + f_{np} - m_p; \quad (1.42)$$

a — глубина упругого ядра.

Подсчитав σ_1 , нетрудно построить эпюру нормальных напряжений, по которой и определяется $N_{(F_1)}$.

Совпадение $N_{(F_1)}$ с $N_{(F_2)}$ укажет на правильность выбора величины зоны пластических деформаций.

Сделанное предположение о работе стержня в упруго-пластической стадии по схеме плоского изгиба и использование расчетного сечения в виде прямоугольника позволяют предельную силу получить по графикам К. Ежека [11].

Для этой цели рассматриваем шарнирно опертый стержень прямоугольного сечения длиной l_{1p} , загруженный сжимающей силой с эксцентриситетом m_{px} (см. рис. 8).

Произведенными сопоставлениями было установлено, что расхождение в критических нагрузках, определенных по методике А. В. Геммерлинга и К. Ежека, не превышает 3—5%.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРАКТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Если рассматривать раскосы из одного равнобокого уголка одинаковой гибкости, но различного сечения и, следовательно, различной длины, то, строго говоря, каждому профилю будут соответствовать свои предельные напряжения. Тем не менее проведенные подсчеты показали, что различие в предельных напряжениях не превышает 2—3%. Этот результат позволил применительно к раскосам из прокатных равнобоких уголков построить общую зависимость $\sigma_{кр} = \lambda$.

На рис. 10 приводятся зависимости $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} = \lambda$ для $\frac{i_n}{i_p} = 1,5; 3$ и 6.

Пунктирной линией на рис. 10 даются величины коэффициента φ понижения напряжений при продольном изгибе по НитУ 121—55.

Из рис. 10 видно, что с уменьшением гибкости раскосов увеличивается разрыв между пунктирными и сплошным графиками, что указывает на снижение эффективности жестких раскосов.

Основываясь на приведенных графиках, нетрудно подобрать соответствующие параметры для практического расчета.

Как известно, сечение раскосов при елочной решетке и сварных узлах проверяется по формуле

$$\sigma = \frac{N_p}{0,75 F_{ср} \varphi}, \quad (1.43)$$

где 0,75 — коэффициент условий работы раскосов, учитывающий приварку раскоса одной полкой.

Примем и для раскосов с болтовыми узлами коэффициент условий работы равным 0,75.

В предельном состоянии будем иметь

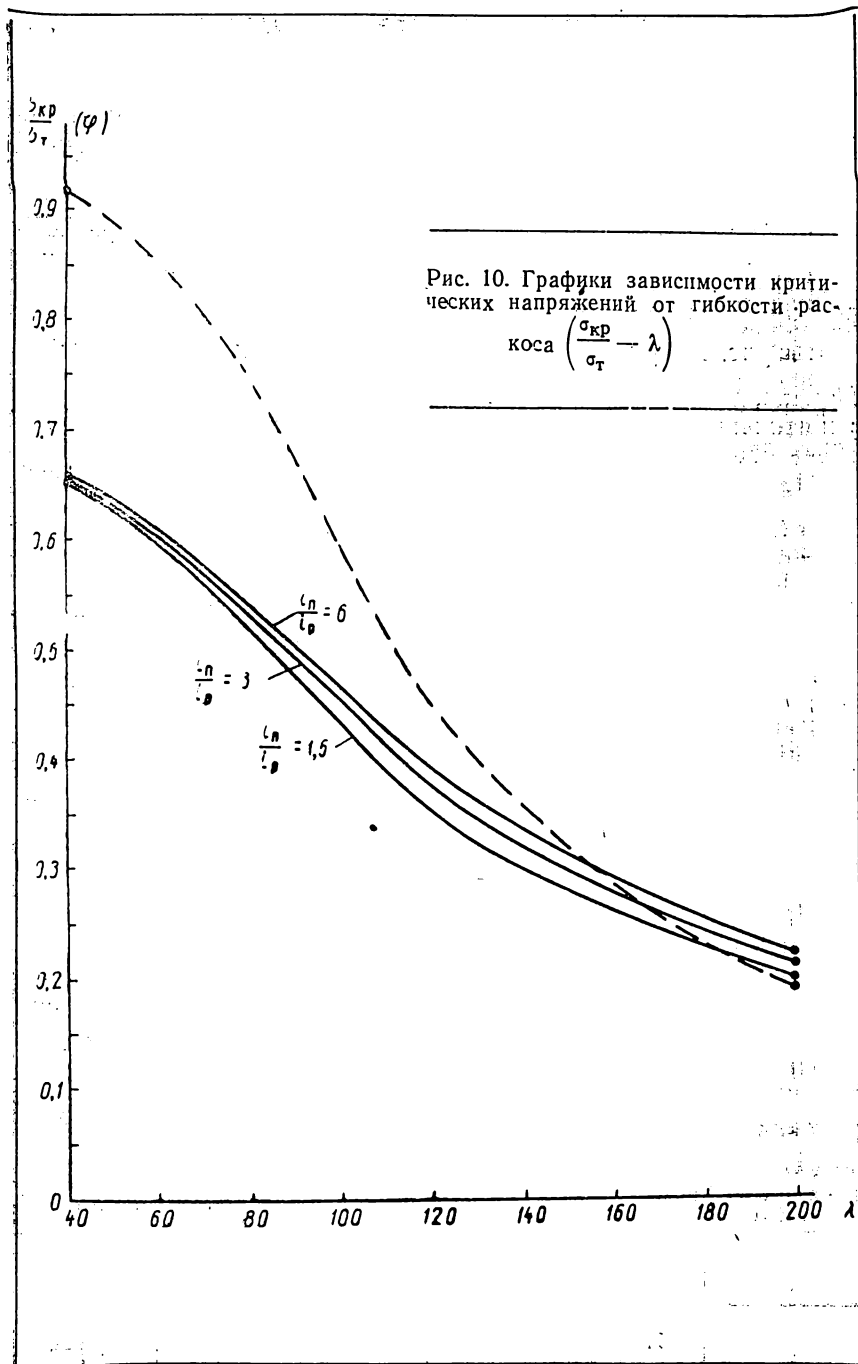
$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} = 0,75 \varphi. \quad (1.44)$$

По графикам рис. 10 подобраны расчетные длины раскосов, при которых удовлетворяется равенство (1.44). Ввиду малого влияния величины $\frac{i_n}{i_p}$ подбор μ_p^y сделан по нижней кривой, в результате чего расчетные длины поставлены в зависимость только от гибкости раскоса.

В табл. 1 приводятся μ_p^y .

Таблица 1

λ	60	80	100	120	140	160	180	200
μ_p^y	1,22	1,10	1,03	0,98	0,92	0,88	0,86	0,83



Заметим, что полученные таким образом расчетные длины не совпадают с расчетными длинами упругой системы (см. рис. 4). Это несоответствие объясняется тем, что здесь расчетными длинами совместно с коэффициентом условий работы оценивается состояние предельного равновесия искривленных раскосов при внецентренно действующей сжимающей силе и учете упруго-пластической работы раскоса.

Мачты с перекрестными раскосами. Исследование раскосов мачт с перекрестной решеткой производилось аналогичным способом, т. е. в упруго-пластической стадии использовались расчетные сечения и задача расчленялась на две части.

Вследствие этого для перекрестных раскосов приводятся лишь конечные результаты, т. е. значения μ_p^y (табл. 2), также полученные при коэффициенте условий работы $m = 0,75$.

В системах с перекрестной решеткой μ_p^y зависят от жесткости пояса несколько больше, чем при елочной, поэтому коэффициент приведения расчетной длины раскоса поставлен в зависимость как от гибкости раскоса, так и от отношения $\frac{i_p}{i_p}$.

Таблица 2

		λ						
$\frac{i_p}{i_p}$	до 60	80	100	120	140	160	180	200
1	1,37	1,19	1,08	1	0,97	0,96	0,95	0,93
2	1,33	1,15	1,05	0,97	0,94	0,92	0,91	0,9
4 и больше	1,3	1,12	1,01	1,94	0,91	0,89	0,88	0,86

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В качестве опытных образцов использовались отсеки мачт длиной 10 м с елочной и перекрестной решеткой. Сечение первых отсеков было 1×1 м, вторых $2,3 \times 1,5$ м.

Пояса изготовлялись из прокатных уголков сечением 75×6 , раскосы — из уголков 40×5 , 50×5 и 60×5 мм.

Прикрепление раскосов к поясам осуществлялось на черных болтах диаметром 16 мм. Отверстия в раскосах и поясах (для болтов) имели диаметр 18 мм.

Отсеки нагружались поперечной силой или поперечной силой и крутящим моментом.

Нагрузка повышалась до потери устойчивости раскосов, которая происходила после появления в них пластических деформаций. Испытания производились при нормальном натяжении болтов (ключом длиной 35 см) и при болтах, ослабленных на один поворот гайки.

Было произведено 120 различных испытаний.

Для определения формы искривлений раскоса в середине его длины приваривался поперечный стержень и при помощи прогибомеров определялись перемещения его концов.

По этим смещениям нетрудно было установить и угол, на который поворачивается сечение раскоса.

Немного отступя от этого стержня, по обуху и перьям уголка раскоса ставились тензометры. По их показаниям определялось положение нулевой линии в сечении.

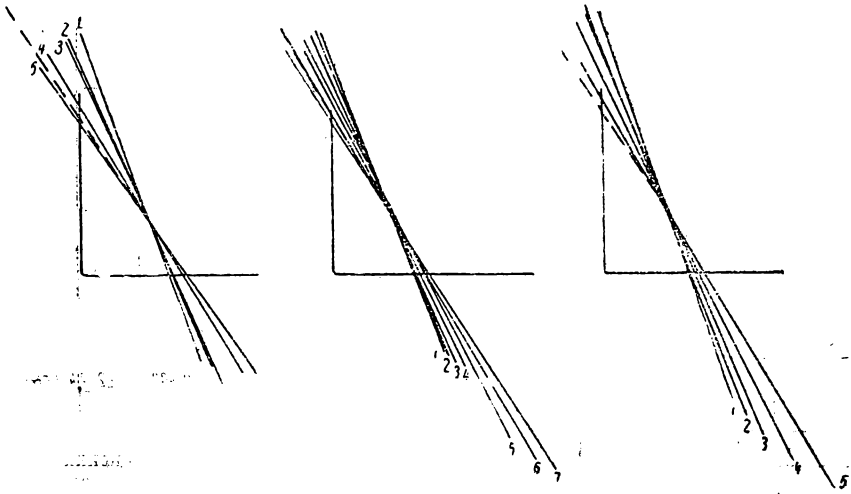


Рис. 11. Изменение угла наклона нулевой линии под нагрузкой

На рис. 11 показаны положения нулевой линии в процессе нагружения отсека. Эти линии условно проводятся через центр тяжести сечения и нумеруются по этапам нагружения. Последний номер соответствует нагрузке, близкой к критической. Пунктирной линией отмечено теоретическое положение нулевой линии в состоянии предельного равновесия.

Как видно из рис. 11, с возрастанием нагрузки нулевая линия поворачивается в направлении к оси $y - y$ и в предельном состоянии почти совпадает с теоретической, определенной, как было показано выше, для стержня, работающего на сжатие с косым изгибом в упруго-пластической стадии. Угол, на который поворачивается нулевая линия, равен примерно $13-15^\circ$. В то же время угол закручивания среднего сечения раскоса составляет всего около 1° . Таким образом, экспериментом подтверждается допустимость игнорирования закручивания раскоса.

На рис. 12 приводятся графики зависимости поворота опорного сечения раскоса елочной решетки от усилия в раскосе.

Угол поворота определялся клинометрами, поставленными слева и справа от узла крепления раскоса. Верхняя точка графиков отвечает предельной нагрузке. По вертикальной оси на рис. 12 отложено усилие в раскосе $N_{\text{раск}}$.

Из рассмотрения графиков можно установить, что поворот узла увеличивается почти линейно. Линейность нарушается лишь при нагрузке, близкой к критической.

В этих же координатах построен график прогиба середины раскоса $f—N_{\text{раск}}$.

Как и следовало ожидать, развитие прогибов происходит нелинейно, с увеличением нагрузки скорость нарастания прогибов увеличивается.

Таким образом, принятая в теоретическом исследовании взаимосвязь между прогибом раскоса и поворотом его опор экспериментом подтверждается.

Эпюры изгибающих моментов по длине раскоса елочной решетки в плоскости, перпендикулярной оси $y—y$, для различных этапов нагружения приводятся на рис. 13. Последняя эпюра соответствует нагрузке, близкой к критической.

Из рассмотрения этих эпюр можно установить, что в начальной стадии нагружения изгибающие моменты по длине раскоса почти одинаковы. Это указывает на шарнирное закрепление концов и малый эффект сжато-изогнутости. При увеличении нагрузки в середине длины раскоса моменты начинают увеличиваться быстрее, чем у концов: эпюра искривляется, появляются точки перегиба. Все это указывает на то, что концы раскосов имеют упругую заделку, степень которой увеличивается с нарастанием нагрузки.

Таким образом, принятая в аналитическом исследовании расчетная длина раскоса качественно подтверждается.

Зная величины изгибающих моментов и нормальных сил, нетрудно определить эксцентриситеты приложения продольной силы. Как и предполагалось, точка приложения силы оказалась вне контура сечения. В большинстве случаев она располага-

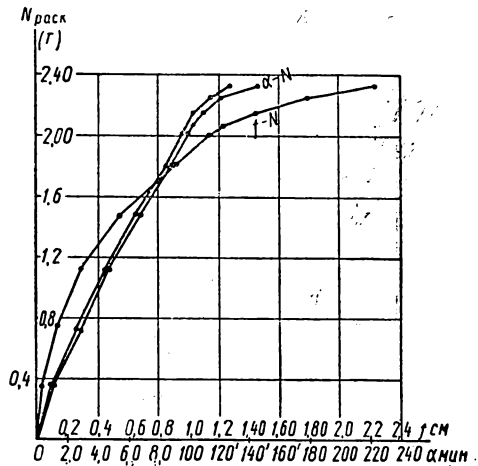


Рис. 12. Экспериментальные графики углов поворота опорных сечений раскоса и прогиба его середины

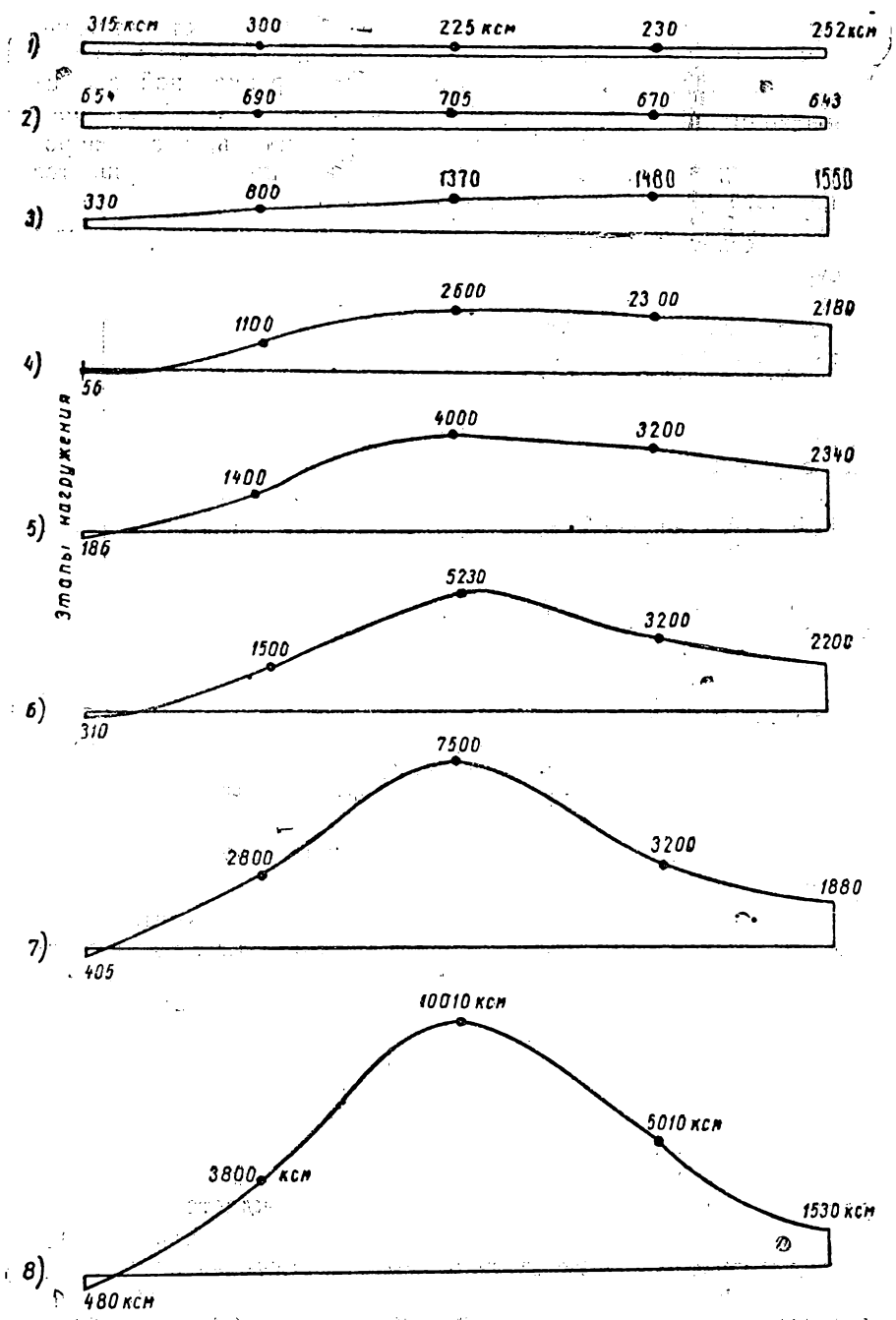


Рис. 13. Экспериментальные эпюры изгибающих моментов по длине раскоса

лась немногим ниже оси болта (смещалась к обушке). Тем не менее расхождение в этой части с расчетной схемой было невелико.

Сопоставление экспериментальных и теоретических предельных нагрузок. На рис. 14 горизонтальными пунктирными линиями даны значения предельных нагрузок для расколов сечением 40×5 мм, гибкостью $\lambda = 206$; сечением 50×5 мм, гибкостью $\lambda = 163$ и сечением 60×5 мм, гибкостью $\lambda = 134$ при елочной решетке. Сплошными точками отмечены значения эк-

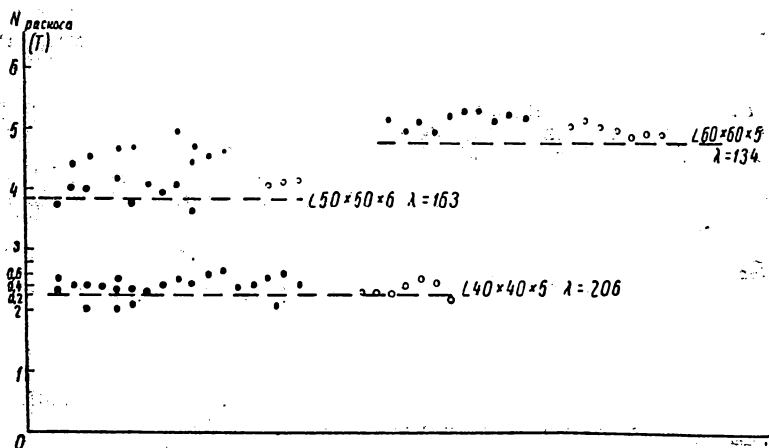


Рис. 14. Экспериментальные и теоретические значения предельной нагрузки

спериментальных предельных нагрузок при нормальном натяжении соединительных болтов, кружочками — при ослабленном.

Как видно из рис. 14, независимо от степени натяжения болтов имеет место достаточно хорошее совпадение экспериментальных и теоретических предельных нагрузок.

Подтверждение многочисленными экспериментами расчетных предпосылок и значений теоретических предельных нагрузок дало основание рекомендовать использовать полученные результаты в реальном проектировании.

Основываясь на предложенной методике расчета, в институте Теплоэлектропроект произведено опытное проектирование унифицированных опор ЛЭП башенного типа.

Данная методика расчета включена в «Руководящие указания по расчету опор и фундаментов линий электропередачи» (ЦНИИСК АСИА СССР и Теплоэлектропроект, 1960) [12].

При испытании отсеков с перекрестной решеткой был установлен большой разброс в значениях предельной нагрузки, что объясняется различным по величине сдвигом расколов и связанным с этим перераспределением внутренних усилий.

В расчете систем, обладающих внутренней статической неопределимостью неблагоприятное влияние сдвига расколов учтено коэффициентом условия работы $m=0,75$ (при сварных однотипных системах $m=0,9$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Геммерлинг А. В., Несущая способность стержневых стальных конструкций, Госстройиздат, 1958.
2. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, 1959.
3. Блейх Ф., Устойчивость металлических конструкций, Физматгиз, 1959.
4. Смирнов А. Ф., Устойчивость и колебания сооружений, Трансжелдориздат, 1958.
5. Трофимов В. И., Устойчивость перекрестных расколов в пространственных стержневых системах. Сб. «Расчет пространственных конструкций» под ред. А. А. Уманского, вып. VI, Госстройиздат, 1961.
6. Динник А. Н., Продольный изгиб. Кручение, изд. АН СССР, 1955.
7. Bleich F., Bleich H., Die Stabilität räumlicher. Stahlverbindungen, Z. Ö. i. A. V., 1928.
8. Girkmann K., Die Knickfestigkeit der Eikstäbe von Raumtragwerken mit ebenen, Knoten, Z. VDI, 1928.
9. Тимошенко С. П. — Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.
10. Трофимов В. И. — Исследование и расчет элементов стальных опор линий электропередачи, Госэнергоиздат, 1959.
11. Jezek K., Die Festigkeit von Drückstäben aus Stahl, Wien, 1937.
12. Балдин В. А., Трофимов В. И., Свердлов П. М., Пономарев А. И., Бухарин Е. М. — Руководящие указания по расчету опор и фундаментов линий электропередачи. ЦНИИСК АСИА СССР, Теплоэлектропроект М. Э. С., 1960.

Д-р техн. наук А. В. ГЕММЕРЛИНГ, инж. Б. И. ОСЬКИН

РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

В обычных однопролетных балках эффект от использования упруго-пластической стадии работы определяется отношением пластического $W_{пл}$ и обычного W моментов сопротивления сечения. Для прокатных двутавров это отношение близко к 1,15, для сварных — обычно еще меньше.

В предварительно напряженных балках эффект упруго-пластической стадии повышается. Балка дважды может быть доведена до появления в ней пластических деформаций — во время создания предварительного напряжения и в эксплуатационной стадии. Это позволяет получить существенное повышение несущей способности.

Использование упруго-пластической стадии работы балки при создании в ней предварительного напряжения проще по следующим причинам: предварительное напряжение может осуществляться на заводе-изготовителе на хорошо подготовленном и оборудованном стенде с контролем фактического натяжения, при создании предварительного напряжения расчет балки сводится к расчету внецентренно сжатого стержня при односторонней текучести, что достаточно просто и может быть выполнено весьма точно.

В то же время использование упруго-пластической стадии работы балки при эксплуатационной нагрузке связано с рядом затруднений.

Во-первых, величины усилий от предварительного напряжения всегда могут несколько колебаться, поэтому необходимы определенные резервы.

Во-вторых, под внешней нагрузкой предварительно напряженная балка работает как статически неопределимая. Определение усилий в ее элементах после появления в балке пластических деформаций является весьма сложной задачей. Не менее сложным является и определение прогиба такой балки.

Все это позволяет считать, что использование упруго-пластической стадии работы балки при эксплуатационной нагрузке не

является целесообразным, так как не может быть строго обосновано расчетом. Кроме того, использование упруго-пластической стадии при создании предварительного напряжения весьма эффективно и позволяет использовать почти все возможности повышения несущей способности балки за счет применения высокопрочной арматуры и создания предварительного напряжения.

На основе этих соображений ниже рассматриваются балки, в которых упруго-пластические деформации допускаются только в стадии создания предварительного напряжения, а при эксплуатационных нагрузках балка работает в упругой стадии.

Возможность использования упруго-пластической стадии работы балки при создании в ней предварительного напряжения будет лишь в том случае, если общая устойчивость балки и местная устойчивость ее элементов при этом будут обеспечены. Поэтому вопросы устойчивости рассматриваются ниже особенно подробно.

Наиболее экономичными предварительно напряженными балками являются такие, у которых максимально уменьшен нижний пояс и вместо этого поставлена арматура из высокопрочной стали. Таким образом, балка превращается в двутавр с неодинаковыми поясами.

Конструктивно нижний пояс осуществляется различно. Его делают из полосы, уголка, трубы и т. д., однако в расчетном отношении все эти балки могут рассматриваться как двутавровые с неодинаковыми поясами.

Высокопрочная арматура может быть стержневой, из проволок или тросов. С телом балки арматура может соединяться только на концах, во всех сечениях по длине балки и в отдельных узлах.

Если арматура соединяется с балкой только на концах, то усилия в напрягающих элементах являются внешними по отношению к балке. Такая расчетная схема дает некоторый запас, так как в случае начала потери устойчивости балки величина усилий в напрягающих элементах сразу падает и рост деформаций прекращается, однако местные повреждения конструкции при этом возможны.

Другим крайним случаем является соединение напрягающего элемента с балкой во всех поперечных сечениях, причем соединения предполагаются такими, что они обеспечивают совместность поперечных перемещений напрягающего элемента и балки, но не препятствуют их взаимным продольным перемещениям.

В металлических конструкциях чаще всего применяется соединение напрягающих элементов с балкой в ряде отдельных сечений, достаточно часто расположенными по длине балки.

В расчетной схеме такое соединение может приниматься непрерывным по длине, а участки балки между этими узлами должны быть проверены отдельно.

1. ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ БАЛКИ В СТАДИИ СОЗДАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Решение задачи о пространственной устойчивости упругих тонкостенных внецентренно сжатых стержней в линейной постановке дано В. З. Власовым. В последнее время появились работы с критикой решения В. З. Власова, основанные, по своему существу, на положении о существенных качественных различиях явлений потери устойчивости первого и второго родов и на переносе решений, полученных для безгранично упругих стержней на стержни из реальных материалов. Такой перенос не является обоснованным и в ряде случаев приводит к неправильным выводам.

Неучет деформаций изгиба и кручения при значительных эксцентриситетах сжимающей силы может привести к погрешностям.

Это побудило одного из авторов данной статьи попробовать учесть в первом приближении влияние деформаций стержня [1], однако это привело к существенному усложнению расчетных формул.

Ввиду этого в данной статье вопросы устойчивости тонкостенного стержня рассматриваются на основе работ В. З. Власова, что в первом приближении следует считать допустимым, так как реальные стержни к моменту достижения критического состояния, как правило, имеют сравнительно небольшие деформации.

Кроме того, большинство предварительно напряженных балок имеет не менее одной оси симметрии, и проверка их устойчивости сводится к задачам устойчивости плоской формы изгиба, для которых решение В. З. Власова достаточно точно.

Уравнения устойчивости для сплошного тонкостенного стержня с предварительным напряжением в общем виде получены В. З. Власовым [2].

Для случая, когда имеется только одно предварительное напряжение (внешние нагрузки отсутствуют), эти уравнения можно привести к следующему виду:

$$E J_y u^{IV} = 0; \quad (1.1)$$

$$E J_x v^{IV} = 0; \quad (1.2)$$

$$E J_\omega \varphi^{IV} - G J_d \varphi'' + N_a \varphi'' \left(r_p^2 - x_a^2 - y_a^2 + \frac{U_x}{J_x} y_a + \frac{U_y}{J_y} x_a \right) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$r_p^2 = \frac{J_x + J_y}{F};$$

u, v, φ — линейные перемещения и угол поворота в плоскости поперечного сечения балки;

x_a и y_a — координаты напрягающего элемента в главных центральных осях поперечного сечения балки;

$$U_x = \int_F (x^2 + y^2) y dF; \quad U_y = \int_F (x^2 + y^2) x dF; \quad (1.4)$$

J_x, J_y, J_ω — осевые и секториальные моменты инерции сечения;
 N_a — усилие в предварительно напрягающем элементе (арматуре).

Все остальные обозначения обычные.

Если предварительно напрягающих элементов несколько, то каждому из них будет отвечать свое дополнительное слагаемое, аналогичное последнему, третьему, слагаемому в (1.3).

В уравнения (1.1) и (1.2) усилие N_a не входит, откуда следует, что изгибные формы потери устойчивости балки невозможны при любой величине усилия предварительно напрягающего как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях работы балки.

Этот вывод, как было сказано выше, отвечает арматуре, соединенной с балкой по всей длине непрерывно. При соединении их в отдельных узлах должна быть проверена устойчивость балки на участках между узлами.

Из уравнения (1.3) легко определяется величина критического усилия N_k в предварительно напрягающем элементе, при котором произойдет потеря устойчивости балки при крутильных деформациях. При шарнирно закрепленных концах стержня форма искривления в момент потери устойчивости может быть принята по синусоиде

$$\varphi_z = \varphi_0 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (1.5)$$

В этом случае

$$N_k = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{r_p^2 - x_a^2 - y_a^2 + \frac{U_x}{J_x} y_a + \frac{U_y}{J_y} x_a}. \quad (1.6)$$

При расположении напрягающего элемента в центре тяжести сечения балки $x_a = y_a = 0$ и

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ_\omega}{l^2 r_p^2} + \frac{GJ_d}{r_p^2}. \quad (1.7)$$

Это выражение дает величину критической силы для обычного стержня, центрально сжатого внешней силой, при крутильной форме потери устойчивости.

При изменении положения предварительно напрягающего элемента относительно центра тяжести сечения знаменатель в (1.6) изменяется.

Минимальное значение критической силы будет при расположении напрягающего элемента в точке с координатами

$$x_m = \frac{U_y}{2J_y}; \quad y_m = \frac{U_x}{2J_x}. \quad (1.8)$$

В этом случае величина критической силы определяется из формулы

$$N_k = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{r_p^2 + x_m^2 + y_m^2}. \quad (1.9)$$

При некоторых значениях координат напрягающего элемента, превышающих x_m и y_m , знаменатель в (1.6) обращается в нуль, и величина критической сжимающей силы становится бесконечно большой.

Значения координат напрягающего элемента, отвечающие этому условию, обозначим через x_k и y_k . Приравняв нулю знаменатель в (1.6), получим уравнение кривой, обладающей тем свойством, что напрягающий стержень, помещенный в любой точке этой кривой, не приводит к потере устойчивости балки даже при создании в нем бесконечно большого усилия.

Это уравнение имеет вид

$$x_k^2 + y_k^2 - 2y_m y_k - 2x_m x_k - r_p^2 = 0 \quad (1.10)$$

и является уравнением круга устойчивости В. З. Власова.

Координаты центра этого круга и его радиус определяются из следующих выражений:

$$k_x = x_m; \quad k_y = y_m; \quad R^2 = k_x^2 + k_y^2 + r_p^2. \quad (1.11)$$

При расположении напрягающего стержня за пределами круга устойчивости знаменатель в (1.11) принимает отрицательные значения, и, следовательно, потеря устойчивости балки в момент создания предварительного напряжения станет возможной только при создании в напрягающем стержне не растягивающего, а сжимающего усилия. Таким образом, при напрягающем стержне с растягивающим усилием потеря устойчивости балки возможна лишь при расположении его в пределах круга устойчивости.

На рис. 1, а изображены сечение балки в виде двутавра с неравномерными полками и круг устойчивости для него.

На рис. 1, б показаны величины критических усилий в арматуре при расположении ее в различных точках оси симметрии сечения (каждая ордината отвечает расположению арматуры под ней).

Из рис. 1, а видно, что при расположении напрягающего эле-

мента на оси симметрии со стороны меньшей полки на расстоянии

$$y_y \geq k_y + R \quad (1.12)$$

исключается возможность потери устойчивости балки при создании предварительного напряжения.

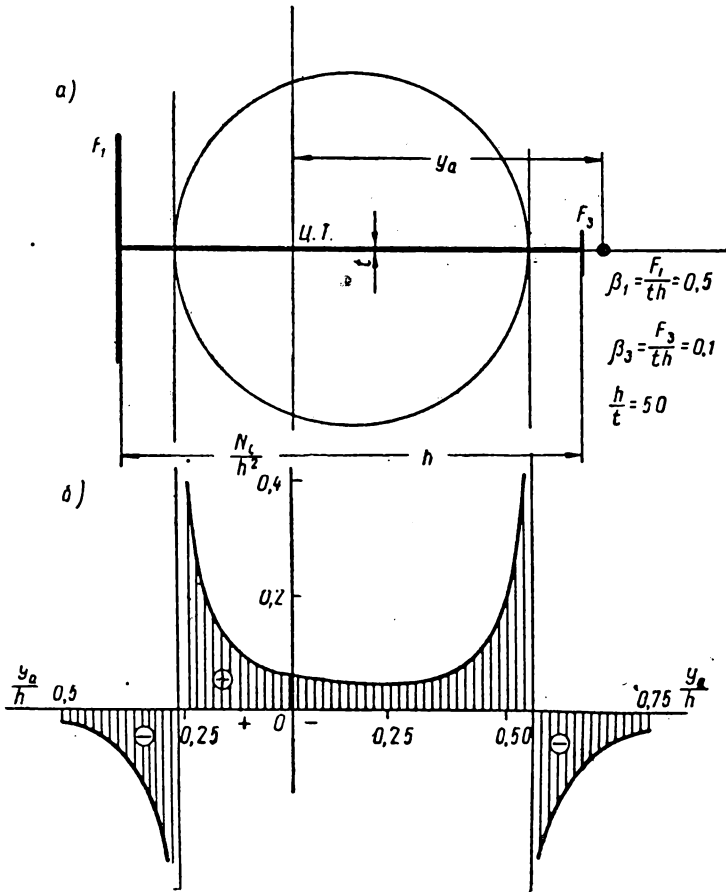


Рис. 1. Круг устойчивости и величины критических усилий в напрягающей арматуре

Для упрощения определения U_x можно привести эти вычисления для двутавра с неодинаковыми полками, показанного на рис. 1, а:

$$U_x = \int_F (x^2 + y^2) y dF = \int_{-\frac{b_1}{2}}^{+\frac{b_1}{2}} (h_1^2 + x^2) h_1 \delta_1 dx + \int_{-h_1}^{h-h_1} y^3 t dy +$$

$$+ \int_{-\frac{b_2}{2}}^{+\frac{b_1}{2}} [(h-h_1)^2 + x^2] (h-h_1) \delta_3 dx. \quad (1.13)$$

Выполнив интегрирование и подставив пределы, получим

$$U_x = (J_{x1} + J_{y1}) h_1 + (J_{x3} + J_{y3}) (h-h_1) + \frac{t h_1^4}{4} + \frac{t (h-h_1)^4}{4}. \quad (1.14)$$

Здесь J_{x1} , J_{y1} , J_{x3} , J_{y3} — моменты инерции полок F_1 и F_3 относительно главных осей Ox и Oy .

$$J_{x1} = F_1 h_1^2; \quad J_{y1} = \frac{\delta_1 b_1^3}{12}; \quad J_{x3} = F_3 (h-h_1)^2; \quad J_{y3} = \frac{\delta_3 b_3^3}{12}. \quad (1.15)$$

Тот факт, что величина U_x может быть выражена через моменты инерции отдельных полок, как это видно из (1.15), указывает на то, что этой формулой можно пользоваться как приближенной и при других формах сечения меньшего пояса балки (уголок, труба и т. д.), а также для балок из других материалов, в частности железобетонных.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ БАЛОК РАЗНЫХ СЕЧЕНИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАПРЯГАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ

При нескольких предварительно напрягающих элементах, связанных по всей длине с телом балки, уравнения (1.1) и (1.2) остаются без изменения, а уравнение (1.3) принимает следующий вид:

$$E J_{\omega} \varphi^{IV} - G J_d \varphi'' + \varphi'' \sum_{i=1}^{i=n} N_{ai} (r_p^2 - x_{ai}^2 - y_{ai}^2 + 2x_m x_{ai} + 2y_m y_{ai}) = 0, \quad (2.1)$$

где i — номер напрягающего стержня;

n — количество напрягающих стержней.

Если суммарное усилие во всех напрягающих стержнях обозначить N_a , то можно написать:

$$N_a = \sum_1^n N_{ai}. \quad (2.2)$$

Независимо от того, по какому закону возрастало усилие N_{ai} в каждом из напрягающих элементов, в любом рассматриваемом состоянии балки можно считать, что каждое из усилий N_{ai} составляет определенную долю от N_a :

$$N_{ai} = n_i N_a. \quad (2.3)$$

Если усилия во всех напрягающих элементах возрастают пропорционально одному параметру, то все коэффициенты n_i по-

стоянны; если законы их изменения различны, то величины n_i переменны в процессе нагружения.

Критическое значение N_k суммарного усилия N_a для шарнирно закрепленной балки определяется из (2.1) и (2.2):

$$N_k = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{\sum n_i (r_p^2 - x_{ai}^2 - y_{ai}^2 + 2x_m x_{ai} + 2y_m y_{ai})} \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) позволяет проанализировать, как влияет количество напрягающих стержней на устойчивость балки.

Рассмотрим, что дает замена одного напрягающего стержня, расположенного на главной оси сечения балки Oy , двумя стержнями, симметрично расставленными относительно этой же оси и одинаково напряженными.

Критическое значение усилия для первого случая можно получить из формулы (1.6), которая для рассматриваемого случая ($x_a = 0$) с учетом (1.8) дает

$$N_k^{(1)} = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{r_p^2 - y_a^2 + 2y_m y_a} \quad (2.5)$$

Для второго случая, когда

$$x_{a1} = x_a; x_{a2} = -x_a; n_1 = n_2 = 0,5, \quad (2.6)$$

из (2, 4) получаем

$$N_k^{(2)} = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{r_p^2 - x_a^2 - y_a^2 + x_m(x_{a1} + x_{a2}) + y_m(y_{a1} + y_{a2})} \quad (2.7)$$

Поскольку x_{a1} и x_{a2} равны по величине и противоположны по знакам, то сумма их равна нулю, и (2.7) принимает следующий вид:

$$N_k^{(2)} = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d}{r_p^2 - x_a^2 - y_a^2 + 2y_m y_a} \quad (2.8)$$

Поскольку при отрицательных значениях знаменателя критическое усилие также отрицательно и практического интереса не представляет, то рассмотрим только положительные значения знаменателя. Дополнительное слагаемое x_a^2 , отличающее (2.8) от (2.5), уменьшает знаменатель и, следовательно, увеличивает критическое усилие.

Таким образом, постановка вместо одного напрягающего элемента двух разнесенных всегда приводит к повышению устойчивости балки, а если один элемент 1, находящийся внутри круга устойчивости, заменяется двумя 2, расположенными за преде-

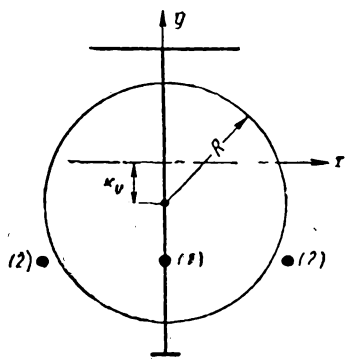


Рис. 2. Круг устойчивости и расположение напрягающих элементов для несимметричного двутавра

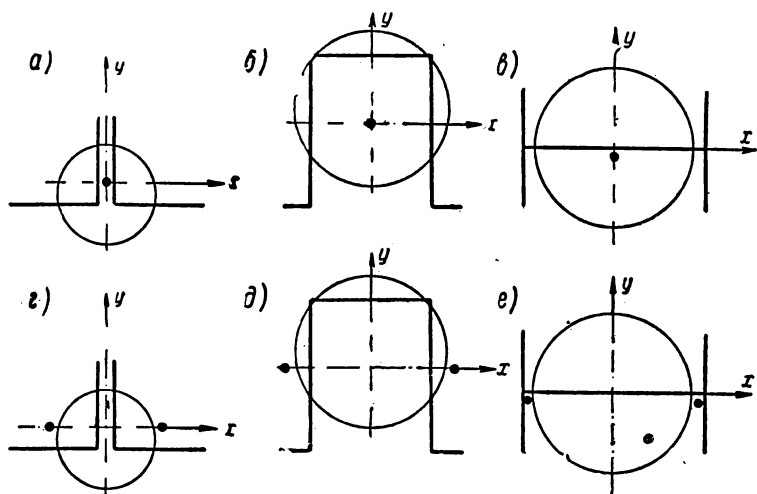


Рис. 3. Круги устойчивости и расположение напрягающих элементов для стержней различных сечений

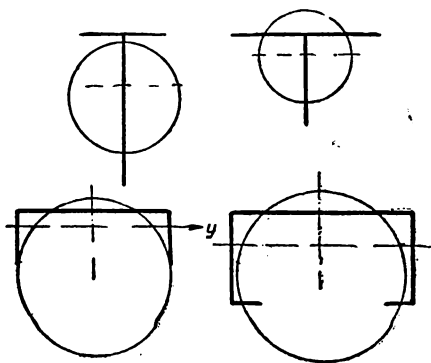


Рис. 4. Круги устойчивости для различных сечений балок или стержней

лами круга устойчивости (рис. 2), то это ведет к качественному изменению системы, так как потеря устойчивости вообще становится невозможной.

Полученное решение позволяет сделать ряд рекомендаций по расположению напрягающих элементов для стержней различных сечений, применяемых как элементы ферм или иных предварительно напряженных стержневых конструкций.

Так, например, расположение напрягающих элементов, показанное в нижнем ряду на рис. 3, для устойчивости стержня значительно лучше, чем показанное в верхнем ряду.

Если по тем или иным причинам напрягающий элемент необходимо расположить в центре тяжести сечения или вблизи него, то следует рассмотреть, целесообразно ли его соединение с телом стержня, особенно если это требует каких-то конструктивных мероприятий или постановки дополнительных деталей.

При этом следует учитывать, что критическая нагрузка, отвечающая крутильной форме потери устойчивости, в обоих случаях одинакова, но при отсутствии соединения напрягающего элемента с телом стержня становятся возможными изгибные формы потери устойчивости.

Поскольку для расчета балки или стержня на устойчивость при создании предварительного напряжения большое значение имеет круг устойчивости, на рис. 4 дан ряд сечений и на каждом из них в том же масштабе построены круги устойчивости.

3. ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛКИ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Выше рассматривались упругие балки и стержни, в то же время значительный интерес представляет их устойчивость после появления в них пластических деформаций.

Для проверки общей устойчивости балки, находящейся в упруго-пластической стадии, формулы (1.6) или (2.4) должны быть скорректированы. Проще всего это сделать, пользуясь понятиями первого и второго расчетных сечений¹.

Оба слагаемых в числителях указанных формул определяют отпорность стержня отклонениям от достигнутого состояния равновесия и должны вычисляться для второго расчетного сечения. Величина их зависит от касательных модулей с диаграммы работы материала.

Для строительных сталей, имеющих горизонтальную площадку текучести, за расчетную может быть принята идеализированная упруго-пластическая диаграмма. В этом случае касательный модуль E_k равен нулю для пластически деформированной

¹ См. статью А. В. Геммерлинга «Вопросы прочности и устойчивости строительных конструкций» в настоящем сборнике.

части сечения, догружающейся при потере устойчивости, и модулю Юнга для разгружающейся части сечения, а также для части сечения, находящейся в упругой стадии.

Все слагаемые знаменателей в (1.6) или (2.4) зависят от распределения нормальных напряжений по сечению балки к моменту достижения ею критического состояния, поэтому эти величины должны вычисляться для первых расчетных сечений балки, определяющихся при помощи секущих модулей с диаграммы работы материала.

Величины секущих модулей снижаются значительно медленнее, чем касательных.

Из этого следует, что при расположении напрягающего элемента в пределах круга устойчивости после появления в балке пластических деформаций критическое усилие уменьшается.

В то же время развитие пластических деформаций в балках ведет к уменьшению величин U_x и U_y , а также величин J_x и J_y . Вычисления показывают, что первые из них (U_x и U_y) уменьшаются быстрее, чем вторые (J_x и J_y). За счет этого величины k_x и k_y также уменьшаются.

Таким образом, появление в балке пластических деформаций ведет к уменьшению круга устойчивости.

Из этого следует, что если напрягающий элемент (или элементы) находится за пределами круга устойчивости, построенного для упругой балки, то появление пластических деформаций не приводит к понижению общей устойчивости балки при создании в ней предварительного напряжения. Это обстоятельство весьма существенно, так как позволяет при соответствующем расположении напрягающих элементов не беспокоиться об общей устойчивости балки при создании предварительного напряжения в упруго-пластической стадии.

В тех случаях, когда напрягающий элемент приходится ставить в пределах круга устойчивости и даже вблизи центра этого круга, появление пластических деформаций ведет к снижению общей устойчивости балки, так как числители в (1.6) или (2.4) уменьшаются с развитием пластических деформаций по сечению значительно быстрее, чем знаменатели.

Величина жесткости свободного кручения GJ_d при малых углах закручивания стержня или балки к моменту достижения

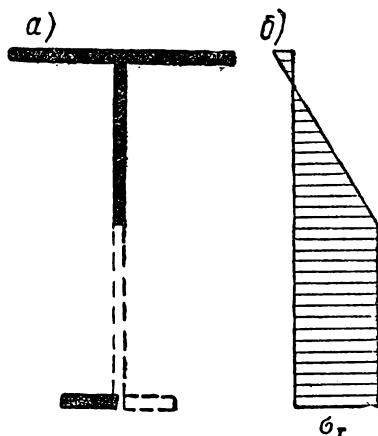


Рис. 5. Второе расчетное сечение и эпюра напряжений для двутавра неодинаковыми полками

критического состояния обычно принимается такой же, как и для упругой стадии.

В то же время величина J_{ω} должна вычисляться не для действительного, а для второго расчетного сечения.

Для стержня с сечением в виде двутавра с неодинаковыми полками, нагруженного усилиями в направляющих ЭЛЕМЕНТАХ, расположенных на оси симметрии, как это показано на рис. 2 (1), или симметрично относительно нее (2), второе расчетное сечение ограничивается тавром и половиной нижней полки, как это показано жирными линиями на рис. 5, а для эпюры напряжений согласно рис. 5, б.

Вычисление величины секториального момента инерции J_{ω} для такого несимметричного сечения сопряжено с громоздкими выкладками, так как предварительно приходится определять главные центральные оси несимметричного сечения. В то же время величина этого момента инерции J_{ω} сравнительно мала. Поэтому можно принять второе расчетное сечение в виде тавра, для которого J_{ω} равно нулю. К тому же такое упрощение идет в запас надежности.

Уменьшение первого расчетного сечения ведет к уменьшению знаменателей в (1.6) или (2.4) и, следовательно, к увеличению критической силы. Это уточнение также не столь значительно, однако требует выполнения достаточно громоздких вычислений.

Поскольку подстановка в знаменатели (1.6) или (2.4) значений, отвечающих не первому расчетному, а действительному сечению, идет в запас надежности (а при создании в балке предварительного напряжения необходимо, чтобы она была весьма устойчива), можно пойти и на это упрощение.

С учетом этих соображений формула (1.6) для определения критической величины усилия предварительного напряжения может быть записана в следующем виде:

$$N_k = \frac{GJ_d}{r_p^2 - x_a^2 - y_a^2 + 2x_m x_a + 2y_m y_a} \quad (3.1)$$

Этой формулой и можно рекомендовать пользоваться для расчета балок в упруго-пластической стадии.

Кроме общей устойчивости балки, должна быть также обеспечена и местная устойчивость ее отдельных элементов, находящихся в пластической стадии.

Следует отметить прежде всего то, что факт «абсолютной» общей устойчивости, имеющейся при расположении напрягающих элементов за пределами круга устойчивости, оказывает благоприятное влияние и на местную устойчивость.

Кроме того, сжатые при создании предварительного напряжения нижний пояс и нижняя зона стенки в эксплуатационной стадии будут работать на растяжение.

В связи с этим требования к местной устойчивости элементов балки как бы понижаются.

Нижний пояс балки может считаться устойчивым, если его свободные свесы не будут превышать десятикратной их толщины. В большинстве балок это требование выполняется.

Стенка балки вблизи нижнего пояса также может потерять устойчивость при развитии в ней пластических деформаций. На основе ряда соображений можно считать, что ее высота не должна превосходить

$$h \leq 80t \sqrt{\frac{2,1}{R}}, \quad (3.2)$$

где h и t — высота и толщина стенки;

R — расчетное сопротивление стали в t/cm^2 .

Однако эта рекомендация нуждается в экспериментальной проверке. Кроме этого, возможна потеря устойчивости всей балки в вертикальной плоскости и ее нижнего пояса в горизонтальной плоскости на участках между узлами соединения его с налегающими элементами.

Потеря устойчивости балки на участках между узлами при соединении арматуры в виде изгиба в вертикальной плоскости будет исключена, если упругое ядро в сечении балки будет иметь момент инерции J_2 не менее чем это следует из условия

$$J_2 \geq \frac{N_a l_1^2}{\pi^2 E},$$

где l_1 — расстояние между узлами;

N — усилие в арматуре;

J_2 — момент инерции упругого ядра (тавра) относительно его собственной центральной оси x (рис. 5).

Потеря устойчивости на этих же участках в виде изгиба нижнего пояса в горизонтальном направлении будет исключена, если гибкость этого пояса относительно вертикальной оси не будет превосходить 35.

При выполнении всех этих условий общая и местная устойчивость балки будет обеспечена, и при создании в ней предварительного напряжения могут быть допущены пластические деформации на значительную глубину.

4. НАПРЯЖЕНИЯ И ПРОГИБЫ БАЛКИ В СТАДИИ СОЗДАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим обобщенное сечение балки в виде трехтавра (рис. 6), из которого отбрасыванием отдельных полок можно получить все наиболее распространенные сечения.

Поскольку при создании предварительного напряжения текучесть в сечении всегда односторонняя, то и рассмотрим этот случай.

Условия равновесия внешних и внутренних сил и моментов записываются в следующем виде:

$$N = F\sigma_N = F\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_1) \left(\frac{ta}{2} + F_1 + F_2 \frac{a - \frac{h}{2}}{a} \right); \quad (4.1)$$

$$N(m + c + h_1) = F\sigma_T h_1 - (\sigma_T - \sigma_1) \left(\frac{ta^2}{6} + F_2 h \frac{a - \frac{h}{2}}{2a} \right). \quad (4.2)$$

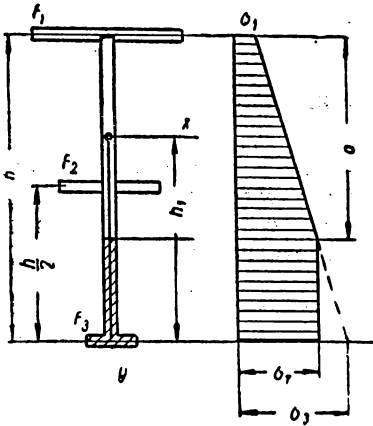


Рис. 6. Обобщенное сечение в виде трехугла и эпюра нормальных напряжений

Здесь c — стрелка прогиба балки на участке между точками ее соединения с арматурой.

Из (4.1) можно написать:

$$\sigma_T - \sigma_1 = \frac{2(\sigma_T - \sigma_N)}{\rho}, \quad (4.3)$$

где

$$\rho = \frac{1}{\beta_0 \alpha} [\alpha^2 + 2\alpha(\beta_1 + \beta_2) - \beta_2]; \quad (4.4)$$

$$\beta_1 = \frac{F_1}{th}; \quad \beta_2 = \frac{F_2}{th}; \quad \beta_3 = \frac{F_3}{th};$$

$$\beta_0 = \frac{F}{th} = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3;$$

$$\alpha = \frac{a}{h}. \quad (4.5)$$

Подставив (4.3) в (4.2), получим

$$N(m + c) = Fh(\sigma_T - \sigma_N)A, \quad (4.6)$$

где

$$A = \frac{h_1}{h} - \frac{\frac{\alpha^3}{3} + \beta_2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)}{\beta_0 \alpha \rho}. \quad (4.7)$$

Из (4.6) можно написать

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}(m + c) = \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T} \right) Ah, \quad (4.8)$$

откуда

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_T} = \frac{Ah}{m + c + Ah}. \quad (4.9)$$

Из (4.3) следует

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_T} = 1 - \frac{2(\sigma_T - \sigma_N)}{\sigma_T \rho}. \quad (4.10)$$

Из подобия треугольников на рис. 6 можно получить

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_T} = 1 + \frac{2(\sigma_T - \sigma_N)}{\sigma_T \rho} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \quad (4.11)$$

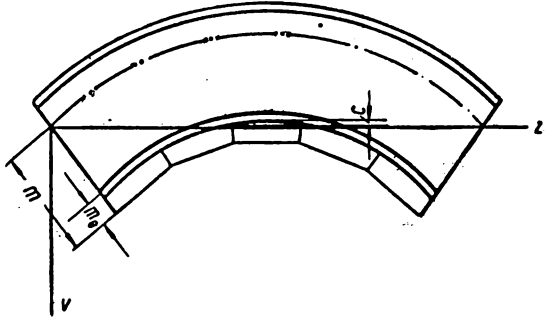
Для сечения каждого определенного типа все эти формулы упрощаются. Так, например, для сечения в виде двутавра с неравномерными полками $\beta_2 = 0$ подстановка этого значения в (4.7) (4.10) и (4.11) дает

$$A = \frac{h_1}{h} - \frac{\alpha^2}{3(\alpha + 2\beta_1)}; \quad (4.12)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_T} = 1 - \frac{2\beta_0}{\alpha + 2\beta_1} \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T}\right); \quad (4.13)$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_T} = 1 + \frac{2\beta_0(1 - \alpha)}{\alpha(\alpha + 2\beta_1)} \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_T}\right). \quad (4.14)$$

Рис. 7. Искривленная балка с арматурой, закрепленной в отдельных сечениях



Аналогичные упрощения получаются и для других сечений.

Определим теперь прогиб f_H балки в середине пролета за счет предварительного напряжения.

Если пренебречь стрелкой c (рис. 7) прогиба балки на участке между узлами присоединения арматуры по сравнению с полным эксцентриситетом m (ввиду малости их отношения по сравнению с единицей), то величину кривизны по всей длине балки (или арматуры) можно принять постоянной и равной

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{Eh}. \quad (4.15)$$

Проинтегрировав (4.15) дважды с учетом граничных условий, получим

$$v = \frac{z^2}{2\rho} - \frac{lz}{2\rho}, \quad (4.16)$$

откуда прогиб f_H^a в середине длины арматуры l_a от предварительного напряжения получим, приравняв $z = 0,5l_a$:

$$f_H^a = \frac{l_a^2}{8\rho} - \frac{l_a^2}{4\rho} = -\frac{l_a^2}{8\rho} = -\frac{(\sigma_3 - \sigma_1) l_a^2}{8Eh}. \quad (4.17)$$

Если напрягающий элемент (арматура) захватывает всю длину балки ($l_a = l$), то выражение (4.17) дает полный прогиб балки в середине ее длины.

Если же длина арматуры l_a меньше длины балки l (рис. 8), то полный выгиб балки вверх от предварительного напряжения будет равен

$$f_n = f_n^a + \varphi_a \frac{l - l_a}{2}. \quad (4.18)$$

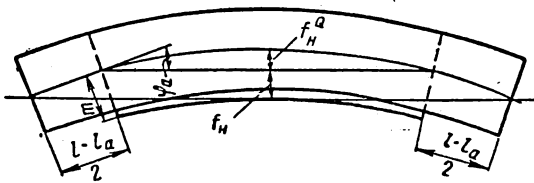


Рис. 8. Прогибы балки

Имея в виду, что

$$\varphi_a = - \frac{l_a}{2\rho} = - \frac{(\sigma_3 - \sigma_1) l_a}{2Eh}, \quad (4.19)$$

получим

$$f_n = - \frac{(\sigma_3 - \sigma_1) l_a^2}{8Eh} - \frac{(\sigma_3 - \sigma_1) l_a}{4Eh} (l - l_a) = - \frac{(\sigma_3 - \sigma_1) l_a}{8Eh} (2l - l_a). \quad (4.20)$$

По формулам (4.8), (4.12), (4.13), (4.14) и (4.17) сделаны вычисления для ряда балок с различными соотношениями площадей полок и с различными величинами эксцентриситетов (расстояний арматуры от нижнего пояса). Отношение пролета l к высоте сечения h для всех балок принято одинаковым. Арматура принята на всю длину балки.

Результаты этих вычислений сведены в табл. 1, а для балки, характеризующейся коэффициентами $\beta_1 = 0,4$ и $\beta_3 = 0,1$, даны также в виде графиков на рис. 9.

Из этой таблицы и графиков видно, что допущение пластических деформаций в стадии предварительного напряжения на глубину до половины высоты сечения ($\alpha \geq 0,5$) не приводит к чрезмерным прогибам балки вверх и текучесть во всех случаях остается односторонней. Кроме того, при допущении пластических деформаций не более чем на половину высоты сечения исключается возможность появления пластических деформаций в средней зоне по высоте балки от поперечной нагрузки, что обеспечивает упругую работу от поперечной нагрузки, даже увеличенной на коэффициент перегрузки.

Из рис. 9 видно, что с развитием пластических деформаций более чем на половину высоты стенки прогиб и краевые деформации начинают развиваться весьма резко, что нежелательно.

Таблица 1

Значения напряжений и прогибов балок в стадии создания предварительного напряжения

α		0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$\beta_1 = 1; \beta_2 = 0,1$ $\beta_0 = 2,1$ $m_0 = 0,1h; \frac{l}{h} = 10$ $\frac{m}{h} = 0,815$	A	0,286	0,28	0,264	0,253	0,24	0,21	0,175
	$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$	0,26	0,256	0,244	0,237	0,227	0,204	0,177
	$\frac{1000f_H}{l}$	∞	10,13	4,62	3,66	2,97	2,14	1,64
	$\frac{\sigma_1}{\sigma_T}$	-0,55	-0,42	-0,32	-0,28	-0,25	-0,19	-0,15
	$\frac{\sigma_2}{\sigma_T}$	∞	6,65	2,95	2,27	1,84	1,3	1
$\beta_1 = 1; \beta_2 = 0,2$ $\beta_0 = 2,2$ $m_0 = 0,1h; \frac{l}{h} = 10$ $\frac{m}{h} = 0,782$	A	0,319	0,313	0,297	0,286	0,273	0,243	0,208
	$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$	0,29	0,286	0,275	0,268	0,258	0,237	0,21
	$\frac{1000f_H}{l}$	∞	10,2	4,76	3,69	2,98	2,15	1,67
	$\frac{\sigma_1}{\sigma_T}$	-0,56	-0,43	-0,33	-0,29	-0,25	-0,2	-0,16
	$\frac{\sigma_2}{\sigma_T}$	∞	6,72	2,99	2,29	1,84	1,3	1
$\beta_1 = 1; \beta_2 = 0,6$ $\beta_0 = 2,6$ $m_0 = 0,1h; \frac{l}{h} = 10$ $\frac{m}{h} = 0,677$	A	0,423	0,417	0,401	0,39	0,377	0,347	0,312
	$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$	0,385	0,381	0,373	0,366	0,357	0,338	0,315
	$\frac{1000f_H}{l}$	∞	10,44	4,87	3,76	3,06	2,18	1,7
	$\frac{\sigma_1}{\sigma_T}$	-0,60	-0,46	-0,36	-0,32	-0,29	-0,23	-0,19
	$\frac{\sigma_2}{\sigma_T}$	∞	6,85	3,04	2,32	1,86	1,31	1
$\beta_1 = 0,4; \beta_2 = 0,1$ $\beta_0 = 1,5$ $m_0 = 0,1h; \frac{l}{h} = 10$ $\frac{m}{h} = 0,7$	A	0,4	0,387	0,355	0,336	0,314	0,267	0,215
	$\frac{\sigma_N}{\sigma_T}$	0,364	0,356	0,336	0,324	0,31	0,276	0,235
	$\frac{1000f_H}{l}$	∞	13,82	5,94	4,46	3,52	2,42	1,81
	$\frac{\sigma_1}{\sigma_T}$	-	-0,93	-0,66	-0,56	-0,48	-0,36	-0,28
	$\frac{\sigma_2}{\sigma_T}$	∞	8,72	3,49	2,56	1,98	1,34	1

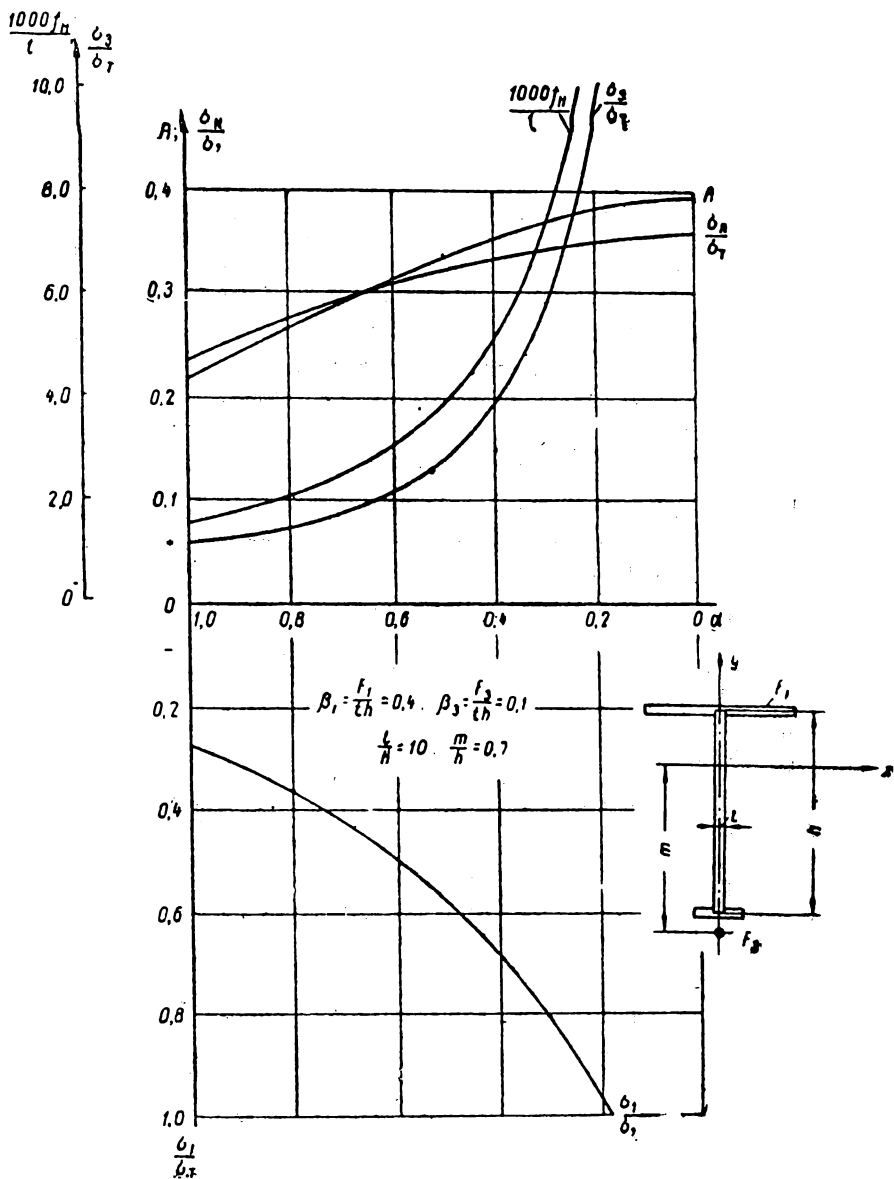


Рис. 9. Значения напряжений и прогибов балки в стадии предварительного напряжения

но как по соображениям устойчивости нижнего пояса и стенки, так и из-за недопустимо больших прогибов.

Таким образом, ограничение пластических деформаций половиной высоты сечения оправдывается рядом соображений.

5. НАПРЯЖЕНИЯ И ПРОГИБЫ БАЛКИ ОТ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

При нагружении предварительно напряженной балки поперечной нагрузкой она всегда работает как статически неопределимая система, что необходимо учитывать при ее расчете.

Определим прежде всего приращение усилия в арматуре от поперечной нагрузки.

Взаимный поворот концевых сечений балки (или сечений, в которых кончается и крепится арматура при ее длине, меньшей длины балки) определяется из следующего выражения:

$$\Theta_0 = \int_0^{l_a} \frac{M_{pz} dz}{EJ} - \frac{Xm l_a}{EJ}. \quad (5.1)$$

Здесь M_{pz} — изгибающий момент от поперечных нагрузок в сечении z балки;

X — приращение усилия в затяжке;

l_a — длина арматуры.

Величина

$$\Omega = \int_0^{l_a} M_{pz} dz \quad (5.2)$$

является площадью эпюры моментов от поперечной нагрузки на длине арматуры.

Таким образом,

$$\Theta_0 = (\Omega - X m l_a) \frac{1}{EJ}. \quad (5.3)$$

Удлинение арматуры за счет поворота сечений балки, в которых она крепится, будет равно (см. рис. 8)

$$\Delta l_{a1} = \Theta_0 m. \quad (5.4)$$

Усилие X будет сжимать балку, за счет этого она укоротится на величину

$$\Delta l_{a2} = - \frac{X l_a}{EF}, \quad (5.5)$$

что приведет к сближению концов арматуры на такую же величину.

Под влиянием усилия X арматура удлинится на

$$\Delta l_a = \frac{X l_a}{E_a F_a}, \quad (5.6)$$

По условию совместности деформаций должно соблюдаться равенство

$$\Delta l_a = \Delta l_{a1} + \Delta l_{a2}. \quad (5.7)$$

Подставив сюда найденные значения, получим

$$\frac{X l_a}{E_a F_a} = \frac{Qm}{EJ} - \frac{Xm^2 l_a}{EJ} - \frac{X l_a}{EF}, \quad (5.8)$$

откуда получаем приращение усилия в арматуре при действии поперечной нагрузки

$$X = \frac{mQ}{l_a \left[\frac{EJ}{E_a F_a} + \frac{J}{F} + m^2 \right]}. \quad (5.9)$$

Полное усилие в арматуре (с учетом усилия от предварительного напряжения) равно

$$N_a = \sigma_N F + X. \quad (5.10)$$

Прочность арматуры проверяется по формуле

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F_a} \leq R_a. \quad (5.11)$$

Упругая работа балки от поперечной нагрузки будет обеспечена, если краевые напряжения в обоих поясах от суммарного воздействия предварительного напряжения и поперечной нагрузки не превысят предела текучести.

Эти условия записываются в виде следующих очевидных неравенств:

$$\sigma_1 + \frac{X}{F} + \frac{M_p - Xm}{W_1} \leq R; \quad (5.12)$$

$$-\sigma_r - \frac{X}{F} + \frac{M_p - Xm}{W_3} \leq R. \quad (5.13)$$

В эти формулы все напряжения, включая σ_1 , должны подставляться со своими знаками (сжатие положительно, растяжение отрицательно).

Значения W_1 и W_3 представляют собой обычные моменты сопротивления сечения балки без арматуры соответственно для полок F_1 и F_3 .

В (5.13) одновременно входят и предел текучести σ_r , и расчетное сопротивление R . Это объясняется тем, что в стадии создания предварительного напряжения правильнее иметь дело с фактическим пределом текучести материала элементов балки, а при проверке прочности должна подставляться величина рас-

четного сопротивления R . Совершенно очевидно, что вместо σ_T может быть подставлено

$$\sigma_T = \frac{R}{k}, \quad (5.14)$$

где k — коэффициент однородности стали, принимаемый равным 0,9 для Ст. 3 и 0,85 для низколегированной стали.

Формул (5.9)—(5.13) достаточно для расчета балки на любую поперечную нагрузку.

Для определения прогиба от поперечной нагрузки проще всего воспользоваться следующим методом. Определяется прогиб f_p от поперечной нагрузки свободно лежащей на опорах балки (без арматуры) обычными методами, как для обычных балок. Далее определяется обратный прогиб f_a балки от усилия X в арматуре:

$$f_a = \frac{Xm_a^2}{8EJ}. \quad (5.15)$$

Полный прогиб от поперечной нагрузки равен

$$f_{\text{полн}} = f_p - f_a. \quad (5.16)$$

Этот прогиб отмеряется от оси балки, выгнутой вверх в результате предварительного напряжения.

Суммарный прогиб f балки от горизонтали получим, учитывая и прогиб от предварительного напряжения:

$$f = f_p - f_a - f_n. \quad (5.17)$$

Поскольку f_n легко создается любой величины за счет варьирования глубины упругого ядра, конечный прогиб может быть получен любым.

6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК

Полученные выше формулы позволяют рассчитывать предварительно напряженные балки, упруго работающие от поперечной нагрузки, но с пластическими деформациями при создании предварительного напряжения.

На рис. 10 даны величины поперечных нагрузок в виде сосредоточенной силы в середине пролета, при которых появляется краевая текучесть в одной из полок. Величина силы P меняется в зависимости от глубины пластических деформаций (α) при создании предварительных напряжений. Случай $\alpha = 1$ отвечает краевой текучести, $\alpha = 0,5$ — развитию пластических деформаций до половины высоты балки.

Из рис. 10 видно, что чем больше глубина пластических деформаций, тем выше несущая способность балки. Одновременно с этим растет и полное напряжение в арматуре. За максимальную величину этого напряжения принята условная величина $\sigma_a = 11,8 \text{ т/см}^2$.

В балке, данной на рис. 10, это напряжение достигается при $\alpha \approx 0,59$, поэтому увеличение силы P сверх 67,5 т, отвечающей этому α , недопустимо.

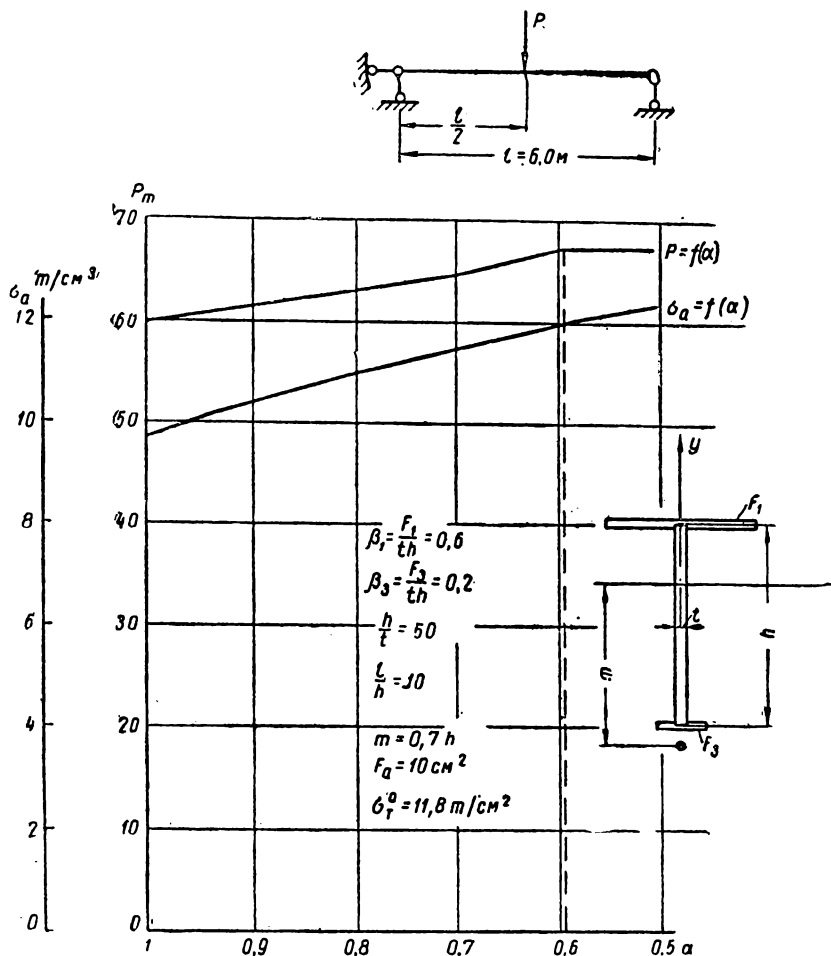


Рис. 10. Величины поперечных нагрузок и напряжений в арматуре для предварительно напряженной балки

Во всех остальных примерах дан расчет балок с «оптимальным» соотношением площадей поясов и арматуры, которое приводит к одновременному появлению напряжений, равных пределам текучести материала поясов балки и арматуры при условии, что при создании предварительных напряжений были допущены пластические деформации на половину высоты балки. Поперечная нагрузка, отвечающая этому условию, далее называется оптимальной и обозначается P_0 .

Покажем на примерах все вычисления для однопролетной балки с сосредоточенной силой в середине пролета, сечением в виде двутавра, с неодинаковыми поясами и арматурой на всю длину пролета.

Пример

Примем: $l=1,2$ см; $h=60$ см; $F_1=28,8$ см²; $F_3=10,8$ см²; $F=$
 $=111,6$ см²; $F_a=9,3$ см²; $E=2,1 \cdot 10^6$ кг/см²; $E_a=1,8 \cdot 10^6$ кг/см²;
 $m_0=0,1$. $h=6$ см.

Для такой балки: $J_x=54\,700$ см⁴; $h_1=25,2$ см; $h-h_1=34,8$ см;
 $W_1=2\,180$ см³; $W_3=1\,580$ см³; $m=40,8$ см;

$$\Omega = \frac{Pl^2}{8}; \quad M_p = \frac{Pl}{4}; \quad \beta_1 = 0,4; \quad \beta_3 = 0,15; \quad \beta_0 = 1,55.$$

Из (5.9) получаем

$$X = \frac{40,8 \cdot 600 P}{8 \left[\frac{2,1 \cdot 54\,700}{1,8 \cdot 9,3} + \frac{54\,700}{111,6} + 40,8^3 \right]} = 0,346 P. \quad (6.1)$$

Из (5.13) можно написать (приравняв $R = \sigma_\tau$)

$$\frac{M_p - Xm}{W_3} - \frac{X}{F} = 2\sigma_\tau. \quad (6.2)$$

Подставив сюда численные значения, получим

$$\frac{150 P - 40,8 \cdot 0,346 P}{1\,580} - \frac{0,346 P}{111,6} = 4,8, \quad (6.3)$$

откуда получаем оптимальное значение силы P , равное

$$P_0 = 56,9 m. \quad (6.4)$$

Для того чтобы при нагрузке P_0 в верхнем поясе балки также было бы напряжение σ_τ , необходимо в результате предварительного напряжения создать в этом поясе напряжение σ_1 , величина которого может быть получена из (5.12):

$$\sigma_1 = \sigma_\tau - \frac{X}{F} - \frac{M_p - Xm}{W_1} = 2,4 - \frac{0,346 P}{111,6} - \frac{150 P - 40,8 \cdot 0,346 P}{2\,180} = -1,33 m/cm^2. \quad (6.5)$$

Для получения $\sigma_1 = -1,33$ т/см² величина α при создании предварительного напряжения должна удовлетворять условию (4.13), в которое значение осевого напряжения σ_N сжатия в балке от предварительного напряжения будет подставлено из (4.9).

Значение α , отвечающее одновременному появлению текучести в обоих поясах балки и в напрягающей арматуре, названо оптимальным и обозначено α_0 .

Подставив в (4.13) значение σ_N из (4.9), получим уравнение для определения оптимального значения α_0 .

$$\alpha_0^2 - 3 \left(1 + \frac{m_0}{h}\right) \alpha_0 - 6\beta_1 \left(1 + \frac{m_0}{h}\right) + \frac{6\beta_0 \left(1 - \frac{h_1}{h} + \frac{m_0}{h}\right)}{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_T}} = 0. \quad (6.6)$$

Подставляя численные значения, получим

$$\alpha_0^2 - 3,3 \alpha_0 - 6 \cdot 0,4 \cdot 1,1 + \frac{6 \cdot 1,55 (1 - 0,42 + 0,1)}{1 + \frac{1,33}{2,4}} = 0;$$

$$\alpha_0^2 - 3,3 \alpha_0 + 1,4 = 0. \quad (6.7)$$

Решив это уравнение, получим

$$\alpha_0 = 1,65 - \sqrt{2,72 - 1,4} = 1,65 - 1,15 = 0,5. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.6) нужно нам только для того, чтобы проверить, отвечает ли напряженное состояние среднего сечения балки в стадии предварительного напряжения глубине упругого ядра, равного половине высоты сечения $\alpha = 0,5$.

Подставив это значение α_0 в (4.12), найдем

$$A = 0,42 - \frac{0,5^2}{3(0,5 + 0,8)} = 0,356.$$

После этого из (4.9) найдем

$$\sigma_N = 0,82 \text{ т/см}^2.$$

Растягивающее усилие в арматуре от предварительного напряжения получаем равным

$$\sigma_N F = 0,82 \cdot 111,6 = 91,3 \text{ т.}$$

Полное напряжение в арматуре при силе $P_0 = 56,9 \text{ т}$ равно

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F_a} = \frac{91,3 + 19,7}{9,3} = 11,8 \text{ т/см}^2.$$

Аналогично рассчитаны и другие балки. Результаты этих подсчетов сведены в табл. 2.

Таблица 2

α_0	β_1	β_2	β_0	$\frac{\beta_1}{\beta_2}$	m в см	P_0 в т	Γ_{β_a}'	$\frac{\beta_a'}{\beta_0}$
0,5	1	0,376	2,376	2,67	43,8	96,9	0,926	0,391
0,5	0,8	0,298	2,098	2,68	43,2	84	0,828	0,395
0,5	0,6	0,224	1,824	2,68	42,2	70,7	0,738	0,404
0,5	0,5	0,186	1,686	2,68	41,6	63,8	0,685	0,406
0,5	0,4	0,15	1,55	2,67	40,8	56,9	0,635	0,41

Все балки, включенные в табл. 2, принимались загруженными одной сосредоточенной силой в середине пролета. Аналогично рассчитана и серия балок с равномерно распределенной нагрузкой. В этом случае предварительное напряжение оказывается несколько более эффективным. Кроме того, проведенные вычисления показали, что повышению эффективности предварительно напряженных балок способствует увеличение площадей поясов и высоты стенки, что совпадает со свойствами обычных балок без предварительного напряжения.

7. ЭФФЕКТ ОТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ БАЛОК

Для оценки эффекта предварительного напряжения необходимо сделать ряд сравнительных подсчетов.

Прежде всего выясним, как велико недоиспользование несущей способности балки при допущении в работе на поперечную нагрузку только упругой стадии.

Для этого изгибающий момент M_p , получаемый из формул (5.12) и (5.13), необходимо сравнить с моментом $M_{ш}$, отвечающим полному пластическому шарниру в сечении балки с арматурой.

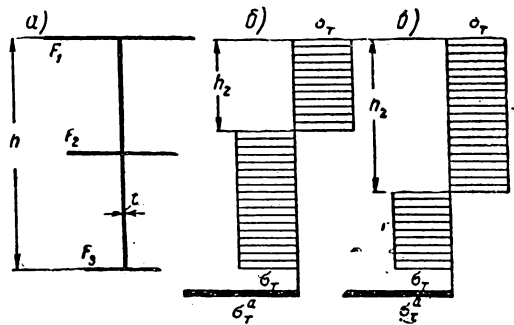


Рис. 11. Эпюры напряжений в балке

Величина этого момента определяется из условий равновесия внешних и внутренних сил и моментов при прямоугольной эпюре напряжений (рис. 11), которая в общем случае трехтаврового сечения может быть двух типов, показанных на рис. 11, б и в.

Никаких затруднений с написанием выражения $M_{ш}$ для каждого из этих случаев возникнуть не может. Поскольку в данной статье в основном рассматриваются балки с сечением в виде двутавра с неодинаковыми поясами, то ограничимся рассмотрением только этого случая ($F_2=0$; $\beta_2=0$).

Условие равновесия сил записывается в следующем виде:

$$F_1 \sigma_T + \sigma_T t h_2 - \sigma_T F_3 - \sigma_T F'_a - \sigma_T t (h - h_2) = 0. \quad (7.1)$$

Здесь

$$F'_a = F_a \frac{\sigma_T^a}{\sigma_T}. \quad (7.2)$$

Решая (7.1) получим

$$M_{ш} = \sigma_T \frac{t h^2}{4} B, \quad (7.3)$$

где

$$B = 2 + 4\beta_3 + 4\beta'_a + 4\beta'_a \frac{m_0}{h} - (1 - \beta_1 + \beta_3 + \beta'_a)^2; \quad (7.4)$$

$$\beta'_a = \frac{F_a}{th} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_T}. \quad (7.5)$$

Выясним, каково повышение несущей способности балки за счет применения предварительно напрягаемой высокопрочной арматуры. Для этого рассмотрим балки в виде двутавра с одинаковыми поясами, каждый из которых имеет площадь F , равную половине площадей обоих поясов и арматуры:

$$F_n = \frac{1}{2} (F_1 + F_3 + F_a). \quad (7.6)$$

Для такой балки определим изгибающие моменты, отвечающие ее работе в упругой стадии и при полном пластическом шарнире. Обозначим эти моменты соответственно M_1 и M_2 . Величины их будут равны

$$M_1 = \sigma_T W = \frac{\sigma_T th^2 \left(th + 8F_n + 12 \frac{F_n^2}{th} \right)}{6(th + 2F_n)}; \quad (7.7)$$

$$M_2 = \frac{th^2}{4} \sigma_T + F_n h \sigma_T. \quad (7.8)$$

Эти моменты характеризуют обычные балки без предварительного напряжения, выполненные в виде двутавров с одинаковыми поясами. Далее такие балки рассматриваются как эталонные.

Кроме этих нагрузок, определим также величину поперечной нагрузки P_T , вызывающую краевую текучесть в балке, предварительное напряжение которой осуществлено в упругих пределах (до появления краевой текучести в нижнем поясе).

Сравнение изгибающих моментов для различных балок дается на графике рис. 12.

Из графика можно установить, что как допущение в балке пластических деформаций, так и применение высокопрочной арматуры с созданием в ней предварительного напряжения приводят к повышению несущей способности балки.

Для рассмотренных балок колебания отношений одних и тех же изгибающих моментов изменяются в сравнительно небольших пределах, поэтому можно ограничиться анализом средних величин.

Эти средние значения позволяют сделать следующие выводы:

а) допущение пластического шарнира в балке без предварительного напряжения дает по сравнению с моментом, отвечаю-

щим краевой текучести $\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$, повышение несущей способности балки на 12—12,8%;

б) применение в балке предварительно напрягающей высокопрочной арматуры с допущением только упругой работы в балке и арматуре как в стадии предварительного напряжения, так и при работе их на поперечную нагрузку $\left(\frac{M_T}{M_1}\right)$ дает повышение несущей способности на 33—36%;

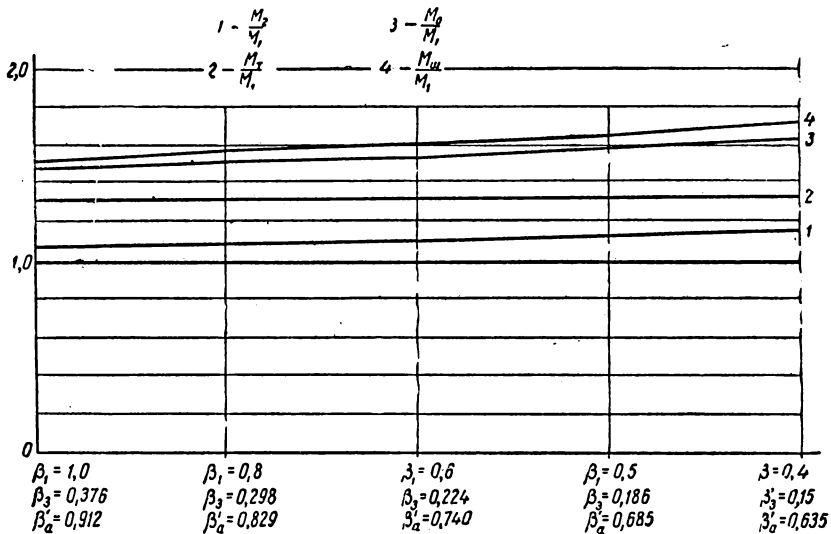


Рис. 12. Сравнение изгибающих моментов для балок с различными поясами

в) применение предварительно напрягающей высокопрочной арматуры с допущением при создании предварительного напряжения пластических деформаций на половину высоты балки $\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$ приводит к повышению несущей способности на 55—56%;

г) допущение пластического шарнира в сечении балки с предварительно напрягающей высокопрочной арматурой при работе на поперечную нагрузку приводит к повышению несущей способности $\left(\frac{M_{III}}{M_1}\right)$ на 62—67%.

Таким образом, за счет применения предварительно напрягающей высокопрочной арматуры и использования пластических деформаций только при создании предварительного напряжения можно существенно повысить (до 55—56%) несущую способность

балки и в то же время почти полностью использовать все выгоды, создаваемые этими факторами, поскольку допущение полного пластического шарнира от поперечной нагрузки дает дополнительное повышение несущей способности всего лишь на 3,8—6,5%.

Как указывалось в начале статьи, допущение пластических деформаций только при создании предварительного напряжения имеет ряд преимуществ, а коль скоро при этом несущая способность балки недоиспользуется всего на $3,8 \pm 6,5\%$, то и экономически это может считаться оправданным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Геммерлинг, Несущая способность стержневых стальных конструкций, Госстройиздат, 1958.
 2. В. З. В л а с о в, Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, 1959.
-

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

По вопросу изучения несущей способности сжатых и сжато-изогнутых стержней имеется большое количество работ как теоретических, так и экспериментальных. Однако большинство исследований по устойчивости за пределами упругости посвящено в основном шарнирно опертым сжато-изогнутым стержням с симметричной нагрузкой, хотя такие стержни в практике встречаются сравнительно редко. Выводы из решения подобных задач не всегда могут быть в полной мере распространены на более сложные случаи, какими, например, являются упруго защемленные стержни, с которыми гораздо чаще приходится иметь дело при расчете стержневых систем с жестким прикреплением в узлах одних элементов к другим. Все это приводит к необходимости изучения общих закономерностей, характерных для упруго защемленных стержней и, в известной степени, для стержневых систем.

На основе работы [1], где было проведено теоретическое исследование поведения под нагрузкой упруго защемленных стержней, в данной статье дается разработка приближенного метода расчета внецентренно сжатых стержней. В статье описываются результаты экспериментальных исследований, выполненных на стальных упруго защемленных стержнях; проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Экспериментальные исследования проводились как на отдельных стержнях, имеющих специальные приспособления для создания упругих защемлений, так и на стержнях, входящих в систему ферм. Было уделено внимание исследованию деформативности таких стержней при постепенном увеличении нагрузки, а также изучению формы их потери устойчивости в критическом состоянии.

Настоящее исследование ставит своей задачей более четко вскрыть физический смысл явлений, изучить общие закономерности поведения упруго заземленных стержней под нагрузкой, что способствовало бы расширению знаний о работе стержневых конструкций.

Данная статья не претендует на полное разрешение указанных вопросов, однако ряд полученных в ней выводов имеет достаточно общее значение и представляет в связи с этим определенный интерес.

1. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ УПРУГО ЗАЦЕМЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. ПРИНЯТЫЕ ДОПУЩЕНИЯ. АППРОКСИМАЦИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ СТЕРЖНЯ

В настоящем исследовании приняты следующие допущения:

- 1) рассматривается плоская форма изгиба;
- 2) принимается приближенное выражение для кривизны изогнутой оси

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dz^2};$$

3) деформации распределяются по поперечному сечению по закону плоскости;

4) материал стержня подчиняется идеализированной упруго-пластической диаграмме Прандтля.

Эти допущения достаточно хорошо известны и оценены в целом ряде работ [2], [6].

Упругие заземления концов означают, что при изгибе стержня под действием внешней нагрузки на концах его возникают реактивные изгибающие моменты, пропорциональные углу поворота концевой сечения

$$M_p = r v', \quad (1.1)$$

где r — реактивный момент, возникающий в опорном сечении при повороте его на угол, равный единице;

v' — угол поворота концевой сечения.

В качестве дополнительного допущения будем считать, что эпюра моментов внецентренно сжатого стержня с упругими граничными условиями (рис. 1) является косинусоидой вида

$$m = m_0 \cos \frac{\pi z}{l_p}. \quad (1.2)$$

Обозначения в формуле (1.2) ясны из рис. 1.

Для решения подобных задач это допущение было принято в работах [1], [5].

Легко видеть, что заданием такой кривой автоматически удовлетворяются условия в начале координат. Кроме того, при помощи уравнения (1.2) имеется возможность решать задачи как с одинаковыми, так и с различными условиями на концах (при отсутствии поперечных нагрузок по длине стержня). Основное упрощение в этом случае заключается в том, что нет не-

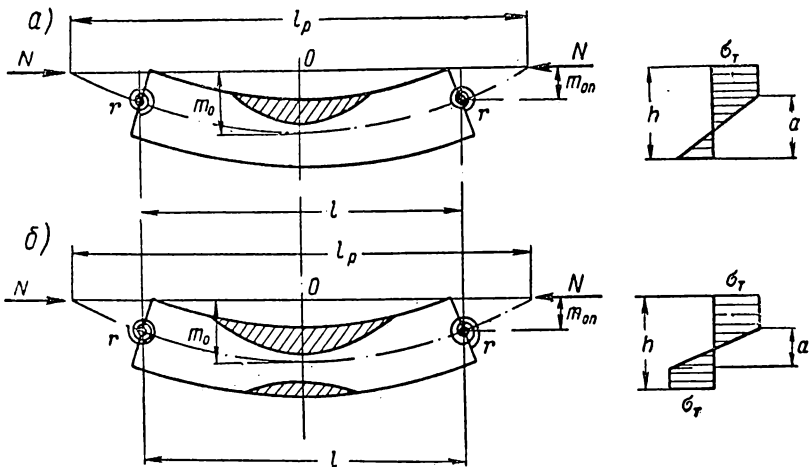


Рис. 1. Схема деформирования внецентренно сжатого стержня в упруго-пластической стадии

обходимости производить двукратное интегрирование и выполнять условия сопряжения на границах участков с различными деформациями. Решение задачи в этом случае получится в результате составления условий равновесия в наиболее напряженном сечении стержня и в удовлетворении граничным условиям.

Легко убедиться, что это допущение в упругой стадии работы стержня соответствует точному решению задачи [2].

2. ДЕФОРМАТИВНОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

а) Односторонняя текучесть

Рассмотрим работу стержня, схема которого показана на рис. 1,а.

Из условий равновесия внешних и внутренних сил и моментов в среднем сечении может быть получена следующая зависимость [1], [6]:

$$m_0^* = - \frac{g}{(\gamma - m_0)}, \quad (2.1)$$

где

$$g = \frac{2h\sigma_N}{9E} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right)^3; \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right). \quad (2.3)$$

Здесь E — модуль упругости;
 σ_T — предел текучести;
 h — высота сечения;
 $\sigma_N = \frac{N}{F}$ — среднее напряжение.

С другой стороны, из уравнения (1.2) для среднего сечения можно получить

$$m_0'' = - \frac{m_0 \pi^2}{l_p^2}. \quad (2.4)$$

Приравнявая правые части формулы (2.1) и (2.4), получим

$$l_p = \pi \sqrt{\frac{m_0}{g} (\gamma - m_0)}. \quad (2.5)$$

Полученное выражение (2.5) дает возможность определить расстояние между точками перегиба изогнутой оси стержня при заданных величинах σ_N и m_0 .

Удовлетворим теперь граничным условиям на одной (в силу симметрии задачи) опоре стержня, например, на правой.

При

$$z = \frac{l}{2} \quad m = m_{0n}, \quad m' = - \frac{M_p}{r}, \quad m_{0n} = e - \frac{M_p}{N}. \quad (2.6)$$

Эти условия приводят к следующему уравнению:

$$m_0 \cos \frac{\pi l}{2l_p} = e - \frac{r m_0 \pi}{N l_p} \sin \frac{\pi l}{2l_p}. \quad (2.7)$$

Подставляя значение l_p из уравнения (2.5) в уравнение (2.7), получим

$$e = m_0 \cos \frac{l}{2(\gamma - m_0)} \sqrt{\frac{g}{m_0}} + \frac{m_0 l}{v^2 \omega (\gamma - m_0)} \sqrt{\frac{g}{m_0}} \sin \frac{l}{2(\gamma - m_0)} \sqrt{\frac{g}{m_0}}, \quad (2.8)$$

где

$$v = kl; \quad k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}; \quad \omega = \frac{EJ}{rl}; \quad (2.9)$$

e — начальный эксцентриситет.

Полученное уравнение является условием равновесия рассматриваемого стержня в упруго-пластической стадии.

Введем относительные величины:

$$\varepsilon = \frac{6e}{h}; \quad \lambda = \frac{l \sqrt{12}}{h}; \quad \nu = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_N}{E}}; \quad \delta_0 = \frac{m_0}{h}. \quad (2.10)$$

$$\xi = \frac{\gamma}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right); \quad \psi = \frac{g}{h} = \frac{2\sigma_N}{9E} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right)^3. \quad (2.11)$$

С учетом (2.10) и (2.11) формула (2.8) получит следующий вид:

$$\varepsilon - 6\delta_0 \left(\cos T + \frac{2ET}{\omega\sigma_N\lambda^2} \sin T \right) = 0, \quad (2.12)$$

где

$$T = \frac{\lambda}{4\sqrt{3}(\xi - \delta_0)} \sqrt{\frac{\psi}{\delta_0}}. \quad (2.13)$$

Условие для определения критического значения осевого напряжения может быть получено путем частного дифференцирования уравнения (2.12) по δ_0 , при этом σ_N считается постоянной величиной [1].

После дифференцирования и преобразований получим

$$\left(1 - \frac{ET^2}{\sigma_N\omega\lambda^2} \cdot \frac{\xi - 3\delta_0}{\xi - \delta_0} \right) \cos T + \frac{T}{\xi - \delta_0} \left[\frac{\xi - 3\delta_0}{2} + \frac{E(\xi + \delta_0)}{\lambda^2\sigma_N\omega} \right] \sin T = 0. \quad (2.14)$$

Значения σ_k и δ_k , одновременно удовлетворяющие условиям (2.12) и (2.14), определяют критическое состояние равновесия упруго защемленного стержня, в средней части которого имеется односторонняя текущая.

Прогиб среднего сечения стержня в любом состоянии равновесия определяется по формуле

$$\frac{v_0}{h} = \delta_0 (1 - \cos T). \quad (2.15)$$

б) Двусторонняя текущая

Схема стержня в этом случае представлена на рис. 1,б.

Из условий равновесия внешних и внутренних сил и моментов для среднего сечения имеем [1], [6]

$$m_0^* = - \frac{g_1}{\sqrt{\gamma_1 - m_0}}, \quad (2.16)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{h\sigma_T}{4\sigma_N} \left(1 - \frac{\sigma_N^2}{\sigma_T^2} \right); \quad (2.17)$$

$$g_1^2 = \frac{\sigma_T^3}{3E^2 h \sigma_N}. \quad (2.18)$$

Расстояние между точками перегиба изогнутой оси равно, [из (2.16) и (2.4)].

$$l_p = \pi \sqrt{\frac{m_0}{g_1}} \sqrt[4]{\gamma_1 - m_0}. \quad (2.19)$$

Удовлетворяя граничным условиям на правой опоре стержня, получим условие равновесия в виде (2.7).

Вводя относительные величины

$$\xi_1 = \frac{\gamma_1}{h} = \frac{\sigma_T}{4\sigma_N} \left(1 - \frac{\sigma_N^2}{\sigma_T^2}\right) \text{ и } \psi_1^2 = g_1^2 h = \frac{\sigma_T^3}{3E^2 \sigma_N}, \quad (2.20)$$

подставляя значение l_p из (2.19) в (2.7) и учитывая при этом (2.10), получим условие равновесия упруго защемленного стержня при двусторонней текучести в виде

$$\epsilon - 6\delta_0 \left(\cos T_1 + \frac{2ET_1}{\omega\sigma_N\lambda^2} \sin T_1 \right) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$T_1 = \frac{\lambda}{4 \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{\xi_1 - \delta_0}} \sqrt{\frac{\psi_1}{\delta_0}}. \quad (2.22)$$

Условие для определения критического состояния равновесия будет

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{ET_1^2}{\omega\sigma_N\lambda^2} \cdot \frac{2\xi_1 - 3\delta_0}{2(\xi_1 - \delta_0)} \right] \cos T_1 + \\ & + \frac{T_1}{2(\xi_1 - \delta_0)} \left[\frac{2\xi_1 - 3\delta_0}{2} + \frac{E(2\xi_1 - \delta_0)}{\omega\sigma_N\lambda^2} \right] \sin T_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Совместное решение уравнений (2.21) и (2.23) определяет σ_k и δ_k для критического состояния упруго защемленного стержня при двусторонней текучести в средней части.

Прогиб стержня в среднем сечении в любом состоянии равновесия определяется из

$$\frac{v_0}{h} = \delta_0 (1 - \cos T_1). \quad (2.24)$$

Пределы применимости полученных формул:
при односторонней текучести

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right) \leq \delta_0 \leq \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right) \left(\frac{2\sigma_N}{\sigma_T} + 1 \right); \quad (2.25)$$

при двусторонней текучести

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_N} - 1 \right) \left(\frac{2\sigma_N}{\sigma_T} + 1 \right) \leq \delta_0 \leq \frac{\sigma_T}{4\sigma_N} \left(1 - \frac{\sigma_N^2}{\sigma_T^2} \right). \quad (2.26)$$

3. ПРАКТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Решение задач по формулам (2.12) и (2.14) или (2.21) и (2.23) вызывает некоторые затруднения в силу своей громоздкости. Анализ этих формул позволяет сделать некоторые упрощения в методике расчета.

Условия равновесия стержней (2.12) и (2.21) очень просто могут быть представлены в виде, решенном относительно ε :

$$\varepsilon = f(\sigma_N; \delta_0; \lambda; \omega; E). \quad (3.1)$$

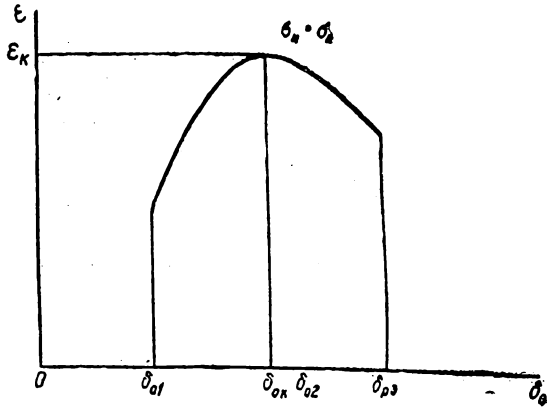


Рис. 2. Качественная зависимость величины ε от δ_0

Для стержня с заданными значениями λ , ω и E фиксируем величину осевого напряжения $\sigma_N = \sigma_K$. После этого по формулам (2.25) и (2.26) определяем возможные пределы изменения δ_0 соответственно при односторонней и двусторонней текучести (рис. 2):

$$\delta_{01} \leq \delta_0 \leq \delta_{02};$$

$$\delta_{02} \leq \delta_0 \leq \delta_{03}.$$

В этих пределах изменения δ_0 строим зависимость (3.1). Каждая точка кривой (3.1) соответствует некоторому состоянию равновесия. Задача сводится к разысканию значений ε_K и δ_{0K} , соответствующих критическому состоянию стержня. Наибольшее значение эксцентриситета характеризует состояние потери устойчивости, т. е. $\varepsilon_K = \max \varepsilon$. Отсюда аналитический критерий для определения критического состояния имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\delta_0} = 0. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что дифференцирование (3.1) по δ_0 приводит к результатам, полученным ранее [см. (2.14) и (2.23)].

Варьируя величины σ_N и λ , для различных значений ω можно построить графики зависимостей $\sigma_k(\lambda)$, подобные тому, который приведен в работе [6] для шарнирно опертых стержней.

4. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ ПОЛНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ШАРНИРОВ

Хорошо известно [2], [6], что исчерпание несущей способности шарнирно опертых внецентренно сжатых и сжато-изогнутых стержней всегда наступает раньше появления полного пластического шарнира в наиболее напряженном сечении таких стержней. Для статически определенной системы, какой является шарнирно опертый стержень, это положение не вызывает сомнений, так как появление третьего шарнира на одной прямой превращает систему (стержень) в механизм, в то время как потеря устойчивости такого стержня произойдет раньше, чем последний превратится в механизм, не способный сопротивляться внешней сжимающей силе.

В статически неопределимых системах, простейшей из которых является упруго защемленный стержень, наблюдается иная картина. Дело в том, что появление полного пластического шарнира в этом случае не превращает еще систему в механизм, а снижает степень ее статической неопределимости. Принципиально такая новая система может сопротивляться внешним силовым воздействиям и является вполне устойчивой (отпорность ее не равна нулю). В ряде случаев внешняя нагрузка может быть увеличена, и для определения несущей способности нужно рассмотреть устойчивость новой системы, какой является упруго защемленный стержень с полным пластическим шарниром в середине длины. Вывод о возможности появления полных пластических шарниров в упруго защемленных стержнях получен также в работе [5].

В связи с этим можно высказать более общее положение о возникновении пластических шарниров в статически неопределимых системах, имеющих сжато-изогнутые элементы, с учетом влияния сжимающих сил.

В статически неопределимой стержневой системе при определенных условиях могут возникать полные пластические шарниры; при этом устойчивость изменяющейся (вследствие появления шарниров пластичности) системы должна быть все время обеспечена. Исчерпание несущей способности статически неопределимой системы, имеющей сжато-изогнутые элементы, всегда наступает вследствие потери устойчивости, которая происходит либо при полном отсутствии пластических шарниров, либо при наличии в ряде сечений пластических шарниров, но, во всяком случае, раньше появления такого количества полных пластических шарниров, при котором система превращается в механизм.

В связи с этим при исследовании упруго защемленных стержней дополнительным критерием исчерпания несущей способности [в дополнение к формулам (2.14) и (2.23)] будет наличие полного пластического шарнира в среднем сечении. При этом возможность увеличения внешней сжимающей силы после появления пластического шарнира в среднем сечении не учитывается.

Чтобы сохранить общность выкладок и иметь возможность применять полученные ранее формулы и в этом случае, сделаем допущение в отношении полного пластического шарнира. Покажем, что при полном пластическом шарнире с достаточной для практики точностью можно считать, что глубина упругого ядра не равна нулю ($\alpha \neq 0$), а имеет определенное малое значение.

Так, например, если глубина упругого ядра составляет 10% от полной высоты сечения ($\alpha = 0,1$), момент инерции упругого ядра равен 0,001 величины полного момента инерции всего сечения (0,1%). В этом случае предел применимости полученных формул для двусторонней текучести можно получить из условий равновесия внешних и внутренних сил и моментов. После несложных преобразований получим

$$\delta_0 \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma_N^2}{\sigma_T^2} \right) \frac{\sigma_T}{\sigma_N} - \frac{0,01}{12} \frac{\sigma_T}{\sigma_N} \quad (4.1)$$

В рассмотренном случае ошибки в вычислениях δ_0 при полном пластическом шарнире находятся в пределах от 0,02 до 0,00087, т. е. составляют от 0,3 до 4,18%. При меньших значениях α ($\alpha < 0,1$) погрешности будут еще меньшими.

5. ОТПОРНОСТЬ УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В СТАДИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОТПОРНОСТЬ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРНИРЕ

Понятие отпорности—способности стержней сопротивляться отклонениям от достигнутых состояний равновесия, существо которого изложено в работах [2] и [1],—имеет практическое значение при анализе величин фактических свободных длин упруго защемленных стержней в момент их потери устойчивости. Здесь идет речь о тех свободных длинах, которые наблюдаются в сжато-изогнутых стержнях при исчерпании их несущей способности либо при экспериментальном исследовании таких стержней, либо при разрушении стержневых конструкций вследствие выхода из строя сжатых стержней. Величина свободной длины определяется из расчета на устойчивость стержня переменного сечения, жесткость которого по длине (момент инерции второго расчетного сечения) определяется формой изгиба стержня в критическом состоянии равновесия. Количественно величина отпорности равна критической силе прямого центрально сжатого стержня с моментом инерции второго расчетного сечения. Как

показано в работе [2], при идеализированной диаграмме сжатия материала момент инерции второго расчетного сечения равен моменту инерции упругого ядра. В связи с этим при оценке величин отпорности и свободной длины стержня нужно весьма тщательно определить закон изменения глубин упругих ядер по длине стержня, так как момент инерции второго расчетного сечения есть функция третьей степени от высоты упругого ядра.

В работе [1] разработан приближенный способ расчета на продольный изгиб упругих стержней переменного сечения с упругими защемлениями на концах. При этом был использован метод сравнения искомым и заданным перемещений при аппроксимации изогнутых осей стержней.

На основе этого способа расчета рассмотрим упруго защемленные стержни переменного сечения на жестких и упруго подаваемых опорах. Упругие граничные условия означают, что при потере устойчивости стержня на концах его могут возникать:

1) реактивные моменты, препятствующие свободному повороту концов, которые равны

$$M_p = r\varphi, \quad (5.1)$$

где r — реактивный момент, возникающий при повороте конца стержня на угол; равный единице;

φ — угол поворота опорного сечения;

2) опорные реакции, препятствующие свободному смещению опор в направлении, перпендикулярном к оси стержня, и равные

$$Q = t\Delta, \quad (5.2)$$

где t — реактивная сила, возникающая при смещении опоры на единицу;

Δ — смещение опоры.

Схема стержня и система отсчета координат показаны на рис. 3,а.

Уравнение изогнутой оси стержня при потере устойчивости имеет вид

$$v_z = \Delta a_z, \quad (5.3)$$

где Δ — прогиб правой опоры стержня; при этом

$$a_z = 1.$$

Изгибающий момент в любом сечении стержня

$$M_z = Nv_z - M_{p1} - Qz. \quad (5.4)$$

Составляя условие равновесия для всего стержня, выражающее равенство нулю суммы моментов относительно одного из его концов, и принимая во внимание (5.1) и (5.2), получим выражение для изгибающего момента в любом сечении в виде

$$M_z = Nv_z - r_1 \varphi_1 \left(1 - \frac{z}{l - \frac{N}{t}} \right) - r_2 \varphi_2 \frac{z}{l - \frac{N}{t}}. \quad (5.5)$$

Фиктивная нагрузка, действующая на стержень, будет равна

$$q_{\varphi z} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{\nu^2 \Delta}{l^2} \cdot \frac{a_z}{k_z} - \frac{\varphi_1}{\omega_1 l} \cdot \frac{1}{k_z} \left[1 - \frac{z}{l(1-\nu^2\tau)} \right] - \frac{\varphi_2}{\omega_2 l} \cdot \frac{1}{k_z} \cdot \frac{z}{l(1-\nu^2\tau)}, \quad (5.6)$$

где

$$k_z = \frac{J_z}{J_0}; \quad \nu^2 = l^2 \frac{N}{EJ_0}; \quad \omega_1 = \frac{EJ_0}{r_1 l}; \quad \omega_2 = \frac{EJ_0}{r_2 l}; \quad \tau = \frac{EJ_0}{tl^3}; \quad (5.7)$$

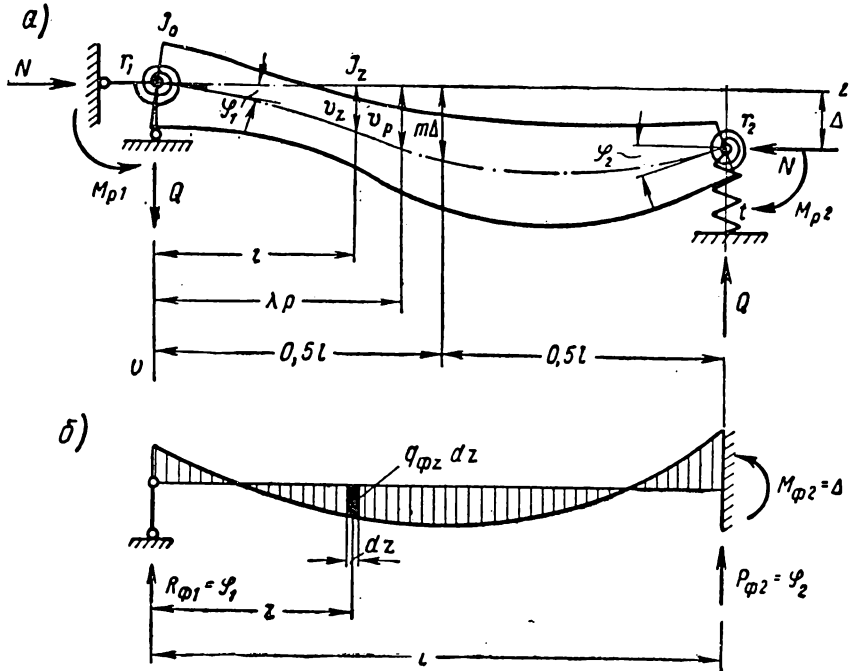


Рис. 3. К расчету на устойчивость центрально сжатых стержней переменного сечения

J_0 — момент инерции в начале координат.

Схема фиктивной балки и условия опирания ее концов показаны на рис. 3,б.

Углы поворота изогнутой оси стержня на концах, равные опорным реакциям от фиктивной нагрузки, определяются из условий

$$\varphi_1 l - \int_0^l q_{\varphi z} (l-z) dz - \Delta = 0; \quad (5.8)$$

$$-\varphi_2 l + \int_0^l q_{\varphi z} z dz - \Delta = 0. \quad (5.9)$$

В результате подстановки в эти формулы значения $q_{\Phi z}$ из (5.6) получим следующую систему уравнений:

$$\varphi_1 \left(1 + \frac{1}{\omega_1} A_7 \right) + \frac{\varphi_2}{\omega_2} (A_5 - A_6) = \frac{\Delta}{l} (1 + \nu^2 E_1); \quad (5.10)$$

$$\frac{\varphi_1}{\omega_1} (G_2 - A_6) + \varphi_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_6 \right) = \frac{\Delta}{l} (\nu^2 S_2 - 1), \quad (5.11)$$

В этих уравнениях обозначено:

$$A_5 = \frac{G_2}{1 - \nu^2 \tau}; \quad A_6 = \frac{G_3}{1 - \nu^2 \tau}; \quad A_7 = G_1 - G_2 - A_5 + A_6. \quad (5.12)$$

$$E_1 = S_1 - S_2. \quad (5.13)$$

$$G_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{k_z} dz; \quad G_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{1}{k_z} z dz; \quad G_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{1}{k_z} z^2 dz. \quad (5.14)$$

$$S_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} dz; \quad S_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{a_z}{k_z} z dz. \quad (5.15)$$

Решая систему уравнений (5.10) и (5.11), получим

$$\varphi_1 = \frac{B_1}{D_1} \cdot \frac{\Delta}{l}; \quad \varphi_2 = \frac{C_1}{D_1} \cdot \frac{\Delta}{l}, \quad (5.16)$$

где

$$B_1 = \nu^2 \left[S_1 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_6 \right) - S_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_1} A_5 \right) \right] + \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_5 \right); \quad (5.17)$$

$$C_1 = \nu^2 \left\{ S_2 \left[1 + \frac{1}{\omega_1} (G_1 - A_5) \right] - \frac{1}{\omega_1} S_1 (G_2 - A_6) \right\} - \left[1 + \frac{1}{\omega_1} (G_1 - A_5) \right]; \quad (5.18)$$

$$D_1 = 1 + \frac{1}{\omega_1} A_7 + \frac{1}{\omega_2} A_6 + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} A_8. \quad (5.19)$$

В формуле (5.19) обозначено

$$A_8 = \frac{G_1 G_3 - G_2^2}{1 - \nu^2 \tau}. \quad (5.20)$$

Прогиб стержня в любом сечении равен изгибающему моменту от фиктивной нагрузки

$$v_p = M_{\Phi p} = R_{\Phi 1} \lambda p - \int_0^{\lambda p} q_{\Phi z} (\lambda p - z) dz. \quad (5.21)$$

Внося в уравнение (5.21) значение $q_{\Phi z}$ из (5.6), получим

$$v_p = \Delta \left(\frac{B_1}{D_1} \cdot \frac{\lambda p}{l} + \frac{B_1}{\omega_1 D_1} \bar{A}_5 + \frac{C_1}{\omega_2 D_1} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 \right). \quad (5.22)$$

В уравнении (5.22) обозначено:

$$\bar{A}_4 = \frac{1}{1-\nu^2\tau} \left(\frac{\lambda\rho}{l} \bar{G}_2 - \bar{G}_3 \right);$$

$$\bar{A}_5 = \frac{\lambda\rho}{l} \bar{G}_1 - \left[1 + \frac{\lambda\rho}{l(1-\nu^2\tau)} \right] \bar{G}_2 + \frac{1}{1-\nu^2\tau} \bar{G}_3. \quad (5.23)$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\lambda\rho}{l} \bar{S}_1 - \bar{S}_2. \quad (5.24)$$

$$\bar{G}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\lambda\rho} \frac{1}{k_z} dz; \quad \bar{G}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\lambda\rho} \frac{1}{k_z} z dz; \quad \bar{G}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^{\lambda\rho} \frac{1}{k_z} z^2 dz. \quad (5.25)$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\lambda\rho} \frac{a_z}{k_z} dz; \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\lambda\rho} \frac{a_z}{k_z} z dz. \quad (5.26)$$

Условие для определения критической силы получим, приравняв момент от фиктивной нагрузки в среднем сечении ранее принятому прогибу стержня $m\Delta$ в том же сечении:

$$\frac{B_1}{2D_1} + \frac{B_1}{\omega_1 D_1} \bar{A}_5 + \frac{C_1}{\omega_2 D_1} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 - m = 0. \quad (5.27)$$

В уравнении (5.27) обозначено:

$$\bar{A}_4 = \frac{1}{1-\nu^2\tau} \left(\frac{1}{2} \bar{G}_2 - \bar{G}_3 \right);$$

$$\bar{A}_5 = \frac{1}{2} \bar{G}_1 - \frac{1,5 - \nu^2\tau}{1-\nu^2\tau} \bar{G}_2 + \frac{1}{1-\nu^2\tau} \bar{G}_3. \quad (5.28)$$

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} \bar{S}_1 - \bar{S}_2. \quad (5.29)$$

$$\bar{G}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{k_z} dz; \quad \bar{G}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{k_z} z dz; \quad \bar{G}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{k_z} z^2 dz. \quad (5.30)$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{a_z}{k_z} dz; \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{a_z}{k_z} z dz. \quad (5.31)$$

Вычисления интегралов, входящих в формулы, можно производить либо по формулам интегрирования, либо по приближенным формулам Симпсона или Котса:

$$\int_0^{\lambda} y dx = \frac{\lambda}{12} (5y_0 + 8y_1 - y_2); \quad (5.32)$$

$$\int_0^{2\lambda} y dx = \frac{\lambda}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2); \quad (5.33)$$

$$\int_0^{4\lambda} y dx = \frac{3\lambda}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3); \quad (5.34)$$

$$\int_0^{6\lambda} y dx = \frac{\lambda}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4); \quad (5.35)$$

$$\int_0^{8\lambda} y dx = \frac{\lambda}{24} (9y_0 + 27y_1 + 27y_2 + 17y_3 + 32y_4 + 8y_5); \quad (5.36)$$

$$\int_0^{10\lambda} y dx = \frac{\lambda}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6). \quad (5.37)$$

и т. д.

Более точные формулы неудобны, так как коэффициенты получаются громоздкими.

Для применения формул (5.32) — (5.37) длину стержня нужно разбить на четное число n равных участков. Длина каждого участка будет $\lambda = \frac{l}{n}$; p — порядковый номер сечения, в котором определяется прогиб.

Для уточнения полученного решения вычисляем ординаты более точной кривой выпучивания стержня, воспользовавшись фиктивной нагрузкой первого приближения. Эти ординаты равны моментам от фиктивной нагрузки и определяются по формуле (5.22). Вычисление интегралов в этом случае производим по формулам (5.32) — (5.37). При этом кривая выпучивания получается все ближе и ближе к точной упругой кривой. При удачном выборе аппроксимирующей функции a_z можно значительно сократить количество вычислений, ограничиваясь даже одним циклом расчета.

Опуская выкладки для других случаев граничных условий, в табл. 1 приведем окончательные формулы определения критических сил для упруго защемленных стержней переменного сечения на упруго податливых и жестких опорах. В таблице имеются все необходимые данные для решения задач.

Приведенные в табл. 1 формулы дают возможность путем последовательных приближений рассчитывать с любой степенью точности упруго защемленные стержни переменного поперечного сечения.

Критические силы упруго защемленных стержней переменного сечения на упруго податливых опорах

№ п/п	Схема стержня	Граничные условия	Изогнута ось	Условия для определения критической силы	Ординаты изогнутой оси стержня	Принятые обозначения	Выражения для интегралов
1		$r_1 \neq 0$ $r_2 \neq 0$ $t \neq 0$	$\omega_1 \neq 0$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau \neq 0$	$v_z = \Delta a_z$	$\frac{B_1}{2D_1} + \frac{B_1}{\omega_1 D_1} \dot{A}_5 + \frac{C_1}{\omega_2 D_1} \dot{A}_4 - \nu^2 \dot{E}_1 - m = 0$	$v_p = \Delta \left(\frac{B_1}{D_1} \cdot \frac{\lambda p}{l} + \frac{B_1}{\omega_1 D_1} \dot{A}_5 + \frac{C_1}{\omega_2 D_1} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 \right)$	<p>I. $A_1 = G_1 - G_2$; $A_2 = G_2 - G_3$; $A_3 = G_1 - 2G_2 + G_3$; $A_4 = G_1 G_3 - G_2^2$; $A_5 = \frac{G_2}{1 - \nu^2 \tau}$; $A_6 = \frac{G_3}{1 - \nu^2 \tau}$; $A_7 = G_1 - \frac{2 - \nu^2 \tau}{1 - \nu^2 \tau} G_2 + \frac{1}{1 - \nu^2 \tau} G_3$; $A_8 = \frac{A_4}{1 - \nu^2 \tau}$</p> <p>II. $\dot{A}_1 = \frac{1}{2} \dot{G}_1 - \dot{G}_2$; $\dot{A}_2 = \frac{1}{2} \dot{G}_2 - \dot{G}_3$; $\dot{A}_3 = \frac{1}{2} \dot{G}_1 - \frac{3}{2} \dot{G}_2 + \dot{G}_3$; $\dot{A}_4 = \frac{\dot{A}_2}{1 - \nu^2 \tau}$; $\dot{A}_5 = \frac{1}{2} \dot{G}_1 - \frac{1,5 - \nu^2 \tau}{1 - \nu^2 \tau} \dot{G}_2 + \frac{1}{1 - \nu^2 \tau} \dot{G}_3$</p> <p>III. $\bar{A}_1 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \bar{G}_2$; $\bar{A}_2 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_2 - \bar{G}_3$; $\bar{A}_3 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \left(1 + \frac{\lambda p}{l}\right) \bar{G}_2 + \bar{G}_3$; $\bar{A}_4 = \frac{\bar{A}_2}{1 - \nu^2 \tau}$; $\bar{A}_5 = \frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \left[1 + \frac{\lambda p}{l(1 - \nu^2 \tau)}\right] \bar{G}_2 + \frac{1}{1 - \nu^2 \tau} \bar{G}_3$</p> <p>IV. $B_1 = \nu^2 \left[S_1 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_6\right) - S_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_5\right) \right] + \left(1 + \frac{1}{\omega_2} A_5\right)$; $B_2 = \nu^2 (S_1 G_3 - S_2 G_2) + G_2$; $B_3 = S_1 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} G_3\right) - S_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_2} G_2\right)$; $B_4 = S_1 G_3 - S_2 G_2$</p> <p>V. $C_1 = \nu^2 \left\{ S_2 \left[1 + \frac{1}{\omega_1} (G_1 - A_5)\right] - \frac{1}{\omega_1} S_1 (G_2 - A_6) \right\} - \left[1 + \frac{1}{\omega_1} (G_1 - A_5)\right]$; $C_2 = \nu^2 [S_2 (G_1 - A_5) - S_1 (G_2 - A_6)] - (G_1 - A_5)$; $C_3 = \nu^2 S_2 - 1$; $C_4 = S_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_1} A_1\right) - \frac{1}{\omega_1} S_1 A_2$; $C_5 = S_2 A_1 - S_1 A_2$</p> <p>VI. $D_1 = 1 + \frac{1}{\omega_1} A_7 + \frac{1}{\omega_2} A_6 + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} A_8$; $D_2 = A_7 + \frac{1}{\omega_2} A_8$; $D_3 = 1 + \frac{1}{\omega_2} A_6$; $D_4 = 1 + \frac{1}{\omega_1} A_3 + \frac{1}{\omega_2} G_3 + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} A_4$; $D_5 = A_3 + \frac{1}{\omega_2} A_4$; $D_6 = 1 + \frac{1}{\omega_2} G_3$</p> <p>VII. $\dot{D}_1 = 1 + \frac{1}{\omega} \dot{G}_1$</p> <p>VIII. $E_1 = S_1 - S_2$</p> <p>IX. $\dot{E}_1 = \frac{1}{2} \dot{S}_1 - \dot{S}_2$</p> <p>X. $\bar{E}_1 = \frac{\lambda p}{l} \bar{S}_1 - \bar{S}_2$</p> <p>XI. $\nu^2 = l^2 \frac{N}{EJ_0}$; $\omega = \frac{EJ_0}{rl}$; $\tau = \frac{EJ_0}{tl^3}$; $k_z = \frac{J_z}{J_0}$.</p>
2		$r_1 = \infty$ $r_2 \neq 0$ $t \neq 0$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau \neq 0$	$v_z = \Delta a_z$	$\frac{B_1}{D_2} \dot{A}_5 + \frac{C_2}{\omega_2 D_2} \dot{A}_4 - \nu^2 \dot{E}_1 - m = 0$	$v_p = \Delta \left(\frac{B_1}{D_2} \bar{A}_5 + \frac{C_2}{\omega_2 D_2} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 \right)$	
3		$r_1 = 0$ $r_2 \neq 0$ $t \neq 0$	$\omega_1 = \infty$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau \neq 0$	$v_z = \Delta a_z$	$\frac{B_1}{2D_3} + \frac{C_3}{\omega_2 D_3} \dot{A}_4 - \nu^2 \dot{E}_1 - m = 0$	$v_p = \Delta \left(\frac{B_1}{D_3} \cdot \frac{\lambda p}{l} + \frac{C_3}{\omega_2 D_3} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 \right)$	
4		$r_1 = \infty$ $r_2 = \infty$ $t \neq 0$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$ $\tau \neq 0$	$v_z = \Delta a_z$	$\frac{B_2}{A_4} \dot{A}_5 + \frac{C_2}{A_3} \dot{A}_4 - \nu^2 \dot{E}_1 - m = 0$	$v_p = \Delta \left(\frac{B_2}{A_4} \bar{A}_5 + \frac{C_2}{A_3} \bar{A}_4 - \nu^2 \bar{E}_1 \right)$	
5		$r_1 = \infty$ $r_2 = 0$ $t \neq 0$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \infty$ $\tau \neq 0$	$v_z = \Delta a_z$	$\nu^2 (A_1 - E_1) - \frac{A_3}{\tau} - 1 = 0$	$v_p = \Delta \left[\nu^2 (\bar{A}_1 - \bar{E}_1) - \frac{\bar{A}_3}{\tau} \right]$	
6		$r_1 = \infty$ $r_2 = 0$ $t = 0$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \infty$ $\tau = \infty$	$v_z = \Delta a_z$	$\nu^2 (A_1 - E_1) - 1 = 0$	$v_p = \Delta \nu^2 (\bar{A}_1 - \bar{E}_1)$	
7		$r_1 \neq 0$ $r_2 \neq 0$ $t = \infty$	$\omega_1 \neq 0$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{B_3}{2D_4} + \frac{B_3}{\omega_1 D_4} \dot{A}_3 + \frac{C_4}{\omega_2 D_4} \dot{A}_2 - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{B_3}{D_4} \cdot \frac{\lambda p}{l} + \frac{B_3}{\omega_1 D_4} \bar{A}_3 + \frac{C_4}{\omega_2 D_4} \bar{A}_2 - \bar{E}_1 \right)$	
8		$r_1 = \infty$ $r_2 \neq 0$ $t = \infty$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{B_3}{D_5} \dot{A}_3 + \frac{C_5}{\omega_2 D_5} \dot{A}_2 - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{B_3}{D_5} \bar{A}_3 + \frac{C_5}{\omega_2 D_5} \bar{A}_2 - \bar{E}_1 \right)$	
9		$r_1 = 0$ $r_2 \neq 0$ $t = \infty$	$\omega_1 = \infty$ $\omega_2 \neq 0$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{B_3}{2D_6} + \frac{S_2}{\omega_2 D_6} \dot{A}_2 - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{B_3}{D_6} \cdot \frac{\lambda p}{l} + \frac{S_2}{\omega_2 D_6} \bar{A}_2 - \bar{E}_1 \right)$	
10		$r_1 = \infty$ $r_2 = 0$ $t = \infty$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \infty$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{E_1}{A_3} \dot{A}_3 - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{E_1}{A_3} \bar{A}_3 - \bar{E}_1 \right)$	
11		$r_1 = 0$ $r_2 = 0$ $t = \infty$	$\omega_2 = \infty$ $\omega_2 = \infty$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{E_1}{2} - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{\lambda p}{l} E_1 - \bar{E}_1 \right)$	
12		$r_1 = \infty$ $r_2 = \infty$ $t = \infty$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left(\frac{B_4}{A_4} \dot{A}_3 + \frac{C_5}{A_4} \dot{A}_2 - \dot{E}_1 \right) - 1 = 0$	$v_p = f \nu^2 \left(\frac{B_4}{A_4} \bar{A}_3 + \frac{C_5}{A_4} \bar{A}_2 - \bar{E}_1 \right)$	
13		$r_1 = r_2 = r \neq 0$ $t = \infty$	$\omega_1 = \omega_2 = \omega \neq 0$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \left[\frac{\dot{S}_1}{\dot{D}_1} \left(0,5 + \frac{1}{\omega} \dot{A}_1 \right) - \dot{E}_1 \right] - 1 = 0$	$v_p = \nu^2 f \left[\frac{\dot{S}_1}{\dot{D}_1} \left(\frac{\lambda p}{l} + \frac{1}{\omega} \bar{A}_1 \right) - \bar{E}_1 \right]$	
14		$r_1 = 0$ $r_2 = 0$ $t = \infty$	$\omega_1 = \infty$ $\omega_2 = \infty$ $\tau = 0$	$v_z = f a_z$	$\nu^2 \dot{S}_2 - 1 = 0$	$v_p = \nu^2 f \left(\frac{\lambda p}{l} \dot{S}_1 - \bar{E}_1 \right)$	

Для симметричного стержня с симметричными граничными условиями (рис. 4, а) нужно пользоваться данными, приведенными в п. 13 табл. 1.

Однако пользование этими формулами вызывает затруднение в силу громоздкости вычислений. Попытаемся упростить эту сложную задачу, исходя из исследования стержня, схема которого показана на рис. 4, б. Нужно отметить, что результаты такого исследования являются приближенными, с одной стороны, за счет определения глубины упругого ядра, исходя из допущения (1.2), а с другой, за счет схематизации изменения по длине стержня закона момента инерции второго расчетного сечения. В средней части момент инерции второго расчетного сечения определяется глубиной упругого ядра в наиболее напряженном сечении; в крайних участках стержня в силу разгрузки (действие реактивных моментов в защемлениях) момент инерции второго расчетного сечения равен полному моменту инерции всего сечения.

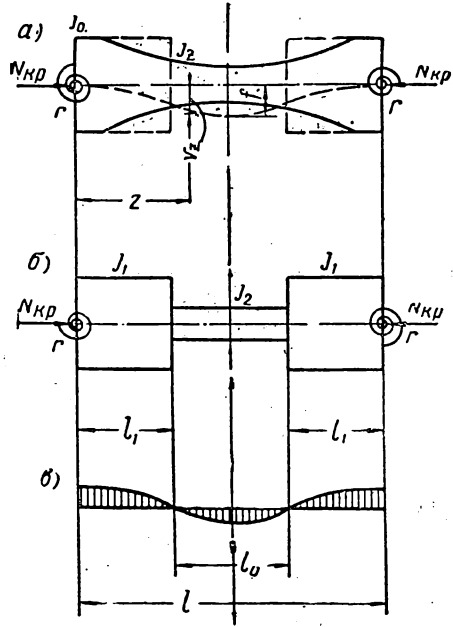


Рис. 4. К определению отпорности и свободной длины упруго защемленного стержня

Рассмотрим устойчивость стержня, схема которого показана на рис. 4, б.

Удовлетворяя граничным условиям и условиям сопряжения и приравнявая определитель системы полученных уравнений нулю, получим формулу для определения критической силы (величины отпорности) исследуемого стержня:

$$\left(\nu_2 \omega_2 \sqrt{n} \sin \frac{\nu_2}{\sqrt{n}} \lambda_1 - \cos \frac{\nu_2}{\sqrt{n}} \lambda_1 \right) \nu_2 \sin \nu_2 (0,5 - \lambda_1) - \left(\frac{\nu_2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\nu_2}{\sqrt{n}} \lambda_1 + \nu_2^2 \omega_2 \cos \frac{\nu_2}{\sqrt{n}} \lambda_1 \right) \cos \nu_2 (0,5 - \lambda_1) = 0, \quad (5.38)$$

где

$$\nu_2 = k_2 l; \quad \omega_2 = \frac{EJ_2}{rl}; \quad n = \frac{J_1}{J_2}; \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{l}. \quad (5.39)$$

Расстояние между точками перегиба изогнутой оси (свобод-

ная длина стержня) равно длине среднего участка. Эпюра моментов в этом случае показана на рис. 4, в.

Из рассмотрения среднего участка имеем

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ_2}{(\mu_0 l)^2}. \quad (5.40)$$

С другой стороны можно записать

$$N_{кр} = \frac{\nu_2^2 EJ_2}{l^2}. \quad (5.41)$$

Приравнивая правые части (5.40) и (5.41), получим

$$\nu_2 = \frac{\pi}{\mu_0}. \quad (5.42)$$

Подставляя значение (5.42) в формулу (5.38), получим условие устойчивости в виде

$$\omega_2 \frac{\pi}{\mu_0} \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\mu_0 \sqrt{n}} (1 - \mu_0) - 1 = 0. \quad (5.43)$$

Этой формулой и будем пользоваться в дальнейшем для определения величин свободных длин ($l_0 = \mu_0 l$).

Особо должен быть рассмотрен вопрос об отпорности упруго защемленного стержня при полном пластическом шарнире в его наиболее напряженном сечении, так как эта задача выпадает из круга задач, рассмотренных в табл. 1.

Принципиально отпорность такого стержня при пластическом шарнире в середине может быть определена по схеме, показанной на рис. 5, а.

Условие устойчивости такого стержня будет

$$\nu \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{\omega}, \quad (5.44)$$

где

$$\nu = kl; \quad k = \sqrt{\frac{N_{кр}}{EJ}}; \quad \omega = \frac{EJ}{rl}. \quad (5.45)$$

Формулой (5.44) можно пользоваться при грубой оценке величины отпорности. Более точная оценка отпорности может быть получена из исследования стержня, схема которого приведена на рис. 5, б.

Нужно сделать несколько замечаний о том сечении стержня, где расположен полный пластический шарнир. Дело в том, что в этом сечении упругое ядро равно нулю; следовательно, площадь упругого ядра и момент его инерции (изгибная жесткость) имеют нулевые значения. Тем не менее это сечение воспринимает сжимающую силу N . Это объясняется тем, что передача сжимающей силы полностью происходит через зоны пластических дефор-

маций. Наличие шарнира в схеме стержня указывает на то, что в этом сечении его изгибная жесткость (второго сечения) принимается равной нулю. Для того чтобы избавиться от несобственных интегралов при определении величины отпорности стержня, будем считать, что в сечении с пластическим шарниром мо-

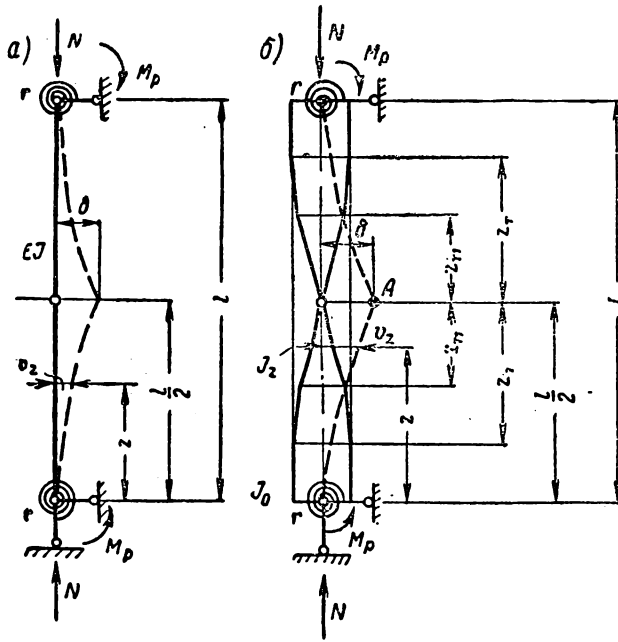


Рис. 5. Форма потери устойчивости упруго защемленных стержней при полном пластическом шарнире

мент инерции упругого ядра не равен нулю, а имеет малую величину [см. (4.1)].

Из условия равенства нулю изгибающего момента в точке A (рис. 5, б) получаем следующую зависимость

$$r\varphi = N_{кр}\delta, \quad (5.46)$$

откуда

$$\varphi = \frac{N_{кр}\delta}{r} = \nu^2\omega \frac{\delta}{l}, \quad (5.47)$$

где

$$\nu^2 = \frac{N_{кр}}{EJ_0} l^2; \quad \omega = \frac{EJ_0}{rl}. \quad (5.48)$$

Изгибающий момент в любом сечении стержня равен

$$M_z = N_{кр}(\delta - v_z) = N_{кр}\delta(1 - a_z), \quad (5.49)$$

где

$$a_z = \frac{v_z}{\delta}.$$

Фиктивная нагрузка, действующая на стержень, может быть записана в виде

$$q_{\phi z} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{v^2 \delta}{l^2} \left(\frac{1}{k_z} - \frac{a_z}{k_z} \right), \quad (5.50)$$

где

$$k_z = \frac{J_z}{J_0}.$$

Приравнявая изгибающий момент от фиктивной нагрузки в точке A первоначально принятому прогибу δ , получим условие для определения критической силы (величины отпорности стержня):

$$v^2 = \frac{1}{\frac{\omega}{2} + A_1^* - E_1^*}. \quad (5.51)$$

Обозначения в этой формуле ясны из табл. 1.

Для вычисления последующих приближений отпорности получим формулу, определяющую прогиб стержня в любой точке:

$$\begin{aligned} v_p = M_{\phi p} &= v^2 \omega \frac{\delta}{l} \lambda p - \int_0^{\lambda p} q_{\phi z} (\lambda p - z) dz = \\ &= v^2 \delta \left[\omega \frac{\lambda p}{l} - \left(\frac{\lambda p}{l} \bar{G}_1 - \bar{G}_2 \right) - \left(\frac{\lambda p}{l} \bar{S}_1 - \bar{S}_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Выражения для интегралов \bar{S} и \bar{G} имеются в табл. 1.

В формуле (5.52) обозначено: $\lambda = \frac{l}{n}$ — длина каждого участка; p — порядковый номер сечения, в котором определяется прогиб.

6. ПРИМЕР РАСЧЕТА УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННОГО СТЕРЖНЯ

Схема такого стержня может быть взята из рис. 1 ($E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см²; $\sigma_T = 2400$ кг/см²).

Фиксируем величину среднего напряжения по сечению $\sigma_N = \sigma_K = 1600$ кг/см².

По формулам (2.25) и (2.26) определяем возможные пределы изменения δ_0 при односторонней и двусторонней текучести в среднем сечении:

$$0,08333 \leq \delta_0 \leq 0,19436;$$

$$0,19436 \leq \delta_0 \leq 0,20833.$$

По формулам (2.11) и (2.20) вычисляем необходимые величины, входящие в условия равновесия

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{2400}{1600} - 1 \right) = 0,25; \quad \psi = \frac{2 \cdot 1600}{9 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{2400}{1600} - 1 \right)^3 = \frac{21,164}{10^6};$$

$$\xi_1 = \frac{2400}{4 \cdot 1600} \left(1 - \frac{1600^2}{2400^2} \right) = 0,20833; \quad \psi_1^2 = \frac{2400^3}{3 \cdot 2,1^2 \cdot 10^{12} \cdot 1600} = \frac{0,653}{10^6}.$$

Для различных значений λ и ω по формулам (2.12) и (2.21) строим зависимость $\epsilon(\delta_0)$.

На рис. 6 показаны такие зависимости для $\lambda = 60, 80, 100, 120$ и 140 . Коэффициент упругого защемления при этом построении был принят равным $\omega = 0,5$.

Максимальные точки кривых $\epsilon(\delta_0)$ дают значения величин относительных эксцентриситетов в критических состояниях равновесия.

На рис. 7 построена зависимость $\lambda(\epsilon)$ для фиксированных величин σ_k и ω .

По формулам (2.15) и (2.24) легко можно определить прогибы рассмотренных стержней в их критических состояниях равновесия. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ стержня	λ	δ_0	$\frac{v_0}{h}$	α_0	n	ω_2	μ_0	$\frac{l_p}{l}$	$\sigma_{кр}$	$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_k}$
1	60	0,19833	0,276	0,276	47,6	0,0105	0,225	0,9	2380/1685	1,052
2	80	0,17833	0,43	0,43	12,6	0,0396	0,385	0,942	1640	1,025
3	100	0,14833	0,61	0,61	4,4	0,1135	0,544	0,925	1592	0,996
4	120	0,11333	0,82	0,82	1,82	0,275	0,685	0,908	1680	1,05
5	140	0,09333	0,94	0,94	1,205	0,415	0,745	0,81	1580	0,988

Определим теперь по формуле (5.43) свободные длины стержней ($l_0 = \rho_0 l$) в момент их потери устойчивости и сделаем проверку величин критических напряжений по формуле (5.40).

Относительные глубины упругих ядер в среднем сечении определяем из условий равновесия внешних и внутренних сил и моментов.

Отношение моментов инерции крайнего и среднего участков стержня определяется из (5.39):

$$n = \frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{\alpha_0^3}.$$

Жесткость упругого защемления, отнесенная к среднему сечению, будет равна

$$\omega_2 = \omega \frac{J_2}{J_1} = \omega \frac{1}{n}.$$

Величины коэффициентов приведения свободных длин, вычисленные по формуле (5.43) приведены в табл. 2. Интересно отметить, что коэффициент свободной длины упругого стержня (при отсутствии пластических деформаций) равен 0,774.

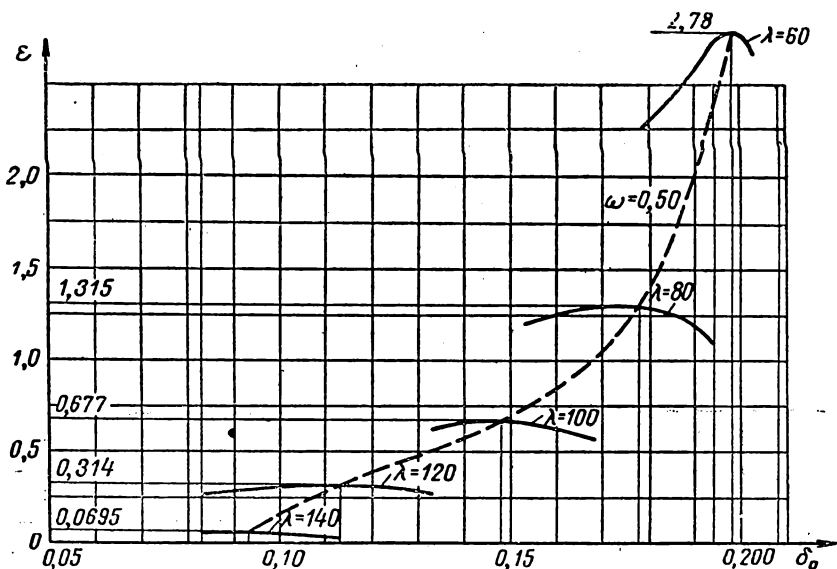


Рис. 6. Зависимость величин ε от δ_0 для стержней различных гибкостей

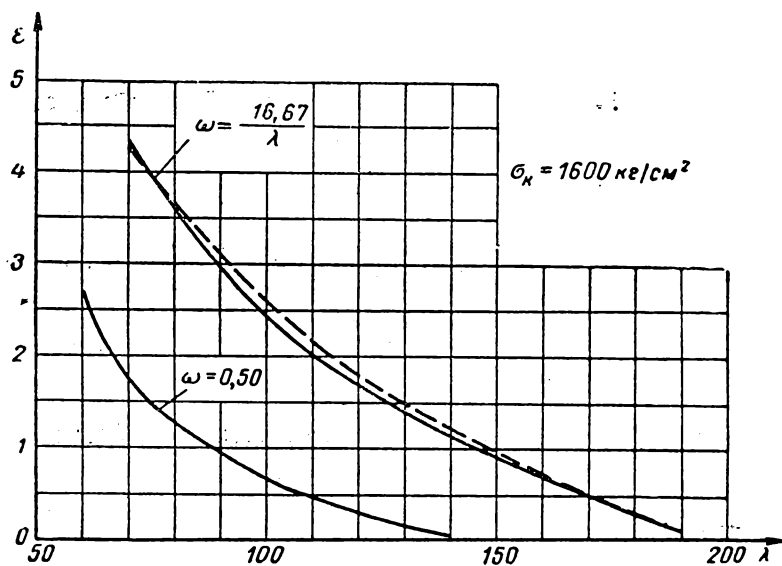


Рис. 7. График $\varepsilon(\lambda)$ для критических состояний упруго защемленных стержней

Величина критических напряжений $\sigma_{кр}$ (отпорность в критическом состоянии) была определена из формулы (5.40):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu_0^2}.$$

Как видно из табл. 2, разница в величинах $\sigma_{кр}$ и σ_k в данном примере получилось в пределах от $-1,2$ до $+5,2\%$. Особо должен быть отмечен стержень с гибкостью $\lambda = 60$. Момент инерции упругого ядра в среднем сечении в критическом состоянии равновесия составляет всего $2,1\%$ от полного момента инерции. В связи с этим величина μ_0 в этом случае теряет свой смысл, так как форма разрушения стержня получает характер, показанный на рис. 5, а. Поэтому в данном случае отпорность стержня должна определяться по формуле (5.44), а не (5.43):

$$\nu \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{0,5},$$

откуда $\nu = 1,7$ и

$$\sigma_{кр} = \frac{1,7^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{60^2} = 1\,685 \text{ кг/см}^2.$$

Для сравнения в табл. 2 приведены величины расстояний между точками перегиба изогнутой оси в критических состояниях равновесия $\frac{l_p}{l}$. Эти величины вычислены по формулам (2.5) и (2.19).

На рис. 7 построена зависимость $\epsilon(\lambda)$ в критических состояниях равновесия для упруго защемленных стержней с коэффициентом жесткости упругого защемления, равным

$$\omega = \frac{16,67}{\lambda}.$$

На этом же рисунке для сравнения показана пунктиром та же зависимость, построенная на основании данных работы [5]. Как видно из рисунка, совпадение обеих кривых достаточно хорошее.

II. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

7. ЦЕЛЕВАЯ УСТАНОВКА ИСПЫТАНИЙ

Основной задачей настоящих испытаний являлось изучение фактической работы внецентренно сжатых стальных стержней с упругими защемлениями концов. При этом основное внимание было уделено исследованию деформативности таких стержней при постепенном увеличении нагрузки, а также изучению формы потери устойчивости в критическом состоянии равновесия. В отдельных испытаниях ставилась задача определения

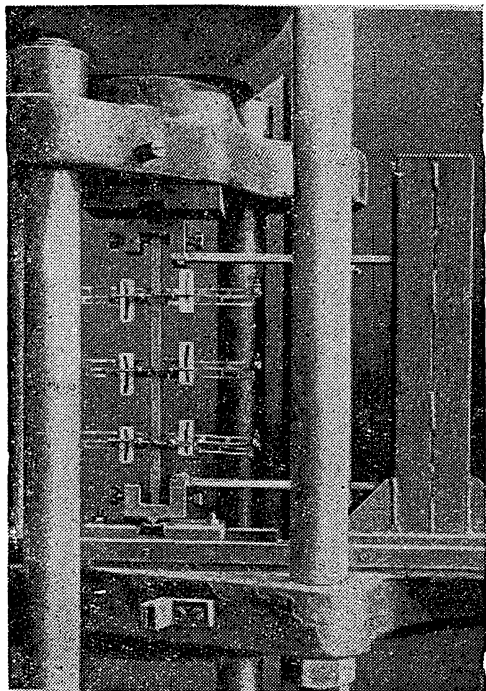


Рис. 8. Упруго защемленный стержень в прессе

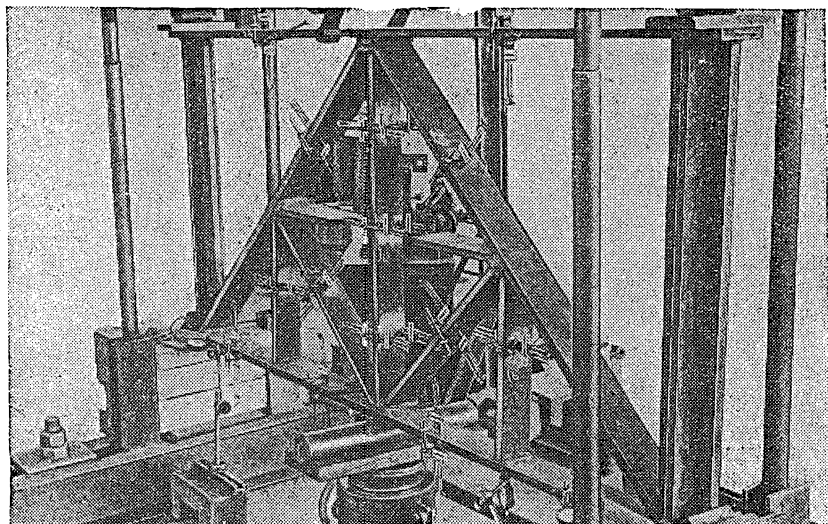


Рис. 9. Общий вид установки для испытания ферм

экспериментальным путем свободных длин упруго защемленных стержней, работающих за пределами упругости.

Важная роль в настоящих исследованиях была уделена также опытной проверке приближенного метода расчета. Основным критерием для сравнения в данном случае была величина критической нагрузки.

Нужно отметить, что вопрос о влиянии формы сечения на работу и критическую силу внецентренно сжатых упруго защемленных стержней в настоящих испытаниях не ставился. Большинство исследований проводилось на образцах прямоугольного сечения; это было сделано для того, чтобы не слишком осложнить явление различными побочными факторами.

Экспериментальные исследования проводились как на отдельных стержнях, имеющих специальные приспособления для создания упругих защемлений (рис. 8), так и на стержнях, входящих в систему фермы (рис. 9). В первом случае коэффициенты жесткостей упругих защемлений являются постоянными величинами, а во втором случае они изменяются с ростом нагрузки.

Особенностью настоящих испытаний было то, что в ряде случаев приборы оставались на образцах как в момент наступления критического состояния равновесия, так и при работе стержней в закритической стадии.

Всего был испытан 51 стержень.

8. ИЗГОТОВЛЕНИЕ И ПОДГОТОВКА СТЕРЖНЕЙ И ФЕРМ К ИСПЫТАНИЯМ

Для экспериментального исследования были запроектированы и изготовлены опытные стальные образцы пяти серий. Разделение всех образцов на серии в данном случае обусловлено, во-первых, теми задачами, которые ставились перед испытаниями каждой серии образцов, во-вторых, материалом, из которого были изготовлены образцы, в-третьих, схемой работы каждого образца и, наконец, способом обработки поверхности образцов.

В настоящем параграфе даны характеристики образцов каждой серии с точки зрения их материала и изготовления.

Образцы первых трех серий были испытаны по схеме, показанной на рис. 8; стержни двух последних серий были испытаны как элементы, входящие в систему фермы (рис. 9).

I серия. Все стержни этой серии, размеры поперечных сечений которых $h=1,38 \div 1,58$ см, $t=2,98 \div 3$ см, были вырезаны автогенем из одного листа мягкой строительной стали толщиной 18 мм. Для исключения влияния термической зоны кромки образцов строгались на толщину 15 мм. Таким образом, размер заготовки принимался на 30 мм больше размера испытуемого образца ($t+30$ мм). Для обеспечения прямолинейности все образцы были простроганы, а затем шлифованы до размеров $h=1,38 \div 1,58$ см.

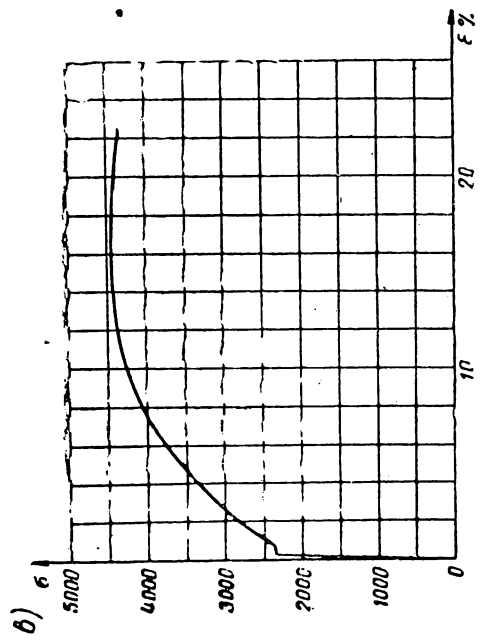
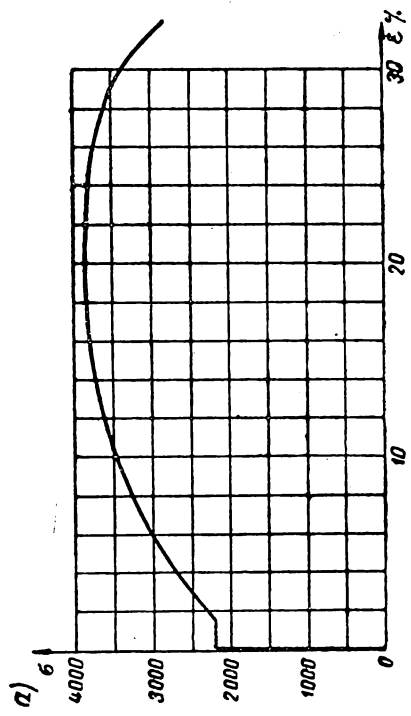
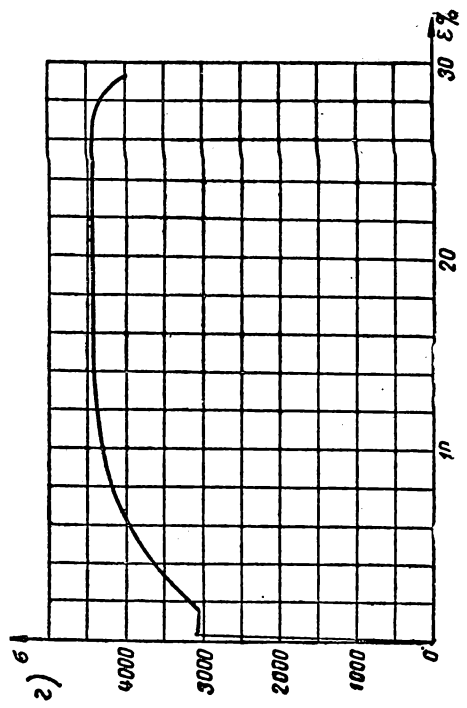
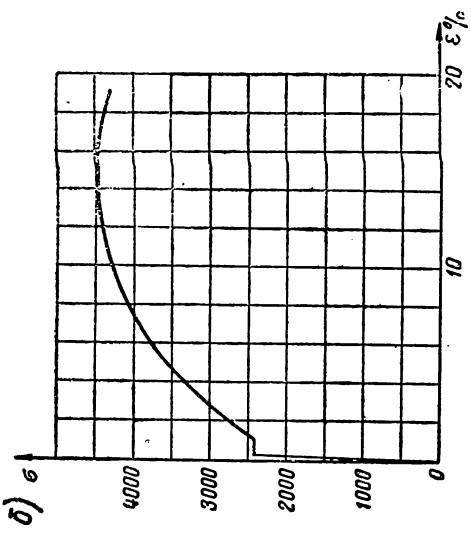


Рис. 10: Диаграммы растяжения материала образцов

Часть образцов была изготовлена с заостренными концами, другая часть — с торцами, обработанными на фрезерном станке. В последнем случае обращалось внимание на перпендикулярность плоскости торца к боковым граням образца.

При испытании материала в отделе механических испытаний ЦНИИСКа были установлены следующие средние характеристики: $E=2,054 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{пц}}=1920 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{т}}=2180 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{пч}}=3830 \text{ кг/см}^2$; $\epsilon=32,6\%$.

Механические характеристики устанавливались из испытаний на растяжение трех стандартных шлифованных образцов. Диаграмма работы материала, построенная на основе машинной записи, показана на рис. 10, а.

II серия. Образцы этой серии были вырезаны из одного листа мягкой строительной стали марки Ст. 3 толщиной 20 мм. Способ обработки образцов такой же, как и образцов I серии: зона термического влияния была сострогана на толщину 15 мм, образцы затем шлифовались с четырех сторон до размеров $h=1,9 \text{ см}$, $t \approx 2,4 \text{ см}$.

Средние механические характеристики материала, полученные из испытаний восьми стандартных нешлифованных образцов на растяжение, следующие: $E=2,08 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{пц}}=1820 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{т}}=2416 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{пч}}=4449 \text{ кг/см}^2$; $\epsilon=21,5\%$. Диаграмма работы материала показана на рис. 10, б.

III серия. Образцы этой серии вырезались автогеном из одного листа стали толщиной 12 мм. Кромки автогенного реза строгались на толщину 10 мм. Дальнейшей обработке (шлифовке) поверхность образцов не подвергалась. Торцы образцов были обработаны на фрезерном станке.

Средние механические характеристики материала, полученные из испытаний десяти стандартных нешлифованных образцов на растяжение, следующие: $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{т}}=2585 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{пч}}=4414 \text{ кг/см}^2$; $\epsilon=24,4\%$. Диаграмма работы материала показана на рис. 10, в.

IV серия. Образцы этой серии испытывались как элементы, входящие в систему ферм Ф-1 и Ф-2. Остановимся кратко на технологии изготовления ферм. Стержни ферм, имеющие прямоугольное сечение с размерами 20×80 и $20 \times 100 \text{ мм}$ (см. рис. 9), были вырезаны автогеном из одного листа мягкой строительной стали Ст. 3 толщиной 20 мм.

Кромки автогенного реза строгались по всей длине стержней на толщину 15 мм. Дальнейшей обработке поверхность стержней не подвергалась.

Сборка элементов фермы производилась на специально изготовленном кондукторе. Особое внимание при сборке ферм обращалось на тщательность центрирования элементов в узлах. Это достигалось при помощи нитей, прикрепляемых к кондуктору и натягиваемых над элементами по их геометрическим осям. Соединение стержней ферм друг с другом было выполнено метο

дом ванной сварки при помощи специально изготовленных медных форм. Сварка узлов производилась в сварочном кабинете ЦНИИСКа под руководством канд. техн. наук А. Я. Бродского. Указанный метод сварки элементов ферм в узлах явился надежным видом соединения, исключающим необходимость постановки узловых фасонки.

Кроме того, примененный здесь метод сварки не только не вызывал искривления стержней ферм за счет усадочных напряжений, а наоборот, способствовал сохранению их прямолинейности.

Средние механические характеристики материала стержней следующие: $E=2,08 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{пц}=1820 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{т}=2416 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{пч}=4449 \text{ кг/см}^2$; $\epsilon = 21,5\%$. Диаграмма работы материала показана на рис. 10, б.

V серия. Образцы этой серии входили в систему ферм Ф-3 и Ф-4, изготовленных из уголков по обычной технологии. Сечение сжатых стержней — тавровое, составление из двух уголков Л 50×5; соединение в узлах ферм — на фасонках.

Средние механические характеристики материала стержней, полученные из испытаний семи образцов на растяжение, следующие: $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{т}=3065 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{пч}=4450 \text{ кг/см}^2$; $\epsilon = 29,8\%$. Диаграмма работы материала приведена на рис. 10, в.

Для создания упругих защемлений при испытаниях стержней по схеме, показанной на рис. 8, были изготовлены специальные приспособления (горизонтальные ригели и стойка — опора для ригелей). Заготовки для ригелей были вырезаны автогеном из трех различных кусков стали; дальнейшая обработка их производилась на строгальном и фрезерном станках. Механические характеристики материала ригелей приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ куска стали	Толщина в см	E в кг/см^2	$\sigma_{пц}$ в кг/см^2	$\sigma_{т}$ в кг/см^2	$\sigma_{пч}$ в кг/см^2	ϵ в %	Марка стали
1	0,95	$2,14 \cdot 10^6$	2455	2810	4400	28,2	Ст. 3 с явно выраженной площадкой текучести
2	1,2	$2,07 \cdot 10^6$	2265	2450	4420	23,55	Ст. 3 без явно выраженной площадки текучести
3	1	$2,08 \cdot 10^6$	3230	4100	6180	20,5	Жесткая углеродистая сталь без площадки текучести

9. МЕТОДИКА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

а) Испытания стержней

Испытания упруго защемленных стержней на внецентренное сжатие (три первые серии) проводились в ЦНИИСКе на 50-тонном прессе фирмы Лозенгаузен с механическим приводом. Большим достоинством этого прессы является возможность весьма точного определения критической нагрузки.

Испытания упруго защемленных стержней производились на специальных ножевых опорах с закаленными призмами, снабженных болтами для центрировки стержней. Конструкция опор предусматривает создание начальных эксцентриситетов от $e=0$ до $e=10$ мм.

подавляющее большинство испытаний стержней было проведено с заранее заданными относительными эксцентриситетами порядка $\epsilon = 0,75; 1; 1,5; 2$. При таких величинах относительных эксцентриситетов небольшие ошибки в их величинах, всегда имеющие место при центрировании стержней, оказывают небольшое влияние на величины критических сил. Так, например, для стального стержня гибкостью 80 ошибка при определении относительного эксцентриситета до 10% дает ошибку в критических напряжениях порядка 1,8—3%. Для других гибкостей эти соотношения будут, конечно, другими, но их общий характер остается таким же. Схема испытаний показана на рис. 11.

Процесс испытания был следующим. После подготовки прессы к испытаниям и укрепления опорных приспособлений испытуемый образец устанавливался в прессе и выверялся. Предварительное центрирование образца производилось по рискам, имеющимся на опорах и каждом образце. После этого устанавливались приборы: тензометры, прогибомеры и мессуры. Далее установленный образец при ослабленных болтах 2 (рис. 11), т. е. как шарнирно опертый, подвергался небольшому обжатию для проверки правильности работы приборов и уточнения заданных эксцентриситетов. В большинстве случаев на основании разности показаний тензометров в упругой стадии производилось дополнительное центрирование шарнирно опертых образцов регулировочными болтами 1, при помощи которых образец затем плотно зажимался в опорах. После того, как центрировка образца соответствовала заданной величине эксцентриситета, производилось предварительное обжатие (2—3 раза) каждого образца нагрузкой, равной 50—60% от критической для шарнирно опертых образцов (в пределах упругих деформаций).

Затем при установленных приборах и нагрузке порядка 0,5 т производилась плотная затяжка болтов 2, при помощи которых включались в работу ригели упругих защементирований. При этом стрелки приборов, в основном тензометров, часто смещались со своих нулевых положений. Путем последовательной затяжки

болтов 3 и 4 стрелки приборов возвращались в свое исходное положение (с разностью не более одного-двух делений по тензомерам). Затем вновь производилось обжатие образца и после этого начиналось испытание.

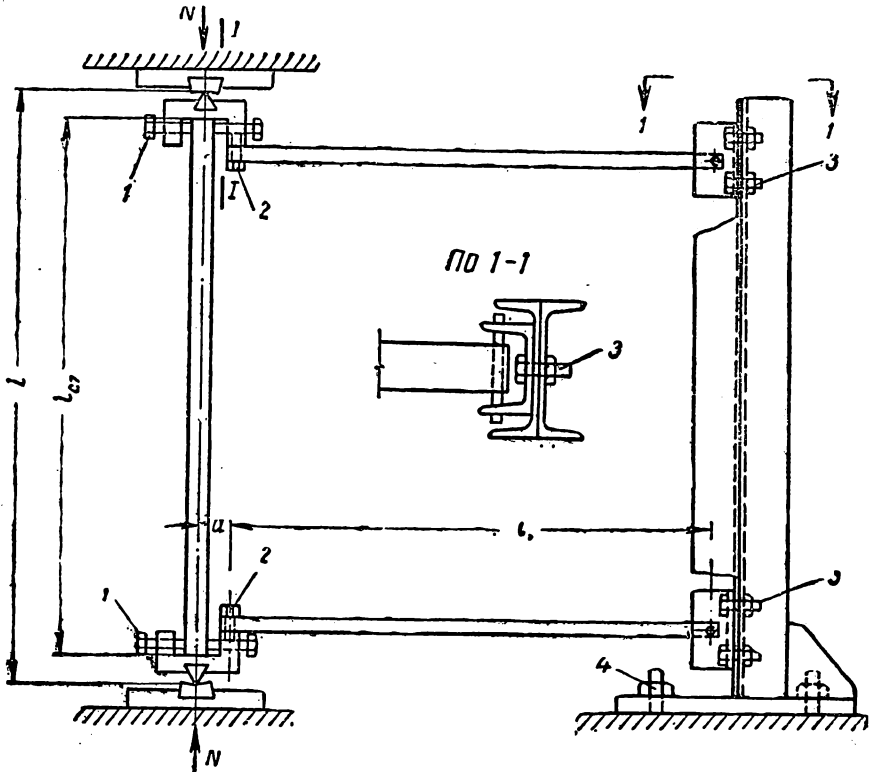


Рис. 11. Схема испытания упруго защемленных стержней

При проведении испытаний всех образцов нагружение производилось ступенями, постепенно уменьшавшимися при приближении к критическому состоянию, с выдержкой в течение 3—5 мин.

Критическое состояние равновесия фиксировалось по падению рычага силоизмерителя прессы. Этот момент характеризовался началом падения нагрузки при заметном увеличении деформации образца. Поскольку при подходе к критическому состоянию нагрузка увеличивалась очень медленно, удавалось весьма точно определять величину критической силы; прогиб в критическом состоянии определялся с меньшей степенью точности: по показаниям приборов при нагрузках, меньших критической и соответствующих докритическому и закритическому состояниям равновесия.

При испытании упруго защемленных стержней на внецентренное сжатие производился замер следующих деформаций.

1. Прогибы стержней измерялись, как правило, в среднем сечении при помощи мессур (точность измерения $0,01$ мм) и прогибомеров системы Емельянова (точность измерения $0,01$ мм). Мессура прикреплялась к рейке и соединялась с серединой стержня жесткой связью. Замер прогибов производился также и в закритической стадии работы стержней.

2. В трех сечениях по длине стержня замерялись деформации в крайних волокнах при помощи трех пар тензодатчиков системы Гугенберга с базой 20 мм. Тензодатчики, устанавливаемые непосредственно у опор, служили также и для центрирования образцов. На коротких образцах ввиду небольшого расстояния между опорными устройствами ставилась одна пара тензодатчиков в среднем сечении образца. Тензодатчики, как правило, оставались на образце в момент потери устойчивости, что позволило производить измерение деформаций и в закритической стадии.

3. В ряде испытаний производился замер углов поворота опорных сечений при помощи металлической стрелки длиной 360 мм и миллиметровой шкалы.

Стрелка при помощи винтов прикреплялась непосредственно к опорам.

4. Контроль за появлением пластических деформаций и величинами продольных усилий в ригелях, служивших для создания упругих защемлений, производился при помощи тензодатчиков (или датчиков), устанавливаемых на каждом ригеле. Как показал анализ результатов испытаний всех стержней, к моменту потери устойчивости испытываемых образцов в ригелях не наблюдалось пластических деформаций; продольные силы в них были ничтожны.

Как видно из рис. 11, упругие защемления стержней создавались при помощи горизонтальных ригелей, каждый из которых крепился к опоре двумя болтами М-10 (болты 2). Второй конец каждого ригеля опирался на мощную стойку, сваренную из двух швеллеров; опирание было шарнирным при помощи шлифованных шпилек $d = 6$ мм.

Для того чтобы при испытании исключить возможность появления в ригелях продольных сил, диаметр отверстий, в которые вставлялись шпильки, был на 1 мм больше диаметра шпилек.

Принципиальная схема работы ригелей показана на рис. 12.

Коэффициент жесткости упругого защемления равен изгибающему моменту M , возникающему при повороте узла I на угол, равный единице. Строго говоря, точка поворота опоры не совпадает по высоте с осью упругой балки-заделки. В связи с этим при повороте опоры будет возникать и прогиб балки-заделки, связанный с углом поворота определенной зависимостью. Как показали вычисления, влияние прогиба балки на величину изгибающего момента, возникающего при повороте опо-

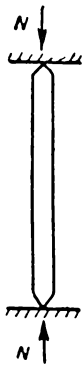
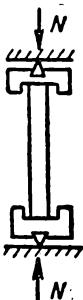
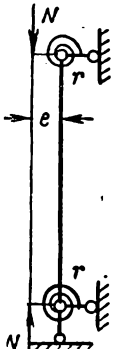
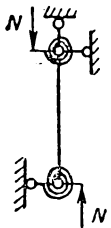
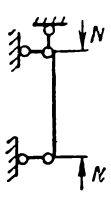
№ стержней	Схема испытания	Размеры стержней				
		h в см	t в см	l в см	e в см	$e_{\text{ср}}$ в см
1	2	3	4	5	6	7
I-1 I-2 I-3 I-4 I-5 I-6		1,42 1,38 1,57 1,46 1,44 1,58	2,98 2,98 3 3 3 3	46 41 43 36 31 26	0,262/0,272 0,263/0,278 0,252/0,255 0,259/0,257 0,279/0,279 0,304/0,253	0,267 0,271 0,253 0,258 0,279 0,276
I-7 I-8 I-9 I-10 I-11		1,41 1,38 1,46 1,44 1,58	2,99 2,98 3 3 3	46 41 36 31 26	0,248/0,281 0,306/0,316 0,265/0,267 0,287/0,265 —	0,264 0,311 0,261 0,276 0,276
I-12 I-13 I-14 I-15 I-16 I-17 I-18		1,41 1,4 1,39 1,45 1,44 1,58 1,58	2,98 3 3 3 3 3 3	46 41 41 36 31 26 26	0,219/0,221 0,261/0,245 0,248/0,26 0,244/0,271 0,185/0,312 — —	0,22 0,253 0,254 0,257 0,248 0,276 0,276

Таблица 4

Размеры элементов упругих защемлений

h_1 в см	t_1 в см	l_1 в см	средние значения		r в кгсм
			h_1 в см	t_1 в см	
8	9	10	11	12	13
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,02/1	2,98/2,98	30	1,01	2,98	$6,15 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1/1	3/3	25	1	3	$7,26 \cdot 10^4$

№ стержней	Схема испытаний	Размеры стержней				
		ϕ h в см	t в см	l в см	e в см	$e_{ср}$ в см
1	2	3	4	5	6	7
I-19 I-20	Упруго защемленный на одном конце	1,57 1,44	3 3	43 31	0,316/0,272 0,271/0,336	0,294 0,303
I-21	Центрально сжатый	1,44	3	31	0/0	0
II-1 II-2 II-3	См I-12—I-18	1,9 1,9 1,91	2,35 2,35 2,43	31 31 26	0,244/0,23 0,492/0,47 —	0,237 0,481 0,475
III-1 III-2 III-3	См I-12—I-18	1,2 1,25 1,21	2,9 2,95 2,95	45 45 40	— — —	0,2 0,4 0,2
III-4 III-5	Упруго защемленный; центрально сжатый	1,25 1,2	2,95 2,9	20 20	— —	0 0
III-6	Один конец упруго защемлен	1,2	2,9	25	—	0,4
III-7 III-8 III-9 III-10		1,25 1,21 1,21 1,2	2,95 2,98 2,9 2,9	46 41 36 31	— — — —	+0,175/—0,35 +0,2/—0,4 +0,3/—0,3 +0,2/—0,2
III-11 III-12 III-13		1,2 1,2 1,18	2,9 2,9 3	26 26 21	— — —	0,2 0,4 0,05

Размеры элементов упругих защемлений

h_1 в см	t_1 в см	l_1 в см	средние значения		r в кгсм
			h_1 в см	t_1 в см	
8	9	10	11	12	13
—/1,18	—/2,99	30	1,18	2,99	$9,66 \cdot 10^4$
—/1,18	—/2,99	30	1,18	2,99	$9,66 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,12/1,12	2,95/2,96	30	1,12	2,955	$8,15 \cdot 10^4$
1,12/1,12	2,95/2,96	30	1,12	2,955	$8,15 \cdot 10^4$
1,17/1,17	2,99/2,98	30	1,17	2,985	$9,12 \cdot 10^4$
0,97/0,96	3,02/3	30	0,965	3,01	$5,54 \cdot 10^4$
0,97/0,96	3,02/3	30	0,965	3,01	$5,54 \cdot 10^4$
0,97/0,96	3,02/3	30	0,965	3,01	$5,54 \cdot 10^4$
0,96/0,97	3,02/3	30	0,965	3,01	$5,54 \cdot 10^4$
0,96/0,97	3,02/3	30	0,965	3,01	$5,54 \cdot 10^4$
—/0,96	—/3	30	0,96	3	$5,48 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,19/1,18	2,98/2,99	30	1,185	2,985	$9,75 \cdot 10^4$
1,17/1,17	2,99/2,98	30	1,17	2,985	$9,12 \cdot 10^4$
1,17/1,17	2,99/2,98	30	1,17	2,985	$9,12 \cdot 10^4$
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0

№ стержней	Схема испытаний	Размеры стержней				
		h в см	t в см	l в см	e в см	$e_{ср}$ в см
1	2	3	4	5	6	7
IV-1	В системе фермы	2	8	91	0/0	0
IV-2		2	8	64	0/2	0/2
IV-3		2	8	45	0/0	0
IV-4		2	8	45	0/1	0/1
IV-5		2	8	111	0/2	0/2
IV-6		2	8	90	0/0	0
IV-7		2	8	55	0/2	0/2
IV-8		2	8	55	0/1	0/1
V-1	То же	N. Г	50×5	140	0/1,5	0/1,5
V-2		Г	50×5	99	0/1,5	0/1,5
V-3		Г	50×5	110	0/1	0/1
V-4		Г	50×5	89	0/0	0
V-5		N. Г	50×5	55	0/1	0/1
V-6		Г N.	50×5	55	0/2	0/2

Примечание. В числителе обозначен верх стержня, в знаменателе — низ.

ры на угол, равный единице, незначительно. Поэтому в дальнейших исследованиях коэффициент жесткости упругого защемления вычислялся без учета влияния прогиба.

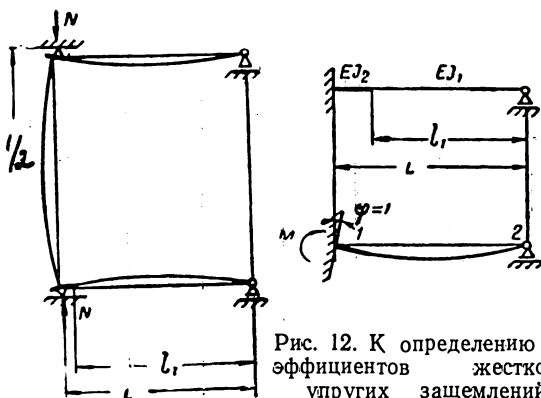


Рис. 12. К определению коэффициентов жесткости упругих защемлений.

Размеры элементов упругих защемлений					
h_1 в см	t_1 в см	l_1 в см	средние значения		r в кгсм
			h_1 в см	t_1 в см	
8	9	10	11	12	13
—	—	—	—	—	$2,59 \cdot 10^5 / 33,7 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$34,5 \cdot 10^5 / 10,8 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$20,5 \cdot 10^5 / 21,6 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$20,5 \cdot 10^5 / 21,6 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$17,5 \cdot 10^5 / 22,6 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$24,6 \cdot 10^5 / 6,94 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$14,1 \cdot 10^5 / 13,85 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$14,1 \cdot 10^5 / 13,85 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$125,2 \cdot 10^5 / 179,5 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$197 \cdot 10^5 / 23,2 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$137 \cdot 10^5 / 83,2 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$215 \cdot 10^5 / 23,2 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$150 \cdot 10^5 / 46,2 \cdot 10^5$
—	—	—	—	—	$150 \cdot 10^5 / 46,2 \cdot 10^5$

На основании известных формул можно записать

$$r = M = \frac{L^2}{\delta_{22}}, \quad (9.1)$$

где

$$\delta_{22} = \left(1 - \lambda^3 + \frac{\lambda^3}{n}\right) \frac{L^3}{3EJ_2}. \quad (9.2)$$

В формуле (9.2) обозначено

$$\lambda = \frac{l_1}{L}; \quad n = \frac{J_1}{J_2}. \quad (9.3)$$

Вычисленные по формулам (9.1)—(9.3) значения коэффициентов r приведены в табл. 4.

При проведении испытаний образцов изложенная выше методика испытаний, оставаясь принципиально неизменной, подвергалась небольшим изменениям и дополнениям в соответствии с теми задачами, которые ставились перед испытаниями каждой серии образцов.

Остановимся на этом более подробно.

Испытания стержней I серии. Одной из задач, стоящих перед испытаниями стержней этой серии, было выявление влияния жесткости конструкции самих опор на величину критической нагрузки стержня. Дело в том, что длина стержня при испытании его на опорах определяется как расстояние между ножами призм. Размер опор при этом составляет 15—25% от длины всего стержня.

Для выяснения этого вопроса были изготовлены стальные стержни с заостренными концами, испытываемые без опор, и точно такие же стержни, которые испытывались как шарнирно опертые с опорами (без упругих защемлений). В этой части испытания стержней I серии имеют методический характер. Результаты испытаний сравнивались с хорошо разработанными методами расчета шарнирно опертых стержней.

Кроме того, для выявления влияния упругих защемлений на величину критической силы были испытаны такие же стальные стержни с упругими защемлениями концов. Геометрические размеры стержней приведены в табл. 4.

Заострения концов стержней были запроектированы таким образом, чтобы относительный эксцентриситет приложения силы был равен единице ($\epsilon=1$). Однако при изготовлении точность заострения конца стержня не всегда была строго выдержана. Поэтому эксцентриситеты определялись по разности показаний тензометров в упругой стадии.

Здесь было учтено еще одно обстоятельство. Дело в том, что тензометры никогда невозможно поставить непосредственно на ножах призм: они всегда отстоят от опор на некотором расстоянии. Это вносит небольшие погрешности при определении эксцентриситетов. Сделаем анализ этого фактора теоретическим путем.

На рис. 13 показан стержень, сжатый с одинаковыми эксцентриситетами e . Эксцентриситет приложения сжимающей силы на расстоянии a от опоры равен [2]

$$m_a = e \left[\frac{\sin ka}{\sin kl} + \frac{\sin k(l-a)}{\sin kl} \right], \quad (9.4)$$

Формулу (9.4) можно переписать следующим образом:

$$\chi = \frac{m_a}{e} = \frac{1}{\sin \lambda \sqrt{\frac{\sigma_N}{E}}} \left[\sin \lambda \sqrt{\frac{\sigma_N}{E}} \cdot \frac{a}{l} + \sin \lambda \sqrt{\frac{\sigma_N}{E}} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right], \quad (9.5)$$

где

$$\lambda = \frac{l}{i}; \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}}; \quad \sigma_N = \frac{N}{F}; \quad (9.6)$$

E — модуль упругости.

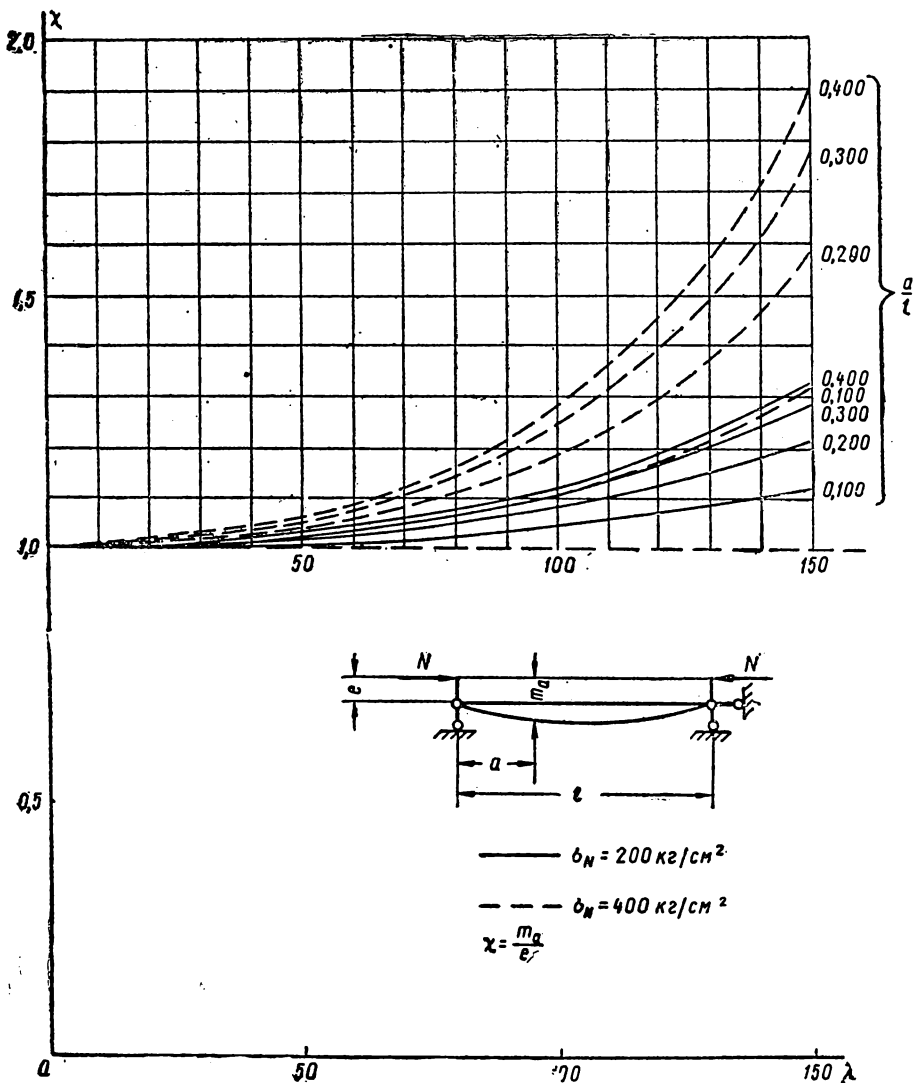


Рис. 13. Значения эксцентриситетов в зависимости от места размещения прогибов на стержне

По формуле (9.5) построен график, приведенный на рис. 13. Так, например, для стального стержня $\lambda = 100$ при $\frac{a}{l} = 0,2$ и $\sigma_N = 200 \text{ кг/см}^2$ начальный эксцентриситет e будет равен

$$e = \frac{m_a}{1,08}.$$

Приведенный на рис. 13 график дает возможность сделать оценку правильности величины начального эксцентритета при центрировании стержня в зависимости от положения тензометров на последнем.

Центрирование заостренных стержней производилось при удалении концевых тензометров Т-1, Т-2 и Т-5, Т-6 на расстояние $a=4$ см от ножей призм. После этого концевые тензометры сме-

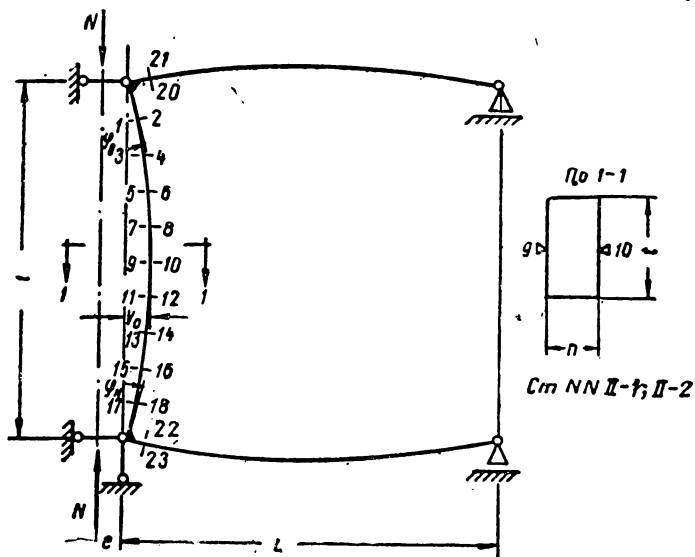


Рис. 14. Схема размещения приборов на стержне

щались на расстояние $a=9$ см от ножей призм, и в таком их положении производилось испытание. Это было сделано для того, чтобы в последующих испытаниях стержней с применением опорных устройств (шарнирно опертых и упруго защемленных), в которых концевые тензометры всегда были удалены от ножей призм на расстояние $a=9$ см, имелась возможность непосредственного сопоставления отсчетов. По такому сопоставлению отсчетов и устанавливались эксцентритеты приложения сжимающей силы при испытаниях стержней этой серии с применением опорных устройств. В некоторых случаях вносились корректировки в величины эксцентритетов по описанной выше методике. Значения начальных эксцентритетов приведены в табл. 4.

Испытания стержней II серии. В этих испытаниях была сделана попытка определить экспериментальным путем фактическую свободную длину l_0 упруго защемленного внецентренно сжатого стержня, работающего в упруго-пластической стадии. С этой целью в двух стальных стержнях (№ II-1 и II-2) по всей их длине через 20 мм друг от друга были наклеены ста-

тические электрические датчики с базой 12 мм. Принципиальная схема испытаний и размещения датчиков показана на рис. 14. Центрирование стержней в этом случае производилось по показаниям крайних датчиков (1, 2 и 17, 18) при помощи регулировочных болтов 1 (рис. 11). Болты 2 при центрировании были ослаблены. Поправка \times к величине эксцентриситета не вводилась, так как ее влияние в данном случае не превышало 1,5—2 %.

Кроме измерения деформаций в крайних волокнах, при испытании этих двух стержней производилось измерение прогиба в середине длины стержня (при помощи прогибомера системы Емельянова) и углов поворота опорных сечений (при помощи стальной стрелки и миллиметровой шкалы).

Испытания стержней III серии. Стержни III серии были испытаны по методике, описанной в начале этого параграфа. Центрирование стержней производилось по концевым

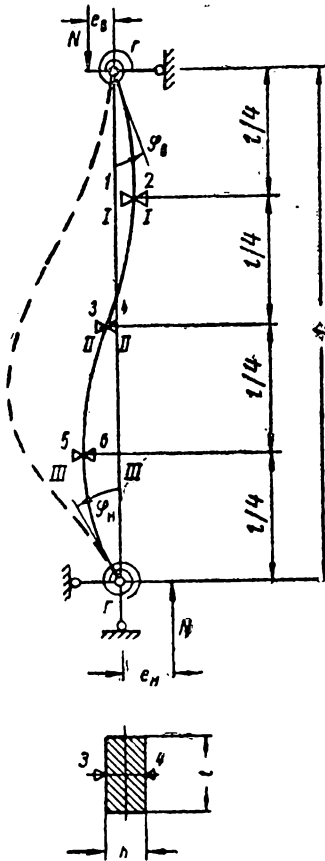


Рис. 15. Схема размещения приборов на стержне

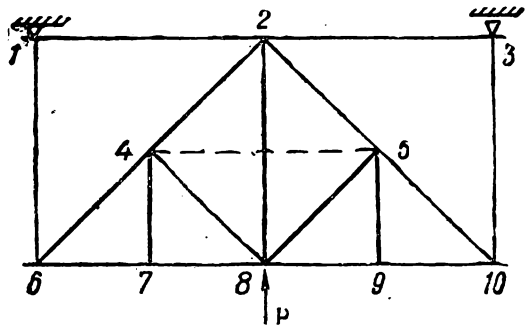


Рис. 16. Схема испытания ферм

или средним тензOMETРАМ, в зависимости от длины стержня.

Для более четкого выявления качественного изменения формы деформирования стержня в критическом состоянии были проведены испытания упруго защемленных стержней, сжатых с эксцентриситетами в разные стороны (стержни № III-7—III-10). Принципиальная схема испытаний показана на рис. 15. В этом случае прогибомеры ставились не только в среднем сечении, но и в сечениях, расположенных в четвертях длины (сечения I—I и III—III). Углы поворота опорных сечений измерялись при помощи стальной стрелки.

б) Испытания ферм

Испытания ферм проводились на силовой плите производственного корпуса ЦНИИСКА. Схема испытаний показана на рис. 16. Для проведения испытаний была запроектирована и изготовлена специальная установка, общий вид которой показан на рис. 9.

Нагрузка создавалась гидравлическим домкратом грузоподъемностью 100 т. Давление домкрата определялось по шкале манометра. Для подачи масла в домкрат был использован ручной насос. Нагрузка создавалась статическая, ступенями, с выдержкой перед отсчетами 3—5 мин.

Установка состояла из двух пар тяжей $d=45$ мм, каждая из которых крепилась к силовому полу при помощи жесткой балки и двух анкерных болтов $d=45$ мм. Опорные части испытуемых ферм были размещены вверху с тем, чтобы домкрат для удобства пользования можно было поставить внизу. Ферма опорными частями упиралась в жесткие траверсы, которые были насажены на тяжи и закреплялись на них гайками.

Домкрат устанавливался на металлическую плиту толщиной 40 мм, а между поршнем и нижней частью конструкции в узле фермы ставился цилиндрический каток с седлом. Этим обеспечивался достаточно свободный поворот узла фермы.

При такой схеме испытания сжатым являлся нижний пояс ферм, растянутым — верхний. Для обеспечения устойчивости сжатого нижнего пояса из плоскости фермы узлы 6 и 10 (рис. 16) при помощи тяжей $d=6$ мм крепились к опорным устройствам. Устойчивость нижнего пояса в узле 8 была обеспечена за счет сил трения. Развязка остальных узлов нижнего пояса фермы (7 и 9) не требовалась, так как жесткость элементов из плоскости фермы была значительной.

Прогибы узлов и стержней фермы измерялись мессурами и прогибомерами системы Максимова. В сечениях по длине стержней ставились тензометры системы Гугенбергера с базой, равной 20 мм. В каждом сечении по крайним волокнам размещалось по четыре прибора.

Испытания проводились в следующем порядке. Сначала испытывалась средняя стойка фермы 2—8; нагрузка при этом прикладывалась в узле 8.

После испытания стойка 2—8 вырезалась и приваривался новый элемент 4—5. Последующее испытание проводилось также при приложении нагрузки в узле 8. При этом испытывались раскосы 4—8 и 5—8. После испытания раскосов производилось местное испытание стоек 4—7 и 5—9. Нагрузка при этом прикладывалась соответственно в узлах 7 и 9. Таким образом, каждая ферма подвергалась четырем испытаниям. Всего было испытано четыре фермы: две с элементами прямоугольного сечения и две с элементами таврового сечения.

В каждом из испытаний выпучивался один элемент, другие стержни создавали упругие защемления его концов.

Испытания производились при центральном и внецентренном приложении внешней нагрузки в узле фермы.

В табл. 4 приведены значения эксцентриситетов приложения внешней нагрузки в узлах. Нужно отметить, что эксцентricность приложения нагрузки имела место только в нижнем узле (в месте, где стоял домкрат); в верхнем узле эксцентricности приложения внешней нагрузки не было. При изгибе стержня в узлах фермы возникали реактивные моменты, которые соответствующим образом влияли на величину концевых изгибающих моментов, передающихся на рассматриваемый стержень.

Коэффициенты жесткостей упругих защемлений концов исследуемых стержней определялись по формуле

$$\omega = \frac{EJ_1}{1,3,5\sum i} = \frac{i_1}{3,5\sum i}, \quad (9,7)$$

где i_1 — погонная жесткость рассматриваемого стержня;

$\sum i$ — сумма погонных жесткостей всех примыкающих в узле стержней (кроме рассматриваемого).

Нужно отметить, что такой метод определения не учитывает влияния продольных сил в стержнях в процессе нагружения.

Не преследуя цели сделать точное теоретическое исследование стержней, входящих в систему ферм, автор стремился выяснить порядок коэффициентов упругих защемлений, имеющийся в реальных стальных конструкциях (для сравнения с испытанными стержнями), и сделать качественный анализ изменения формы изогнутой оси стержней в процессе нагружения и в момент потери устойчивости.

10. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ, СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ С ТЕОРЕТИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

Результаты всех испытаний приведены в табл. 5, где указаны значения сжимающих сил испытанных стержней в критических состояниях равновесия, полученных из эксперимента. Для сравнения в этой таблице даны значения критических параметров этих же стержней, вычисленные по приближенному методу расчета, изложенному в настоящей статье.

При расчете по предлагаемому методу были использованы формулы приближенного решения, основанные на идеализированной диаграмме материала и принятии эпюры моментов по синусоиде.

Для внецентренно сжатых упруго защемленных стержней с симметричными граничными условиями результаты расчета по предлагаемому приближенному методу дают достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Таблица 5

№ стерж.	λ	ε	ω	Экспериментальные данные			Предлагаемый метод расчета					
				σ ^э кг/см ²	$\frac{v^0}{h}$	σ ^м в кг/см ²	$\frac{v^m}{h}$	$\frac{\sigma^a}{\sigma^m}$	%	$\frac{v^0}{v^m}$	%	
												5
I-1	112,2	1,13	∞	827	0,261	760	0,275	1,088	+8,8	0,95	-5	
I-2	102,6	1,17	∞	888	0,239	810	0,206	1,095	+9,5	1,16	+16	
I-3	95,2	0,966	∞	913	0,24	910	0,171	1,002	+0,2	1,4	+40	
I-4	85,5	1,06	∞	1060	0,164	930	0,144	1,14	+14	1,14	+14	
I-5	74,5	1,16	∞	1077	0,153	990	0,133	1,09	+9	0,87	+13	
I-6	57	1,05	∞	1243	0,101	1160	0,0845	1,072	+7,2	1,195	+19,5	
I-7	113	1,12	∞	800	0,284	760	0,275	1,052	+5,2	1,031	+3,1	
I-8	102,6	1,34	∞	852	0,224	770	0,232	1,108	+10,8	0,965	-3,5	
I-9	85,5	1,07	∞	946	0,171	930	0,144	1,018	+1,8	1,188	+18,8	
I-10	74,5	1,15	∞	1098	0,146	990	0,133	1,11	+11	0,91	-9	
I-11	57	1,05	∞	1148	0,095	1160	0,0845	0,99	—	1,123	+12,3	
I-12	113,2	0,936	0,319	1553	0,191	1440	0,195	1,078	+7,8	0,98	-2	
I-13	101,4	1,085	0,56	1427	0,164	1300	0,197	1,095	+9,5	0,833	-16,7	
I-14	102,2	1,083	0,345	1608	0,144	1470	0,168	1,095	+9,5	0,86	-14	
I-15	86	1,062	0,446	1562	0,227	1530	0,179	1,02	+2	1,27	+27	
I-16	74,5	1,03	0,507	1728	0,139	1600	0,2	1,078	+7,8	0,696	-30,4	
I-17	57	1,05	0,8	1832	0,133	1720	0,116	1,064	+6,4	1,148	+14,8	
I-18	95,2	1,05	1,08	1370	0,064	1610	0,152	0,85	-15	—	—	
I-19	95,2	1,12	0,478	1190	—	—	—	—	—	—	—	
I-20	74,5	1,26	0,511	1320	—	—	—	—	—	—	—	
I-21	74,5	0	0,507	2080	0,048	2180	0	0,955	-4,5	—	—	
II-1	56,4	0,748	1,11	1839	0,093	1830	0,11	1,004	+0,4	0,846	-15,4	
II-2	56,4	1,515	1,11	1525	0,132	1560	0,183	0,979	-2,1	0,722	-27,8	
II-3	47	1,49	1,24	1720	—	1680	0,182	1,023	+2,3	—	—	

Продолжение табл. 5

№ терж-ней	Предлагаемый метод расчета											
	Экспериментальные данные						Предлагаемый метод расчета					
	λ	ε	ω	σ ^э в кг/см ²	$\frac{v_0}{h}$	$\frac{\sigma m}{\text{в кг/см}^2}$	$\frac{m}{h}$	$\frac{\sigma^2}{\sigma m}$	%	$\frac{v_0^3}{v_0 m}$	%	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
III-1	130	1	0,352	1237	0,406	1330	0,3	0,931	-6,9	1,35	+35	
III-2	124,6	1,92	0,405	1236	0,465	1140	0,431	1,082	+8,2	1,079	+7,9	
III-3	114,8	0,99	0,413	1472	0,263	1420	0,2	1,037	+3,7	1,315	+31,5	
III-4	55,5	0	0,925	2755	0,101	2585	0	1,065	+6,5	—	—	
III-5	57,8	0	0,808	2730	0,304	2585	0	1,055	+5,5	—	—	
III-6	72,2	2	0,645	1350	0,202	—	—	—	—	—	—	
III-7	127,4	+0,84/-1,68	0,225	2000	—	—	—	—	—	—	—	
III-8	117	+0,99/-1,98	0,231	1805	—	—	—	—	—	—	—	
III-9	103	+1,49/-1,49	0,28	2070	—	—	—	—	—	—	—	
III-10	89,6	+1/-1	0,31	2200	—	—	—	—	—	—	—	
III-11	75,2	1	∞	1235	0,167	1185	0,14	1,042	+4,2	1,19	+19	
III-12	75,2	2	∞	963	0,188	900	0,2	1,068	+6,8	0,94	-6	
III-13	61,8	0,254	∞	1835	—	1920	0,054	0,955	-4,5	—	—	
IV-1	157,5	0	0,0477/0,0366	1840	0,13	—	—	—	—	—	—	
IV-2	111	0/6	0,05/0,16	1325	—	—	—	—	—	—	—	
IV-3	78	0	0,12/0,114	1990	—	—	—	—	—	—	—	
IV-4	78	0/3	0,12/0,114	1885	—	—	—	—	—	—	—	
IV-5	192,5	0/6	0,0571/0,0442	1221	0,265	—	—	—	—	—	—	
IV-6	156	0	0,0508/0,18	1625	—	—	—	—	—	—	—	
IV-7	95	0/6	0,143/0,146	1223	—	—	—	—	—	—	—	
IV-8	95	0/3	0,143/0,146	1680	—	—	—	—	—	—	—	
V-1	91,5	0/0,916	0,0266/0,0419	3020	—	—	—	—	—	—	—	
V-2	64,6	0/2,3	0,0239/0,203	2250	—	—	—	—	—	—	—	
V-3	72	0/1,53	0,0309/0,0509	3040	—	—	—	—	—	—	—	
V-4	58	0	0,0244/0,226	2940	—	—	—	—	—	—	—	
V-5	36	0/0,61	0,0565/0,181	2810	—	—	—	—	—	—	—	
V-6	36	0/3,06	0,0565/0,181	2280	—	—	—	—	—	—	—	

Как видно из табл. 5, опытные критические нагрузки оказались, как правило, до 10% выше теоретических.

Обычно применяемый метод расчета внецентренно сжатых упруго защемленных стержней, основанный на определении коэффициентов расчетных длин μ из расчета на устойчивость упругих стержней, не соответствует физическому смыслу и приводит к количественным погрешностям в определении несущей способности.

На рис. 17 показаны зависимости «напряжение—прогиб», построенные для некоторых из испытанных стержней I серии. Испытания показали, что собственная жесткость опорных устройств не оказывала влияния на величины критических сил и прогибов одинаковых стержней. Отклонения, имеющие здесь место, можно объяснить тем, что абсолютно точно повторить эксперимент практически очень трудно: всегда имеются какие-либо причины, свойственные только данному эксперименту и оказывающие определенное влияние на конечные результаты.

Принятые в экспериментах упругие защемления дали повышение несущей способности по сравнению с шарнирно опертыми стержнями в 1,6—1,8 раза.

На рис. 18—20 показаны результаты испытаний упруго защемленного стержня № II-1. Схема расположения приборов показана на рис. 14.

На рис. 18 приведены изменения относительных деформаций крайних волокон с ростом внешней нагрузки. Изменение этих же величин вдоль длины стержня показано на рис. 19. На этом рисунке величины деформаций крайних волокон по длине стержня, соответствующие определенным этапам нагружения, обозначены цифрами 1, 2, 3...

Наибольший интерес представляют пятый и шестой этапы. Как видно из рис. 19, в момент потери устойчивости деформации в средней части стержня интенсивно возрастают, в то время как в концевых участках наблюдается уменьшение деформаций, сопровождающееся разгрузкой. В крайних участках в критическом состоянии равновесия происходит изменение направления деформаций. Приращение относительных деформаций при переходе через критическое состояние (между этапами нагружения 5 и 6) на рис. 19 заштрихованы. Все эти величины деформаций (за исключением точек *A* и *B*, где невозможно было поставить датчики) были определены непосредственным измерением до потери устойчивости и после потери ее. В точках *A* и *B* определение приращения деформаций производилось по показаниям датчиков 20, 21 и 22, 23 путем составления условий равновесия соответственно для верхнего и нижнего узлов системы стержень — ригель.

На основании эпюры приращений деформаций при переходе через критическое состояние можно судить о величине фактиче-

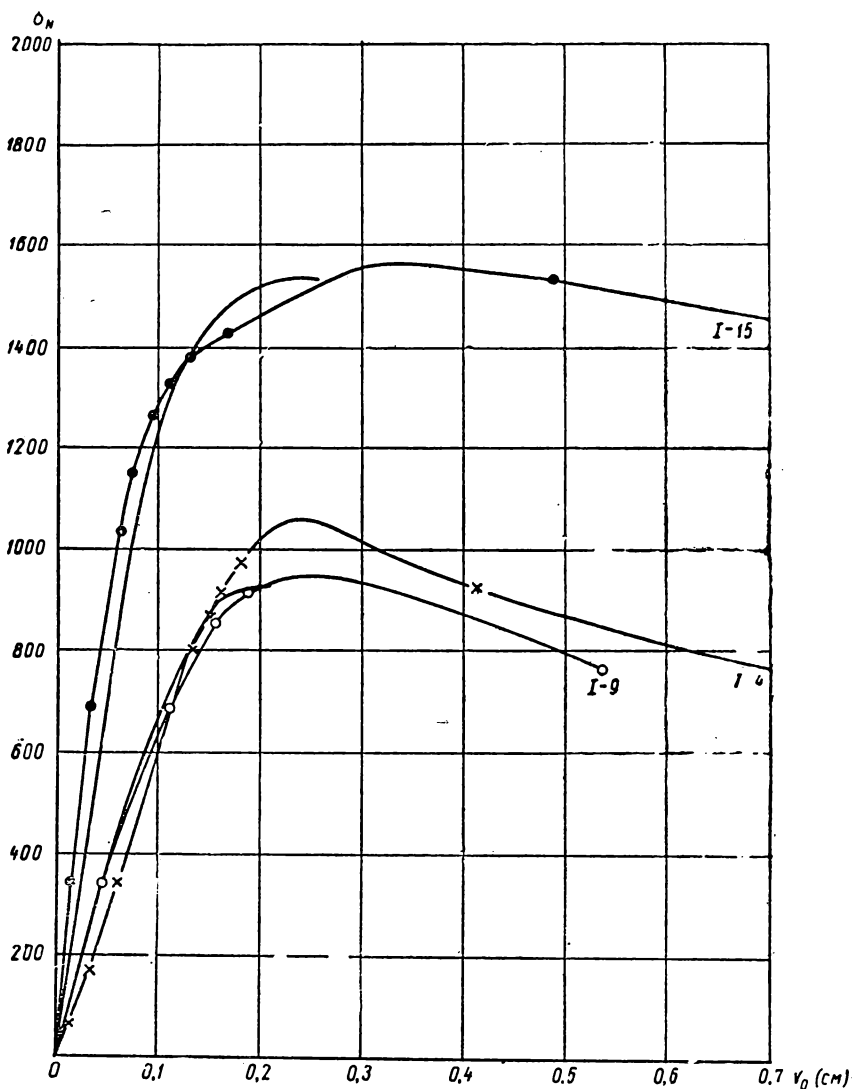


Рис. 17. Характер опытных и теоретических диаграмм прогибов для стержней № I-4, I-9, I-15

Условные обозначения: —●—●— для упруго зашеченных; —○—○— для шарнирно опертых на опорах; —×—×— для шарнирно опертых заостренных; ———— теоретическая кривая

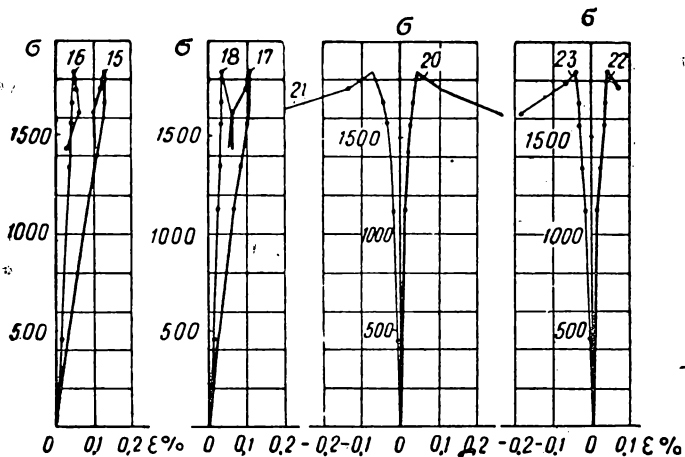
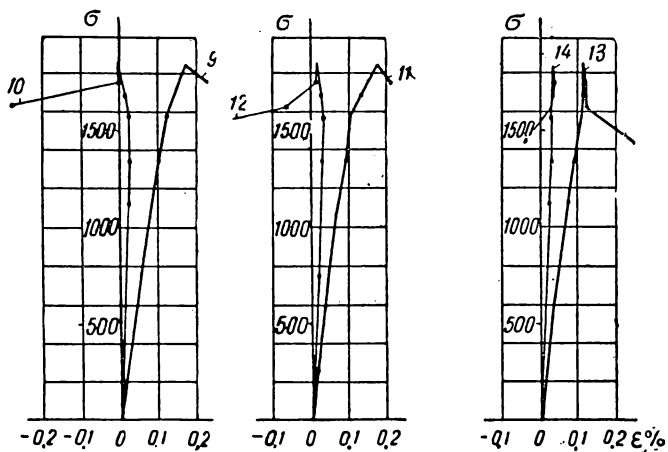
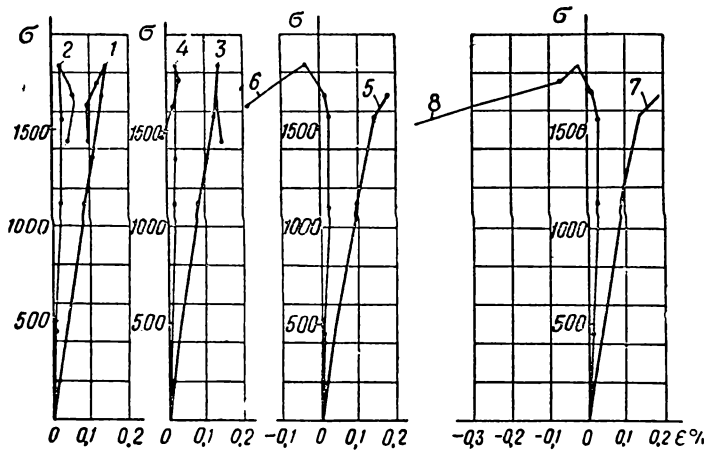


Рис. 18. Распределение деформаций в крайних фибрах

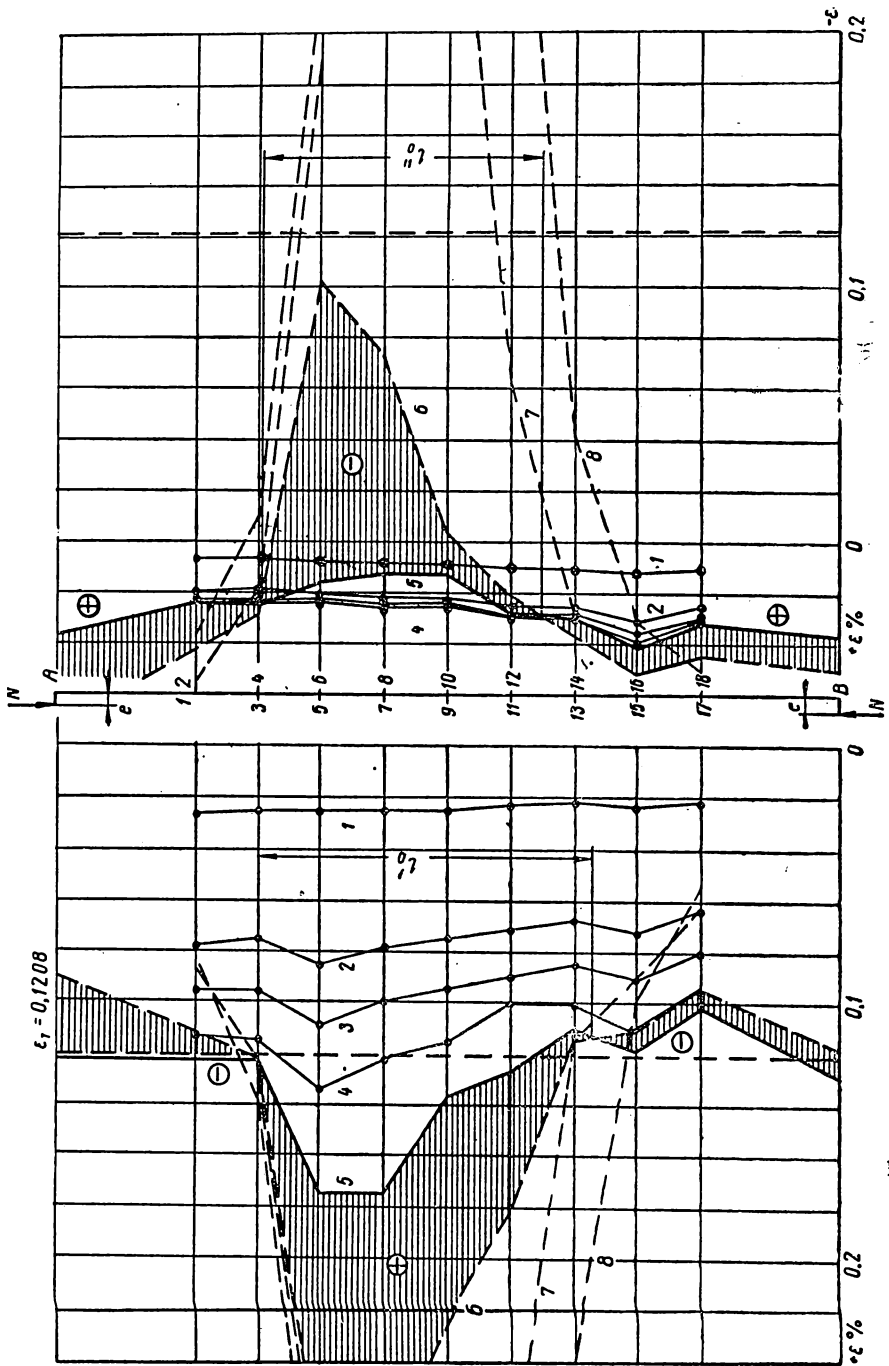


Рис. 19. Распределение деформаций в крайних фибрах вдоль длины стержня

ской свободной длины стержня; в данном случае это будет расстояние между нулевыми точками эпюры приращений деформаций. Из рис. 19, устанавливаем

$$l_0 = \frac{l'_0 + l''_0}{2} = \frac{13,2 + 11}{2} = 12,1 \text{ см.}$$

Коэффициент приведения свободной длины

$$\mu_0 = \frac{12,1}{31} = 0,39.$$

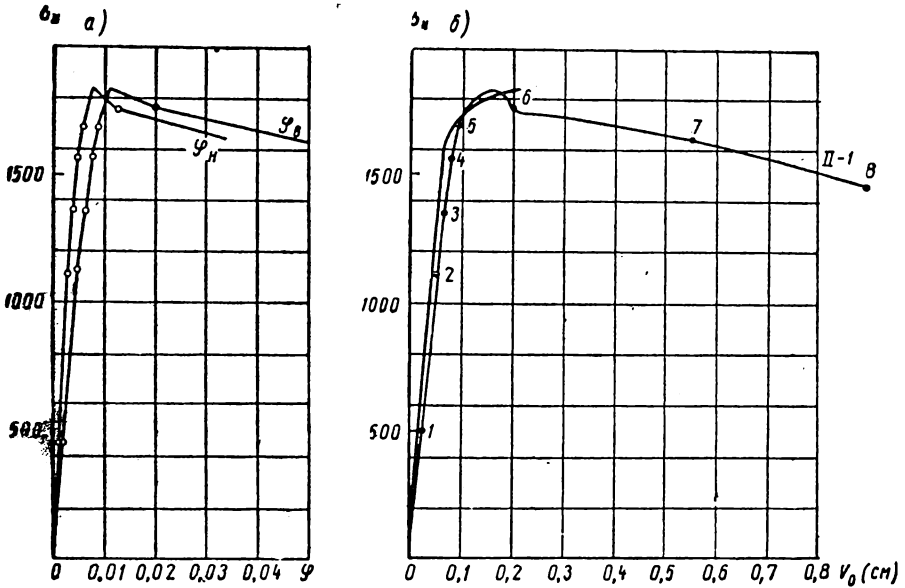


Рис. 20. Графики зависимостей углов поворота концевых сечений (а) и прогибов среднего сечения (б) от величины внешней нагрузки

Условные обозначения: ————— теоретическая кривая; -●-●- экспериментальная кривая

Этот метод определения коэффициента μ_0 в известной степени является условным, так как фактическая свободная длина определяется из эпюры бесконечно малых дополнительных приращений. Здесь же мы имеем дело с конечными деформациями. Однако физическая сторона явления вскрывается здесь достаточно четко.

Сделаем для этого стержня теоретический расчет. В упругой стадии пользуемся формулами, взятыми из работы [1].

Так, например, для $\sigma_N = 1000 \text{ кг/см}^2$ имеем

$$\nu = 1,24; \quad \psi_\nu = 0,576; \quad \frac{m_{0n}}{e} = 0,658; \quad \frac{m_0}{e} = 0,809.$$

Прогиб стержня при этом будет равен

$$v_0 = (0,809 - 0,658) 0,237 = 0,0358 \text{ см.}$$

Подобным образом вычислены в пределах упругих деформаций все точки теоретической кривой, показанной на рис. 20,б.

В упруго-пластической стадии были использованы формулы (2.12) — (2.14). Для рассматриваемого стержня условие равновесия (2.12) при односторонней текучести имеет вид

$$0,748 - 6\delta_0 \left(\cos T + 1177 \frac{T}{\sigma_N} \sin T \right) = 0,$$

где

$$T = \frac{8,15}{(\xi - \delta_0)} \sqrt{\frac{\psi}{\delta_0}}.$$

Например, для $\sigma_N = 1800 \text{ кг/см}^2$ величины, входящие в эти формулы, будут

$$\xi = 0,17 \text{ и } \psi = 7,55/10^6.$$

При $\delta_0 = 0,114$ удовлетворяется условие равновесия. Прогиб будет равен

$$\frac{v_0}{h} = \delta_0 (1 - \cos T) = 0,114 (1 - 0,376) = 0,0711$$

или

$$v_0 = 0,0711 \cdot 1,9 = 0,135 \text{ см.}$$

Критическое состояние равновесия характеризуется следующими величинами:

$$\sigma_N = 1830 \text{ кг/см}^2; \quad \delta_0 = 0,12; \quad v_0 = 0,209 \text{ см.}$$

Глубина упругого ядра в среднем сечении при этом равна

$$a_0 = \frac{3}{2} 1,9 - \frac{3 \cdot 0,228}{0,318} = 0,7 \text{ см.}$$

Момент инерции упругого ядра в среднем сечении

$$J_0 = \frac{2,35 \cdot 0,7^3}{12} = 0,067 \text{ см}^4.$$

Для определения свободной длины стержня в критическом состоянии воспользуемся формулой (5.43), которая для рассматриваемого стержня получит вид

$$\frac{0,778}{\mu_0} \operatorname{tg} \frac{0,352}{\mu_0} (1 - \mu_0) - 1 = 0,$$

откуда $\mu_0 = 0,417$ и $l_0 = 12,9 \text{ см.}$

Расстояние между точками перегиба изогнутой оси стержня для основной формы деформирования определяется из (2.5). В рассматриваемом случае получим

$$l_p = 3,14 \sqrt{\frac{0,228 \cdot 10^6}{12,15} (0,304 - 0,228)} = 32,5 \text{ см.}$$

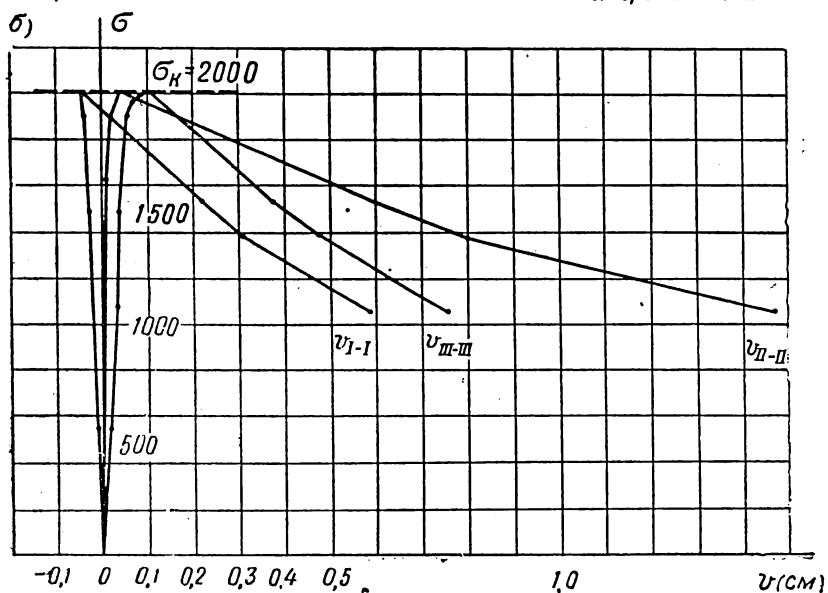
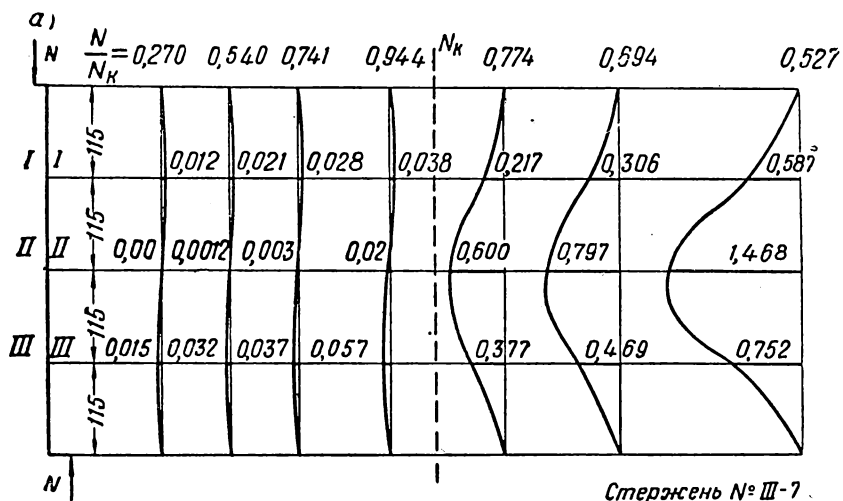


Рис. 21

а — характер деформирования и форма потери устойчивости; б — зависимость прогибов сечений стержня от величины внешней нагрузки

На рис. 21—23 показаны результаты испытаний упруго заземленного стержня, сжатого с эксцентриситетами, направленными в разные стороны (схему испытания и размещение приборов см. на рис. 15). С самого начала нагружения изогнутая

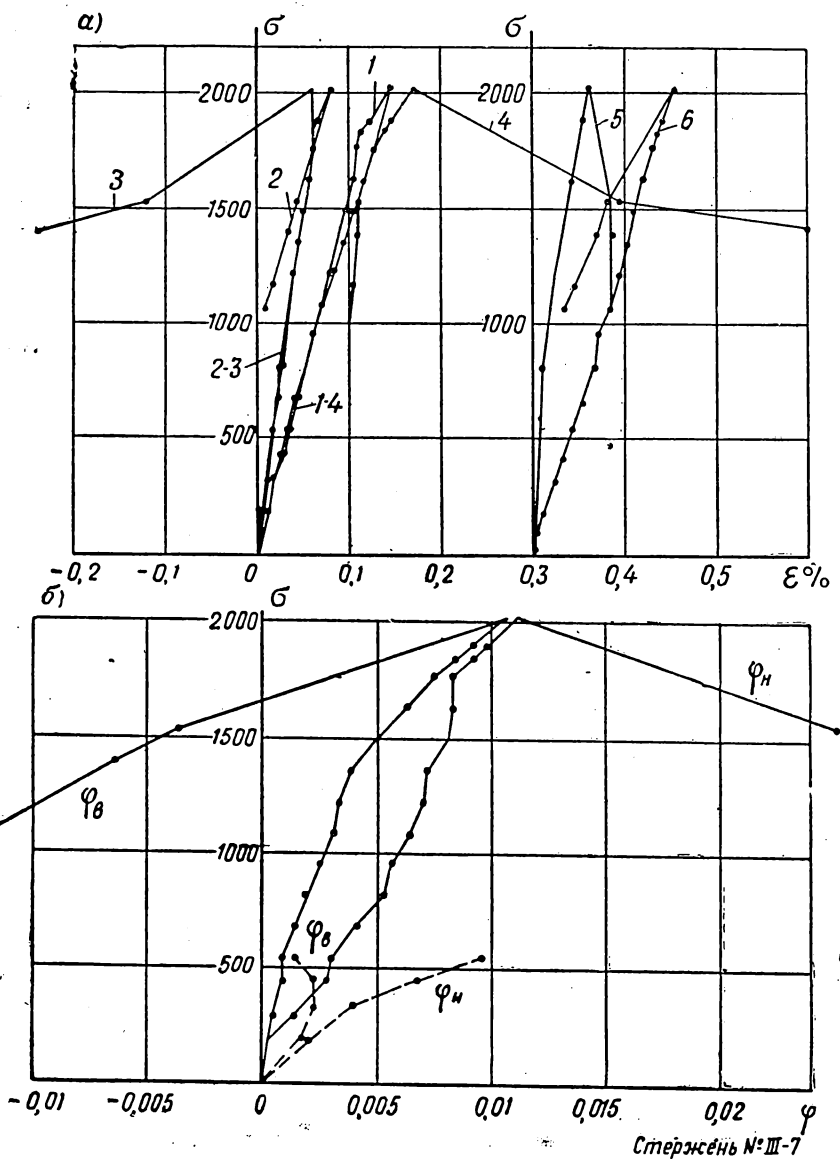


Рис. 22

а — распределение деформаций в крайних фибрах; б — зависимость углов поворота концевых сечений от внешней нагрузки

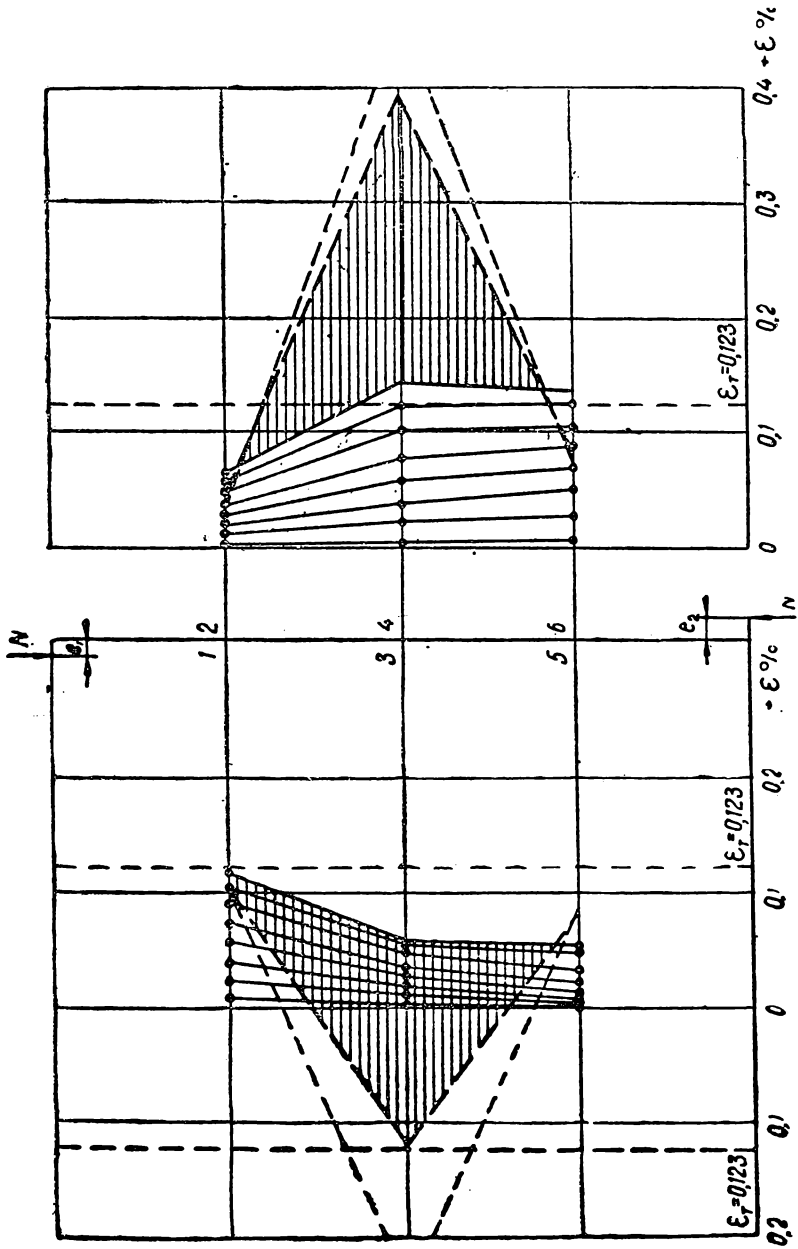


Рис. 23. Характер распределения деформаций в крайних фибрах вдоль длины стержня

ось стержня имела S-образный вид с одной нулевой точкой, что видно по графикам перемещений сечений (рис. 21, а), построенным по отсчетам прогибомеров. В критическом состоянии S-образная форма деформирования исчезала, и потеря устойчивости происходила в одну сторону с появлением новой формы изгиба. Нужно отметить, что выпучивание стержней в критическом состоянии происходило в ту сторону, с которой при S-образном изгибе (до критического состояния) выгиб был больше.

Новая форма изгиба в момент потери устойчивости имела на длине стержня две точки перегиба, расстояние между которыми является свободной длиной рассматриваемого стержня. О величине свободной длины приближенно можно судить по графикам изменения вдоль длины стержня деформаций в крайних волокнах (рис. 23).

В момент потери устойчивости направление работы одной части приборов, размещенных на стержне, изменялось на противоположное: прогибомер в сечении I—I; тензометры № 1, 2, 6; стрелка, измеряющая угол поворота верхней опоры φ_v (см. рис. 21, б; 22, а, б). Положительное направление углов поворота φ_v и φ_n показано на рис. 15 стрелками.

Все это указывает на то, что в момент потери устойчивости происходит качественное изменение формы деформирования.

Такие же выводы, полученные экспериментальным путем, имеются в работах [3, 4].

Детальной теоретической проверке результаты экспериментов этих стержней не подвергались.

На рис. 24 показана форма потери устойчивости средней стойки (стержень № IV-1) фермы Ф-1, испытанной на центральное сжатие. Изогнутая ось имеет ярко выраженные точки перегиба, образованные под действием реактивных моментов в узлах. На рис. 25 приведены графики изменения деформаций в

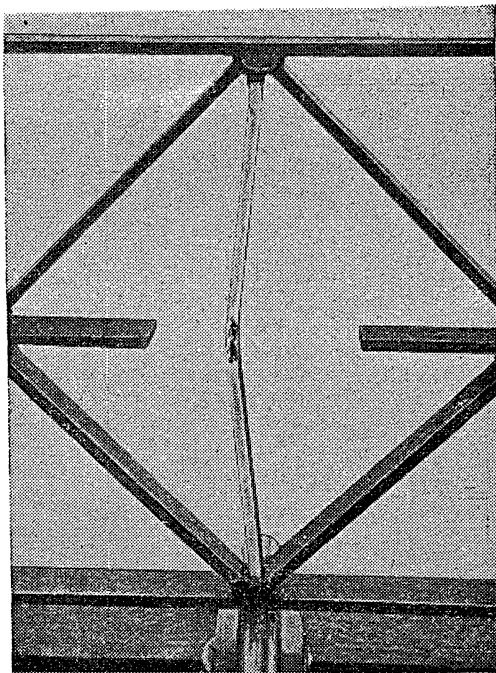


Рис. 24. Форма потери устойчивости стойки при центральном сжатии

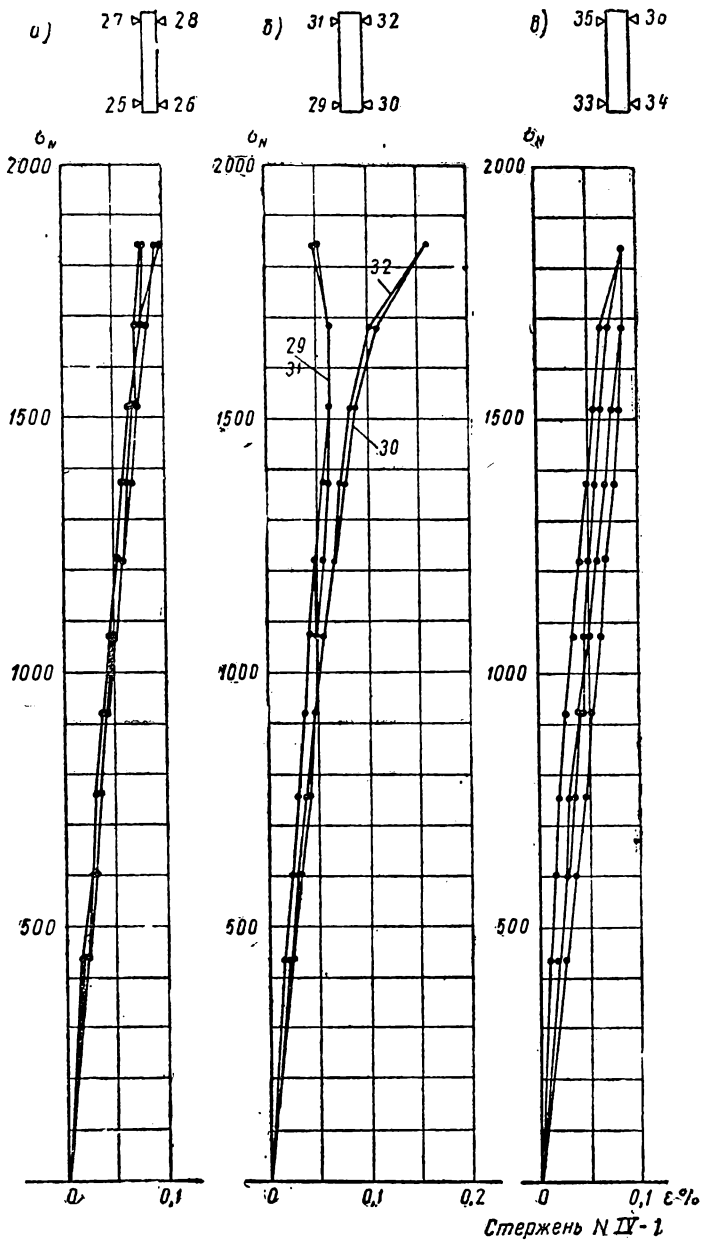


Рис. 25. Зависимость деформаций в крайних фибрах стойки от внешней нагрузки

крайних волокон в трех сечениях по длине стержня (на рис. 25, б — в среднем сечении, на рис. 25, а и в — в четвертях длины). Как видно из рисунков, центральность приложения нагрузки в начале нагружения была вполне удовлетворительной.

На рис. 26 показана форма потери устойчивости средней стойки (стержень № IV-5) фермы Ф-2, испытанной в системе фермы на внецентренное сжатие. Эксцентricитет приложения нагрузки в нижнем узле составлял 2 см. Изогнутая ось после потери устойчивости также имеет ярко выраженные точки перегиба и по своему характеру весьма близка к форме изгиба стержня № IV-1.

На рис. 27 приведены законы распределения условных напряжений (вычисленных по деформациям) в пяти сечениях по длине стойки. Из этих графиков хорошо видно, что эксцентricитет приложения силы в верхней части стержня имеет одно направление, в нижней — другое. Вблизи сечения 2—2 имеется нулевая точка эпюры моментов. По этим деформациям вычислены эксцентricитеты приложения сжимающей силы в каждом сечении. Закон изменения эксцентricитетов вдоль длины стержня с ростом сжимающей силы приведен на рис. 28.

Из рис. 28 видно, что в процессе нагружения (до потери устойчивости) в пределах длины стержня имелась только одна точка перегиба эпюры моментов ($m = \frac{M}{N}$). В момент потери устойчивости благодаря действию реактивных моментов в двух узлах фермы при неизменной сжимающей силе появляются две точки перегиба эпюры дополнительных моментов. Рас-

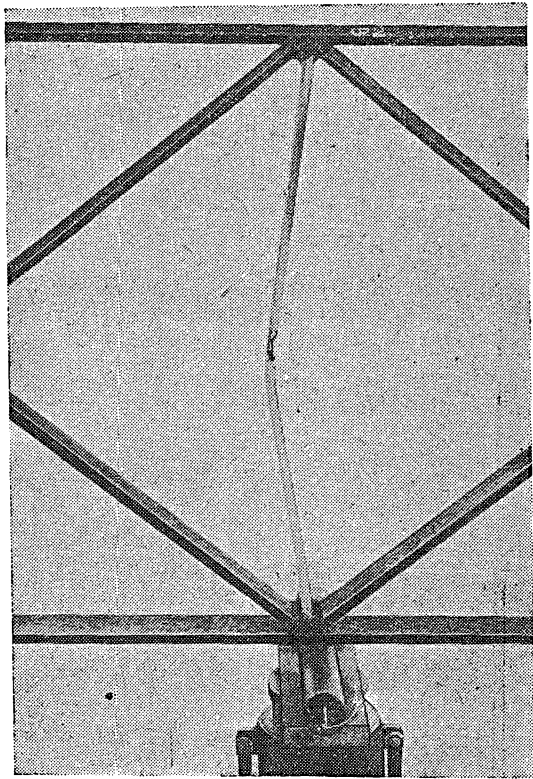


Рис. 26. Форма потери устойчивости стойки при внецентренном приложении нагрузки

стояние между ними является свободной длиной стержня. В этом испытании не удалось экспериментально определить свободную длину, так как отсчеты в закритической стадии не снимались. На рис. 29 показан характер деформации средней стойки (стержень № V-3) фермы Ф-3 после испытания.

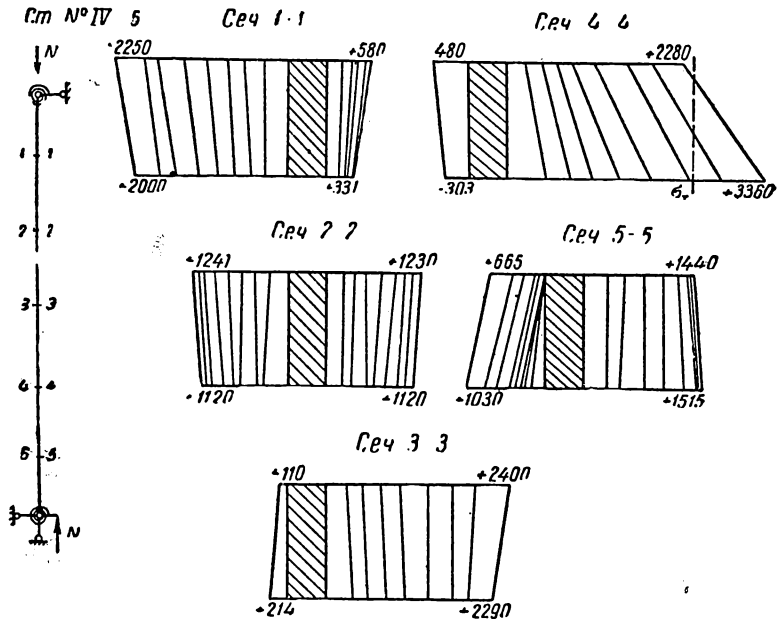


Рис. 27. Распределение деформаций в крайних фибрах

На рис. 30 приведены законы распределения условных напряжений в пяти сечениях по длине стойки в зависимости от роста нагрузки. Как видно из этого рисунка, в сечениях 1—1 и 2—2 кривизна стержня имеет одно направление, а в сечениях 3—3, 4—4 и 5—5 — противоположное. Это является результатом внецентренности приложения нагрузки в нижнем узле.

Детальной теоретической проверке по предлагаемому методу результаты экспериментов стержней, входящих в систему ферм, не подвергались.

11. ОБЩАЯ ФОРМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ. ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Форма деформаций конструкций при нагрузках, меньших критических (основная форма деформирования), определяется, с одной стороны, характером приложения и величиной внешней нагрузки, которая с самого начала нагружения дает определен-

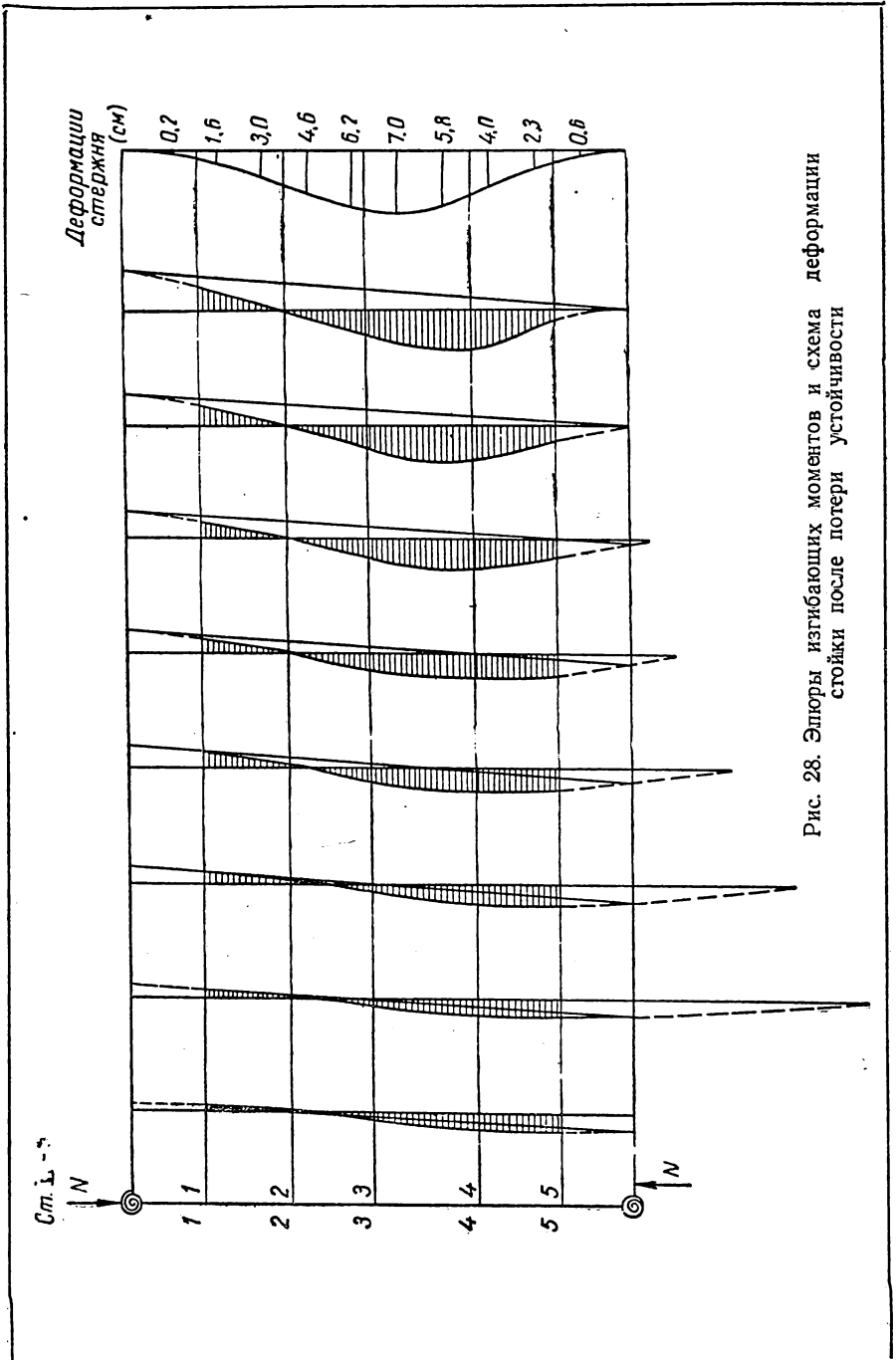


Рис. 28. Эпюры изгибающих моментов и схема деформации стойки после потери устойчивости

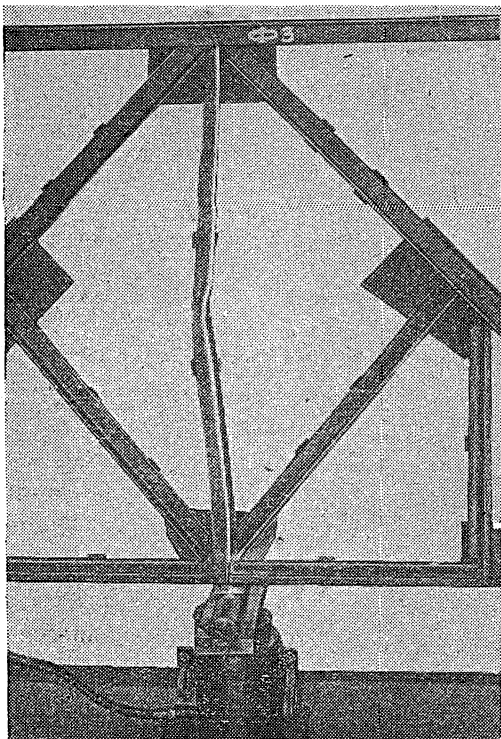
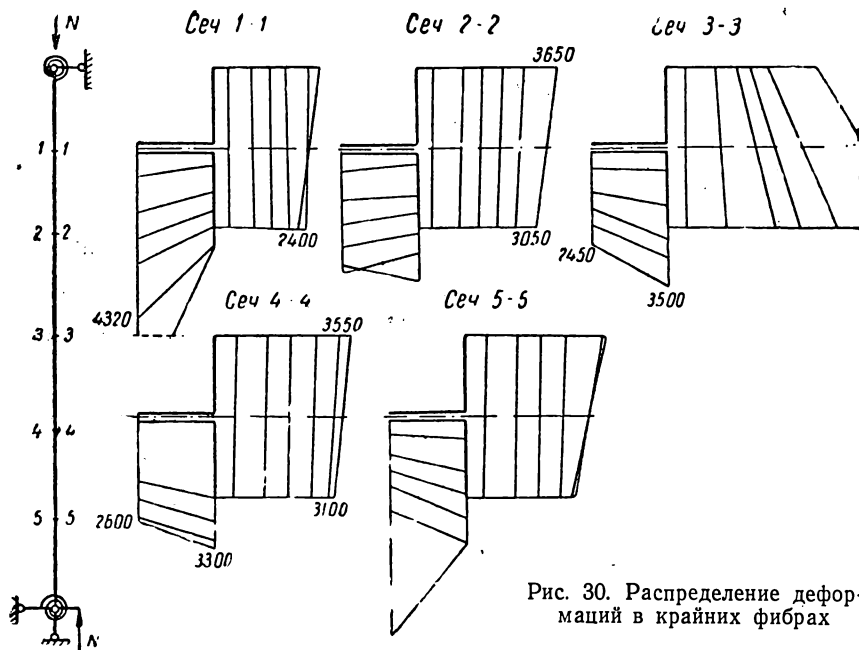


Рис. 29. Форма потери устойчивости стойки



ную направленность деформирования, а с другой, — характеристиками первых расчетных сечений.

Так, например, при эксцентрицитетах приложения нагрузки в одну сторону формами изогнутых осей стержней являются отрезки синусоид с точками перегиба, как правило, вне их длины; при действии сжимающих сил, приложенных с эксцентрицитетами в разные стороны, получим S-образные формы деформирования с одной точкой перегиба в пределах длины каждого стержня и т. д. С постепенным ростом нагрузки первоначальная форма деформации, качественно не изменяясь, претерпевает определенные количественные изменения: расстояние между точками перегиба постепенно уменьшается, величины деформаций увеличиваются. Этот процесс происходит как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях. В последнем случае он протекает более интенсивно. Подход к критическому состоянию равновесия стержня характеризуется определенной формой изгиба и определенными зонами развития пластических деформаций, положение и размеры которых зависят от характера и величины внешней нагрузки.

В критическом состоянии равновесия стержней и стержневых систем вследствие их потери устойчивости происходит качественное изменение характера деформирования, выражающееся в появлении новых точек перегиба эпюры дополнительных изгибающих моментов (приращений эпюры моментов). Это явление, по существу, имеет место во всех случаях потери устойчивости внецентренно сжатых стержней. Наиболее ярко это наблюдается в стержнях, сжатых с эксцентрицитетами в разные стороны. В этом случае S-образная форма деформирования в момент потери устойчивости резко изменяется, процесс деформации при потере устойчивости происходит очень быстро и часто по виду предварительных деформаций (до потери устойчивости) трудно предположить, какую именно форму примет стержень в момент потери устойчивости. Нужно отметить, что выпучивание стержней в критических состояниях происходило в ту сторону, с которой при S-образном изгибе (до критического состояния) выгиб был больше. Следовательно, в момент выпучивания меньшая полуволна исчезает и стержень, выпучиваясь в одну сторону, получает новые точки перегиба изогнутой оси. Очевидно, что вид эпюры моментов вследствие наличия начальных эксцентрицитов играет существенную роль в распределении областей меньшей и большей полуволн. Кроме того, величины эксцентрицитов во всех случаях оказывают существенное влияние на развитие зон пластических деформаций в стержне, чем определяется жесткость его вторых расчетных сечений в момент потери устойчивости. Таким образом, появление новых точек перегиба в момент потери устойчивости определяется, с одной стороны, величинами упругих защемлений концов в критическом состоянии равновесия, а с другой, — характеристиками вторых расчетных сечений.

Следовательно, наличие точек перегиба изогнутых осей стержней, находящихся в стадии упруго-пластических деформаций, при значениях сжимающих сил, близких к критическим (но несколько меньших их), ни в какой мере не определяет свободные длины упруго закрепленных стержней при их потере устойчивости.

Экспериментально это явление выявляется тем, что в момент потери устойчивости целого ряда испытанных стержней происходило резкое изменение направления на противоположное работы одной части приборов, размещенных на стержне; при этом другая часть приборов работала в прежнем направлении. Это указывает на то, что определенные участки стержня при потере устойчивости получают деформации другого знака, что свидетельствует об их разгрузке. Следовательно, в критическом состоянии равновесия происходит перераспределение как напряжений в ряде сечений по длине стержня, так и жесткости по длине стержня, определяющей его отпорность. Эта общая закономерность, свойственная всем упруго заземленным стержням, проявляется в результате действия реактивных моментов, возникающих на концах стержня.

Процесс качественного перехода одной формы деформаций стержня в другую в критическом состоянии равновесия хорошо выявляется при анализе изменения расстояний между точками перегиба изогнутой оси до потери устойчивости и в момент потери устойчивости. К сожалению, непосредственно измерять эту величину в процессе испытания не всегда возможно; о ней можно косвенно судить по величинам краевых деформаций, характеризующих эпюру моментов по длине стержня. Даже при таком анализе расстояний между точками перегиба формы эпюры моментов все же можно на основании экспериментальных данных сделать вывод о том, что в критическом состоянии равновесия непрерывность изменения расстояний между точками перегиба нарушается: здесь происходит скачок от одной величины расстояний между точками перегиба к другой.

ВЫВОДЫ

В результате проведенного теоретического и экспериментального исследования можно сделать следующие основные выводы.

1. Проведенные экспериментальные исследования внецентренно сжатых стержней с упругими защемлениями концов показали, что приближенный метод расчета хорошо описывает физическую сторону работы стержней и несущая способность таким расчетом оценивается достаточно точно. Во всех случаях опытная критическая нагрузка оказалась, как правило, до 10% выше теоретической.

2. Обычно применяемый метод расчета упруго заземленных внецентренно сжатых стержней в упруго-пластической стадии,

основанный на определении расчетных длин μ из расчета на устойчивость упругих стержней, не соответствуя физическому смыслу, приводит, как правило, к занижению несущей способности в среднем до 20—30%. Предлагаемый метод расчета позволяет в ряде случаев существенно повысить расчетные критические напряжения внецентренно сжатых упруго защемленных стержней по сравнению с вычисленными на основе рекомендации НИТУ 121-55, что может привести к экономии материала.

3. Формы изгиба внецентренно сжатых стержней с упругими защемлениями концов под действием внешних сжимающих сил определяются величинами этих сжимающих сил и характеристиками первых расчетных сечений; формы потери устойчивости таких стержней в их критических состояниях равновесия определяются величинами жесткостей упругих защемлений концов и характеристиками вторых расчетных сечений.

4. В критических состояниях равновесия внецентренно сжатых и сжато-изогнутых стержней происходит качественное изменение характера деформирования. Следовательно, наличие точек перегиба изогнутых осей стержней, находящихся в стадии упруго-пластических деформаций, при значениях сжимающих сил, близких к критическим (но несколько меньших их), ни в какой мере не определяет свободные длины упруго защемленных стержней при их потере устойчивости.

5. Понятия свободных длин упруго защемленных стержней, хорошо известные из теории устойчивости упругих систем, имеют тот же физический смысл и для упруго защемленных стержней, теряющих устойчивость в упруго-пластической стадии. При этом, чем больше развитие пластических деформаций в стержнях, тем меньше их свободные длины при одних и тех же величинах относительных жесткостей упругих защемлений концов. В ряде случаев величины фактических свободных длин упруго защемленных стержней, теряющих устойчивость в упруго-пластической стадии, могут быть меньшими 0,5 l .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельский Г. Е., Устойчивость сжатых стальных стержней с упругими защемлениями концов. Научное сообщение ЦНИИСКа, вып. 10, Госстройиздат, 1959.

2. Геммерлинг А. В., Несущая способность стержневых стальных конструкций, Госстройиздат, 1958.

3. Никифоров С. Н., Устойчивость сжатых стержней сварных ферм, Госстройиздат, 1938.

4. Поликарпов П. Н., Предельная нагрузка, форма изгиба и свободная длина сжатых раскосов по испытаниям стальной фермы пролетом 8 м. Труды МИИТа, вып. 91, 1957.

5. Соболев Ю. В., Исследование устойчивости внецентренно сжатых стальных стержней при податливом закреплении торцов. Известия высших учебных заведений № 9, 1958.

6. Jezek K., Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Wien, 1937.

Канд. техн. наук В. И. ТРОФИМОВ

ОЦЕНКА СНИЖЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАЛЬНЫХ ФЕРМ ЗА СЧЕТ ИСКРИВЛЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Отдельные элементы стальных ферм при их транспортировании и монтаже часто получают искривления, значительно превосходящие установленные допуски. Оценить несущую способность таких систем в ряде случаев представляет практический интерес.

Исследованиями, произведенными С. Н. Никифоровым, было показано, что величина стрелки искривления между точками перегиба упругой линии, равная $1/1\ 000\ l$, не снижает нормативной прочности конструкции [1]. Впоследствии А. В. Геммерлинг [2], учитывая упруго-пластическую работу материала, подтвердил эту величину допуска.

Основываясь на [1], в НиТУ записана допустимая стрелка искривления, равная $1/1\ 000\ l$. Однако в сварных фермах точки перегиба упругой линии на искривленном элементе не совпадают с узлами, а начальное искривление, отнесенное к участку длины между точками перегиба, оказывается значительно меньшим. Все это способствует существенному повышению несущей способности искривленного элемента с жесткими узлами по сравнению с несущей способностью столь же искривленного элемента, но с шарнирно опертыми концами.

Ниже приводится приближенный способ определения несущей способности фермы при учете жесткости узловых сопряжений. Наиболее напряженный элемент, определяющий несущую способность системы, принимается искривленным в плоскости фермы. Развитие пластических деформаций учитывается только в этом элементе.

При решении поставленной задачи использовалась идея «упругого ядра». Как показано в работе А. В. Геммерлинга [2], предельная нагрузка на сжато-изогнутый стержень может быть получена из условия устойчивости абсолютно прямого стержня,

имеющего сечение, равное упругому ядру сжато-изогнутого стержня.

Основываясь на вышесказанном, предельное состояние стержневой системы, обусловленное несущей способностью искривленного элемента, можно записать следующим равенством:

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{кр}}, \quad (1)$$

где $P_{\text{пр}}$ — предельная сила для искривленного упруго защемленного стержня;

$P_{\text{кр}}$ — критическая сила для системы, подсчитанная из условия устойчивости с использованием упругих ядер.

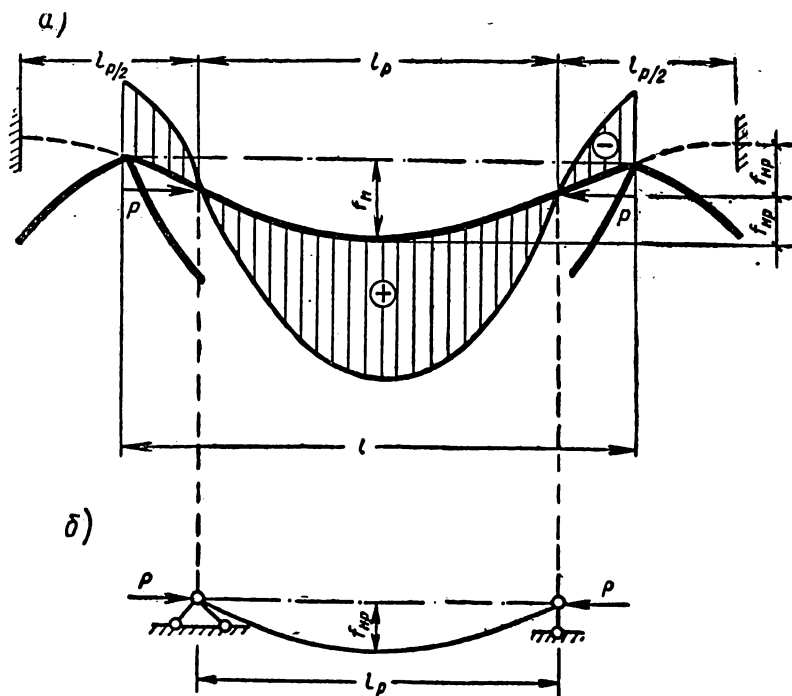


Рис. 1. Характер искривления пояса на длине панели
 а — эпюра моментов; б — расчетная схема пояса

Равенство (1) положено в основу предлагаемого приближенного расчета.

Рассмотрим характер искривления пояса при ударе и развитие этих искривлений при последующем действии эксплуатационной нагрузки. Если приложить в средней части панели пояса сосредоточенную поперечную нагрузку (ударное воздействие), то ввиду неразрезности пояса его ось будет искривляться с двумя точками перегиба.

Заметим, что такие стржни работают как некоторая часть более длинного стержня с защемленными концами (рис. 1, а); От действия в поясе продольных усилий на искривленной панели образуется двузначная эпюра изгибающих моментов, повторяющая в определенном масштабе очертание оси панели (рис. 1, а).

Как показали эксперименты, при возрастании продольной силы ординаты эпюры моментов увеличиваются, но положение нулевых точек не изменяется. При образовании пластических зон точки перегиба упругой линии, если и сближаются, то на весьма малую величину. Этот экспериментальный результат объясняется тем, что на форму первоначального искривления (от поперечного удара) уже оказывали влияние развивавшиеся при этом пластические деформации.

Учитывая практически неизменное положение точек перегиба упругой линии, представляется возможным предельную нагрузку $P_{пр}$ определить из рассмотрения части длины панели, заключенной между этими точками, т. е. из рассмотрения шарнирно опертого искривленного стержня.

Определение предельного состояния конструкции производится методом последовательных приближений. Можно задаться или положением точек перегиба упругой линии, или сечением упругого ядра искривленного элемента. Приведем последовательность второго решения: задаемся величиной момента инерции упругого ядра I , заменив искривленный элемент фермы прямым, но с сечением, равным упругому ядру, решаем задачу устойчивости в упругой постановке. При этом предполагается, что теряет устойчивость лишь рассматриваемый стержень, остальные же элементы фермы выполняют роль поддерживающей системы.

Учитывая, что основную поддерживающую роль выполняют элементы, непосредственно примыкающие к теряющей устойчивость панели, рассматриваются жесткими лишь два узла (по концам изогнутой панели пояса); остальные принимаются шарнирными. Подобное допущение сильно упрощает задачу и идет в запас надежности конструкции.

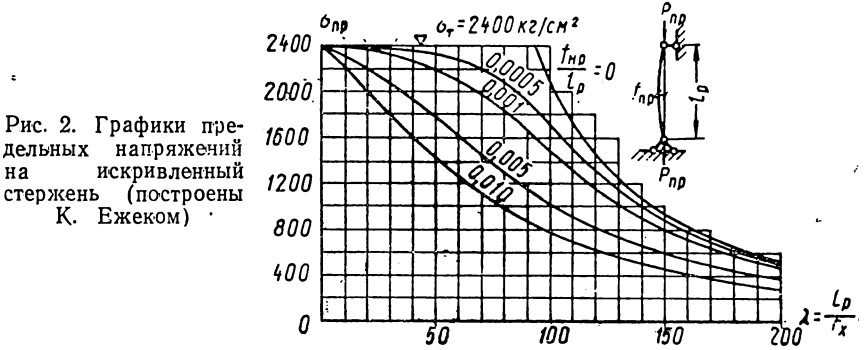
Определив критическую нагрузку для данного элемента фермы $P_{кр}$ и его расчетную длину l_p , переходим к решению второй части задачи — определению предельной нагрузки для искривленной панели пояса $P_{пр}$.

Для этой цели выделяем из системы часть искривленного пояса, равную расчетной длине l_p . Закрепив этот стержень по концам шарнирами (рис. 1, б), определяем для него предельную нагрузку $P_{пр}$.

При определении $P_{пр}$ рассмотрим наихудший случай искривления, когда продольная сила в средней части длины панели смещается в сторону перьев уголков. Как известно, при данном условии коэффициент влияния формы поперечного сечения η для парных уголков равен единице. Это условие позволяет для

определения $P_{пр}$ воспользоваться графиком К. Ежека [3], повторенным на рис. 2. Если найденная таким образом $P_{пр}$ окажется равной $P_{кр}$, то принятое упругое ядро соответствует тому, которое будет в предельном состоянии конструкции.

В первом решении обычно это равенство не выполняется, тогда приходится задаваться иными размерами упругого ядра и снова определять $P_{кр}$ и $P_{пр}$. Варьирование величины упругого ядра позволяет удовлетворить равенство (1).



Для наглядности приведем последовательность решения на конкретном примере.

Пусть требуется определить критическую нагрузку для верхнего пояса фермы сечением из двух уголков 80×8 мм. Длина панели $l_n = 200$ см. Длина раскосов $l_{рас} = 142$ см.

Одна панель искривлена в плоскости фермы на $1/300 l$, т. е. имеет стрелку начального искривления

$$f_n = \frac{200}{300} = 0,666 \text{ см.}$$

Геометрические характеристики уголка пояса: $J_n = 73,3 \text{ см}^4$,

$$F_n = 12,3 \text{ см}^2; \quad W_n^{min} = 12,8 \text{ см}^3, \quad r_x = 2,47 \text{ см.}$$

$$J_{рас} = 11,2 \text{ см}^4; \quad F_{рас} = 4,8 \text{ см}^2.$$

Решение задачи

1. Задаемся моментом инерции упругого ядра в искривленной панели пояса $J_y = 0,3; J_n = 0,3 \cdot 73,3 = 22 \text{ см}^4$.

Тогда погонная жесткость отдельных элементов:

$$i_1 (\text{прямых панелей пояса}) = \frac{J_n}{l_n} = \frac{73,3}{200} = 0,366 \text{ см}^3;$$

$$i_2 \text{ (искривленной панели пояса)} = \frac{J_{\text{я}}}{l_{\text{п}}} = \frac{22}{200} = 0,11 \text{ см}^3;$$

$$i_{\text{рас}} \text{ (раскос)} = \frac{J_{\text{рас}}}{l_{\text{рас}}} = \frac{11,2}{142} = 0,0788 \text{ см}^3.$$

2. Заменяв искривленный стержень прямым с моментом инерции поперечного сечения, решаем задачу устойчивости рамы. С целью упрощения решения будем считать, что раскосы присоединяются к растянутому поясу при помощи шар-

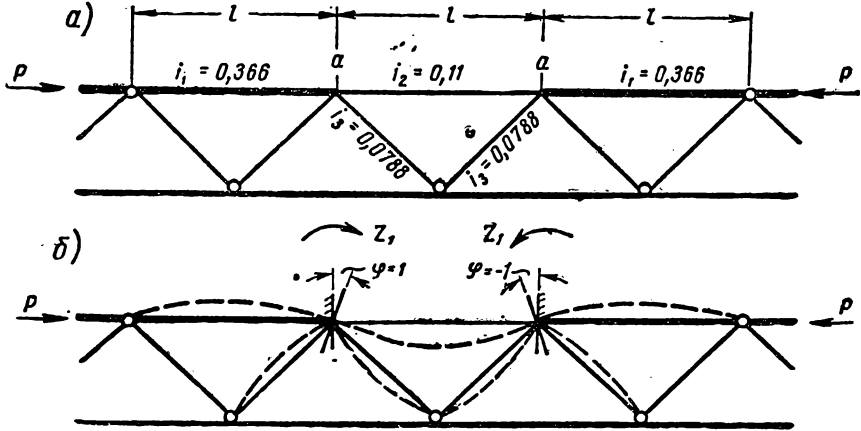


Рис. 3. Рассчитываемая на устойчивость часть нормы
а — расчетная схема; б — основная система метода перемещений

ниров, и введем еще шарниры в два узла верхнего пояса (рис. 3,а). Это упрощение расчетной схемы, как уже отмечалось, идет в запас устойчивости.

Значение сжимающей силы P условно примем во всех панелях пояса одинаковым. В раскосах не будем учитывать влияние продольных сил на их жесткость.

При данных предпосылках система окажется симметричной в геометрическом и силовом отношении. Основную систему метода деформаций получим, наложив на узлы, обозначенные буквой a , связи, препятствующие их повороту (рис. 3,б).

Используя прием групповых перемещений, определим значение реакции связи r_{11} при одновременном повороте узлов на единицу (навстречу друг другу):

$$r_{11} = 3i_1\varphi_1(v_1) + 4i_2\varphi_2(v_2) - 2i_3\varphi_3(v_3) + 6i_3, \quad (2)$$

где φ_1 , φ_2 и φ_3 — трансцендентные коэффициенты, определяемые по таблицам А. Ф. Смирнова [4] в зависимости от

$$v_1 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_1}} \quad \text{и} \quad v_2 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_2}};$$

i — погонная жесткость элемента.

Приравняв r_{II} нулю, получим уравнение устойчивости

$$\varphi_1(v_1) + 0,4\varphi_2(v_2) - 0,2\varphi_3(v_2) + 0,43 = 0; \quad (3)$$

В нашей задаче

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} = \sqrt{\frac{22}{73,3}} = 0,548.$$

Уравнение (3) удовлетворяется при $v_2 = 5,09$, откуда коэффициент приведения длины

$$\mu = \frac{3,14}{5,09} = 0,617.$$

Тогда

$$l_p = \mu l_n = 0,617 \cdot 200 = 123,4 \text{ см};$$

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ_y}{l_p^2} = \frac{2 \cdot 3,14^2 \cdot 2100000 \cdot 22}{123,4^2} = 59400 \text{ кг}.$$

3. Подсчитываем стрелку искривления $f_{нр}$ на расчетной длине панели:

$$f_{нр} = f_n \left[1 - \frac{1}{2} \sin \pi \frac{l_n - l_p}{2l_p} \right] =$$

$$= 0,666 \left[1 - \frac{1}{2} \sin \frac{3,14(200 - 123,4)}{2 \cdot 123,4} \right] = 0,39 \text{ см}.$$

4. Зная величины l_p и $f_{нр}$, вычисляем их отношение:

$$\frac{f_{нр}}{l_p} = \frac{0,39}{123,4} = 0,00316.$$

$$\text{Гибкость } \lambda = \frac{l_p}{r_x} = \frac{123,4}{2,47} = 50.$$

По $\frac{f_{нр}}{l_p}$ и λ , пользуясь графиком на рис. 2, определяем

$$P_{нр} = 1970 \cdot 12,8 \cdot 2 = 50400 \text{ кг}.$$

Как видно, $P_{кр} > P_{нр}$. Следовательно, принятый момент инерции упругого ядра не соответствует действительному.

5. Задаемся другим моментом инерции упругого ядра:

$$J_y = 0,24J_n = 0,24 \cdot 73,3 = 17,6 \text{ см}^4.$$

Решение задачи устойчивости рамы при новом моменте инерции дает

$$\mu = 0,6 \text{ и } l_p = \mu l_n = 0,6 \cdot 200 = 120 \text{ см};$$

$$P_{кр} = \frac{2 \cdot 3,14^2 \cdot 2100000 \cdot 17,6}{120^2} = 50700 \text{ кг}.$$

6. По $l_p = 120 \text{ см}$ и $f_{нр} = 0,37 \text{ см}$, пользуясь графиками на рис. 2, определяем $P_{нр} = 50\,000 \text{ кг}$.

Как видно, $P_{нр}$ и $P_{кр}$ при вновь заданном упругом ядре оказались почти одинаковыми. Таким образом, равенство (1) практически удовлетворилось и полученные значения как $P_{нр}$, так и $P_{кр}$ весьма близки к истинному.

Заметим, что при сравнительно гибком поясе, принятом в рассматриваемом примере, момент инерции упругого ядра составляет всего 24% от момента инерции всего сечения. Это отвечает развитию пластических деформаций более чем на половину высоты сечения.

В жестких поясах пластическими деформациями захватывается еще большая часть сечения. Однако при этом пластические зоны распространяются на опорные сечения, что приводит к снижению жесткости узловых закреплений.

Учитывая это обстоятельство, целесообразно при определении расчетной длины панели пояса ограничить зону пластических деформаций, например, $1/4 - 1/3$ высоты сечения (если пластичность начинается со стороны вертикальных полок).

Тогда

$$J_{я} \approx 1/2 J_{п.}$$

Если пластические деформации начинаются со стороны горизонтальных полок, то и тогда принимать $J_{я} \approx 1/2 J_{п.}$ При этом решение упрощается, поскольку отпадает необходимость подбора глубины упругого ядра.

Полученная таким образом $P_{нр}$ оказывается на 3—6% меньше предельной нагрузки, определенной по формуле (1). Исходя из условия, что $J_{я} = 1/2 J_{п.}$, для различных соотношений погонных жесткостей пояса к раскосу $\left(\frac{i_{п.}}{i_{рас.}}\right)$, подсчитаны коэффициенты приведения расчетной длины панели (μ) и отношения стрелки начального искривления на расчетной длине к стрелке начального искривления всей панели $\left(\frac{f_{нр}}{f_{п.}}\right)$. В первых двух графах табл. 1 приводятся значения μ и $\frac{f_{нр}}{f_{п.}}$ для $\frac{i_{п.}}{i_{рас.}} = 2,5; 5; 7,5$ и 10.

Зная эти величины и пользуясь указанными выше графиками, весьма просто получить предельную нагрузку $P_{нр}$ при любых значениях предварительного искривления панели пояса.

Задача может быть поставлена и иначе. Так, например, для целей практики важно знать, какая величина искривления отвечает проектной прочности конструкции.

Для ответа на поставленный вопрос подсчитаем нормативную предельную нагрузку на прямой пояс

$$P_{нр}^н = \varphi F \sigma_{т.}$$

где φ — коэффициент понижения напряжения при продольном изгибе для шарнирно опертой панели пояса.

Таблица 1

$\frac{i_p}{i_{рас}}$	μ	$\frac{f_{нр}}{f_n}$	Гибкость панелей пояса						
			60	70	80	90	100	110	120
2,5	0,682	0,666	1/310	1/280	1/254	1/227	1/200	1/170	1/140
5	0,728	0,72	1/335	1/310	1/284	1/250	1/215	1/182	1/150
7,5	0,745	0,743	1/370	1/340	1/315	1/278	1/235	1/195	1/160
10	0,758	0,758	1/400	1/375	1/345	1/310	1/250	1/210	1/170

Далее, пользуясь данными табл. 1, определим μ и по соответствующим графикам найдем величину $f_{нр}$, при которой $P_{пр} = P_{пр}^н$. Зная $f_{нр}$, нетрудно определить и f_n .

В последующих графах табл. 1 для различных гибкостей панели пояса приводятся значения стрелок начальных искривлений, отвечающие нормированной несущей способности системы.

Как видно из таблицы, предельные значения $\frac{f_n}{l}$, полученные с учетом жесткости узлов, оказались значительно большими $1/1000$. Как и следовало ожидать, с уменьшением $\frac{i_p}{i_{рас}}$ и увеличением гибкости панели пояса $\frac{f_n}{l}$ сильно возрастают.

На основании проведенного анализа можно сделать заключение, что предполагаемое в новых нормативных указаниях по изготовлению металлических конструкций увеличение допускаемого искривления до $1/750$ вполне оправдано. Попутно отметим, что в германских нормативных документах допускается искривление элементов решетчатых конструкций на $1/500$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В задачу экспериментального исследования входила проверка принятого допущения о неизменном положении точек перегиба упругой линии панели пояса с начальным искривлением, а также определение предельной нагрузки для такой панели.

В качестве опытных образцов принимались пространственные отсеки четырехгранного сечения, в которых все элементы изготовлялись из одиночного прокатного уголка (пояса $\perp 80 \times 8$ мм, $l_p = 176$ см и раскосы из $\perp 50 \times 5$ мм, $l_{рас} = 132$ см).

Отношение погонных жесткостей панели пояса к раскосу составляло $\frac{i_p}{i_{рас}} = 5$. Гибкость панелей $\lambda = 78$. Согласно табл. 1, для рассматриваемых образцов допустимое начальное искривление

$$\frac{f_n}{l} \approx 1/300.$$

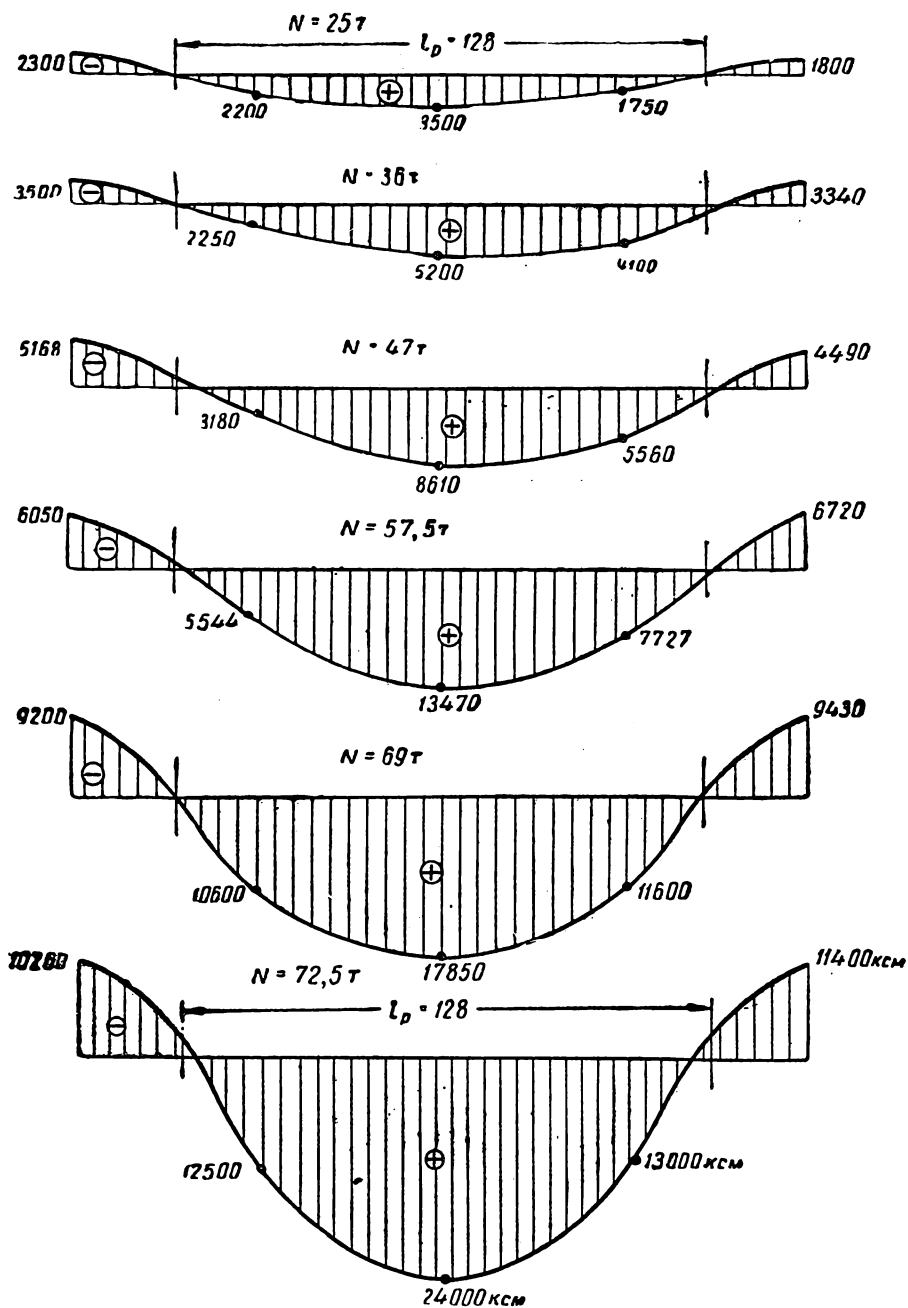


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов для искривленной панели пояса

Отсеки нагружались центрально и внецентренно приложенной сжимающей силой.

Одна из панелей пояса каждого отсека имела искривления от $1/880$ до $1/100$ l . Заметим, что в опытных отсеках в отличие от натуральных ферм пояс работает в условиях косоугольного изгиба со сжатием (влияние кручения здесь весьма незначительно), вследствие чего при всех сопоставлениях экспериментальных и аналитических результатов значение теоретической предельной нагрузки определялось с учетом поворота нулевой линии.

Для определения положения точек перегиба упругой линии производилось семь испытаний, в которых величина искривления панели составляла от 7,25 до 16 мм.

В процессе нагружения отсека замерялись деформации в крайних фибрах сечений вблизи узлов, а также в середине и четвертях длины панели.

По экспериментальным деформациям, пользуясь трехчленной формулой напряжений, подсчитывались изгибающие моменты и строилась эпюра моментов.

Нулевые значения моментов указывали положения точек перегиба упругой линии. На рис. 4 приводятся эпюры изгибающих моментов для панели, имеющей предварительное искривление, равное $f_n = 16$ мм.

Первая эпюра построена при нагрузке на отсек $N=25$ т, вторая при $N=36$ т и т. д. Всего приводится шесть эпюр. Две последние эпюры отвечают упруго-пластической работе материала. Последняя эпюра отвечает нагрузке, близкой к критической. На эпюрах также проставлена расчетная длина панели, полученная теоретически по табл. 1 (для рассматриваемого случая при $\frac{i_n}{i_{рас}} = 5$ $l_p = \mu l_n = 0,728 \times 176 = 128$ см). Как видно из рисунка, точки перегиба упругой линии как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях работы перемещаются весьма незначительно. В последней эпюре экспериментальные точки немного сблизились, что объясняется большим развитием пластических деформаций в средней части панели.

В остальных испытаниях получены аналогичные результаты.

Прежде чем приводить значения экспериментальных критических нагрузок для отсеков, заметим, что при искривлении одной панели пояса пространственного отсека происходит перераспределение усилий с более деформативного (искривленного) пояса на прямые пояса. Желая учесть эффект перераспределения, критическая нагрузка на искривленный пояс определялась по внутренним напряжениям, замеренным в четвертях пролета в трех крайних точках сечения. В этом месте величина изгибающего момента невелика, напряжения вплоть до предельной нагрузки оставались в упругих пределах и по ним легко было определить величину сжимающего усилия в панели.

Таблица 2

№ испы- таний	Величина предвари- тельного искривления панели	Предельная нагрузка на пояс фермы		Процент несоответствия экспериментальной и нормативной нагрузки
		экспериментальная	нормативная	
1	1/880	24,8	22,4	+9,7
2	1/880	25,4	22,4	+11,8
3	1/735	24,1	22,4	+7,05
4	1/700	23,8	22,4	+5,9
5	1/700	22,35	22,4	0
6	1/610	23,1	22,4	+3,03
7	1/550	23,1	22,4	+3,03
8	1/550	24,4	22,4	+8,2
9	1/525	23,3	22,4	+3,87
10	1/460	23,3	22,4	+3,87
11	1/450	24	22,4	+6,66
12	1/415	24,4	22,4	+6,66
13	1/415	23,8	22,4	+6,25
14	1/400	21,8	22,4	-2,75
15	1/400	23,4	22,4	+4,27
16	1/320	23,2	22,4	+3,44
17	1/300	23,15	22,4	+3,24

В третьей графе табл. 2 приводятся предельные нагрузки на панель пояса при искривлениях, не превышающих $1/300 l$. В четвертой графе дается значение нормативной критической нагрузки на прямой пояс (при $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$).

Как видно из табл. 2, искривления порядка $1/800$ — $1/300$ не снижают несущую способность отсеков, т. е. экспериментами подтверждены теоретические данные, записанные в табл. 1.

Превышение в ряде испытаний экспериментальных предельных нагрузок над нормативными объясняется повышенным пределом текучести стали в опытных образцах по сравнению с нормативным $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров С. Н., Устойчивость сжатых стержней сварных ферм, Госстройиздат, 1938.
2. Геммерлинг А. В., Несущая способность стержневых стальных конструкций, Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1958.
3. Jezek K., Die Festigkeit von Druckstaben aus Stahl, Wien, 1937.
4. Смирнов А. Ф., Устойчивость и колебания сооружений, Государственное транспортное железнодорожное издательство, М., 1958.

ИЗГИБ И КАЛИБРОВКА ТРУБ С УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ МЕТАЛЛА

ВВЕДЕНИЕ

В процессе строительства трубопроводов возникает необходимость гнуть и править трубы, вызывая упруго-пластическое деформирование металла.

В настоящей работе сделана попытка проанализировать процессы упруго-пластического деформирования труб и на основе этого анализа дать практические рекомендации. Прежде всего ставилась задача разработать метод расчета деформированного состояния труб в процессе их гнутья, определить величины усилий, необходимых для этого процесса, и выработать требования к проектированию механизмов, предназначенных для выполнения операций по гнутью труб.

Гнутье труб, необходимых для строительства криволинейных участков магистральных трубопроводов, осуществляется при помощи гибочных машин. Однако метода расчета деформированного состояния труб пока не разработано. Как правило, остаточная кривизна труб после гнутья устанавливалась опытным путем. Между тем различие труб по размерам и по качеству металла вызывает необходимость определять параметрыгиба расчетным путем. Проектирование гибочных машин велось только на основе опыта. Особая необходимость подвергнуть анализу процессы гнутья возникла в связи с применением труб диаметром 1020 мм. Для заданной кривизны необходимо найти форму башмака, вокруг которого ведется изгиб, величину угла при каждом гнбе и усилие, которое необходимо для изгиба труб.

В течение семилетия (1959—1965 гг.) предусмотрено построить более 55 тыс. км трубопроводов. Практика строительства показывает, что на каждом километре возникают один-два вертикальных или горизонтальных поворота трубопровода, требующих не менее трех гнутых колен. Таким образом, в процессе

строительства трубопроводов потребуется более 150 тыс. колен, согнутых в среднем на угол 8° .

Для придания трубам правильной геометрической формы применяются различные методы их правки. В настоящее время распространен метод правки путем гидравлической раздачи трубы с ограничением размеров раздачи специальной формой. Возможна правка труб и путем механической раздачи их дорном. Во всех случаях правки труб их металл подвергается упруго-пластическому деформированию. В связи с этим ставилась задача изучить характер деформирования и дать некоторые параметры для расчета механической правки труб методом дорнования.

1. СВОЙСТВА СТАЛЕЙ СВАРНЫХ ТРУБ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

В практике строительства магистральных трубопроводов применяются трубы, различные как по способам их изготовления, так и по качеству сталей. Для трубопроводов диаметром до 500 мм применяются цельнотянутые трубы, изготовленные из малоуглеродистой стали, характеризуемой минимальными пределом текучести ($\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$) и пределом прочности ($\sigma_{пр} = 4200 \text{ кг/см}^2$).

Начиная с диаметра 529 мм, трубы изготавливаются из листовой стали со сварным продольным швом. Для их изготовления применяются обычно низколегированные стали.

В настоящее время трубы изготавливаются преимущественно из сталей 19Г и 14ХГС, характеризуемых минимальными пределом текучести в листе $\sigma_T = 3\ 100 \div 3\ 500 \text{ кг/см}^2$ и пределом прочности $\sigma_{пр} = 4\ 700 \text{ кг/см}^2$.

Поскольку гнутье труб осуществляется в стадии упруго-пластических деформаций, то необходимо достаточно подробно знать работу сталей именно в этой области.

При мягких сталях, когда относительные удлинения в конце площадки текучести в 10—12 раз больше, чем удлинения при начале процесса текучести, практически приемлемо пользоваться идеализированной упруго-пластической диаграммой. Но когда относительные удлинения в конце площадки текучести больше только в 2—5 раз, влиянием самоупрочнения пренебрегать нельзя.

В применяемых для изготовления сварных труб сталях практически площадка текучести проявляется слабо или не проявляется вовсе. Это вызывает необходимость при расчете изгиба труб за пределами текучести учитывать самоупрочнение металла. При строительстве трубопроводов из труб диаметром более 529 мм чаще всего применяются экспандированные трубы, т. е. деформированные в кольцевом направлении внутренним давлением до 1,6—2,5% относительных удлинений.

На рис. 1 приведена диаграмма напряжений — деформаций стали 19Г по данным испытаний круглых образцов, взятых из

стенок экспандированных труб. Из приведенной диаграммы видно, что деформации и напряжения после предела текучести до некоторого значения их связаны также линейно, но с новым модулем упругости E_T . Этот модуль упругости характеризуется отношением разности напряжений к разности деформаций, т. е.

$$E_T = \frac{\sigma - \sigma_T}{\varepsilon - \varepsilon_T} \quad (1)$$

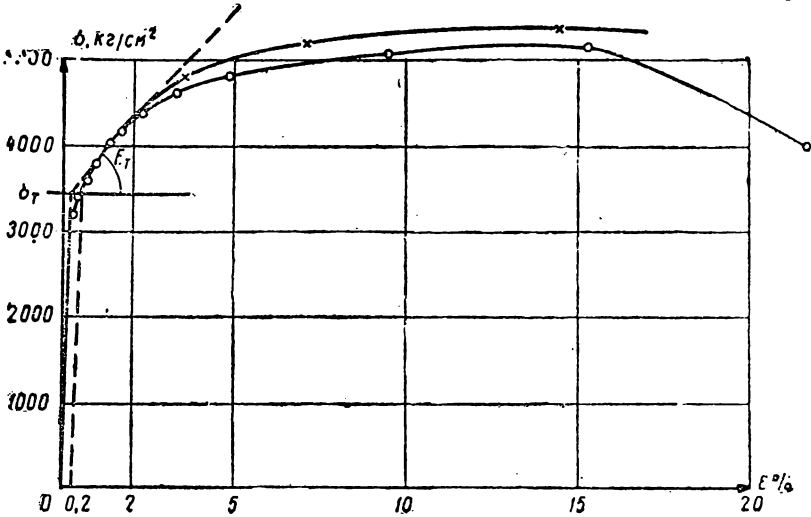


Рис. 1. Диаграмма напряжений — деформаций стали 19Г по данным испытаний круглых образцов, взятых из стенок экспандированной трубы в продольном направлении

Кривые участки трубопроводов обычно создаются с радиусами закруглений, указанными в табл. 1.

Таблица 1

Наружный диаметр трубы D в мм	Средний радиус закругления R в м	Остаточное относительное удлинение
529	15	0,0176
720	20	0,018
820	25	0,0164
1020	35	0,01457

Радиусы закруглений для цельнотянутых труб диаметром 325—426 мм, у которых отношение толщины стенок к диаметрам выше, чем у сварных труб, допускаются равными 6—8 м.

При этих средних значениях радиусов остаточные относительные удлинения крайних фибр сварных труб $\epsilon = \frac{D}{2R}$ не превышают 1,8%. В цельнотянутых трубах остаточные удлинения достигают 2—2,3%. С учетом упругих деформаций при разгрузке максимальные удлинения при изгибе сварных труб не будут превышать 2%. Для определения E_T будем принимать напряжение σ , соответствующее этой величине деформации. В металле неэкспандированных труб и в листах, характеризуемых пределом текучести 3100—3300 кг/см², напряжения при этих деформациях достигают 3900—4100 кг/см², а в металле экспандированных труб, характеризуемом $\sigma_T = 3400 \div 3600$ кг/см², напряжения достигают 4200—4300 кг/см². В этих случаях E_T получается равным примерно 43 000 кг/см², а отношение модулей упругости

$$n = \frac{E}{E_T} \approx 50.$$

Для дальнейшего анализа работы стальных элементов примем в качестве характеристики стали параметр.

$$\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}. \quad (2)$$

При этих обозначениях работу металла можно характеризовать идеализированной с линейным упрочнением диаграммой напряжений — деформаций.

2. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

При переходе изгибаемых стержней в стадию упруго-пластических деформаций жесткость сечений их уменьшается, что вызывает более интенсивный рост перемещений.

Если будет установлена зависимость изменения жесткости в сечениях стержней от внешней нагрузки, то могут быть определены и перемещения.

Эпюра действительных напряжений в сечениях в стадии упруго-пластической работы, согласно принятой условной диаграмме напряжений — деформаций, будет такой, как показано на рис. 2,а.

При сохранении гипотезы плоских сечений и для упруго-пластической стадии эпюра деформаций выразится линейным графиком (рис. 2,б), угол наклона которого ω связан с углом наклона α упругого участка эпюры напряжений законом Гука, т. е.

$$\operatorname{tg} \omega = E \operatorname{tg} \alpha.$$

Относительные удлинения на границе зоны текучести будут

$$\epsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}.$$

Продолжив упругую часть графика (рис. 2,а) в обе стороны и отнеся эпюру напряжений к условному идеально-упругому материалу с тем же модулем упругости E , получим момент внутренних сил, соответствующий этой эпоре напряжений. Назовем этот момент условным $M_{усл}$. Соответствующей ему эпюрой деформаций будет эпора, представленная на рис. 2,б, а связь удлинений с условными напряжениями $\sigma_{усл}$ выразится формулой

$$\epsilon = \frac{\sigma_{усл}}{E}.$$

Элементарный угол поворота сечения стержня из упруго-пластического материала, вызываемый действительным моментом внутренних сил M , равен углу поворота сечения стержня из идеально-упругого материала, вызываемому условным моментом $M_{усл}$.

Если заменить теперь истинную эпору моментов от внешних нагрузок эпорой условных моментов, то можно применить к ней различные известные приемы вычисления как углов поворота, так и прогибов, условно принимая работу металла беспредельно упругой, а сечения в процессе деформирования — плоскими.

Для применения того или иного метода определения углов поворота и перемещений необходимо выразить связь между действительным и условным изгибающими моментами при различных формах поперечных сечений стержней.

Условный изгибающий момент внутренних сил в сечении (рис. 3) будет

$$M_{усл} = W\sigma_{усл}.$$

Момент, соответствующий появлению фибровой текучести:

$$M_T = W\sigma_T.$$

Повышение условных напряжений против действительных будет

$$\Delta\sigma = \sigma_z - \sigma_T - \frac{E_T}{E}(\sigma_z - \sigma_T) = \lambda(\sigma_z - \sigma_T). \quad (3)$$

Момент внутренних сил в сечении, равный моменту от внешних нагрузок, будет

$$M = M_{усл} - \int_{h_1}^{h_2} \Delta\sigma y z dz = M_{усл} - \lambda \int_{h_1}^{h_2} (\sigma_z - \sigma_T) y z dz. \quad (4)$$

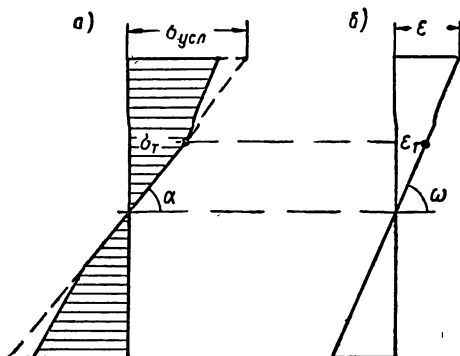


Рис. 2. Эпюра нормальных напряжений *a* и эпюра деформаций *б* в изгибаемом стержне

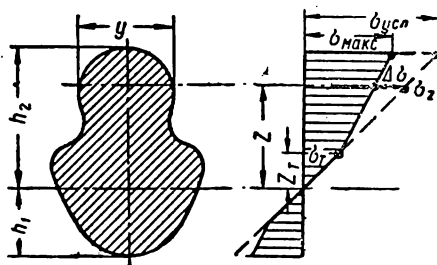


Рис. 3. Эпюра напряжений от изгиба в сечении стержня произвольной конфигурации

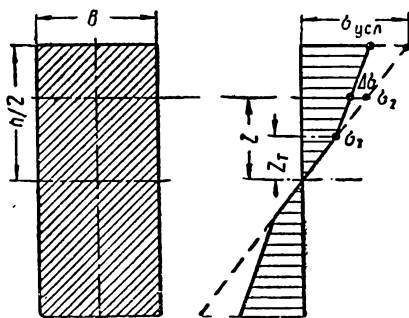


Рис. 4. Эпюра напряжений от изгиба в сечении стержня прямоугольного сечения

а) Прямоугольные сечения

Обозначим отношение условного изгибающего момента к моменту, соответствующему началу текучести $\frac{M_{\text{усл}}}{M_T} = \frac{\sigma_{\text{усл}}}{\sigma_T}$, через γ и отношение действительного момента $\frac{M}{M_T}$ через β .

Из рис. 4 следует, что

$$z_T = \frac{h}{2\gamma} \quad \text{и} \quad \sigma_z = \sigma_T \frac{z}{z_T}.$$

При этих обозначениях из уравнения (4) получим

$$\beta = \frac{M}{M_T} = \gamma - 2 \frac{\lambda b \sigma_T}{M_T} \left(\frac{2\gamma}{h} \int_{\frac{h}{2\gamma}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz - \int_{\frac{h}{2\gamma}}^{\frac{h}{2}} z dz \right).$$

После интегрирования найдем

$$\beta = (1 - \lambda) \gamma + \frac{\lambda}{2} \left(3 - \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (5)$$

При отсутствии упрочнения, т. е. когда $\lambda = 1$, что соответствует идеализированной диаграмме, получается

$$\beta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Принимая в этом выражении $\gamma = \infty$, получим известный результат, указывающий, что предельная несущая способность изгибаемых стержней прямоугольного сечения, металл в которых после начала текучести работает без упрочнения, в 1,5 раза больше нагрузки, отвечающей началу фибровой текучести.

Из формулы (5) ясно, что при $\gamma \rightarrow \infty$ или при $\epsilon \rightarrow \infty$ отношение β неограниченно возрастает при всех значениях λ , кроме $\lambda = 1$. Из этого следует, что предельная несущая способность изгибаемых стержней из материала с линейным упрочнением не может быть определена, если не ставятся границы по величине деформации.

б) Двутавровые и швеллерные сечения

Обозначим для двутавровых и швеллерных сечений, изображенных на рис. 5, отношения

$$\frac{h_1}{h} = k; \quad \frac{b-t}{b} = a.$$

Момент внутренних сил в сечении, равный моменту от внешних нагрузок, будет

$$M = M_{\text{вн}} - 2 \left[t \int_{z_{\tau}}^{\frac{h_1}{2}} \Delta \sigma z dz + b \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta \sigma z dz \right]. \quad (6)$$

Выразив, как в предыдущем примере, $\Delta \sigma$ через $\frac{\lambda \sigma_{\tau}}{h} (2\gamma z - h)$ и изменив соответственно пределы интегрирования, для двутавровых и швеллерных сечений выражение момента получим в

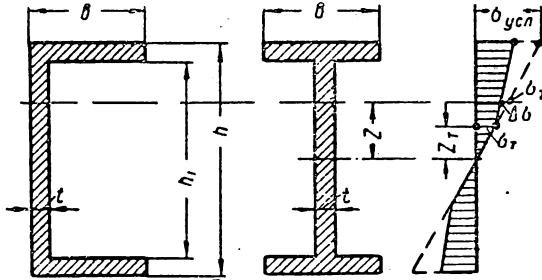


Рис. 5. Эпюра напряжений от изгиба в сечениях из швеллера или двутавра

следующем виде:

$$M = M_{\text{вн}} - 2\lambda \sigma_{\tau} \left[\frac{2\gamma}{h} \left(t \int_{\frac{h}{2\gamma}}^{\frac{kh}{2}} z^2 dz + b \int_{\frac{kh}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz - t \int_{\frac{h}{2\gamma}}^{\frac{kh}{2}} z dz - b \int_{\frac{kh}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \right) \right]. \quad (6a)$$

После интегрирования получим отношение действительного момента, равного моменту от внешних нагрузок, к моменту, соответствующему началу фибровой текучести

$$\beta = (1 - \lambda) \gamma + \frac{\lambda}{2(1 - ak^3)} \left[3(1 - ak^2) - \frac{1 - a}{\gamma^2} \right]. \quad (6б)$$

При распространении пластических деформаций в пределах полок, т. е. при $\frac{h_1}{2} < z_{\tau} \leq \frac{h}{2}$,

$$\beta = \left(\frac{\lambda}{1 - ak^3} \right) + \frac{\lambda}{2(1 - ak^3)} \left(3 - \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (6в)$$

При распространении упруго-пластических деформаций на всю толщину полка, т. е. при $z_T \leq \frac{h_1}{2}$,

$$\beta = \left(1 - \frac{\lambda}{ak^3}\right) \frac{1}{k} + \frac{\lambda(3 - k^2)}{2(1 - ak^3)}. \quad (6г)$$

В этом случае при $\lambda = 1$, т. е. без учета упрочнения металла,

$$\beta = \frac{3 - k^2(1 + 2a)}{2(1 - ak^3)}.$$

В общем случае для швеллерного и двутаврового сечений при $\lambda = 1$ отношение β , соответствующее шарниру текучести, будет

$$\beta = \frac{3(1 - ak^2)}{2(1 - ak^3)} = \frac{3(1 + ak)}{2(1 + ak + a^2k^2)}. \quad (6д)$$

в) Кольцевые сечения

Момент внутренних сил в кольцевом сечении (рис. 6) равен

$$M = M_{усл} - 4 \left[\int_{z_T}^R y_R \Delta \sigma z dz - \int_{z_T}^r y_r \Delta \sigma z dz \right]. \quad (7)$$

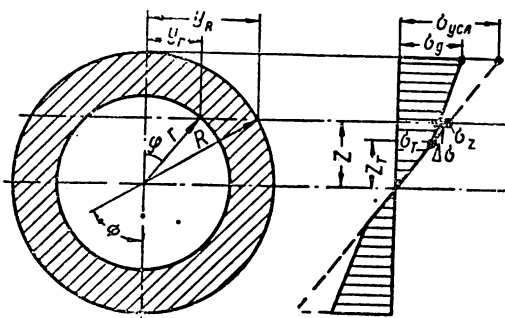


Рис. 6. Эпюра напряжений от изгиба в стержне кольцевого сечения

Для его вычисления запишем ряд зависимостей:

$$y_R = R \sin \Phi; \quad y_r = z \sin \varphi;$$

$$z = R \cos \Phi = r \cos \varphi; \quad dz = -R \sin \Phi d\Phi = -r \sin \varphi d\varphi; \quad k = \frac{r}{R};$$

$$\Delta \sigma = \lambda \sigma_T (\gamma \cos \Phi - 1) = \lambda \sigma_T (k \gamma \cos \varphi - 1).$$

Произведя указанные выше подстановки и изменив соответствующим образом пределы интегрирования, получим выражение

$$M = M_{\text{усл}} - 4\lambda\sigma_T \left[R^3 \int_{\Phi_0}^0 \cos \Phi \sin^2 \Phi (1 - \gamma \cos \Phi) d\Phi - r^3 \int_{\varphi_0}^0 \cos \varphi \sin^2 \varphi (1 - k\gamma \cos \varphi) d\varphi \right], \quad (7a)$$

где

$$\Phi_0 = \arccos \frac{z_T}{R} = \arccos \frac{1}{\gamma};$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{z_T}{r} = \arccos \frac{1}{k\gamma}.$$

Для кольцевого сечения отношение действительного момента, равного моменту от внешних нагрузок, к моменту, соответствующему началу фибровой текучести, будет

$$\beta = \gamma - \frac{2\lambda}{\pi(1-k^4)} \left[\gamma(A - k^4 A_1) - \frac{8}{3}(B + k^3 B_1) \right], \quad (7б)$$

где

$$A = \arccos \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}};$$

$$A_1 = \arccos \frac{1}{k\gamma} - \frac{1}{k\gamma} \left(\frac{2}{k^2\gamma^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{1}{k^2\gamma^2}};$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}};$$

$$B_1 = \left(1 - \frac{1}{k^2\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Для сплошного круглого сечения

$$\beta = \gamma - \frac{2\lambda}{\pi} \left(\gamma A - \frac{8}{3} B \right) = \gamma - \frac{2\lambda\gamma}{\pi} \left[\arccos \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right] + \frac{16\lambda}{3\pi} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (7в)$$

При $\lambda = 1$ в пределе при $\gamma \rightarrow \infty$ получим известное выражение предельной несущей способности круглого сечения из металла без упрочнения:

$$M_{\text{пред}} = \frac{16}{3\pi} M_T.$$

Для кольцевого сечения при распространении пластических деформаций только в пределах стенки трубы, т. е. при $r < z \leq R$,

$$\beta = \gamma - \frac{2\lambda}{\pi(1-k^4)} \left(\gamma A - \frac{8}{3} B \right). \quad (7г)$$

При распространении пластических деформаций на всю толщину стенки трубы, т. е. при $z_T = r$,

$$\beta = \frac{1}{k} - \frac{2\lambda}{\pi(1-k^2)} \left[\frac{1}{k} \arccos k - (2k^2-1) \sqrt{1-k^2} - \frac{8}{3} (1-k^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (7д)$$

Если в выражении (7б) принять $\lambda = 1$ и перейти к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$, то при образовании шарнира текучести

$$\beta = \frac{16(1-k^3)}{3\pi(1-k^2)} = \frac{16(1+k+k^2)}{3\pi(1+k)(1+k^2)}. \quad (7е)$$

В частности, из этого выражения вытекает, что, как это было показано выше, для сплошного круглого сечения, когда $k=0$, $\beta = \frac{16}{3\pi}$.

В тонкостенных трубах отношение внутреннего диаметра к наружному близко к единице. Из этого следует, что, согласно выражению (7е), за предельный изгибающий момент для них без большой погрешности можно принять

$$M_{\text{пред}} = \beta M_T = \frac{4}{\pi} M_T = 1,276 M_T.$$

При переходе к пределу при $k \rightarrow 1$ выражение (7б) приводится к следующему, более простому виду:

$$\beta = \gamma - \frac{2\lambda}{\pi} \left[\gamma \arccos \frac{1}{\gamma} - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right]. \quad (8)$$

В строительстве магистральных трубопроводов применяются относительно тонкостенные трубы, у которых отношение

$$k = \frac{d}{D} = 1 - \frac{2\delta}{D}$$

колеблется в небольших пределах. Величины значений k для этих труб приведены в табл. 2

Таблица 2

Толщина стенки трубы в мм	Наружный диаметр труб D в мм							
	325	377	426	477	529	720	820	1020
6	—	—	—	—	0,977	—	—	—
7	—	—	—	—	0,974	0,98	—	—
8	0,954	0,958	0,962	0,966	0,97	0,976	0,98	—
9	0,945	0,952	0,987	0,962	0,966	0,975	0,978	—
10	0,937	0,947	0,953	0,958	—	0,972	0,976	0,98
11	—	—	—	0,954	—	—	0,972	0,978
12	—	—	—	—	—	—	—	0,977
13	—	—	—	—	—	—	—	0,975

Учитывая небольшой диапазон колебаний значений k , в дальнейшем для труб диаметром 720—1020 мм будем принимать $k = 0,975$.

Величины β для разных значений γ при различных значениях λ и k приведены на рис. 7.

Как уже указывалось, отношение действительных моментов к моменту, соответствующему началу фибровой текучести в сече-

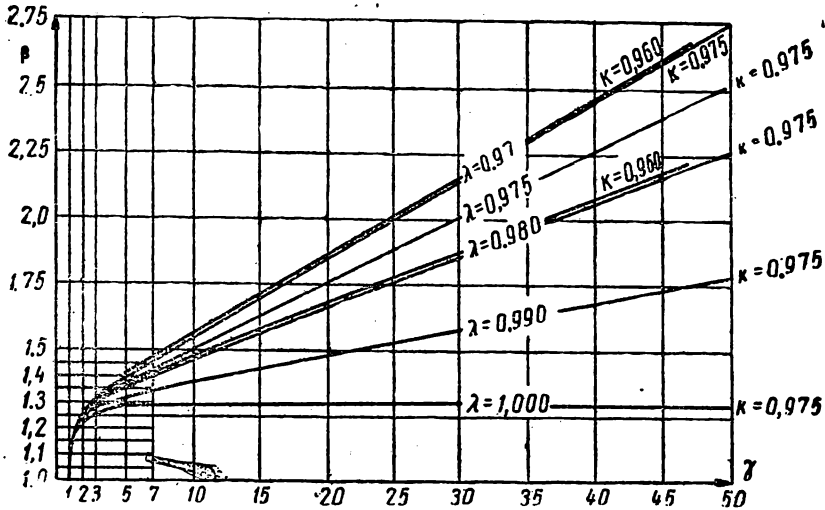


Рис. 7. Графики зависимости β от γ для кольцевых сечений

нии, является сложной функцией, зависящей от γ , λ и k , но при определенной стали и определенном сечении трубы λ и k являются постоянными величинами.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ

При определении прогибов стержней необходимо учитывать изменение жесткости в зонах, подверженных упруго-пластическим деформациям.

Для определения перемещений можно пользоваться графо-аналитическим методом, из которого следует, что угол поворота опорного сечения соответствует фиктивной опорной реакции от эпюры моментов как нагрузки, а прогиб — изгибающему моменту от этой нагрузки.

Чтобы пользоваться одинаковой жесткостью FJ по всей длине стержня величины моментов на эпюре в пределах участка упруго-пластических деформаций требуется приводить к $M_{усл}$.

Прогиб конца консоли (рис. 8) определяется из выражения

$$EJf = \int_0^a M_x dx + \int_a^l M_{х_{усл}} dx. \quad (9)$$

Выражение (9) может быть записано в виде

$$EJf = \frac{1}{3} M_{\max} l^2 + \int_a^l (M_{\text{хусл}} - M_x) x dx. \quad (10)$$

Обозначим отношения

$$\frac{M_{\max}}{M_T} = \beta_{\max}; \quad \frac{M_x}{M_T} = \beta_x; \quad \frac{M_{\text{хусл}}}{M_T} = \gamma_x; \quad \frac{M_{\max \text{ усл}}}{M_T} = \gamma_{\max},$$

где M_{\max} — максимальный действительный момент.

Расстояние от конца консоли до сечения с началом фибровой текучести

$$a = \frac{M_T}{M_{\max}} l = \frac{l}{\beta_{\max}}.$$

Поскольку

$$x = \frac{\beta_x}{\beta_{\max}} l,$$

$$\text{то } dx = \frac{l}{\beta_{\max}} d\beta_x.$$

Использував указанные зависимости и проведя очевидные преобразования, выражению (10) можно придать следующий вид:

$$EJf = \beta_{\max} \frac{M_T l^2}{3} + \frac{3}{\beta_{\max}^2} \cdot \frac{M_T l^2}{3} \int_1^{\beta_{\max}} (\gamma_x - \beta_x) \beta_x d\beta_x. \quad (10a)$$

Так как $\frac{M_T l^2}{3EJ} = f_T$ есть прогиб консоли при начале фибровой текучести, то выражение для определения прогиба конца консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце, будет

$$f = f_T \left[\beta_{\max} + \frac{3}{\beta_{\max}^2} \int_1^{\beta_{\max}} (\gamma_x - \beta_x) \beta_x d\beta_x \right]. \quad (11)$$

Для того чтобы вычислить интеграл, надо иметь функциональную зависимость γ_x от β_x , однако ее не всегда можно достаточно просто выразить. Представив интеграл выражения (11) в виде алгебраической суммы двух интегралов, получим

$$\int_1^{\beta_{\max}} (\gamma_x - \beta_x) \beta_x d\beta_x = \int_1^{\gamma_{\max}} \gamma_x \beta_x \frac{d\beta_x}{d\gamma_x} d\gamma_x -$$

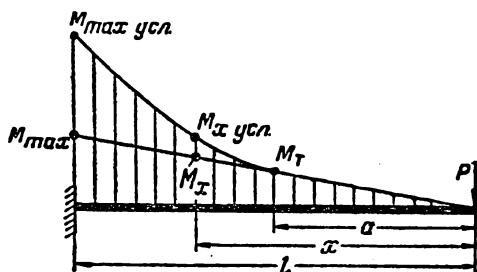


Рис. 8. Эпюра условных изгибающих моментов консольной балки со сосредоточенной силой на конце

$$-\int_1^{\beta_{\max}} \beta_x^2 d\beta_x = \frac{1-\beta_{\max}^3}{3} + \int_1^{\gamma_{\max}} \gamma_x \beta_x \frac{d\beta_x}{d\gamma_x} d\gamma_x. \quad (12)$$

Используя выражение (12) для определения прогиба конца рассматриваемой консоли, получим выражение в виде

$$f = f_{\tau} \frac{1}{\beta_{\max}^2} \left[1 + 3 \int_1^{\gamma_{\max}} \gamma_x \beta_x \frac{d\beta_x}{d\gamma_x} d\gamma_x \right]. \quad (13)$$

а) Прогиб консолей прямоугольного поперечного сечения

Как было показано в уравнении (5), отношение действительного изгибающего момента к моменту, вызывающему текучесть в крайних фибрах, для прямоугольных сечений определяется выражением

$$\beta = (1 - \lambda) \gamma + \frac{\lambda}{2} \left(3 - \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

Производная этой функции по переменной γ будет

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = 1 - \lambda + \frac{\lambda}{\gamma^3}.$$

При этих значениях β и $\frac{d\beta}{d\gamma}$ прогиб будет

$$f = f_{\tau} \frac{1}{\beta_{\max}^2} \left\{ 1 + 3 \int_1^{\gamma_{\max}} \gamma \left[(1 - \lambda) \gamma + \frac{\lambda}{2} \left(3 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right] \left(1 - \lambda + \frac{\lambda}{\gamma^3} \right) d\gamma \right\}. \quad (14)$$

После вычисления интеграла получаем

$$f = f_{\tau} \frac{1}{\beta_{\max}^2} \left\{ 1 + (1 - \lambda)^2 \gamma_{\max}^3 + \frac{3}{2} (1 - \lambda) \left[\lambda \left(\frac{3}{2} \gamma_{\max}^2 + \ln \gamma_{\max} \right) - \frac{4 + 5\lambda}{6} \right] + \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{1}{\gamma_{\max}^3} - 9 \frac{1}{\gamma_{\max}} + 8 \right) \right\}. \quad (15)$$

В предельном случае при $\gamma_{\max} \rightarrow \infty$ интеграл в выражении (14) расходится при любом значении λ , за исключением значения $\lambda = 1$. Условно можно считать, что в этом случае образуется пластический шарнир, а при его образовании прогиб будет

$$f_{\text{пред}} = \frac{20}{9} f_{\tau} = 2,22 f_{\tau}.$$

б) Прогиб консоли кольцевого поперечного сечения

Для определения прогибов консоли кольцевого сечения зависимость β от γ возьмем из уравнения (8):

$$\beta = \gamma - \frac{2\lambda}{\pi} \left(\gamma \arccos \frac{1}{\gamma} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right).$$

Производная этой функции по переменной γ будет

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = 1 - \frac{2\lambda}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right).$$

Прогиб конца консоли может быть определен из выражения

$$f = f_{\tau} \frac{1}{\beta_{\max}^2} \left\{ 1 + 3 \int_1^{\gamma_{\max}} \gamma \left[\gamma - \frac{2\lambda}{\pi} \left(\gamma \arccos \frac{1}{\gamma} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{2\lambda}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right) \right] d\gamma \right\}. \quad (16)$$

Следует, однако, указать, что в полученном многочлене, выражающем прогиб, оказывается интеграл

$$\int \gamma^2 \left(\arccos \frac{1}{\gamma} \right)^2 d\gamma, \quad (17)$$

численное интегрирование которого громоздко. В связи с этим встала задача найти упрощение в решении задачи.

4. Испытания балок прямоугольного сечения и упрощение в расчете прогибов

В 1936 г. автором были проведены испытания балок прямоугольного сечения, изготовленных из мягкой строительной стали. Результаты этих опытов опубликованы в [1]. Балки имели сечения $10,07 \times 4,67$; $9,91 \times 4,69$ и $10,4 \times 4,69$ см. Средний для трех балок момент сопротивления $W = 77,3$ см³ и момент инерции $J = 388$ см⁴.

Балки пролетом 70 см загружались сосредоточенной силой в середине пролета. Металл балок имел предел текучести 2120 кг/см². Диаграмма напряжений — деформаций металла балок приведена на рис. 9. Пластические свойства металла характеризуются

$$\lambda = 1 - \frac{E_{\tau}}{E} = 0,985.$$

Изгибающий момент при начале текучести в крайних волокнах $M_{\tau} = 1,647$ тм. Нагрузка, вызывающая начало текучести, $P_{\tau} = 9,41$ т, а прогиб при начале текучести $f_{\tau} = 0,825$ мм.

В то время ставилась задача проверить, допустимо ли основывать расчет стальных конструкций с учетом пластических деформаций на идеализированной диаграмме напряжений — деформаций. Опытами было установлено, что при расчетах конст-

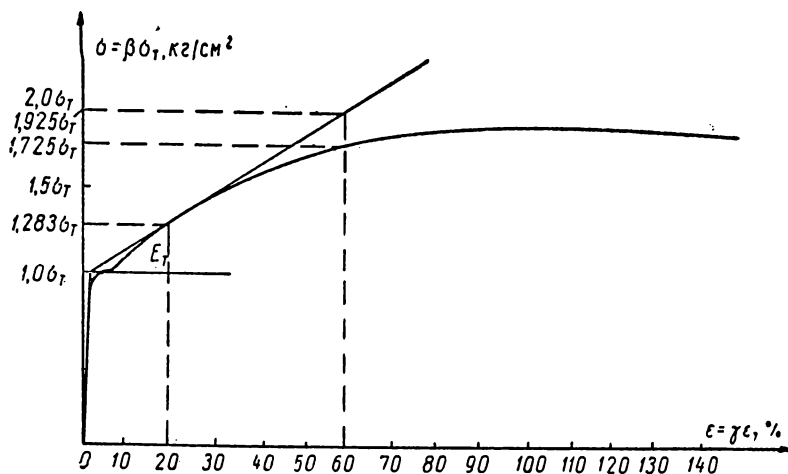


Рис. 9. Диаграмма напряжений — деформаций стали балок

рукций, выполненных из мягких сталей, в которых площадка текучести распространяется на значительную величину, использование идеализированной диаграммы допустимо. Но было отмечено, что действительная несущая способность деформации и перемещения элементов зависят от величины самоупрочнения металла.

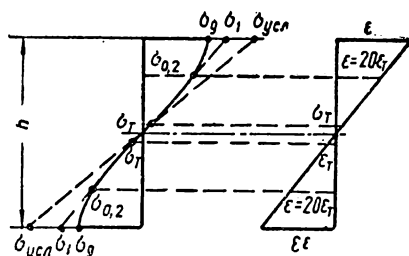


Рис. 10. Эпюра напряжений и деформаций в поперечных сечениях балок при изгибе

Эти опыты дают основание перейти к заключению, что линейная зависимость деформаций от напряжений после начала текучести с некоторым новым модулем упругости E_T в пределах относительной деформации до 2% допустима.

При изгибе балок до деформации ϵ , превышающих деформации при начале текучести в 20 и более раз, эпюра напряжений становится криволинейной (рис. 10).

Прогибы, полученные из выражений (15), будут достаточно правильны при значениях $\gamma = \frac{\epsilon}{\epsilon_T} < 20-25$. При больших значениях γ прогибы будут получаться заниженными. Из этого выте-

кает, что при расчете конструкций с большими деформациями необходимо вводить поправку. Было бы необходимо найти то или иное аналитическое выражение зависимости ϵ от σ . Но в этом случае встретится много трудностей, осложняющих расчет. Оказывается более удобной замена выражений, устанавливающих связь действительных и условных изгибающих моментов. Например, для прямоугольных сечений выражение (5) можно заменить выражением:

$$\gamma = \beta + G(\beta - 1)^3. \quad (18)$$

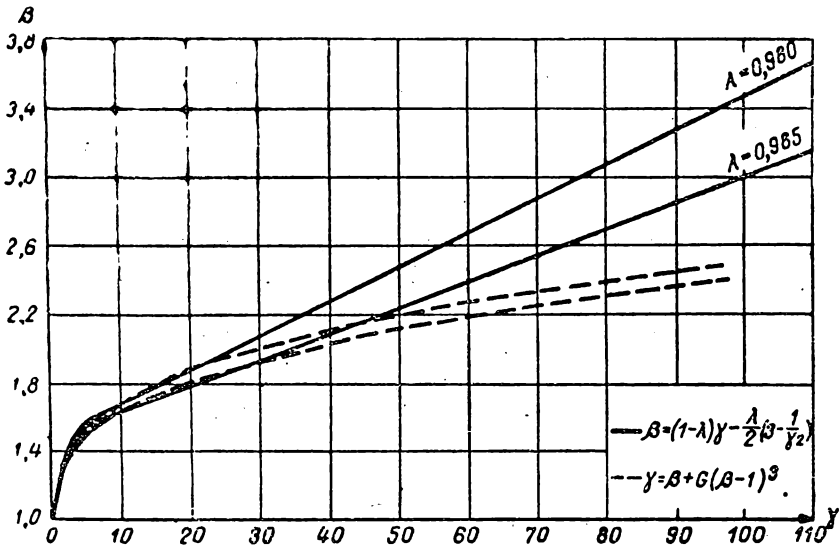


Рис. 11. График зависимости β от γ для прямоугольных сечений

Это выражение, как и (5), справедливо при значениях $\beta > 1$. На рис. 11 приведены графики зависимости β от γ из выражений (5) и (18). Из этих графиков видно, что после некоторого значения γ зависимость β от γ становится практически линейной. Для выбора коэффициента G примем условие, чтобы в месте перехода зависимости в линейную значения β и γ совпадали по обоим выражениям. В этом случае $G = \frac{\gamma_{\text{пер}} - \beta_{\text{пер}}}{(\beta_{\text{пер}} - 1)^3}$. Для прямоугольных сечений $\gamma_{\text{пер}} = 10$. При $\lambda = 0,98$ $\beta_{\text{пер}} = 1,665$, а коэффициент $G = 28,33$. При $\lambda = 0,985$ $\beta_{\text{пер}} = 1,6226$, а $G = 36,21$. При такой замене пластические свойства стали (или, иначе, влияние λ) учитывается в коэффициентах G .

В зоне значений γ от 1 до 20—30 кривые близки между собой; после же этих значений они расходятся. Выражение (18)

указывает, что при увеличении действительных изгибающих моментов деформации возрастают интенсивнее, чем это получается по выражению (5), что ближе отвечает фактическим деформациям. Если приближенно принять, что от $\sigma_{0,2}$ до σ_d (см. рис. 10) напряжения меняются также линейно, то изгибающий момент, подсчитанный по выражению (5), приближенно нужно уменьшить на $\Delta M = b(\sigma_1 - \sigma_d) \frac{c}{2} \left(h - \frac{2c}{3} \right)$.

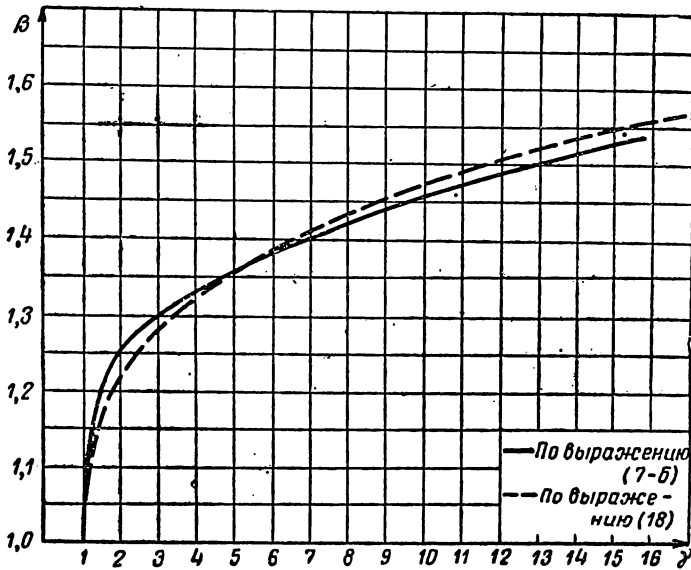


Рис. 12. График зависимости β от γ для кольцевых сечений при $k=0,975$

Например, из рис. 9 следует, что при $\gamma = 60$ разность между расчетными и фактическими напряжениями в металле, характеризуемом $\lambda = 0,985$, равна $1,925\sigma_T - 1,725\sigma_T = 0,2\sigma_T$. В этом случае $c = \frac{h}{3}$, а $\Delta M = 0,156M_T$.

Если при $\gamma = 60$ из выражения (5) значение $\beta = 2,377$, то с учетом поправки $\beta = 2,377 - 0,156 = 2,221$. Из графика зависимости β от γ , построенного по выражению (18), β получается равным 2,18. Это соотношение достаточно хорошо подтверждает допустимость рекомендованной замены.

Аналогичное решение получается и для кольцевых сечений. На рис. 12 приведены графики зависимости β от γ для кольцевых сечений, построенные по выражениям (7б) и (18).

В случае, если $k = \frac{d}{D} = 0,975$, а металл характеризуется значением $\lambda = 1 - \frac{E_{\tau}}{E} = 0,98$, то $\gamma_{\text{пер}}$ можно принять равным 5, а $\beta_{\text{пер}} = 1,355$. Численное значение коэффициента

$$G = \frac{\gamma_{\text{пер}} - \beta_{\text{пер}}}{(\beta_{\text{пер}} - 1)^3} = \frac{3,645}{(0,355)^3} = 81,5.$$

При других значениях λ и при $\gamma_{\text{пер}} = 5$ значения β и G приведены в табл. 3.

Таблица 3

λ	0,99	0,98	0,975	0,97
β	1,318	1,355	1,373	1,392
G	117,4	81,5	69,9	60

5. РАСЧЕТ ПРОГИБОВ ПРИ ЗАМЕНЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ β ОТ γ

При использовании предложенной замены зависимости β от γ выражения для определения прогибов становятся относительно более простыми.

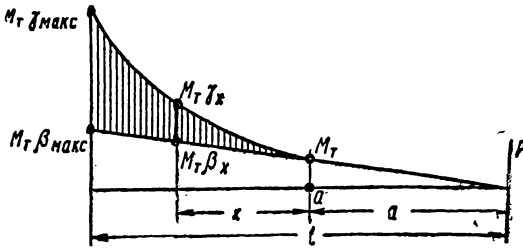


Рис. 13. Эпюра условных изгибающих моментов консоли с силой на конце

Рассмотрим изгиб консоли, нагруженной силой на конце. Эпюра приведенных моментов, рассматриваемая как фиктивная нагрузка, показана на рис. 13. В зоне упругих деформаций на участке $a = \frac{l}{\beta_{\text{max}}}$ эпюра моментов ограничена прямой, а на участке $l - a = l \left(1 - \frac{1}{\beta_{\text{max}}} \right)$ она ограничена кривой. Криволинейный участок эпюры фиктивных нагрузок соответствует зависимости β от γ из выражения (18).

Как известно, при графоаналитическом методе прогиб равен

$$f_a = \frac{M_T}{EJ} \left[\frac{2\beta_{\max} + 1}{6} (l-a)^3 + \int_0^{l-a} (\gamma_x - \beta_x) x dx \right]. \quad (19)$$

Учитывая, что $\gamma_x - \beta_x = G(\beta_x - 1)^3$; $\beta_x = 1 + \frac{x}{l} \beta_{\max}$;

$(l-a) = \frac{l}{\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1)$, статический момент эпюры, заштрихованной на рис. 13, будет

$$S = M_T \int_0^{l-a} (\gamma_x - \beta_x) x dx = GM_T \int_0^{l-a} (\beta_x - 1)^3 x dx.$$

Подставляя значение β_x , выраженное через x и β_{\max} , получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{GM_T \beta_{\max}^3}{l^3} \int_0^{l-a} x^4 dx = \frac{GM_T l^2}{5\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1)^5 = \\ &= \frac{M_T l^2}{5\beta_{\max}^2} (\gamma_{\max} - \beta_{\max}) (\beta_{\max} - 1)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Площадь этой эпюры будет

$$\begin{aligned} F &= GM_T \int_0^{l-a} (\beta_x - 1)^3 dx = \frac{GM_T l}{4\beta_{\max}} \int_0^{l-a} (\beta_{\max} - 1)^4 = \\ &= \frac{M_T l}{4\beta_{\max}} (\gamma_{\max} - \beta_{\max}) (\beta_{\max} - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Координата центра тяжести эпюры

$$L = \frac{S}{F} = \frac{4l}{5\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1). \quad (22)$$

Прогиб консоли в точке a , т. е. в сечении с краевой текучестью, будет

$$f_a = \frac{(\beta_{\max} - 1)^2}{\beta_{\max}^2} [0,6G(\beta_{\max} - 1)^3 + \beta_{\max} + 0,5] f_T = A_1 f_T. \quad (23)$$

Прогиб конца консоли записывается в следующем виде:

$$f_l = \left[\beta_{\max} + \frac{0,15G}{\beta_{\max}^2} (\beta_{\max} - 1)^4 (4\beta_{\max} + 1) \right] f_T = A_2 f_T. \quad (24)$$

Для балок, нагруженных силой в середине пролета, эпюра приведенных изгибающих моментов показана на рис. 14.

Угол поворота оси балки на опоре, равный опорной реакции от фиктивной нагрузки, будет

$$R_{\varphi} = \frac{M_T l}{4EJ} \left[\beta_{\max} + \frac{G(\beta_{\max} - 1)^4}{2\beta_{\max}} \right]. \quad (25)$$

Прогибы в разных точках пролета на расстояниях $x = k \frac{l}{2}$ от опоры будут:

на участке от $x=0$ до $x=a$

$$f = k \left[\frac{3}{2} \beta_{\max} \left(1 - \frac{k^2}{3} \right) + \frac{3G}{4} \cdot \frac{(\beta_{\max} - 1)^4}{\beta_{\max}} \right] f_T; \quad (26)$$

на участке $x=a$ до $x=\frac{l}{2}$

$$f = \left\{ \frac{3}{2} k \beta_{\max} \left(1 - \frac{k^2}{3} \right) + \frac{3G}{4\beta_{\max}} \left[k(\beta_{\max} - 1)^4 - \frac{(k\beta_{\max} - 1)^5}{5\beta_{\max}} \right] \right\} f_T. \quad (27)$$

При $k=1$, т. е., когда $x = \frac{l}{2}$, прогиб будет

$$f_{\frac{l}{2}} = \left\{ \beta_{\max} + \frac{3G(\beta_{\max} - 1)^4}{4\beta_{\max}} \left[1 - \frac{\beta_{\max} - 1}{5\beta_{\max}} \right] \right\} f_T. \quad (28)$$

При испытании автором балок прямоугольного сечения прогибы измерялись на расстояниях 13,25 и 34,5 см от опоры. Значение G для этих балок равно 36,21. Прогиб на расстоянии 12 см от опоры равен

$$f_{13} = 0,371 \left[1,431\beta_{\max} + \frac{27,16}{\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1)^4 \right] f_T.$$

Для сечения на расстоянии 25 см от опоры при β_{\max} от 1 до 1,4

$$f_{25} = 0,714 \left[1,245\beta_{\max} + \frac{27,16}{\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1)^4 \right] f_T,$$

а при $\beta_{\max} > 1,4$

$$f_{25} = \left\{ 0,889\beta_{\max} + \frac{27,16}{\beta_{\max}} \left[0,714 (\beta_{\max} - 1)^4 - \frac{(0,714\beta_{\max} - 1)^5}{5\beta_{\max}} \right] \right\} f_T.$$

Для сечения на расстоянии 34,5 см при $\beta_{\max} > 1,015$

$$f_{34,5} = \left\{ \beta_{\max} + \frac{27,16}{\beta_{\max}} \left[0,986 (\beta_{\max} - 1)^4 - \frac{(0,986\beta_{\max} - 1)^5}{5\beta_{\max}} \right] \right\} f_T,$$

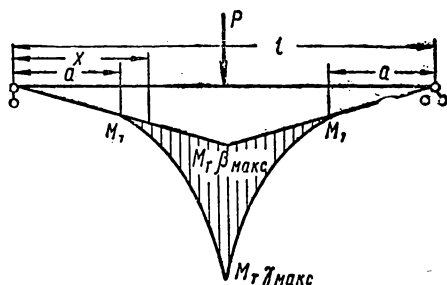


Рис. 14. Эпюра условных изгибающих моментов балки с силой в середине пролета

Прогиб в середине пролета будет

$$f_{l/2} = \left\{ \beta_{\max} + \frac{27,16 (\beta_{\max} - 1)^4}{\beta_{\max}} \left[1 - \frac{\beta_{\max} - 1}{5\beta_{\max}} \right] \right\} f_T.$$

В процессе испытания балок деформации растянутых волокон измерялись в середине пролета (рис. 15,а), а сжатых волокон— в сечении, отстоящем на 5 см от нее (рис. 15,б). Теоретические де-

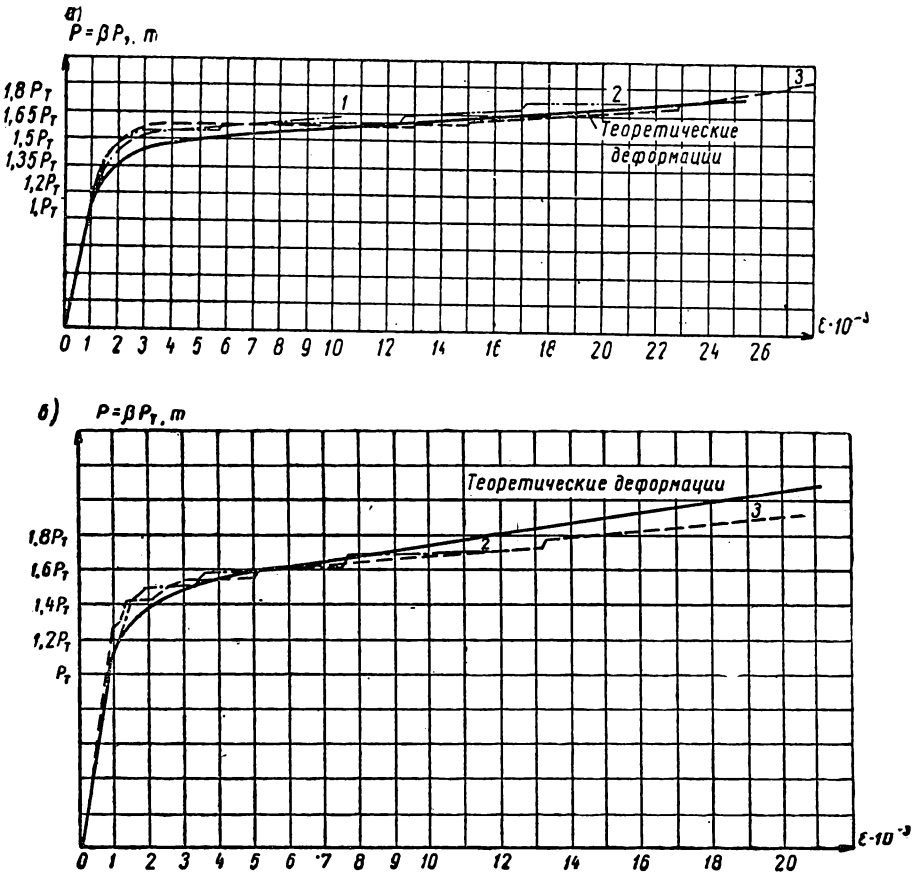


Рис. 15. Теоретические и экспериментальные крайние деформации балки

формации на рис. 15 определены по выражению $\gamma = \beta + G(\beta - 1)^3$. На рис. 16 приведены графики измеренных и теоретических прогибов на расстоянии 5, 10 и 22 см от середины пролета (рис. 16, а, б и в). Сопоставление измеренных деформаций и прогибов с теоретическими достаточно хорошо подтверждает предложенный метод их определения при работе балки в упруго-пластической стадии. Достаточная точность предложенного метода расчета

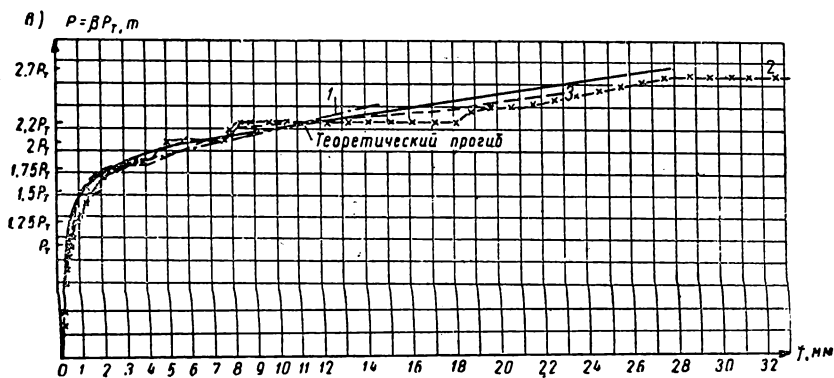
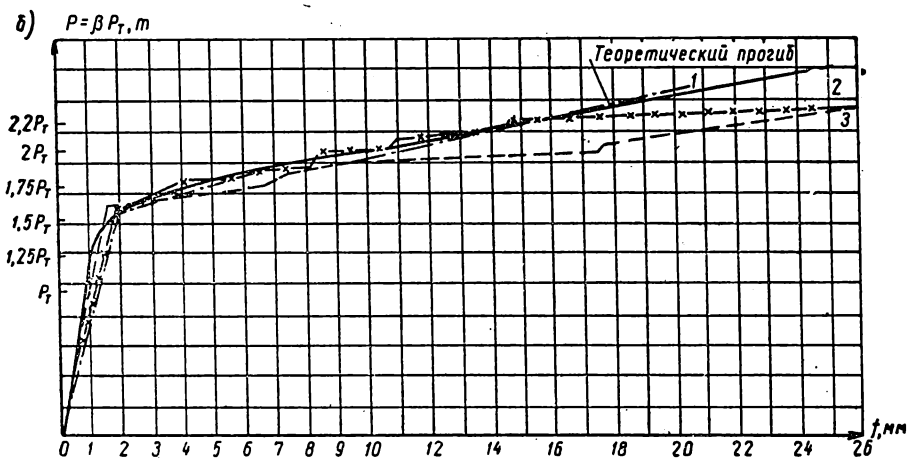
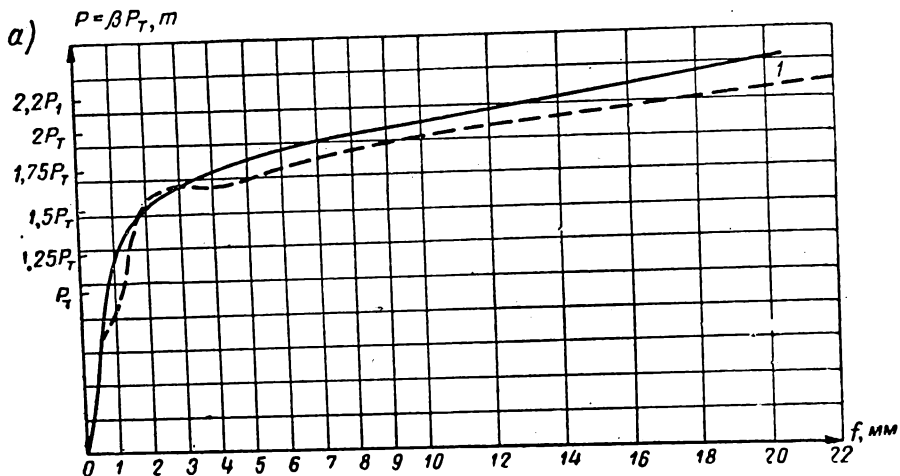


Рис. 16. Теоретические и экспериментальные прогибы балки

подтверждается испытанием балочек сечением 2×1 см, изготовленных из стали с пределом текучести 2350 кг/см^2 , характеризуемой $\lambda = 0,985$ (рис. 17). В процессе испытания была записана

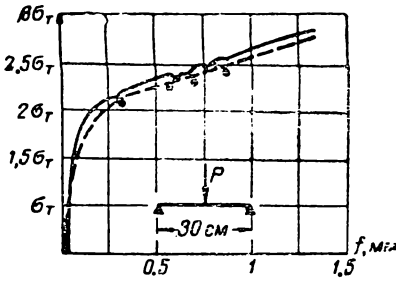


Рис. 17. Теоретические и экспериментальные прогибы в середине пролета балки

диаграмма прогибов (сплошная линия) и 4 раза были записаны показания индикатора (точки), измерявшего прогиб в середине пролета.

6. ПРОГИБЫ ТРУБЫ КАК БАЛКИ С КОНСОЛЬЮ

Рассмотрим трубу как балку с неподвижными опорами A и B , нагруженную силой P на конце консоли. Эюра отношений условных моментов к M_T показана на рис. 18.

Предположим сначала, что сечение B не поворачивается, а участки l_1 и l_2 являются консолями, нагруженными на концах силами P и R_A .

При заданных пролетах $l_1 = nl_2$ реакция на левой опоре будет $R_A = nP$, а прогибы концов консолей связаны соотношением

$$f_{l_2} = \frac{1}{n_2} f_{l_1}.$$

Это дает возможность записать величины прогибов в интересующих нас точках:

$$\left. \begin{aligned} f_{a_1} &= A_1 f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1 - a_1; \\ f_{l_1} &= A_2 f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1; \\ f_{a_2} &= \frac{1}{n_2} A_1 f_{T_1} && \text{при } x_2 = l_2 - a_2; \\ f_{l_2} &= \frac{1}{n_2} A_2 f_{T_1} && \text{при } x_2 = l_2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Величины A_1 и A_2 взяты из выражений (23) и (24), а величина

$$f_{T_1} = \frac{2\sigma_T l_1^2}{3DE}.$$

При учете поворота оси балки в сечении B на угол $\alpha = \arctg \frac{f_{l_2}}{l_2}$

полные прогибы будут:

$$\left. \begin{aligned}
 f_{\text{пол}a_1} &= \left[A + \frac{1}{n} A_2 \left(1 - \frac{1}{\beta_{\text{max}}} \right) \right] f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1 - a_1; \\
 f_{\text{пол}l_1} &= A_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1; \\
 f_{\text{пол}a_2} &= \frac{1}{n^2} \left(A_1 - \frac{1}{\beta_{\text{max}}} A_2 \right) f_{T_1} && \text{при } x_2 = l_2 - a_2; \\
 f_{\text{пол}l_2} &= 0 && \text{при } x_2 = l_2.
 \end{aligned} \right\} (30)$$

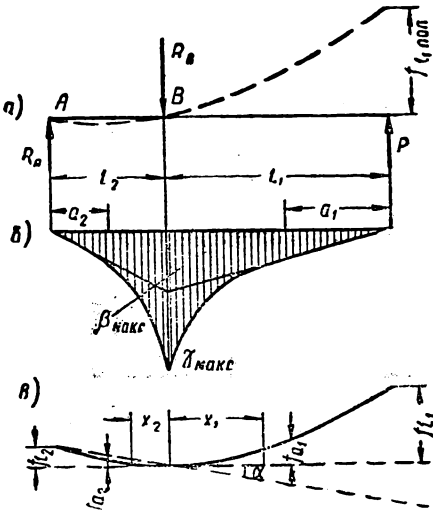


Рис. 18. Изгиб трубы как балки с консолью

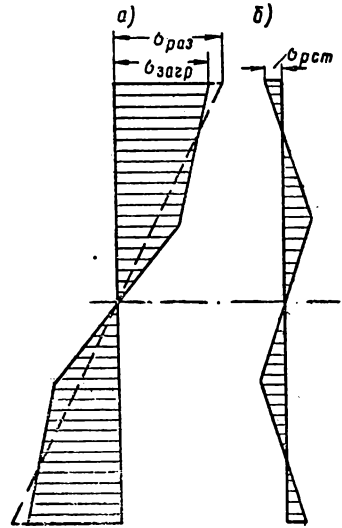


Рис. 19. Эпюра напряжений в сечении при нагружении а и после разгрузки б

7. ОСТАТОЧНЫЕ ПРОГИБЫ В ГНУТЫХ ТРУБАХ

Будем считать, что при разгрузке напряжения в каждом сечении уменьшаются по упругому закону, пропорционально уменьшению изгибающего момента.

После разгрузки консоли в сечениях, испытывающих упруго-пластические деформации, остаточные напряжения будут такими, как показано на рис. 19.

Так как деформации при разгрузке меньше, чем деформации, возникающие при загрузке за пределы упругой работы, то после разгрузки в изгибаемом элементе будут и остаточные прогибы.

Деформации и прогибы при разгрузке от воздействия $M_{\text{разгр}} = \beta M$ будут изменяться по упругому закону.

Обратный прогиб от воздействия этих моментов можно назвать упругой отдачей, величина которой равна $f_{\text{разгр}} = \beta f_{\text{T}}$.

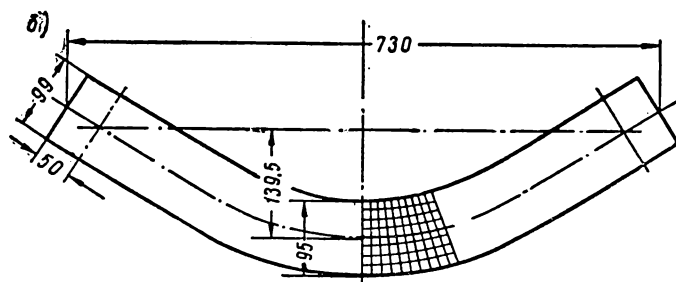
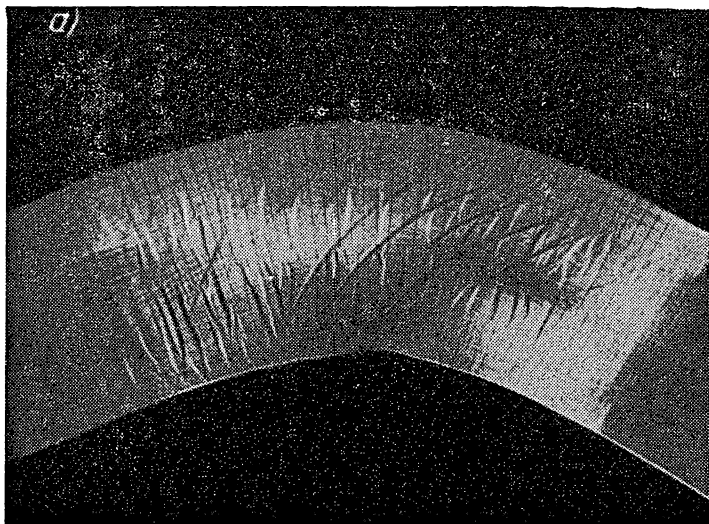


Рис. 20. Балка прямоугольного сечения после изгиба

Остаточные прогибы таким образом будут являться разностью прогибов системы, работающей в упруго-пластической стадии и упругой отдачи при разгрузке. Остаточным прогибам и деформациям отвечают остаточные изгибающие моменты $M_{\text{ост}} = M_{\text{действ}} - M_{\text{разгр}}$

Отношение этих моментов к M_T равно $\gamma - \beta$. Принимая эпюру этих моментов за фиктивную нагрузку, можно определить и остаточные прогибы.

Остаточный прогиб в точке a , например, будет

$$f_{ост a} = \frac{0,6G}{\beta_{max}^2} (\beta_{max} - 1)^5 f_T = A_3 f_{T_1}. \quad (31)$$

Остаточный прогиб конца консоли будет

$$f_{ост l} = \frac{0,15G}{\beta_{max}^2} (\beta_{max} - 1)^4 (4\beta_{max} + 1) f_{T_1} = A_4 f_{T_1}. \quad (32)$$

Остаточные прогибы в трубе как в балке с консолью (рис. 18, а) будут определяться из следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} f_{ост a_1} &= \left[A_3 + \frac{1}{n} A_4 \left(1 - \frac{1}{\beta_{max}} \right) \right] f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1 - a_1; \\ f_{ост l_1} &= A_4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) f_{T_1} && \text{при } x_1 = l_1; \\ f_{ост a_2} &= \frac{1}{n_2} \left(A_3 - \frac{1}{\beta_{max}} \right) f_{T_1} && \text{при } x_2 = l_2 - a_2; \\ f_{l_2} &= 0 && \text{при } x_2 = l_2. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

На рис. 20 показана балка прямоугольного сечения после изгиба ее силой в середине пролета с изгибающим моментом $M = 3,25M_T$. Участки, не подвергнутые упруго-пластическим деформациям, были

$$a = \frac{l}{2\beta_{max}} = 10,77 \text{ см.}$$

По расчету остаточный прогиб в середине пролета

$$f = \frac{3G (\beta_{max} - 1)^4}{4\beta_{max}} \left(1 - \frac{\beta_{max} - 1}{5\beta_{max}} \right) f_{T_1} \approx 14,04 \text{ см.}$$

Измеренный прогиб был равен 13,45 см. Сопоставление измеренных и теоретических прогибов еще раз подтверждает достаточную надежность предлагаемого метода определения полных и остаточных перемещений в элементах, подвергаемых изгибу за пределами упругости.

При холодном гнутье труб практический интерес представляют остаточные прогибы оси трубы, определенные относительно ее прямых участков, т. е. пластически недеформируемых концов длиной a_1 и a_2 (рис. 21). Принимая эпюру отношений условных изгибающих моментов к M_T за фиктивную нагрузку, можно определить и прогибы. Прогиб оси трубы в каждом сечении будет определяться как статический момент от площади фиктивной нагрузки относительно этого сечения.

Например, остаточный прогиб в сечении c (рис. 21) будет

$$f_{\text{ост } c} = \frac{0,15G}{n^2 \beta_{\text{max}}^2} (\beta_{\text{max}} - 1)^5 f_{\tau_1} = A_5 f_{\tau_1}. \quad (34)$$

Остаточный прогиб в сечении a_1 будет

$$f_{\text{ост } a_1} = \frac{0,15G}{n^2 \beta_{\text{max}}^2} (\beta_{\text{max}} - 1)^5 (4n^2 + 5n + 1) f_{\tau_1} = A_6 f_{\tau_1}. \quad (35)$$

Остаточный прогиб в конце консоли

$$f_{\text{ост } l_1} = \frac{0,15G}{n^2 \beta_{\text{max}}^2} (\beta_{\text{max}} - 1)^4 [\beta_{\text{max}} (4n^2 + 5n + 1) + n^2 - 1] f_{\tau_1} = A_7 f_{\tau_1}. \quad (36)$$

8. ИЗГИБ ТРУБ НА ГИБОЧНЫХ СТАНКАХ

На участках поворотов трубопроводов необходимо варивать колена. Колена обычно изготавливаются из тех труб, из которых монтируется вся линейная часть трубопровода.

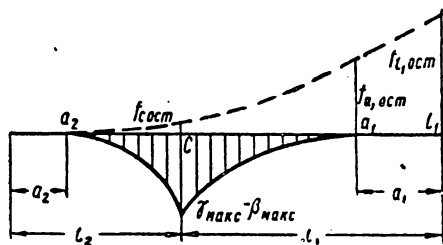


Рис. 21. Эпюра условных изгибающих моментов и эпюра остаточных прогибов относительно прямого участка A_2

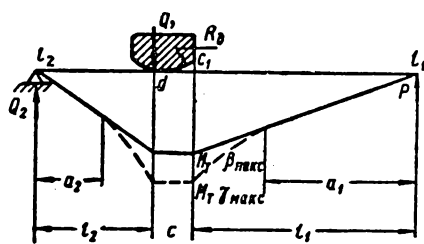


Рис. 22. Схема изгиба трубы на трубогибном станке

Каждое колено имеет прямолинейные концы и изогнутую среднюю часть, длина которой, как и угол между прямыми концами, определяется необходимым углом поворота трубопровода α .

Изготовление холоднотянутых колен в полевых условиях на трассах строящихся трубопроводов ведется на специальных трубогибных станках, процесс гнутья на которых производится по схеме двухопорной консольной балки (рис. 22).

К концу изгибаемого участка прикладывается усилие P от гибочного домкрата. Другой конец изгибаемого участка поддерживается реакцией опоры Q_2 , а изгиб происходит вокруг гибочного башмака-пуансона, очерченного по окружности радиу-

сом R_0 , с рабочей длиной s . Для гнутья труб разных диаметров применяются станки с разными параметрами (R_0, C, l и l_2).

Зная диаметр трубы, толщину ее стенки и предел текучести металла, можно определить все необходимые параметры станка для получения требуемой конфигурации колена.

В практике холодного гнутья тонкостенных труб принято отношение радиуса R_0 кривизны оси изогнутой трубы к ее диаметру D в пределах 30—35.

По заданному радиусу кривизны оси изогнутой трубы R_0 с учетом упругой отдачи после разгрузки находится радиус гибочного башмака R_0 .

Чтобы остаточные деформации в трубе достигли требуемой величины, необходимо вести изгиб в расчете на полные деформации, т. е. на

$$\epsilon_n = \epsilon_{\text{ост}} + \epsilon_{\text{отд}}. \quad (37)$$

Полная деформация ограничена кривизной гибочного башмака и будет

$$\epsilon_n = \frac{D}{2R_0 + D}.$$

Величины остаточных деформаций определяются отношением радиуса изгибаемой трубы к радиусу кривизны трубопровода, т. е. $\epsilon_{\text{ост}} = \frac{D}{2R_0}$. Деформации при упругой отдаче будут

$$\epsilon_{\text{отд}} = \frac{\sigma}{E}.$$

Этим остаточным деформациям отвечают определенные напряжения.

Из этих выражений вытекает, что радиус кривизны гибочного башмака будет

$$R_0 = \frac{D}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\text{ост}} + \frac{\sigma}{E}} - 1 \right) = \frac{D}{2} \left(\frac{2R_0 E}{DE + 2R_0 \sigma} - 1 \right). \quad (38)$$

По величине ϵ_n определяется $\gamma_{\text{max}} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_T}$, а из графика (см. рис. 12) находится и величина β_{max} .

Величины изгибаемых пролетов $l = nl_2$ и длина гибочного башмака s подбираются из конструктивных соображений.

Нагрузка, которая вызывает изгибающий момент на консоли длиной l , будет

$$P_{\text{max}} = \frac{\beta_{\text{max}} M_T}{l_1}, \quad (39)$$

где

$$M_T = \sigma_T W$$

(W — момент сопротивления трубы).

По длине гибочного башмака, имеющего форму окружности, изгибающие моменты будут иметь постоянное значение (рис. 22). В этом случае

$$Q_2 = \frac{\beta_{\max} M_T}{l_2} = \frac{n \beta_{\max} M_T}{l_1}; \quad (40)$$

$$Q_1 = P_{\max} + Q_2 = \frac{(n+1) \beta_{\max} M_T}{l_1}. \quad (41)$$

Участки трубы, не имеющие пластических деформаций, будут

$$a_1 = \frac{M_T}{P_{\max}} = \frac{l_1}{\beta_{\max}};$$

$$a_2 = a_1 \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1}{n \beta_{\max}}.$$

Прогиб конца консоли l_1 относительно неподвижной опоры d (рис. 22) будет

$$f_{l_1} = \left[3 \frac{c}{l_1} \left(1 - \frac{c}{2l_1} \right) \gamma_{\max} + \beta_{\max} + \frac{0,15G}{\beta_{\max}^2} (\beta_{\max} - 1)^4 (4\beta_{\max} + 1) \right] f_{T_1} = A_8 f_{T_1}. \quad (42)$$

Ход домкрата при первом гйбе будет

$$f_{\text{пол } l_1} = \left(A_8 + \frac{1}{n} A_2 \right) f_{T_1}. \quad (43)$$

Прогиб точки a_1 относительно неподвижной опоры d будет

$$f_{a_1} = \left\{ 3 \frac{c}{l_1} \left[\frac{c}{2l_1} + \frac{1}{\beta_{\max}} (\beta_{\max} - 1) \right] \gamma_{\max} + \frac{1}{2\beta_{\max}^2} (\beta_{\max} - 1)^2 [2\beta_{\max} + 1 + 1,2G (\beta_{\max} - 1)^3] \right\} f_{T_1} = A_9 f_{T_1} \quad (44)$$

и полный прогиб в точке a_1

$$f_{\text{пол } a_1} = \left[A_9 + \frac{1}{n \beta_{\max}} A_2 (\beta_{\max} - 1) \right] f_{T_1}. \quad (45)$$

Остаточная кривизна трубы после первого гйба определяется эпюрой остаточных изгибающих моментов, показанной пунктиром на рис. 22.

Прогибы изогнутой трубы относительно ее прямолинейного участка a_2 (см. рис. 21) будут:

$$f_{\text{ост } d} = \frac{0,15G}{n^2 \beta_{\max}^2} (\beta_{\max} - 1)^5 f_{T_1}; \quad (46)$$

$$f_{\text{ост } c} = G (\beta_{\max} - 1)^3 \left[0,15 \frac{\beta_{\max} - 1}{n \beta_{\max}} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\beta_{\max} - 1}{n\beta_{\max}} + 5 \frac{c}{l_1} \right) + 1,5 \frac{c^2}{l_1^2} \Big] f_{T_1}; \quad (47)$$

$$f_{\text{ост } a} = G (\beta_{\max} - 1)^3 \left\{ 0,15 \frac{\beta_{\max} - 1}{n\beta_{\max}} \left[\frac{\beta_{\max} - 1}{n\beta_{\max}} + 5 \left(\frac{c}{l_1} + \frac{\beta_{\max} - 1}{\beta_{\max}} \right) \right] + \right. \\ \left. + 3 \frac{c}{l_1} \left(\frac{c}{2l_1} + \frac{\beta_{\max} - 1}{\beta_{\max}} \right)^2 + 0,6 \frac{(\beta_{\max} - 1)^2}{\beta_{\max}^2} \right\} f_{T_1}; \quad (48)$$

$$f_{\text{ост } l_1} = G (\beta_{\max} - 1)^3 \left\{ 0,15 \frac{\beta_{\max} - 1}{\beta_{\max}} \left[\frac{1}{\beta_{\max}} \left(\frac{\beta_{\max} - 1}{n^2} + 4\beta_{\max} + 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{n} \left(\frac{c}{l_1} + 1 \right) \right] + 3 \frac{c}{l_1} \left(\frac{c}{2l_1} + 1 \right) \right\} f_{T_1}. \quad (49)$$

После первогогиба труба изгибается на угол

$$\alpha_1 \arctg \frac{f_{\text{ост } l_1} - f_{\text{ост } a_1}}{a_1}. \quad (50)$$

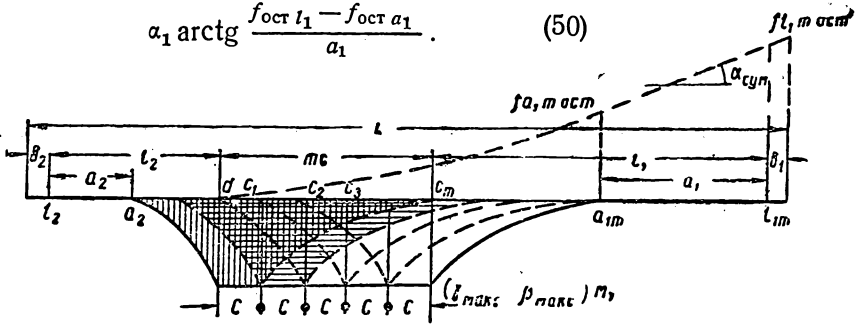


Рис. 23. Полная эпюра условных изгибающих моментов

Труба будет изогнута на участке между a_2 и a_1 . На участках a_2d и c_1a_1 (рис. 22) кривизна будет переменной, а на участке dc_1 — постоянной.

Для получения угла поворота, большего, чем α_1 , трубу необходимо подвергать повторным последовательным гибом. Для получения одинаковой кривизны в средней части колена передвигку трубы для каждого последующегогиба требуется производить на величину c .

При каждом последующемгибе изгиб будет вестись на углы, меньшие, чем α_1 . Общее число гибов m , которым можно подвергнуть трубу длиной L при передвигке ее после каждогогиба на длину c (рис. 23) с учетом концов b_1 и b_2 , выходящих за опоры, будет определяться из выражения

$$m = \frac{L - (b_1 + b_2 + l_1 + l_2)}{c}. \quad (51)$$

Общая эпюра условных изгибающих моментов после всех гибов получается путем суммирования (наложения) эпюр ус-

ловных моментов от каждогогиба. На рис. 23 эпюра остаточных моментов после первогогиба отмечена вертикальной штриховкой, а после второгогиба — горизонтальной. До каждого последующегогиба труба предыдущимигибами пластически деформирована. Вследствие этого при последующем нагружении пластически деформированные зоны работают упруго, а новые остаточные деформации получаются только в тех точках сечений, которые подвергаются большим напряжениям, чем во время предыдущегогиба.

Суммарный уголгиба определяется из эпюры условных изгибающих моментов, которые принимаются за фиктивную нагрузку:

$$\alpha_{\text{сум}} = \text{arctg} \frac{f_{\text{ост}m l_1} - f_{\text{ост}m a_1}}{a_1}, \quad (52)$$

где

$$f_{\text{ост} m l_1} = G (\beta_{\text{max}} - 1)^3 \left\{ 0,15 \frac{\beta_{\text{max}} - 1}{\beta_{\text{max}}} \left[\frac{1}{\beta_{\text{max}}} \left(\frac{\beta_{\text{max}} - 1}{n^2} + 4\beta_{\text{max}} + 1 \right) + \frac{5}{n} \left(m \frac{c}{l_1} + 1 \right) \right] + 3m \frac{c}{l_1} \left(m \frac{c}{2l_1} + 1 \right) \right\} f_{\tau_1}; \quad (53)$$

$$f_{\text{ост} m a_1} = G (\beta_{\text{max}} - 1)^3 \left\{ 0,15 \frac{\beta_{\text{max}} - 1}{n\beta_{\text{max}}} \left[\frac{\beta_{\text{max}} - 1}{n\beta_{\text{max}}} + \frac{5}{n} \left(m \frac{c}{l_1} + \frac{\beta_{\text{max}} - 1}{\beta_{\text{max}}} \right) \right] + 3m \frac{c}{l_1} \left(m \frac{c}{2l_1} + \frac{\beta_{\text{max}} - 1}{\beta_{\text{max}}} \right) + 0,6 \frac{(\beta_{\text{max}} - 1)^2}{\beta_{\text{max}}^2} \right\} f_{\tau_1}. \quad (54)$$

Угол каждого последующегогиба после первого будет

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = \frac{\alpha_{\text{сум}} - \alpha_1}{m - 1}. \quad (55)$$

9. ГНУТЬЕ ТРУБ ДИАМЕТРОМ 1020 мм НА СТАНИНЕ УГТ-8

По техническому заданию, разработанному ВНИИСТом на основе изложенного метода расчета, специальное конструкторское бюро Газстроймашина разработало проект станка УГТ-8 для гнутья труб диаметром 1020 мм, а завод МЭМ-3 изготовил три экземпляра этого станка (рис. 24).

Станки рассчитаны на двустороннее стеснение труб в зоне наибольшего изгиба. До начала изгиба труба располагается между ложементом и гибочным башмаком. Изгибающую трубу усилие передается через ложемент, а изгиб ведется в вертикальной плоскости.

Во время пробных гибов труб на изготовленных станках передвижка их производилась на 0,8; 1; 1,3 и 1,4. Схемы кри-

визн труб после изгиба с передвижкой на разные величины показаны на рис. 25.

Труба № 1 имела длину 11,85 м и подвергалась четырем гибам. Для каждого последующего гiba она передвигалась на

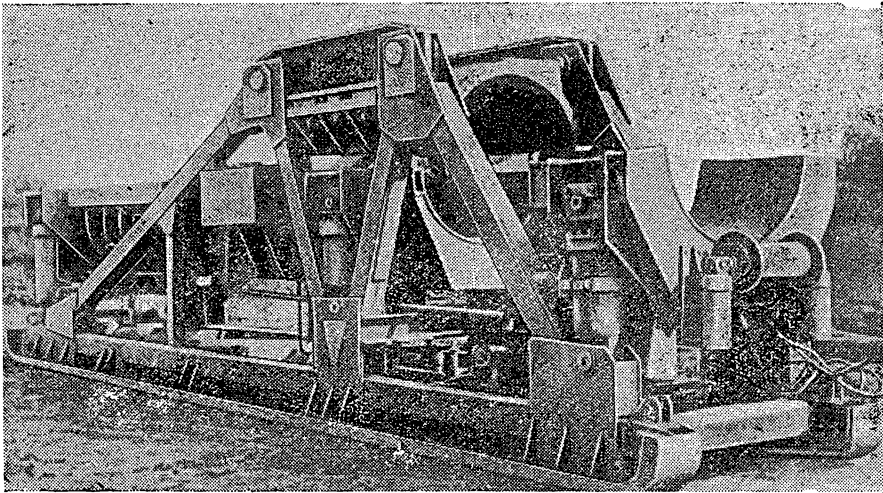


Рис. 24. Общий вид станка УГТ-8

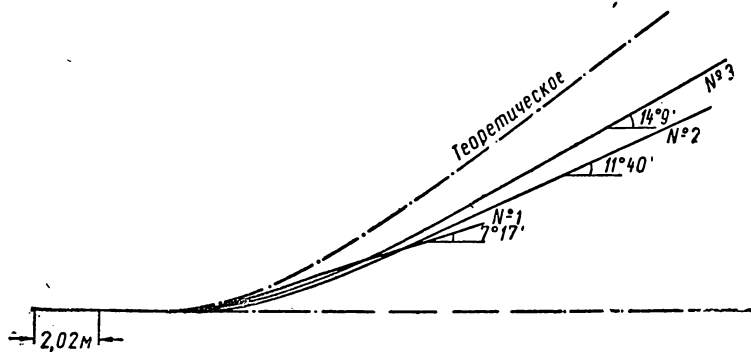


Рис. 25. Кривизна труб диаметром 1020 мм после изгиба на станке УГТ-8

0,8 м. Прямой участок у всех труб с учетом некоторого выступа их за упорный ложемент был равен 202 см. Зона кривизны на трубе № 1 равнялась $3,5 \cdot 0,65 + 3 \cdot 0,8 = 4,67$ м. В результате труба была согнута на угол $7^{\circ}17'$.

Труба № 2 длиной 23,7 м подвергалась семи гибам с перемещением для каждого последующего гiba на 1,3 м. Зона кри-

визны трубы равнялась $3,5 \cdot 0,65 + 6 \cdot 1,3 = 10,07$ м. В результате всех гибов труба была согнута на $11^{\circ}40'$.

Труба № 3 длиной 23,7 м подвергалась также семи гибам с передвижкой для каждого последующегогиба на 1 м.

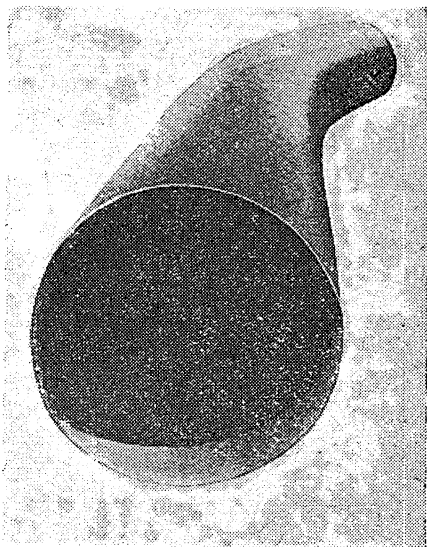


Рис. 26. Труба, изогнутая на станке

Все трубы были согнуты без гофр в сжатой зоне. Если бы труба № 1 имела большую длину и подвергалась последующим гибам, то при кривизне на такой же длине, как и в трубах № 2 и 3, т. е. на длине 10,7 м, она была бы согнута на $18^{\circ}34'$ (пунктир с точкой на рис. 25).

Одна из труб после первогогиба имела угол загиба $6^{\circ}35'$ вместо допустимого угла в $2^{\circ}48'$. Для второгогиба труба передвигалась на 1,4 м и изгибалась еще на $3^{\circ}20'$. Во время третьегогиба при передвижке на 120 см труба сломалась с потерей устойчивости стенки в сжатой зоне.

Проведенные опыты дали достаточно убедительные результаты и показали, что на гибочном станке имеется возможность гнуть трубы на различные радиусы закруглений. Общий вид изогнутой трубы показан на рис. 26.

10. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛА ПРИ КАЛИБРОВКЕ ТРУБ

Применение прогрессивных методов монтажа трубопроводов, в том числе гнутья труб и автоматических методов сварки их стыков, во многом зависит от величины допусков на геометрические размеры и форму труб.

Стандартом допускается неравномерность толщины листа по его длине и ширине с уменьшением до 10% от номинальной толщины. Фактическая разность между наибольшей и наименьшей толщиной в листе достигает 12%.

Механические характеристики металла по длине и ширине листов также разнятся. Если допустить, что по всей ширине листа предел текучести одинаков, то от внутреннего давления пластические деформации в металле будут интенсивно развиваться в сечениях с меньшей толщиной стенок. Обычно меньшая толщина листов распространяется на 20—25% от полной их ширины с понижением толщины к кромкам. При отношении

$\frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}} = r$ (рис. 27) напряжения в более тонких местах стенок будут $\sigma_{\max} = r\sigma_{\min}$. Толщина стенки от δ_{\max} до δ_{\min} обычно изменится равномерно.

Как было указано ранее, модули упругости стали 19Г в упруго-пластической стадии будут $E_{T_1} = \frac{E}{n}$ и $E_{T_2} = \frac{E}{m}$, а $n=50$ и $m=300$.

Если длина участка стенки трубы с меньшей толщиной равна $b\pi D$, то в случае деформирования металла примерно на 3% выражение среднего относительного удлинения всего периметра трубы будет

$$\epsilon_{\text{ср}} = \left(1 + \frac{b}{2}\right) \epsilon_{\min} + \frac{b}{2} \epsilon_{\max}. \quad (56)$$

Так как

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_{\min} + \frac{m(r-1)}{E} \sigma_{\min}; \quad (57)$$

$$\epsilon_{\min} = 0,02 + \frac{(\sigma_{\min} - \sigma_{2\%})m}{E}; \quad (58)$$

$$\sigma_{2\%} = \frac{E}{n} [0,02 + (n-1) \epsilon_T], \quad (59)$$

то

$$\epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_{\text{ср}} - \frac{b}{2}(r-1) \left[0,02 \left(\frac{m}{n} - 1 \right) + \frac{m}{n}(n-1) \epsilon_T \right]}{1 + \frac{b}{2}(r-1)} \quad (60)$$

и

$$\epsilon_{\max} = \frac{r\epsilon_{\text{ср}} + \left(1 - \frac{b}{2}\right)(r-1) \left[0,02 \left(\frac{m}{n} - 1 \right) + \frac{m}{n}(n-1) \epsilon_T \right]}{1 + \frac{b}{2}(r-1)}. \quad (61)$$

Например, при $b=0,2$; $r=1,15$; $\epsilon_{\text{ср}}=0,03$ и $\epsilon_T=0,0017$ относительные удлинения в наиболее тонком месте трубы будут равны 11,4%, тогда как в местах номинальной толщины удлинения будут только 2,07%.

Если при экспандировании средние относительные удлинения не будут превосходить 1%, то

$$\epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_{\text{ср}} - \frac{b}{2} n (r-1) \epsilon_T}{1 + \frac{b}{2} (n-1)} \quad (62)$$

и

$$\epsilon_{\max} = \frac{r\epsilon_{\text{ср}} + \left(1 - \frac{b}{2}\right) n (r-1) \epsilon_T}{1 + \frac{b}{2} (n-1)}. \quad (63)$$

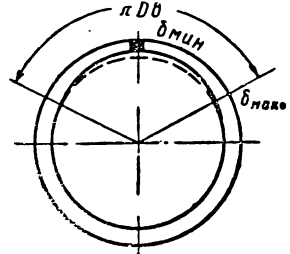


Рис. 27. Поперечное сечение

труб

При тех же значениях b , r и ε_r наибольшие относительные удлинения будут равны примерно 2,3%, а наименьшие — 0,87%.

Из приведенных численных значений видно, что деформации по длине окружности трубы при неодинаковой толщине стенки могут быть резко различны, причем величины их зависят как от соотношения толщин в стенке, так и от отношения участка с меньшей толщиной ко всей длине окружности. При

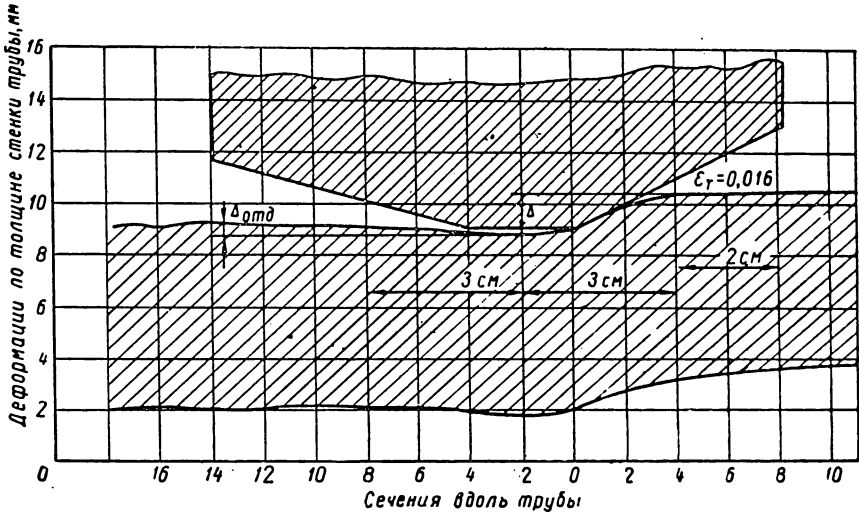


Рис. 28. Деформации стенок труб при дорновании

вытяжке металла экспандированием на 1—1,2% опасных деформаций не будет.

Неравномерность деформаций уменьшается, если раздача трубы будет вестись жесткой, неизменяемой системой, т. е. дорном.

При вытяжке труб дорном контакт стенки трубы с ним в продольном направлении распространяется лишь на небольшую длину (рис. 28). В статье канд. техн. наук М. И. Чепурко [2] приведены данные изучения внеконтактной деформации стенок труб при дорновании.

Протяжке подвергались трубы внутренним диаметром $d=59$ и $59,4$ мм, толщиной стенки 11 и 20 мм. Раздача осуществлялась дорном диаметром 64 и 68 мм с углами конусности 3, 6, 9 и 12° . При испытании выяснялась протяженность контакта дорна со стенкой трубы в процессе дорнования.

Протяженность контакта можно выразить функцией от величины раздачи трубы и угла конусности, т. е.

$$a = \eta \frac{D_d - d}{\operatorname{tg} \alpha},$$

где η — некоторый коэффициент;
 D_d — диаметр дорна;
 α — угол скоса дорна.

По данным проведенных опытов построен график (рис. 29) значений η при протяжке труб дорном с углом конусности 6° .

Из графика видно, что коэффициент η зависит от величины вытяжки при дорновании. Влияние отношения толщины стенки к начальному диаметру трубы практически можно не учитывать.

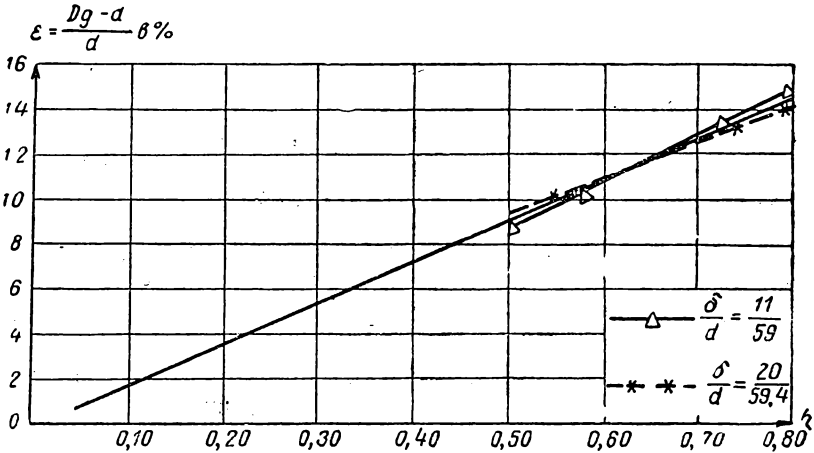


Рис. 29. График изменения η в зависимости от величины вытяжки металла

При тонкостенных трубах можно считать, что суммарное давление на дорн складывается из усилий, вызываемых деформациями стенок при их растяжении в кольцевом направлении.

Максимальные деформации в кольце будут $\varepsilon_{\max} = \frac{D_d - d}{d_{\text{ср}}}$,
 где $d_{\text{ср}}$ — средний диаметры трубы.

Максимальное напряжение в дорнуемой трубе

$$\sigma = \frac{(D_d - d) E}{n d_{\text{ср}}} + \frac{\sigma_T}{n} (n - 1). \quad (64)$$

Давления по длине стенки трубы будем принимать пропорциональными напряжениям

$$q = \frac{2\sigma}{d_{\text{ср}}}. \quad (65)$$

Из данных проведенных опытов получается, что деформации ε_T располагаются в сечениях на расстоянии $\frac{L}{4}$ от начала деформированной зоны. Примем изменения усилий от g_T (усилие

при начале текучести в стенке трубы) до g линейным. В этом случае суммарное давление на стенку трубы составит

$$Q = \frac{g\tau L}{12} + \frac{(g + g\tau) 0,375L}{2} + \frac{0,375Lg}{3} = (0,271g\tau + 0,312g)L. \quad (66)$$

Пользуясь выражениями (64) и (65), пренебрегая величиной $\frac{\sigma\tau}{h}$ и беря из опытов $L=8$ см, получим

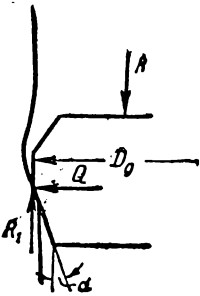


Рис. 30. Распределение усилий при дорновании

$$Q = \frac{\delta}{d_{cp}} \left[9,28\sigma\tau + 4,96 \frac{D_d - d}{d_{cp}} \cdot \frac{E}{n} \right]. \quad (67)$$

Из приведенного выражения следует, что суммарное давление, передаваемое от дорна на единицу длины стенки, зависит от толщины стенки δ , величины раздачи трубы и величины предела текучести металла.

При протяжке дорна для раздачи трубы на заданную величину необходимо приложить к нему усилие R (рис. 30). На единице длины окружности трубы с учетом сил трения $R_1 = \frac{R}{\pi D_d} - Qf$.

На контакте стенки трубы и дорна силы R_1 и Q уравновешены. Из этого следует, что

$$Q \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\pi D_d} - Qf, \quad (68)$$

где f — коэффициент трения.

Из выражений (67) и (68) следует, что

$$R = \pi D_d (\operatorname{tg} \alpha + f) Q = \frac{\pi D_d \delta}{d_{cp}} (\operatorname{tg} \alpha + f) \left[9,28\sigma\tau + \frac{4,96 (D_d - d) E}{nd_{cp}} \right]. \quad (69)$$

Из данных опытов коэффициент трения f получился равным 0,095.

Напряжение на наружной поверхности трубы, которое можно принимать за предел текучести после дорнования, будет

$$\sigma = \frac{1}{n} \left[\frac{D_d - d}{d + 2\delta} E + (n - 1) \sigma\tau \right]. \quad (70)$$

Относительное удлинение металла на наружной поверхности трубы будет

$$\varepsilon = \frac{D_d - d}{d + 2\delta}. \quad (71)$$

Для изучения процесса деформирования металла тонкостенных труб при дорновании во ВНИИСТе были проведены экспериментальные исследования. Дорнованию подвергались трубы с наружным диаметром 168 мм и толщиной стенок около 8 мм. В процессе дорнования производились тщательные замеры геометрических размеров труб и деформаций металла. До дорнования у всех образцов труб были подвергнуты обточке наружные поверхности. Длина образцов труб была равна 390 мм. По наружной поверхности труб были нанесены продольные и кольцевые риски. Раздача труб производилась на гидравлическом прессе дорнами диаметром 15,4 и 15,6 см (рис. 31).

Металл трубы до дорнования характеризовался пределом текучести $\sigma_{\tau} = 3320$ и пределом прочности $\sigma_{\text{пр}} = 4480 \text{ кг/см}^2$. По диаграмме напряжений — деформаций было установлено, что напряжения при относительных деформациях в 3% были равны 4000 кг/см^2 . Модуль упругости $E_{\tau_1} = 24\,000 \text{ кг/см}^2$; $n = \frac{E}{E_{\tau_1}} = 88$; $E_{\tau_2} = 7350 \text{ кг/см}^2$ и $m = \frac{E}{E_{\tau_2}} = 286$.

Наружный диаметр испытываемой трубы был равен $167,29 + 0,16 - 0,12 \text{ мм}$, а внутренний — $153,39 + 0,42 - 0,52 \text{ мм}$. Дорнование трубы осуществлялось дорном с диаметром 156 мм. В результате протяжки дорна получились приращения диаметров трубы, очень близкие к разности диаметров дорна и фактического внутреннего диаметра трубы (рис. 32).

Этот опыт указывает на то, что деформации металла трубы происходили равномерно и отвечали заданной вытяжке, равной разности диаметров.

В табл. 6 приводятся данные результатов протяжки труб дорном диаметром 156 мм с углом конусности $\alpha = 6^\circ$.

Таблица 6

№ п/п	Внутренний диаметр в мм	Приращение диаметров в мм	Усилия в т		Предел текучести в кг/см ²			Раздача в %	
			расчетные	фактические	до дорнования	расчетные после дорнования	фактические после дорнования	расчетная	фактическая
0	153,3	7	11,98	11,5	} 3320	3840	} 3790	1,61	1,52—1,7
1	153,6	9,1	12,94	—		3820		1,42	—
2	153,5	7,5	12,38	12,5		3870		1,49	—
4	152,7	7,6	12,48	12,5		3960		1,97	1,9
5	153,1	7,2	12,18	12		3840		1,73	2

При дорновании дорном $D_d = 15,4 \text{ см}$ с раздачей трубы на $1,34 \text{ мм}$, т. е. на $0,84\%$, внутренняя овальная поверхность стала

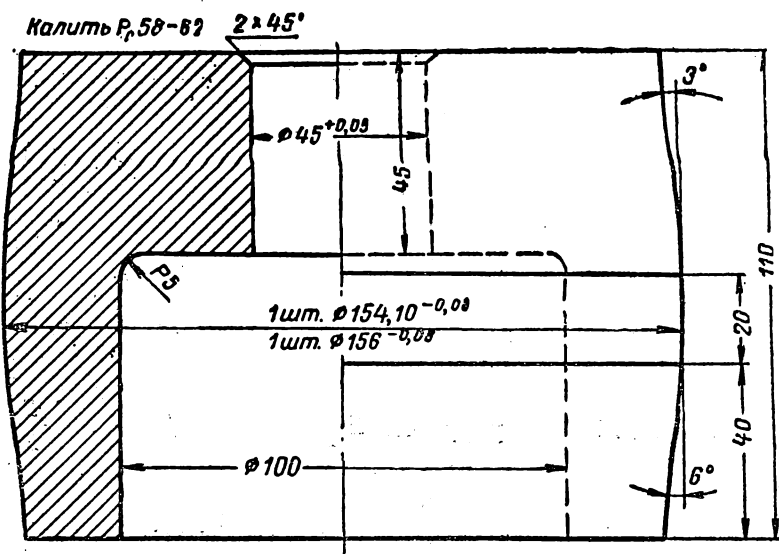


Рис. 31. Поперечный разрез дорна

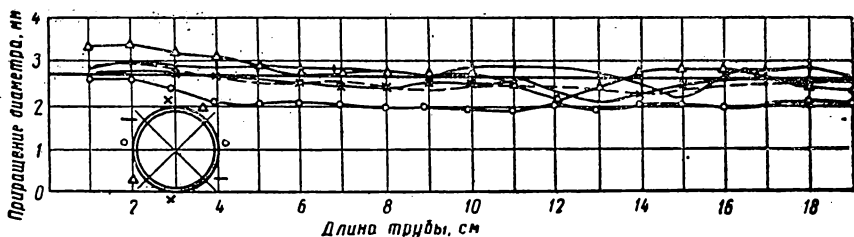


Рис. 32. Приращения диаметром трубы после дорнования

— фактическое удлинение ослабленной зоны и части трубы; - - - среднее относительное удлинение

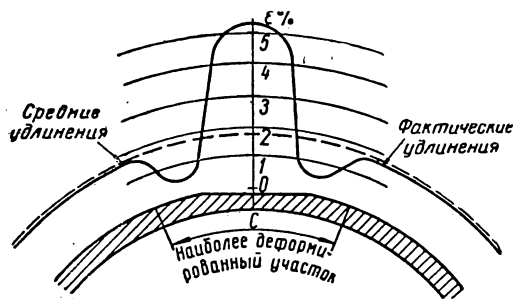


Рис. 33. Деформации стенок трубы при дорновании

цилиндрической с отклонениями в размерах диаметров $\pm 0,1$ мм. Измеренные относительные деформации на наружной поверхности трубы были несколько больше 0,7%. Расчетные же деформации были равны 0,8%. Этот результат показывает, что калибрование труб происходит и при раздаче их всего на 1%.

Для выяснения влияния местных ослаблений толщины стенки трубы № 4 снятием фаски (рис. 33) уменьшена с 7,35 до 4,96 мм, т. е. примерно на 32%. Раздача этой трубы осуществлялась дорном диаметром 154,6 мм.

Средние относительные удлинения на наружной поверхности неослабленных стенок трубы должны быть

$$\epsilon = \frac{D_d - d}{d + 2\delta} = 0,0195 = 1,95 \%$$

Измеренные удлинения оказались равными 1,9%. В месте среза металла изменение относительных удлинений в стенке трубы было неравномерным. В наиболее тонком месте деформации доходили до 5,3%, а справа и слева от максимального значения они уменьшались до 0,5%.

За счет повышения деформаций в наиболее ослабленных сечениях растягивающие усилия в стенке по длине дуги уменьшались. Но в среднем на некотором участке ϵ средние относительные удлинения оказывались такими же, как и в неослабленных участках.

Этот опыт показывает, что относительные удлинения при дорновании жестким дорном распределяются равномернее, чем при гидравлической вытяжке металла. При экспандировании относительные удлинения на участке стенки с наименьшим сечением были бы более 15%. Таких относительных удлинений ослабленная зона не могла бы выдержать, и неизбежно происходило бы разрушение трубы.

При наличии в трубах продольных сварных швов дорнование необходимо вести с пазом в дорне, который должен охватывать шов. Для выяснения характера и величины деформаций в зоне сварного шва труба № 5 была разрезана, а затем сварена продольным швом. Для прохождения дорна в нем был вырезан паз шириной 15 мм.

Измеренные деформации вне зоны сварного шва составляли также около 1,7%. Деформации в зоне шва, как и в зоне ослабленного сечения, были также неравномерные. В среднем сечении по шву остаточные удлинения были равны лишь 0,2%. Зато в соседних зонах шва деформации резко возрастали и достигали 5,8%. В общем же, как и в первом случае, средние удлинения на участке со сварным швом оказались такими же, как и на участках вне зоны шва.

Данные опыта показывают, что паз в дорне необходимо делать минимальной ширины, определяемой необходимостью пропустить шов по всей длине трубы.

Для изучения влияния процесса дорнования на изменение геометрической формы трубы было произведено предварительное смятие труб № 1 и 2, после чего они подвергались дорнованию. Поверхность труб после дорнования принимала цилиндрическую форму.

Проведенное изучение процесса упруго-пластического деформирования тонкостенных труб при калибровке жестким дорном с раздачей в пределах 0,8—1,7% дает возможность получать правильную геометрическую форму внутренней поверхности труб с относительно небольшими отклонениями от среднего диаметра.

Если упруго-пластическое деформирование металла в трубах использовать только для придания им правильной геометрической формы, а не стремиться искусственно повышать предел текучести, то калибровка дорнованием может оказаться эффективной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туркин В. С., Исследование упруго-пластической работы стальных неразрезных балок. Расчет металлических конструкций с учетом пластических деформаций. Сборник под ред. проф. С. А. Бернштейна, Госстройиздат, 1938.
 2. Чепурко М. И., Внеконтактная деформация при производстве труб и ее влияние на сопротивление деформации. Всесоюзный научно-исследовательский трубный ин-т. «Бюллетень научно-технической информации» № 4 и 5, Metallurgizdat, Харьков, 1958.
-

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ И РАМ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопросы устойчивости, связанные с центральным приложением нагрузки, являются в известной степени условными, так как центрального сжатия практически получить невозможно. Для определения фактической несущей способности реальных конструкций нужно решать задачу о состоянии их предельного равновесия с учетом развития пластических деформаций в части конструкции.

Однако из-за большой трудности решения задач в такой постановке иногда целесообразны более схематизированные постановки задач, основанные на рассмотрении центрального сжатия, тем более что и в такой упрощенной постановке в ряде случаев достаточно четко вскрывается физический смысл некоторых явлений, свойственных всем задачам устойчивости.

В статье излагаются методы расчета на устойчивость стержней и рам, основанные на использовании криволинейной зависимости между напряжением и относительным удлинением материала. Особенно большое значение этот вопрос приобретает в связи с применением новых строительных материалов: алюминиевых сплавов и пластмасс, имеющих криволинейную диаграмму «напряжение — деформация».

На основе полученной аналитической зависимости $\sigma - \epsilon$ сделано распространение теории Энгессера—Кармана (или Энгессера—Шенли) на упруго защемленные стержни различных сечений и рамные системы. Поскольку рассматриваемый здесь вид потери устойчивости является, по существу, потерей устойчивости в смысле Эйлера с той лишь разницей, что жесткость сжатых стержней зависит от величины напряжений в этих стержнях, такие задачи могут быть достаточно просто исследованы путем применения аппарата устойчивости упругих систем.

Изложение построено на основе максимального использования существующих методов расчета стержневых систем к задаче расчета, учитывающей влияние пластических деформаций на устойчивость рам.

В статье рассмотрена плоская форма потери устойчивости без учета изгибно-крутильных деформаций.

2. ДИАГРАММА «НАПРЯЖЕНИЕ — ДЕФОРМАЦИЯ»

В работе [7] указывается, что уравнение

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + a^* \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (2.1)$$

может представлять зависимость «напряжение — деформация» для всех конструкционных материалов с достаточной для инженерных целей точностью.

Запишем уравнение (2.1) в виде

$$\varepsilon = A_1 \sigma + A_2 \sigma^m, \quad (2.2)$$

где A_1 , A_2 и m — произвольные постоянные, определяемые из диаграммы работы материала.

Допустим, что материал стержня имеет диаграмму работы, которая получена экспериментальным путем, показанную на рис. 1, а.

Величины $\underline{\varepsilon}_n$ и $\underline{\sigma}_n$ соответствуют наибольшим значениям кривой $\sigma(\varepsilon)$, \bar{p}_1 и \bar{p}_2 — заштрихованные площади.

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \sigma_n \varepsilon_n. \quad (2.3)$$

Для определения произвольных постоянных A_1 , A_2 и m используем следующие условия.

1. Значения σ_n и ε_n , полученные экспериментально и теоретически (по искомой кривой), должны совпадать

$$\varepsilon_n = A_1 \sigma_n + A_2 \sigma_n^m. \quad (2.4)$$

2. Площади \bar{p}_1 , ограниченные кривой (2.2), осью $O\sigma$ и прямой $\sigma = \sigma_n$, полученные экспериментально и теоретически, должны также совпадать. Другими словами, удельные работы деформации, полученные экспериментально и теоретически (по искомой кривой), должны быть одинаковыми¹:

$$\bar{p}_1 = \int_0^{\sigma_n} \varepsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_n} (A_1 \sigma + A_2 \sigma^m) d\sigma = A_1 \frac{\sigma_n^2}{2} + A_2 \frac{1}{m+1} \sigma_n^{m+1}. \quad (2.5)$$

¹ Это условие использовано автором по совету канд. техн. наук П. А. Лукаша (см. его статью в этом сборнике).

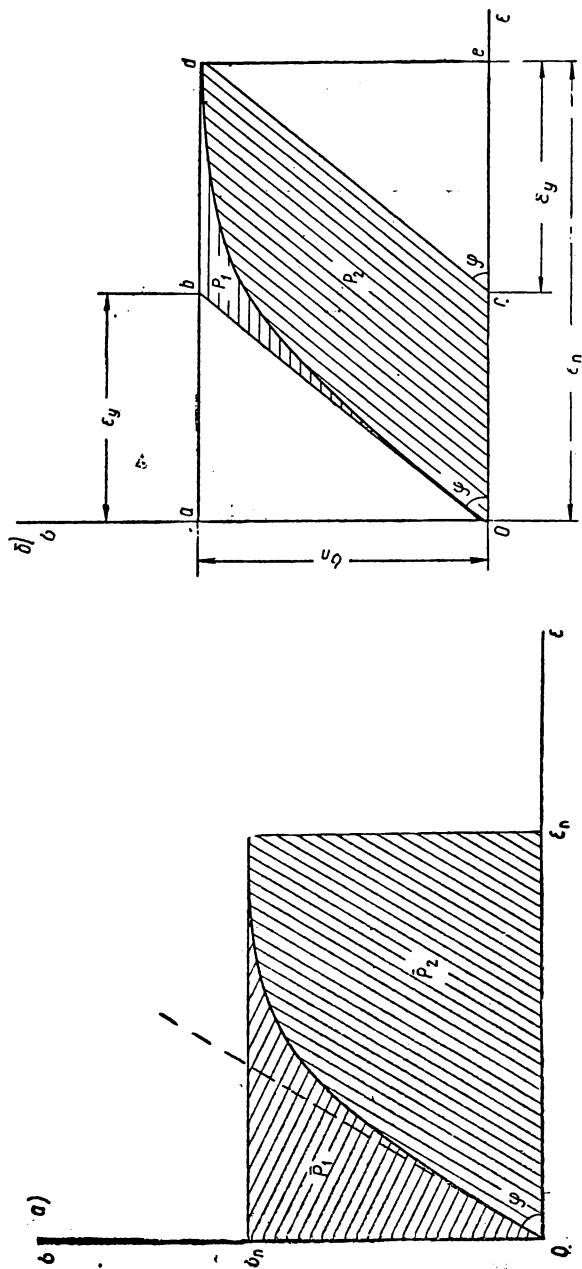


Рис. 1. К аппроксимации диаграммы «напряжение — деформация»

3. В начале координат угол наклона кривой (2.2) к оси O должен равняться начальному модулю упругости материала E . Продифференцируем (2.2) по ε :

$$1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (A_1 + A_2 m \sigma^{m-1}),$$

откуда

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{A_1 + A_2 m \sigma^{m-1}}. \quad (2.6)$$

При $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$ получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E = \frac{1}{A_1} \quad \text{или} \quad A_1 = \frac{1}{E}. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) справедливо в случае, когда $m > 1$. В дальнейшем будет показано, что для всех строительных материалов всегда $m > 1$ [см. формулу (2.13)].

Решая систему уравнений (2.4) и (2.5), получим

$$A_2 = \frac{1}{\sigma^m} \left(\varepsilon_n - \frac{\sigma_n}{E} \right); \quad (2.8)$$

$$m = \frac{\bar{p}_2 - \frac{\sigma_n^2}{2E}}{\bar{p}_1 - \frac{\sigma_n^2}{2E}}. \quad (2.9)$$

Из рис. 1, б устанавливаем

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_n}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sigma_n}{E}. \quad (2.10)$$

Площадь треугольника oab (или cde) равна

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon_y \sigma_n = \frac{\sigma_n^2}{2E}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) формула (2.9) получит вид

$$m = \frac{\bar{p}_2 - p}{\bar{p}_1 - p} \quad (2.12)$$

или

$$m = \frac{p_2}{p_1}, \quad (2.13)$$

где $p_2 = \bar{p}_2 - p$ и $p_1 = \bar{p}_1 - p$ (рис. 1, б).

Внося значения A_1 , A_2 и m в формулу (2.4), получим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_n} + \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_y} - 1 \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m. \quad (2.14)$$

Таблица 1

№ п/п	Материал	σ_p в кг/см ²	ϵ_p	R_2 (в усл. ед.)	E в кг/см ²	ϵ_y	R_2 (в усл. ед.)	m	Закон «напряжение—деформация»
1	24 S-T (gewalzt)	3 200	0,008	4,2	725 000	0,00441	41,8	9,95	$\frac{\epsilon}{0,00441} = \frac{\sigma}{3 200} + 0,813 \left(\frac{\sigma}{3 200} \right)^{9,95}$
2	24 S-T (geprest)	4 280	0,01	3,8	752 000	0,0057	69,3	18,2	$\frac{\epsilon}{0,0057} = \frac{\sigma}{4 280} + 0,755 \left(\frac{\sigma}{4 280} \right)^{18,20}$
3	75 S-T (Alclad-Blech)	5 080	0,012	5,3	695 000	0,00731	91,2	17,2	$\frac{\epsilon}{0,00731} = \frac{\sigma}{5 080} + 0,64 \left(\frac{\sigma}{5 080} \right)^{17,20}$
4	75 S-T (gewalzt)	6 170	0,012	2,4	762 500	0,0081	94	39,2	$\frac{\epsilon}{0,0081} = \frac{\sigma}{6 170} + 0,481 \left(\frac{\sigma}{6 170} \right)^{39,20}$
5	Древесина	322	0,0055	9	100 500	0,0032	108,6	12,07	$\frac{\epsilon}{0,0032} = \frac{\sigma}{322} + 0,719 \left(\frac{\sigma}{322} \right)^{12,07}$
6	Армированный бетон	180	0,00395	16,1	240 000	0,00075	127,8	7,94	$\frac{\epsilon}{0,00075} = \frac{\sigma}{180} + 4,27 \left(\frac{\sigma}{180} \right)^{7,94}$

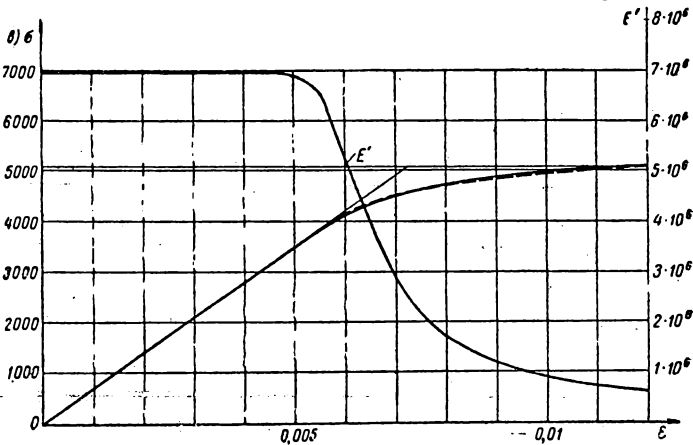
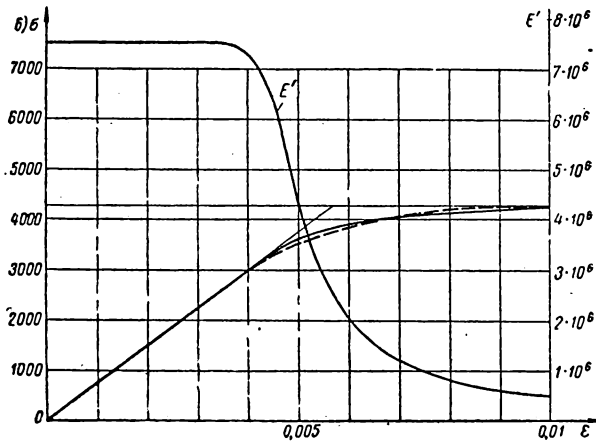
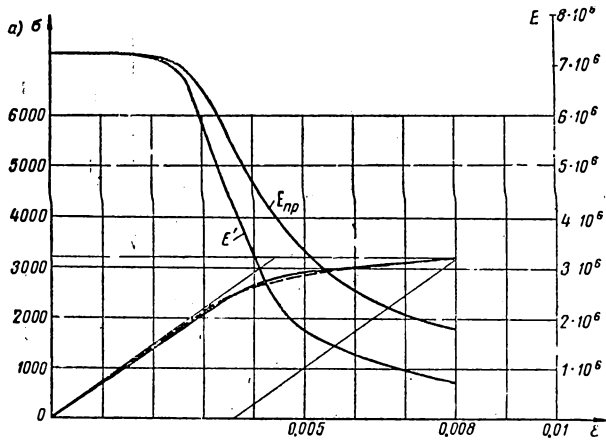
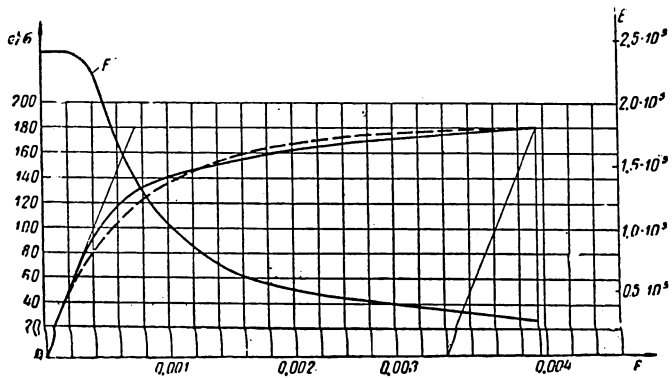
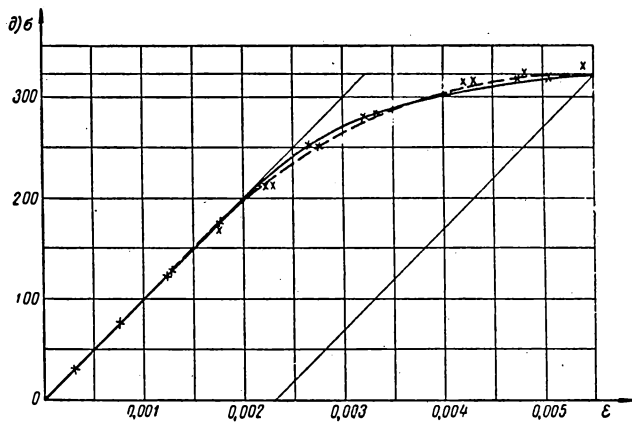
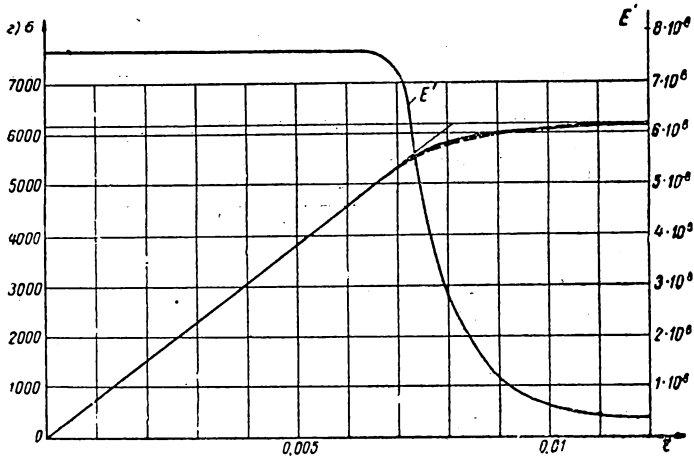


Рис. 2. Диаграммы «напряжение — деформация»
 а, б, в — для алюминиевых сплавов; д —



мация» для различных материалов
 для древесины; ϵ — для армированного бетона.

Для аналитической аппроксимации закона «напряжение—деформация» необходимо экспериментально получить значения σ_n , ϵ_n , ρ_1 и E .

Выражение для касательного модуля можно получить, про дифференцировав по ϵ (2.14):

$$E' = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = E \frac{\sigma}{\sigma_n} \cdot \frac{1}{\Phi(\sigma)}, \quad (2.15)$$

где

$$\Phi(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma_n} + m \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon_y} - 1 \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m. \quad (2.16)$$

В качестве примера покажем способ аппроксимации диаграмм «напряжение—деформация» для алюминиевых сплавов [9], древесины [2] и армированного бетона [5].

В табл. 1 приведены основные параметры диаграмм, полученные экспериментальным путем и взятые из соответствующих литературных данных. В последнем столбце табл. 1 выписаны аналитические выражения законов «напряжение—деформация», полученные по формуле (2.14).

На рис. 2,а—е пунктирными линиями нанесены экспериментально полученные диаграммы, сплошными линиями показаны кривые $\sigma(\epsilon)$, построенные по полученным в табл. 1 формулам.

На рис. 2,а—г, е показаны законы изменения касательных модулей E' . Эти кривые построены по формуле (2.15).

На рис. 2,а построена кривая приведенного модуля E_{np} для прямоугольного сечения (см. формулу п. 1 табл. 2).

3. СТЕРЖНИ

Критические напряжения стержней, теряющих устойчивость в упруго-пластической стадии, в принципе могут быть определены из формулы

$$\nu = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{KE}}, \quad (3.1)$$

$$\lambda = \frac{l}{\rho} \left(\rho = \sqrt{\frac{J}{F}} \right); \quad (3.2)$$

где

$\sigma_{кр}$ — критическое напряжение в стержне;

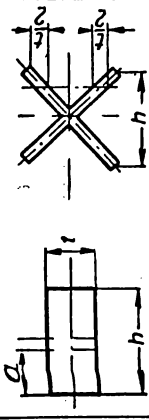
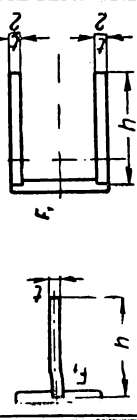
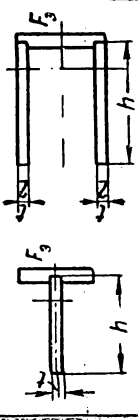
ν — коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня на концах.

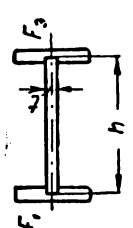
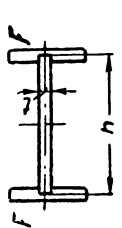
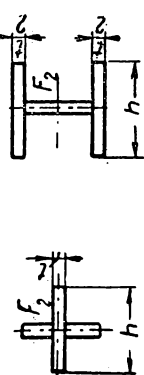
Множитель K при модуле упругости имеет разные значения в зависимости от того, применяется ли теория Энгессера—Кармана или теория Энгессера—Шенли. В первом случае необходимо принять

$$K = \frac{E_{np}}{E}, \quad (3.3)$$

Таблица 2

Приведенные модули и положение нейтральной оси

№ п/п	Форма сечения	Положение нейтральной оси	Приведенный модуль
1		$\alpha = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$	$\frac{E_{np}}{E} = \frac{4k}{(1 + \sqrt{k})^2}$
2		$\alpha = \frac{1}{1-k} \left(\sqrt{\beta_1^2 + 2\beta_1 k + k} - \beta_1 - k \right)$	$\frac{E_{np}}{E} = \frac{\alpha^2 (3\beta_1 + \alpha) + k (1 - \alpha)^3}{1 - \frac{3}{4\beta_0}}$
		$\alpha = \frac{1}{1-k} \left[\sqrt{k (\beta_3^2 k + 2\beta_3 + 1)} - k\beta_0 \right]$	$\frac{E_{np}}{E} = \frac{\alpha^2 + k (1 - \alpha)^2 (3\beta_3 + 1 - \alpha)}{1 - \frac{3}{4\beta_0}}$

№ п/п	Форма сечения	Положение нейтральной оси	Приведенный модуль
4		$\alpha = \frac{1}{1-k} \left\{ \sqrt{k[2(\beta_1 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3) + 1] + \beta_1^2 + \beta_2^2 k^2} - \beta_1 - k(\beta_3 + 1) \right\}$	$\frac{E_{np}}{E} = \frac{\alpha^2 (3\beta_1 + \alpha) + k(1 - \alpha)^2 (3\beta_3 + 1 - \alpha)}{1 + \frac{3(\beta_1 \beta_3 - 0,25)}{\beta_0}}$
5		$\alpha = \frac{1}{1-k} \left\{ \sqrt{k[2\beta(2 + \beta) + 1] + \beta^2(1 + k^2)} - \beta - k(\beta + 1) \right\}$	$\frac{E_{np}}{E} = \frac{\alpha^2 (3\beta + \alpha) + k(1 - \alpha)^2 (3\beta + 1 - \alpha)}{1 + \frac{3(\beta^2 - 0,25)}{\beta_0}}$
6		$\alpha = \frac{1}{1-k} \left[\sqrt{k\beta_2(k\beta_2 + k + 1) + k} - k\beta_0 \right]$	$\frac{E_{np}}{E} = 4\{\alpha^3 + k[3\beta_2(0,5 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3]\}$

во втором случае

$$K = \frac{E'}{E} = k. \quad (3.4)$$

Касательный модуль E' определяется формулой (2.15). Приведенный модуль, как известно [1], определяется по формуле

$$E_{\text{пр}} = \frac{E J_{\text{I}} + E' J_{\text{II}}}{J}. \quad (3.5)$$

Величина $E_{\text{пр}}$ учитывает разгрузку в части сечения сжатого стержня и зависит в связи с этим от его формы.

В табл. 2 приведены окончательные формулы для определения положения нейтральной оси (глубины упругой зоны) α и приведенного модуля $E_{\text{пр}}$ для наиболее часто встречающихся в строительстве форм поперечных сечений. При выводе формул не учитывались толщины полок F_1 , F_2 и F_3 . Предполагалось, что эти площади сосредоточены в линии. Потеря устойчивости происходит в направлении стенки h ; при этом с выпуклой стороны находится полка F_1 , с вогнутой — F_3 .

В табл. 2 обозначено:

$$\alpha = \frac{a}{h}; \quad \beta_1 = \frac{F_1}{th}; \quad \beta_2 = \frac{F_2}{th}; \quad \beta_3 = \frac{F_3}{th};$$

$$\beta_0 = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \quad (3.6)$$

По формулам табл. 2 могут быть построены вспомогательные графики, облегчающие расчеты. На рис. 3 приведен один из таких графиков. Сплошными линиями даются значения величин α и $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ для тавровых сечений с выпуклостью в сторону полки (см. п. 2 табл. 2); пунктирными линиями показаны значения α и $\frac{E_{\text{пр}}}{E}$ для тех же сечений с выпуклостью в сторону пера. График построен для диаграммы работы материала, показанной на рис. 2,а.

На рис. 4 показаны зависимости $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ для шарнирно опертых стержней прямоугольного сечения, построенные по формуле (3.1); кружками и крестиками на этом рисунке нанесены экспериментально полученные точки [9].

Расчет упруго защемленных стержней, согласно теории Энгессера—Шенли, никаких дополнительных трудностей (по сравнению с расчетом упругих стержней) не вызывает.

Так, например, для упруго защемленного стержня с симметричными граничными условиями имеем следующую зависимость для определения критических напряжений [1]:

$$\frac{\frac{\nu}{2}}{\text{tg} \frac{\nu}{2}} = - \frac{1}{2\omega k}, \quad (3.7)$$

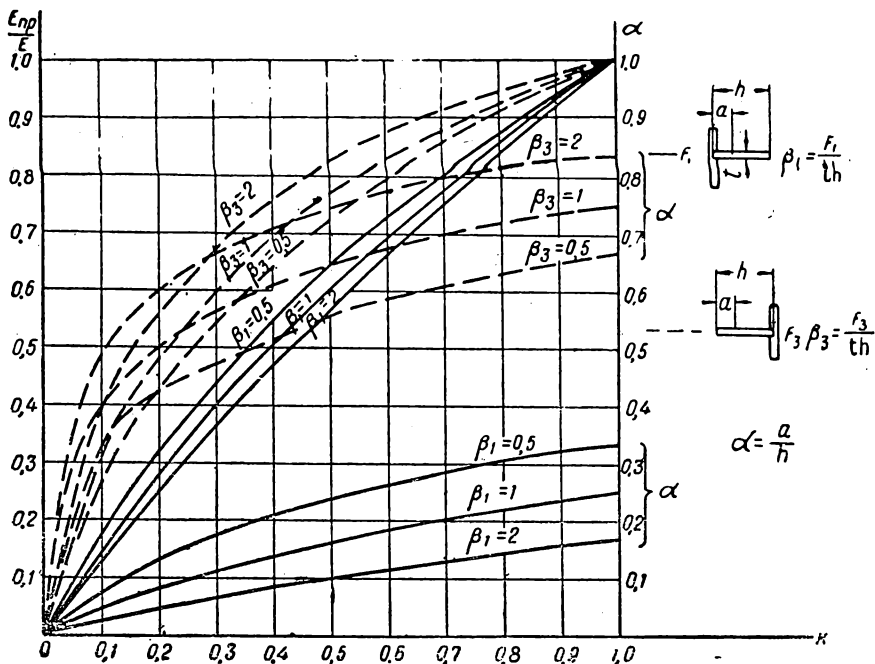


Рис. 3. Приведенные модули для таврового сечения

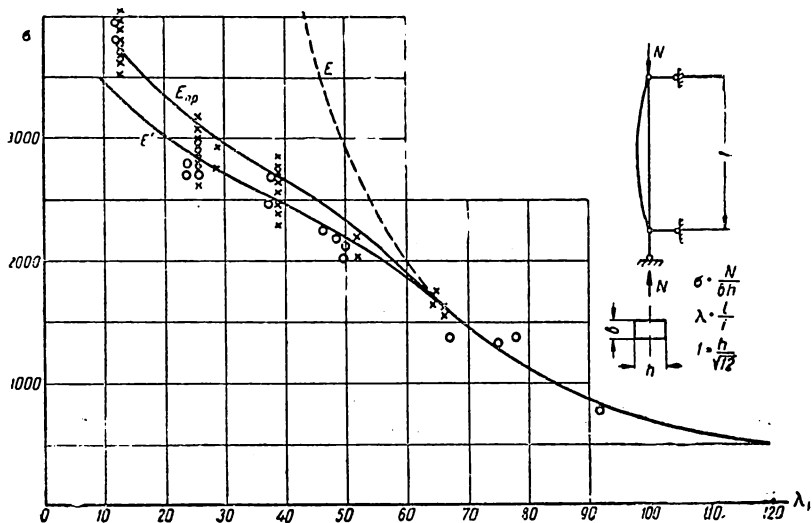


Рис. 4. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для центрально сжатого шарнирно опертого стержня

где

$$\omega = \frac{EJ}{rl} \quad (3.8)$$

Параметр продольно-поперечного изгиба ν определяется по формулам (3.1) и (3.4);

r — величина жесткости упругого защемления.

В отличие от упругих стержней коэффициент приведения свободной длины упруго защемленных стержней, работающих в упруго-пластической стадии,

$$\mu_0 = \frac{\pi}{\nu} \quad (3.9)$$

в процессе возрастания нагрузки является величиной переменной для постоянных жесткостей упругих защемлений концов. Поскольку E' меньше, чем E , получаемые значения свободных длин в упруго-пластической стадии будут меньшими, чем для упругих стержней. Можно показать, что коэффициент приведенной длины в этом случае меняется в пределах

$$0,5 \leq \mu_0 \leq \mu,$$

где μ — коэффициент приведения свободной длины для упругого стержня.

Этого и нужно было ожидать, так как с увеличением σ жесткость на изгиб $E'J$ уменьшается, а коэффициенты упругих защемлений r остаются неизменными. Таким образом, степень заделки на концах относительно возрастает, следствием этого является уменьшение свободной длины стержня в упруго-пластической стадии.

На рис. 5 сплошными линиями показана зависимость $\sigma_{кр}(\lambda)$, построенная по формуле (3.7), пунктирными линиями показано изменение μ_0 в зависимости от $\sigma_{кр}$. Диаграмма работы материала взята из рис. 2,а.

При расчете упруго защемленных стержней по теории Энгессера—Ясинского—Кармана нужно обратить внимание на одно обстоятельство, связанное с формой поперечного сечения стержня. Рассмотрим упруго защемленный стержень таврового сечения, схема которого показана на рис. 6,а. Эпюра моментов при потере устойчивости стержня показана на рис. 6,б.

Поскольку сечение стержня явно несимметричное, в средней части его длины приведенный модуль будет иметь одно значение, в крайних участках — другое. В связи с этим жесткость стержня в момент потери устойчивости на этих участках длины будет различна. Это приводит к тому, что расчет стержня значительно усложняется. Здесь может быть рекомендован следующий путь расчета. Задаваясь осевым напряжением σ , определяем по формулам табл. 2 (см. пп. 2 и 3) приведенные моду-

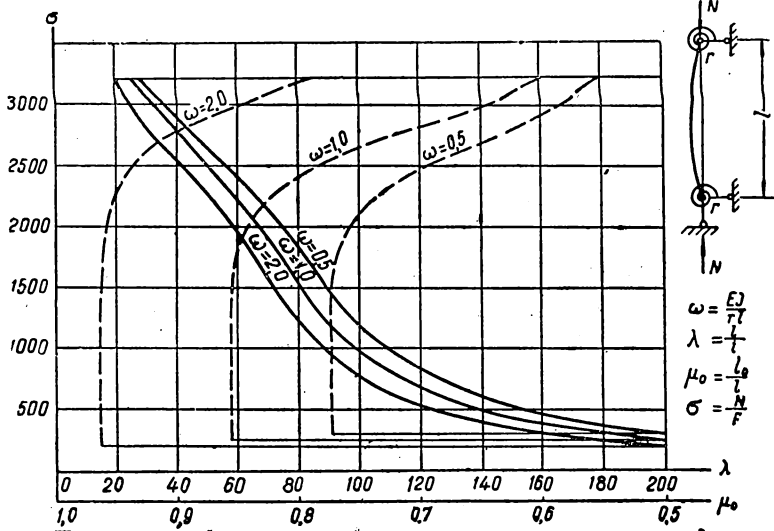


Рис. 5. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для центрально сжатого упруго защемленного стержня

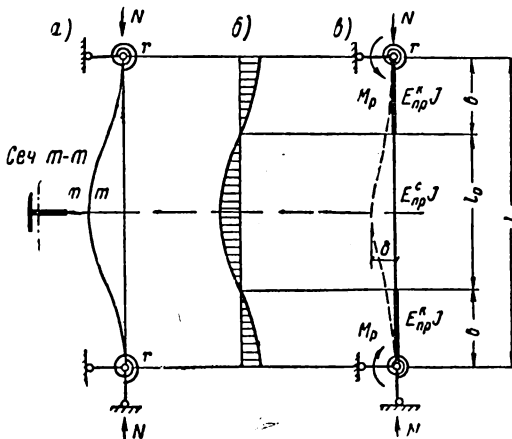


Рис. 6. К расчету упруго защемленного стержня таврового сечения

ли упругости $E_{\text{пр}}^c$ и $E_{\text{пр}}^k$. Затем по формуле (3.1) определяем гибкость среднего участка в критическом состоянии стержня

$$\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E_{\text{пр}}^c}{\sigma}. \quad (3.10)$$

После этого ставится такая задача. Дан упругий упруго защемленный стержень (рис. 6, в) с известными величинами σ , ω , $E_{\text{пр}}^c J$, $E_{\text{пр}}^k J$ и r . Требуется найти длину стержня l (или b), чтобы принятое напряжение σ было критическим.

Опорные моменты на концах стержня

$$M_p = r v_0'. \quad (3.11)$$

Уравнение изгиба крайнего участка

$$v_z'' + \frac{N}{E_{\text{пр}}^k J} = \frac{M_p}{E_{\text{пр}}^k J}. \quad (3.12)$$

Уравнение изгиба среднего участка

$$v_z'' + \frac{N}{E_{\text{пр}}^c J} = \frac{M_p}{E_{\text{пр}}^c J}. \quad (3.13)$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} z=0; \quad v=0; \quad v' &= \frac{M_p}{r}; \\ z = \frac{l}{2}; \quad v &= \delta; \quad v' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

и условиям сопряжения

$$z=b; \quad v_k = v_c; \quad v_k' = v_c', \quad (3.15)$$

получаем систему двух линейных уравнений относительно M_p и δ . Приравняв нулю их определитель, получим условие для определения b :

$$\omega \frac{E_{\text{пр}}^k}{E} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{E_{\text{пр}}^k}} (\lambda_0 + 2\lambda_b) \operatorname{tg} \lambda_b \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{E_{\text{пр}}^k}} - 1 = 0, \quad (3.16)$$

где $\omega = \frac{EJ}{rl}$;

λ_b — гибкость крайнего участка.
Гибкость всего стержня.

$$\lambda = \lambda_0 + 2\lambda_b. \quad (3.17)$$

На рис. 7 сплошной линией показана зависимость $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$, построенная по формуле (3.16) для стержня таврового сечения с параметрами $\omega=0,1$ и $\beta_1=2$.

Диаграмма работы материала стержня взята из рис. 2,а. Поскольку принятая жесткость защемления концов стержня велика, точки перегиба изогнутой оси находятся примерно в четвертях длины стержня. На том же рис. 7 пунктирной линией

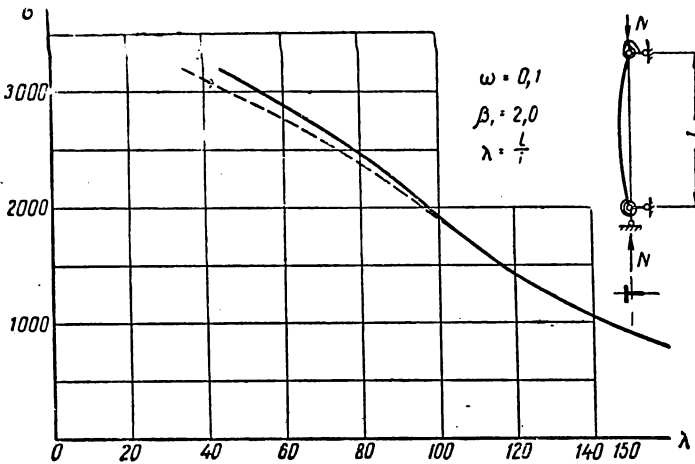


Рис. 7. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для упруго защемленного стержня таврового сечения

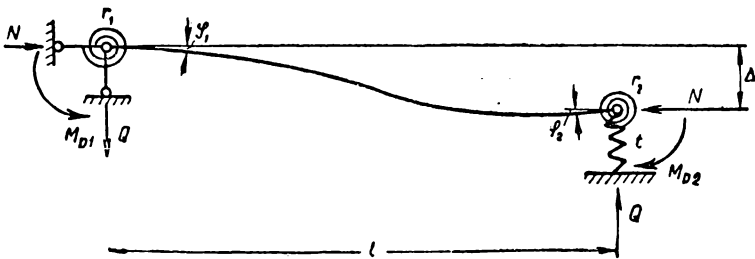


Рис. 8. Упруго защемленный стержень

построена зависимость $\sigma_{кр}(\lambda)$ для того же стержня при условии, что жесткость его по длине постоянна и равна $E_{np}J$. Наибольшее отклонение в этом случае не превышает 5%. Таким образом, критические напряжения упруго защемленных стержней с небольшим запасом устойчивости могут определяться по формуле (3.1), в которой величина K определяется по меньшему из приведенных модулей. Этот вывод в большой степени облегчает расчет рам, так как в противном случае исследование упруго-пластической работы рамных систем в смысле Энгессера—Кармана оказалось бы чрезвычайно сложным.

На основе приведенного анализа можно записать общее условие устойчивости в упруго-пластической стадии упруго за-

щемленного стержня с податливыми опорами, схема которого показана на рис. 8 [4]:

$$1 - K^2 \omega_1 \omega_2 \nu^2 + K(\omega_1 + \omega_2) \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} + \frac{1}{\nu^2 \tau K - 1} \times \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{\frac{\nu}{2}} + K(\omega_1 + \omega_2) \right] = 0, \quad (3.18)$$

где

$$\omega_1 = \frac{EJ}{r_1 l}; \quad \omega_2 = \frac{EJ}{r_2 l}; \quad \tau = \frac{EJ}{tl^3}; \quad \nu = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{EK}}. \quad (3.19)$$

Здесь r_1 и r_2 — реактивные моменты, возникающие при повороте опорных сечений на угол, равный единице; t — опорная реакция, возникающая при относительном смещении опор на единицу.

4. РАМЫ

Хорошо разработанные методы расчета на устойчивость упругих стержневых систем могут быть применены для получения расчетных формул рам, работающих за пределом пропорциональности.

При выводе формул в данном случае нужно учесть, что жесткости на изгиб незатянутых стержней (в основном ригелей) остаются неизменными, в то время как жесткости вертикально сжатых стержней (стоек) становятся равными $E'J$ (Энгессер — Шенли) или $E_{пр} J$ (Энгессер — Ясинский — Карман) [6].

Значения реактивных моментов и поперечных сил от единичных смещений в сжатых стержнях, работающих в упруго-пластической стадии, получены на основании известных формул для упругого сжато-изогнутого стержня, показанного на рис. 9 (см. [3], стр. 145). Эти результаты приведены в табл. 3.

Необходимым условием для критического состояния рамной системы в упруго-пластической стадии будет равенство нулю определителя системы однородных уравнений устойчивости.

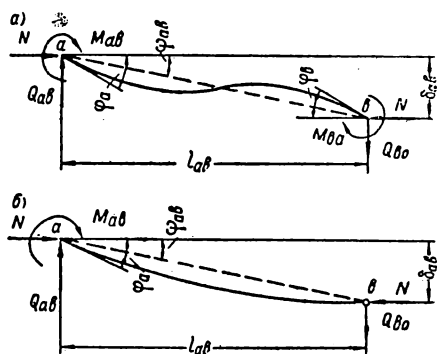


Рис. 9. Деформации рамных стержней

Реактивные моменты и поперечные силы от единичных смещений
в сжатых стержнях

№ п/п	Вид смещения и эпюры M	Значения специальных функций
1		$\bar{\alpha} = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} v - v}$
2		$\alpha = \frac{v}{2 \operatorname{tg} v} \cdot \frac{\operatorname{tg} v - v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}$ $\beta = \frac{v}{2 \sin v} \cdot \frac{v - \sin v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}$
3		$\bar{\gamma} = \frac{v^3}{\operatorname{tg} v - v}$
4		$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^3}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}$

$$K = k = \frac{E'}{E}; \quad v = \lambda \sqrt{\frac{\sigma}{E'}}; \quad i = \frac{EJ}{l}; \quad r = \sqrt{\frac{J}{E}};$$

$$K = \frac{E_{\text{нп}}}{E}; \quad v = \lambda \sqrt{\frac{\sigma}{E_{\text{нп}}}}; \quad \lambda = \frac{l}{r}; \quad \sigma = \frac{N}{F}.$$

Несколько замечаний нужно сделать в отношении свободных длин стержней рам, работающих в упруго-пластической стадии. Хорошо известно, что в упругой раме при фиксированном значении отношения погонных жесткостей ригеля и стоек коэффициенты свободных длин стоек $\mu = \frac{\pi}{v_{\text{упр}}}$ являются величинами по-

стоянными независимо от величины критической нагрузки $P_{кр}$ и геометрических размеров рамы. Иная картина наблюдается в рамах, работающих в упруго-пластической стадии. В этом случае даже при определенном значении отношения погонных жесткостей ригеля и стоек коэффициенты свободных длин стоек $\mu_0 = \frac{\pi}{\nu_{пл}}$ являются переменными величинами, зависящими от величины критического напряжения $\sigma_{кр}$ и, следовательно, от геометрических размеров рамы. Поскольку всегда $E'(E_{пр}) < E$, получаемые значения коэффициентов свободных длин стержней в упруго-пластической стадии будут всегда меньшими, чем для упругих стержней. Можно показать, что коэффициент μ_0 меняется в пределах:

$$0,5 \leq \mu_0 \leq \mu \text{ — для несвободных рам;}$$

$$1 \leq \mu_0 \leq \mu \text{ — для свободных рам.}$$

Нужно отметить, что коэффициенты приведения свободных длин μ_0 стержней, работающих в упруго-пластической стадии, имеют в основном только теоретический интерес. Знание их еще недостаточно для определения величин критических напряжений, которые, вообще говоря, могут быть определены по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EK}{(\mu_0 \lambda)^2}. \quad (4.1)$$

В правую часть этой формулы входит еще величина K , зависящая от неизвестного $\sigma_{кр}$; поэтому знание только μ_0 не дает возможности пользоваться формулой (4.1).

Для построения вспомогательных таблиц и графиков, облегчающих практические расчеты, введем понятие коэффициентов $\mu_{расч}$ приведения условных расчетных длин взамен коэффициентов μ_0 . Нужно подчеркнуть, что эти величины $\mu_{расч}$ имеют чисто формальный расчетный характер; никакого физического смысла они не имеют.

Зная коэффициенты $\mu_{расч}$, критические напряжения $\sigma_{кр}$ можно определить по обычной формуле:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu_{расч} \lambda)^2}, \quad (4.2)$$

где E — начальный модуль упругости.

Приравнивая правые части зависимостей (4.1) и (4.2), получим

$$\mu_{расч} = \frac{\mu_0}{\sqrt{K}}, \quad (4.3)$$

где K определяется из (3.3) или (3.4).

Метод построения графиков для коэффициентов $\mu_{расч}$ по формуле (4.3) будет показан на конкретных примерах расчета рам.

Перейдем теперь к решению отдельных задач.

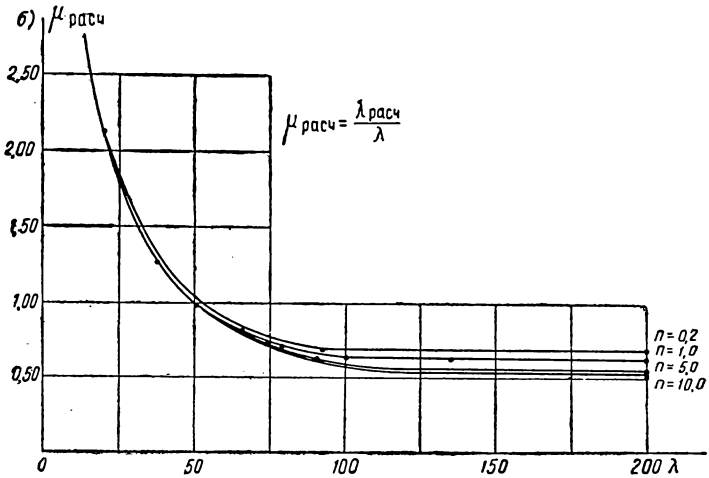
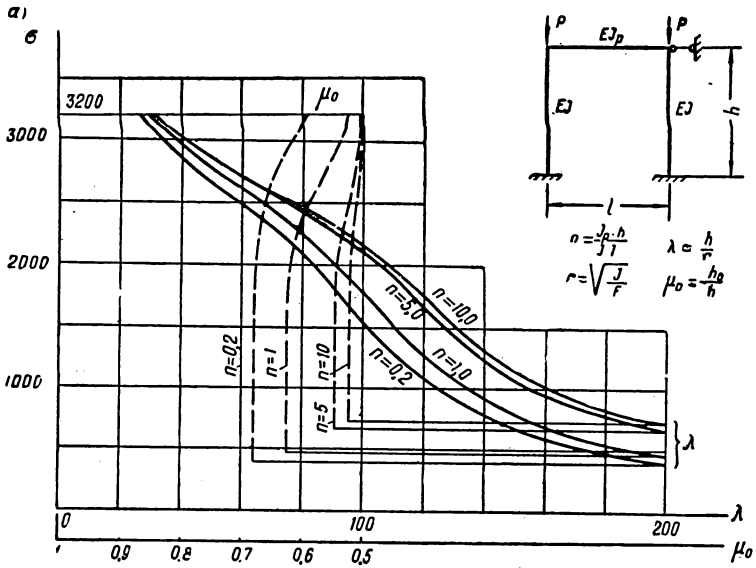


Рис. 10, а,б. К расчету несвободной П-образной рамы

1. На рис. 10,а показана однопролетная несвободная рама. Условие устойчивости такой рамы

$$n = -K\alpha, \quad (4.4)$$

где

$$n = \frac{J_p h}{Jl}.$$

На рис. 10,а сплошными линиями показаны зависимости $\sigma_{кр}(\lambda)$ для различных n , построенные по формуле (4.4) согласно теории Энгессера—Шенли ($K=k$). Пунктирными линиями на этом же графике показано изменение коэффициентов свободной длины μ_0 в упруго-пластической стадии. Как видно из этого графика, значение μ_0 зависит не только от n , но и от величины критического напряжения $\sigma_{кр}$. Когда $\sigma_{кр}$ приближается к максимальному значению, условия в верхних узлах рамы приближаются к условиям стержня с жестко заделанными концами, при этом $\mu_0 \rightarrow 0,5$.

На рис. 10,б для этой же рамы приведены кривые $\mu_{расч}(\lambda)$, построенные по формуле (4.3). Диаграмма работы материала взята из рис. 2,а.

2. Для рамы, показанной на рис. 11, условие устойчивости которой

$$n = -\frac{2}{3} K\alpha, \quad (4.5)$$

на основании теории Энгессера—Ясинского—Кармана для стоек таврового сечения, у которого $\beta_1=2$, построены графики $\sigma_{кр}(\lambda)$ и $\mu_0(\sigma_{кр})$ для различных значений n . Формулы для вычисления

$K = \frac{E_{пр}}{E}$ взяты из п. 2 табл. 2. Диаграмма работы материала взята из рис. 2,а.

3. На рис. 12 показана свободная однопролетная рама со стойками таврового сечения ($\beta_1=2$). При потере устойчивости, показанной пунктиром, приведенный модуль упругости E_1 левой стойки определяется по формулам п. 2 табл. 2; приведенный модуль E_2 правой стойки — по формулам п. 3 табл. 2. Следовательно, симметричная до потери устойчивости рама превращается в момент потери устойчивости в несимметричную. Неизвестные метода деформаций — углы поворота узлов рамы φ_1 и φ_2 и смещение Δ .

Условие устойчивости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2n + K_1 \alpha_1 & n & -\frac{1}{h} K_1 \eta_1 \\ n & 2n + K_2 \alpha_2 & -\frac{1}{h} K_2 \eta_2 \\ -\frac{1}{h} K_1 \eta_1 & -\frac{1}{h} K_2 \eta_2 & \frac{1}{h^2} (K_1 \gamma_1 + K_2 \gamma_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

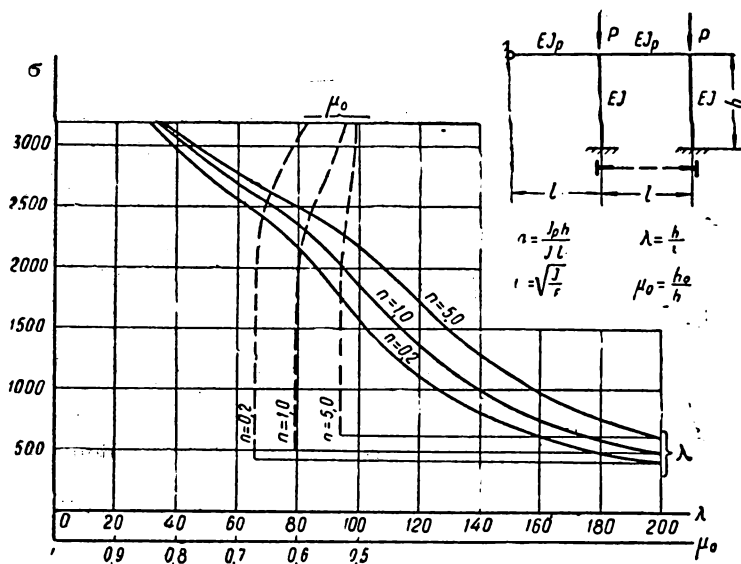


Рис. 11. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для рамы со стойками таврового сечения

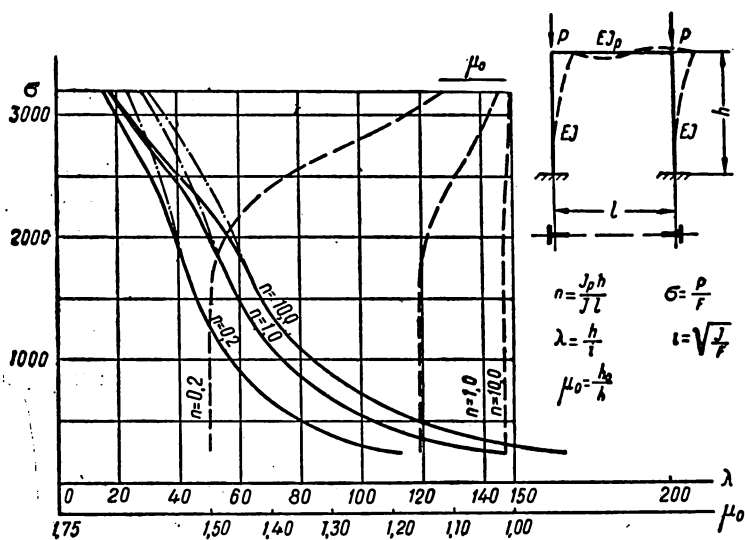


Рис. 12. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для рамы со стойками таврового сечения

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно n :

$$a_2 n^2 + a_1 n + a_0 = 0, \quad (4.7)$$

коэффициенты которого равны:

$$a_2 = 3(K_1 \gamma_1 + K_2 \gamma_2); \quad (4.8)$$

$$a_1 = 2 [(K_1 \alpha_1 + K_2 \alpha_2)(K_1 \gamma_1 + K_2 \gamma_2) - K_1^2 \eta_1^2 - K_2^2 \eta_2^2 + K_1 \eta_1 K_2 \eta_2]; \quad (4.9)$$

$$a_0 = K_1 \alpha_1 K_2 \alpha_2 (K_1 \gamma_1 + K_2 \gamma_2) - K_1 \alpha_1 K_2^2 \eta_2^2 - K_2 \alpha_2 K_1^2 \eta_1^2. \quad (4.10)$$

В формулах (4.6) — (4.10) обозначено

$$n = \frac{J_p h}{Jl}; \quad K_1 = \frac{E_1}{E}; \quad K_2 = \frac{E_2}{E}; \\ \eta_1 = \alpha_1 + \beta_1; \quad \eta_2 = \alpha_2 + \beta_2, \quad (4.11)$$

где α , β и γ — специальные функции для соответствующих стоек, таблицы которых имеются в работе [3].

Уравнение (4.7) решается следующим образом. Задаваясь величиной σ для известных длин стоек h , вычисляем коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 . После этого из уравнения (4.7) определяем величину n . Поскольку решение (4.7) слишком громоздко, попытаемся сначала установить пределы, в которых изменяются величины критических напряжений. Для этого исследуем рассматриваемую раму как симметричную с приведенным модулем упругости обеих стоек, сначала равным E_1 , затем E_2 . Условие устойчивости

$$n = -\frac{K}{6} \cdot \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}, \quad (4.12)$$

где

$$K = \frac{E_1}{E}; \quad \nu = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{E_1}} \quad (4.13)$$

или во втором случае

$$K = \frac{E_2}{E}; \quad \nu = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{E_2}}. \quad (4.14)$$

На рис. 12 сплошными линиями показана зависимость $\sigma_{кр}(\lambda)$, построенная по формуле (4.12) с подстановкой в нее параметров из (4.13). Штрихпунктирными линиями показана та же зависимость, построенная по (4.12) с учетом (4.14). Истинное решение находится между соответствующими сплошными и штрихпунктирными кривыми. Наибольшая разница между этими кривыми составляет 14%. Следовательно, в запас прочности критические нагрузки рамы с точностью приблизительно до 7%

могут определяться по формулам (4.12) и (4.13). Решение в этом случае значительно упрощается. Пунктирными линиями на рис. 12 показано изменение коэффициентов свободной длины μ_0 с ростом осевых напряжений $\sigma_{кр}$; кривые построены по формулам (4.12) и (4.13).

Диаграмма работы материала взята из рис. 2,а.

5. СТЕРЖНИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. РАМЫ СО СТЕРЖНЯМИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Особенностью решения таких задач является то, что осевое напряжение меняется вдоль длины стержней. Это приводит к дополнительному изменению жесткости стержня за счет изменения модуля упругости. Закон изменения жесткости по длине в этом случае является функцией двух величин $J(z) E'(z)$ (теория Энгессера — Шенли) или $J(z) E_{пр}(z)$ (теория Энгессера — Кармана).

Применяя изложенный в статьях¹ метод расчета упругих стержней переменного сечения и упругих рам со стержнями переменного сечения, можно разработать практические приемы расчета таких стержней и рам в упруго-пластической стадии.

Для этого нужно знать законы изменения площади и момента инерции по длине каждого стержня:

$$F_z = F(z); J_z = J(z). \quad (5.1)$$

Разделив длину стержня на n частей, определяем для каждого сечения:

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_n;$$

$$J_0, J_1, J_2, \dots, J_n.$$

Далее поступаем следующим образом. Задаемся величиной сжимающей силы P . Определяем величины напряжений в каждом сечении:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}; \sigma_1 = \frac{P}{F_1}; \dots; \sigma_n = \frac{P}{F_n}. \quad (5.2)$$

После этого из зависимости $\sigma(E')$, построенной по формуле (2.15), для заданной диаграммы работы материала определяем для каждого сечения величину касательного модуля $E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$.

Зная E' в каждом сечении, можно установить закон изменения жесткости по длине стержня при определенной величине сжимающей силы P

$$K_0 E J_0; K_1 E J_1; \dots; K_n E J_n \quad (5.3)$$

¹ См. статьи А. В. Геммерлинга и Г. Е. Бельского «Несущая способность рам в упруго-пластической стадии» и Г. Е. Бельского «Теоретические и экспериментальные исследования деформативности и устойчивости упруго защемленных стержней» в этом сборнике.

с учетом изменения сжимающих напряжений вдоль стержня. После этого расчет производится по формулам, приведенным в указанных выше статьях для расчета упругих стержней и рам. Составляется условие устойчивости стержня или рамы в виде

$$\Phi(v_0^2; c) = 0, \quad (5.4)$$

где c — постоянные величины.

$$v_0^2 = l^2 \frac{P}{K_0 E J_0}, \quad (5.5)$$

где v_0 — параметр продольно-поперечного изгиба, отнесенный к сечению стержня в начале координат.

В зависимостях (5.3) — (5.5) обозначено:

$$\left. \begin{aligned} K_0 = k_0 = \frac{E'_0}{E}; K_1 = k_1 = \frac{E'_1}{E}; \dots; K_n = k_n = \frac{E'_n}{E} \\ \text{(Энгессер—Шенли);} \\ K_0 = \frac{E_0^{np}}{E}; K_1 = \frac{E_1^{np}}{E}; \dots; K_n = \frac{E_n^{np}}{E} \\ \text{(Энгессер—Карман).} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Из уравнения (5.4) определяем величину l для заданного значения сжимающей силы P (которое становится критическим) и по точкам строим зависимость $P_{кр}(l)$ для заданного стержня или для заданного типа рамы.

Рассмотрим раму, схема которой показана на рис. 13. Стойки представляют собой усеченные пирамиды. Размеры сечения стоек: в основании $b_0 \cdot c_0 = 100 \times 200$ мм; в верхнем конце $b \cdot c = 200 \times 400$ мм. Пролеты рамы: $l_1 = 600$ см; $l_2 = 1000$ см.

Диаграмма работы материала, полученная экспериментальным путем, показана на рис. 2,е пунктирной линией. По своим свойствам принятый материал приближается к железобетону, механические характеристики которого приведены в работе [5].

Основные параметры диаграммы приведены в табл. 1 (см. п. 6). Построим зависимость $P_{кр}(h)$ для критических состояний рамы, определенных на основании теории Энгессера—Шенли.

Максимальная величина силы P , которая может быть воспринята стойкой, определяется из условия прочности сечения в начале координат (наиболее ослабленное сечение):

$$P_{\max} = 200 \cdot 180 = 36\,000 \text{ кг.}$$

Определим для этого значения P_{\max} высоту стоек равнопрочной рамы по условиям прочности и устойчивости ($P_{\max} = P_{1p}$). Для этого разделим высоту стойки на шесть частей (рис. 14).

Площади, моменты инерции, осевые напряжения и касательные модули для каждого сечения приведены в табл. 4.

Условие устойчивости рамы имеет вид

$$3i_1 + 2i + 3i_0 \cdot \Phi_1(v_0) = 0. \quad (5.7)$$

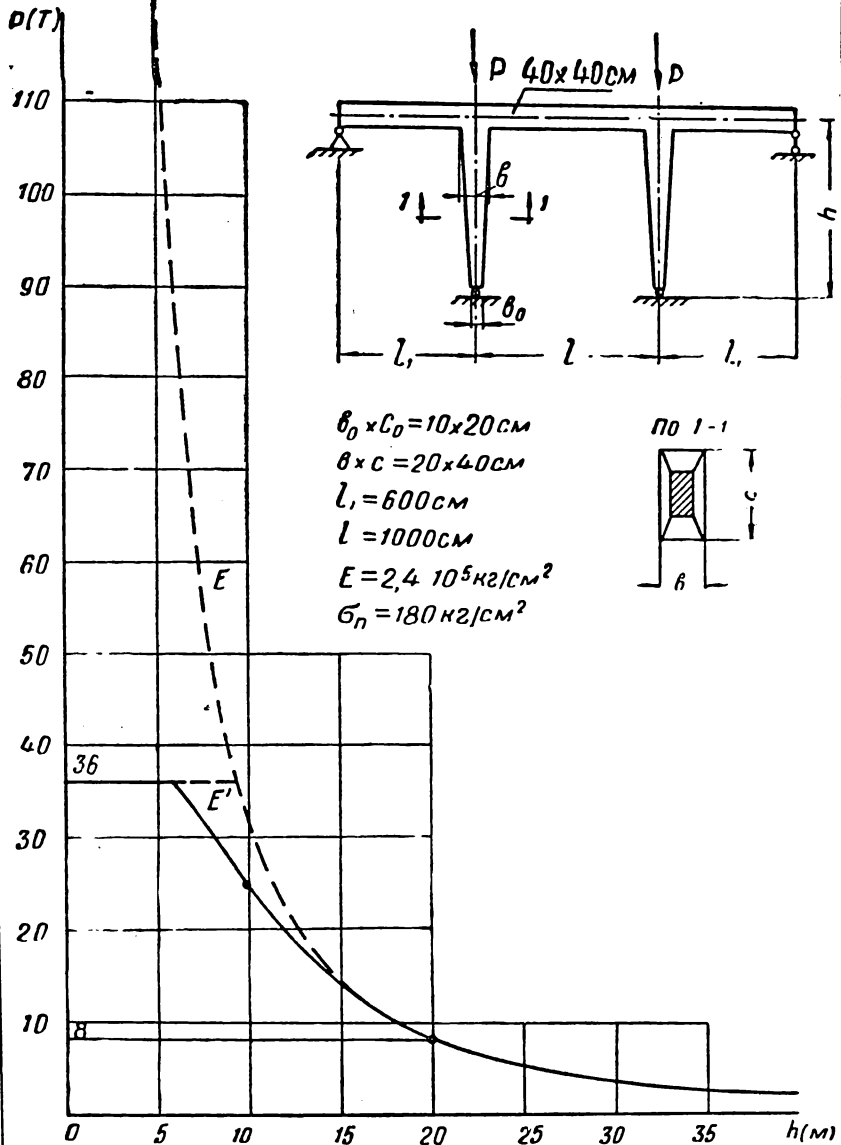


Рис. 13. График $P_{кр}(h)$ для рамы с пирамидальными стойками

№ сечений	F_z в см ²	J_z в см ⁴	σ_z в кг/см ²	E'_z в кг/см ²	$\frac{E'_z}{E}$	$k_z = \frac{E'_z J_z}{E'_0 J_0}$	$\frac{1}{k_z}$
0	200	1 667	180	$0,269 \cdot 10^8$	0,112	1	1
1	253	2 670	142	$0,94 \cdot 10^8$	0,392	5,79	0,179
2	312,5	4 060	115	$1,76 \cdot 10^8$	0,734	15,94	0,0627
3	378	5 970	95,2	$2,2 \cdot 10^8$	0,916	29,35	0,0341
4	450	8 440	80	$2,33 \cdot 10^8$	0,971	44	0,0227
5	612,5	15 630	58,8	$2,39 \cdot 10^8$	0,997	83,5	0,012
6	800	26 650	45	$2,4 \cdot 10^8$	1	142,7	0,00701

Из геометрических размеров рамы устанавливаем

$$i_1 = \frac{EJ_p}{l_1} = 0,852 \cdot 10^8; \quad i =$$

$$= \frac{EJ_p}{l} = 0,511 \cdot 10^8;$$

$$i_0 = \frac{E'_0 J_0}{h} = \frac{0,449}{h} 10^8.$$

Внося эти значения в формулу (5.7), получим

$$\Phi_1(v_0) = -2,655 h, \quad (5.8)$$

где

$$v_0^2 = h^2 \frac{P_{кр}}{E'_0 J_0} = \frac{0,802}{10^8} h^2. \quad (5.9)$$

С другой стороны, функция $\Phi_1(v_0)$ может быть записана в следующем виде¹:

$$\Phi_1(v_0) = \frac{1}{3 \left(G_3 + \frac{v_0^2 S_2 D_1}{1 - v_0^2 B_1} \right)}. \quad (5.10)$$

Для заданной рамы величины, входящие в (5.10), равны $G_3 = 0,0104$; $D_1 = 0,00152$.

Аппроксимируя изогнутую ось стойки ординатами (приводим здесь данные второго приближения)

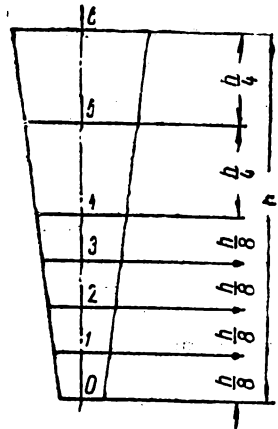


Рис. 14. К расчету рамы с пирамидальными стойками

¹ См. статью в настоящем сборнике А. В. Геммерлинга и Г. Е. Бельского «Несущая способность рам в упруго-пластической стадии».

$a_0=0$; $a_1=1,1$; $a_2=1,4$; $a_3=1,2$; $a_4=1$; $a_5=0,5$; $a_6=0$, вычисляем $S_2=0,01141$; $B_1=0,0052$.

Подставляя эти величины в (5.10), получим

$$\Phi_1(v_0) = \frac{10^3 - v_0^2 \cdot 5,2}{31,2 - v_0^2 \cdot 0,11}, \quad (5.11)$$

где v_0 определяется по формуле (5.9).

Приравнивая правые части уравнений (5.8) и (5.11) и учитывая (5.9), получим окончательно

$$h^3 + 0,178 h^2 - 35,3 h - 4,26 = 0. \quad (5.12)$$

Решая уравнение (5.12) подбором, находим

$$h = 5,9 \text{ м.}$$

Эту точку наносим на график рис. 13.

Подобным образом и для других значений $P_{кр}$ вычислены соответствующие значения h и по точкам построена зависимость $P_{кр}(h)$ для заданной рамы.

Как видно из графика, при высотах стоек от 5,9 до 20 м рама теряет устойчивость в упруго-пластической стадии; при высотах $h \geq 20$ м наблюдается упругая потеря устойчивости.

Для принятых пролетов l и l_1 ригеля наиболее интересными как раз являются высоты стоек в пределах от 6 до 15—20 м. Поэтому в данном случае изучение потери устойчивости рамы в упруго-пластической стадии имеет большое практическое значение.

ВЫВОДЫ

1. В ряде случаев может быть оправдана схематизированная постановка задач устойчивости, основанная на использовании криволинейной зависимости между напряжением и относительным удлинением материала и рассмотрении центрально сжатых стержней и рам с узловой нагрузкой, теряющих устойчивость за пределами упругости. Такие задачи могут быть достаточно просто исследованы путем использования аппарата устойчивости упругих систем. При этом в формулы упругой устойчивости нужно вводить поправки в величины жесткостей стержней в зависимости от напряжений, действующих в стержнях в момент потери устойчивости.

2. Значительные количественные поправки в величины критических напряжений за счет учета упруго-пластических деформаций получаются при расчете рамных систем с элементами малой и средней гибкости.

3. Понятия свободных длин рамных стержней, известные из теории устойчивости упругих систем, имеют тот же физический смысл и для стержней рам, теряющих устойчивость в упруго-пластической стадии. При этом, чем больше развитие пластиче-

ских деформаций в стержнях рам при потере устойчивости, тем меньше их свободные длины. Коэффициенты приведения свободных длин стержней в упруго-пластической стадии всегда меньше соответствующих коэффициентов для упругих стержней.

4. Симметричные до потери устойчивости стержневые системы могут в момент потери устойчивости превращаться в несимметричные за счет различного развития пластических деформаций в их стержнях.

5. Упруго защемленные стержни, поперечное сечение которых имеет одну ось симметрии, совпадающую с плоскостью изгиба, и рамы с такими стержнями могут терять устойчивость (в смысле Энгессера—Ясинского—Кармана) при различных жесткостях на отдельных участках стержней. Однако с достаточной для практики точностью (до 5—7% в запас) расчет в этом случае может быть выполнен по меньшему из приведенных модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А. Н., Продольный изгиб. Кручение, Изд-во АН СССР, 1955.

2. Исследования прочности и устойчивости деревянных стержней. Сборник статей ЦНИПС, Госстройиздат, 1940.

3. Корноухов Н. В., Прочность и устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1949.

4. Рогицкий С. А., Расчет рам, Машгиз, 1948.

5. Таль К. Э., О деформативности бетона при сжатии. «Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов». Сборник ЦНИПСа, Госстройиздат, 1955.

6. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехтеоретиздат, 1955.

7. Хофф Н., Продольный изгиб и устойчивость, Изд-во иностранной литературы, 1955.

8. Шенли Ф., Теория неупругой колонны. Сборник переводов «Механика» № 2, 1951.

9. Aluminium, 33, 1957, 4.

10. Engesser F., Zeit. für Arch. und Ing. Wissensch, S., 455, 1889.

11. Карман Т., Über knickfestigkeit, Forschungsarbeiten, № 81, 1910.

Канд. техн. наук П. А. ЛУКАШ

РАСЧЕТ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛИТ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Значение нелинейной теории упругости для расчета тонких пологих оболочек и плит в настоящее время общепризнано. Об этом свидетельствует большое количество работ в этой области, появившихся в печати за последнее время. Большинство из них основано на законе Гука, иными словами, в этих работах рассматривается линейно-упругий материал, причем учитывается только геометрическая нелинейность, связанная с изменением формы конструкции в процессе деформации. Имеется несколько работ с попытками учесть изменения физических свойств материала в процессе нагружения — физическую нелинейность — путем введения в расчет диаграммы Прандтля или диаграммы с линейным упрочнением.

Очевидно, что исчерпывающее представление о работе полой оболочки или плиты на всем диапазоне изучаемых нагрузок (вплоть до предельной или разрушающей) может быть составлено только на основе теории, учитывающей оба вида нелинейности — физическую и геометрическую. Такая теория устранила бы существенный недостаток современного метода предельного равновесия, отмеченный проф. А. А. Гвоздевым [4], связанный с предположением о наличии малых перемещений и деформаций в момент, предшествующий предельному состоянию. Кроме того, были бы решены вопросы устойчивости¹.

Создание такой универсальной теории, очевидно, осложняется необходимостью учитывать, начиная с определенного этапа нагружения, появление пластических свойств материала и возникающее в связи с этим различие законов нагрузки и разгрузки. Это приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям. Значительно проще построение теории, основанной на гипотезе о нелинейно-упругом материале. В этом случае пластические и

¹ Как указано в первой статье сборника, это не всегда справедливо (Прим. ред.).

упруго-пластические свойства материала не рассматриваются. Упрощение теории связано с совпадением законов разгрузки и нагрузки, что характерно для упругих материалов. Несмотря на некоторую ограниченность такой постановки задачи, решение ее, во-первых, важно само по себе, так как в настоящее время в технике находят применение нелинейно-упругие материалы (металлические сплавы и пластмассы); во-вторых, на основании теоремы, доказанной Л. М. Качановым (8), полученное решение может быть применено (в случае активной деформации) и для упруго-пластических материалов, например для стали в зоне упрочнения, и т. д.

В настоящей статье сделана попытка построения такой теории. Разработанный алгоритм позволяет рассчитывать полные оболочки и плиты как с учетом обоих видов нелинейности, так и каждого вида в отдельности.

Перечислим гипотезы, положенные в основу расчета:

- 1) материал считается нелинейно-упругим;
- 2) считается справедливой гипотеза Кирхгофа—Лява;
- 3) материал считается несжимаемым (коэффициент Пуассона принимается равным 0,5). Последнее ограничение необязательно.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

В настоящее время предложено много зависимостей для представления нелинейной связи $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ между напряжениями σ и деформациями ε . Отметим попутно, что эта связь приблизительно (а при $\mu = 0,5$ точно) совпадает с нелинейной связью между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций e_i . Поэтому в дальнейшем оба закона

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma(\varepsilon); \\ \sigma_i &= \sigma_i(e_i) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

будем считать совпадающими.

В достаточно общем виде зависимость (1.1) может быть записана следующим образом:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \varepsilon_i^{k_i} = A_1 \varepsilon_1^{k_1} + A_2 \varepsilon_2^{k_2} + \dots + A_n \varepsilon_n^{k_n}. \quad (1.1')$$

Здесь A_i — некоторые физические константы, имеющие размерность напряжений; k_i — безразмерные показатели, которые могут быть любым положительным числом (целым, дробным). Подбирая соответствующие значения A_i, k_i и число членов n , практически можно этой зависимостью с необходимой точностью аппроксимировать любую экспериментальную диаграмму напряжений.

В настоящей работе предлагается использовать следующие частные случаи зависимости (1.1').

1. Степенной закон Г. Б. Бюльфингера,¹ который мы запишем в следующем виде:

$$\sigma = A\varepsilon^k. \quad (1.2)$$

Здесь A и k — некоторые постоянные, определяемые опытным путем. Этот или аналогичный ему законы были использованы многими исследователями, например Е. Ходкинсоном (1822 г.), К. Бахом (1897 г.), Сен-Венаном, а в наше время А. А. Ильюшиным, Л. М. Качановым, В. В. Соколовским [16], А. Р. Ржаницыным, А. С. Григорьевым и др.

Нелинейная зависимость (1.2) имеет следующие достоинства:

1) наличие этой зависимости достаточно для того, чтобы направляющие тензоры напряжений и деформаций не зависели от параметра нагрузки. Эта теорема была доказана А. А. Ильюшиным [7]. Практически это означает, что применяя формулу (1.2), мы должны получить правильные, т. е. совпадающие с опытом, результаты, по крайней мере при простом нагружении. На основании этой теоремы А. Р. Ржаницыным [14] было показано, что при зависимости (1.2) усилия пропорциональны нагрузке (при малых перемещениях), хотя принцип независимости действия сил неприменим;

2) при больших деформациях закон (1.2) хорошо описывает опытные кривые;

3) закон (1.2) является достаточно простым, что значительно облегчает вычисления;

4) при $A=E$ и $k=1$ закон (1.2) превращается в закон Гука; при $A=\sigma_r$ и $k=0$ — в закон жестко-пластического тела. Поэтому решение, полученное для любого k при помощи отмеченных подстановок, переходит в упругое или жестко-пластическое решение. Это свидетельствует о его достаточной общности.

К недостаткам зависимости (1.2) следует отнести следующее:

1) зависимость (1.2) плохо совпадает с опытными кривыми при малых деформациях;

2) так как показатель k является числом дробным, то для пластинок и оболочек решение, как правило, приводит к нелинейным системам уравнений с дробными показателями, которые могут быть решены только численными методами.

Для практического использования закона (1.2) необходимо знать величины A и k , которые, как уже было сказано, определяются опытным путем. Величина A имеет размерность напряжений: k — безразмерная величина. Для большинства материалов $0 \leq k \leq 1$. Чтобы получить двустороннюю диаграмму

¹ С. П. Тимошенко в «Истории науки о сопротивлении материалов» [17] сообщает, что Г. Б. Бюльфингер (1693—1750 гг.) с 1725 г. был членом Петербургской академии наук и первым профессором физики в академии.

му и для растяжения, и для сжатия, величина k при вычислениях рассматривается как нечетное число. Величины A и k опытным путем можно определить либо из диаграммы растяжения (сжатия), либо из опытов над изгибом балки. В соответствии с этим предлагаются два метода.

1. Метод определения постоянных A и k по диаграмме растяжения (сжатия).

Первый способ (по условной диаграмме). Строится условная диаграмма растяжения (сжатия) в координатах $\sigma - \epsilon$, где σ и ϵ — условные значения напряжений и деформаций. Диаграмма строится вплоть до предела прочности (рис. 1). Коэффициенты A и k подбираются так, чтобы теоретическая кривая (1.2) возможно лучше аппроксимировала экспериментальную кривую. Может быть предложено много способов аппроксимации; они изложены в курсах математики. Один из них требует весьма простых вычислений. Он заключается в том, что величины A и k подбираются с учетом двух условий.

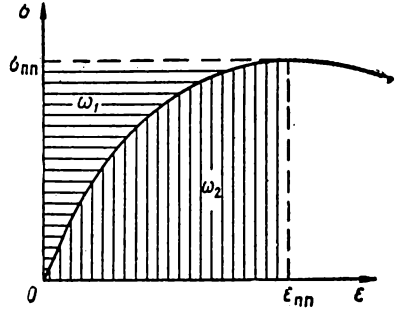


Рис. 1. Диаграмма растяжения

А. Условия равенства пределов прочности экспериментальной диаграммы (рис. 1) и аппроксимирующей ее зависимости (1.2). Это условие записывается так:

$$\sigma_{n.n} = A \epsilon_{n.n}^k, \quad (1.3)$$

где $\sigma_{n.n}$ и $\epsilon_{n.n}$ — экспериментальные значения предела прочности и деформации, соответствующей пределу прочности.

Б. Условия равенства у отдельных работ экспериментальной диаграммы (рис. 1) и аппроксимирующей ее зависимости (1.2). Это условие записывается так:

$$\omega_2 = A \int_0^{\epsilon_{n.n}} \epsilon^k d\epsilon = \frac{A}{k+1} \epsilon_{n.n}^{k+1}. \quad (1.4)$$

Здесь ω_2 — экспериментальное значение удельной работы, равное вертикально заштрихованной площади на рис. 1. Решая совместно (1.3) и (1.4) относительно A и k , получим

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad (1.5)$$

$$A = \frac{\sigma_{n.n}}{\epsilon_{n.n}^k}. \quad (1.6)$$

В формуле (1.5) ω_1 есть дополнительная работа деформации, равная величине горизонтально заштрихованной площади на рис. 2. Таким образом, k есть отношение дополнительной удельной энергии к удельной энергии деформации. После определения величин A и k по формулам (1.5) и (1.6) необходимо построить кривую (1.2) и нанести ее на экспериментальную кривую. В большинстве случаев получается хорошее совпадение между обеими кривыми, особенно на участке между $\frac{\epsilon_{н.п.}}{2}$ и $\epsilon_{н.п.}$.

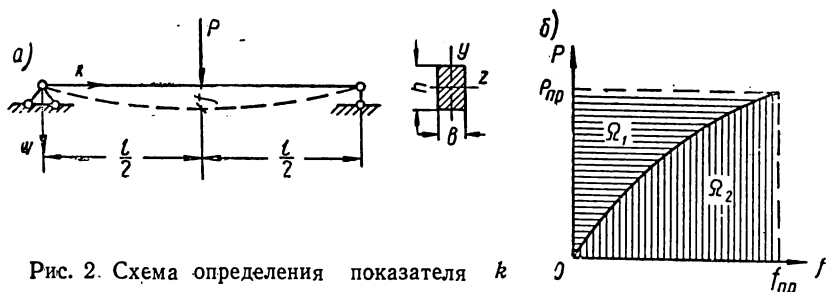


Рис. 2. Схема определения показателя k

Однако следует иметь в виду, что при малых деформациях расхождение, как правило, бывает большим. Поэтому такой способ аппроксимации рекомендуется, когда заранее предполагается изучить работу конструкции при больших деформациях (например, в зоне упрочнений, если иметь в виду сталь), а также при исследовании устойчивости. В некоторых случаях может оказаться, что полученная предлагаемым способом диаграмма резко отличается от экспериментальной. Тогда надо выбрать другой способ аппроксимации из имеющихся в литературе, например способ наименьших квадратов.

Второй способ (по истинной диаграмме). Строится истинная диаграмма растяжения в координатах σ_n и ϵ_n , где σ_n и ϵ_n — истинные значения напряжений и деформаций. Как показывает теория [15], в этом случае

$$k = \epsilon_{н.п.}, \quad (1.7)$$

где $\epsilon_{н.п.}$ — истинная деформация, соответствующая пределу прочности. Величина A определяется по формуле

$$A = \frac{\sigma_{н.п.}}{\epsilon_{н.п.}^k}, \quad (1.8)$$

где $\sigma_{н.п.}$ — истинная величина предела прочности.

Недостатком этого способа по сравнению с первым является то, что истинную диаграмму строить сложнее, чем условную. Значения A и k , полученные по этому способу, несколько отличаются от значений A и k , вычисленных по первому способу.

Этот прием следует применять в тех случаях, когда предполагается изучить поведение конструкции при очень больших деформациях (на участке диаграммы между пределом прочности и точкой разрыва).

Здесь не рассматривается вопрос о построении условной и истинной диаграмм растяжения или сжатия, так как он хорошо освещен в специальной литературе.

2. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ A И k ИЗ ОПЫТОВ НАД ИЗГИБАЕМЫМИ БАЛКАМИ

Из исследуемого материала изготавливается балочка прямоугольного сечения и загружается по схеме, изображенной на рис. 2, *a*. Во время опытов измеряется прогиб балки f посередине и строится диаграмма $P-f$ (рис. 2, *b*) или вплоть до момента разрушения, или, если разрушения нельзя достигнуть, вплоть до появления деформаций, превосходящих те, при которых предполагается исследовать конструкцию.

Найдем теоретическую зависимость между P и f , исходя из зависимости (1.2). Оставляя в силе закон плоских сечений для деформаций балки, примем известную формулу

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (1.9)$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси;
 y — расстояние от нейтрального слоя до волокна, в котором определяются деформации ϵ .

Принимая вместо закона Гука закон (1.2), получим

$$\sigma = A \left(\frac{y}{\rho} \right)^k \quad (1.10)$$

и

$$-M = \int_F \sigma y dF = \frac{A}{\rho^k} J_{k+1}, \quad (1.11)$$

где J_{k+1} — момент инерции $(k+1)^{20}$ порядка, определяемый по формуле

$$J_{k+1} = \int_F y^{k+1} dF. \quad (1.12)$$

Полагая в (1.11) $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 w}{dx^2}$, где $w = w(x)$ есть прогиб оси балки, получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси в следующем виде:

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} w^n = - [M(x)]^{\frac{1}{k}}. \quad (1.13)$$

При $k=1$ и $A=E$ это дифференциальное уравнение переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение изогнутой оси, известное из курса сопротивления материалов.

Подставляя в (1.13), согласно рис. 2,а,

$$M(x) = \frac{P}{2} x \quad (1.14)$$

и дважды интегрируя по x , получим

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} \omega'' = - \left(\frac{P}{2} \right)^{\frac{1}{k}} x^{\frac{1}{k}}; \quad (1.15'')$$

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} \omega' = - \left(\frac{P}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{kx^{\frac{1}{k}+1}}{1+k} + c_1; \quad (1.15')$$

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} \omega = - \left(\frac{P}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 x^{2+\frac{1}{k}}}{(1+k)(1+2k)} + c_1 x + c_2. \quad (1.15)$$

Из условия при $x=0$, $\omega=0$ получаем $c_2=0$. Постоянную c_1 находим из условия при $x=\frac{l}{2}$ $\omega' = 0$:

$$c_1 = \left(\frac{P}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{1}{k}+1}}{2^{\frac{1}{k}+1}} \cdot \frac{k}{1+k}. \quad (1.16)$$

Таким образом, окончательно уравнение изогнутой оси получим в следующем виде:

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} \omega = - \left(\frac{P}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{kx}{k+1} \left(\frac{kx^{\frac{1}{k}+1}}{1+2k} - \frac{l^{\frac{1}{k}+1}}{2^{\frac{1}{k}+1}} \right). \quad (1.17)$$

Подставляя сюда $\omega=f$ и $x=\frac{l}{2}$, получим зависимость между нагрузкой P и прогибом посередине балки f :

$$f = \frac{k}{1+2k} \frac{l^{\frac{1}{k}+2}}{2^{\frac{2}{k}+2}} \frac{1}{(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}}} P^{\frac{1}{k}}. \quad (1.18)$$

При $k=1$, $A=E$ и $J_{k+1}=J$ эта формула переходит в обычную для этой схемы балки формулу сопротивления материалов:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

Обозначив

$$B = \frac{2^{2+2k} A J_{k+1}}{\left(\frac{k}{1+2k}\right)^k l^{1+2k}}, \quad (1.19)$$

представим зависимость (1.18) в следующем виде, напоминающем зависимость (1.2):

$$P = B f^k. \quad (1.20)$$

Из экспериментальной диаграммы $P-f$, изображенной на рис. 2,б, определим постоянные k и B , а затем, зная B , из формулы (1.19) найдем постоянную A :

$$A = \frac{B \left(\frac{k}{1+2k}\right)^k l^{1+2k}}{2^{2+2k} J_{k+1}}. \quad (1.21)$$

Для определения B и k составим условия, аналогичные условиям A и B (стр. 271).

1. Условие равенства предельных нагрузок, определяемых по экспериментальной кривой $P-f$ и по аппроксимирующей ее зависимости (1.20). Это условие запишется так:

$$P_{np} = B f_{np}^k, \quad (1.22)$$

где P_{np} и f_{np} — предельные значения силы и прогиба, определяемые по экспериментальной кривой рис. 2,б.

2. Условие равенства работ экспериментальной диаграммы $P-f$ и аппроксимирующей ее зависимости (1.20). Это условие записывается в следующем виде:

$$\Omega_2 = B \int_0^{f_{np}} f^k df = \frac{B f_{np}^{k+1}}{k+1}. \quad (1.23)$$

Здесь Ω_2 — работа изгиба, равная величине заштрихованной вертикально площади на рис. 2,б. Решая совместно (1.22) и (1.23), получим

$$k = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}; \quad (1.24)$$

$$B = \frac{P_{np}}{f_{np}^k}. \quad (1.25)$$

Таким образом и в этом случае k равно отношению дополнительной работы к работе деформации. Определив B , по формуле (1.21) определяем A . Следует отметить, что определенные таким образом постоянные A и k хорошо совпадают (при тщательной постановке опыта) со значениями A и k , определенными из диаграммы растяжения.

Величина J_{k+1} для прямоугольника определяется по формуле.

$$J_{k+1} = \frac{bk^{2+k}}{2^{k+1}(k+2)}. \quad (1.26)$$

После определения A и k необходимо построить теоретическую кривую (1.20) и нанести ее на экспериментальную. Как правило, в области больших прогибов ($\frac{f_{\text{нп}}}{2} < f \leq f_{\text{нп}}$) расхождение между обеими кривыми получается небольшим. В области малых прогибов расхождение может быть значительным.

Более точное совпадение на участке больших прогибов можно получить, если вместо приближенного уравнения (1.13) интегрировать точное уравнение (1.11). Однако получаемая таким образом поправка невелика.

Об осреднении опытных величин A и k . Величины A и k определяются на основании испытаний нескольких образцов, выполненных из одного и того же материала. При этом, естественно, получатся разные значения A и k , которые обозначим $A_1, k_1, A_2, k_2, \dots, A_n, k_n$. Для осреднения полученных значений составим для каждого образца нижеследующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A_1 \varepsilon^{k_1}; \\ \sigma_2 &= A_2 \varepsilon^{k_2}; \\ &\dots \dots \dots \\ \sigma_n &= A_n \varepsilon^{k_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Перемножая эти равенства и извлекая корень n -й степени, получим

$$\sigma = \sqrt[n]{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} = \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n} \varepsilon^{\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}} = A_{\text{ср}} \varepsilon^{k_{\text{ср}}}. \quad (1.28)$$

Таким образом,

$$A_{\text{ср}} = \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n}, \quad (1.29)$$

т. е. $A_{\text{ср}}$ равно среднему геометрическому из частных значений A_i ;

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}, \quad (1.30)$$

т. е. $k_{\text{ср}}$ равно среднему арифметическому из частных значений k_i .

II. Степенной закон с тремя константами.

Некоторым недостатком закона (1.2) является то, что величина производной $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ при $\varepsilon = \varepsilon_{\text{н.п}}$ не равна 0, хотя производная экспериментальной условной кривой в этом месте равна 0.

Этот недостаток устраняется, если кривую растяжения задать в следующем виде:

$$\sigma = C\varepsilon^m (1 - \alpha\varepsilon). \quad (1.31)$$

Постоянные C , m и α найдем по экспериментальной условной диаграмме растяжения, составив три условия.

1. Условие равенства пределов прочности экспериментальной диаграммы и аппроксимирующей ее зависимости (1.31) (условие равенства значений функции при конечном значении аргумента):

$$\sigma_{п.п} = C\varepsilon_{п.п}^m (1 - \alpha\varepsilon_{п.п}). \quad (1.32)$$

2. Условие равенства удельных работ экспериментальной диаграммы и аппроксимирующей ее зависимости (1.31) (условие равенства первых интегралов при конечном значении аргумента):

$$\omega_2 = C \int_0^{\varepsilon_{п.п}} \varepsilon^m (1 - \alpha\varepsilon) d\varepsilon = B \left(\frac{\varepsilon_{п.п}^{m+1}}{m+1} - \alpha \frac{\varepsilon_{п.п}^{m+2}}{m+2} \right). \quad (1.33)$$

3. Условие равенства модулей упругости при $\varepsilon = \varepsilon_{п.п}$ экспериментальной диаграммы и аппроксимирующей ее зависимости (1.31) (условие равенства первых производных при конечном значении аргумента). Если в этой точке производная экспериментальной кривой равна нулю, то это условие принимает вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_{п.п}} = C [m\varepsilon_{п.п}^{m-1} - (m+1)\alpha\varepsilon_{п.п}^m] = 0. \quad (1.34)$$

Решая совместно (1.32), (1.33) и (1.34), получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{m}{(m+1)\varepsilon_{п.п}}; \\ m &= 2 \frac{\omega_1}{\omega_2}; \\ C &= \frac{\sigma_{п.п}(m+1)}{\varepsilon_{п.п}^m}. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= \frac{\sigma}{\sigma_{п.п}}; \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1; \\ \varepsilon^* &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{п.п}}; \quad 0 \leq \varepsilon^* \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

где σ^* — безразмерное напряжение;
 ε^* — деформация, отнесенная к предельному значению де-

формации. Учитывая эти обозначения, а также полученные значения α и C , вместо уравнения (1.31) можно записать:

$$\sigma^* = (m + 1)(\varepsilon^*)^m - m(\varepsilon^*)^{m+1}. \quad (1.37)$$

В зависимость (1.37), записанную в безразмерных параметрах, входит только одна экспериментальная постоянная вместо трех.

При аппроксимации по формуле (1.2) мы уравниваем значения функций и ее первого интеграла с экспериментальными значениями при $\varepsilon = \varepsilon_{п.п}$. При аппроксимации по формуле (1.31) уравниваются с экспериментальными значениями три величины — значения первого интеграла, значения самой функции и значение ее первой производной. Поэтому аппроксимация по формуле (1.31) должна быть точнее аппроксимации по формуле (1.2), что на самом деле и наблюдается.

Если при $\varepsilon = \varepsilon_{п.п}$ первая производная не равна нулю, то вместо (1.34) составляем условие

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_{п.п}} = \varepsilon'_{п.п}, \quad (1.38)$$

где $\varepsilon'_{п.п}$ — экспериментальное значение производной при $\varepsilon = \varepsilon_{п.п}$.

Решая совместно (1.32), (1.33) и (1.38), получим значения C , m и α для этого случая.

Недостатком закона (1.31) является его сложность, что приводит в свою очередь к усложнению расчета.

III. Аппроксимация при помощи полинома с целыми нечетными показателями. В этом случае связь между напряжениями и деформациями задается формулой

$$\sigma = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \varepsilon^{2i+1}, \quad (1.39)$$

где $i=0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Таким образом, показатель у ε — всегда нечетное положительное число. Это обстоятельство, как будет показано ниже, значительно облегчает вычисления и в конечном счете приводит (в отличие от аппроксимации по первому и второму законам) к решению нелинейных уравнений с целыми показателями. Во многих случаях достаточно ограничиться двумя членами ряда (1.39):

$$\sigma = A_0 \varepsilon + A_1 \varepsilon^3. \quad (1.40)$$

Коэффициенты A_0 и A_1 определяются из условия наилучшей аппроксимации экспериментальной кривой, которую лучше всего осуществить по способу наименьших квадратов. Эти коэффициенты имеют размерность напряжений. Для большинства материалов A_1 получается отрицательным.

Формула (1.40) дает хорошие результаты при слабо выраженной нелинейности, причем A_0 принимается равным обычному модулю упругости материала.

Заметим, что экспериментальную диаграмму $\sigma - \varepsilon$ можно обработать при помощи гармонического анализа и получить выражение для σ в виде ряда Фурье, как это было сделано Г. А. Гениевым [5]. Это может иметь некоторое практическое значение. Однако, поскольку вышепредложенные формулы являются достаточно точными и наиболее простыми из всех возможных, в дальнейшем будем пользоваться только ими.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Рассмотрим срединную поверхность полой оболочки, отнесенную к системе координат ox, oy, oz с началом в центре опорного плана оболочки. Ось z направим вниз, а оси x и y так, как

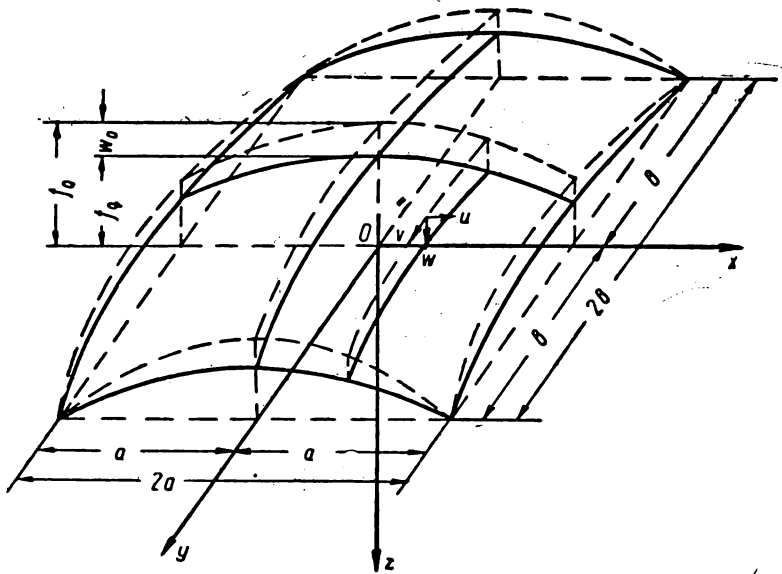


Рис. 3. Основные элементы полой оболочки

показано на рис. 3, где пунктиром изображено положение срединной поверхности оболочки до деформации, а сплошными линиями ее положение после деформации (после нагружения). Размеры прямоугольного плана оболочки — $2a$ (длина) и $2b$ (ширина). Симметричность формы оболочки относительно координатных осей не является обязательной.

Уравнение срединной поверхности в принятой системе координат до нагружения (при нулевой нагрузке) обозначим

$$F_0 = F_0(x, y). \quad (2.1)$$

Уравнение той же поверхности после нагружения нагрузкой

$$q = q(x, y) \quad (2.2)$$

будем обозначать

$$F_q = F_q(x, y). \quad (2.3)$$

Максимальные значения функций F_0 и F_q будем обозначать соответственно через f_0 и f_q . Таким образом, f_0 — подъем оболочки до нагружения; f_q — подъем оболочки после нагружения.

Перемещения произвольной точки M срединной поверхности обозначим u , v и w . Перемещения u и v соответственно параллельны осям ox и oy ; перемещения w направлены по нормали к срединной поверхности, но вследствие пологости оболочки направление нормали принимается параллельным оси oz . Учитывая это, а также принимая во внимание малость перемещений u и v по сравнению с перемещением w , можно написать

$$F_q = F_0 - w. \quad (2.4)$$

Для пологих оболочек кривизны определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}; \\ k_y &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}; \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Здесь k_x , k_y и k_{xy} соответственно кривизны и кручения срединной поверхности оболочки до нагружения. После нагружения эти же величины, учитывая формулу (2.4), принимают значения

$$\left. \begin{aligned} k'_x &= \frac{\partial^2 F_q}{\partial x^2} = k_x - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_x + x_x; \\ k'_y &= \frac{\partial^2 F_q}{\partial y^2} = k_y - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_y + x_y; \\ k'_{xy} &= \frac{\partial^2 F_q}{\partial x \partial y} = k_{xy} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = k_{xy} + x_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Приращения кривизн в процессе нагружения, обозначенные

$$x_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad x_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad x_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.7)$$

называются деформациями изгиба и кручения срединной поверхности.

Если система координат совпадает с линиями главных кривизн, то кручение равно нулю, а величины k_x и k_y равны главным кривизнам:

$$k_x = k_1; k_y = k_2. \quad (2.8)$$

Величина

$$\Gamma = \begin{vmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{vmatrix} = k_x k_y - k_{xy}^2 \quad (2.9)$$

или

$$\Gamma = k_1 k_2, \quad (2.9')$$

как известно, является (приближенно) Гауссовой кривизной срединной поверхности пологой оболочки. Поэтому величина

$$\Delta \Gamma = \begin{vmatrix} k'_x & k'_{xy} \\ k'_{xy} & k'_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_y & k_{yx} \\ k_{xy} & k_x \end{vmatrix} = x_x x_y - x_{xy}^2 + k_x x_y + k_y x_x - 2k_{xy} x_{xy} \quad (2.10)$$

будет выражать изменение Гауссовой кривизны оболочки в процессе деформации, а величина

$$\Delta_n \Gamma = x_x x_y - x_{xy}^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2.10')$$

изменение Гауссовой кривизны пластинки.

Обозначим толщину оболочки буквой h (рис. 4). Деформации элемента оболочки, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности обозначим соответственно ϵ_x , ϵ_y (продольные деформации), а деформацию кручения — ϵ_{xy} . На основании гипотезы Кирхгофа—Лява будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= e_x + z x_x; \\ \epsilon_y &= e_y + z x_y; \\ \epsilon_{xy} &= e_{xy} + 2z x_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где e_x , e_y и e_{xy} — продольные деформации и деформация кручения срединной поверхности, определяемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Члены, стоящие в квадратных скобках, учитывают геометрическую нелинейность. Для пологих оболочек в большинстве случа-

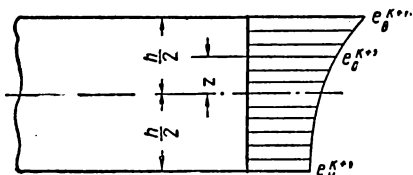


Рис. 4. Распределение интенсивностей деформаций по толщине

ев квадратом производных продольных перемещений u и v можно пренебречь. Если, кроме того, отнести оболочку к координатам, совпадающим с линиями главных кривизн, то выражения (2.12) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Подробный вывод этих формул хорошо изложен в [2].

Интенсивность деформаций при μ , равном 0,5, как известно [7], определяется формулой

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2}. \quad (2.14)$$

Вставляя сюда значения деформаций по формулам (2.11) и (2.13), получим

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2'' z + b_3'' z^2}. \quad (2.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y + \frac{1}{4} e_{xy}^2; \\ b_2'' &= 2e_x \kappa_x + 2e_y \kappa_y + e_x \kappa_y + e_y \kappa_x + e_{xy} \kappa_{xy}; \\ b_3'' &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_{xy}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введем безразмерную переменную t (рис. 4):

$$t = \frac{2z}{h}; \quad -1 \leq t \leq +1. \quad (2.17)$$

Тогда вместо (2.11) получим

$$\varepsilon_x = e_x + \kappa_1 t; \quad \varepsilon_y = e_y + \kappa_2 t; \quad \varepsilon_{xy} = \kappa_{12} t, \quad (2.18)$$

где

$$\kappa_1 = \kappa_x \frac{h}{2}; \quad \kappa_2 = \kappa_y \frac{h}{2}; \quad \kappa_{12} = \kappa_{xy} h. \quad (2.19)$$

После подстановки в (2.18) выражений (2.15) и (2.16) будем иметь:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2 t + b_3 t^2}. \quad (2.20)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y + \frac{1}{4} e_{xy}^2 = (e_x + e_y)^2 - e_x e_y + \frac{1}{4} e_{xy}^2; \\ b_2 &= 2e_x x_1 + 2e_y x_2 + e_x x_2 + e_y x_1 + \frac{e_{xy} x_{12}}{2} = \\ &= 2(e_x + e_y)(x_1 + x_2) - e_x x_2 - e_y x_1 + \frac{e_{xy} x_{12}}{2}; \\ b_3 &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{\gamma_{12}^2}{4} = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + \frac{x_{12}^2}{4}. \end{aligned} \right\} (2.21)$$

Как было сказано выше, связь между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций e_i принимается такой же, как и связь между продольными напряжениями и деформациями.

3. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ

Энергия деформации нелинейно-упругого и упруго-пластического тела выражается формулой [7]

$$V = \iiint \left[\int_0^{e_i} \sigma_i de_i + \frac{k\theta^2}{2} \right] dx dy dz, \quad (3.1)$$

где $k = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2}$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения);

$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ — объемная деформация (ϵ_x, ϵ_y и ϵ_z — главные деформации).

Тройной интеграл (3.1) берется по всему объему тела.

Принимая, как уже выше было отмечено, гипотезу о равенстве объемной деформации нулю $\theta = 0$, получим

$$V = \iiint \left[\int_0^{e_i} \sigma_i de_i \right] dx dy dz \quad (3.2)$$

или с учетом второго соотношения (1.1)

$$V = \iiint \left[\int_0^{e_i} f(e_i) de_i \right] dx dy dz. \quad (3.3)$$

По этим формулам определяется работа внутренних сил — энергия деформации. Что касается работы внешних сил W , то она определяется по формуле

$$W = \iint (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy, \quad (3.4)$$

где q_x, q_y, q_z — составляющие нагрузки по направлениям z, x, y (см. рис. 3). Здесь интегрирование производится по всей поверхности оболочки.

В любом состоянии вариация внешней работы должна равняться вариации внутренней работы, т. е.

$$\delta W = \delta V. \quad (3.5)$$

Это уравнение (из которого всегда можно получить дифференциальные уравнения равновесия) связывает между собой четыре функции:

1) функцию F_0 — т. е. функцию срединной поверхности оболочки при начальном нагружении, которое необязательно должно быть нулевым. Эта функция представлена в уравнении (3.5) через кривизны (2.5), входящие в формулы (2.13) и через них в формулу (2.14);

2) функцию F_q — т. е. функцию срединной поверхности оболочки при нагрузке q . Эта функция в уравнение (3.5) входит через перемещения u , v и w ;

3) функцию нагрузки $q = q(x, y, z)$, которая описывает закон изменения интенсивности нагрузки;

4) функцию $\sigma(e_i)$, которая описывает физические свойства материала.

Уравнение (3.5) может быть решено при двух предположениях.

1. Все эти функции будем считать непрерывными функциями. В натуре поверхность оболочки может иметь изломы, нагрузка скачки и т. д., но все это существует только теоретически. На практике изломы сглажены, нагрузка изменяется более или менее постепенно, сосредоточенных сил нет. Кроме того, всякую функцию, имеющую скачки, всегда можно с достаточной точностью изобразить непрерывной функцией. Например, сосредоточенную силу P можно изобразить при помощи функции (рис. 5)

$$P = P_0 \sin \frac{n \pi x}{a}. \quad (3.6)$$

При достаточно большом n это будет почти точно сосредоточенная сила, а при достаточно малом n — равномерно распределенная нагрузка. Эту же силу можно изобразить в виде параболы n -го порядка и т. д. Словом, для целей практики всегда можно отыскать непрерывную функцию, которая с любой точностью заменит прерывную, и эта функция, вообще говоря, будет более точно описывать действительное положение вещей, так как разрывные функции, сосредоточенные нагрузки, скачки и переломы есть некоторая идеализация фактического состояния конструкции.

Таким образом, первый метод решения заключается в том, что функции F_0 , F_q , q и $\sigma(e_i)$ считаются непрерывными; все их производные также непрерывны.

2. Но уравнение (3.5) может быть также решено и в предположении, как раз обратном. Можно принять, что функции F_0 , F_q , q и $\sigma(e_i)$ есть функции разрывные или имеющие разрывные производные. Например, если принять, что F_q есть поверхность, у которой первые производные терпят разрывы, то получим решение, примыкающее к методу сосредоточенных деформаций Гвоздева—Ржаницына.

Таким образом, можно наметить два основных метода — метод непрерывных функций и метод разрывных функций. Возможно также построение комбинированных методов.

Поскольку уравнение (3.5) и вытекающие из него уравнения равновесия связывают четыре функции, то в зависимости от того, что задано и что разыскивается, возможны 14 основных постановок задачи (согласно табл. 1).

Т а б л и ц а 1

№ задачи	Что задано	Что разыскивается	№ задачи
1	q, F_0, F_q	σe_i	14
2	$\sigma(e_i), F_0, F_q$	q	13
3	$\sigma(e_i), q, F_q$	F_0	12
4	$\sigma(e_i), q, F_0$	F_q	11
5	$F_0 F_q,$	$\sigma(e_i), q$	10
6	q, F_q	$\sigma(e_i), F_0$	9
7	q, F_0	$\sigma(e_i), F_q$	8
	Что разыскивается	Что задано	

Задачи в постановках № 5—14 являются неопределенными и не могут быть решены однозначно, если на искомые функции не будут наложены какие-либо дополнительные требования физического или иного порядка. Задачи в постановках № 1—4 допускают однозначное решение. На практике наиболее часто встречающейся является задача № 4, когда задан материал, нагрузка и начальная поверхность; требуется определить F_q и, следовательно, перемещения и усилия в оболочке. В такой постановке задача называется прямой, и ей в литературе уделено наибольшее внимание.

Большое практическое значение имеет постановка задачи № 2, когда задан материал, начальная поверхность и поверх-

ность после деформации (или, что то же самое, усилия в оболочке) и требуется определить нагрузку. Эта задача обратного метода. При решении задач этого типа часто отпадают трудности, связанные с интегрированием, что дает большие преимущества по сравнению с постановкой задачи № 4.

Постановка задачи № 3, когда заданы материал, нагрузка и форма деформированной поверхности (или усилия), а требуется определить форму начальной поверхности, имеет весьма важное принципиальное значение. Она относится к синтетической строительной механике — определение оптимальной формы оболочки при заданных условиях работы материала.

Постановка задачи № 1 также относится к синтетической строительной механике. В этой постановке при заданной нагрузке, начальной поверхности и перемещениях требуется подобрать материал оболочки. Особенное значение имеет эта задача при расчете многослойных оболочек. Практически в литературе такая постановка не встречалась.

Неопределенные постановки задач № 5—14 при дополнительных условиях также имеют практические значения, но задачи этого типа почти не обследованы.

Далее возможно построение различных вариантов основных постановок. Каждую из функций F_0 , F_q , q и $\sigma(e_i)$, которые в общем случае зависят от координат, можно представить как комбинацию некоторых функций, каждая из которых зависит от одной или двух координат. Например:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(e_i) &= \sigma(e_i)(x) \sigma(e_i)(y) \sigma(e_i)(z); \\ q &= q(x) q(y) q(z); \\ F_0 &= F_0(x) F_0(y); \\ F_q &= F_q(x) F_q(y) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma(e_i) &= \sigma(e_i)(x, y) \sigma(e_i)(z); \\ q &= q(x, y) q(z); \\ F_0 &= F_0(x, y); \\ F_q &= F_q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

и т. д. Первые уравнения могут иметь место в анизотропных оболочках. Из 10 функций (3.7) или 4 функций (3.8), которые войдут в уравнение (3.5), некоторыми можно задаться; остальные будут искомыми. Например, можно задаться распределением нагрузки по одной координате и отыскать распределение ее по другой или задаться распределением усилий по одной координате, отыскивая это распределение по другой. Таким образом, может быть построено большое количество расчетных методов. Метод Мориса—Леви, применяемый при расчете пластинок, когда задаются функцией прогибов по одной координате и

отыскивают эту функцию по другой, является одним из этих методов. Различные вариационные методы, предложенные В. З. Власовым и другими авторами, также входят в эту группу методов.

Следует сказать, что все выше сказанное может быть обобщено и на другие задачи теории упругости, не связанные с теорией оболочек.

4. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим прямую задачу теории оболочек: заданы функция материала $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$, форма поверхности оболочки до нагружения $F_0 = F_0(x, y)$ и функция нагрузки $q(x, y)$; требуется определить форму поверхности оболочки после нагружения.

Покажем, как приближенно решается эта задача в случае степенной зависимости напряжений от деформаций, а затем дадим указания, как ее можно решить и в других случаях этой зависимости.

Подставив (1.2) в (3.2), получим

$$V = \frac{A}{k+1} \iiint e_i^{k+1} dx dy dz. \quad (4.1)$$

Здесь, как уже было сказано, тройной интеграл распространяется на весь объем оболочки. При $k=1$ и $A=E$ получим энергию деформации линейно-упругого тела:

$$V = \frac{E}{2} \iiint e_i^2 dx dy dz. \quad (4.2)$$

При $k=0$ и $A=\sigma_T$ получаем энергию деформации жестко-пластического тела:

$$V = \sigma_T \iiint e_i dx dy dz. \quad (4.3)$$

Подставляя в (4.1) значения интенсивности деформации по формуле (2.20) и переходя от z к безразмерной координате t , согласно обозначениям (2.17) получим следующее выражение для энергии деформации:

$$V = \frac{2^k Ah}{(k+1) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-1}^{+1} (b_1 + b_2 t + b_3 t^2)^{\frac{k+1}{2}} dx dy dt. \quad (4.4)$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 t^2 &= e^2; \\ e &= \sqrt{b_1 + b_2 t + b_3 t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

будем иметь

$$V = \frac{2^k Ah}{(k+1)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-1}^{+1} e^{k+1} dx dy dt. \quad (4.6)$$

Интегрирование по t выполним по формуле Симпсона (параболических трапеций), разбив высоту на один участок ($n=1$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} e^{k+1} dt &= \frac{2}{3} \left[\frac{e_B^{k+1} + e_H^{k+1}}{2} + 2e_0^{k+1} \right] = \\ &= \frac{1}{3} (e_B^{k+1} + e_H^{k+1} + 4e_0^{k+1}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

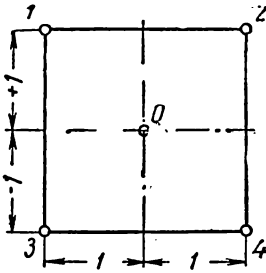


Рис. 6. Сетка для вычислений по кубатурным формулам

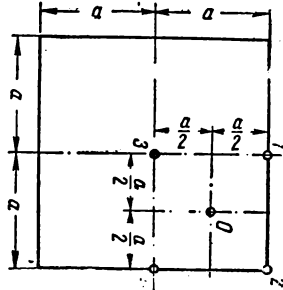


Рис. 7. Сетка для вычислений по кубатурным формулам

где величины

$$\left. \begin{aligned} e_B &= \sqrt{b_1 + b_2 + b_3}; & e_B^2 &= b_1 + b_2 + b_3; \\ e_0 &= \sqrt{b_1}; & b_0^2 &= b_1; \\ e_H &= \sqrt{b_1 - b_2 + b_3}; & e_H^2 &= b_1 - b_2 + b_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

получаются из формулы (4.5) после подстановки в нее соответственно $t = +1$, $t = 0$, $t = -1$ (см. рис. 4).

Окончательно для энергии получим

$$V = \frac{2^k}{3^{\frac{k+3}{2}}} \cdot \frac{Ah}{k+1} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (e_B^{k+1} + e_H^{k+1} + 4e_0^{k+1}) dx dy. \quad (4.9)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей поверхности S оболочки. Интегрирование по x и y выполним по кубатурной формуле [8]:

$$J = \iint_S F dx dy = \frac{8}{3} F_0 + \frac{1}{3} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4), \quad (4.10)$$

где F_i значения подинтегральной функции в точках квадрата со стороной 2, изображенного на рис. 6.

Если оболочка прямоугольная в плане, то ее следует разбить на несколько частей, каждую часть привести к квадрату (см. рис. 4) и вычислить интеграл (4.10) для каждой части. Рассмотрим для примера квадратную в плане оболочку со стороной $2a$ (рис. 7), находящуюся под действием равномерно-распределенной нагрузки с симметричными граничными условиями. Разбив ее на четыре квадрата, получим

$$J = \frac{a^2}{3} (8F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \quad (4.11)$$

Например, если

$$F = \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a},$$

то

$$J = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} dx dy = \frac{16a^2}{\pi^2} \quad (4.12)$$

будет точным значением интеграла. По формуле (4.11) получим

$$F_0 = \frac{1}{2}; \quad F_1 = F_2 = F_4 = 0; \quad F_3 = 1;$$

$$J = \frac{a^2}{3} \left(8 \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{3} a^2,$$

что по сравнению с (4.12) дает ошибку в 3%. С учетом (4.10) выражение для энергии принимает вид

$$V = \frac{2^k}{(k+1) 3^{\frac{k+5}{2}}} Aab h (8F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \quad (4.13)$$

Здесь

$$F_i = e_{\text{в}}^{k+1} + e_{\text{н}}^{k+1} + 4e_0^{k+1}; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (4.14)$$

а величины $e_{\text{в}}$, $e_{\text{н}}$ и e_0 определяются по формулам (4.8).

В случае только одной поперечной нагрузки работа внешних сил определяется по формуле

$$W = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q w dx dy. \quad (4.15)$$

Полная энергия системы

$$U = U(u, v, w) = V - W. \quad (4.16)$$

Примем

$$\left. \begin{aligned} u &= \Sigma c_i \bar{u}_i; \\ v &= \Sigma c'_i \bar{v}_i; \\ w &= \Sigma w_i \bar{w}_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

В этих рядах \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i есть некоторые задаваемые функции перемещений, удовлетворяющие граничным условиям, а величины c_i , c'_i и w_i есть искомые коэффициенты. Для их определения подставим (4.17) в (4.16) и составим условия минимума энергии U .

Из этих условий получим системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial c'_i} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial w_i} = 0. \quad (4.18)$$

Определив из системы уравнений (4.18) коэффициенты c_i , c'_i и w_i , найдем функции u , v и w , а затем по формулам (2.13) и (2.11) — деформации.

Система алгебраических уравнений (4.18) получается достаточно сложной, так как состоит из нелинейных уравнений с дробными показателями. Решение этой системы однако возможно приближенными или графическими методами.

В случае применения закона физической нелинейности, выраженного формулой (1.31), решение строится по аналогичному плану.

Применение закона физической нелинейности (1.39) или (1.40) приводит также к аналогичной схеме решения. Существенным облегчением в этом случае является то, что интегрирование выражения энергии по z можно выполнить не приближенно, а точно. Действительно, подставив (1.39) в (3.2), получим

$$V = \iiint \left(A_0 \frac{e_i^2}{2} + A_1 \frac{e_i^4}{4} + A_2 \frac{e_i^6}{6} + \dots + A_n \frac{e_i^{2n+2}}{2n+2} \right) dx dy dz. \quad (4.19)$$

Подставив сюда выражения для интенсивности деформации по формуле (2.20) и перейдя от z к безразмерной координате, согласно обозначениям (2.17), будем иметь

$$V = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{A_0 h}{3} e_i + \frac{2A_1 h}{9} e_i^2 + \frac{16A_2 h}{81} e_i^3 + \dots \right) dx dy dt. \quad (4.20)$$

Здесь

$$e_i = e^2 = b_1 + b_2 t + b_3 t^2. \quad (4.21)$$

Так как e_i стоит под знаком интеграла с целочисленным показателем, то интегрирование по t выполняется легко. Кроме того, после подстановки пределов все члены, содержащие t в нечетной степени, пропадают. Например:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} e_i dt &= 2b_1 + \frac{2}{3} b_3; \\ \int_{-1}^{+1} e_i^2 dt &= 2b_1^2 + \frac{2}{3} (2b_1 b_3 + b_2) + \frac{2}{5} b_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

и т. д. Интегрирование по x и y также выполняется не приближенно, а в замкнутом виде. Недостаток этого решения заключается в необходимости произвести вычисления очень большого количества интегралов, что весьма громоздко, хотя эти интегралы являются достаточно простыми. После вычисления энергии деформации решение продолжается в том же порядке, как и для степенного закона.

5. О ВЫБОРЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Успешное решение задачи вышележащим энергетическим методом зависит от того, насколько удачно сделан выбор функций \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i , входящих в ряды (4.17). При удачном выборе можно получить удовлетворительное решение, даже если ограничиться одним членом в разложениях (4.17). При неудачном выборе функций \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i можно получить для (4.17) плохо сходящиеся и даже расходящиеся ряды.

Задаваемые функции перемещений должны обязательно удовлетворять кинематическим граничным условиям и возможно лучше описывать деформированную поверхность конструкции.

Рекомендуются следующие способы задания функций \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i .

А. Функции \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i представляются в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= \bar{u}_i(x) \bar{u}_i(y); \\ \bar{v}_i &= \bar{v}_i(x) \bar{v}_i(y); \\ \bar{w}_i &= \bar{w}_i(x) \bar{w}_i(y). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Функции, стоящие в правой части, могут быть выбраны из следующих трех классов.

1. Класса фундаментальных функций, в который входят и тригонометрические функции. Функции этого класса для различ-

ных граничных условий хорошо описаны в [1]. Чаще всего применяют разложение по синусам или косинусам. К этому же классу примыкают функции, составленные из различных комбинаций тригонометрических функций в первой, второй и более высоких степенях. Поскольку эти функции хорошо описаны в литературе и часто применяются на практике, на них останавливаться не будем.

2. Класса функций, описывающих прогибы линейно-упругих балок или арок с соответствующими граничными условиями и нагрузкой. Предложение об использовании этих функций в задачах теории оболочек было сделано В. З. Власовым [1], но до настоящего времени они мало применялись. Автор использовал

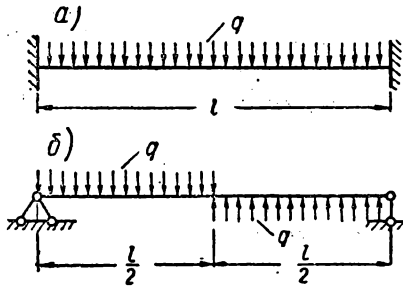


Рис. 8. Схемы балок для подбора аппроксимирующих функций

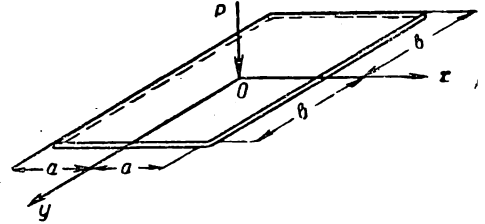


Рис. 9. Расчетная схема плиты

их в работе «Некоторые вопросы нелинейной теории оболочек» (научно-технический отчет ИМЭХ АН СССР за 1953 г.). В этой работе установлено, что применение этих функций дает очень хорошие результаты, в особенности если задача решается в геометрически линейной постановке.

Построение этих функций производится элементарными методами. Например, если нужно рассчитать оболочку с защемленными несмещающимися краями с равномерно распределенной нагрузкой, то в качестве функций $\bar{w}_i(x)$ или $\bar{w}_i(y)$ принимается функция прогибов балки, изображаемой на рис. 8,а, в качестве функций $\bar{u}_i(x)$ и $\bar{v}_i(x)$ или $\bar{u}_i(y)$ и $\bar{v}_i(y)$ — функция прогибов балки, изображенной на рис. 8,б. Если имеется сосредоточенная или какая-либо иная нагрузка, то необходимо выбрать схему балки с соответствующей нагрузкой. Применение функций этого класса приводит к менее трудоемким (при одной и той же точности) решениям, чем применение функций первого класса. К этому же классу примыкают функции, описываемые полиномами с целочисленными показателями.

3. Класса функций, описывающих прогибы нелинейно-упругих балок с тем же (или приблизительно тем же) законом физической нелинейности, какой принят для расчета плиты или обо-

лочки. Выбор этих функций для решения физически нелинейных задач приводит к более эффективным результатам, чем применение функций первых двух классов. Поскольку в литературе эти функции не описаны, остановимся на них подробнее и приведем несколько примеров построения таких функций.

а) Предположим, что необходимо рассчитать плиту или оболочку прямоугольную в плане, шарнирно опертую по всем четырём сторонам и нагруженную силой P посередине (рис. 9)

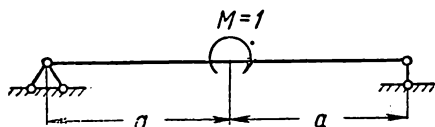


Рис. 10. Схема балки для выбора аппроксимирующей функции

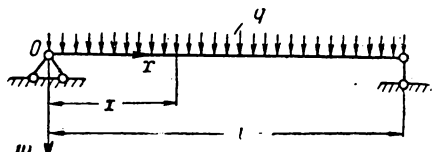


Рис. 11. Схема балки для выбора аппроксимирующей функции

при степенном законе физической нелинейности (1.2). Ограничиваемся одним членом разложения в рядах (4.17) и в качестве функций $\bar{w}(x)$ и $\bar{w}(y)$ принимаем выражение (1.17), описывающее прогибы нелинейно-упругой балки, изображенной на схеме рис. 2, а. Поскольку функции $\bar{w}(x)$ и $\bar{w}(y)$ являются безразмерными, то в выражении (1.17) необходимо положить $AJ_{k+1} = 1$ и $P=1$. Постоянные коэффициенты должны быть подобраны так, чтобы значение функции посередине пролета балки было равно единице. Выполнив эти требования и перейдя от системы координат и обозначений рис. 2,а к системе координат и обозначениям рис. 9, получим

$$\bar{w}(x) = \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1}}{m+2} - 1 \right]. \quad (5.2)$$

Здесь

$$m = \frac{1}{k}. \quad (5.3)$$

Выражение для $\bar{w}(y)$ получается из (5.2) путем замены x на y и a на b . При дальнейших вычислениях следует иметь в виду, что формула (5.2) написана для интервала $0 \leq x \leq a$.

В качестве функций $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$ или $\bar{u}(y)$, $\bar{v}(y)$ можно принять функцию, описывающую прогибы балки, изображенной на рис. 10 (если края оболочки не смещаются).

В качестве функций u и v иногда удобно применять функции вида

$$u = c_1 (k_x + k_y) w + c_2 w^2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые коэффициенты;

w — функция прогибов (см. [9]). Функция v имеет аналогичный вид.

б) Если необходимо рассчитать плиту или оболочку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой, то в качестве функций $w(x)$ и $w(y)$ следует принять функцию прогибов соответствующей балки с такой же нагрузкой. Однако здесь возникает затруднение, связанное с тем, что дифференциальное уравнение изогнутой оси (1.13) можно проинтегрировать не при всяком значении показателя k . Действительно, при равномерно распределенной нагрузке (а также и при треугольной) правая часть уравнения (1.13) принимает вид бинома:

$$x^m (a + bx^n)^p, \quad (5.4)$$

который может быть проинтегрирован только в трех случаях (см. [3] п. 311): 1) когда p целое число; 2) когда p дробь ($p = \frac{r}{s}$), но $\frac{m+1}{n}$ — целое число и 3) когда оба числа $p = \frac{r}{s}$ и $\frac{m+1}{n}$ дробные, но их сумма $\frac{m+1}{n} + p$ есть целое число. Во всех других случаях функция (5.4) не интегрируется. Практически значения показателя k получаются чаще всего такими, что функция (5.4) не может быть проинтегрирована. В этом случае вместо действительного k необходимо взять ближайшее к нему число так, чтобы одно из трех вышеперечисленных условий соблюдалось.

Например, если плита или оболочка шарнирно оперты, то выбрав балку по схеме, изображенной на рис. 11, получим вместо (1.13) следующее дифференциальное уравнение:

$$(AJ_{k+1})^{\frac{1}{k}} w'' = - \left[\frac{ql^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \right]^{\frac{1}{k}} \quad (5.5)$$

или

$$Dw'' = - \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (5.6)$$

где

$$D = \left(\frac{2AJ_{k+1}}{ql^2} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (5.7)$$

Для интегрирования выражения (5.6) проще всего использовать первый случай, т. е. вместо $\frac{1}{k}$ принять ближайшее нечетное число. Например, экспериментальным путем получено $k=0,292$; принимаем $\frac{1}{k} = \frac{1}{0,292} = 3$. В этом случае, проинтегрировав (5.6) и найдя произвольные постоянные из граничных условий, получим

$$-\frac{Dw}{l^2} = \frac{1}{20} \left(\frac{x}{l}\right)^5 - \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l}\right)^6 + \\ + \frac{1}{14} \left(\frac{x}{l}\right)^7 - \frac{1}{56} \left(\frac{x}{l}\right)^8 - \frac{1}{280} \left(\frac{x}{l}\right). \quad (5.8)$$

Величина D определяется при действительном значении k [(см. формулу (5.7)]. Искомая функция $w(x)$ получится из выражения (5.8), если подобрать значения постоянной $\frac{D}{l^2}$ так, чтобы прогиб посередине (при $x = \frac{l}{2}$) получился равным единице.

Подставив в правую часть (5.8) значение $x = \frac{l}{2}$, получим

$$\frac{Df}{l^2} = \frac{93}{35 \cdot 2^{11}}.$$

Полагая $f=1$, получим $\frac{D}{l^2} = \frac{93}{35 \cdot 2^{11}}$; окончательное выражение для функции $\bar{w}(x)$ принимает вид

$$w(x) = \frac{35 \cdot 2^{11}}{93} \left[\frac{1}{20} \left(\frac{x}{l}\right)^5 - \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l}\right)^6 + \right. \\ \left. + \frac{1}{14} \left(\frac{x}{l}\right)^7 - \frac{1}{56} \left(\frac{x}{l}\right)^8 - \frac{1}{280} \cdot \frac{x}{l} \right]. \quad (5.9)$$

При использовании этой функции следует начало координат выбрать не посередине опорного плана, а в какой-либо угловой точке его. В качестве функций \bar{u} и \bar{v} выбираются функции прогибов физически нелинейной балки с кососимметричной нагрузкой (например, по схеме рис. 8, б). Интегрирование дифференциального уравнения (1.13) производится аналогично.

Б. В качестве функций \bar{u}_i , \bar{v}_i и \bar{w}_i выбираются соответствующие функции, полученные из решения аналогичной физически линейной задачи с той же или даже более простой расчетной схемой. Например, для физически и геометрически нелинейной расчета пластинки или полой оболочки за функцию \bar{w}_i можно принять функцию прогибов физически и геометрически *линейной* пластинки, а за функции \bar{u}_i и \bar{v}_i — соответствующие физически *линейной* и геометрически нелинейной мембраны.

Функции, подобранные таким образом, дают достаточно точное решение уже в первом приближении, однако они сложны и операции с ними требуют больших вычислений.

6. ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ

Решение, полученное при помощи алгоритма, изложенного в п. 4, автоматически переходит в физически линейное решение

при соответствующем значении констант, входящих в закон физической нелинейности. Однако это решение, учитывающее только одну геометрическую нелинейность, проще получить самостоятельно, так как в случае физически линейного решения алгоритм, изложенный в п. 4, значительно упрощается и все необходимые интегралы можно получить в замкнутом виде. Для полой оболочки, изображенной на рис. 3 и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, этот алгоритм приводит к следующей зависимости между прогибом в центре оболочки и интенсивностью нагрузки:

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi_0 \xi^2 + \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi. \quad (6.1)$$

Здесь p , ξ_0 и ξ — безразмерные параметры нагрузки, начального подъема оболочки и прогиба, определяемые по формулам

$$p = \frac{16qa^4}{Eh^4}; \quad (6.2)$$

$$\xi_0 = \frac{f_0}{h}; \quad (6.3)$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{h}. \quad (6.4)$$

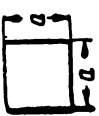

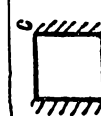

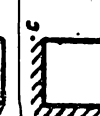

Через ω_0 обозначен прогиб в центре оболочки. Коэффициенты α_1 , α_2 , α_3 , α_4 зависят от геометрических параметров оболочки, граничных условий, а также в некоторой степени от выбора функций \bar{u}_i , \bar{v}_i и $\bar{\omega}_i$. Если в качестве этих функций выбрать функции прогибов линейно-упругой балки (см. раздел 5, п. А, 2), то для квадратной в плане оболочки получим значения коэффициентов, приведенные в табл. 2, в зависимости от различных граничных условий.

Коэффициенты подсчитаны для оболочек со свободно смещающимися краями. Штриховка обозначает, что соответствующий край заземлен относительно углов поворота; отсутствие штриховки обозначает, что край шарнирно оперт. Коэффициенты α_2 и α_3 , стоящие в числителе (для случаев граничных условий II, III и V), относятся к цилиндрической оболочке, у которой края ab и cd криволинейны; коэффициенты α_2 и α_3 , стоящие в знаменателе, относятся к цилиндрической оболочке, у которой края ac и bd криволинейны. Следует иметь в виду, что для случаев II, III и V в таблице указаны коэффициенты, определяющие прогиб посередине (а не максимальный). Коэффициенты подсчитаны при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$. Если коэффициент Пуассона другой, то значение коэффициента α_4 необходимо

умножить на отношение $\frac{0,91}{1-\mu^2}$; остальные коэффициенты (α_1 , α_2 и α_3) не изменяются.

Таблица 2

$$P = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi + \alpha_4$$

Граничные условия	Сферическая оболочка				Цилиндрическая оболочка			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_1	α_2	α_3	α_4
		+8,63	-19,62	+9,92	+22,12	+8,63	-19,62	+9,92
	+9,9	-19,05	+8,15	+32,51	+9,9	$\frac{-20,4}{-17,7}$	$\frac{+9,34}{+7,05}$	+32,51
	+7,57	-13,65	+5,48	+46,07	+7,57	$\frac{-11,55}{-9,47}$	$\frac{+5,07}{+4,45}$	+46,07
	+12,45	-20,18	+7,27	+43,59	+12,45	-20,18	+7,27	+43,59
	+10,31	-15,64	+5,27	+56,99	+10,31	$\frac{-15,2}{-16,06}$	$\frac{+4,99}{+5,55}$	+56,99
	+9,24	-13,10	+4,13	+68,89	+9,24	-13,1	+4,13	+68,89

Формула (6.1) состоит из четырех членов, каждый из которых имеет определенное физическое значение. Четвертый член представляет собой нагрузку, соответствующую прогибу ξ для плиты, рассчитанной по линейной теории:

$$p_{\Pi} = \alpha_4 \xi; \quad \xi = \frac{p_{\Pi}}{\alpha^4}. \quad (6.5)$$

Третий член соответствует дополнительной нагрузке, которую оболочка может нести за счет своей кривизны (подсчитанной также по линейной теории):

$$p_0 = \alpha_3 \xi_0^2 \xi. \quad (6.6)$$

Второй член соответствует дополнительной нагрузке, определяемой нелинейными членами в оболочке:

$$p_{o.n} = \alpha_2 \xi_0 \xi^2. \quad (6.7)$$

И, наконец, первый член соответствует дополнительной нагрузке, определяемой нелинейными членами в плите:

$$p_{п.н} = \alpha_1 \xi^3. \quad (6.8)$$

Таким образом, нагрузку, действующую на оболочку, можно представить в виде суммы четырех нагрузок:

$$p = p_{п.н} + p_{o.n} + p_0 + p_{\Pi}. \quad (6.9)$$

Соотношения между отдельными составляющими будут зависеть от величины прогиба; из формул (6.7) и (6.8) видно, что удельный вес геометрически нелинейных членов с увеличением прогиба будет быстро возрастать. Таким образом, уравнение (6.1) позволяет найти связь между нагрузкой и прогибом для расчетных случаев, приведенных в табл. 3.

Таблица 3

Уравнение	Что описывается
$p = \alpha_4 \xi$	Плита по геометрически линейной теории
$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_4 \xi$	Плита с учетом геометрической нелинейности
$p = \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi$	Оболочка по линейной теории
$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi_0 \xi^2 + \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi$	„ „ нелинейной теории

Из табл. 2 видно, что коэффициент α_2 , выражающий влияние нелинейных членов в оболочке, является отрицательным, а

коэффициент α_1 , выражающий влияние тех же членов для плиты, — положительным. Это означает, что с увеличением прогибов учет нелинейных членов в оболочке уменьшает нагрузку, а в плите увеличивает.

Можно сказать, что с увеличением прогибов конструктивная схема оболочки ухудшается — оболочка выпрямляется и стремится превратиться в плиту; с плитой обстоит как раз наоборот: прогибаемая плита превращается в оболочку, что создает лучшие условия для ее работы.

Отсюда следует, что если для плиты расчет по нелинейной теории целесообразен с точки зрения экономии материала, то для пологих оболочек этот расчет необходим для выяснения действительного коэффициента запаса, который по линейной теории получается завышенным.

Табл. 2 можно пользоваться для пологих оболочек с небольшим подъемом $\xi_0 \leq 4 + 6$, так как только для таких оболочек учет геометрической нелинейности имеет смысл.

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫХ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

1. Прямоугольная шарнирно опертая пластинка, нагруженная сосредоточенной силой P посередине.

Рассмотрим пластинку, изображенную на рис. 9. Найдем функцию прогибов для этой пластинки при малых перемещениях (геометрическая линейность), но с учетом физической нелинейности, задаваемой формулой (1.2). Величины b_1 и b_2 будут равны нулю, и поэтому формула (4.4) после интегрирования по t примет вид

$$V = \frac{2^{k+1} Ah}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} b_3^{\frac{k+1}{2}} dx dy. \quad (7.1)$$

Подставив сюда значение b_3 по третьей формуле (2.21) и значения x_i по формуле (2.19), получим

$$V = \frac{Ah^{k+2}}{(k+1)(k+3)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left(x_x^2 + x_y^2 + x_x x_y + \frac{1}{4} x_{xy}^2 \right) dx dy. \quad (7.2)$$

В данной задаче $u = v = 0$. Функцией $w(x, y)$ зададимся в виде

$$w(x, y) = \omega_0 \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y. \quad (7.3)$$

Здесь ω_0 есть прогиб посередине плиты, а ω_x и ω_y — функции, определяемые в соответствии с формулой (5.2):

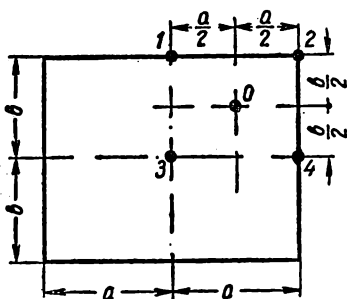
$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_x &= \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1}}{m+2} - 1 \right]; \\ \bar{w}_y &= \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left[\frac{\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{m+1}}{m+2} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Здесь $m = \frac{1}{k}$. Подставив (7.3) в (7.2) и выразив кривизны через функцию прогибов по формулам (2.7), получим

$$V = \frac{Ah^{k+2}}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \bar{x}_i^{k+1} dx dy, \quad (7.5)$$

где

$$\bar{x}_i = \sqrt{(\bar{w}_x'' w_y)''^2 + (w_x w_y'')''^2 + \bar{w}_x'' \bar{w}_y'' \bar{w}_x \bar{w}_y + (w_x' w_y')^2}. \quad (7.6)$$



Интегрирование по x и y выполним приближенно по формуле (4.10). Для этого разобьем площадь прямоугольного плана на четыре части (см. рис. 12) и вычислим значения \bar{x}_i в точках 0, 1, 2, 3, 4. Дифференцируя (7.4) соответственно по x и y , получим

Рис. 12. Сетка для вычислений по кубатурным формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_x' &= \frac{m+2}{m+1} \frac{1}{a} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1} \right]; & \bar{w}_y' &= \frac{m+2}{m+1} \times \\ & \times \frac{1}{b} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{m+1} \right]; \\ \bar{w}_x'' &= (m+2) \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^m; & \bar{w}_y'' &= (m+2) \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^m. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Подставив в (7.7) и в (7.4) значения координат точек 0, 1, 2, 3, 4, получим величины \bar{x}_i в этих точках. Эти вычисления приведены в табл. 4.

Вводя обозначения

$$\frac{a}{b} = \alpha; \quad b = \frac{a}{\alpha} \quad (7.8)$$

Таблица 4

№ точек	Координаты		\bar{w}_x	\bar{w}_y	\bar{w}'_x	\bar{w}'_y	\bar{w}''_x	\bar{w}''_y
	x	y						
0	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{m+2}{m+1} \left[\frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \frac{1}{2} \right]$	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{b} \times \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right)$	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{a} \times \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right)$	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{b} \times \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right)$	$\frac{1}{(m+2)a^2} \cdot \frac{1}{2^m}$	$\frac{1}{(m+2)b^2} \cdot \frac{1}{2^m}$
1	0	b^2	-1	0	0	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{m+2}{a^2}$	0
2	a	b	0	0	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{a}$	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{b}$	0	0
3	0	0	-1	-1	0	0	$\frac{m+2}{a^2}$	$\frac{m+2}{b^2}$
4	a	0	0	-1	$\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{1}{a}$	0	0	$\frac{m+2}{b^2}$

в соответствии с формулами (4.10) и (7.6), получим

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 = (\bar{x}_i)_0^{k+1} &= \frac{1}{a^{2(k+1)}} \left\{ \frac{(m+2)^4}{2^{2m}(m+1)^2} \left[\frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \frac{1}{2} \right]^2 \times \right. \\
 &\times (1 + \alpha^2 + \alpha^4) + \left[\frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right) \right]^4 \alpha^2 \left. \right\}^{\frac{k+1}{2}}; \\
 F_1 = (\bar{x}_i)_1^{k+1} &= F_4 = (x_i)_4^{k+1} = 0; \\
 F_2 = (\bar{x}_i)_2^{k+1} &= \left(\frac{m+2}{m+1} \right)^{2(k+1)} \frac{\alpha^{k+1}}{a^{2(k+1)}}; \\
 F_3 = (\bar{x}_i)_3^{k+1} &= (m+2)^{k+1} (1 + \alpha^2 + \alpha^4)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{a^{2(k+1)}}.
 \end{aligned} \right\} (7.9)$$

Подставив (7.9) в (4.10), а затем в (7.5) и умножая область интегрирования на 4, получим окончательно следующее выражение для работы внутренних сил:

$$V = \frac{Ah^{k+2} \omega_0^{k+1} C_k}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \alpha a^{2k}}, \quad (7.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 C_k &= 8 \left\{ \frac{(m+2)^4}{2^{2m}(m+1)^2} \left[\frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \frac{1}{2} \right]^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4) + \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right) \right]^4 \alpha^2 \right\}^{\frac{k+1}{2}} + \left(\frac{m+2}{m+1} \right)^{2(k+1)} \times \\
 &\times \alpha^{k+1} + (m+2)^{k+1} (1 + \alpha^2 + \alpha^4)^{\frac{k+1}{2}}, \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

Работа внешних сил

$$W = P\omega_0. \quad (7.12)$$

Полная энергия системы

$$U = V - W = \frac{Ah^{k+2} \omega_0^{k+1} C_k}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \alpha a^{2k}} - P\omega_0. \quad (7.13)$$

Дифференцируя по ω_0 и приравняв производную нулю, получим следующую связь между нагрузкой и прогибом:

$$P = \frac{Ah^{k+2} C_k}{(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \alpha a^{2k}} \omega_0^k. \quad (7.14)$$

Отсюда легко определить ω_0 , после чего функция прогибов (7.3) будет известна. Зная эту функцию, нетрудно обычными методами определить напряжения.

Из формулы (7.14) вытекает, что связь между нагрузкой и максимальным прогибом имеет тот же характер, что и связь между напряжениями (1.2). Это характерно для любых геометрически линейных конструкций и при любом законе физической нелинейности: связь между перемещениями и нагрузкой будет выражаться тем же законом, что и связь между напряжениями и деформациями.

При $k = 1$ и $A = E$ получим решение для упруго-линейной пластинки. Для квадратной пластинки оно имеет вид

$$\omega_0 = \frac{128}{291} \cdot \frac{Pa^2}{Eh^3} = 0,44 \frac{Pa^2}{Eh^3}. \quad (7.15)$$

Известное точное решение, полученное Б. Г. Галеркиным для этого случая, записывается формулой

$$\omega_0 = 0,0116 \frac{Pl^2}{D}.$$

Подставляя сюда

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \mu = 0,5; l = 2a,$$

получим

$$\omega_0 = 0,416 \frac{Pa^2}{Eh^3}.$$

Полученное нами решение расходится с точным на 5,5%. Это расхождение объясняется неточностью интегрирования по x и y .

При $k = 0$ и $A = \sigma_T$ (жестко-пластическая пластинка) формула (7.4) не дает величину для прогиба: он остается неопределенным. Это вытекает из геометрически линейного характера задачи. Сила P получается бесконечно большой, что физически легко объяснимо; для того чтобы в жестко-пластической пластинке напряжения всюду достигли предела текучести, необходимо приложить бесконечно большую нагрузку.

Если в качестве функции ω_x и ω_y выбрать функции упруго-линейной балки, то при $k = 0$ получим для предельной нагрузки величину (для квадратной пластинки)

$$P_{np} = 2,4 \sigma_T h^2. \quad (7.16)$$

Формула (7.16) получена из формулы (7.14) путем подстановки в нее величины $k = 0$, а величина C_k подсчитана по формуле (7.11) при $m = 1$ и $k = 0$. Интересно отметить, что метод сосредоточенных деформаций для рассмотренного случая пластинки дает величину [14]

$$P = 2\sigma_T h^2.$$

2. Прямоугольная шарнирно опертая пластинка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q .

При решении этой задачи примем степенной закон физической нелинейности по формуле (1.2). Работа внутренних сил, так же как и в первом примере, будет выражаться формулой (7.2), а функцию прогибов зададим в виде (7.3). За функции \bar{w}_x и \bar{w}_y примем функции прогибов нелинейно-упругой балки с тем же законом физической нелинейности (1.2). Как было сказано выше

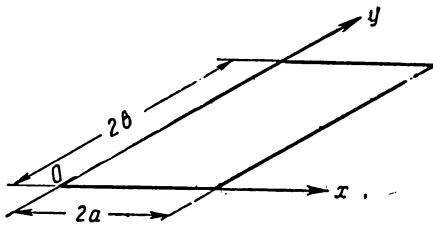


Рис. 13. Схема плиты

(см. раздел 5, п. 3 «б»), получить выражение для этих функций в случае равномерно распределенной нагрузки в общем виде (при любом k) не представляется возможным. Поэтому ограничимся частным случаем, когда $k = \frac{1}{3}$, и примем для функций \bar{w}_y и \bar{w}_x выражение (5.9). Начало координат

выберем в одном из углов пластинки согласно рис. 13. Дифференцируя (5.9) по x , получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}'_x &= \frac{35 \cdot 2^{11}}{93l} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{3}{5} \left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^6 - \frac{1}{7} \left(\frac{x}{l}\right)^7 - \frac{1}{280} \right]; \\ \bar{w}''_x &= \frac{35 \cdot 2^{11}}{93l^2} = \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 3 \left(\frac{x}{l}\right)^5 - \left(\frac{x}{l}\right)^6 \right]. \end{aligned} \right\} (7.17)$$

Значение функции x_i (7.6) в точках 1 и 4 будет (так же, как и в первом примере) равно нулю. Поэтому вычислим значения этой функции в точках 3, 0 и 2. Для этого составим табл. 5 значений функции (5.9) и ее производных (7.17) в точках 2, 0 и 3.

Здесь надо положить $l = 2a$; для получения значений функции \bar{w}_y необходимо положить $l = 2b$.

Таблица 5

Координаты	\bar{w}_x	\bar{w}'_x	\bar{w}''_x	№ точек
0	0	$-\frac{256}{93l} = -\frac{2,755}{l}$	0	2
$l/4$	-0,665	$-\frac{1759}{744l} = -\frac{2,361}{l}$	$\frac{315}{62l^2} = \frac{5,08}{l^2}$	0
$l/4$	-1	0	$\frac{1120}{93l^2} = \frac{12,05}{l^2}$	3

Пользуясь табл. 5, вычислим по формуле (7.6) значения функции \bar{x}_i в точках 2, 0 и 3:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_2 &= \frac{1,9}{ab}; \quad \bar{x}_3 = 3,01 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2 b^2}}; \\ \bar{x}_0 &= \sqrt{0,718 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2 b^2} \right) + \frac{1,96}{a^2 b^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Далее вводя обозначения (7.8), вычислим в соответствии с формулами (4.10) значения функций F_i и затем величину C_k , входящую в формулу (7.10):

$$C_k = 8 [0,718(1 + \alpha^4) + 2,678\alpha^2]^{\frac{k+1}{2}} + 1,9^{k+1} \alpha^{k+1} + 3,01^{k+1} (1 + \alpha^2 + \alpha^4). \quad (7.19)$$

Работа внутренних сил будет (как и в первом примере) выражаться формулой (7.10) с той лишь разницей, что величина C_k в этом случае определяется по формуле (7.19). Вычисление работы внешних сил произведем также по кубатурной формуле (4.10) (хотя в этом случае можно было бы проинтегрировать в замкнутом виде):

$$W = q\omega_0 \int_0^{2a} \int_0^{2b} \bar{w}_x \bar{w}_y dx dy = q\omega_0 \frac{ab}{3} \times \\ \times (8 \cdot 0,665^3 + 1) = 1,515 q\omega_0 a^2 \alpha. \quad (7.20)$$

Составив выражение полной энергии и приравняв производную ее по ω_0 нулю, получим зависимость между нагрузкой и прогибом в следующем виде:

$$q = \frac{Ah^{k+2} \omega_0^k C_k}{1,515 (k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} a^2 \alpha^{2k+2}}. \quad (7.21)$$

Строго говоря, эта формула справедлива при $k = \frac{1}{3}$, в этом случае она дает

$$q = 1,456A \sqrt[3]{\frac{h^7 \omega_0}{a^8}}; \quad (7.22) \\ \omega_0 = 0,686 \frac{q^3 a^8}{Ah^7}.$$

Учитывая особенности вариационного метода, при котором функциями прогибов задаются приблизительно, можно формулой

(7.21) с известной точностью пользоваться при любом значении k . При $k = 1$ из (7.21) получаем

$$w_0 = 0,653 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (7.23)$$

вместо точного (подсчитанного обычными методами линейной теории упругости при $\mu = 0,5$)

$$w_0 = 0,584 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Расхождение составляет 10%.

При $k = 0$ из формулы (7.21) получим значение предельной нагрузки:

$$q_{пр} = 1,485 \frac{\sigma_T h^2}{a^2}. \quad (7.24)$$

В работе [13] задавались функции в виде произведения синусов, при этом получалось

$$q_{пр} = 1,462 \frac{\sigma_T h^2}{a^2}.$$

Интересно отметить, что метод сосредоточенных деформаций Гвоздева — Ржаницына [14] в этом случае дает

$$q_{пр} = 1,5 \frac{\sigma_T h^2}{a^2},$$

что очень близко совпадает с (7.24).

8. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

Рассмотрим жестко-пластическую прямоугольную мембрану, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q , и выясним связь между нагрузкой и прогибом с учетом геометрической нелинейности. Энергия деформации жестко-пластического тела определяется формулой (4.3). Для пластинки с известной точностью можно принять

$$e_i \approx \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_x + \epsilon_y). \quad (8.1)$$

Эта формула получается из (2.14) путем следующего преобразования:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + \frac{1}{4} \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_x \epsilon_y}.$$

Вынося $(\epsilon_x + \epsilon_y)$ за знак радикала, получим

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_x + \epsilon_y) \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4} \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_x \epsilon_y}{(\epsilon_x + \epsilon_y)^2}} \dots$$

В случае поперечной нагрузки деформации ϵ_x и ϵ_y в каждой точке пластинки одного знака. Поэтому величина $\frac{1}{4} \frac{\gamma_{xy}^2 - \epsilon_x \epsilon_y}{(\epsilon_x + \epsilon_y)^2}$, вообще говоря, невелика по сравнению с единицей и ее можно отбросить. Выполнив это, получим формулу (8.1). Величина интенсивности деформаций, определяемая по этой формуле, может отличаться от точного значения на величину до 13%. Интересно отметить, что, несмотря на это, применяя формулу (8.1) к вычислению энергии упругой пластинки (при $k=1$), мы получим точное значение энергии. Подставляя в (8.1) значения деформаций по двум первым формулам (2.11), получим

$$e_i \approx \frac{2}{\sqrt{3}} (e_x + \kappa_x z + e_y + \kappa_y z) = \frac{2}{\sqrt{3}} (e + \kappa z). \quad (8.2)$$

Здесь

$$e = e_x + e_y; \quad \kappa = \kappa_x + \kappa_y. \quad (8.3)$$

После подстановки (8.2) в (4.3) и интегрирования по z энергия деформации принимает вид

$$V = \frac{2\sigma_T h}{\sqrt{3}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} e \, dx dy. \quad (8.4)$$

Полагая в формулах (2.13) $k_1 = k_2 = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Примем

$$u = \bar{c}u; \quad v = c_1 \bar{v}; \quad w = w_0 \bar{w}. \quad (8.6)$$

Подставив (8.6) и (8.5) в (8.4), получим

$$V = \frac{2\sigma_T h}{\sqrt{3}} \left(c J_1 + c_1 J_2 + \frac{w_0^2}{2} J_3 \right), \quad (8.7)$$

где

$$J_1 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dy; \quad (8.8)$$

$$J_2 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy; \quad (8.9)$$

$$J_3 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (8.10)$$

Работа внешних сил

$$W = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q \omega_0 \bar{w} dx dy = q \omega_0 J_4. \quad (8.11)$$

Здесь

$$J_4 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \bar{w} dx dy. \quad (8.12)$$

Полная энергия деформации

$$U = V - W = \frac{2\sigma_\tau h}{\sqrt{3}} \left(cJ_1 + c_1 J_2 + \frac{\omega_0^2}{2} J_3 \right) - q\omega_0 J_4. \quad (8.13)$$

Дифференцируя по ω_0 и приравнявая производную нулю, найдем связь между напряжениями и деформациями в следующем виде:

$$q = \frac{2\sigma_\tau h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{J_3}{J_4} \omega_0. \quad (8.14)$$

Нагрузка зависит линейно от прогиба, что согласуется с опытом. Величина нагрузки определяется отношением интегралов $\frac{J_3}{J_4}$, в которые не входят функции продольных перемещений u и v . Это недостаток решения, связанный с применением приближенной формулы (8.1).

Отношение $\frac{J_3}{J_4}$ зависит от выбранной функции прогибов.

Будем эту функцию задавать в виде

$$\bar{w} = \bar{w}_x \bar{w}_y, \quad (8.15)$$

где \bar{w}_x и \bar{w}_y — функции только одного переменного.

Проследим, как изменяется отношение $\frac{J_3}{J_4}$ в зависимости от характера выбранных функций \bar{w}_x и \bar{w}_y . Зададимся сначала

функцией прогибов в весьма грубом виде, так как показано на рис. 14, где изображены функция w_x (рис. 14,а) и ее производная (рис. 14,б). Функция w_y и ее производная имеют тот же вид с заменой a на b . Интегралы J_3 и J_4 в этом случае будут равны

$$J_3 = \frac{4}{3} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right); \quad (8.16)$$

$$J_4 = ab. \quad (8.17)$$

Подставив (8.16) и (8.17) в (8.14), получим

$$q = \frac{8\sigma_T h}{3\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)}{ab} \omega_0. \quad (8.18)$$

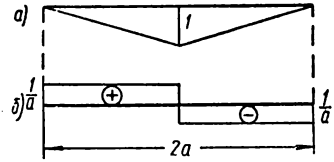


Рис. 14. Схема аппроксимирующей функции

Для квадратной пластинки $b = a$ будем иметь

$$q = \frac{16\sigma_T h}{3\sqrt{3} a^2} \omega_0 \quad (8.19)$$

или

$$\omega_0 = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{qa^2}{\sigma_T h} = 0,325 \frac{qa^2}{\sigma_T h}. \quad (8.20)$$

Если задаться функциями \bar{w}_x и \bar{w}_y в виде

$$\bar{w}_x = \sin \frac{\pi x}{2a}; \quad \bar{w}_y = \sin \frac{\pi y}{2b}, \quad (8.21)$$

то интегралы J_3 и J_4 получат значения

$$J_3 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right); \quad (8.22)$$

$$J_4 = \frac{16ab}{\pi^2}. \quad (8.23)$$

Формула (8.14) принимает вид

$$q = \frac{\pi^4 \sigma_T h}{32\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)}{ab} \omega_0. \quad (8.24)$$

Для квадратной пластинки

$$q = \frac{\pi^4}{16\sqrt{3}} \frac{\sigma_T h}{a^2} \omega_0 \quad (8.25)$$

или

$$\omega_0 = \frac{16\sqrt{3}}{\pi^4} \cdot \frac{qa^2}{\sigma_T h} = 0,284 \frac{qa^2}{\sigma_T h}. \quad (8.26)$$

Сравнивая формулы (8.19) и (8.24) или (8.20) и (8.26), можно прийти к выводу, что разница между ними не так уже велика, учитывая значительные расхождения между функциями прогибов.

В литературе имеются следующие решения:

а) Ржаницына А. Р. — методом сосредоточенных деформаций [15]

$$\omega_0 = 0,2887 \frac{qa^2}{\sigma_T h};$$

б) Григорьева А. С. — методом конечных разностей

$$\omega_0 = 0,278 \frac{qa^2}{\sigma_T h}.$$

Эти решения незначительно отличаются от (8.26).

9. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Изложенный в разделе 4 общий метод расчета является весьма трудоемким. Приближенный метод можно построить исходя из упрощенной формулы (8.1) для интенсивности деформаций. Следует оговориться, что к расчету оболочек эта формула не всегда применима, в частности использование ее для оболочек с несмещающимися и защемленными краями может привести к существенным погрешностям. Для оболочек со смещающимися кромками ее можно применять с известной точностью.

Подставив значение интенсивности деформаций по формуле (8.2) в (4.1), будем иметь следующее выражение для работы внутренних сил:

$$V = \frac{A2^{k+1}}{(k+1)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-h/2}^{+h/2} \int \int (e + xz)^{k+1} dx dy dz. \quad (9.1)$$

Выполнив интегрирование по z (что в данном случае легко сделать), получим

$$V = \frac{2^{k+1} A}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+1}{2}}} \int \int \frac{\left(e + x \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e - x \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{x} dx dy, \quad (9.2)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей площади опорного плана оболочки. Он может быть вычислен по формуле (4.10). Не забывая об особой точности, поставим задачу найти общий характер зависимости между нагрузкой и прогибом. Для этого при

вычислениях по формуле (4.10) ограничимся только одной нулевой точкой.

Получим

$$V = \frac{2^{k+4}}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+3}{2}}} \cdot \frac{\left(e_0 + x_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e_0 - x_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{x_0}. \quad (9.3)$$

В этой формуле e_0 и x_0 значения величин (8.3) в точке O с координатами $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ (см. рис. 12). Далее, принимая во внимание формулы (2.13), будем иметь:

$$e_0 = (c + c_1) a_0 - (k_x + k_y) \omega_0 \bar{\omega}_0 + \frac{\omega_0^2}{2} e_0, \quad (9.4)$$

где a_0 , ω_0 , b_0 , и l — некоторые неизвестные коэффициенты. Они выражают значения функций u , v и w и их производных в точке с координатами $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Через ω_0 обозначен прогиб в середине оболочки. При составлении формулы (9.4) принято

$$u = c\bar{u}; \quad v = c_1\bar{v}; \quad w = \omega_0\bar{w}. \quad (9.5)$$

Следующее допущение будет заключаться в том, что связь между коэффициентами c , c_1 и ω_0 мы примем такую же, какая существует в упругой теории.

Для этого положим

$$\left. \begin{aligned} c &= \omega_0 k_x a_1 - \frac{\omega_0^2}{2} a_2; \\ c_1 &= \omega_0 k_y b_1 - \frac{\omega_0^2}{2} b_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Здесь a_1 , a_2 , b_1 и b_2 — также некоторые коэффициенты, подлежащие определению; складывая равенства (9.6), получим

$$c + c_1 = \omega_0 (k_x a_1 + k_y b_1) - \frac{\omega_0^2}{2} (a_2 + b_2). \quad (9.7)$$

Подставляя (9.7) в первое равенство (9.4), будем иметь:

$$e_0 = \omega_0 (k_x + k_y) s + \frac{\omega_0^2}{2} m. \quad (9.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$s = \frac{a_0 (k_x a_1 + k_y b_1)}{k_x + k_y} - \bar{\omega}_0; \quad b_0 - (a_2 + b_2) a_0 = m. \quad (9.9)$$

Принимая во внимание формулы (3.4) и (4.12) для работы внешних сил и учитывая зависимости a , получим следующее выражение для полной энергии системы:

$$U = \frac{2^{k+4} A a b}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+3}{2}}} \times \frac{\left(e_0 + x_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e_0 - x_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{x_0} - q \omega_0 \frac{16ab}{\pi^2}, \quad (9.10)$$

Взяв производную по ω_0 , получим связь между нагрузкой и прогибом, которая после подстановки значений (9.5) и (9.8) примет следующий вид (формула написана для цилиндрической квадратной в плане оболочки при $k_y = 0$; $b = a$):

$$q = \frac{2^k \pi^2 A}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+3}{2}}} \times \frac{B^{k+1} [C \omega_0 (k+2) - B] - \bar{B}^{k+1} [\bar{C} \omega_0 (k+2) - \bar{B}]}{\omega_0^2 c_0}, \quad (9.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B &= \omega_0 k_x s + \frac{\omega_0^2}{2} m + \frac{h}{2} c_0 \omega_0; \\ \bar{B} &= \omega_0 k_x s + \frac{\omega_0^2}{2} m - \frac{h}{2} c_0 \omega_0; \\ C &= \omega_0 b_0 - \bar{\omega}_0 k_x + \frac{h}{2} c_0; \\ \bar{C} &= \omega_0 b_0 - \bar{\omega}_0 k_x - \frac{h}{2} c_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Величины s , m , b , c_0 и $\bar{\omega}_0$ по-прежнему неизвестны и подлежат определению.

Введем безразмерные параметры

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{q (2a)^4}{E h^4}; \quad \frac{\omega_0}{h} = \xi; \quad \frac{f_0}{h} = \xi_0; \\ k_x &= \frac{1}{R} \approx \frac{2f_0}{a^2} = \frac{2\xi_0 h}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

В этих формулах f_0 — начальный подъем, a — половина стороны опорного квадратного плана оболочки. Примем в соответствии с их размерностью

$$m = \frac{\bar{m}}{a^2}; \quad b_0 = \frac{\bar{b}_0}{a^2}; \quad c_0 = \frac{\bar{c}_0}{a^2}. \quad (9.14)$$

Подставив (9.13) и (9.14) в (9.11), получим

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{h^2}{a^2} \left[2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2} \right] \xi = \frac{h^2}{a^2} b^* \xi; \\ \bar{B} &= \frac{h^2}{a^2} \left[2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2} \right] \xi = \frac{h^2}{a^2} \bar{b}^* \xi; \\ C &= \frac{h}{a^2} \left(\bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 + \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h}{a^2} c^*; \\ \bar{C} &= \frac{h}{a^2} \left(\bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 - \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h}{a^2} \bar{c}^*. \end{aligned} \right\} (9.15)$$

После подстановки (9.13) и (9.15) в (9.11), будем иметь

$$\rho = D_k \{ (b^*)^{k+1} [c^* (k+2) - b^*] - (\bar{b}^*)^{k+1} [\bar{c}^* (k+2) - \bar{b}^*] \} \xi^k, \quad (9.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b^* &= 2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ \bar{b}^* &= 2s \xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ c^* &= \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 + \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ \bar{c}^* &= \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 - \frac{\bar{c}_0}{2}; \end{aligned} \right\} (9.17)$$

$$D_k = \frac{A}{E} \frac{2^{k+4} \pi^2}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \bar{c}_0} \left(\frac{a}{h} \right)^{2(1-k)}. \quad (9.18)$$

Формула (9.16) выражает общую зависимость между безразмерными нагрузкой ρ и прогибом ξ с точностью до неизвестных пока коэффициентов \bar{m} , \bar{b}_0 , s , $\bar{\omega}_0$ и \bar{c}_0 . Эти коэффициенты найдем из следующих двух условий.

1. При $k=0$, $A = \sigma_T$ и $\xi_0 = 0$ формула (9.16) должна давать полученное ранее решение для жестко-пластической пластинки [см. (8.19)]:

$$q = \frac{\pi^4 \sigma_T \omega_0 h}{16 \sqrt{3} a^2}. \quad (8.19)$$

2. При $k=0$ и $A=E$ формула (9.16) должна дать решение (6.1) для упругой оболочки:

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 \xi_0 + \alpha_3 \xi \xi_0^2 + \alpha_4 \xi. \quad (6.1)$$

Составляя из формулы (9.16) условия (1) и (2) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему пяти уравнений для определения пяти неизвестных коэффициентов. Решая эту систему, найдем следующие значения коэффициентов \bar{m} , \bar{b}_0 , s , $\bar{\omega}_0$ и \bar{c}_0 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_0 &= \frac{3\pi^2}{16}; & \bar{m} &= \frac{3\alpha_1}{\pi^4}; & s &= \frac{3\alpha_2}{8\pi^4} \beta_{1,2}; \\ \bar{\omega}_0 &= -\frac{3\pi^2}{16} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \beta_{1,2}}; & \bar{c}_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha_4}}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

В этих формулах

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}}. \quad (9.20)$$

Так как коэффициент $\beta_{1,2}$ имеет два значения, то и зависимостей (9.16) будет также две. Из них за расчетную выбирается та, которая при одинаковых прогибах дает наименьшее значение нагрузки.

В качестве числового примера найдем зависимость (9.16) для цилиндрической квадратной в плане оболочки со следующими размерами:

$$a = 20 \text{ см}; \quad h = 0,7 \text{ см}; \quad f_0 = 1,6 \text{ см};$$

$$\xi_0 = \frac{1,6}{0,7} = 2,29; \quad \xi_0^2 = 5,24.$$

Физические характеристики материала, определенные по диаграмме растяжения:

$$E = 1,83 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad A = 4,258 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; \quad k = 0,137.$$

Учитывая, что оболочка шарнирно оперта по краям, из табл. 1 выпишем коэффициенты α_i для упругой задачи:

$$\alpha_1 = 8,63; \quad \alpha_2 = -19,62; \quad \alpha_3 = 9,92; \quad \alpha_4 = 22,12 \frac{0,91}{1 - \mu^2} (\mu^2 = 0,5)$$

(поправка к α_4 внесена согласно § 6).

По формуле (9.20) вычислим коэффициент $\beta_{1,2}$

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 8,63 \cdot 9,92}{19,62^2}} = 1 \pm 0,332;$$

$$\beta_1 = 1,332; \quad \beta_2 = 0,668.$$

По формулам (9.19) подсчитываем коэффициенты $\bar{b}_0, \bar{m}, \bar{s}, \bar{\omega}_0$,
 со:

$$\bar{b}_0 = 18,5; \quad \bar{m} = 0,266; \quad s_1 = -0,1066;$$

$$\bar{\omega}_{01} = +0,02; \quad \bar{c}_0 = +3,0295; \quad s_2 = -0,0504; \quad \bar{\omega}_{02} = +1,401.$$

Подставляя эти значения сначала в (9.17), а затем в (9.16), получим:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } \beta_1 = 1,332 \\ p_1 &= D_k [(0,133\xi + 1,054)^{1,137} (3,822\xi - 4,691) - \\ &\quad - (0,133\xi - 1,976)^{1,137} (3,822\xi - 8,135)] \xi^{0,137}; \\ &\text{при } \beta_2 = 0,668 \\ p_2 &= D_k [(0,133\xi + 1,284)^{1,137} (3,822\xi - 11,762) - \\ &\quad - (0,133\xi - 1,746)^{1,137} (3,822\xi - 15,204)] \xi^{0,137}. \end{aligned} \right\} (9.21)$$

Величину $D_{0,137}$ найдем по формуле (9.18):

$$D_{0,137} = \frac{4,258 \cdot 10^3}{1,83 \cdot 10^6} \cdot \frac{2^{4,137} \pi^2}{1,137 \cdot 2,137 \cdot 3 \frac{3,137}{2} \cdot 3,0295} \left(\frac{20}{0,7} \right)^{2(1-0,137)} = 3,1871.$$

Графики зависимостей (9.21) изображены на рис. 15 сплошными линиями β_1 и β_2 .

Рассчитанная оболочка была испытана в ИМЭХе АН СССР на равномерно распределенную нагрузку. При испытаниях измерялись прогибы в центре оболочки. Экспериментальные зависимости $P-\xi$ для двух образцов также нанесены на рис. 15 пунктирными линиями; выше их построена кривая I , подсчитанная по формуле (6.1).

Как видно из рисунка, кривая I , подсчитанная по нелинейно-упругой теории, но с физической линейностью, лежит выше экспериментальных кривых. Это объясняется тем, что в данной оболочке большие прогибы сопровождаются большими деформациями, значительная часть которых лежит в зоне упрочнения.

Зависимости (9.21) дают кривые β_1 и β_2 , расположенные при малых деформациях выше экспериментальных и даже выше кривой I , подсчитанной по нелинейно-упругой теории. Это объясняется тем, что при малых деформациях формула (1.2) дает большие значения модуля упругости, чем те, которые получают из закона Гука. При больших деформациях эта кривая расположена ниже экспериментальной.

Кривые I и β_1, β_2 пересекаются в точке a' и a'' . Ту часть кривых β_1 и β_2 , которая расположена левее точки a' и a'' , мы должны отбросить, так как в этой зоне материал следует закону Гука; поведение оболочки на этом участке описывает кривая I .

Правее точки a' поведение оболочки будет описываться кривыми β_1 и β_2 . Таким образом, теоретически поведение оболочки в диапазоне рассмотренных деформаций описывает две кривые: I и одна из кривых β_1 или β_2 .

Заштрихованные на рис. 15 зоны $abcd$ для кривой I и $a'b'c'd'$ или $a''b''c'd''$ для кривых β_1 и β_2 есть зоны неустойчивости. В

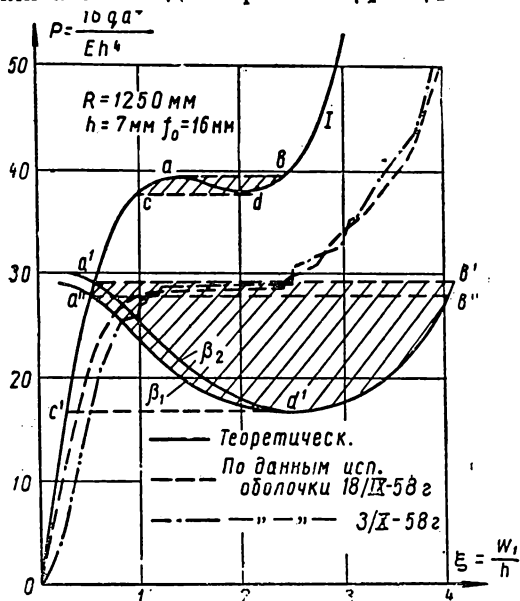


Рис. 15. График прогибов оболочки

пределах этих зон должно происходить прощелкивание оболочки. Физически линейный и геометрически нелинейный расчет (кривая I) дает узкую зону неустойчивости. По этому расчету получается, что критическая сила, при которой происходит прощелкивание оболочки, должна лежать в пределах между $p = 37,8$ и $p = 39,8$. Расчет с учетом обоих видов нелинейности дает более широкую зону неустойчивости; в этом случае критическая сила должна лежать в пределах между $p = 16,5$ и $p = 29,5$ по кривой β_2 и $p = 28$ по кривой β_1 . Экспериментальное значение критической силы для обеих испытанных оболочек, соответствующее горизонтальным участкам пунктирных линий, получилось равным в среднем 28,5. Из рисунка видно, что это значение лежит в пределах зоны неустойчивости, даваемой не кривой I , а кривой β_2 , и отличается от верхнего значения теоретической критической силы на 3,5%, а от нижнего — на 72,5%.

Кривая β_1 дает значение верхней критической силы меньше экспериментального на 1,5%. Среднее теоретическое значение верхней критической силы, подсчитанное по кривым β_1 и β_2 , равное $P = 28,75$, почти не отличается от экспериментального значения $P = 28,5$. Следует отметить, что по условиям опыта (тщательное изготовление конструкции и статическое нагружение) является более вероятным переход оболочки в новое равновесное состояние по достижении верхнего критического значения, а не нижнего

Это сопоставление с результатами экспериментов подтверждает необходимость учета физической нелинейности, так как

этот учет дает лучшее совпадение с опытом, чем расчет по упругой нелинейной теории.

Часть кривых β_1 и β_2 , расположенная правее точки d' , лежит все же значительно ниже экспериментальной кривой, хотя и совпадает с ней по своему характеру. Эти расхождения объясняются тем, что в данной теории материал рассматривается как нелинейно-упругий; в действительности сталь в зоне упрочнения является упруго-пластическим материалом. Иными словами, расхождение в длинах участков прощелкивания и в величине после критической нагрузки объясняется тем, что данная теория не учитывает влияния разгрузки.

10. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ К МЕТОДУ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Наиболее общепринятым методом определения разрушающей нагрузки оболочек и плит является метод предельного равновесия в форме, впервые предложенной А. А. Гвоздевым. В этом методе учитываются физическая нелинейность (при помощи идеализированной диаграммы) и пластические свойства материала. Однако при расчете по этому методу деформации выпадают из поля зрения и даже не определяются.

Так, А. А. Гвоздев в [4] на стр. 177—178 пишет: «При расчете несущей способности конструкций по методу предельного равновесия используются уравнения равновесия недеформированной системы. Это допустимо только в том случае, если вплоть до исчерпания несущей способности деформации остаются настолько малыми, чтобы без существенной погрешности можно было пренебречь изменением всех геометрических величин, входящих в условия равновесия. Следовательно, в соблюдении этого условия состоит одна из необходимых предпосылок метода. Требование малости деформаций представляет собой существенное ограничение метода предельного равновесия, особенно чувствительное в том случае, если исчерпание несущей способности выражается не в подлинном разрушении конструкции, а в ее резком провисании или в ином существенном изменении формы. Действительно, до исчерпания несущей способности деформации должны оставаться малыми, иначе метод предельного равновесия был бы неприменим. С другой стороны, само исчерпание несущей способности определяется возникновением значительных деформаций».

Многочисленные эксперименты над плитами свидетельствуют о следующем:

1) перемещения в момент, предшествующий разрушению, велики; они в 1—2 раза превышают толщину плиты;

2) фактическая полная разрушающая нагрузка (определенная из опыта) значительно превышает разрушающую нагрузку, определенную методом предельного равновесия.

Последнее обстоятельство качественно объясняется тем, что при деформации плита превращается в оболочку. Вследствии аналогии, отмеченной В. З. Власовым [1], под плитой образуется «фиктивное» упругое основание, подкрепляющее плиту.

В предыдущих параграфах сделана попытка описать поведение плит и оболочек на основе различных физически нелинейных законов и с учетом геометрической нелинейности. Полученные зависимости описывали поведение конструкции вплоть до разрушения и, следовательно, из них можно получить величину разрушающей нагрузки. Однако, поскольку изложенная теория достаточно сложна, можно предложить следующий прием определения разрушающих нагрузок.

Будем считать, что работа внешних сил затрачивается на: 1) преодоление сопротивления материала разрушению и 2) преодоление реакций фиктивного упругого основания, возникающего под плитой при ее деформации.

Первую часть работы будем учитывать обычным методом предельного равновесия, вторую часть учтем на основе геометрически нелинейной теории, предполагая, что влияние геометрически нелинейных членов сохраняется вплоть до разрушения.

Для этого преобразуем формулу (6.9), вынеся член p_n (т. е. нагрузку, соответствующую расчету по обычной упругой теории) за скобки

$$p = p_n \left(\frac{p_{п.н}}{p_n} + \frac{p_{о.н}}{p_n} + \frac{p_0}{p_n} + 1 \right). \quad (10.1)$$

Учитывая формулы (6.5), (6.6), (6.7) и (6.8) вместо (10.1), получим

$$p = p_n \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4} \xi^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \xi_0 \xi + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \xi_0^2 + 1 \right). \quad (10.2)$$

Для плиты при $\xi_0 = 0$ эта формула примет вид

$$p = p_n \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \xi^2 \right). \quad (10.3)$$

Член, стоящий в скобках, учитывает влияние геометрически нелинейных членов. Будем считать в первом приближении, что он не изменяется вплоть до разрушения. Нагрузку p_n в момент разрушения будем определять по обычному методу предельного равновесия.

Например, для квадратной в плане шарнирно опертой плиты, взяв коэффициенты α_1 и α_4 из табл. 6 вместо (10.3), получим

$$p = p_n \left(1 + \frac{8,63}{20,1} \xi^2 \right) \quad (10.4)$$

(коэффициент α_4 подсчитан при $\mu = 0,5$).

Таблица 6

$$q_p = q_T \left[1 + 0,43 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2 \right]$$

№ п/п	Фактическая толщина h в см	Теоретическая разрушающая нагрузка по методу предельного равновесия (в кг на плиту) q_T	Полная разрушающая (фактическая) нагрузка в кг на плиту) q_p	$\frac{q_p}{q_T} = k_\Phi$	Полный прогиб ω_0 перед разрушением в см	$\frac{\omega_0}{h}$	$k_T = 1 + 0,43 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2$	$\frac{k_\Phi}{k_T}$	Расхождение в %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1310	2660	2,03	4,03	1,345	1,8	1,13	13
2	3,02	1390	3120	2,24	4,62	1,53	2,05	1,09	9
3	3,9	1700	2710	1,595	3,76	0,965	1,4	1,14	14
4	3,5	1475	2710	1,835	4,28	1,225	1,641	1,11	11
5	6,5	13200	27600	2,09	9,85	1,515	1,99	1,05	5

Переходя от безразмерных параметров к размерным и обозначая через q_p предельную нагрузку, а через q_T предельную нагрузку по методу предельного равновесия, получим

$$q_p = q_T \left[1 + 0,43 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2 \right], \quad (10.5)$$

где, как и раньше, ω_0 — прогиб посередине плиты.

Ниже приводится соответствующая обработка результатов экспериментов, произведенных в разное время в ЦНИПСе (см. табл. 6). Эти эксперименты были поставлены с другими целями, чем те, которые преследуются здесь.

Первая группа экспериментов была проделана В. С. Булгаковым и А. С. Щепотьевым в 1938 г. Были произведены испытания большой группы плит разнообразной формы. Поскольку формула (10.5) справедлива для квадратной плиты, ниже приводится обработка только серии квадратных плит.

В этих опытах размеры плиты были 125×125 см, толщина h — около 3 см. Края плит были шарнирно оперты, нагрузка равномерно распределенная. Обработка этих экспериментов приводится в первых четырех строках табл. 6

Второй эксперимент был произведен автором совместно с Н. Г. Добудогло над плитой размером 300×300 см и толщиной 6,5 см (пятая строка табл. 6).

Обработка изложена в прилагаемой табл. 6. В графах 9 и 10 этой таблицы приведены цифры, показывающие, насколько отношение между экспериментальной разрушающей нагрузкой и теоретической, определенное из опыта, отличается от соответствующего отношения, полученного по формуле (10.5). Таблица

показывает, что формула (10.5) дает значительно лучшее представление о величине действительной разрушающей нагрузки, чем обычный метод.

Расчеты стержней, плит и оболочек с учетом геометрической и физической нелинейностей представляют сложную задачу теории упругости. Предлагаемый энергетический метод позволяет при подходящем выборе аппроксимирующих функций сравнительно просто получить приближенные решения. Однако возможны и другие методы (см., например [12]). Развитие рассмотренных в статье вопросов позволит изучить поведение конструкции на всех этапах загрузки, вплоть до предельного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З., Общая теория оболочек, ГИТТЛ, 1949.
2. Вольмир А. С., Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.
3. Выгодский М. Я., Справочник по высшей математике, ГИФМЛ, 1959.
4. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Госстройиздат, 1949.
5. Гениев Г. А., Некоторые задачи расчета стержней при общей нелинейной зависимости напряжений от деформации, Сборник статей ЦНИИПСа, Госстройиздат, 1956.
6. Григорьев А. С., Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределом упругости, Изд. АН СССР, Инженерный сборник, т. 9, 1951.
7. Ильюшин А. А., Пластичность, Гостехиздат, 1948.
8. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, Гостехиздат, 1956.
9. Корнишин М. С., О выборе выражений для касательных составляющих перемещения при решении задач теории оболочек вариационными методами. Некоторые задачи нелинейной теории оболочек, вып. 12, Изд-во КФАН СССР, 1958.
10. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, ГИТТЛ, 1953.
11. Муштари Х. М., и Галимов К. З., Нелинейная теория упругих оболочек, Таткингонздат, Казань, 1957.
12. Муштари Х. М., и Суркин Р. Г., Средний изгиб пологой сферической панели, квадратной в плане, при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением. «Журнал прикладной механики и технической физики» № 2, 1960, стр. 162—165.
13. Проскурин В. М., Некоторые задачи расчета пластинок при нелинейной зависимости напряжений от деформаций. Научные доклады высшей школы. «Строительство» № 3, 1958.
14. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, изд. II, Госстройиздат, 1954.
15. Ржаницын А. Р., Приближенные решения задач теории пластичности. Сборник статей ЦНИПС, Госстройиздат, 1956.
16. Соколовский В. В., Теория пластичности, Изд-во АН СССР, 1946.
17. Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов, ГИТТЛ, 1957.
18. Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1954.

РАЗВИТИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В СТРОИТЕЛЬНЫХ СТАЛЯХ ПРИ ОДНОРОДНОМ И НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ¹

Представление о работе стали за пределом текучести в конструктивных элементах обычно складывается на основании испытаний отдельных образцов, работающих в условиях однородного напряженного состояния. Так, например, плоские или круглые образцы испытываются при одноосном или двухосном однородном напряженном состоянии; трубчатым образцам задается сложное напряженное состояние, которое является также однородным по всему объему образца (разница в радиальных напряжениях с внутренней и внешней сторон тонкой трубы весьма мала и практически ею пренебрегают).

Однако подавляющее большинство конструкций работает в условиях неоднородного напряженного состояния, когда по площади сечения напряжения различны, а развитие пластических деформаций допускается на небольшой части сечения.

При таких условиях не всегда можно судить о характере работы материала конструкции, охваченного пластическими деформациями, по результатам испытания образцов. Наличие упругих ядер в ряде случаев существенно влияет на развитие деформаций в пластических зонах и может придавать им качественно иной характер. Особенно это относится к строительным сталям, обладающим рабочей диаграммой, близкой к идеализированной.

Ниже приводится сопоставление результатов экспериментального исследования упруго-пластической работы строительной стали при различных видах однородного и неоднородного напряженных состояний. Все исследования произведены в лаборатории металлических конструкций ЦНИИСКа АСИА СССР².

¹ Доложено на семинаре по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики (Институт механики АН СССР) 14 апреля 1960 г.

² В ряде исследований, помимо автора, принимал участие В. А. Балдин,

1. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемая сталь обладала ярко выраженной площадкой текучести, ее механические свойства вдоль и поперек проката были близкими.

В зависимости от силового воздействия принималось четыре типа образцов: в виде полос, пластин, крестов и двутавровых балок.

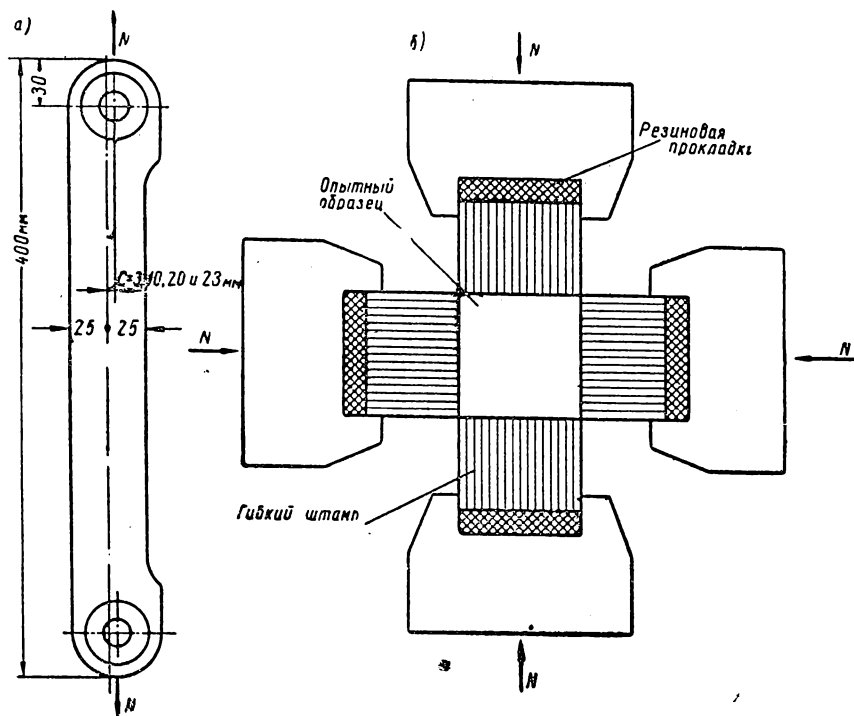


Рис. 1. Опытные образцы в виде полос *a* и пластин *б*

1. Полосы сечением 50×5 мм и длиной 400 мм испытывались при центральном и внецентренном растяжении. Эксцентриситеты задавались по ширине полосы и равнялись 3, 10, 20 и 23 мм.

Для захвата образцов в испытательной установке они имели по концам отверстия, обрамляемые с двух сторон приварными шайбами (рис. 1, *a*). При центральном растяжении отверстия совпадали с продольной осью образца. Смещением отверстий в одну сторону достигалось внецентренное приложение нагрузки. В общей сложности произведено 21 испытание.

2. Пластины размером 80×80 мм и толщиной 14—16 мм испытывались при двустороннем сжатии, осуществляемом двумя

циклами. Вначале одноосным нагружением материал приводился в пластическое состояние, затем прикладывалась вторая сила в перпендикулярном направлении, увеличение которой производилось при постоянном значении первой силы. Таким образом, во втором цикле нагружение по своему характеру являлось сложным.

Передача усилий на грань образца осуществлялась при помощи так называемого «гибкого штампа», состоящего из набора уз-

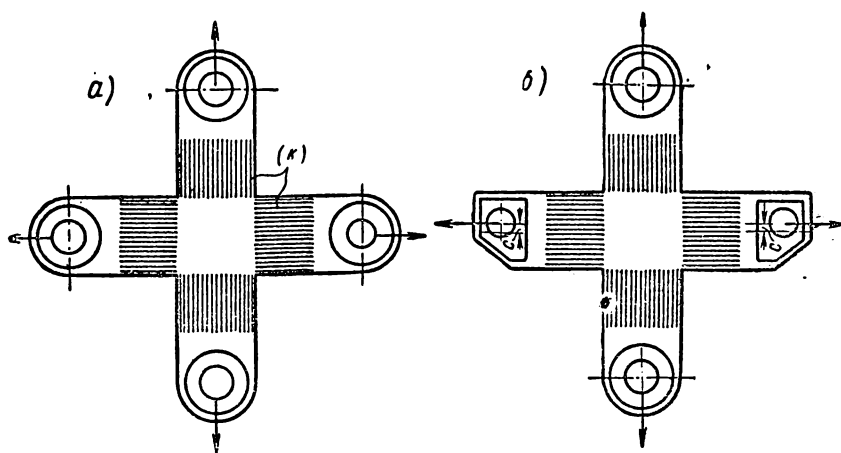


Рис. 2. Крестообразные образцы

ких пластинок, опирающихся на резиновое основание (рис.1,б). Благодаря отсутствию связи между пластинками обеспечивалась свобода поперечных деформаций по ширине опытного образца. Всего произведено 15 испытаний.

3. Крестообразные образцы имели толщину 4 мм и размеры средней части 80×80 мм. Эти образцы подвергались двухосному растяжению, осуществляемому так же, как и при испытании пластинчатых образцов, двумя циклами. Усилия прикладывались к ответвлениям креста в одних испытаниях центрально (рис. 2,а) и в других внецентренно (рис. 2,б).

С целью ограничения силового потока средней частью образца в ответвлениях (K на рис. 2,а) делались узкие прорезы. При нагружении таких образцов вначале пластические деформации развивались в ответвлениях, ослабленных прорезями. Переход материала на этих участках в стадию упрочнения позволял повышать нагрузку, что приводило к образованию пластических деформаций в средней части образца, в которой и производилось исследование стали. Всего произведено 14 испытаний. Методика испытаний пластинчатых и крестообразных образцов подробно описана [1, 2].

4. Двутавровые балки, имевшие отношение $l/h = 9,5; 6,1; 4,8$ испытывались на чистый и поперечный изгиб (рис. 3). Соотношение M/Q принималось равным $0,252$ и $0,206$ м. Испытано четыре балки.

Заметим, что эти образцы выстрагивались из толстого листа мягкой стали с достаточно однородными механическими свойствами по толщине.

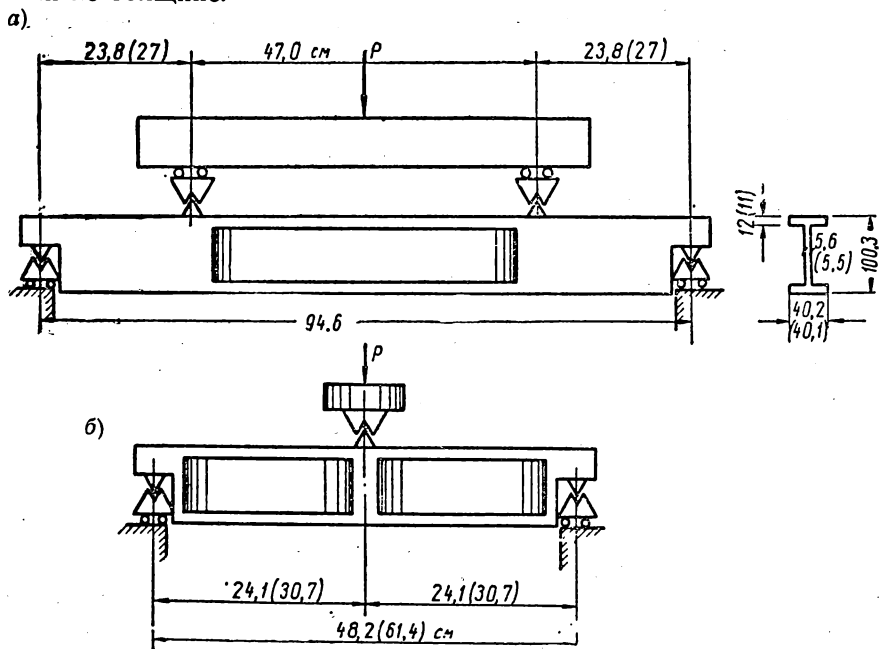


Рис. 3. Расчетная схема двутавровых балок
а — чистый изгиб; б — поперечный изгиб

Нагружение полос и крестообразных образцов производилось на установке рычажного действия. Повышение нагрузки осуществлялось при помощи заполнения специальных баков водой. В целях устранения неточностей измерения нагрузки, связанных с трением в шарнирах, нагрузка измерялась динамометрами непосредственно у образца. Точность измерения составляла $0,15 \text{ кг/см}^2$.

Нагружение пластинчатых образцов в одном направлении осуществлялось при помощи гидравлической машины, в другом направлении — при помощи домкрата, висящего на образце в специальной траверсе. Испытание балок производилось на механическом прессе мощностью 50 т.

При всех испытаниях осуществлялось медленное ступенчатое нагружение. Измерение деформаций производилось при помощи датчиков сопротивления обычного вида и «звездочек». Их расположение приводится на рисунках 4—8.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

а) Одноосное однородное и неоднородное напряженные состояния

Экспериментально показано, что при растяжении или сжатии стальных образцов материал по длине не одновременно переходит в пластическое состояние.

Вначале пластические области образуются на узких участках, по мере увеличения общей деформации материал постепенно по всему объему переходит в пластическое состояние [3, 4, 5]. Локальному деформированию по длине сопутствуют неравномерности и по ширине образца, что не согласуется с общепринятой гипотезой плоских сечений.

Обратимся к результатам испытаний полос на продольное растяжение. На рис. 4,а,б,в приводится развитие деформаций на пяти участках по ширине образца, замеренных проволочными датчиками с базой 12 мм (приведены относительные деформации ϵ , умноженные на модуль упругости E).

Деформации каждой ступени нагружения соединены прямыми линиями. Пунктирной линией отмечена деформация, отвечающая пределу текучести стали σ_T . Как видно из рис. 4,а,б,в, в упругой стадии (ниже пунктирной линии) нарастание деформаций протекает достаточно равномерно, и сечение остается плоским.

Переход материала в пластическое состояние начинается у края образца, что приводит к неравномерности деформаций по сечению.

Подобный характер деформирования повторялся во всех испытаниях.

Рассмотрим деформирование тех же образцов, но при внецентренном приложении продольной нагрузки. На рис. 4,г,д,е приводятся результаты экспериментов при эксцентриситетах 11 мм (рис. 4,д) и 23 мм (рис. 4,е).

Из рисунков видно, что развитие пластических деформаций при неоднородном напряженном состоянии протекает достаточно равномерно и гипотеза плоских сечений хорошо подтверждается. Как известно, при чистом изгибе балок прямоугольного сечения эта гипотеза также неоднократно подтверждалась экспериментом.

В частности, опыты В. С. Туркина весьма убедительно показали, что сечение остается плоским даже при очень больших искривлениях и работе материала в зоне упрочнения [6]. Таким образом, можно заключить, что упругие ядра не только ограничивают величину деформаций, но и препятствуют проявлению локальности в пластическом деформировании.

Некоторые исследователи полагают, что наличие упругих ядер также препятствует (в граничных зонах) естественному образованию плоскостей скольжения, что на некоторое время задержи-

вает текучесть материала и приводит к повышению предела текучести.

Проведенными исследованиями не удалось подтвердить это высказывание. Правда, предел текучести при растяжении с изгибом (σ_T^H) не совпадал с пределом текучести при чистом растяжении (σ_T), но наряду с повышением σ_T^H над σ_T наблюдались случаи его понижения.

б) Двухосное однородное и неоднородное напряженные состояния, осуществленные сложным нагружением

Если пластину растянуть или сжать до текучести материала ($\tau_1 = \sigma_T$), а затем, не снимая первой нагрузки, приложить вто-

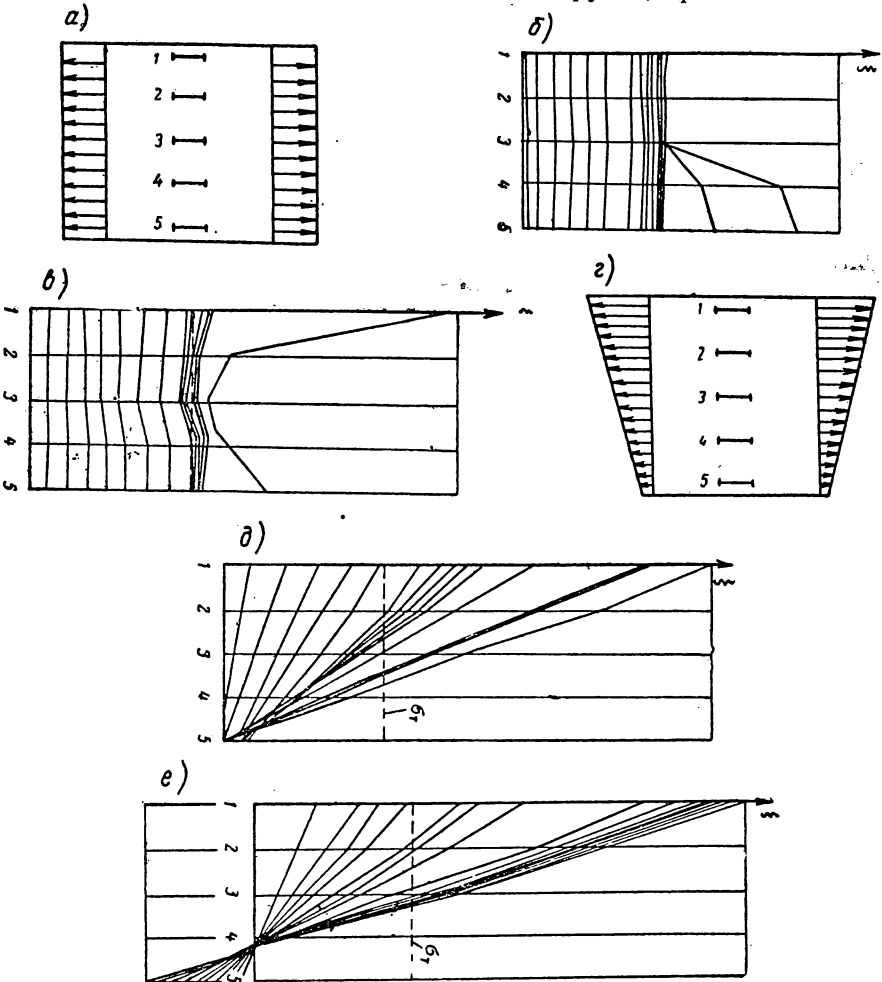


Рис. 4. Развитие деформаций по ширине образца
 а, б, в — при растяжении центрально приложенной силой; г, д, е — при растяжении
 внецентренно приложенной силой

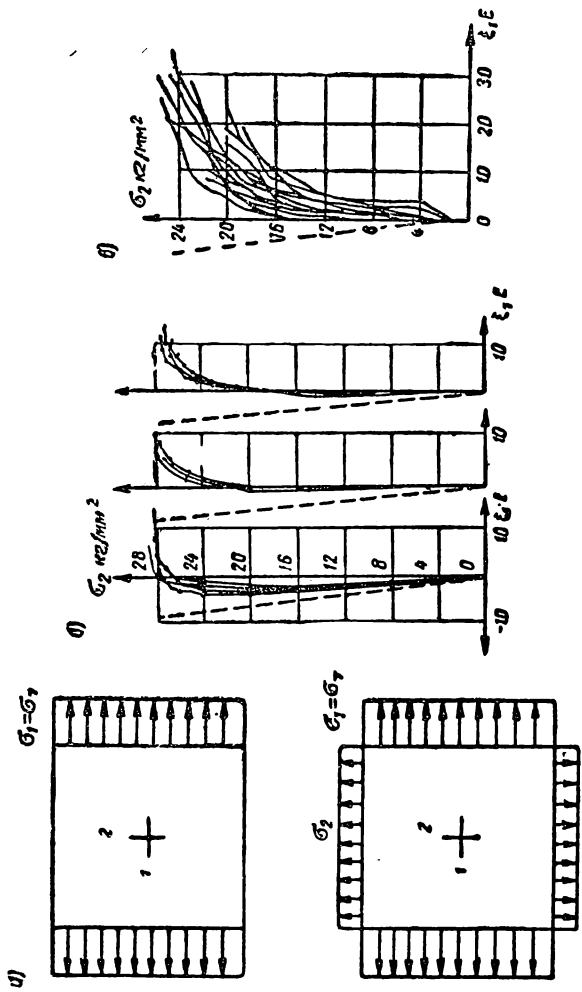


Рис. 5. Развитие деформаций при двухосном напряженном состоянии и сложном нагружении

а, б — при двухосном растяжении; в — при двухосном сжатии

рую (σ_2) такого же знака, но в перпендикулярном направлении, то до некоторого значения второй нагрузки интенсивность напряжения будет уменьшаться, определяя тем самым пассивный характер деформирования. Как известно, уменьшение интенсивности напряжения при простой разгрузке приводит к восстановлению упругих свойств материала; при сложном нагружении уменьшению интенсивности напряжения не всегда сопутствует восстановление упругих свойств.

В рассматриваемых случаях эксперименты показали, что при наложении второй нагрузки сталь начинает работать упруго лишь в направлении второй нагрузки, в перпендикулярном же направлении ее свойства остаются близкими к пластическим, отчего зависимость $\sigma_2 - \epsilon_1$ весьма неустойчива.

На рис 5 приводятся графики зависимости $\sigma_2 - \epsilon_1$: на рис. 5,б при двухосном растяжении крестообразных образцов и на рис. 5,в при двухосном сжатии толстых пластин. Пунктирными линиями показаны теоретические деформации в предположении упругой работы материала.

Как видно из рисунков, имеет место большой разброс экспериментальных данных. При этом направление экспериментальных деформаций не совпадает по знаку с теоретическими.

Создавшаяся при сложном нагружении анизотропия материала приводит к парадоксальным результатам: уменьшению интенсивности напряжения (при наложении второй нагрузки) может сопутствовать увеличение интенсивности деформаций [8]. Коэффициент Пуассона, полученный по приращению деформаций при втором нагружении, может принимать различные значения вплоть до отрицательных [7].

Рассмотрим деформирование материала при двухосном неоднородном напряженном состоянии. Приложив первую нагрузку внецентренно, будем ее увеличивать до состояния, при котором на одной половине образца материал перейдет в стадию текучести. Затем приложим вторую нагрузку в перпендикулярном направлении.

На рис. 6,б приводятся зависимости $\sigma_2 - \epsilon_2$ и $\sigma_2 - \epsilon_1$, построенные по показаниям нижних датчиков (где напряжения не превосходили предела текучести). На рис. 6, в приводятся аналогичные зависимости, построенные по показаниям верхних датчиков, где материал работал в пластической стадии.

Как видно из рисунков, независимо от того, в каких зонах измерялись деформации, экспериментальные кривые располагаются достаточно близко друг к другу и почти совпадают с теоретическими, что указывает на упругую работу материала во всех направлениях.

Таким образом, упругие ядра придают устойчивый характер зависимости $\sigma_2 - \epsilon_1$. Анизотропия материала, наблюдаемая во втором цикле нагружения при однородном напряженном со-

стоянии, здесь не проявляется. Полученные результаты дают основание полагать, что эффект сложного нагружения при неоднородном напряженном состоянии не проявляется столь сильно, как это имеет место при однородном напряженном состоянии.

в) Развитие деформаций в двутавровом сечении

Полученные результаты в части стабилизации пластических деформаций упругим ядром сечения нельзя полностью распространить на работу конструкций профилированного сечения, например на двутавровую балку. Мало вероятно, что после охвата пластическими деформациями полкок, упругое ядро на тонкой стенке существенно повлияет на характер пластического деформирования широких и достаточно толстых полкок. С целью выяснения этого вопроса производилось исследование развития продольных деформаций по сечению двутавровой балки.

Деформации измерялись при помощи 56 датчиков, опоясывающих сечение в месте образования пластического шарнира. На рис. 7,б приводится развитие деформаций при чистом изгибе, измеренных по одной стороне балки. Здесь также деформация, отечающая пределу текучести, отмечена пунктирной линией.

Как видно, на большей части высоты стенки развитие деформаций протекает достаточно равномерно, чем качественно подтверждается гипотеза плоских сечений. Развитие пластических деформаций по полкам (датчики 1 и 12) и на участках стенки, примыкающих к полкам (датчики 2 и 11) протекает неравномерно, здесь превалирует локальный характер деформирования металла.

На рис. 8, б приводится развитие деформаций при поперечном изгибе ($\frac{M}{Q} = 0,206 \text{ м}$). Как видно, продольные деформации по стенке еще в упругой стадии работы материала несколько отклоняются от плоскости (эпюра напряжений становится выпуклой), что объясняется наличием больших касательных напряжений.

Характер пластического деформирования двутаврового сечения как при поперечном, так и при чистом изгибе оказывается одинаковым. Пластические деформации в полках и на части стенки, расположенной вблизи полкок, развиваются локально; резких неравномерностей в деформировании стенки не наблюдается.

Возникает вопрос о степени влияния локального деформирования полкок на несущую способность балки. При чистом изгибе первое предельное состояние наступает, когда образуется пластический шарнир. В этом случае предельный изгибающий момент окажется равным внутреннему моменту, полученному по разнозначным прямоугольным эпюрам напряжений. Подсчитав таким образом теоретический предельный момент и сравнив его с экспериментальным, установлено хорошее их совпадение (расхождение не превышало 1,5—2%).

Рис. 6. Развитие деформаций при неоднородном двухосном напряженном состоянии и сложном нагружении

a — напряженное состояние; *б* — развитие деформаций в упругой части образца; *в* — развитие деформаций в зоне пластических деформаций

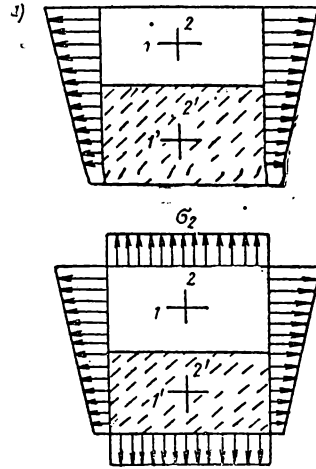


Рис. 7. Деформирование сечения двутавровой балки при чистом изгибе

a — напряженное состояние; *б* — деформированное состояние

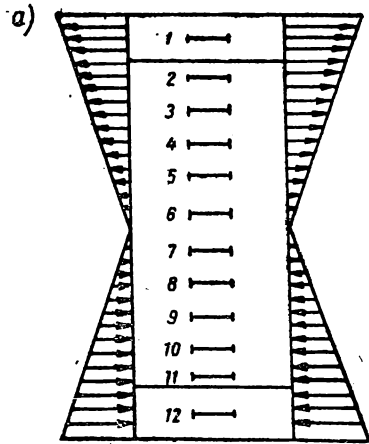
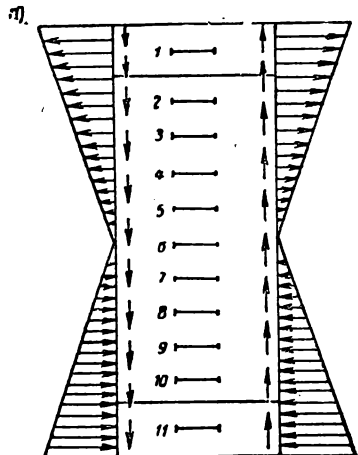
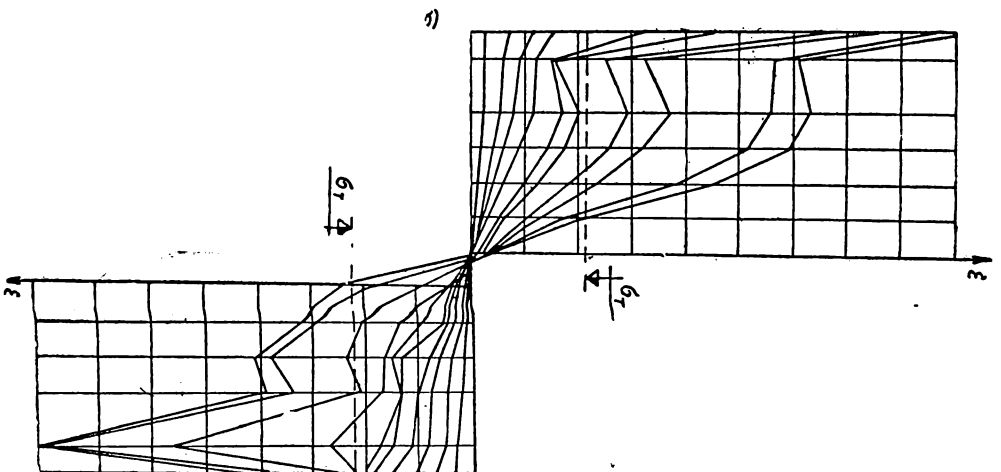
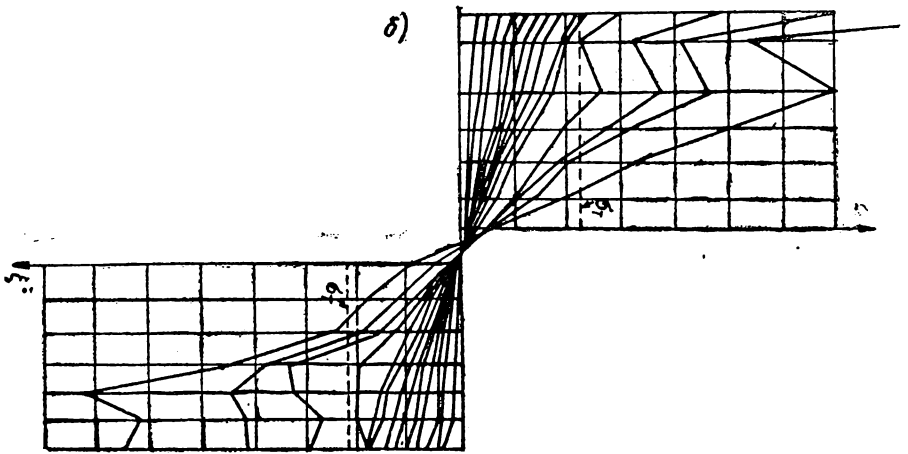
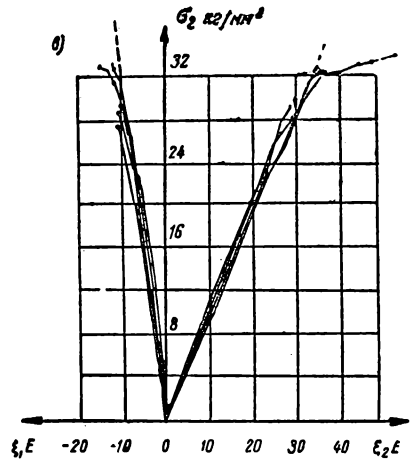
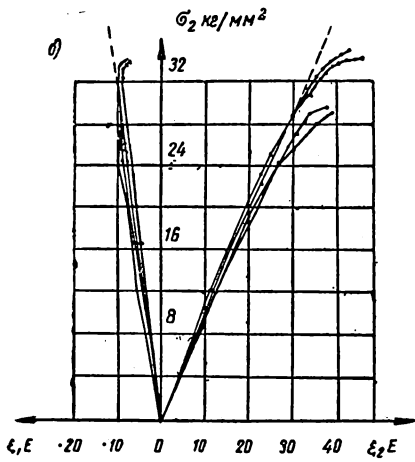


Рис. 8. Деформирование сечения двутавровой балки при поперечном изгибе

a — напряженное состояние; *б* — деформированное состояние





Величина теоретического предельного момента при поперечном изгибе, как известно, зависит от принятого по сечению балки распределения касательных и нормальных напряжений. Произведенными расчетами опытных образцов при различных подходах к распределению нормальных и касательных напряжений (по Н. И. Безухову [9, 10] и Н. Д. Жудину [11], F. Masi [12], С. А. Пальчевскому [13], А. И. Стрельбицкой [14], Б. М. Броуде [15], Н. К. Снитко [16] и М. R Norge [17]) было установлено, что для рассматриваемого двутаврового сечения и тех соотношений между M и Q , которые приняты в эксперименте, значение $M_{пр}$ колеблется в пределах $\pm 6\%$ (если исключить F. Masi). Экспериментальные предельные моменты оказались между крайними теоретическими значениями.

Таким образом, можно заключить, что локальное деформирование полков практически не влияет на первое предельное состояние балки.

ВЫВОДЫ

1. Строительным сталям присущ локальный характер развития пластических деформаций, который ярко проявляется при одноосном напряженном состоянии. При растяжении с изгибом упругие ядра по сечению оказывают сдерживающее влияние на проявление локальности пластических деформаций. Здесь деформации развиваются достаточно равномерно, подчиняясь закону плоских сечений.

2. Наличие упругих ядер мало влияет на величину предела текучести, σ_T^H для практических целей не может быть повышен относительно σ_T .

3. При чистом или поперечном изгибе балок двутаврового сечения упругое ядро на средней части тонкой стенки практически не оказывает влияния на пластически деформируемую полку. В полках и в частях стенки, примыкающих к полкам, пластические деформации развиваются локально, и гипотеза плоских сечений экспериментом не подтверждается.

Деформации по большей части стенки развиваются достаточно равномерно, подчиняясь закону плоскости при чистом изгибе и несколько отклоняясь от плоскости при поперечном изгибе.

Локальное деформирование полков практически не оказывает влияния на первое предельное состояние балки.

4. Пластина, растянутая или сжатая в одном направлении до текучести, а затем подвергнутая действию нагрузки того же знака, но в перпендикулярном направлении, работает в направлении второй нагрузки как упругий материал, оставаясь в другом направлении в состоянии, близком к пластическому, отчего деформации этого направления весьма неустойчивы. Если нагрузка приложена внецентрично и ее повышение производится до образования одноосной текучести, то при наложении в

перпендикулярном направлении добавочных напряжений упругие участки способствуют устойчивому развитию деформаций. Материал при догрузке работает упруго во всех направлениях.

Настоящий вывод дает основание полагать, что эффект сложного нагружения при неоднородном напряженном состоянии проявляется не столь значительно, как это имеет место при однородном напряженном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимов В. И., К методике экспериментального исследования строительной стали при двухосном напряженном состоянии. Доклады межвузовской конференции по испытаниям сооружений. Ленинград, 1958.

2. Балдин В. А., Трофимов В. И., Экспериментальное исследование условия текучести строительной стали на плоских образцах. Известия АН СССР ОТН № 3, 1958.

3. Одинг И. А., Исследование локальности пластической деформации при активном растяжении. Известия АН СССР ОТН № 1, 1953.

4. Иванова В. С., О природе деформаций на площадке текучести металлов. ДАН СССР № 2, 1954.

5. Трофимов В. И., О развитии пластических деформаций в малоуглеродистых сталях. Известия АН СССР № 11, 1955.

6. Туркин В. С., Исследование упруго-пластической работы стальных неразрезных балок. В сборнике «Расчет металлических конструкций с учетом пластических деформаций» под редакцией С. А. Бернштейна, Госстройиздат, 1936.

7. Балдин В. А., Трофимов В. И., Упруго-пластическая работа стали при сложных нагружениях: «Строительная механика и расчет сооружений» № 6, 1959.

8. Трофимов В. И., Упруго-пластическая работа мягкой строительной стали при простом и сложном нагружении. В сборнике «Исследование прочности пластичности и ползучести строительных материалов» под редакцией А. А. Гвоздева, Госстройиздат, 1955.

9. Безухов Н. И., К теории пластического расчета на изгиб. ВИТ № 10, 1936.

10. Безухов Н. И., Влияние очередности действия внешних нагрузок на несущую способность упруго-пластической конструкции. Известия, т. 81. Военная ордена Ленина и ордена Суворова Артиллерийская инженерная академия имени Дзержинского, 1954.

11. Жудин Н. Д., Пластические деформации в стальных конструкциях, ч. I. Основы расчета, Изд-во АН УССР 1935; ч. II. Стали без площадки текучести. Исследование работы сечения, Изд-во АН УССР, 1936.

12. Masi F., La auchillitéde l'acier, Lossature metallique, № 5, 1934.

13. Пальчевский С. А., Определение несущей способности стальных стержней для некоторых случаев сложного напряженного состояния. Сборник трудов Киевского инженерного института, в. VIII, Гостехиздат Украины, 1948.

14. Стрельбицкая А. И., Влияние поперечной силы на величину предельной нагрузки при изгибе балок. Сборник трудов Института строительной механики АН УССР № 12, 1950.

15. Бруде Б. М., Предельное состояние стальных балок, Госстройиздат, 1953.

16. Снитко Н. К., Устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1952.

17. Ногне М. R., The Plastic theory of Belding of milg steel Beaus witlu Partienlar Refference to tlu Erfferk of Stear Forcis, October, 1955, vol. 81, p. 814.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
А. В. Геммерлинг. Вопросы прочности и устойчивости строительных конструкций	6
А. В. Геммерлинг, Г. Е. Бельский. Несущая способность рам в упруго-пластической стадии	33
В. И. Трофимов. Несущая способность расколов опор линий электропередач с болтовыми узлами	63
А. В. Геммерлинг, Б. И. Оськин. Расчет предварительно напряженных балок в упруго-пластической стадии	97
Г. Е. Бельский. Теоретические и экспериментальные исследования деформативности и устойчивости упруго заземленных стержней	125
В. И. Трофимов. Оценка снижения несущей способности стальных ферм за счет искривления отдельных стержней	186
В. С. Туркин. Изгиб и калибровка труб с упруго-пластическими деформациями металла	197
Г. Е. Бельский. Устойчивость центрально сжатых стержней и рам в упруго-пластической стадии	239
П. А. Лукаш. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности	268
В. И. Трофимов. Развитие пластических деформаций в строительных сталях при однородном и неоднородном напряженных состояниях	321

АСИА ЦНИИСК

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ,
РАБОТАЮЩИХ
В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ
СТАДИИ

* * *

Гостройиздат

Москва, Третьяковский проезд, д. 1

* * *

Редактор издательства Э. М. Бударина
Технический редактор Т. М. Гольберг

Сдано в набор 8 VII-1961 г.
Подписано к печати 10 XI-1961 г.
Т-12753 Бумага 6⁴×80 / $\alpha=11$ бум. л. 21+2 вкл.
0,5 печ. л. (21,6 уч.-изд. л.) Тираж 5 000 экз.
Изд. № VIII-5245. Зак. № 1766.
Цена 1 р. 8 к. + пер. № —10 к.

Типография № 1 Государственного
издательства литературы по
строительству, архитектуре и
строительным материалам,
г. Владимир

О П Е Ч А Т К И

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
60	Табл. 2, 7-я графа, 2-я сверху	\bar{A}_3	\bar{A}_2
60	Табл. 2, 8-я графа, 3-я снизу	$6i\varphi_2$	$6iA_1$
204	Формула (6а)	Круглая скобка закрывается после 4-го интеграла	Круглая скобка должна закрываться после 2-го интеграла
204	Формула (6в)	$\left(\frac{\lambda}{1-ak^3}\right)$	$\left(1-\frac{\lambda}{1-ak^3}\right)$
211	Формула (16)	$\gamma \arccos \frac{1}{\gamma} \sqrt{\quad}$	$\gamma \arccos \frac{1}{\gamma} - \sqrt{\quad}$
212	18-я снизу	способность	способность,
220	2-я снизу	$\alpha - \arctg$	$\alpha = \arctg$
220	11-я снизу и формула (29)	n_2	n^2
227	Формула (50)	$\alpha_1 \arctg$	$\alpha_1 = \arctg$
231	Формула (56)	$1 + \frac{b}{2}$	$1 - \frac{b}{2}$
231	Формулы (62) и (63)	$(n-1)$	$(r-1)$
271	9-я снизу	у отдельных	удельных
273	7-я снизу	$(k+1)^{20}$	$(k+1)$ -го
284	Формула (3.6)	$\sin \frac{n\pi x}{a}$	$\sin^n \frac{\pi x}{a}$
314	5-я снизу	$\mu^2=0,5$	$\mu = 0,5$