

Н. М. ГЮНТЕР и Р. О. КУЗЬМИН

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

ТОМ III

**ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ**

*Допущено Министерством высшего
образования СССР в качестве учебного
пособия для вузов*

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД**

Редактор *Л. Я. Циф.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Подписано к печати 22/V 1951 г. Бумага 60 × 92¹/₁₆, 8,375 бум. л. 16,75 печ. л. 19,17 уч.-изд. л.
45 560 тип. зн. в печ. л. Т-02353. Тираж 25 000 экз. Цена книги 6 р. 70 к. Переплёт 1 р.
Заказ № 2436.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете
Министров СССР. Москва, Валуевская, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
Предисловие к третьему изданию	6

О Т Д Е Л Х II

РЯДЫ

§ 1. Исследование сходимости рядов	7
§ 2. Непосредственное суммирование конечных сумм и бесконечных рядов	11
§ 3. Нахождение сумм рядов дифференцированием; некоторые разложения в ряды	18
§ 4. Тригонометрические ряды	21
§ 5. Разные задачи	30

О Т Д Е Л Х III

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Интерполирование. Теория погрешностей	37
§ 2. Приближённое вычисление интегралов	43
§ 3. Формула Эйлера-Маклорена и подобные методы	46
§ 4. Усиление сходимости рядов	48
§ 5. Распределение нулей функции	53
§ 6. Решение численных уравнений	56
§ 7. Приближённое интегрирование дифференциальных уравнений	56

О Т Д Е Л Х IV

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Уравнения Коши-Римана	61
§ 2. Особые точки функции	62
§ 3. Вычеты и их применения	64
§ 4. Распределение нулей функции	71
§ 5. Разложение функций на простейшие дроби и в бесконечные произведения	73
§ 6. Другие разложения в ряды	77
§ 7. Производящие функции и специальные многочлены	81
§ 8. Конформные преобразования	84
§ 9. Принцип максимума модуля	88
§ 10. Дифференциальные уравнения при комплексном переменном	92
§ 11. Приложения к задачам математической физики	98

О Т Д Е Л Х V

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Составление дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка	106
§ 2. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме	112

§	3. Метод характеристик	113
§	4. Метод Римана	117
§	5. Метод Фурье	119
§	6. Интегральные уравнения	133

ОТДЕЛ XVI

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§	1. Уравнения Эйлера-Лагранжа	144
§	2. Необходимые и достаточные условия для простейшей задачи вариационного исчисления	147
§	3. Параметрическая форма интегралов. Трансверсальность	150
§	4. Уравнение Гамильтона-Якоби	151
§	5. Интегралы, зависящие от производных высших порядков или от нескольких функций	155
§	6. Разрывные решения. Односторонняя вариация	159
§	7. Кратные интегралы	162
§	8. Изопериметрические задачи	168
§	9. Разные задачи	172

ОТДЕЛ XVII

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§	1. Применение основных теорем. Формула Байеса	175
§	2. Математические ожидания. Способ конечных разностей и производящих функций	181
§	3. Теорема Бернулли. Неравенства Чебышева	184
§	4. Теоремы Лапласа и Ляпунова-Маркова	186
§	5. Геометрические вероятности и законы распределения вероятностей	191
§	6. Математическая обработка статистических наблюдений	197
	О т в е т ы	208

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

При подготовке к печати настоящего (четвёртого) издания была проведена работа по выявлению опечаток и недосмотров, имевшихся в предыдущем издании.

В этой работе приняли участие коллективы математиков под руководством действительного члена Академии Наук УССР Б. В. Гнеденко (Киев) и профессора Л. И. Волковыского (Львов), а также В. С. Владимиров (Ленинград).

Все задачи были решены заново, текст многих задач дан в уточнённой редакции, небольшое количество задач исключено из сборника.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с первыми двумя томами, задачи, помещённые в этом томе, являются в среднем по существу более трудными. Надо иметь в виду, что отделы науки, которым посвящены некоторые главы этого тома, отличаются большим богатством содержания. Сюда, например, относится теория функций комплексного переменного, необъятная по разнообразию вопросов, связанных с ней. В силу этого, пересмотр третьего тома представлял по природе вопроса значительные трудности. В этом издании подверглись сравнительно большой переработке лишь первые три отдела, посвящённых рядам, приближённым вычислениям и теории функций комплексного переменного. Введён ряд сведений теоретического характера с целью сделать читателя менее зависящим от наличия у него соответствующей литературы. Во многих местах в расстановке задач и их редакции я стремился сделать содержание более доступным. Введено довольно значительное число новых задач в целях более полного освещения рассматриваемого круга вопросов. Всё же принципы, которые изложены в предисловиях к первым двум томам, в этом томе, даже и после его переработки, проведены не так полно, как в ряде глав первых двух томов. Отчасти это объясняется большими трудностями дела. Всё же я надеюсь, что книга несколько выиграла по доступности и лёгкости её применения, а богатство содержания её выиграло заметным образом.

Я буду благодарен за указание достоинств и недостатков книги, а также желательных изменений в ней.

Р. Кузьмин

§ 1. Исследование сходимости рядов

Если $|u_n| \leq v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Два признака сходимости нередко бывают полезны.

Признак Даламбера. Если $0 < q < 1$ и при всех $n > n_0$ имеем $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Если же $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, при всех $n > n_0$, то ряд расходится.

Признак Коши-Маклорена. Если $u_n = f(n)$ — положительная убывающая функция n , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, когда $\int_1^n f(x) dx \rightarrow$ к определённому конечному пределу при $n \rightarrow \infty$. Если же $\int_1^n f(x) dx \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

Ряды с членами разных знаков могут сходиться, хотя ряд из модулей членов расходится. При изучении их сходимости нередко полезен признак Абеля-Дирихле: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится, если $\sum_{n=1}^N u_n$ ограничена при $N \rightarrow \infty$, а числа v_n убывают и $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказать теоремы:

1. Если $|u_n| < \frac{c}{n^a}$, где c — постоянная, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $a > 1$.

2. Если $u_n > \frac{c}{n^a}$, где $c > 0$ — постоянная, $a \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

3. Если $|u_n| < \frac{c}{n(\ln n)^a}$, где $a > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а если $u_n > \frac{c}{n(\ln n)^a}$, где $a \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

4. Обозначим $\ln \ln n = \ln_2 n$, $\ln \ln \ln n = \ln_3 n$, ..., тогда ряд $\sum u_n$ сходится, если $|u_n| < \frac{c}{n \ln n \ln_2 n \dots \ln_{m-1} n (\ln_m n)^a}$, $a > 1$ и расходится, если $u_n > \frac{c}{n \ln n \ln_2 n \dots \ln_{m-1} n (\ln_m n)^a}$, $a \leq 1$.

5. Признак Ермакова. Пусть $f(x)$ есть положительная и убывающая функция при $x > x_0$. Если, при тех же x , имеется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \lambda,$$

где $\lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, причём $u_n = f(n)$. Если, при тех же условиях, $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

У к а з а н и е. Легко доказать неравенства:

$$\int_{x_v}^{x_{v+1}} f(t) dt \leq \lambda \int_{x_{v-1}}^{x_v} f(t) dt \text{ в первом случае и } \int_{x_v}^{x_{v+1}} f(t) dt \geq \int_{x_{v-1}}^{x_v} f(t) dt - \text{во}$$

втором. Здесь $x_1 = e^{x_0}$, $x_2 = e^{x_1}$, $x_3 = e^{x_2}$, ...

6. Теорема Куммера. Если для данного ряда положительных чисел $\sum u_n$ можно найти такую последовательность положительных чисел c_n , что при всех n имеем $c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} > \rho u_{n+1}$, где $\rho > 0$ — постоянная, то ряд $\sum u_n$ сходится.

7. Признак сходимости Куммера. Если члены ряда $\sum u_n$ положительны и можно найти такой ряд положительных чисел c_1, c_2, c_3, \dots , что при всех $n > n_0$ имеется неравенство:

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \geq a u_{n+1},$$

где $a > 0$, то данный ряд сходится.

Если же при всех $n > n_0$ имеется неравенство:

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \leq 0,$$

числа c_1, c_2, c_3, \dots положительны, а ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходится, то ряд $\sum u_n$ тоже расходится.

З а м е ч а н и е. В первом случае $u_2 + u_3 + \dots + u_n < \frac{c_1 u_1}{a}$, а во втором легко доказать, что $u_{n+1} \geq \frac{c_1 u_1}{c_{n+1}}$.

8. Признак Раабе. Если $u_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$, то ряд сходится. Если тот же предел < 1 , то ряд расходится.

9. Признак Бертрана для ряда $\sum u_n$, где $u_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n = A.$$

Если $A > 1$, ряд сходится, а при $A < 1$ он расходится.

10. Признак Гаусса для рядов $\sum u_n$ при $u_n > 0$ и

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где λ и μ — постоянные, а θ_n — ограниченная.

Если $\lambda > 1$ — ряд сходится, если $\lambda < 1$ — расходится. При $\lambda = 1$ ряд сходится, если $\mu > 1$, и расходится при $\mu \leq 1$.

Исследовать сходимость следующих рядов с данным общим членом.

11. $u_n = \frac{1}{x^n + 1}, x > 0.$

12. $u_n = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$

13. $u_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}.$

14. $u_n = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}.$

15. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

16. $u_n = n! \left(\frac{x}{n}\right)^n.$

17. $u_n = \frac{n^n}{n!} x^n.$

18. $u_n = \frac{x^{n^2}}{n!}.$

19. $u_n = \frac{\sqrt{n^n}}{n!} x^n.$

20. $u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$

21. $u_n = n \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}; a > 0, b > 0.$

22. $u_n = \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\dots(nb+1)}; a \geq 0, b \geq 0.$

23. $u_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}; \alpha > 0, \beta > 0.$

24. $u_n = (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[3]{e})\dots(2 - \sqrt[n]{e}).$

[Полезно заметить, что $e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.]

25. $u_n = \ln \cos \frac{x}{n}.$ 26. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

27. $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(1 - \frac{x \ln a}{n}\right)^n.$ 28. $u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$

29. $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$

30. $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$ 31. $u_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^a.$

В трёх последних задачах удобно воспользоваться неравенствами $\frac{1}{2\sqrt{2n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$, которые получаются из очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1}.$$

32. Исследовать сходимость гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

33. Исследовать сходимость ряда $\sum u_n$, если $u_1 = 1$, а

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}.$$

34. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

35. Исследовать сходимость ряда $\sum u_n^{-1}$, где u_n — числа Фибначчи: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, ..., $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Исследовать сходимость рядов:

36. $1 - \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{4a} + \dots$

37. $1 + \frac{1}{2a} - \frac{2}{3a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} - \frac{2}{6a} + \dots$

38. $\sin x - \sin \sin x + \sin \sin \sin x - \dots$

39. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$

40. Доказать, что ряд $v_0^a + v_1^a + v_2^a + \dots$, где $v_0 = x$, $v_1 = \sin v_0$, $v_2 = \sin v_1$, ..., сходится при $a > 2$ и расходится при $a \leq 2$, если $x \neq 0$, $\sin x \neq 0$.

41. $v_1 = \operatorname{arctg} x$, $v_2 = \operatorname{arctg} v_1$, $v_3 = \operatorname{arctg} v_2$, ...

Исследовать сходимость ряда $\sum v_m^a$ при $a > 0$.

42. Если члены ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ ограничены при $x = x_0$ и $x = x_1$, $|x_1| > |x_0|$, то ряд сходится при $|x_0| < |x| < |x_1|$. Доказать.

43. Функция $f(t)$ называется выпуклой, если при любых $m > 0$, $n > 0$ имеется неравенство:

$$f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\right) \leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n}.$$

Доказать, что сумма ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося при $0 < x_0 < x < x_1$, где $a_n > 0$, есть выпуклая функция от $t = \ln x$.

44. Доказать теорему Абеля: если $a_n > 0$ и $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum \frac{a_n}{A_n^\sigma}$ сходится при $\sigma > 1$ и расходится при $\sigma \leq 1$.

45. Так как среднее геометрическое положительных чисел не больше, чем их среднее арифметическое, то

$$\alpha_{n-1} \alpha_n^{p-1} \leq \frac{\alpha_{n-1}^p + (p-1) \alpha_n^p}{p}; \quad \alpha_{n-1} > 0; \quad \alpha_n > 0.$$

Пользуясь этим, доказать неравенство

$$\alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_n \leq \frac{1}{p-1} [(n-1) \alpha_{n-1}^p - n \alpha_n^p],$$

где $n \alpha_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, а числа a_1, a_2, \dots, a_n положительны.

46. При тех же условиях показать, что

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^m \alpha_n^{p-1} \alpha_n.$$

47. Если числа a_ν и $b_\nu > 0$, $0 < \lambda < 1$; $\lambda + \mu = 1$, то по неравенству Гельдера $\sum_{\nu=1}^m a_\nu b_\nu \leq \left(\sum_{\nu=1}^m a_\nu^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \cdot \left(\sum_{\nu=1}^m b_\nu^{\frac{1}{\mu}} \right)^\mu$.

Пользуясь им и предыдущим результатом, доказать неравенства Харди и Ландау:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

где $a_n > 0$, а ряд в правой части сходящийся.

48. Доказать неравенство Карлемана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где $u_n > 0$, а ряд в правой части сходится.

§ 2. Непосредственное суммирование конечных сумм и бесконечных рядов

Если $u_\nu = v_{\nu+1} - v_\nu$, то имеется тождество: $\sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = v_n - v_0$. Это замечание и близкие по простоте приёмы дают решение следующих задач. Доказать тождества:

$$49. \sum_{\nu=1}^n \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad 50. \sum_{\nu=1}^n \nu^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$51. 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}.$$

$$52. 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2.$$

$$53. \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (n-\nu)^2 = \frac{n^5 - n}{30}.$$

$$54. 1^4 - 2^4 + 3^4 - \dots + (-1)^{n-1} n^4 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^4 + 2n^3 - n}{2}.$$

$$55. s_5 + s_7 = 2s_3^2; \quad s_\nu = 1^\nu + 2^\nu + \dots + n^\nu.$$

Пользуясь формулами Эйлера, найти следующие суммы:

$$56. 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos (n-1)x.$$

$$57. \cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x.$$

$$58. \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

$$59. \sin x - \sin 2x + \dots - \sin 2nx.$$

$$60. \sin^2 x - \sin^2 3x + \dots + (-1)^{n-1} \sin^2 (2n-1)x.$$

$$61. x \sin a + x^2 \sin 2a + \dots + x^{n-1} \sin (n-1)a.$$

Доказать равенства:

$$62. x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}; \quad |x| < 1.$$

$$63. 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + \dots = \frac{1-x}{(1+x)^3}; \quad |x| < 1.$$

Доказать тождества:

$$64. \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}.$$

$$65. \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{2a(a+1)} - \frac{1}{2(a+n)(a+n+1)}.$$

$$66. \frac{1}{a(a+p)} + \frac{1}{(a+1)(a+p+1)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+p+n-1)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+p-1} \right) - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a+n+1} + \dots + \frac{1}{a+n+p-1} \right).$$

Доказать равенства:

$$67. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}.$$

$$68. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots = \frac{1}{3}.$$

$$69. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots = \frac{11}{18}.$$

$$70. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \dots = \frac{23}{90}.$$

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \frac{1}{8}. \quad 72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = 1.$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$74. \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots = \frac{1}{90}.$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{5}{36}.$$

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2 \ln 2 - 1. \quad 77. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8}.$$

Пользуясь тождеством

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{a+n-1} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a+n} = \operatorname{arctg} \frac{b}{b^2 + (a+n)(a+n-1)},$$

доказать равенства:

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}. \quad 79. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Доказать при $|x| < 1$ равенства:

$$80. (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots = \frac{1}{1-x}.$$

$$81. \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

$$82. \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

Доказать равенства:

$$83. \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

$$84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \cos^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

Пользуясь равенствами: $\int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}$, $\int_0^1 t^{n-1} (1-t) dt = \frac{1}{n(n+1)}$,

$\frac{1}{2!} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^2 dt = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, доказать, что:

$$85. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right).$$

$$86. 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots = \frac{1}{4\sqrt{2}} [\pi + 2 \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

$$87. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$88. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = \frac{5\pi}{12}.$$

$$89. \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} dx; \quad \alpha > -1, \beta > -1,$$

$\alpha \neq \beta$.

$$91. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right).$$

$$93. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$94. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

$$95. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

$$96. \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

$$\left[\text{Здесь полезно применить равенство: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \right]$$

$$97. \frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2} + \dots = \frac{3\pi^2}{256} - \frac{1}{9}.$$

$$98. \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \dots = \frac{4\pi^2 - 39}{16}.$$

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{(1-x)^2}{2x^2} \ln \frac{1}{1-x}.$$

$$100. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{5}{24x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{(1-x)^2}{8x^2} \cdot R;$$

$$R = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \text{ если } x > 0; R = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x},$$

если $x < 0$.

101. Пользуясь биномом Ньютона, доказать, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

102. Пользуясь равенством $\int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}$, получить, что

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt,$$

и вывести формулу:

$$\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^2 + \dots = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-x+xt^2} dt; |x| < 1.$$

Доказать равенства:

$$103. \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$104. \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^6 + \dots = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x}; |x| < 1.$$

$$105. \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \dots = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$106. \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Замечая, что $\int_0^1 t^{n-1} \ln t dt = -\frac{1}{n^2}$; $\int_0^1 t^{n-1} \ln^2 t dt = \frac{2}{n^3}$; $n > 0$,

доказать равенства:

$$107. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$108. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} (\ln 2)^2.$$

109. Исходя из равенства $\frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)} = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^n dt$,

доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x^2}{a(a+1)(a+2)} + \dots = \int_0^1 (1-t)^{n-1} e^{xt} dt; \quad a > 0.$$

110. Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \dots = e \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{1!(a+1)} + \frac{1}{2!(a+2)} - \dots \right].$$

111. Пользуясь тождеством

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{n!}{(x-2)x(x+1)\dots(x+n-2)} - \frac{(n+1)!}{(x-2)x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

доказать равенство:

$$\frac{1}{x} + \frac{2!}{x(x+1)} + \frac{3!}{x(x+1)(x+2)} + \dots = \frac{1}{x+2}; \quad x > 2.$$

112. Доказать равенство Стирлинга:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1+n}{x(x+1)(x+2)} + \frac{(1+n)(2+n)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots = \frac{1}{x^2 - nx};$$

$x > n.$

113. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t+n)^2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t(t+1)} + \frac{2!}{3t(t+1)(t+2)} + \dots$$

114. Доказать, что при $\gamma > \alpha > 0$, $|x| < 1$ справедливо равенство:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-xu)^{-\beta} du,$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

(гипергеометрический ряд Гаусса).

115. Доказать, что при $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ имеется равенство:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

(Re обозначает действительную часть комплексного числа).

Доказать равенства:

$$116. 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2 + \dots = 1 + ax \int_0^1 \frac{(1-u)^{b-1}}{(1-ux)^{a-1}} du;$$

$b > 0$.

$$117. \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{2}{\pi}.$$

$$118. \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

119. Доказать равенство $\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\varphi(2x)$, где

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

120. Пользуясь предыдущим результатом, показать, что

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2}.$$

121. Интегрированием получить равенство Эйлера

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n \neq 0} \left[\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right] = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

122. Интегрируя и переходя от логарифмов к числам, доказать равенство:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (\text{Эйлер}).$$

Доказать равенства Эйлера, дающие разложение в бесконечный ряд дробей следующих функций:

$$123. \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 - x^2}.$$

$$124. \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

$$125. \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)\pi}{x^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}.$$

$$126. \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

§ 3. Нахождение сумм рядов дифференцированием; некоторые разложения в ряды

Дифференцированием равенства $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ получить следующие формулы (при $|x| < 1$):

$$127. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$128. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$129. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

$$130. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}. \quad 131. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}.$$

Доказать равенства:

$$132. x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$133. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + 2 \cos x).$$

$$134. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n; \quad |x| < 1,$$

где $\tau(n)$ — число целых делителей n (ряд Ламберта).

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} T(n) x^n; \quad |x| < 1.$$

Здесь $T(n)$ — сумма делителей n .

$$137. \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} r(n) x^n; \quad |x| < 1;$$

$r(n)$ — число различных целых квадратов в разложениях n на сумму двух целых квадратов.

138. Функция $f(x) = x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ чётная, т. е. $f(-x) = f(x)$.

Поэтому можно положить: $f(x) = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots$, где A_0 ,

A_1, A_2, \dots — неизвестные коэффициенты. Можно положить, что $A_n = \frac{(-1)^{n-1} B_n 4^n}{(2n)!}$, где B_n — другие коэффициенты, называемые числами Бернулли. Разлагая в ряд в написанном равенстве e^x и e^{-x} и выражая A_n через числа B_n , получим:

$$\frac{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots} = B_0 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \dots$$

Доказать, что числа Бернулли B_n можно получать одно за другим с помощью рекуррентной формулы:

$$(-1)^{n-1} \frac{4^n B_n}{(2n)!} + (-1)^{n-2} \frac{4^{n-1} B_{n-1}}{3!(2n-2)!} + (-1)^{n-3} \frac{4^{n-2} B_{n-2}}{5!(2n-4)!} + \dots + \frac{4B_1}{(2n-1)!2!} + \frac{B_0}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!}.$$

Применяя её, можно получить следующие значения первых чисел Бернулли:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30};$$

$$B_5 = \frac{5}{66}; \quad B_6 = \frac{691}{2730}; \quad B_7 = \frac{7}{6}; \quad B_8 = \frac{3617}{510}; \quad B_9 = \frac{43867}{798};$$

$$B_{10} = \frac{174611}{300}; \quad B_{11} = \frac{854513}{138}; \quad B_{12} = \frac{236364091}{2730} \text{ и т. д.}$$

139. Пользуясь рекуррентной формулой для чисел Бернулли, доказать неравенство: $\frac{4^n B_n}{(2n)!} < \frac{1}{5^n}$, показывающее, что ряд для функции $x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ сходится при $|x| < \sqrt{5}$.

140. Положив $\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$, доказать рекуррентную формулу для чисел Эйлера E_n :

$$\frac{E_n}{(2n)!} - \frac{E_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{E_{n-2}}{4!(2n-4)!} - \dots + (-1)^n \frac{E_0}{(2n)!} = 0.$$

141. Исходя из формулы для чисел E_n , доказать неравенство: $\left| \frac{E_n}{(2n)!} \right| < \rho^n$, где $\rho = \text{ch} 1 - 1 = 0,543\dots$, и показать, что степенной ряд для $\frac{1}{\cos x}$ сходится при $|x| < \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

142. Из результата задачи 138 получить разложение:

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n x^{2n-1}}{(2n)!}.$$

143. Сопоставляя результаты задач 126 и 142, получить равенство $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{2n}} = \frac{B_n (2\pi)^{2n}}{2 (2n)!}$ и доказать, что ряд задачи 142 сходится при $|x| < 2\pi$ и расходится при $|x| > 2\pi$.

144. Сопоставляя задачи 125 и 140, получить равенство

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v+1)^{2n+1}} = \frac{E_n \cdot \pi^{2n+1}}{2^{2n+2} (2n)!}$$

и доказать, что ряд задачи 140 сходится при $|x| < \frac{\pi}{2}$ и расходится при $|x| > \frac{\pi}{2}$.

Составив дифференциальное уравнение для соответствующих функций, доказать следующие разложения в ряды ($|x| < 1$):

$$145. \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^2 = \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{4} - \dots$$

$$146. \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \frac{x^4}{3} - \dots$$

$$147. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) = \\ = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^3}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$148. \cos(m \operatorname{arcsin} x) = \\ = 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{4!} x^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!} x^6 + \dots$$

$$149. \sin(m \operatorname{arcsin} x) = \\ = mx - \frac{m(m^2-1)}{3!} x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!} x^5 - \dots$$

150. $\cos(m \operatorname{arccos} x) = A \cos \frac{m\pi}{2} + B \sin \frac{m\pi}{2}$, где A и B — ряды двух предыдущих задач.

Доказать, что в равенствах задач 148 и 149 обе части при $|x| < 1$ можно разложить по степеням буквы m . Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях m , получить разложения при $|x| < 1$:

$$151. \operatorname{arcsin} x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 (2n+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

$$152. (\arcsin x)^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

$$153. (\arcsin x)^3 =$$

$$= 6 \sum_1^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right] \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}.$$

$$154. (\arcsin x)^4 =$$

$$= 6 \sum_2^{\infty} \frac{4^{n-1} [(n-1)!]^2}{(2n)!} x^{2n} \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right].$$

З а м е ч а н и е. Разложения $(\arcsin x)^n$ при $n > 4$ имеют гораздо более сложный вид.

Доказать равенства:

$$155. \sum_0^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{36 + 2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

$$156. \sum_0^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{(4n)!} = \frac{16}{15} + \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$157. \ln \frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{6} + \dots; \quad |x| < 1.$$

$$158. \left[\frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} \right]^m = 1 + \frac{m}{1} \left(\frac{x}{4} \right) + \frac{m}{2!} (m+3) \left(\frac{x}{4} \right)^2 + \\ + \frac{m(m+4)(m+5)}{3!} \left(\frac{x}{4} \right)^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

§ 4. Тригонометрические ряды

159. Написав интеграл при $0 < x < \pi$ от тождества

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

и применяя интегрирование по частям, получить равенство:

$$\sum_{v=1}^n \frac{\sin vx}{v} = \frac{\pi-x}{2} + \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2n+1} \int_x^{\pi} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)u \cos \frac{u}{2}}{2\sin^2 \frac{u}{2}} du.$$

160. Доказать, что при $0 < x < \pi$

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots = \frac{\pi - x}{2},$$

при $-\pi < x < 0$ тот же ряд равен $-\frac{\pi + x}{2}$.

161. Применяя подобным образом тождество

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n - 1)x = \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{\sin x},$$

доказать, при $0 < x < \pi$, разложение:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

162. Исходя из предыдущего разложения, доказать формулу Стеклова:

$$f(x + \pi) - f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_x^{x+\pi} f(u) \cos [(2m + 1)(u - x)] du,$$

где $f(x)$ — функция, имеющая производную в интервале $(x, x + \pi)$.

Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$, определённые в интервале $(-\pi, \pi)$ следующими условиями:

163. $f(x) = \frac{\pi}{4}$ при $0 < x < \pi$; $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ при $-\pi < x < 0$.

164. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$; $f(x) = 1$ при $0 < x < \pi$.

165. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x < \pi$.

166. $f(x) = x$ при $-\pi < x < \pi$.

167. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < \pi$; $f(x) = -\frac{\pi + x}{2}$
при $-\pi < x < 0$.

168. $f(x) = x^2$ при $-\pi < x < \pi$.

169. $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \pi$; $f(x) = -\cos x$ при $-\pi < x < 0$.

170. $f(x) = |\sin x|$ при $-\pi < x < \pi$.

171. $f(x) = \cos ax$ при $-\pi < x < \pi$.

172. $f(x) = \sin ax$ при $-\pi < x < \pi$.

173. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$; $f(x) = \sin x$ при $0 < x < \pi$.

Разложить в ряд Фурье периодические функции:

174. $f(x) = \{x\}$ — дробная доля числа x , т. е. разность $x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x .

175. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

176. $f(x) = x$, 1 или $3 - x$, смотря по тому, в каком из интервалов $(0, 1)$, $(1, 2)$ или $(2, 3)$ лежит x , предполагая при этом, что период $f(x)$ равен 3.

177. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по косинусам.

178. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по синусам.

179. В интервале $(-h, h)$ разложить функцию e^x .

180. Разложить $\operatorname{ch} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

181. Разложить $\operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Функции, рациональные относительно $\cos x$ и $\sin x$, могут разлагаться в ряд Фурье без формул Фурье. Для этого пишем: $\cos x = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $\sin x = \frac{t^2 - 1}{2ti}$, где $t = e^{xi}$. После этого дело сводится к разложению функции по положительным и отрицательным степеням t . Перейдя обратно от t к x , получим искомое разложение в ряд Фурье.

Изложенным способом и подобными ему получить следующие разложения:

$$182. \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$183. \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_0^{\infty} a^n \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$184. \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx; \quad |a| < 1.$$

$$185. \ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$186. \ln 2 \cos \frac{x}{2} = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

Доказать при $0 < x < \pi$ следующие равенства:

$$187. \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x.$$

$$188. \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots = \frac{\pi x}{8} (\pi - x).$$

$$189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\theta}{n(n+1)} = \sin 2\theta - (\pi - 2\theta) \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta (\ln 4 \sin^2 \theta).$$

$$190. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{n^2(n+1)^2} = 2(\pi - 2\theta) \sin \theta + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi\theta + 2\theta^2 - 3 \right) \cos \theta.$$

191. Доказать при $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ равенство:

$$\frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x.$$

192. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, заметив, что $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx$.

Найти суммы следующих рядов при указанных условиях:

193. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$; $0 < x < 2\pi$. 194. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; $0 < x < \pi$.

195. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$; $0 < x < \pi$. 196. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}$; $0 < x < 2\pi$.

197. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1}$; $0 < x < 2\pi$. 198. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}$; $0 < x < \pi$.

199. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n(n^2+a^2)}$; $-\pi < x < \pi$.

200. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^4-4}$; $-\pi < x < \pi$.

201. Функция $f(x)$, данная в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, продолжена в интервал $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, положив при этом $f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$; доказать, что при $0 < x < \pi$ имеется равенство:

$$f(x) = \sum a_n \cos(2n+1)x.$$

202. Как продолжить в интервал $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ функцию $f(x)$, данную в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, так, чтобы при $0 < x < \pi$

$$f(x) = \sum b_n \sin(2n+1)x.$$

203. Модулем непрерывности $\omega(h)$ называется точная высшая граница колебания функции $f(x)$ в интервалах длиной h , т. е. чисел $|f(x_2) - f(x_1)|$, где $|x_2 - x_1| < h$. Доказать, что для непрерывной функции $f(x)$ интегралы

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

по абсолютному значению не больше, чем $C\omega(\frac{\pi}{n})$, где C — соответствующая постоянная.

204. Доказать равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin mx|}{\sin x} dx = \frac{2}{\pi} \ln m + O(1),$$

где $O(1)$ при $m \rightarrow \infty$ — ограниченная величина.

205. Доказать неравенство Лебега:

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| < CM \ln m.$$

Здесь a_n и b_n — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, а M — верхняя граница $|f(x)|$.

206. Доказать, что при $0 < x < 2\pi$ существует равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(2n+1)t dt.$$

207. Доказать, что при любом вещественном x и целом $n > 0$ имеет место равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = \pi\theta; \quad |\theta| < 1.$$

208. При $0 < x < \pi$ доказать равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin 2nt dt.$$

209. При любом вещественном x и целом $n > 0$ доказать равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} = \frac{3}{2} \theta; \quad |\theta| < 1.$$

210. Доказать неравенство Фейера:

$$\left| \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \frac{\cos(n+2)x}{2} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \right| < 10.$$

211. Суммой Фейера σ_n называется арифметическое среднее первых n сумм Фурье функции $f(x)$:

$$n\sigma_n = s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1},$$

где

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^m (a_v \cos vx + b_v \sin vx);$$

a_v, b_v — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$. Доказать, что $|\sigma_n(x)| < M$, если $|f(x)| < M$ во всём периоде.

212. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция на интервале $[-\pi, \pi]$ $l \leq f(x) \leq L$ и при любом m $|ma_m| < A$, $|mb_m| < B$, то

$$l - (A + B) \leq s_n(x) \leq L + (A + B);$$

a_m, b_m — коэффициенты Фурье, $s_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

213. Доказать, что для всякой непрерывной функции $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

214. Доказать, что для периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши-Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| < C |x_2 - x_1|,$$

существует неравенство $|\sigma_n - f(x)| < \frac{A \ln n}{n}$, где A — постоянная.

Считая $f(x)$ там, где она встречается, непрерывной функцией с периодом 2π , доказать следующие формулы и утверждения:

215. Интеграл $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cos^{2n} \frac{u}{2} du$ есть тригонометрический многочлен, который стремится к $f(x)$, если $n \rightarrow \infty$.

$$216. \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u) du > \frac{\pi}{3m} - \frac{1}{11m^2}; \quad 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u F_m(u) du < \frac{c}{m^2},$$

где $F_m(u) = \left(\frac{\sin mu}{m \sin u} \right)^4$, а c — некоторая постоянная.

$$217. \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u) du = \frac{\pi}{3m} + \frac{\pi}{6m^3} = \frac{1}{2A_m}.$$

218. Величина $T_m(x)$,

$$T_m(x) = A_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u) F_m(u) du,$$

есть тригонометрический многочлен порядка $2m - 2$.

$$219. f(x) - T_m(x) = A_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - f(x + 2u)] F_m(u) du.$$

Значение A_m см. задачу 217.

220. Если $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x_2) - f(x_1)| < C |x_2 - x_1|,$$

то справедливо неравенство Джексона:

$$|f(x) - T_m(x)| < \frac{M}{m},$$

где M — соответствующая постоянная.

221. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале $(0, 2\pi)$, a_n и b_n — её коэффициенты Фурье, $S_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ — её сумма Фурье, а $P_m(x)$ — любой тригонометрический многочлен порядка m , отличный от $S_m(x)$. Доказать неравенство:

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_m(x)]^2 dx < \int_0^{2\pi} [f(x) - P_m(x)]^2 dx.$$

222. Доказать неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

223. Исходя из неравенства Бесселя и неравенства $2ab < a^2 + b^2$, доказать сходимость рядов $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2)$ и $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|a_v| + |b_v|}{v^\alpha}$, где $\alpha > \frac{1}{2}$.

224. Доказать неравенство:

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx < 2 \int_a^b |f(x) - \phi(x)|^2 dx + 2 \int_a^b |\phi(x) - \varphi(x)|^2 dx.$$

225. Пусть $f(x)$ — интегрируемая в $(0, 2\pi)$ функция, ε — произвольная положительная постоянная, $\varphi(x)$ — такая непрерывная функция, что $\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon$, а $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера для $\varphi(x)$,

отличающаяся от $\varphi(x)$ меньше, чем на $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$. Доказать неравенство:

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx < 4\varepsilon.$$

226. Пользуясь предыдущими результатами, доказать теорему Ляпунова (теорема замкнутости):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx,$$

справедливую для любой интегрируемой функции $f(x)$.

227. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \psi(x) dx = \frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu a_\nu' + b_\nu b_\nu'),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы в интервале $(0, 2\pi)$, а $a_\nu, b_\nu, a_\nu', b_\nu'$ — коэффициенты Фурье этих функций.

228. Доказать теорему Стеклова:

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u) du = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \frac{\sin \nu h}{\nu h}.$$

229. Доказать неравенства Стеклова:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx &\geq \int_0^\pi f^2(x) dx, \text{ если } \int_0^\pi f(x) dx = 0, \\ 2) \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx &\geq \int_0^\pi f^2(x) dx; \quad f(0) = f(\pi) = 0. \end{aligned}$$

230. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

где $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера функции $f(x)$.

231. Доказать, что для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши-Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=n}^{2n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \frac{k}{n^{2\alpha}},$$

где k — соответствующая постоянная.

232. Доказать теорему С. Н. Бернштейна: ряд Фурье для функции, удовлетворяющей условию Коши-Липшица при $a > \frac{1}{2}$, сходится абсолютно.

233. Параметрическому уравнению замкнутой кривой можно придать вид:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt); \quad y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Пользуясь формулами: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и $A = \frac{1}{2} \int_S x dy - y dx$, где

A — площадь, ограниченная замкнутой кривой S , доказать неравенство $4\pi A \leq L^2$ (L есть длина кривой S), выражающее, что из всех замкнутых кривых с длиной L наибольшую площадь имеет окружность (доказательство Гурвица).

Многочлены Чебышева: $T_0(x) = 1$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$, многочлены Лежандра: $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, многочлены Чебышева-Эрмита

та $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ и многочлены Абеля-Лагерра: $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$ обладают свойством ортогональности, в силу которого при $n \neq m$ имеются равенства:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0; \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x) dx = 0; \quad \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0.$$

При $n = m$ правые части этих равенств заменяются соответственно величинами:

$$\frac{\pi}{2^{2n-1}}; \quad \frac{2}{2n+1}; \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}; \quad 1.$$

Разложить по многочленам Чебышева $T_n(x)$ функции, определённые в интервале $(-1, 1)$ условиями:

234. $f(x) = x^8$.

235. $f(x) = 0$ при $-1 < x < 0$; $f(x) = 1$ при $0 < x < 1$.

236. $f(x) = |x|$.

237. $f(x) = x^{2n}$.

Разложить при $-1 < x < 1$ по многочленам Лежандра функции, определённые условиями:

$$238. f(x) = 0 \text{ при } -1 < x < 0; f(x) = 1 \text{ при } 0 < x < 1.$$

$$239. f(x) = |x|.$$

Разложить по многочленам Лагерра $L_n(x)$ следующие функции при $x > 0$:

$$240. e^{-ax}. \quad 241. x^n. \quad 242. \sin ax. \quad 243. \cos ax.$$

Разложить по многочленам Чебышева-Эрмита при $-\infty < x < \infty$ следующие функции:

$$244. \text{Sign } x, \text{ равную } -1 \text{ при } x < 0 \text{ и } +1 \text{ при } x > 0.$$

$$245. |x|. \quad 246. e^{-ax}. \quad 247. \cos ax. \quad 248. \sin ax.$$

§ 5. Разные задачи

249. Доказать тождество Каталана

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

и, пользуясь им, показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

250. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n;$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \frac{C}{2} + \ln \sqrt{4n} + \eta_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а ϵ_n и $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

251. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2;$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \ln 2;$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0.$$

252. Пусть ряд $\sum u_n$ получен из ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ перестановкой членов так, что члены одного знака убывают по абсолютной величине, а среди первых n членов отношение числа положительных членов к числу отрицательных стремится к σ при $n \rightarrow \infty$. Доказать равенство: $\sum_{v=1}^{\infty} u_v = \ln \sqrt{4\sigma}$.

253. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} = \frac{C}{4} + \frac{\pi}{8} + \ln \sqrt[4]{8n} + \varepsilon_n;$$

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4n-1} = \frac{C}{4} - \frac{\pi}{8} + \ln \sqrt[4]{8n} + \delta_n;$$

$\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

254. $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \ln 2.$

255. $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln 2.$

256. В гармоническом ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ выброшены члены, в знаменателе которых содержится цифра 9. Доказать, что полученный ряд будет сходящийся, а его сумма меньше 80.

Доказать равенства:

257. $s_2 + s_3 + s_4 + \dots = 1; \quad s_v = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^v}.$

258. $s_3 + s_5 + s_7 + \dots = \frac{1}{4}.$

259. $s_2 + \frac{1}{2} s_4 + \frac{1}{3} s_6 + \dots = \ln 2.$

Пусть a_n — числа натурального ряда, имеющие вид p^q , где p и q — целые числа, бóльшие единицы. Пусть b_m — те из чисел a_n , которые делятся на 2. Доказать равенства Эйлера:

260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} = 1. \quad 261. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}.$

262. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_m - 1} = \ln 2. \quad 263. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_m + 1} = \frac{\pi^2}{12} + \ln 2 - 1.$

Доказать равенства:

264. $\varphi(x) + \varphi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x); \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

265. $\varphi(1-x) + \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{2} (\ln x)^2.$

266. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\ln 2)^2.$

$$267. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n S_n}{n!} = 0; \quad s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

$$268. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{n!} = e \cdot p_m, \quad \text{где целые числа } p_m \text{ связаны равенством:}$$

$$p_{m+1} = 1 + mp_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} p_2 + \dots + p_m.$$

$$269. p^\sigma + \frac{\sigma}{1} p^{\sigma-1} q + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!} p^{\sigma-2} q^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} p^{\sigma-n} q^n = \frac{\Gamma(\sigma+1)}{n! \Gamma(\sigma-n)} \int_0^p x^{\sigma-n-1} (1-x)^n dx;$$

здесь $\sigma > n$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

270. Доказать, что сумма ряда

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} \cdot \frac{a_3}{a_4 + x} + \dots$$

равна $\frac{a_1}{x}$, если ряд $\sum \frac{1}{a_n}$ расходящийся, и равна

$$\frac{a_1}{x} \left[1 - \prod_{v=2}^{\infty} \frac{a_v}{a_v + x} \right],$$

если ряд $\sum \frac{1}{a_n}$ сходящийся.

Числа x , a_1 , a_2 , a_3 , ... положительны.

Доказать равенства:

$$271. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)} = \frac{1}{x}; \quad x > 0.$$

$$272. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)\dots(x^2+n^2)} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{\pi x(x^2+1)}{\operatorname{sh} \pi x} \right].$$

Найти суммы рядов:

$$273. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}. \quad 274. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + n^2)^2}. \quad 275. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^4}.$$

Доказать следующие предложения:

$$276. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

277. Если $u_n > 0$, $u_n - u_{n+1} > 0$, $u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} > 0$, то

$$\frac{u_0}{2} < u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots < u_0 - \frac{1}{2} u_1.$$

$$278. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \dots \right) = \frac{1}{4}.$$

279. Если $a_n > 0$, $b_n > 0$, ряд $\sum a_n x^n$ расходящийся при $x=1$, и сходящийся при $|x| < 1$ и $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = A$.

280. Если $\sum a_n$ расходится и $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow A$, где $A_n = \sum_{v=1}^n a_v$, $B_n = \sum_{v=1}^n b_v$, то $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = A$.

$$281. \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} x^n = \Gamma(p); p > 0.$$

282. Если $\frac{a_n}{n^{p-1}} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a \Gamma(p).$$

283. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^p} = a$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a \Gamma(p+1); p > -1.$$

$$284. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x} (x + x^4 + x^9 + \dots) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

$$285. \sum_{n=a}^b f(n) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x) \cos 2\pi n x dx$$

(формула Пуассона).

$$286. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \right).$$

$$287. \lim_{x \rightarrow 1-0} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \dots) = \frac{1}{2}.$$

$$288. \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(n+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \cos 2\pi n x.$$

289. Если ряд $\sum a_n$ сходится и имеет сумму s и притом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = f(x), \quad \text{то} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = s \quad (\text{Борель}).$$

290. Если R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$, то радиус сходимости ряда $\sum a_n b_n x^n$ не меньше, чем $R_1 R_2$.

291. Для сходимости ряда $\sum a_n$, с положительными убывающими членами, условие $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ необходимо.

292. Если $f(x) < M$ при $0 < x < 2\pi$, то для её коэффициентов Фурье справедливы неравенства:

$$|a_n| < 2M - a_0; \quad |b_n| < 2M - a_0.$$

293. Ряды $\sum \frac{\cos x \sqrt{n}}{n^\sigma}$ и $\sum \frac{\sin x \sqrt{n}}{n^\sigma}$ при $x \neq 0$ сходятся при $\sigma > \frac{1}{2}$ и расходятся при $\sigma < \frac{1}{2}$.

294. Ряд $\sum \frac{(-1)^{[Vn]}}{n^\sigma}$, где $[Vn]$ — целая часть Vn , сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$ и расходится при $\sigma < \frac{1}{2}$.

295. Пользуясь равенством $\frac{1}{a} = \int_0^1 x^{a-1} dx$, $a > 0$, доказать формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{n}{m+p} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{m+2p} - \dots (-1)^n \frac{1}{m+np} &= \\ &= \frac{1}{m(m+p)\dots(m+np)}. \end{aligned}$$

296. Доказать тождество:

$$\begin{aligned} (1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) &= \\ = 1 + \frac{q^n-1}{q-1}x + \frac{(q^n-1)(q^n-q)}{(q-1)(q^2-1)}x^2 + \frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}x^3 + \dots \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. При замене x на qx левая часть умножается на $1+q^n x$ и делится на $1+x$.

Доказать равенства при $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} 297. (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots &= \\ = 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 298. (1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x)\dots &= \\ = 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \frac{q^4x^2}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9x^3}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots \end{aligned}$$

$$299. \prod_{v=0}^{n-1} (1+q^{2v+1}x)(1+q^{2v+1}x^{-1}) = A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v (x^v + x^{-v});$$

$$A_v = q^v \cdot \frac{(1-q^{2n+2v+2})(1-q^{2n+2v+4})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n-2v})}.$$

300. Пользуясь предыдущим результатом, получить тождество Якоби:

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} (x^{\nu} + x^{-\nu}) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + q^{2\nu+1} x) (1 + q^{2\nu+1} x^{-1}) (1 - q^{2\nu}).$$

301. Заменой переменных из предыдущего результата получить тождество Эйлера:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_1^{\infty} (1 - q^n).$$

302. Доказать тождества Якоби (при $|q| < 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} x^{2n+1} &= \\ &= q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n} x^2) (1 - q^{2n} x^{-2}) (x - x^{-1}); \end{aligned}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} x^{2n+1} = q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} (x + x^{-1}) \cdot \prod_1^{\infty} (1 + q^{2n} x^2) (1 + q^{2n} x^{-2});$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^{2n} = q_0 \cdot \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n-1} x^2) (1 - q^{2n-1} x^{-2}),$$

$$\text{где } q_0 = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

303. Тэта-функции Якоби определяются равенствами (при $|q| < 1$).

$$\vartheta_1(v) = 2 \sum_0^{\infty} (-1)^n q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n + 1) \pi v;$$

$$\vartheta_2(v) = 2 \sum_0^{\infty} q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n + 1) \pi v;$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n v;$$

$$\vartheta_4(v) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\pi n v.$$

Доказать равенства (при $|q| < 1$):

$$\vartheta_1(v) = 2q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \cdot \prod_1^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n});$$

$$\vartheta_2(v) = 2q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \cdot \prod_1^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n});$$

$$\vartheta_3(v) = q_0 \cdot \prod_1^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2});$$

$$\vartheta_4(v) = q_0 \cdot \prod_1^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}),$$

где q_0 имеет прежнее значение.

304. Полагая

$$A = \prod_1^{\infty} (1 + q^{2n}); \quad B = \prod_1^{\infty} (1 + q^{2n-1}); \quad C = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n-1})$$

и $f(q) = ABC$, где $|q| < 1$, доказать, что $f(q) = f(q^2)$ и, следовательно, $ABC = 1$.

305. Доказать равенство Якоби: $\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4$, где $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_1'$ — значения тэта-функций и производной от них при $\nu = 0$.

Доказать равенства:

$$306. \sqrt{N} = a \left[1 + \beta + \frac{1 \cdot 3}{2!} \beta^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \beta^3 + \dots \right],$$

где

$$N = a^2 + b; \quad \beta = \frac{b}{2N}; \quad |b| < N.$$

$$307. \sqrt[3]{N} = a \left[1 + \beta + \frac{1 \cdot 4}{2!} \beta^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3!} \beta^3 + \dots \right],$$

где

$$N = a^3 + b; \quad \beta = \frac{b}{3N}; \quad |b| < N.$$

Проверить равенства:

$$308. \sqrt{2} = 1,41421 \ 35623 \ 73095 \ 04880 \ 16885 \dots$$

$$309. \sqrt[3]{2} = 1,25991 \ 20498 \ 94873 \ 16476 \ 72106 \dots$$

310. Проверить равенство Рамануджана:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002^2} + \frac{3}{1003^3} + \frac{4^2}{1004^4} + \frac{5^3}{1005^5} + \dots = \frac{1}{1000} - 10^{-440} \cdot 1,0125 \dots$$

ОТДЕЛ XIII
ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Интерполирование. Теория погрешностей

311. Полагая, что написанные числа верны только до последней значащей цифры, найти приближённые значения следующих величин:

a) $0,53784 \cdot 42,46578$;

b) $0,234 \div 4,3758 \div 15,372 \cdot 0,3762$;

c) $\sqrt{2,375} \div \frac{0,375}{4,578}$.

312. Угол, по измерению угломерным прибором, оказался равным $32^{\circ}13'25'' \pm 10''$. Какова относительная погрешность?

313. Сторона квадрата приблизительно равна 1 м. С какой степенью точности её надо измерить, чтобы погрешность площади была не больше 1 кв. см?

314. Маятник длиной около 2 м совершил около 400 качаний. Зная, что длина его измерена с точностью до 1 мм, а общая продолжительность колебаний измерена с точностью до 0,5 сек., определить, с какой точностью можно найти по этим данным величину ускорения g , а также выяснить, какая ошибка измерения сильнее сказывается на результате.

315. При измерении длины пролёта строящегося моста на одном берегу реки отложена линия (базис), равная $200 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$. Измерены углы между базисом и направлениями из концов его на точку за рекой. Они оказались $90^{\circ} \pm 1'$ и $60^{\circ} \pm 1'$. С какой степенью точности можно определить по этим данным длину пролёта моста?

316. При какой величине угла относительная ошибка вычисления катета прямоугольного треугольника по данному катету и противолежащему углу будет особенно мала, если пренебрегать ошибкой в измерении данного катета?

317. В поле зрения зрительной трубы нивелира видны две горизонтальные линии. При рассмотрении в эту трубу вертикальной рейки с дециметровыми делениями между нитями видны 10 делений рейки, если рейка удалена на 50 м. При переносе рейки в другой пункт между теми же нитями видны $25 \pm 0,2$ деления. Каково расстояние до нового положения рейки?

318. В пятизначных логарифмических таблицах даны десятичные логарифмы чисел с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Как велика может быть погрешность при нахождении числа по логарифму, если число заключено между числами 300 и 400?

приращению аргумента $h_0 = 1$. Требуется вычислить разности $\overline{\Delta y_0}$, $\overline{\Delta^2 y_0}$, $\overline{\Delta^3 y_0}$, $\overline{\Delta^4 y_0}$, соответствующие приращению аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

329. Найти уравнение прямой, для которой сумма квадратов расстояний до точек (3, 2), (7, 5), (12, 9), (—3, —2) была бы наименьшей.

330. Найти уравнение параболы второго порядка так, чтобы сумма квадратов расстояний до неё по вертикали от точек (—3, 4), (—2, 2), (—1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) была бы наименьшей.

331. Пользуясь таблицей

x	$\ln x$	$10^{10} \Delta \ln x$	$10^{10} \Delta^2 \ln x$
1 005	3,002166059	4319184,7	—4291,3
1 006	3,002597978	4314893,4	—4282,8

вычислить $\ln 1005,237$, определив точность вычислений.

Указание: $\left| \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right| < \frac{1}{10}$ при $0 < x < 1$. Числа таблицы даны с точностью до $\frac{1}{2}$ последнего знака.

332. Пользуясь таблицей задачи 331, найти x по данному $\ln x = 3,002268651$.

333. Пользуясь таблицей

u	$\ln \operatorname{sh} u$	$10^5 \Delta \ln \operatorname{sh} u$	$\ln \operatorname{ch} u$	$10^5 \Delta \ln \operatorname{ch} u$
0,500	9,71692	94,0	0,05217	20,1
0,501	9,71786	93,8	0,05237	20,1
0,502	9,71879	93,7	0,05257	20,1
0,503	9,71973	93,5	0,05277	20,2
0,504	9,72066	93,3	0,05297	20,2

найти $\operatorname{sh} 0,50235$.

334. Найти корень уравнения $\operatorname{ch} u = 1,1287$. См. таблицу задачи 333.

335. При помощи данных

x	$\sin x$
41°	0,6560590290
42°	0,6691306064
43°	0,6819983601
44°	0,6946583705

вычислить с возможной точностью $\sin 41^{\circ}20'$.

336. По данным

φ	$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$
21°,0	0,3706344
21°,5	0,3796626
22°,0	0,3887052
22°,5	0,3977625

вычислить $F(\varphi)$ при $\varphi = 21^{\circ}15'$.

337. По данным

φ	$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$
28°,0	0,49846361
28°,5	0,50772435
29°,0	0,51700422
29°,5	0,52630357

вычислить корень уравнения $F(\varphi) = 0,5$.

338. По данным

x	$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx}$
0,71	0,2164501462
0,72	0,2242928871
0,73	0,2320769593
0,74	0,2398032061

вычислить $\psi(0,715)$. Для оценки погрешности следует принять в соображение, что $\psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots$

339. По данным

x	$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx}$
0,83	0,3068612
0,84	0,3140589
0,85	0,3212000
0,86	0,3282922

вычислить корень уравнения $\psi(x) = 0,31$.

Погрешность, получаемая при замене данной функции её интерполяционным многочленом, зависит от значения производной соответствующего порядка в интервале интерполирования. Точная величина производной высокого порядка часто выражается слишком сложно, а нередко и вовсе неизвестна. В практике интерполяции часто применяют интерполяционную формулу, выраженную через последовательные разности, учитывая, в зависимости от желаемой точности, члены соответственной малости. Если величины последовательных производных изменяются не очень прихотливо, то такой приём даёт погрешность приблизительно того же порядка, что и первые из отброшенных членов формулы. Таблицы функций обычно дают значения функций через равные промежутки. Поэтому особо важны формулы, составленные по равностоящим значениям аргумента. Вот некоторые из них.

I. Формула Ньютона-Грегори:

$$y_x = y_0 + x \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

II. Формула Ньютона-Гаусса:

$$y_x = y_0 + x \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x^2-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{x(x^2-1)(x-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \dots$$

III. Формула Ньютона-Стирлинга:

$$y_x = y_0 + x \cdot \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{x^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \\ + \frac{x^2(x^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots$$

IV. Формула Ньютона-Бесселя:

$$y_x = \frac{1}{2} (y_0 + y_1) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\ + \frac{x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{x(x^2-1)(x-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots$$

Принятые здесь обозначения разностей даны в следующей схеме:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$x-4$	y_{-4}				
$x-3$	y_{-3}	Δy_{-4}			
$x-2$	y_{-2}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-4}$		
$x-1$	y_{-1}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-4}$	
x	y_0	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-4}$
$x+1$	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$
$x+2$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$
$x+3$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$
$x+4$	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$
$x+5$	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$

340. Пользуясь таблицей значений обратных величин целых чисел и интерполяционной формулой, взятой до четвёртых разностей включительно, найти величины дроби $\frac{1}{12,5}$ с помощью формул:

1) Ньютона-Грегори при $y_0 = \frac{1}{12}$, $y_1 = \frac{1}{13}$, $y_2 = \frac{1}{14}, \dots$

2) Ньютона-Гаусса и 3) Ньютона-Бесселя, сравнив полученные результаты с точной величиной.

341. Подобный же вопрос для величины $\sqrt{12,25}$; $y_0 = \sqrt{12}$; $y_1 = \sqrt{13}$; $y_2 = \sqrt{14}; \dots$

342. Из 1000 родившихся доживает до возраста 20 лет, 30 лет, 40 лет, 50 лет, 60 лет соответственно 560, 530, 480, 400 и 300 человек.

Сколько людей из 1000 доживает до 35 и до 45 лет?

343. В некоторой местности числа людей, возрасты которых относятся к трём последовательным пятилетиям, такие:

$$37\ 237, 40\ 118, 42\ 652.$$

Сколько людей в возрасте среднего года второго пятилетия?

344. Числа людей в возрастах 25—30, 30—35, 35—40, 40—45 лет соответственно таковы:

458 572, 441 424, 423 123, 402 918.

Скольким людям идёт 38-й год?

345. Таблица содержит в одной колонне 20 последовательных значений функции. Суммы чисел трёх последовательных колонн таковы: 630 611, 1 946 935, 3 246 319.

С какого числа начинается четвёртая колонна?

§ 2. Приближённое вычисление интегралов

Вычислить по способу трапеций следующие интегралы, принимая указанное в каждой задаче число промежутков n :

$$346. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}; \quad n=4.$$

$$347. \int_1^3 \frac{dx}{x+1}; \quad n=4.$$

$$348. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad n=4.$$

$$349. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx; \quad n=4.$$

$$350. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx; \quad n=6.$$

$$351. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \quad n=6.$$

352. Вычислить те же интегралы при $n=4$ по формуле Симпсона.

353. То же по формуле Котеса.

354. То же по способу Чебышева.

355. То же по способу Гаусса.

356. После подстановки $x = \sin \varphi$ вычислить по способу Симпсона при $n=4$ интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

357. То же с подстановкой $1-x=u^2$.

358. После подстановки $x = \frac{1}{t}$ вычислить по способу Симпсона

при $n=4$ интеграл $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$.

359. С помощью формулы Симпсона и параметрического уравнения эллипса получить приближённую формулу для длины дуги

четверти эллипса с полуосями a и b :

$$l = \frac{\pi}{12} \left[a + b + \sqrt{8(a^2 + b^2)} \right].$$

360. Исследовать степень точности предыдущей формулы при $b=0$, при $b=a$ и при $b=\frac{a}{2}$ (в последнем случае сравнить с результатом формулы Симпсона при $n=4$).

Доказать следующие формулы квадратур типа Гаусса, из которых первая принадлежит Эрмиту, а остальные Стильтьессу.

$$361. \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f \left[\cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} \right].$$

$$362. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f \left(\cos \frac{\nu\pi}{n} \right).$$

$$363. \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{m} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{m} f \left(\cos \frac{2\nu\pi}{m} \right).$$

$$364. \int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f \left[\cos^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{4n} \right].$$

$$365. \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) dx = \frac{\pi}{4n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f \left(\cos^2 \frac{\nu\pi}{2n} \right).$$

$$366. \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} f(x) dx = \frac{2\pi}{m} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{m} f \left(\cos^2 \frac{\nu\pi}{m} \right).$$

(В задачах 363 и 366 положено $m=2n+1$.)

Формулы 362 и 365 вполне точны, если $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем $2n-2$. Остальные, — если $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем $2n$.

Пользуясь этими формулами при $n=4$, вычислить интегралы:

$$367. \int_0^1 \sqrt{x(1-x^2)} dx. \quad 368. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Доказать полную точность формул:

$$369. \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}),$$

где $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем четыре.

$$370. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) - f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right],$$

где $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем шесть.

В приложениях нередко приходится вычислять интегралы от функций, для которых имеется таблица значений, для равномерно растущих значений аргумента. В таких случаях бывает удобно применять формулы квадратур, содержащие разности. Из них отметим две.

Формула Грегори (1670)

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+nh} y dx = \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n + \sum_y A_y [\Delta^y y_{n-y} + (-1)^y \Delta^y y_0],$$

где значения первых коэффициентов A_y таковы:

$$A_1 = -\frac{1}{12}; \quad A_2 = -\frac{1}{24}; \quad A_3 = -\frac{19}{720}; \\ A_4 = -\frac{3}{160}; \quad A_5 = -\frac{863}{60480}, \dots$$

Формула Гаусса

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+nh} y dx = \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + \frac{1}{2} y_n + \\ + \sum_y B_y \left[\frac{\Delta^{2y+1} y_{n-y} + \Delta^{2y+1} y_{n-y-1}}{2} - \frac{\Delta^{2y+1} y_{-y} + \Delta^{2y+1} y_{-y-1}}{2} \right],$$

где значения B_y такие:

$$B_0 = -\frac{1}{12}, \quad B_1 = \frac{11}{720}; \quad B_2 = -\frac{191}{60480}.$$

В обеих формулах y_0, y_1, \dots, y_n суть значения y при $x = a, a+h, \dots, a+nh$. Величины $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots$ — последовательные разности. На практике вычисление правой части равенства продолжают до слагаемых, которые считают возможным пренебречь по их малости. Так как обычно успех оправдывает эту практику, то теоретической оценкой сделанной погрешности, вообще довольно затруднительной, пренебрегают.

371. Применить формулу Грегори к вычислению интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, полагая $n=10, h=0,1$, ведя вычисление с семью знаками после запятой.

372. То же для формулы Гаусса.

373. Провести аналогичные вычисления для интеграла $\int_{100}^{110} \frac{dx}{x}$.

§ 3. Формула Эйлера-Маклорена и подобные методы

Формула Эйлера-Маклорена имеет вид:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{B_1}{2!} \left| f'(x) \right|_a^b - \frac{B_2}{4!} \left| f''(x) \right|_a^b + \\ + \dots + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{(2m-2)!} \left| f^{(2m-3)}(x) \right|_a^b + \theta \frac{(-1)^{m+1} B_m}{(2m)!} \left| f^{(2m-1)}(x) \right|_a^b.$$

Здесь подразумевается, что $f^{(2m)}(x)$ сохраняет знак при $a < x < b$, $0 < \theta < 1$, а коэффициенты B_1, B_2, B_3, \dots — числа Бернулли.

374. Доказать при $m > 1$ формулу:

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \frac{1}{(m-1)a^{m-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^m} + \frac{B_1}{2!} \frac{m}{a^{m+1}} - \frac{B_2}{4!} \frac{m(m+1)(m+2)}{a^{m+3}} + \dots \\ \dots + (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \frac{m(m+1) \dots (m+2p-2)}{a^{m+2p-1}} \theta; \quad 0 < \theta < 1.$$

375. Полагая $\sigma_m = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^m}$, доказать, что величины первых σ_m ,

выраженные в единицах 15-го знака после запятой, таковы:

$\sigma_2 =$	10 516	63 356	81 686	$\sigma_3 =$	199	42 680
$\sigma_3 =$	552	49 174	85 401	$\sigma_9 =$	18	23 673
$\sigma_4 =$	38	66 502	17 381	$\sigma_{10} =$	1	69 270
$\sigma_5 =$	3	04 137	98 676	$\sigma_{11} =$		15 894
$\sigma_6 =$		25 495	43 018	$\sigma_{12} =$		1 506
$\sigma_7 =$		2 224	31 766	$\sigma_{13} =$		144
				$\sigma_{14} =$		14

376. Доказать равенство $\sum_{m=2}^{\infty} \sigma_m = \frac{1}{9}$ и, пользуясь им, проверить точность значений σ_m , данных в предыдущей задаче.

377. Пользуясь сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$, формулой Эйлера-Маклорена, а также тем, что остаточный член ряда

$$\sum_m^{\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_m^{m+p} u_n,$$

доказать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} = C + \ln m + \frac{1}{2m} - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{m^2} + \dots \\ \dots + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1}}{(2p-2)m^{2p-2}} + \frac{(-1)^p B_p}{2p \cdot m^{2p}} \theta; \quad 0 < \theta < 1.$$

378. Полагая в предыдущем результате $m=3$, $p=9$, вычислить постоянную C (постоянная Эйлера).

379. Вычислить сумму $\sum_{n=1}^{1,000} \frac{1}{n}$ с точностью до 10^{-7} .

380. Пользуясь формулой Эйлера-Маклорена, доказать равенство:

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} = A + 2\sqrt{m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{B_1}{2! 2m\sqrt{m}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! 2^3} \frac{B_2}{m^3 \sqrt{m}} - \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^p \cdot 1 \cdot 3 \dots (4p-3) B_p}{(2p)! 2^{2p-1} m^{2p-1/2}} + \frac{(-1)^{p+1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (4p-1)}{(2p+2)! 2^{2p+1}} \cdot \frac{B_{p+1}}{m^{2p+3/2}} \cdot \theta;$$

$$0 < \theta < 1.$$

381. Пользуясь формулой Эйлера-Маклорена, вычислить суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ с точностью до 10^{-7} .

Пользуясь интегралами

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} dx = \frac{1}{m}, \quad \int_0^{\infty} e^{-mx} \sin nx dx = \frac{n}{m^2 + n^2}; \quad m > 0,$$

доказать равенства:

$$382. \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx.$$

$$383. \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \dots = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2nx} dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$384. \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} n}{n^2 + (n+\nu+1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-n\nu} \sin nx}{e^x + 1} dx.$$

Исходя из соответствующих разложений в ряды дробей, можно доказать, что при любом вещественном x справедливы формулы:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \frac{(2^{2\nu}-1) B_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} + \theta \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2^{2n}-1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1},$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} + \theta \cdot (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu} E_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} + \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Здесь B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера, $0 < \theta < 1$.

Пользуясь этим и предыдущими результатами, доказать равенства:

$$385. \ln 2 = \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+\mu}}{n^{2\mu}} \frac{(2^{2\mu}-1) B_{\mu}}{\mu} + \\ + \theta \cdot (-1)^{n+m} \frac{(2^{2m}-1) \cdot B_m}{n^{2m} \cdot m}.$$

$$386. \frac{\pi}{4} = \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} + n \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{n+\mu-1} E_{\mu-1}}{(2n)^{2\mu}} + \frac{n\theta \cdot (-1)^{n+m} \cdot E_m}{(2n)^{2m+2}}.$$

$$387. \frac{\pi}{2} = \sum_{\nu=1}^n \frac{2n}{n^2 + \nu^2} - \frac{2\pi}{e^{2\pi n} - 1} + \frac{1}{2n} + \\ + \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{\mu-1} B_{2\mu-1}}{(2n^2)^{\mu-1}} \frac{1}{2\mu-1} + \frac{\theta (-1)^m}{(2n^2)^{2m+1}} \cdot \frac{B_{2m+1}}{2m+1}.$$

Здесь $0 < \theta < 1$. Последняя формула была дана Эйлером без указания остаточного числа.

$$388. \text{Доказать формулу: } \sum_{\nu=1}^n \frac{\ln \nu}{\nu} = \\ = C + \frac{1}{2} (\ln n)^2 + \frac{\ln n}{2n} + \frac{1 - \ln n}{12n^2} + \theta \frac{6 \ln n - 11}{720 n^4},$$

где $C = -0,072815 \dots$; $0 < \theta < 1$.

Доказать равенства:

$$389. \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\ln \nu}{\nu^2} = 0,9375483 \dots \quad 390. \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \ln \nu}{\nu^2} = 0,1013166 \dots$$

$$391. \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sqrt{\nu}} = 0,604898 \dots$$

§ 4. Усиление сходимости рядов

I. Преобразование Эйлера.

392. Пусть $S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$ — сходящийся ряд, а числа u_0, u_1, u_2, \dots не обязательно положительны. Доказать равенство:

$$S = \frac{u_0}{2} - \frac{\Delta u_0}{2} + \frac{\Delta u_1}{2} - \frac{\Delta u_2}{2} + \dots,$$

где $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots$ — разности: $\Delta u_0 = u_1 - u_0, \Delta u_1 = u_2 - u_1$.

393. Повторным применением предыдущего приёма доказать равенство:

$$S = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \Delta^{n-1} u_0 + (-1)^n R_n,$$

где $2^n R_n = \Delta^n u_0 - \Delta^n u_1 + \Delta^n u_2 - \dots$

394. Если числа $\Delta^n u_0, \Delta^n u_1, \Delta^n u_2, \dots$ одного знака и по абсолютной величине убывают, то $R_n = \frac{\theta \cdot \Delta^n u_0}{2^n}$; $\frac{1}{2} < \theta < 1$.

395. Полагая $S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} \rho_{n+1}$, где $\rho_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$, доказать тождество

$$S = \frac{u_0}{2} - \frac{\Delta u_0}{2} + \frac{\Delta u_1}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{\Delta u_{m-1}}{2} + (-1)^m \frac{\Delta \rho_m}{2}.$$

396. Для величины R_m в задаче 393 доказать равенство:

$$2^n R_n = \Delta^n \rho_0,$$

где $\rho_v = u_v - u_{v+1} + u_{v+2} - \dots$

397. Доказать теорему: если ряд $\sum_0^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится, то

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 - \dots,$$

где ряд в правой части тоже сходится. (Преобразование Эйлера.)

398. Пользуясь тождеством $a = \frac{a}{1+x} + \frac{ax}{1+x}$, доказать тождество:

$$u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - \dots = \frac{u_0 x}{1+x} - \frac{\Delta u_0 \cdot x^2}{1+x} + \frac{\Delta u_1 \cdot x^3}{1+x} - \dots,$$

где ряд $u_0 x - u_1 x^2 + \dots$ сходится по условию при $-1 < x < 1$.

399. При тех же условиях доказать равенство:

$$S = u_0 y - \Delta u_0 \cdot y^2 + \Delta^2 u_0 y^3 - \dots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} u_0 \cdot y^n + (-1)^n R_n,$$

где $y = \frac{x}{1+x}$; $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \dots$ — последовательные разности, а величина

$$\begin{aligned} (1+x)^n R_n &= x^{n+1} \Delta^n u_0 - x^{n+2} \Delta^n u_1 + \dots = \\ &= x [(-1)^n x^n \rho_0 + (-1)^{n-1} x^{n-1} \rho_1 + \dots + \rho_n], \end{aligned}$$

где $\rho_p = u_p x^p - u_{p+1} x^{p+1} + \dots$

400. Доказать, что

$$u_0x - u_1x^2 + u_2x^3 - \dots = \\ = u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right) - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \Delta^2 u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 - \dots,$$

если $0 < x < 1$, а ряд в левой части сходится.

401. Доказать при $m > 0$, $x > -\frac{1}{2}$ равенство:

$$\frac{x}{m} - \frac{x^2}{m+1} + \frac{x^3}{m+2} - \dots = \\ = \frac{1}{m} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{m(m+1)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \frac{1 \cdot 2}{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots$$

402. Доказать равенство:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^n.$$

Найти преобразованием Эйлера с точностью до 10^{-5} суммы следующих рядов. (Первые несколько членов полезно суммировать непосредственно).

403. $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

404. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ 405. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

406. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$ 407. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$

408. $\frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 11} + \frac{1}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 13} + \dots$

409. Доказать, что, применяя преобразование Эйлера к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, мы улучшаем сходимость, а применяя его к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, ухудшаем.

II. Преобразование Куммера.

Если ряд $\sum u_n$ сходится, а ряд $\sum C_n$ имеет известную сумму C и притом $\frac{u_n}{C_n} \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$, то очевидное тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = C\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - C_n\gamma)$$

заменяет данный ряд другим, более сходящимся, так как очевидно, что $\frac{u_n - C_n!}{u_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В частности, если подобрать такой ряд чисел p_1, p_2, p_3, \dots , что $p_n u_n \rightarrow 0$ и $\frac{p_n u_n - p_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow 1$, то можно положить в предыдущем тождестве $C_{n+1} = p_n u_n - p_{n+1} u_{n+1}$. Тогда справедливо равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (p_1 + 1) u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - p_n u_n + p_{n+1} u_{n+1}),$$

выражающее преобразование Куммера.

410. Полагая для ряда $\sum \frac{1}{n^2}$, что $C_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, доказать равенство:

венство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 - 1)}.$$

411. Доказать равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 - 1)} = -\frac{2}{9} - 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 - 1) (4n^2 - 9)}.$$

412. Из ряда $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$, выбирая p_n в форме $an + b + \frac{c}{n+d}$,

где a, b, c, d — соответствующие коэффициенты, преобразованием Куммера получить равенство:

$$\pi^2 = 10 - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3 (n+1)^3}.$$

413. Из ряда $\frac{\pi^2}{8} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ получим формулу:

$$\frac{3\pi^2}{32} = 1 - 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^3}.$$

Доказать равенства:

$$414. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{4n^4 (n+1)^4}. \quad 415. e = 2 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n! (n^4 + n^2 + 1)}.$$

$$416. \ln 2 = \frac{3}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 (n+1)^2}.$$

$$417. \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 (n+1)^2} = \frac{7}{96} - \frac{9}{2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)n^2(n+2)^2}.$$

$$418. \frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}.$$

$$419. \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} + 16 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(4n^2-1)^3}.$$

$$420. \sum_0^{\infty} u_n = \frac{3}{5} - 27 \sum_1^{\infty} u_n \cdot \frac{4n-1}{(2n-1)^2 (8n^2-12n+9) (8n^2+4n+5)},$$

$$\text{где } u_n = (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2.$$

Преобразование Куммера в его простейшей форме с пользой применяется к тригонометрическим рядам. Применяя преобразование такого типа, доказать равенства при $0 < x < \pi$.

$$421. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx}{n^3+1} = \frac{\pi-x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^3+1)}.$$

$$422. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n+1} \cos nx = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) - \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n^3+n+1)}.$$

$$423. \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1} \sin nx = \frac{1}{2} x + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)}{n(n^2+1)} \sin nx.$$

$$424. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \cos nx = \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)} \cos nx.$$

$$425. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \sin (2n+1)x = \\ = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{(n^2+1)(2n+1)} \sin (2n+1)x.$$

426. Доказать, что функция $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$ при $0 < x < \pi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y'' - y = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

427. Доказать, что функция $y = \sum_{n^3+1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin 2nx$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет уравнению

$$y^{VI} + 64y = -\frac{16 \cos x}{\sin^3 x}.$$

§ 5. Вычисление интегралов с помощью рядов

Разложением подинтегральной функции найти величины следующих интегралов с точностью до 10^{-5} .

$$428. \int_0^1 e^{-x^2} dx. \quad 429. \int_0^1 \operatorname{ch}(x^2) dx. \quad 430. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$431. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \quad 432. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x}. \quad 433. \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

В следующих интегралах полезно сначала выполнить соответствующую замену переменных и лишь тогда разлагать в ряд.

$$434. \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x) \ln(1+x)}; \quad x+1=e^t.$$

$$435. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}; \quad \operatorname{tg} x = u. \quad 436. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin x}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} u.$$

Разложивши в ряд, проинтегрировав и применяя затем преобразование Эйлера, вычислить следующие интегралы с точностью до 10^{-5} :

$$437. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}. \quad 438. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}.$$

439. Разлагая $x^x = e^{x \ln x}$ по степеням $x \ln x$, получить равенство:

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \dots = 0,7834305 \dots$$

440. Положив $x = \sin \varphi$ и разлагая по степеням $\sin^2 \varphi$, доказать при $|k| < 1$ равенство:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) k^6 + \dots \right].$$

В следующих задачах полезно воспользоваться интегралом из теории гамма-функций, а также формулой:

$$\frac{1}{(1+x)^{\sigma}} = 1 - \sigma x + \frac{\sigma(\sigma+1)}{2!} x^2 - \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+n-1)}{n!} x^n + R_n,$$

где

$$R_n = (-1)^{n+1} \theta \frac{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Здесь $0 < \theta < 1$; $\sigma > 0$, x — любое положительное число.

Доказать асимптотические формулы, весьма удобные при больших значениях параметра n . (В этих формулах θ — некоторая положительная правильная дробь.)

$$441. \int_n^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{n+x} = e^{-n} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2!}{n^3} - \dots + \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}} + \theta \cdot \frac{(-1)^{m+1} (m+1)!}{n^{m+2}} \right].$$

$$442. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2!}{n^4} + \frac{4!}{n^6} - \dots + (-1)^m \frac{(2m)!}{n^{2m+2}} + \theta \cdot \frac{(-1)^{m+1} (2m+2)!}{n^{2m+4}}.$$

$$443. \int_n^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-n^2}}{2n} \left[1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 n^4} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2^{m-1} n^{2m-2}} + R \right],$$

где

$$R = \theta \cdot \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m n^{2m}}.$$

$$444. \int_n^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x^\sigma} = \frac{e^{-n}}{n^\sigma} \left[1 - \frac{\sigma}{n} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{n^2} - \dots + (-1)^m \frac{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+m-1)}{n^m} + R \right],$$

где

$$R = \theta \cdot (-1)^{m+1} \cdot \frac{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+m)}{n^{m+1}}.$$

445. При вычислении интеграла $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ полезно положить

сначала $x = a + t$, а затем заменить величину $\frac{1}{a+t}$ интегралом $\int_0^{\infty} e^{-u(a+t)} du$. Используя в дальнейшем, после перемены порядка

интегрирования, предыдущие приёмы, получить равенство:

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = P \sin a + Q \cos a,$$

где

$$P = \frac{1}{a^2} - \frac{3!}{a^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{a^{2n}} + \theta \cdot (-1)^n \frac{(2n+1)!}{a^{2n+2}},$$

$$Q = \frac{1}{a} - \frac{2!}{a^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{a^{2n-1}} + \theta (-1)^n \frac{(2n)!}{a^{2n+1}}.$$

Если $\varphi(x)$ — данная функция, а n — параметр, стремящийся к бесконечности, то асимптотическая величина интегралов $\int_0^1 x^{n-1} \varphi(x) dx$ может изучаться подстановкой $x = e^{-t}$. Затем для функции $\varphi(e^{-t})$ находится формула $\varphi(e^{-t}) = \sum_{\nu=1}^{m-1} a_{\nu} t^{\nu} + A \cdot \theta \cdot t^m$, где a_{ν} и A — соответствующие коэффициенты.

Установить равенства (где $0 < \theta < 1$):

$$446. \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu} E_{\nu}}{(n-1)^{2\nu+1}} + \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-1)^m E_m}{(n-1)^{2m+1}},$$

где $0 < \theta < 1$, а E_{ν} — числа Эйлера.

$$447. \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left[1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right].$$

$$448. \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} - \frac{5}{32n^3} + \frac{7}{128n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Доказать следующие равенства (где $0 < \theta < 1$):

$$449. \int_1^{\infty} \frac{e^{-2t\sqrt{x}} dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x} 2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(4\sqrt{x})^{\nu}} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{\theta (-1)^n}{(4\sqrt{x})^n} \cdot \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right].$$

$$450. \sum_0^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu)!}{\nu! 2^{\nu}} \cdot \frac{1}{x^{2\nu+1}} + \theta (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! 2^n \cdot x^{2n+1}}.$$

$$451. 1 + \frac{x}{(1+\sigma)} + \frac{x^2}{(1+\sigma)(2+\sigma)} + \dots = \\ = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{x^\sigma} e^x - \frac{\sigma}{x} + \frac{\sigma(1-\sigma)}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{\sigma(1-\sigma)\dots(n-1-\sigma)}{x^n} + \\ + \theta(-1)^{n+1} \frac{\sigma(1-\sigma)\dots(n-\sigma)}{x^{n+1}}.$$

452. Доказать, что длина l четверти эллипса $x = \cos t$; $y = b \sin t$ при малых значениях b может быть дана формулой $l = 1 + \frac{1}{2} b^2 \ln \frac{1}{b} + \theta(b) b^2$, где $\theta(b)$ — функция, остающаяся конечной при $b \rightarrow 0$.

§ 6. Решение численных уравнений

Найти корни следующих уравнений с четырьмя знаками после запятой.

$$453. x^3 - 7x - 7 = 0. \quad 454. x^3 - 8x + 15 = 0.$$

$$455. x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0. \quad 456. x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0.$$

Вычислить с точностью до 10^{-5} корни уравнений:

$$457. x \ln x = 100. \quad 458. x = \cos x.$$

$$459. x^2 = 20 \sin x. \quad 460. 3x = e^x.$$

Найти наименьшие положительные корни уравнений:

$$461. x = \operatorname{tg} x. \quad 462. \operatorname{ch} x \cos x = 1.$$

$$463. 1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \dots = 0.$$

464. В силу одного тождества Рамануджана

$$\frac{1}{e^{2\pi} - 1} + \frac{2}{e^{4\pi} - 1} + \frac{3}{e^{6\pi} - 1} + \dots = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}.$$

Поэтому число $e^{-2\pi}$ есть корень уравнения

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \dots = a,$$

где $a = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$. Пользуясь этим, найти равенство: $e^{-2\pi} = x =$
 $= a - 3a^2 + 14a^3 - 82a^4 + 546a^5 + \dots = 0,0018674428\dots$

§ 7. Приближённое интегрирование дифференциальных уравнений

Найти разложение в степенной ряд общего интеграла уравнений:

$$465. y' - xy = 1. \quad 466. (1+x)y' - ny = 0.$$

$$467. y'' + y = 0. \quad 468. y'' - xy = 0.$$

Доказать, что соответствующие частные интегралы следующих дифференциальных уравнений могут быть представлены указанными степенными рядами:

$$469. x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0,$$

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

(гипергеометрический ряд Гаусса).

$$470. x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}$$

(функция Бесселя $J_n(x)$).

$$471. x(x^4 - 1)u'' - (3x^4 - 1)u' + x^3u = 0,$$

$$u = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^2 x^8 + \left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^2 x^{12} + \dots; \quad |x| < 1.$$

$$472. x^2(x^4 - 1)v'' + 3x(3x^4 - 1)v' + (19x^4 - 1)v + 8x^3v = 0,$$

$$v = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 x^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 x^{12} + \dots; \quad |x| < 1.$$

473. Доказать равенство Гаусса:

$$\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^2 x^8 + \left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^2 x^{12} + \dots\right]^2 = \\ = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 x^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 x^{12} + \dots; \quad |x| < 1.$$

Способ Пикара нахождения интеграла уравнения $y' = \varphi(x, y)$, который при $x = a$ обращается в b , состоит в том, что составляется последовательно ряд функций y_0, y_1, y_2, \dots по формуле:

$$y_n = b + \int_a^x \varphi(x, y_{n-1}) dx; \quad y_0 = b.$$

Если $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, то y и есть искомый интеграл.

474. Доказать, что, применяя способ Пикара к уравнению $y' = y$, при $a = 0, b = 1$, получим:

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

475. Доказать, что в предыдущем примере $y_n \rightarrow y$, если $n \rightarrow \infty$ при произвольном выборе функции y_0 .

476. Доказать, что, заменив уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

системой уравнений

$$y' = u; \quad u' = -p(x)u - q(x)y$$

и применяя способ Пикара к решению этих уравнений, получим сходящийся процесс, если радиус-вектор из начала в точку x не проходит на комплексной плоскости переменного x ни через одну особую точку функций $p(x)$ и $q(x)$.

477. Решить уравнение $y' - y = axu$ по методу последовательных приближений, полагая $y_0 = 0$ и вычисляя величины y_n по формуле: $y'_n - y_n = axu_{n-1}$ (при $x = 0$ должно быть $y = C$).

478. Таким же путём решить уравнение

$$y'' + a^2y = \sigma xy,$$

где σ — малый параметр. При этом $y = 0$, $y' = a$ при $x = 0$. Полезно применить теорему: если $y'' + a^2y = f(x)$, то

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) dt.$$

479. Пользуясь подстановкой $x = n + \frac{1}{\sqrt{n}}$, показать, что интеграл уравнения $y'' + xy = 0$ в интервале $(n, n + \frac{1}{\sqrt{n}})$, где n велико, имеет приблизительно \sqrt{n} корней.

480. Доказать, что интеграл уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ в весьма удалённом от начала интервале $(a, a + b)$ имеет приблизительно $\frac{b}{\pi}$ корней.

481. Интеграл уравнения $y'' + y = \sigma y'^2$ имеет начальные условия: $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$. Найти три первых члена его разложения по степеням малого параметра σ .

482. Многочлены Чебышева-Эрмита: $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ удовлетворяют уравнению:

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

Подстановкой $H_n(x) = f(x) \cdot y$ преобразовать это уравнение к виду:

$$y'' + \left(-\frac{x^2}{4} + n + \frac{1}{2}\right)y = 0.$$

483. Найти асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$ для многочленов $H_n(x)$.

484. Найти при $0 < x < \pi$ интеграл уравнения

$$y'' + 4y = \pi x - x^2,$$

разложив его в ряд вида $\sum a_n \sin nx$. Краевые условия: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \pi$.

485. Найти интеграл уравнения $y^{IV} + y = \pi - |x|$ при $-\pi < x < \pi$ и краевых условиях $y' = y''' = 0$ для $x = \pm\pi$.

Численное интегрирование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ состоит в том, что по данному начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$, составляют таблицу значений y для значений x , равных числам $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$, где h — выбранное число, обычно довольно малое. Наиболее удобны методы численного интегрирования, основанные на применении разностей высших порядков от функции $u = hf(x, y)$. Для начала из уравнения $y' = f(x, y)$ находят несколько последовательных производных по формуле:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y} \cdot f(x, y).$$

Отсюда определяем величины $y_0', y_0'', y_0''', \dots$, т. е. значения этих производных при $x = 0$. После этого по формуле Тэйлора находим несколько значений y_0, y_1, y_2, \dots , т. е. значения y при $x = x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ По этим значениям x и y вычисляем $u_0(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y), \dots$, т. е. значения $u(x, y) = hy'$ в точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ По значениям $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ можно вычислить величины последовательных разностей разных порядков, а именно числа: $\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{n-1}; \Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \dots, \Delta^2 u_{n-2}; \Delta^3 u_0, \Delta^3 u_1, \dots, \Delta^3 u_{n-3}; \dots$ Формула Адамса-Штермера:

$$\Delta y_n = u_n + \frac{1}{2} \Delta u_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 u_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 u_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 u_{n-4} + \frac{1}{3} \Delta^5 u_{n-5} + \dots,$$

даёт возможность вычислить y_{n+1} . Зная x_{n+1} и y_{n+1} , можем вычислить величины $u_{n+1}, \Delta u_n, \Delta^2 u_{n-1}, \dots$ и т. д. Новое применение формулы Адамса даёт Δy_{n+1} и, следовательно, y_{n+2} и т. д.

В применениях стараются подобрать величину h настолько малой, чтобы разностями высоких порядков можно было пренебречь.

486. Составить таблицу значений y через 0,05, если $y' + 2xy = 0$ и $y = 1$ при $x = 0$. При этом значения $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2$ вычислить с помощью разложения в ряд, в формуле Адамса удерживать члены до третьих разностей, а вычисления вести до шестого знака после запятой.

487. Найти по методу Адамса-Штермера при $x = 2$ интеграл уравнения $y' = x + y$, обращающийся в единицу при $x = 1$; при этом пользоваться формулой для Δy , взятой до четвёртых разностей включительно, и вести вычисление до пятого знака.

488. Найти таблицу значений интеграла уравнения:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{для } x = 0; 0,1; 0,2; \dots, 1,$$

если при $x = 0$ $y = 0$.

Указание. Разложение y в начале имеет вид:

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7} x^2 + \frac{1}{49} \sqrt{\frac{2}{3}} x^{\frac{9}{4}} + \dots$$

Выгодно ввести новую переменную, положив: $x = \xi^4$.

489. Составить таблицу значений функций $\sin x$ и $\cos x$ через 0,1 от 0 до 1, пользуясь уравнениями: $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$ и применив метод Адамса-Штермера.

490. Составить таблицу значений функций Бесселя $J_0(x)$ и $J'_0(x)$ для значений x через одну десятую от нуля до единицы, при этом уравнение для $J_0(x)$, имеющее вид

$$xJ''_0(x) + J'_0(x) + xJ_0(x) = 0,$$

заменить системой

$$xv' + v + xu = 0; u' = v.$$

Для уравнений второго порядка вида: $y'' = f(x, y, y')$, можно пользоваться формулами:

$$\Delta^2 y_{n-1} = h^2 f_n + \frac{1}{12} \Delta^2 h^2 f_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 h^2 f_{n-3} + \frac{19}{240} \Delta^4 h^2 f_{n-4} + \frac{3}{40} \Delta^5 h^2 f_{n-5},$$

$$\Delta y_n = h y'_n + \frac{h^2}{2} f_n + \frac{h^2}{6} \Delta f_{n-1} + \frac{h^2}{8} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{19h^2}{180} \Delta^3 f_{n-3} + \frac{3h^2}{32} \Delta^4 f_{n-4},$$

$$\Delta y'_n = h f_n + \frac{h}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8} h \Delta^3 f_{n-3} + \frac{251}{720} h \Delta^4 f_{n-4}.$$

491. Составить таблицу значений через 0,1 в интервале (0,1) функции $y = \operatorname{ch} x$, удовлетворяющей уравнению $y'' = y$ и начальным условиям: при $x = 1$ $y = 1$, $y' = 0$.

492. Составить таблицу значений функции $J_0(x)$ для значений x , идущих через 0,1 в интервале (0,1), зная, что $J_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$xJ''_0(x) + J'_0(x) + xJ_0(x) = 0,$$

и начальные её значения при $x = 0$: $J_0(0) = 1$, $J'_0(0) = 0$.

493. Зная величины:

$\cos 1 = 0,54030$; $\cos 1,1 = 0,45360$; $\cos 1,2 = 0,36236$; $\cos 1,3 = 0,26750$; $\cos 1,4 = 0,16997$ с помощью уравнения $y'' = -y$, найти значения $\cos x$ при $x = 1,5$; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Уравнения Коши-Римана

В дальнейшем приняты такие обозначения: $z = x + iy = re^{i\varphi}$ — независимое переменное, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$ — модуль z , $\varphi = \operatorname{arg} z$ — аркус z . Величина, сопряжённая с z , будет обозначаться через \bar{z} , т. е.

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}.$$

Для функции $w = f(z)$, аналитической или регулярной в области S , имеется равенство $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где вещественные функции u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь ими, можно найти одну из функций с точностью до постоянного интегрирования, если известна другая. При этом, если дана функция $u(x, y)$, то можно, например, пользоваться интегралом:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по следующим условиям:

494. $u = x^2 - y^2 + xy$; $w(0) = 0$.

495. $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; $w(0) = 0$.

496. $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $w(2) = 0$.

497. $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$; $w(0) = 0$.

498. $u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$.

499. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ — некоторая функция.

500. $u = F(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. 501. $v = f(x^2 + y^2)$.

502. Доказать, что уравнение $u(x, y) = C$ может изображать семейство линий равного потенциала только в том случае, если отношение величин

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

есть функция только одного u .

503. Доказать, что кривые $x^n + y^n = C$ могут быть линиями равного потенциала только при $n = 1$ и при $n = 2$.

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по условиям:

504. Линии $\operatorname{Re} w(z) = c$ — окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

505. Линии $|w(z)| = c$ — окружности $x^2 + y^2 = ax$.

506. Линии $|w(z)| = c$ — лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

507. Линии $\operatorname{arg} w(z) = c$ — окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

508. Доказать равенство:

$$\frac{\partial^2 |w(z)|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |w(z)|}{\partial y^2} = \frac{|w'(z)|^2}{|w(z)|}.$$

509. Функция $w = f(z)$ регулярна в односвязной области, ограниченной кривой $|w(z)| = c$. Показать, что $\operatorname{arg} w$ изменяется монотонно, если z пробегает кривую $|w(z)| = c$ в положительном направлении.

§ 2. Особые точки функции

Ряд Тэйлора и Маклорена

Найти особые точки функций:

510. $\frac{z}{z^2 + 1}$. 511. $\frac{1}{z - z^3}$. 512. $\frac{1}{\sin z}$. 513. $\frac{1}{ez - 1} - \frac{1}{z}$.

514. $\sin \frac{1}{z}$. 515. $\sqrt{1 - z^2}$. 516. $\sqrt{1 - z^3}$.

517. Построить линии равного модуля и равного аркуса для функции $w = e^{\frac{1}{z}}$.

518. Показать, что при любом $A \neq 0$ уравнение $e^{\frac{1}{z}} = A$ в любой данной окрестности точки $z = 0$ имеет бесчисленное множество корней.

519. Показать, что в той же области уравнение $\cos \frac{1}{z} = A$ имеет бесконечное множество корней при любом значении A .

520. Изучить изменение $\operatorname{arg} \sqrt[n]{z - a}$, если точка z описывает простой замкнутый контур, обходящий точку $z = a$ в положительном направлении.

521. Изучить изменение функции $\sqrt{1 - z^2}$, если точка z описывает простой замкнутый контур одного из трёх видов:

- обходящий одну из точек $z = \pm 1$,
- обходящий обе эти точки,
- оставляющий эти точки вне контура.

522. Найти в точке $z = -e$ значение функции $w = z^z = e^{z \ln z}$, если $\ln 1 = 0$ и если w изменяется непрерывным образом при движении z в верхней полуплоскости или при движении в нижней полуплоскости.

523. Найти при $z = e^{-\varphi i}$ значение той ветви функции $\sqrt{z - e^{\varphi i}}$, которая при $z = 0$ имеет значение $ie^{\frac{\varphi i}{2}}$ и которая непрерывно продолжается при движении z вдоль по радиусу из начала координат в точку $z = e^{-\varphi i}$.

524. В плоскости z проведён разрез по линиям: $y = 0$, $|x| > 1$ и $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$; функция $\ln(1 - z^2)$ равна нулю при $z = 0$. Найти её значение при $z = 3$.

525. Показать, что функция $w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ однозначна в плоскости с надрезами по вещественной оси при $-\infty < x < -1$ и $1 < x < \infty$. Найти значения w при $z = +i$ и $z = -i$, исходя из условия, что на верхнем краю правого надреза w положительна.

Пользуясь разложением в ряд для $\frac{1}{\cos z}$ и $z \operatorname{ctg} z$, доказать равенства:

$$526. \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \quad |z| < \frac{\pi}{2};$$

E_n — числа Эйлера ($E_0 = 1$).

$$527. \operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n}{(2n)!} z^{2n-1}; \quad |z| < \frac{\pi}{2};$$

B_n — числа Бернулли.

$$528. \frac{z}{\sin z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-2) B_n}{(2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \pi.$$

$$529. \ln \frac{\sin z}{z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n (2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \pi.$$

$$530. \ln \cos z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} (2^{2n}-1) B_n}{n \cdot (2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Найти первые шесть коэффициентов в разложении функций и определить области сходимости этих рядов.

$$531. w_1 = \frac{z}{\ln(1+z)}; \quad w_2 = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}.$$

532. Разложить в ряд по степеням z ту ветвь функции $\sqrt{z+i}$, значение которой при $z=0$ равно $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

533. Найти круг сходимости для разложения по степеням z для функций $\frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z}$ и $\frac{\cos 2\pi z^2}{\cos \pi z}$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных областях:

$$534. \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} \text{ при } 1 < |z| < 2.$$

$$535. \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2} \text{ при } 1 < |z| < 2.$$

$$536. \text{ То же при } |z| > 2.$$

$$537. \operatorname{ctg} z \text{ при } |z| < \pi \text{ и при } \pi < |z| < 2\pi.$$

538. $\frac{1}{z-2} \ln \frac{z-i}{z+i}$ при $1 < |z| < 2$, считая при $z=2i$ величину логарифма вещественной.

$$539. \text{ То же при } |z| > 2.$$

$$540. z^5 e^{\frac{1}{z}}. \quad 541. e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Доказать теоремы:

542. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет на краю круга сходимости лишь одну особую точку, а именно полюс порядка m , то справедливо равенство: $a_n = \frac{A n^{m-1}}{z_0^n} [1 + \varepsilon(n)]$, где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, A — постоянная, z_0 — полюс.

543. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$ равен единице, а особые точки на круге сходимости лишь полюсы, порядок которых не больше, чем m , то коэффициенты ряда не превосходят $A n^{m-1}$, где A — постоянная.

544. Если у ряда $\sum a_n z^n$ все $a_n \geq 0$, а радиус круга равен 1, то $z=1$ является особой точкой. (Доказательство от противного, основанное на разложении суммы ряда по степеням $z-a$, где $0 < a < 1$.)

545. Если радиус сходимости рядов $\sum a_n z^n$ и $\sum \operatorname{Re} a_n \cdot z^n$ равен 1 и все $\operatorname{Re} a_n \geq 0$, то точка $z=1$ — особая точка для сумм этих рядов.

§ 3. Вычеты и их применения

Найти вычеты следующих функций в указанных точках:

$$546. \frac{1}{z^3 - z^5} \text{ в точках } z=0, z=\pm 1.$$

$$547. \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \text{ в точках } z=\pm i.$$

$$548. \frac{z^{2n}}{(z+1)^n} \text{ в точках } z=-1 \text{ и } z=\infty.$$

$$549. e^z \ln \frac{z-a}{z-\beta} \text{ в точке } z=\infty.$$

Вычислить интегралы от следующих функций по указанным кривым, беря обход против часовой стрелки:

$$550. \int \frac{dz}{z^4 + 1} \text{ вдоль окружности } x^2 + y^2 = 2x.$$

$$551. \int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} \text{ вдоль окружности } x^2 + y^2 = 2x + 2y.$$

$$552. \int \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2} \text{ по астройде } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

$$553. \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}; |a| < 1, |b| < 1.$$

$$554. \int \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)} \text{ по окружности } |z| = r \neq 1.$$

$$555. \int \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} \text{ по окружности } |z| = 2.$$

556. $\int \frac{z^2 dz}{e^{2\pi iz^3} - 1}$ по краю полуокружности $|z| = R$, при условиях $n < R^3 < n + 1$, где n — целое число.

557. Найти интеграл $\int \frac{dt}{(z^4 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}$, взятый по параболе $x = y^2$ в направлении возрастающих y , считая, что значение $\sqrt{z^2 + 1}$ равно единице при $z = 0$.

558. При каком соотношении между a и b будет однозначна функция

$$\int_0^t \frac{at \sin t + b \cos t}{t^2} dt.$$

Вычислить интегрированием по контуру следующие интегралы:

$$559. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx. \quad 560. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

$$561. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}. \quad 562. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)}.$$

$$563. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1 + x^{2n}}; m < n.$$

$$564. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + a}; a > 1 \text{ (положить } z = e^{i\varphi}\text{)}.$$

$$565. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi d\varphi}{1 - 2p \cos \varphi + p^2}; |p| < 1.$$

$$566. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1 - 2p \cos 2\varphi + p^2}; |p| < 1.$$

$$567. \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x - a) dx; \operatorname{Im} a \neq 0.$$

568. Доказать равенство $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_C e^{miz} Q(z) dz = 0$, где C — полуокружность: $z = re^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq \pi$; $m > 0$, а функция $Q(z)$ равномерно стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ в угле $0 \leq \varphi \leq \pi$ и регулярна в верхней полуокружности.

Вычислить интегралы:

$$569. I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z - ir} dz; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz} dz}{z + ir}; \quad \operatorname{Re} r > 0; \quad a > 0.$$

$$570. \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{x^2 + r^2}. \quad 571. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + r^2} dx. \quad 572. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$573. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^4} dx; \quad a > 0. \quad 574. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x(x^2 + b^2)}; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$575. \text{Исходя из равенства } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \text{ доказать формулы}$$

для интегралов Френеля:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказать равенства:

$$576. \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-ix} dx = \Gamma(s) e^{-\frac{\pi s}{2}}; \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

$$577. \int_0^{\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}; \quad n > 1.$$

$$578. \int_0^{\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}; \quad |n| > 1.$$

$$579. \int_0^{\infty} \frac{\sin x^n dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}; \quad 0 < \frac{1}{n} < 2.$$

$$580. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \Gamma(s) z^{-s} ds = e^{-z}; \quad a > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(Воспользоваться теоремой:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left[\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s + s - \frac{1}{2} \ln 2\pi \right] = 0,$$

если s находится направо от любой данной вертикальной прямой.)

$$581. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a > 0.$$

$$582. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s^2} ds = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a > 0.$$

$$583. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)} ds = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2}, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a > 0.$$

$$584. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{i\varphi}) - f(e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{2} f(1) - \int_0^1 \frac{f(ix) + f(-ix)}{1+x^2} dx,$$

если $f(x)$ голоморфна в правой половине круга $|z| < 1$.

$$585. \int_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$$

$$586. \int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2 \sin x}{x^2 + a^2} \frac{dx}{x} = \pi \left(e^{-a} - \frac{1}{2} \right); \quad a > 0.$$

Пользуясь контуром, который целиком или частью состоит из краёв разреза вдоль положительной или отрицательной части OX и окружностей вокруг начала радиусов $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, доказать равенства:

$$587. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi p}; \quad 0 < p < 1.$$

$$588. \nu \cdot p \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1-x} = \pi \operatorname{ctg} a\pi; \quad 0 < a < 1,$$

$$\text{где } \nu \cdot p \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1-x} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\sigma} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx + \int_{1+\sigma}^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1-x} \right].$$

$$589. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \pi [\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi] \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1.$$

$$590. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum \lambda_\nu e^{a_\nu x} dx}{1 - e^x} = \pi \sum \lambda_\nu \operatorname{ctg} \pi a_\nu; \quad 0 < a_\nu < 1; \quad \sum \lambda_\nu = 0.$$

$$591. \int_0^{\infty} \frac{x^{-p} dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\pi}{\sin \pi p} \cdot \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda}; \quad -1 < p < 1; \quad -\pi < \lambda < \pi.$$

Получить при $-1 < p < 2$ следующие равенства, пользуясь контуром, в состав которого входит разрез по оси OX между точками $z=0$ и $z=1$, дополненный кружками радиуса $\rho \rightarrow 0$ вокруг этих точек.

$$592. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi p(1-p)}{8 \sin \pi p} \cdot 2^p.$$

$$593. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left[2^{\frac{p}{2}} \cos \frac{\pi p}{4} - 1 \right].$$

$$594. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(a+x)^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left[\frac{1+a-p}{a} \left(\frac{1+a}{a} \right)^{p-1} - 1 \right].$$

$$595. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} [1+p-2^p].$$

$$596. \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left[\sin \frac{\pi p}{2} + \cos \frac{\pi p}{2} - 1 \right].$$

Доказать равенства:

$$597. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2}; \quad a > 0.$$

$$598. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)[\ln^2 x + (2n + 1)^2 \pi^2]} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2n + 1} \frac{\pi}{2a} \sum_{k=-n}^n \frac{4k + 1}{[\ln^2 a + (4k + 1)^2 \frac{\pi^2}{4}]} - \frac{1}{1 + a^2} \right\}.$$

$$599. \int_0^{\infty} x^{a-1} \varphi(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2a\pi i}} \sum \text{Res } z^{a-1} [\varphi(z)],$$

где $\sum \text{Res } z^{a-1} [\varphi(z)]$ означает сумму вычетов функции $z^{a-1} \varphi(z)$, взятую по всем полюсам рациональной функции $\varphi(z)$. Предполагается, что $\varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

$$600. \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln^2 x + \pi^2} dx = \sum \text{Res} \frac{[\varphi(z)]}{\ln z - \pi i},$$

где $\varphi(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на положительной вещественной оси, $z \varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и $\ln z$ соответствует изменению $\arg z$ от 0 до 2π .

Доказать теоремы:

601. Если $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится, а $f(z)$ — мероморфная функция, регулярная при всех целых z , и существует последовательность контуров $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, удаляющихся по всем направлениям в бесконечность при $n \rightarrow \infty$ так, что

$$\int_{C_n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz \rightarrow 0, \quad (*)$$

то справедливо равенство:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum \text{Res } \operatorname{ctg} \pi z [f(z)],$$

где $\sum \text{Res } \varphi(z) [f(z)]$ означает сумму вычетов функции $\varphi(z) f(z)$, взятую по полюсам $f(z)$.

602. При подобных же условиях, где вместо (*) дано условие:

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} dz \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

справедливо равенство:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum \text{Res} \frac{\pi}{\sin \pi z} [f(z)].$$

Доказать равенства:

$$603. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi a}{b}.$$

$$604. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a.$$

$$605. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \pi a}.$$

$$606. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi a n} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a}}.$$

$$607. \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \frac{3}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} - \dots = \frac{1}{8\pi}.$$

608. Полагая по определению

$$f(u) = \int_{\gamma} \frac{e^{-\pi iz^2 + 2\pi iuz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} dz,$$

где интегрирование идёт снизу вверх по всей прямой $x+y = \frac{1}{2}$, проверить тождество:

$$f(u+1) - f(u) = e^{\pi i \left(u + \frac{1}{2}\right)^2} \int_{\gamma} e^{-\pi iz^2} dz.$$

609. Передвинув в предыдущей задаче контур интегрирования на прямую $x+y = -\frac{1}{2}$, доказать равенство:

$$f(u) = e^{-2\pi iu} f(u+1) + 1.$$

610. Доказать, что $\int_{\gamma} e^{-\pi iz^2} dz = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ и, пользуясь предыдущими результатами, вывести формулу Римана:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-\pi iz^2 + 2\pi iuz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} dz = \frac{e^{\pi iu} - e^{\pi iu^2}}{e^{\pi iu} - e^{-\pi iu}}.$$

611. Рассмотреть интеграл от функции $\frac{e^{\frac{2\pi iz^2}{n}}}{1 - e^{2\pi iz}}$, где n — целое положительное, по краю области

$$0 < x < \frac{n}{2}; \quad -\omega < y < \omega; \quad |z| > \rho; \quad \left| z - \frac{n}{2} \right| > \rho.$$

Предельным переходом, при $\rho \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, получить формулу для суммы Гаусса:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i \nu^2}{n}} = \frac{1 + (-i)^n}{1-i} \cdot \sqrt{n}.$$

§ 4. Распределение нулей функции

По теореме Руше, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные внутри контура, имеют там одинаковое число нулей, если на контуре $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)|$. Пользуясь этим, найти число корней, лежащих в круге $|z| < 1$, для следующих уравнений:

612. $z^4 - 5z + 1 = 0$.

613. $z^6 - 6z + 10 = 0$.

614. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$.

615. $z = \varphi(z)$, где $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| \leq 1$.

Сколько корней в каждом квадранте имеют уравнения:

616. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$.

617. $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$.

Доказать следующие утверждения:

618. При $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ в полуплоскости $x > 0$ имеет единственный и притом вещественный корень.

619. $z = ae^z$ имеет при $0 < a < \frac{1}{e}$ лишь один корень в круге $|z| \leq 1$.

620. Уравнение $z^2 = ae^z$, где $0 < a < \frac{1}{e}$, в круге $|z| < 1$ имеет два корня. Они вещественны и разных знаков.

621. Уравнение $1 + z + az^n = 0$, где n — целое число, большее единицы, имеет в круге $|z| \leq 2$, при любом a , по крайней мере один корень.

622. Уравнение $z = \operatorname{tg} z$ имеет только вещественные корни — трёхкратный корень $z = 0$ и корни $z_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \rho_n$, где $\rho_n > 0$, $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

623. Уравнение $\operatorname{ch} z \cos z = 1$ имеет четырёхкратный корень $z = 0$ и корни вида $\pm r_n$, $\pm ir_n$, $r_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + (-1)^{n-1} \rho_n$, где $\rho_n > 0$ и $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

624. Если последовательность функций $\{f_n(z)\}$, регулярных в области G , равномерно сходится внутри этой области к некоторой функции $f(z) \not\equiv 0$, то каждый нуль функции $f(z)$ является пределом соответствующих нулей функций $f_n(z)$.

625. Если, в условиях предыдущей задачи, функция $f(z)$ имеет внутри области G нуль $z = z_0$ кратности m , то можно указать постоянные $\rho_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что коль скоро на границе области G выполняется соотношение $|f_n(z) - f(z)| < \rho < \rho_0$, то функция $f_n(z)$ имеет в круге $|z - z_0| < C \sqrt[m]{\rho}$ ровно m нулей.

626. Если $\text{Im } z_\nu > 0$, а $\prod_{\nu=1}^n (z - z_\nu) = \varphi(z) + i\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, то корни этих многочленов будут вещественными, простыми и перемежающимися.

627. При тех же условиях и при $a > 0$ такими же свойствами обладают и корни уравнений:

$$\varphi(z) \sin az + \psi(z) \cos az = 0, \quad \varphi(z) \cos az - \psi(z) \sin az = 0.$$

628. Число корней вещественного тригонометрического многочлена $\sum_{\nu=m}^n (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$, в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ не меньше $2m$ и не больше $2n$.

У к а з а н и е. Рассмотреть многочлен $P(z) = \sum_{\nu=m}^n (a_\nu - ib_\nu) z^\nu$.

629. При $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ легко доказать умножением на $1 - z$, что многочлен $\sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ не имеет корней в области $|z| \geq 1$. Пользуясь этим, показать, что тригонометрический многочлен $\sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu\varphi$, с теми же a_ν , имеет в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ ровно $2n$ различных корней (так же, как и многочлен $\sum_{\nu=1}^n a_\nu \sin \nu\varphi$).

630. Пусть при $0 < t < a$ функция $f(t) > 0$ и не убывает, а интеграл $\int_0^a f(t) dt$ имеет смысл; требуется доказать, что целая функция $f(z) = \int_0^a f(t) \cos zt dt$ имеет только вещественные нули (теорема Поля).

631. Доказать, что при тех же условиях и при $b > 0$ целые функции

$$\varphi(z) = \int_0^a f(t) \cos t(z + b) dt; \quad \psi(z) = \int_0^a f(t) \sin z(t + b) dt$$

тоже имеют только вещественные нули.

632. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leq r$ и имеет там корни a_1, a_2, \dots, a_n , отличные от нуля и не расположенные на окружности $|z| = r$. Соединяя каждый из нулей a_ν разрезом с окружностью $|z| = r$

и интегрируя по полученному контуру соответствующую функцию, доказать формулу Иенсена:

$$\ln f(0) + \sum_{v=1}^n \ln \frac{r}{|a_v|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

633. Доказать, что если в условиях предыдущей задачи максимум $|f(z)|$ равен M , $|f(0)| = m$ и N — число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leq \frac{r}{e}$, то

$$N \leq \ln \frac{M}{m}.$$

634. Доказать теорему: корни функции

$$f(z) = Ae^{ax} + Be^{bx} + \dots + Me^{mx},$$

где $a > b > \dots > m$, а числа A и M отличны от нуля, расположены в полосе $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, а N — число их в прямоугольнике $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, $0 < \operatorname{Im} z < T$ — выражается формулой:

$$N = \frac{a-m}{2\pi} \cdot T + O(1),$$

где $O(1)$ ограничено при $T \rightarrow \infty$.

§ 5. Разложение функций на простейшие дроби и в бесконечные произведения

Доказать справедливость следующих разложений в ряд дробей, имеющих место во всех точках, где разлагаемые функции регулярны.

$$635. \operatorname{ctg}(z-a) + \operatorname{ctg} a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a-n\pi} + \frac{1}{a+n\pi} \right).$$

$$636. \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad 637. \frac{1}{\cos z} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{z^2 - (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}.$$

$$638. \frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left[z - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right]^2}.$$

$$639. \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} - n \right)^2}.$$

$$640. \frac{eaz}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z \cos 2\pi na - 4\pi n \sin 2\pi na}{z^2 + 4n^2\pi^2}; \quad 0 < a < 1.$$

$$641. \frac{\sin az}{\sin \pi z} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot \sin na}{z^2 - n^2}; \quad -\pi < a < \pi.$$

$$642. \frac{\operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z \cos na}{z^2 + n^2}; \quad -\pi \leq a \leq \pi.$$

$$643. \frac{1}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z} = \frac{1}{4z^2} + 4\pi z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi n} \cdot \frac{1}{4z^4 + n^4 \pi^4}.$$

$$644. \frac{z \sin z}{\sin z - z \cos z} = \frac{3}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda_n = \lambda_n > 0.$$

Доказать справедливость следующих разложений в бесконечные произведения:

$$645. \cos \frac{\pi z}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2} \right].$$

$$646. \frac{\sin(z-a)}{\sin a} = e^{-z \operatorname{ctg} a} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a + n\pi} \right) \cdot e^{\frac{z}{a + n\pi}}.$$

$$647. \cos \pi z - \cos \pi a = \\ = -\frac{\pi^2}{2} (z^2 - a^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z+a}{2n} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{z-a}{2n} \right)^2 \right].$$

$$648. e^z - e^a = e^{\frac{z+a}{2}} \cdot (z-a) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z-a}{2n\pi} \right)^2 \right].$$

$$649. \operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4} \right).$$

$$650. \sin z - z \cos z = \frac{z^2}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right); \quad \operatorname{tg} \lambda_n = \lambda_n > 0.$$

$$651. \frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z-z^2}{n+n^2} \right).$$

$$652. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad |a| > 1; \quad \prod_{v=1}^n (a^v - 1) = \frac{(-1)^n}{c_n}.$$

$$653. \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^v}{(3v)!} = \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{8r_v^3} \right). \\ 2 \cos r_v \sqrt[3]{3} + e^{-3r_v} = 0, r_v > 0.$$

654. При $\operatorname{Re} s > 0$ для гамма-функции Эйлера существует представление в виде интеграла $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$. Легко доказать, что

при $0 < x < n$ справедливы формулы:

$$e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}.$$

Пользуясь этим, доказать данное Эйлером представление $\Gamma(s)$ в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n^s}{s(s+1) \dots (s+n)}.$$

655. Пользуясь предыдущим, а также формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right] = C,$$

где C — постоянная Эйлера, доказать формулу Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{Cs} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{v}\right) e^{-\frac{s}{v}}.$$

Доказать равенства:

$$656. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

$$657. \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right).$$

$$658. \left[\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right]' = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(s+v)^2}.$$

$$659. \ln s\Gamma(s) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - C\right)s + \\ + \ln \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-1)^v s^v}{v} \sigma_v,$$

где $\sigma_v = \frac{1}{5^v} + \frac{1}{6^v} + \frac{1}{7^v} + \dots$

$$660. \lg_{10} x\Gamma(x) = \lg_{10} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)} + \\ + 0,65409856 x \quad - 0,00005089 x^5 \\ + 0,04805967 x^2 \quad + 0,00000740 x^6 \\ - 0,00353152 x^3 \quad - 0,00000116 x^7 \\ + 0,00038775 x^4 \quad + 0,00000019 x^8 \\ - 0,00000003 x^9$$

• • • • •

Здесь $|x| < 5$.

661. Из Эйлеровского произведения для $\Gamma(s)$ следует, что

$$S = - \sum_{\nu=0}^m \ln(s + \nu) + \ln m! + s \ln m \rightarrow \ln \Gamma(s).$$

Если множитель -1 , имеющийся в сумме, заменить по формуле $-1 = \left(s + \nu - \frac{1}{2}\right) - \left(s + \nu + \frac{1}{2}\right)$, то легко получить равенства:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\nu=0}^m \left[\left(s + \nu + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right] + \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - \\ &\quad - \left(s + m + \frac{1}{2}\right) \ln(s + m + 1) + \ln m! + s \ln m + m + 1 = \\ &= \sum_{\nu=0}^m \left[\left(s + \nu + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right] + \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \\ &\quad + m + \ln m! - m \ln m - \frac{1}{2} \ln m + \frac{M}{m}, \end{aligned}$$

где M ограничено при $m \rightarrow \infty$.

Пользуясь сказанным, получить ряд Гудермана:

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + A + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(s + \nu + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right],$$

где A — соответствующая постоянная, а равенство справедливо при всех s , отличных от чисел: $0, -1, -2, -3, \dots$

662. Применяя разложение $\cos \frac{\pi z}{2}$ в бесконечное произведение, доказать формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \right]^2 \cdot (2n+2),$$

а пользуясь ею, доказать, что постоянная A в ряду Гудермана равна $\ln \sqrt{2\pi}$.

663. С помощью ряда Гудермана доказать, что

$$\ln \Gamma(s) - \left[\left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s \right] \rightarrow \ln \sqrt{2\pi},$$

если расстояние точки s до отрицательной части вещественной оси безгранично растёт, а $\operatorname{Re} s$ ограничена снизу.

664. Доказать справедливость разложения:

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{x+n}; \quad a > 0.$$

§ 6. Другие разложения в ряды

Некоторые из дальнейших задач решаются с помощью теоремы о ряде Лагранжа. В силу этой теоремы, если в области S расположена точка $z = a$, а на контуре имеется неравенство $|tf(z)| < |z - a|$, то уравнение относительно z

$$z = a + tf(z)$$

имеет в этой области единственный корень, представляющий функцию t . Если $F(z)$ — функция этого корня, регулярная в S , то имеет место разложение (ряд Лагранжа):

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{F'(a)[f(a)]^n\}^{(n-1)} t^n}{n!}.$$

В частности, например:

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{[f(a)]^n\}^{(n-1)}}{n!} t^n.$$

В следующих задачах разложить по возрастающим степеням w тот корень уравнения в z , который обращается в 0 при $w = 0$.

665. $w = 2z + z^2$.

666. $w = ze^{-z}$.

667. $(1 - z^2)w = 2z$.

668. $(z^{m+1} - b)w = -z$.

669. Разложить e^z по возрастающим степеням w , если

$$(z + 1)^2 w = z.$$

670. Найти подобное же разложение для e^{-z} , где $zw = z - a$.

671. Разложить в ряд по степеням эксцентриситета e эллиптической орбиты эксцентрическую аномалию E , связанную с средней аномалией M уравнением Кеплера:

$$E = M + e \sin E.$$

Алгебраические функции удовлетворяют уравнению: $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен относительно комплексных переменных x и y . Если обе эти переменные остаются вещественными, то написанное уравнение изображает алгебраическую кривую. Если уравнение имеет степень n относительно y , то оно определяет n ветвей y_1, y_2, \dots, y_n многозначной функции от x . Они представляют регулярные функции от x в области, где их значения конечные и неравные. Если x_0 — точка, лежащая в такой области, то каждая из функций y , разлагается по целым степеням $x - x_0$. Если же в точке x_0 несколько из y , равны, то в окрестности этой точки функции y , разлагаются по дробным степеням $x - x_0$ по формуле:

$$y = \sum_{\mu = \mu_0}^{\infty} a_{\mu} (x - x_0)^{\frac{\mu}{m}},$$

где число μ_0 может быть и отрицательным, а m не превосходит n . Значения a , можно найти подстановкой этих рядов в уравнение. Сами особые точки могут быть найдены из уравнений:

$$f(x, y) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Найти особые точки следующих уравнений:

$$672. \quad y^3 - 3y + 2x = 0.$$

$$673. \quad y^3 - 3y^2 + x^6 = 0.$$

$$674. \quad y^3 - 3y + 2x^2(2 - x^2) = 0.$$

$$675. \quad y^3 - 3y + 2x^3(2 - x^3) = 0.$$

Найти первые два члена в разложении y по возрастающим степеням x для проходящих через начало ветвей следующих кривых:

$$676. \quad x^3 - 3xy + y^3 = 0. \quad 677. \quad y^4 - 4y = x.$$

$$678. \quad y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$$

$$679. \quad 4(x-1)y^5 + 2xy^3 - 3x^3y + x^4 = 0.$$

Доказать теоремы:

680. Функция $f(z)$, регулярная внутри эллипса с фокусами $z = \pm 1$ и контуром C , разлагается в этом эллипсе в ряд:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n - (z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z - \sqrt{z^2 - 1})^n dz; \quad |z + \sqrt{z^2 - 1}| \geq 1.$$

681. При тех же условиях справедливо разложение:

$$f(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n],$$

где

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} dz.$$

По теореме Коши для функции $f(x)$, удовлетворяющей в интервале $a < x < b$ условиям Дирихле внутри этого промежутка, имеет место разложение:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)}{\psi'(\lambda_n)} e^{\lambda_n x} \int_a^b e^{-\lambda_n \mu} f(\mu) d\mu.$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые функции, нули функции $\psi(z)$ простые и равны числам λ_n , а при $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ справедливы равенства:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi(re^{i\theta}) - \varphi(re^{i\theta})}{\psi(re^{i\theta})} e^{(x-a)re^{i\theta}} \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(-re^{i\theta})}{\psi(-re^{i\theta})} e^{(b-x)re^{i\theta}} \right] = 0.$$

682. Применяя разложение Коши при $\psi(z) = e^{\pi z} + 1$; $\varphi(z) = -1$, получить разложение:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)(x-\mu) \cdot f(\mu) d\mu; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

683. С помощью функций $\psi(z) = e^{az} - z$; $\varphi(z) = e^{az}$; $a > 0$, получить разложение:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{a\lambda_n - 1} e^{\lambda_n x} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-\lambda_n \mu} f(\mu) d\mu; \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2},$$

где λ_n — корни уравнения $z = e^{az}$.

684. Доказать равенство при прежних λ_n :

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n \operatorname{sh} \frac{a(1-\lambda_n)}{2}}{(a\lambda_n - 1)(1-\lambda_n)} e^{\lambda_n x}.$$

Доказать равенства для сумм следующих рядов аналитических функций:

685. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{z}{(1-z)^2}$ при $|z| < 1$ и $= \frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z| > 1$.

686. $\frac{1}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{z^{2n}-1} = 1$ при $|z| < 1$; или $= 0$ при $|z| > 1$.

687. $1 - z + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$; или $= \infty$ при $\operatorname{Re} z < 0$.

688. $1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^2(z^2-1)}{2!^2} - \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)}{3!^2} + \dots = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$

Найти область сходимости следующих рядов:

$$689. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z)(1+z^2)\dots(1+z^n)}. \quad 690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}.$$

$$691. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z+n)}{n} \right]^n. \quad 692. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1+a^{2n}z^2}; \quad |a| > 1.$$

693. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^2}, \quad m^2 + n^2 > 0,$$

рассматриваемая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, там регулярна и имеет вещественную ось существенной купурой.

694. Доказать, что функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{z - e^{2\pi ni} \sqrt{2}}$, регулярная при $|z| < 1$, не продолжается за окружность $|z| = 1$.

695. Доказать, что такой же особенностью отличаются ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n},$$

если $\sum_0^{\infty} a_n$ расходится.

696. Пусть a, b, c — числа, изображаемые тремя вершинами треугольника, а x, y, z — правильные дроби. Ряд:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^m y^n z^p}{\frac{ma+nb+pc}{m+n+p} - \zeta}, \quad m+n+p > 0,$$

представляет вне треугольника аналитическую функцию ζ , которая не продолжается внутри треугольника. Доказать, что, вопреки сказанному в книге Эрмита «Курс анализа», ряд сходится и внутри треугольника на повсюду плотном множестве точек.

Преобразование Абеля состоит в тождестве:

$$\sum_{v=1}^n a_v b_v = \sum_{v=1}^{n-1} s_v (b_v - b_{v+1}) + b_n s_n,$$

где $s_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v$.

Рядом Дирихле называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где a_n — коэффициент.

Обобщённым рядом Дирихле называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p_n^s}$, где $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — некоторая бесконечно возрастающая последовательность чисел.

Положим ещё $s = \sigma + i\tau$. Равенство $u = O(v)$ означает, что отношение $\left| \frac{u}{v} \right|$ остаётся ограниченным при бесконечном возрастании v .

У всякого ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ существует число s_0 такое, что ряд сходится при $s > s_0$ и расходится при $s < s_0$. Оно называется абсциссой сходимости.

Доказать теоремы:

697. Если общий ряд Дирихле сходится при $\sigma = \sigma_0$, то он сходится при любом s , у которого $\sigma > \sigma_0$.

698. Если для величины $A_n = \sum_{\nu=1}^n a_\nu$ имеется равенство $A_n = O(n^{\sigma_0})$, $\sigma_0 \geq 0$, то ряд Дирихле $\sum \frac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma > \sigma_0$, сходится абсолютно и равномерно при $\sigma > \sigma_0 + 1 + \delta$, где δ — любая положительная постоянная.

699. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma = \sigma_0 \geq 0$, то $A_n = O(n^{\sigma_0})$.

700. Верхний предел бесконечной последовательности чисел v_n обозначается через $\overline{\lim} v_n$. Он представляет наибольшую из точек сгущения последовательности v_n .

Нетрудно доказать теорему Прингсхейма, в силу которой у сходящегося ряда положительных убывающих слагаемых $\sum u_n$ должно выполняться условие $nu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь сказанным, доказать, что абсциссой сходимости общего ряда Дирихле $\sum p_n^{-s}$ является $\overline{\lim} \frac{\ln n}{\ln p_n}$.

§ 7. Производящие функции и специальные многочлены

Функция $\Phi(z, t)$ называется для функций $\varphi_n(z)$ производящей, если

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) t^n.$$

Если $\Phi(z, t)$ сравнительно проста, то из её свойств можно получить ряд свойств функций $\varphi_n(z)$.

Приводим примеры производящих функций для некоторых важных классов многочленов с указанием основных свойств этих многочленов, которые требуется доказать, пользуясь производящими функциями, а также и другими путями.

$$701. \quad t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{n!} t^n.$$

Здесь $\varphi_n(z)$ — многочлены Бернулли, для которых

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = nz^{n-1}.$$

При целом $z > 0$ имеем

$$\frac{1}{n} \varphi_n(z) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (z-1)^{n-1}.$$

$$702. \quad e^{-tz - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) t^n.$$

Здесь $H_n(z)$ — многочлены Чебышева-Эрмита, главнейшие свойства которых выражаются равенствами:

$$H_n(z) = \frac{1}{n!} e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{z^2}{2}}}{dz^n}; \quad H'_n(z) = -nH_{n-1}(z);$$

$$nH_n(z) + zH_{n-1}(z) + H_{n-2}(z) = 0; \quad H'_n(z) - zH'_n(z) + H_n(z) = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) H_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{m!}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$703. \quad \frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a)}(z) t^n.$$

Здесь $L_n^{(a)}(z)$ — обобщённые многочлены Чебышева-Лагерра. Их свойства:

$$L_n^{(a)}(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-a} \frac{d^n z^{n+a} e^{-z}}{dz^n},$$

$$nL_n^{(a)}(z) + (z - 2n - a + 1)L_{n-1}^{(a)}(z) + (n + a - 1)L_{n-2}^{(a)}(z) = 0,$$

$$z[L_n^{(a)}(z)]' + (a + 1 - z)[L_n^{(a)}(z)]' + nL_n^{(a)}(z) = 0,$$

$$\int_0^{\infty} z^a e^{-z} L_n^{(a)}(z) L_m^{(a)}(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \frac{\Gamma(a+n+1)}{n!} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

При $a=0$ получаются обычные многочлены Лагерра.

$$704. \quad \frac{2^{a+\beta}}{r} (1-t+r)^{-a} (1+t+r)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{a,\beta}(x) t^n;$$

$$r = \sqrt{1-2xt+t^2}.$$

$P_n^{\alpha, \beta}(x)$ — многочлены Якоби. Их свойства:

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n d^n (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}}{2^n \cdot n! dx^n}.$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} [P_n^{\alpha, \beta}(x)]^2 dx = \\ = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)};$$

$$(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) - \\ - \frac{1}{2}(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x + \\ + (\alpha^2 - \beta^2)] P_n^{\alpha, \beta}(x) + (n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) = 0. \\ (1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0; \\ y = P_n^{\alpha, \beta}(x).$$

$$705. \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра, которые получаются из многочленов Якоби при $\alpha = \beta = 0$.

$$706. \frac{4-t^2}{4-4tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n,$$

$T_0(x) = 1$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$ ($n = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева.

$$707. \frac{1}{1-2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n, \\ u_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2+1})^{n+1}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

$$708. \text{Используя разложение } (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(x)t^{\nu-1},$$

доказать для многочленов Лежандра равенство:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^n dt}{\sqrt{1-2t \cos \theta + t^2}},$$

где C — замкнутый контур, внутри которого обе особые точки подинтегральной функции.

709. Из предыдущего получить формулу Дирихле-Мелера:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt.$$

710. Пользуясь разложением $(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(x) t^{\nu-1}$, получить формулу Лапласа:

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (z + \sigma \sqrt{z^2 - 1})^n \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

711. Применяя производящую функцию и тождество

$$1 - 2t \cos \theta + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}),$$

доказать равенство:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[2 \cos n\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot 2 \cos(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \cdot 2 \cos(n-4)\theta + \dots \right].$$

§ 8. Конформные преобразования

Какие кривые описываются точкой z плоскости комплексного переменного, если z выражен через вещественную переменную t , меняющуюся от $-\infty$ до ∞ ? Коэффициенты a , b и ω — вещественные.

$$712. z = e^{(a+bi)t}. \quad 713. z = at + be^{i\omega t}.$$

$$714. z = ae^{it} + a^{-1}e^{-it}, \quad 715. z = a(1 + e^{it})^{-2}.$$

$$716. z = a(1 + it)e^{-it}.$$

Какие линии или области в плоскости переменного z определяются следующими условиями?

$$717. |z - 2| < |z|. \quad 718. |z - 1| \geq 2|z - i|.$$

$$719. |z^2 - 1| < 1. \quad 720. \operatorname{Im} z^{-1} = 2.$$

$$721. 0 < \operatorname{arg} \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}. \quad 722. |2z| < |1 + z^2|.$$

723. Показать, что все корни уравнения

$$(z - a)^n - K^n (z - b)^n = 0$$

лежат на одной окружности.

Показать, что следующие функции $w = f(z)$ отображают данные области плоскости $z = x + iy$ в указанные области плоскости $w = u + iv$.

724. $w = z^2$ — первый квадрант плоскости z в верхнюю полуплоскость w .

725. $w = e^z$ — полосу $0 < y < \frac{\pi}{2}$ в первый квадрант плоскости w .

726. $w = \ln z$ — область $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$ в полосу $u > 0$, $0 < v < \pi$.

727. $w = \cos z$ — полосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ в полуплоскость $v > 0$.

728. $w = \frac{1}{z+i}$ — полуплоскость $y \geq 0$ в круг $u^2 + v^2 + v \leq 0$.

729. $w = \frac{i-z}{i+z}$ — первый квадрант z в верхний полукруг $|w| < 1$.

730. Во что переходят линии $|z| = C$ и $\arg z = C$ и область $|z| > C > 1$; $a < \arg z < \pi - a$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$ при конформном преобразовании $2w = z + z^{-1}$?

731. Во что преобразуется верхняя полуплоскость z на плоскости w , если $\cos w = \operatorname{ch} a \cos z$ и при $z = \frac{\pi}{2}$ величина $w = \frac{\pi}{2}$.

732. Функция $w = \operatorname{arctg} z$ преобразует круг $|z| < 1$ на полосу в плоскости w . Найти ширину этой полосы.

733. На какую область отображается круг $|z| < 1$ функцией $w = a(nz - z^n)$, где $a > 0$, $n > 1$ — целое? Найти площадь этой области.

734. Функция $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ отображает некоторую область S_n в верхнюю полуплоскость. Найти S_n и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

735. Точка $w = \frac{a^2}{z}$ называется отражением точки z в окружности $|z| = a$. Найти отражение в этой окружности полуплоскости $\operatorname{Re} z > 2a$.

736. Доказать, что при дробно-линейном преобразовании $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$, точка и её отражение в окружности переходят в точку и её отражение в преобразованной окружности.

737. Доказать, что равенство

$$\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

даёт дробно-линейную подстановку, переводящую точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 .

738. Доказать, что круг $|z| < 1$ переходит в себя лишь при отображении, даваемом функцией: $w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где $|a| < 1$.

739. Найти условия, при которых дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость.

Найти функции, дающие следующие конформные отображения:

740. Круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\text{Im } w < 0$ так, чтобы точки $1, i, -i$ переходили в точки $w = +1, 0, -1$.

741. Того же круга в себя так, чтобы точки $z = -1, i, 1$ переходили в точки $w = -1, \frac{3i+4}{5}, 1$.

742. Двуугольника, ограниченного дугами окружностей, пересекающихся в точках $z = a, z = b$ под углом $\frac{\pi}{\alpha}$, на полуплоскость $\text{Im } w > 0$ так, чтобы точки $z = a, z = b$ переходили в $w = 0, w = \infty$.

743. Верхнего полукруга $|z| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ так, чтобы при $z = 0, 1, -1$ было $w = 0, 1, -1$.

744. Квадранта $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы при $z = 1 + i, 0$ было бы $w = 0, 1$.

745. Круга $|z| < 1$ на плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.

746. Плоскости с разрезом вдоль всей вещественной оси, кроме отрезка между точками a и b на область $\text{Im } w > 0$.

747. Плоскости с разрезом вдоль отрезка $a < z < b$ на $\text{Im } w < 0$.

748. Круга $|z| < 1$ с вырезом по отрезку $0 < z < 1$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

749. Полосы $0 < \text{Re } z < a$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

750. Области $|z-a| > a; |z-b| < b$, где $0 < a < b$ на полосу

$$0 < \text{Im } w < \pi.$$

751. Области $0 < a < |z| < b, 0 < \arg z < \pi$ на прямоугольник.

752. Области $|z-3| > 9; |z-8| < 16$ на кольцо между кругами: $\rho < |w| < 1$.

753. Внутренней области эллипса $4x^2 + 5y^2 = 20$ с разрезом между фокусами на внутренность кольца $1 < |w| < A$ и найти A .

754. Внутренней части параболы $y^2 = 4x$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

755. Внутренней части гиперболы

$$x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha \text{ на } \text{Im } w > 0.$$

756. Внутренности правой половины лемнискаты $z^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ на круг $|w| \leq 1$.

Следующие задачи связаны с интегралами Кристоффеля-Шварца. Полу-плоскость $\text{Im } z > 0$ может быть отображена в многоугольник с помощью функции

$$w = A \int_0^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1}, \dots, (z-l)^{\lambda-1} dz + B,$$

где A и B — постоянные, $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ — углы многоугольника, a, b, \dots, l — точки на оси OX .

Та же функция даёт отображение внутренности круга $|z| < 1$ на многоугольник с такими же углами, если точки a, b, \dots, l лежат на окружности $|z| = 1$. Чтобы многоугольник был замкнутый, должно выполняться условие: $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n - 2$, где n — число величин a, b, \dots, l . Если условие не выполнено, то получается отображение на область, расположенную по определённую сторону ломаной.

757. Доказать, что функция $w = \int_0^z z^{\frac{1}{3}-1} (1-z)^{\frac{1}{3}-1} dz$ отображает верхнюю полуплоскость z на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.

758. Доказать, что функция $w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ отображает круг $|z| < 1$ на квадрат со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

759. Доказать, что функция $w = \int_0^z (1-z^2)^{-\frac{1}{3}} (1+z^2)^{-\frac{2}{3}} dz$ отображает внутренность круга $|z| < 1$ на площадь ромба с углом 60° и со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$.

760. Доказать, что функция $w = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{1}{n}}}$ отображает внутренность круга $|z| < 1$ на площадь правильного n -угольника, длина стороны которого равна

$$\frac{2}{\pi n} \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

761. В какую область отображает внутренность круга $|z| < 1$ функция $\left(-1 < \lambda < 1 - \frac{2}{n}\right)$

$$w = \int_0^z \frac{(1+z^n)^\lambda}{(1-z^n)^{\frac{n}{2}+\lambda}} dz ?$$

Найти функции, дающие указанные конформные отображения:

762. Круга $|z| < 1$ на правильную пятиконечную звезду.

763. Того же круга на внешность правильного n -угольника.

764. Полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на ту же полуплоскость с разрезом между точками $w = 0$ и $w = i$.

765. Полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на плоскость с вертикальными разрезами от точек $w = n\pi$ вниз до бесконечности.

766. Круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с радиальным разрезом между точками $w = \frac{1}{2}$ и $w = 1$.

767. Плоскости с разрезом по оси OX от точки $z = 1$ до ∞ на круг $|w| < 1$.

§ 9. Принцип максимума модуля

768. Применяя интеграл Коши к функции $[f(z)]^n$, где n — целое и $\rightarrow \infty$, доказать теорему: если $f(z)$ регулярна внутри контура C , а на контуре справедливо неравенство $|f(z)| \leq M$, то оно остаётся в силе и внутри контура.

Доказать теоремы:

769. Если $f(z)$ регулярна внутри круга $|z| \leq R$, причём $|f(z)| < M$, а $f(0) = 0$, то при $|z| < R$ выполняется неравенство $|f(z)| < \frac{M}{R} \cdot |z|$, в котором равенство хотя бы в одной точке возможно только тогда, когда $f(z)$ имеет вид $f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z$ (лемма Шварца).

770. Если $f(z)$ регулярна при $r < |z| < R$, то при $r < \rho < R$ имеет место равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum |a_n|^2 \rho^{2n},$$

где a_n — коэффициент ряда Лорана.

771. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| < R$ и притом $|f(z)| \leq M$, то $\sum |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2$.

772. Если равенство $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ даёт отображение круга $|z| < R$ на площадь S , то $S = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$.

773. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и отлична от постоянной, то функция

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi$$

возрастает вместе с r при $0 < r < R$.

774. Из всех функций $f(z)$, регулярных внутри круга $|z| < R$ и удовлетворяющих условиям $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|^2 d\varphi = M$, линейная функция даёт наименьшую площадь, в которую отображается круг $|z| < R$.

775. Для функции $f(z)$, регулярной при $r < |z| < R$, величина

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = K(\ln \rho)$$

представляет выпуклую функцию $\ln \rho$, т. е. выполняется неравенство (при $m > 0$, $n > 0$):

$$K \left(\frac{m \ln \rho_1 + n \ln \rho_2}{m + n} \right) \leq \frac{mK(\ln \rho_1) + nK(\ln \rho_2)}{m + n}.$$

776. Если $f(z)$, кроме прежних условий, отлично от нуля при $r < |z| < R$, то величина

$$I_\sigma(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^\sigma d\varphi$$

при любом $\sigma > 0$ есть тоже выпуклая функция $\ln \rho$.

777. Показать, что от условия $f(z) \neq 0$ в предыдущей задаче можно освободиться.

778. Если $f(z)$ регулярна при $|z| < R$, то величина $I_\sigma(\rho)$ возрастает вместе с ρ .

779. Если $f(z)$ регулярна при $r < |z| < R$, а $M(\rho)$ есть максимум модуля $f(\rho e^{i\varphi})$, то при $r < \rho < R$ величина $M(\rho)$ есть выпуклая функция от $\ln \rho$ (теорема Адамара о трёх кругах).

Указание. Полезно рассмотреть функцию $z^n f(z) = F(z)$, подобрав n так, чтобы величины $M(r)$ и $M(R)$ для $F(z)$ были одинаковы.

780. Если многочлен $f(z)$ степени n в интервале $-1 \leq z \leq 1$ по модулю не превосходит M , то для любого z справедливо неравенство: $|f(z)| \leq M(a + b)^n$, где a и b — полуоси эллипса, проходящего через точку z и имеющего фокусы в точках $z = \pm 1$.

Указание. Положить $z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ и применить теорему о модуле к функции $\zeta^{-n} f \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta} \right)$.

781. Если при $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и $|f(z)| < M$, а $f(a) = 0$, где $|a| < 1$, то при $|z| < 1$ имеет место неравенство:

$$|f(z)| \leq M \cdot \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|.$$

782. Если $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$; $f(0) \neq 0$; $|f(z)| < M$ и $f(z) = 0$ при $z = z_1, z_2, z_3, \dots$, то бесконечное произведение $|z_1|, |z_2|, |z_3| \dots$ сходится.

У к а з а н и е. Рассмотрим неравенство

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \dots \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|.$$

783. Если при $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и ограничена, а при $a < \varphi < b$ величина $f(re^{i\varphi t})$ при $r \rightarrow 1$ равномерно стремится к нулю, то $f(z)$ тождественно равна нулю. (Рассмотреть функцию $f(z) \cdot f(\omega z) \dots f(\omega^{n-1} z)$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, а n достаточно велико.)

784. Если последовательность $f_n(z)$ при $|z| \leq 1$ равномерно ограничена и $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на множестве точек, имеющих точкой сгущения начало, то $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в любой внутренней точке круга $|z| < 1$.

У к а з а н и е. Пусть z_1, z_2, \dots, z_m — точки, лежащие внутри фиксированного круга $|z| > \rho$, в которых $f_n(z) \rightarrow 0$. Рассматривая формулу

$$f_n(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f_n(z_\nu)}{\omega^\nu(z_\nu)} \cdot \frac{\omega(z)}{z - z_\nu} + \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f_n(t) dt}{\omega(t)(t - z)};$$

$$\omega(z) = \prod_{\nu=1}^m (z - z_\nu),$$

фиксировать при заданном $\epsilon > 0$ достаточно малое ρ , потом соответственно большое m и затем устремить n к ∞ .

785. Если функции $f_n(z)$ регулярны внутри контура C и равномерно ограничены на нём, а внутри контура имеется точка сгущения точек, в которых $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и в любой точке внутри контура $f_n(z) \rightarrow 0$ (теорема Витали).

786. Если функции $f_n(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$, не имеют в нём корней, а по модулю не больше, чем 1, и, кроме того, $f_n(0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то во всей внутренней части круга $|z| < 1$ функции $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

У к а з а н и е. Воспользоваться интегралом Пуассона для $\ln |f_n(z)|$.

787. Пусть z_ν — корни целой функции $f(z)$ и

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_{N-1}| \leq R < |z_N|,$$

а для функции $f(z)$ справедливо неравенство: $|f(z)| < Ce^{z^{\sigma}}$. Доказать, что при $|z| \leq 3R$

$$|f(0)| < \left| \frac{f(z)}{\prod_{\nu=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)} \right| < \frac{Ce^{(3R)^{\sigma}}}{2^{N-1}}.$$

788. Доказать, что при тех же условиях ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{\nu}|^n}$ сходится при $n > \sigma$.

789. При тех же условиях доказать разложение в бесконечное произведение Вейерштрасса:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{\nu} \varphi_{\nu}(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция, а

$$\varphi_{\nu}(z) = \left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{z^2}{2z_{\nu}^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)z_{\nu}^{n-1}}}.$$

790. Пусть $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяет в круге $|z| \leq R$ условию: $\operatorname{Re} f(z) \leq M$, где $M > 0$. Тогда

$$|a_1| < \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R}.$$

Указание. Рассмотреть сначала случай $a_0 = 0$, используя разложение $\frac{f(z)}{2M - f(z)} = \frac{a_1}{2M} z + bz^2 + \dots$ и соотношение $|f(z)| < |2M - f(z)|$.

791. Рассматривая при тех же условиях функцию

$$F(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n [f(\omega^{\nu} z) - a_0],$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, доказать неравенство:

$$|a_n| \leq \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R^n}.$$

792. При прежнем условии относительно роста $f(z)$ (см. № 787) доказать, что при $|z| \leq \frac{1}{2}R$, а следовательно, и $|z| \leq R$, имеем:

$$|\psi(z)| = \left| \frac{f(z)}{\prod_{\nu=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right)} \right| < C e^{(2R)^{\sigma}},$$

где в произведении $|z_{\nu}| \leq R$.

793. Пользуясь тем, что $\ln \psi(z)$ — регулярная функция z при $|z| \leq R$, доказать, что при $z = 0$ величина

$$[\ln f(z)]^{(n)} - \sum_{\nu=1}^N [\ln \varphi_{\nu}(z)]^{(n)}$$

по абсолютному значению меньше, чем $\frac{c}{R^{n-\sigma}}$ где c — соответствующая постоянная.

794. Доказать теорему Адамара: если $f(z)$ удовлетворяет при любом z условию $|f(z)| < Ce^{|z|^\sigma}$, где $\sigma < n$ и $f(0) \neq 0$, то справедливо разложение Вейерштрасса

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_1^{\infty} \varphi_\nu(z),$$

где $g(z)$ — многочлен, степень которого меньше n .

795. Доказать теорему Каратеодори: если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ регулярна в круге $|z-a| \leq R$ и в нём имеет место $\operatorname{Re} f(z) < M$, где $M > 0$, то при $|z-a| = r < R$ справедливо неравенство:

$$|f(z)| < |a_0| + \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0| \cdot r}{R-r}.$$

796. Доказать теорему Линделёфа: если $|f(z)| \leq C$ на краях области $-a < x < a$, а внутри этой области $|f(z)| < e^{\lambda|y|}$, где λ — некоторая постоянная, то и внутри области $|f(z)| \leq C$, причём знак равенства во внутренней точке возможен только тогда, когда $f(z) \equiv C$.

У к а з а н и е. Полезно изучить функцию $f(z) e^{\varepsilon z^2}$ при $\varepsilon > 0$.

§ 10. Дифференциальные уравнения при комплексном переменном

Способ Коши для нахождения интегралов линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_m}{dt} + \sum_{\nu=1}^n a_{m\nu} x_\nu = \varphi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

состоит в следующем:

1) Введя символ $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$ и $\delta_{\nu\nu} = 1$, решаем уравнения

$$\sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} + s\delta_{\mu\nu}) A_\nu = \xi_\mu; \quad \mu = 1, 2, \dots, n; \quad (**)$$

при этом получится:

$$A_\nu = \frac{\sum_{\mu=1}^n B_{\nu\mu}(s) \xi_\mu}{\Delta(s)},$$

где $\Delta(s)$ — определитель системы (**).

2) Составляем функции

$$\omega_m(s) = \sum_{\mu=1}^n B_{m\mu}(s) \left[\xi_\mu + \int_0^t \varphi_\mu(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st}.$$

Тогда уравнения (*) имеют систему частных интегралов:

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega_m s^i}{\Delta(s)} ds, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь интегрирование берётся в положительном направлении по кругу $|s|=R$, настолько большому, что все корни уравнения $\Delta(s)=0$ лежат внутри круга.

При $t=0$ величины x_m обращаются в ξ_m .

Для одного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

правило Коши обращается в такое:

1. Составляем функцию

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_0^{(\nu)} \phi_{\nu}(s),$$

где $\phi_{\nu}(s) = s^{n-\nu-1} + a_1 s^{n-\nu-2} + \dots + a_{n-\nu-1}$.

2. Тогда

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} y_0^{(\nu)} \phi_{\nu}(s) \cdot e^{sx} + \int_0^x e^{(x-t)s} f(t) dt}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} ds.$$

Здесь $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — значения при $x=0$, а интегрирование идёт по кругу $|s|=R$, внутри которого лежат все корни знаменателя.

Решить по способу Коши уравнения и системы уравнений при данных начальных условиях:

797. $y'' - 2y' + y = f(x); y_0 = a; y_0' = b.$

798. $x' - x + y = 0, y' + x + z = 0, z' - x + y = 0.$

$$x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$$

799. $x' + x + y = e^t; y' - x + 3y = e^{-t}; x_0 = -y_0 = 1.$

800. $x' = 4x + 2y + 2z; y' + x + z = 0; z' + 2x + y = 0.$

$$-x_0 = y_0 = z_0 = 1.$$

801. $x'' = 3x + 4y, y'' + x + y = 0; x_0 = y_0' = 1; y_0 = x_0' = 0.$

В следующих задачах найти общий интеграл при помощи степенных рядов:

802. $y'' - xy = 0.$

803. $y'' - x^2 y = 0.$

804. $y''' + xy = 0.$

805. $y'' + x^3 y = 0.$

806. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

807. $xy'' + y' + y = 0.$

808. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

809. Доказать, что уравнению $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0$ удовлетворяют ряды $\sum_0^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$ и $\sum_0^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$, первый из которых равен $\frac{1}{2} [(\arcsin x)^2]^n$.

810. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - (\alpha + \beta + 1)xy' - \alpha\beta y = 0$$

равен $C_1y_1 + C_2y_2$, где

$$y_1 = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+2)\dots(\alpha+2n-2)\beta(\beta+2)\dots(\beta+2n-2)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$y_2 = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2n-1)(\beta+1)(\beta+3)\dots(\beta+2n-1)}{(2n-1)!} x^{2n+1}.$$

811. Доказать, что уравнению $x^2y' + (x-1)y + 1 = 0$, общий интеграл которого

$$y = \frac{C}{x} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \int x e^{\frac{1}{x}} dx,$$

формально удовлетворяет ряд $\sum_0^{\infty} n! x^n$, расходящийся при любом $x \neq 0$.

812. Найти интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

где $2n$ — нецелое число, в виде ряда по положительным степеням x .

813. То же для отрицательных степеней x .

814. Найти общий интеграл уравнения

$$4x(x-1)y'' + 4[(a+2)x - a - 1]y' + (2a+1)y = 0,$$

представив его равенством $y = C_1\varphi(x, a) + C_2x^{-a}\varphi(-a, x)$, где $\varphi(a, x)$ — ряд по степеням x , равный 1 при $x=0$.

815. Найти интегралы предыдущего уравнения при $a=0$ в виде рядов, сходящихся в окрестности точки $x=1$.

816. Найти интеграл уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

полагая $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1 и y_2 — обобщённые степенные ряды вида $x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$, где σ — некоторая постоянная, не обязательно целая. Число n предполагается отличным от целого числа.

817. Показать, что общий интеграл уравнения Гаусса

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$$

при $|x| < 1$ может быть представлен формулой

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x),$$

где через $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ обозначен гипергеометрический ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Дифференциальные операторы

$$M(u) = \sum_{v=0}^n P_v \frac{d^{n-v} u}{dx^{n-v}},$$

$$\bar{M}(v) = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} \frac{d^{n-v}(P_v v)}{dx^{n-v}}$$

называются сопряжёнными. Если v — интеграл уравнения $\bar{M}(v) = 0$, то $vM(u)$ — полный дифференциал выражения $P(u, v)$, билинейного относительно $u, u', \dots, u^{(n-1)}, v, v', \dots, v^{(n-1)}$.

Преобразование Лапласа для уравнения $M(u) = 0$ состоит в том, что полагают $y = \int_a^\beta e^{xt} v(t) dt$ и ищут функции $v(t)$ и пределы α и β так, чтобы y оказался интегралом данного уравнения. Для этого достаточно взять за $v(t)$ интеграл сопряжённого уравнения $\bar{M}(v) = 0$, а пределы α и β выбрать так, чтобы величины

$$v(t), v'(t), \dots, v^{(n-1)}(t)$$

обращались в нуль при $t = \alpha$ и при $t = \beta$.

При помощи преобразования Лапласа проинтегрировать уравнения:

818. $xy'' + (2n+1)y' + xy = 0$.

819. $xy'' - (\alpha + \beta)(1+x)y' + \alpha\beta xy = 0$.

820. $xy'' + 2ay' - q^2 xy = 0$; $a > 0$.

821. Доказать, что при $0 < a < 2$ общий интеграл уравнения $xy'' + ay' - q^2 xy = 0$ можно представить формулой:

$$y = \int_0^\pi e^{xq \cos \varphi} (A \sin^{a-1} \varphi + Bx^{1-a} \sin^{1-a} \varphi) d\varphi,$$

а при $a = 1$ формулой:

$$y = \int_0^\pi e^{xq \cos \varphi} [A + B \ln(x \sin^2 \varphi)] d\varphi.$$

822. Найти два частных интеграла уравнения $xy''' - y = 0$, полагая:

$$y_1 = \int \sin \frac{x}{t} \cdot u(t) dt; \quad y_2 = \int \cos \frac{x}{t} \cdot v(t) dt.$$

823. Найти две пары частных интегралов системы

$$2xy' + 2z' + y = 0; \quad 2y' = 2xz' + z; \quad \operatorname{Im} x < 1,$$

отыскивая одну из неизвестных в виде интеграла $\int u(t) \sin xt dt$, а другую в виде интеграла $\int v(t) \cos xt dt$.

824. Доказать, что интеграл уравнения Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

можно представить в одной из форм:

$$y = \int_0^1 t^{-\frac{n+1}{2}} (1-t)^{-\frac{n+2}{2}} (x^2-t)^{\frac{n}{2}} dt; \quad n > 0,$$

$$y = \int_0^1 t^{\frac{n}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} (x^2-t)^{-\frac{n+1}{2}} dt; \quad n > -1.$$

825. Пусть $\varphi(x, t) = t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha}$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_1^{\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \alpha + 1 > \gamma > \beta; \quad \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi(x, t) dt; \quad \beta > 0, \quad \alpha < 1,$$

$$\int_0^1 \varphi(x, t) dt; \quad \gamma > \beta > 0, \quad \alpha < 1; \quad \int_0^{-\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \beta > 0, \quad \alpha + 1 > \gamma, \quad \alpha < 1;$$

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \varphi(x, t) dt, \quad \gamma > \beta, \quad \alpha < 1; \quad \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \alpha + 1 > \gamma, \quad \alpha < 1$$

есть частный интеграл гипергеометрического уравнения

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0.$$

826. Показать, что уравнение

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + Fy = 0$$

простой заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению.

Доказать равенства:

$$827. (1+x)^n = F(-n, \beta, \beta, -x).$$

$$828. e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1, n, 1, \frac{x}{n}\right).$$

$$829. \ln(1+x) = xF(1, 1, 2, -x).$$

$$830. \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} = F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

$$831. (1+x)^n + (1-x)^n = 2F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

$$832. \operatorname{ch} x = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4\alpha\beta}\right).$$

$$833. \cos n \arccos x = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

$$834. J_n(x) = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)} F\left[\alpha, \beta, n+1, -\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right)^2\right],$$

где

$$J_n(x) \text{ — функция Бесселя, равная } \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

835. Обозначая $F\left(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, \frac{1-x}{2}\right)$ через F_n , доказать, что

$$[(1-x)^{\gamma} (1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+1} F_1]' = -2\gamma(1-x)^{\gamma-1} (1+x)^{\alpha+\beta-\gamma} F_0.$$

836. Пользуясь предыдущим, показать, что

$$\begin{aligned} [(1-x)^{\gamma+n-1} (1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+n} F_n]^{(n)} &= \\ &= (-1)^n 2^n \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1) (1-x)^{\gamma-1} (1+x)^{\alpha+\beta-\gamma} F_0. \end{aligned}$$

837. Полагая $\gamma = \beta + 1$, $\beta = -n$, $\alpha = p + q + n + 1$ для многочлена Якоби

$$Q = \frac{n!}{(p+1) \dots (p+n)} P_n^{(p,q)}(x) = F\left(p+q+n+1, -n, p+1, \frac{1-x}{2}\right),$$

доказать равенство:

$$(1-x)^p (1+x)^q Q = \frac{(-1)^n}{2^n (p+1) \dots (p+n)} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{p+n} (1+x)^{q+n}].$$

838. В частном случае при $p = q = 0$ получить формулу Родрига для многочленов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}.$$

839. Доказать тождество для многочленов Чебышева:

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \frac{\sqrt{1-x^2} d^n (1-x)^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n-1} dx^n}.$$

Доказать равенства:

$$840. \int_0^x u^{p-1} (1-u)^{q-1} du = \frac{x^p}{p} F(1-q, p, p+1, x).$$

$$841. \int_0^x u^{p-1} e^{-u} du = \frac{x^p}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1-n, p, p+1, \frac{x}{n}\right).$$

$$842. \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right).$$

§ 11. Приложения к задачам математической физики

Плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости характеризуется аналитической функцией $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока. Проекции скорости на оси координат v_x и v_y равны частным производным $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Поэтому $\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$. Каждая частица жидкости движется по линии тока $\psi(x, y) = C$. Разность значений величины ψ в двух точках представляет объём жидкости, протекающей в единицу времени через цилиндр единичной высоты, стенки которого расположены на линии, соединяющей в плоскости XOY данные точки. Любая линия тока, или часть её, может быть заменена твёрдой стенкой без нарушения движения жидкости.

Найти линии равного потенциала, линии тока и величину скорости и её проекции на оси, если движение жидкости определяется функцией движения $w = \varphi + i\psi$, данной в следующих задачах:

$$843. w = az; a > 0. \quad 844. w =iaz; a > 0.$$

$$845. w = z^2. \quad 846. w = \frac{1}{z}.$$

$$847. w = \frac{1}{z^2}. \quad 848. w = \ln z.$$

849. Потенциал скорости имеет вид:

$$\varphi = \ln |z^2 - a^2| - \ln |z^2 + a^2|.$$

Найти уравнение линий тока и показать, что дуги окружности $|z| = a$ и оси координат вне точек $z = \pm a$, $z = \pm ia$ суть линии тока.

850. Функция тока имеет вид

$$\psi = \ln(r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4),$$

где $z = re^{i\theta}$. Найти потенциал φ .

851. Функция тока определяется уравнением:

$$\operatorname{th} \frac{\pi x}{a} \cdot \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \frac{\pi y}{a}; \quad a > 0.$$

Найти функцию движения w .

852. Линии тока — окружности $x^2 + y^2 = 2ax$. Найти отношение скорости жидкости в точках $(2a, 0)$ и (a, a) .

853. Такой же вопрос для лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ и точек

$$(a, 0) \text{ и } \left(a \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{a}{\sqrt{8}} \right).$$

Назовём потоком сквозь замкнутый контур C количество жидкости E , протекающей в единицу времени сквозь цилиндр с высотой единица и с основанием, расположенным по контуру C . Величина E даётся формулой:

$$E = \int_C v_x dy - v_y dx.$$

Циркуляцией скорости по тому же контуру C называется величина $\Gamma = \int_C v_x dx + v_y dy$. Так как $\Gamma + iE = \int_C \frac{dw}{dz} \cdot dz$, то E и Γ удобно находятся

с помощью вычетов. Если $w = \frac{E}{2\pi} \ln(z - a)$, где E — вещественно, то точка a называется источником обильности E . Если $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a)$, где Γ — вещественно, то точка a называется вихрем интенсивности Γ .

854. Для источника $z = a$ обильности E найти линии равного тока и равного потенциала.

855. Движение жидкости вызывается источником обильности E , помещённым в точке a . Доказать, что поток сквозь простой замкнутый контур C равен нулю, если точка a вне контура, и равен E , если точка a внутри контура.

856. При тех же условиях доказать, что циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

857. Получить соответствующие результаты для движения, вызванного вихрем интенсивности Γ в точке a .

858. Движение жидкости создаётся источником E и вихрем Γ , помещёнными в точке a . Доказать, что линии тока — логарифмические спирали.

859. Функция движения $w = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Найти величину потока сквозь окружность $2|z| = 3$ и циркуляцию по ней.

860. Функция движения $w = 2i \ln(z^2 - a^2)$. Найти циркуляцию по окружностям $|z - a| = a$; $|z + a| = a$.

861. Функция движения $w = \ln(z^2 + z^{-2})$. Каковы источники?

862. Доказать, что вещественная ось есть линия тока, если движение создаётся источниками обильности E , помещёнными в точках $a \pm bi$.

З а м е ч а н и е. Если линия тока C делит плоскость на две части, а движение создаётся источниками и вихрями, то совокупность источников и вихрей по одну сторону линии C называется отражением источников и вихрей по другую сторону той же линии.

863. Доказать, что отражением в вещественной оси вихря Γ в точке $a + bi$ является вихрь $-\Gamma$ в точке $a - bi$.

864. В точке a вне круга $|z| = R$ помещён источник E . Доказать, что его отражением в окружности являются два источника: источник E в точке $\frac{R^2}{a}$ и источник с обильностью $-E$ в точке $z = 0$.

865. Вихрь интенсивности Γ помещён вне круга $|z| = R$. Доказать, что его отражением в окружности является вихрь $-\Gamma$ в точке $\frac{R^2}{a}$.

866. Найти движение жидкости вне круга $|z| = 1$, вызываемое источником обильности E в точке a , где $a > 1$.

867. То же для вихря интенсивности Γ .

868. Найти движение жидкости в области $|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0$, вызванное вихрем в точке $z = ai, a > 1$, с интенсивностью Γ .

869. Положительные части осей координат — непроницаемые стенки. Только в точке $z = 1$ имеется точечный источник (точнее, источник вдоль по щели, перпендикулярной к плоскости XOY и проходящей через $z = 1$), из которого в пространстве высотой 1 в первый квадрант втекает Q единиц в 1 секунду. Найти движение жидкости.

870. Найти движение жидкости в области $0 < y < x\sqrt{3}$, вызванное источником обильности E в точке $z = ae^{\frac{\pi i}{6}}$; $a > 0$.

871. Найти движение жидкости в первом квадранте, если в точках $z = 1$ и $z = i$ в стенках квадранта имеются точечные источники, через которые соответственно входит и выходит Q единиц объёма жидкости в секунду.

872. Источники обильности $\pm \frac{E}{a}$ находятся в точках $z = \pm a$, где $a \rightarrow 0$ (диполь). Найти предельное движение жидкости.

873. На окружности, непроницаемой в остальных точках для жидкости, помещены два источника обильности E и $-E$. Доказать, что линии тока внутри круга представляют дуги окружностей, проходящих через оба источника.

874. Два вихря Γ и $-\Gamma$ помещены в двух точках. Доказать, что в движении, вызванном ими, линии тока — окружности.

875. Движение жидкости вызвано потоком из бесконечности, имеющим скорость, равную a и направленную в отрицательную сторону оси Ox , и источником $E=1$ в начале координат. Доказать, что жидкость, поступающая из источника, заполняет область внутри кривой $x \operatorname{tg} 2\pi a y = y$.

876. Движение в полуплоскости $y > 0$ вызвано источником в точке $z=ai$. Доказать, что линии тока являются гиперболоми $x^2 - y^2 + a^2 = Cxy$.

877. Движение жидкости создано наложением источников $z=0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$ с обильностью $E=2\pi$ каждый. Доказать, что скорость движения стремится к единице при удалении от OY и направлена от оси OY почти перпендикулярно к ней.

878. В тех же точках расположены вихри интенсивности Γ . Доказать, что в точках, далёких от оси OY , скорость по величине близка к $\frac{\Gamma}{2\pi}$, а по направлению почти параллельна оси OY .

879. Движение жидкости создано наложением источников с обильностью $E=2\pi$ в точках $z=0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$ и течения со скоростью $v > 1$, параллельного отрицательному направлению оси OX . Доказать, что наибольшая абсцисса точек, куда заходит жидкость из источников, равна $\frac{1}{2} \ln \frac{v+1}{v-1}$.

880. Доказать, что при условиях прежней задачи область, заполняемая жидкостью из источника $z=0$, ограничена кривой $\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} vy$, расстояние между ветвями которой стремится к $\frac{2\pi}{v+1}$ при $x \rightarrow -\infty$.

881. Источник обильности $E=2\pi$ расположен в точке $z=ai$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что движение, созданное им в полосе $0 < y < \frac{\pi}{2}$, имеет функцию движения:

$$w = \ln \operatorname{sh} [(z + ia) \operatorname{sh} (z - ia)].$$

882. Источник обильности $E=2\pi$ расположен в точке $z_0 = a + bi$, где $a > 0$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что функция движения, созданного им в области $0 < y < \frac{\pi}{2}$; $x > 0$, даётся формулой:

$$w = \ln [\operatorname{sh} (z - z_0) \operatorname{sh} (z + z_0) \operatorname{sh} (z - \bar{z}_0) \operatorname{sh} (z + \bar{z}_0)].$$

883. Движение жидкости в области $|z| > 1$, вызванное источником обильности E в точке $a > 1$, характеризуется функцией $w = \frac{E}{2\pi} \ln \left(z + \frac{1}{z} - a - \frac{1}{a} \right)$. Полагая $E = 2\pi b \left(a + \frac{1}{a} \right)$ и $a \rightarrow \infty$, найти движение при обтекании круга $|z| < 1$ потоком, у которого скорость на бесконечности $v_\infty = v$ и направлена в сторону отрицательной оси OX .

Если движение жидкости в односвязной области, определяемое функцией $w(z)$, вызывается вихрем интенсивности Γ , находящимся в данный момент в точке $z = a$, то этот вихрь перемещается со скоростью

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{dw_1}{dz} \right]_{z=a},$$

где

$$w_1 = w - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Траектория вихря даётся уравнением

$$\psi(\xi, \eta) = C, \quad \text{где } a = \xi + i\eta,$$

а скорость жидкости на бесконечности предполагается равной нулю.

884. Вдоль вещественной оси — непроницаемая стенка. На расстоянии h от неё помещён вихрь интенсивности Γ . Доказать, что он движется параллельно оси OX со скоростью $\frac{\Gamma}{4\pi h}$.

885. Доказать, что вихрь, помещённый в непроницаемую окружность, движется по концентрической окружности.

886. Движение в области $x > 0, y > 0$ вызывается вихрем с интенсивностью Γ , помещённым в точке (ξ, η) . Доказать, что траектория вихря выражается уравнением $\xi^{-2} + \eta^{-2} = C$, а проекции скорости вихря выражаются формулами:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Gamma \xi^2}{4\pi\eta(\xi^2 + \eta^2)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\Gamma \eta^2}{4\pi\xi(\xi^2 + \eta^2)}.$$

887. Доказать, что функция движения, вызванного бесконечной цепочкой вихрей, каждого с интенсивностью $\Gamma = 2\pi$, помещённых в точках $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$, выражается формулой

$$w(z) = -i \ln \sin z.$$

888. Найти функцию движения, вызванного наличием вихрей двух родов:

1) с интенсивностью Γ в точках $l \left(n + \frac{1}{4} \right) + \frac{hi}{2}$,

2) с интенсивностью $-\Gamma$ в точках $l \left(n - \frac{1}{4} \right) - \frac{hi}{2}$.

Здесь $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

889. Найти скорость вихря интенсивности Γ , помещённого между параллельными стенками, на расстоянии h от одной из них, если расстояние между стенками d .

Если в равенстве $w(z) = u(x, y) + iw(x, y)$; $z = x + iy$ ввести новую переменную $\zeta = \xi + i\eta$, положив

$$z = \varphi(\zeta) = p(\xi, \eta) + iq(\xi, \eta),$$

то, обозначив величины $w(z)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$, выраженные через ζ , ξ и η , через $w_1(\zeta)$, $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$, мы получим $w_1(\zeta) = u_1(\xi, \eta) + iv_1(\xi, \eta)$. После этого область S на плоскости z перейдёт в область S_1 на плоскости ζ , а линии тока $v(x, y) = C$ перейдут в линии тока $v_1(\xi, \eta) = C$.

Таким образом, конформное отображение даёт возможность по движению в области S , данному функцией $w(z)$, находить движение в области S_1 с помощью функции $w_1(\zeta)$.

890. Найти движение в области $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, если в точке $(0, 0)$ находится источник мощности Q .

891. Аналогичный вопрос, если источник находится в точке $(\frac{\pi}{2}, h)$.

892. Найти функцию движения при симметричном и непрерывном обтекании цилиндра с круглым основанием $|z| = a$, если скорость потока на бесконечности равна v и направлена в сторону отрицательной оси OX . (Один из путей решения — отобразить область $|z| > a$, $\text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость нового переменного.)

893. Найти функцию движения при обтекании прежним потоком отрезка между точками $z = \pm i$. Обтекание ищется непрерывное и симметричное.

894. Функция $w(z) = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ даёт несимметричное непрерывное обтекание круга $|z| = R$. Найти v_∞ , циркуляцию вдоль по окружности и точки, где скорость равна нулю.

895. Найти функцию движения при течении жидкости из полуплоскости $y > 0$ в полуплоскость $y < 0$ сквозь отверстие в стенке $y = 0$ между точками $z = \pm 1$. Скорость на бесконечности равна нулю.

896. Найти функцию течения $w(z)$ для непрерывного симметричного обтекания эллиптического цилиндра с сечением $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ потоком, имеющим на бесконечности скорость $v_x = v$; $v_y = 0$.

897. Доказать, что функция $w = i \ln(1 + z^{-1})$ даёт обтекание жидкостью пространства, ограниченного прямой и кругом, при условии $v_\infty = 0$.

898. Найти функцию, дающую обтекание полукруга $\left| z + \frac{4}{3} \right| < \frac{2}{3}$, $\text{Im } z > 0$ при условии на бесконечности $v_x = -v$, $v_y = 0$.

Плоское электростатическое поле при отсутствии непрерывно распределённых зарядов характеризуется аналитической функцией $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. При этом

$$i \frac{dw}{dz} = E_x - iE_y,$$

где E_x и E_y — проекции электрической силы на оси координат. Уравнение $u(x, y) = C$ даёт силовые линии, а $v(x, y) = C$ — эквипотенциальные линии. Внутри и на границе проводника потенциал v должен быть постоянным.

Плотность электричества в каком-либо месте контура проводника с точностью до знака даётся формулой: $\sigma = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dw}{dz} \right|$.

899. Показать, что функция $w = 2i\delta \ln \frac{R}{z}$ определяет электрическое поле вне кругового цилиндра $|z| = R$, на котором равномерно распределён заряд, равный δ для цилиндра единичной высоты.

900. Найти силовые и потенциальные линии в предыдущей задаче.

901. Найти силовое поле между поверхностями двух цилиндров с круглыми основаниями $|z| = 1$, $|z - 1| = 4$, если потенциал на первом равен 1, а на втором — нулю.

902. На изолированном цилиндре с круглым сечением $|z - 2i| = 1$ плотность электричества $\sigma = 1$. Как она распределится, если заземлить плоскость, параллельную образующей и пересекающей плоскость XOY по вещественной оси (электростатическая индукция)?

903. На цилиндре $|z - 5| = 4$ потенциал равен 1, а на цилиндре $|z + 5| = 4$ он равен нулю. Найти наибольшую и наименьшую плотности электричества на обоих цилиндрах.

904. В точке $z = 2$ точечный заряд δ . Мнимая ось заземлена.

Чему равен потенциал в точке $z = 1$?

905. Представив уравнение параболы $y^2 = 2px$ в параметрическом виде: $x = 2pu^2$, $y = 2pu$, доказать, что функция w , определяемая равенством $z = 2p(\omega^2 + i\omega)$, даёт поле вне параболы, в котором потенциал на самой параболе равен нулю и в котором нет зарядов.

906. Найти поле вне эллипса $x = a \cos u$, $y = b \sin u$, представляющего одну из эквипотенциальных линий поля.

907. Потенциал равен v_0 в точках прямой $z = x + ih$ и равен нулю на вещественной оси. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

908. На линии $3x^2 + 4y^2 = 12$ потенциал равен единице, а на отрезке между фокусами он равен нулю. Найти потенциал в точке

$$z = i.$$

909. Найти наибольшую и наименьшую плотности на эллипсе предыдущей задачи.

910. На линии $z = x > 1$ потенциал равен v_0 , а на линии $z = x < -1$ он равен $-v_0$. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

911. На линии $z = iy$, где $y > 1$, потенциал равен 1, а на вещественной оси равен нулю. Найти плотность распределения электричества на оси OX .

912. Потенциал равен π на ломаной, состоящей из линий: $z = x + \pi i$, $x < 0$ и $z = iy$; $y > \pi$. На оси OX потенциал равен нулю. Найти электростатическое поле в области, ограниченной указанными линиями, пользуясь интегралом Кристоффеля-Шварца.

Если на контуре C находится заряд q и если область вне контура отображается конформно на область вне круга $|\zeta|=1$ аналитической функцией

$$z = a_1 \zeta + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^{-n},$$

то поле вне C даётся функцией

$$w = 2iq \ln \frac{w_0}{\zeta(z)},$$

где w_0 — некоторая постоянная.

913. Найти поле вне эллипса $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

914. Найти поле вне квадрата $-1 < x < 1, -1 < y < 1$, на котором расположен заряд q .

Плоская задача установившегося распределения тепла внутри однородного тела даётся аналитической функцией $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $v(x, y)$ — температура в точке (x, y) . Уравнение $v(x, y) = C$ даёт изотермические линии, а $u(x, y) = C$ — линии тока тепла.

915. На окружности $|z|=1$ температура 0° , а на окружности $|z-1| = \frac{5}{2}$ она 100° . Найти температуру t в кольце между кругами.

916. На окружности $|z-5i|=4$ температура 100° , а на оси OX она нуль. Найти температуру t в точке $z=i+1$.

917. Найти распределение температуры в области $0 < \varphi < \pi, r > a$, где $z = re^{i\varphi}$, если температура равна нулю на вещественной оси и единице на полукруге $z = ae^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi$.

918. Найти распределение тепла внутри полукруга $|z| < 1, 0 < \arg z < \pi$, если температура равна нулю на полуокружности и единице на диаметре.

919. Та же задача для сектора круга: $0 < \varphi < \alpha, 0 < r < a$, где $z = re^{i\varphi}$, а температура 0° на радиусах и 1° на дуге круга.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Отдел разделяется на 6 параграфов. § 1 — составление дифференциальных уравнений — введён с двойкой целью: с одной стороны, чтобы дать учащимся достаточную практику в процессе сведения того или иного физического вопроса к математическому исследованию, а с другой стороны, дать им в руки тот материал, которым им придётся широко пользоваться в дальнейших параграфах отдела.

§ 2 носит вводный характер к основным методам: методу характеристик и способу Фурье, которым посвящены §§ 3 и 5.

§ 6 — интегральные уравнения относятся главным образом к теории линейных уравнений типа Фредгольма.

§ 1. Составление дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

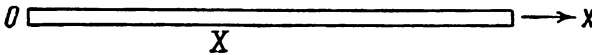
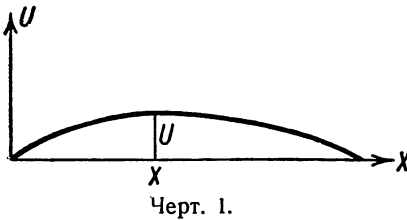
920. Абсолютно гибкая однородная нить под влиянием сильного натяжения T_0 находится в прямолинейном положении равновесия.

Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

где u есть смещение точки с абсциссой x , t — время, а ρ — линейная плотность нити (черт. 1).

921. Тонкий однородный стержень совершает продольные колебания, при которых его поперечные



сечения, оставаясь плоскими, перемешаются вдоль оси OX . Доказать, что уравнение малых колебаний имеет вид:

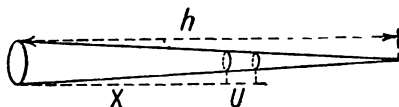
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где u есть смещение сечения с абсциссой x , ρ — плотность, а E — модуль упругости материала стержня (черт. 2).

922. Доказать, что уравнение продольных колебаний конического стержня имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где u есть перемещение стержня с абсциссой x , а h — высота конуса (черт. 3).



Черт. 3.

923. Крутильными колебаниями стержня называются такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Доказать, что уравнением малых колебаний круглого стержня служит уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{G I}{k}},$$

где θ есть угол поворота сечения с абсциссой x , G — модуль сдвига, I — полярный момент инерции поперечного сечения, а k — момент инерции части стержня, имеющей единицу длины относительно оси стержня.

924. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена в одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(l - x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{g},$$

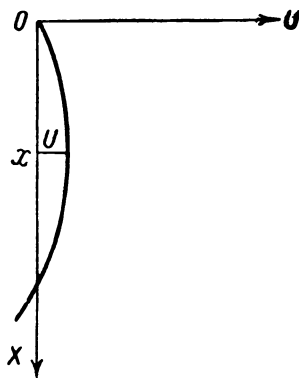
где u есть смещение точки с абсциссой x , l — длина нити, а g — ускорение силы тяжести (черт. 4).

925. Абсолютно гибкая нить длиной l подвешена за конец $x = l$, а на другом конце $x = 0$ прикреплён груз в P кг. Линейная плотность нити ρ изменяется по закону

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{l_1 + x}},$$

где постоянные A и l_1 связаны с массой M груза соотношением

$$M = 2A \sqrt{l_1}.$$

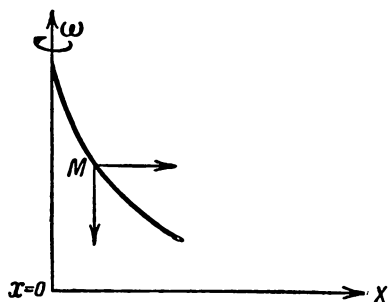


Черт. 4.

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего равновесного положения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{g}{2}}, \quad \text{где } \theta = \sqrt{l+l_1} - \sqrt{l_1+x}.$$

926. Тяжёлая однородная нить длиной l , закреплённая верхним концом ($x=0$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси, с постоянной угловой скоростью ω (черт. 5).



Черт. 5.

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u, \quad \text{где } a = \sqrt{g}.$$

927. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена в одном из концов и в положении равновесия располагается по оси x . Выведенная из положения равновесия, она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси u (черт. 6).

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего относительного положения равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

где через l обозначена длина нити.



Черт. 6.

928. Неоднородная нить, плотность которой изменяется по закону

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}} \quad (b > l),$$

прикреплена концом $x=0$ к неподвижной оси, а на другом конце $x=l$ прикреплён шарик, масса которого выражается равенством

$$M = \frac{a}{l} \sqrt{b^2 - l^2};$$

доказать, что при вращении нити с постоянной угловой скоростью ω вокруг указанной оси уравнение малых колебаний будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где

$$y = \arcsin \frac{x}{b}.$$

929. Вывести уравнение поперечных колебаний нити, закреплённой на концах, взяв за исходную точку минимальный принцип Гамильтона.

Указание. При малых колебаниях нити величины потенциальной и кинетической энергий выражаются формулами:

$$U = \frac{T_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad T = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

где T_0 есть величина начального натяжения, а l — длина нити. Согласно принципу Гамильтона при любых моментах времени t_1 и t_2 имеет место равенство

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0.$$

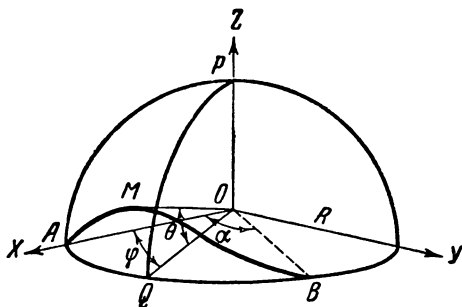
930. Исходя из принципа Гамильтона, решить задачи 924 и 927.

931. Гибкая однородная нить натянута на абсолютно гладкой сфере радиуса R и в положении равновесия направлена по экватору. Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \theta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

$$a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

где θ и φ обозначают географические координаты точки M , T_0 есть начальное натяжение, а ρ — линейная плотность нити (черт. 7).



Черт. 7.

Указание. Можно воспользоваться принципом Гамильтона, приняв во внимание следующие выражения для потенциальной и кинетической энергий:

$$U = \frac{RT_0}{2} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 - \theta^2 \right] d\varphi, \quad T = \frac{R^3 \rho}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\varphi,$$

где $aR = l$ и через l обозначена длина нити.

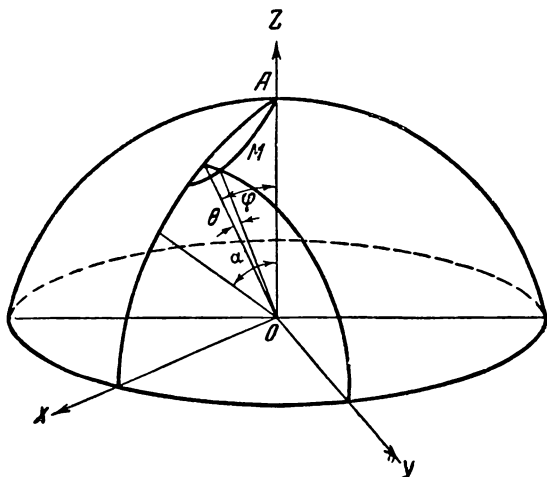
932. Гибкая однородная нить длиной l закреплена одним из концов в полюсе абсолютно гладкой сферы и под действием своего веса располагается по дуге большого круга.

Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (\cos \varphi - \cos a) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right\} + (\cos \varphi - \cos a) \theta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

где через g обозначено ускорение силы тяжести, а через R — радиус сферы (черт. 8).



Черт. 8.

Указание. Выражения потенциальной и кинетической энергий имеют следующий вид:

$$U = \frac{g\rho R^2}{2} \int_0^a (\cos \varphi - \cos a) \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 - \theta^2 \right\} d\varphi, \quad T = \frac{\rho R^3}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\varphi.$$

933. Доказать, что при непрерывно распределённых вдоль провода омическом сопротивлении R , ёмкости C , индуктивности L и утечки изоляции G дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют напряжение p и сила тока i , имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} + Gp = 0.$$

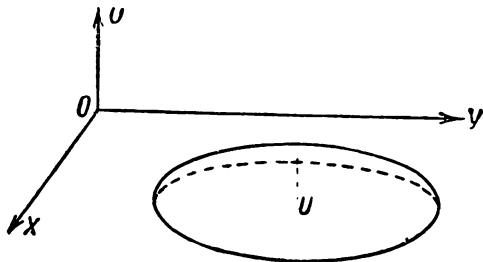
Указание. Первое уравнение выводится из закона индукции, применённого к весьма малому участку провода. Второе уравнение получается из условия непрерывности тока в проводе.

934. Абсолютно гибкая однородная плёнка (мембрана) натянута на каркасе S . Это положение мембраны принимается за плоскость координат XOY . Доказать, что уравнение малых поперечных колебаний мембраны имеет вид:

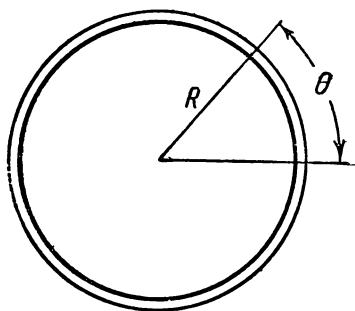
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}},$$

где T_0 есть сила начального натяжения, рассчитанная на единицу контура S , а σ обозначает поверхностную плотность мембраны (черт. 9).

935. Тонкий однородный стержень изолирован от внешнего пространства и имеет в точке $M(x, t)$ температуру $u(x, t)$, изменяющуюся



Черт. 9.



Черт. 10.

с течением времени. Доказать, что эта температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

где c есть теплоёмкость, k — коэффициент внутренней теплопроводности, а ρ — плотность вещества стержня.

936. Доказать, что уравнение распространения тепла в тонкой изолированной пластинке имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

где значение постоянной a то же, что и в предыдущей задаче.

937. Дано однородное кольцо с очень малым поперечным сечением (черт. 10).

Приняв во внимание потерю тепла в окружающую кольцо среду вследствие лучеиспускания через боковую поверхность, доказать, что уравнением распространения тепла в кольце служит уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - bu = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, \quad b = \frac{hl}{\sigma k},$$

где через θ обозначена длина дуги кольца, а входящие в уравнение постоянные имеют следующие значения: k, h — коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности, c, ρ — теплоёмкость и плотность вещества кольца, σ, l — площадь и периметр поперечного сечения.

938. Доказать, что температура однородного проводника, находящегося под действием постоянного тока, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{c\rho\omega} (u - u_0) + \frac{0,24i^2 r}{c\rho\omega^2},$$

где через i и r обозначены силы тока и удельное сопротивление проводника, через p и ω — периметр и площадь его поперечного сечения, а через u_0 — температура окружающей среды; значения букв k, h, c, ρ см. задачу 937.

939. Доказать, что уравнение радиального распространения тепла в однородной изолированной сфере имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v(r, t) = ru(r, t), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

где u есть температура сферы в точке, отстоящей на расстоянии r от её центра; значения букв см. задачу 937.

§ 2. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме

Привести к канонической форме следующие дифференциальные уравнения:

$$940. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$941. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$942. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad 943. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$944. (l - x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$945. (l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} u = 0.$$

946. Найти замену переменных, при которых уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta' \operatorname{ctg}(x - y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \operatorname{ctg}(x - y) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta\beta' u = 0$$

преобразовывается в уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{m}{\xi - \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{n}{\xi - \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{p}{(\xi - \eta)^2} v = 0.$$

§ 3. Метод характеристик

947. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

имеет вид $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, где φ и ψ — произвольные функции.

948. Показать, что общему решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

можно придать форму

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \psi(x + at)}{h - x}.$$

949. Доказать, что решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющим условиям

$$u \Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x),$$

служит выражение

$$u = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

Указание. Следует воспользоваться результатом задачи 947.

950. Отрезок однородной струны, закреплённой на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведённого через середину отрезка $(0, l)$. Определить форму струны в моменты времени

$$t = \frac{l}{2a} \quad \text{и} \quad t = \frac{l}{a},$$

предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

951. Доказать, что уравнение, приведённое в задаче 948, при условиях:

$$u \Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x),$$

имеет решение вида:

$$u = \frac{(h-x+at)f(x-at) + (h-x-at)f(x+at)}{2(h-x)} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{h-z}{h-x} F(z) dz.$$

952. Найти интеграл уравнения

$$(p-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < p)$$

при условиях:

$$u \Big|_{y=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = F(x).$$

953. Проинтегрировать уравнение

$$(p^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < p)$$

при условиях:

$$u \Big|_{y=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = F(x).$$

954. Доказать, что общее решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

имеет форму

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Указание. См. задачу 941.

955. Показать, что общему решению уравнения

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

можно придать вид

$$u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Указание. См. задачу 943.

956. Доказать, что уравнение, приведённое в предыдущей задаче, при условиях

$$u \Big|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = F(x)$$

имеет следующее решение:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} f(xy) + \frac{y}{2} f\left(\frac{x}{y}\right) + \\ + \frac{1}{4} \sqrt{xy} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{1}{2} \sqrt{xy} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{F(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Указание. Следует воспользоваться результатом предыдущей задачи.

957. Доказать, что если при $x = ct$ ($c = \text{const}$) имеют место равенства $u = f(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = F(t)$, то решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

служит выражение

$$u = \frac{1+\beta}{2} f\left(\frac{at+x}{a(1+\beta)}\right) + \frac{1-\beta}{2} f\left(\frac{at-x}{a(1-\beta)}\right) + \frac{a(1-\beta^2)}{2} \int_{\frac{t-\frac{x}{a}}{1-\beta}}^{\frac{t+\frac{x}{a}}{1+\beta}} F(z) dz,$$

где $\beta = \frac{c}{a}$.

Указание. Следует воспользоваться результатом задачи 947 и принять во внимание равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=ct} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=ct} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=ct} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x=ct}.$$

958. На конце $x = 0$ цилиндрического стержня, настолько длинного, что его можно считать простирающимся в одну сторону до бесконечности, действует возмущающая гармоническая сила $A \sin \omega t$. Доказать, что перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается формулой

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } at \leq x \\ A \sin \frac{\omega}{a} (at - x) & \text{при } at \geq x. \end{cases}$$

Указание. Применить способ характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при пограничном условии $u|_{x=0} = A \sin \omega t$ и при начальных условиях: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=0} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$, имеющих место при всяком положительном x .

959. Идеальный газ, плотность которого изменяется по закону $\rho = f(at - x)$, совершает продольные колебания в неограниченной цилиндрической трубке. Доказать, что скорость газа в сечении с абсциссой x выражается формулой

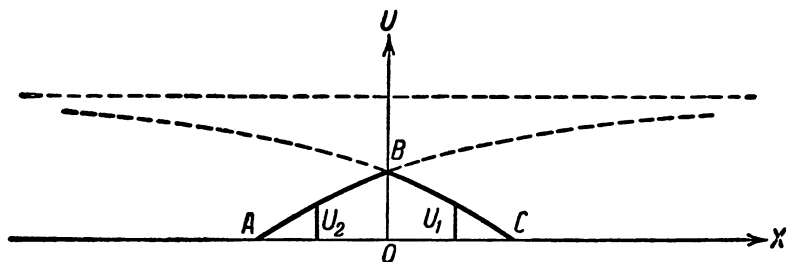
$$v = \frac{af(at-x) + (v_0 - a)f(at)}{f(at-x)},$$

где v_0 — скорость в сечении $x = 0$.

Указание. Воспользоваться уравнением неразрывности.

960. Бесконечная струна, находящаяся в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент времени ($t = 0$)

удар от молоточка, масса которого равна M , причём этот молоточек касается струны в точке $x=0$ и имеет начальную скорость v_0 .



Черт. 11.

Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущённая струна имеет вид, указанный на черт. 11, где u_1 — прямая волна:

$$u_1 = \frac{Mav_0}{2T_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)} \right\} \text{ при } x-at < 0; u_1 = 0 \text{ при } x-at > 0,$$

а u_2 — обратная волна:

$$u_2 = \frac{Mav_0}{2T_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x+at)} \right\} \text{ при } x+at > 0; u_2 = 0 \text{ при } x+at < 0.$$

Значения букв a и T_0 см. задачу 920.

Указание. При интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

следует принять во внимание условие

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = -T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} + T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

961. Начало координат $x=0$ помещается в плоскости раздела двух газов [(I) и (II)], заполняющих очень длинную цилиндрическую трубку. Конденсации газов обозначаются через s_1 и s_2 . Из области (I) движется прямая волна

$$s_1 = F \left(t - \frac{x}{a_1} \right),$$

претерпевающая в сечении $x=0$ отражение и поглощение.

Доказать, что между падающей волной F , отражённой f и поглощённой φ существует соотношение

$$\frac{f}{F} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\varphi}{F} = \frac{2a_2}{a_1 + a_2},$$

где a_2 означает скорость поглощённой волны.

962. Область начальных колебаний однородного газа представляет собою шар радиуса R . Начальные скорости частиц газа всюду равны нулю, а начальная плотность S_0 постоянна внутри шара и равна

нулю вне его. Найти выражение для плотности S в момент времени $t > 0$.

Указание. Применить метод характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 [r\Phi(r, t)]}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 [r\Phi(r, t)]}{\partial r^2}; \quad \left(S = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

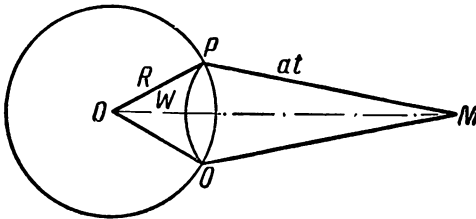
при начальных условиях

$$\Phi \Big|_{t=0} = f(r) = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(r) = \begin{cases} a^2 S_0 & \text{при } r < R \\ 0 & \text{» } r > R. \end{cases}$$

963. Решить предыдущую задачу, применяя интеграл Пуассона:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\Sigma)} \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{r} d\sigma + \int_{(\Sigma)} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{r} d\sigma \right\},$$

где через Σ обозначена сфера, описанная радиусом $r = at$ из точки M ,



Черт. 12.

а α, β, γ суть координаты переменной точки сферы Σ (черт. 12).

§ 4. Метод Римана

964. Проинтегрировать по способу Римана уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ при условиях

$$u \Big|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = F(x).$$

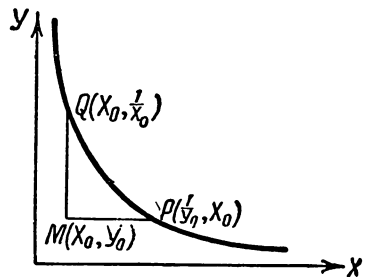
Указание. В данном случае функция Римана равна единице.

965. Решить по способу Римана задачу 956.

Указание. За область интегрирования следует принять криволинейный треугольник, образованный характеристиками MP, MQ и дугой равнобочной гиперболы $xu = 1$ (черт. 13). Функция Римана определяется равенством:

$$v(x, y; x_0, y_0) = \sqrt{\frac{x_0}{x}}.$$

966. Показать, пользуясь методом Римана, что интеграл уравнения $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \theta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, удовлетворяющий условиям $\theta \Big|_{t=0} = f(\varphi)$;



Черт. 13.

$\frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(\varphi)$, имеет вид

$$\theta(\varphi, t) = \frac{f(\varphi - at) + f(\varphi + at)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\varphi - at}^{\varphi + at} \Phi(\varphi, t, z) dz,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, t, z) = & \frac{1}{a} F(z) J_0(\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2}) - \\ & - at f(z) \frac{J'_0(\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2})}{\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2}}. \end{aligned}$$

Указание. Функция Римана определяется равенством

$$v(x, y; x_0, y_0) = J_0(\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}),$$

где $J_0(x)$ обозначает бесселеву функцию нулевого порядка.

967. Применив способ Римана, доказать, что при условиях $u \Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x)$ уравнение $(l - x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ имеет решение

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\sqrt{\sqrt{l-x} - \frac{at}{2}} f\left(x + \sqrt{l-x} at - \frac{a^2 t^2}{4}\right)}{2 \sqrt[4]{l-x}} + \\ & + \frac{\sqrt{\sqrt{l-x} + \frac{at}{2}} f\left(x - \sqrt{l-x} at - \frac{a^2 t^2}{4}\right)}{2 \sqrt[4]{l-x}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt[4]{l-x}} \int_{\sqrt{l-x} - \frac{at}{2}}^{\sqrt{l-x} + \frac{at}{2}} \Phi(x, t, z) dz; \\ \Phi(x, t, z) = & \frac{\sqrt{z}}{a} \varphi(l - z^2) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4} - (z - \sqrt{l-x})^2}{4 \sqrt{l-x} z}\right) + \\ & + \frac{at f(l - z^2)}{8 \sqrt{l-x} \sqrt{z}} F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4} - (z - \sqrt{l-x})^2}{4 \sqrt{l-x} z}\right), \end{aligned}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ есть гипергеометрический ряд.

Указание. Заданное уравнение надо привести к простейшей канонической форме (см. задачу 944). За область интегрирования следует принять треугольник, образованный характеристиками MP , MQ и биссектрисой $y = -x$ (черт. 14). Функция Римана определяется равенством

$$v(x, y; x_0, y_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x_0-y_0)(x-y)}\right).$$

968. Проинтегрировать по способу Римана уравнение

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4} u = 0, \quad 0 < x < l,$$

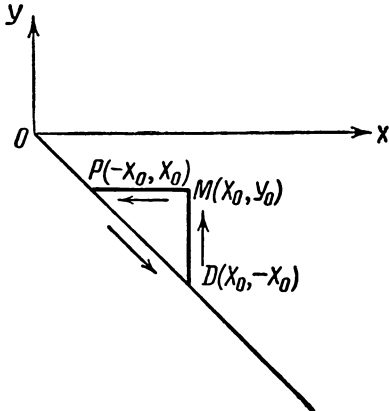
подчинив его интеграл условиям

$$u \Big|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x).$$

Черт. 14.

Указание. Функция Римана имеет следующий вид:

$$v(x, y; x_0, y_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sin(x-x_0) \sin(y-y_0)}{\sin(x_0-y_0) \sin(x-y)}\right).$$



§ 5. Метод Фурье

969. Для однородной струны длиной l , закреплённой на концах $x=0$ и $x=l$, известны в начальный момент времени отклонение от прямолинейного положения равновесия и скорости точек. Изучить по способу Фурье поперечные колебания струны (см. задачу 920).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

и выполнению условий: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$ при всяком t ;

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \quad \text{при } 0 < x < l.$$

970. Изучить с помощью метода Фурье продольные колебания цилиндрического стержня длиной l , у которого один конец закреплён, а другой свободен (см. задачу 921).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

при условиях: $u|_{x=0} = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \text{ при всяком } t;$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \text{ при } 0 < x < l.$$

971. Решить предыдущую задачу при условии, что оба конца стержня свободны.

972. Проинтегрировать по способу Фурье уравнение крутильных колебаний вала $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, $a = \sqrt{\frac{GI}{k}}$ при условии, что один из концов вала заделан, а на другом прикреплен шкив (см. задачу 923).

Указание. Интеграл уравнения колебаний удовлетворяет условиям $\theta|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l}$ при всяком t и $\theta|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x)$ при $0 < x < l$, где $c = \sqrt{\frac{GI}{k_1}}$ и k_1 обозначает момент инерции шкива относительно оси вала.

973. Решить ту же задачу в предположении, что на концах вала прикреплены два одинаковых шкива.

Указание. Предельные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l},$$

где

$$c = \sqrt{\frac{GI}{k_1}}.$$

974. К концу $x=l$ однородного стержня, закреплённого в точке $x=0$, подвешен груз в P кг. Изучить вынужденные продольные колебания стержня, предполагая, что на него действует внешняя непрерывно распределённая сила $\rho Y(x, t)$.

Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Y(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

при условиях

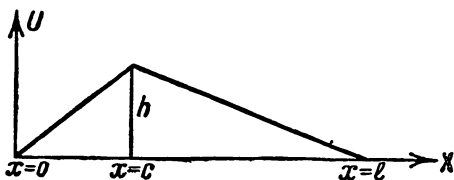
$$u|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad c = \sqrt{\frac{gE}{P}};$$

$$u|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0;$$

g — ускорение земной тяжести.

975. Струна длиной l закреплена на концах $x=0$ и $x=l$ и в начальный момент времени оттянута в точке $x=c$ на расстояние h

от оси OX ; затем она отпущена без сообщения её точкам начальной скорости (черт. 15). Определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени (см. задачу 969).

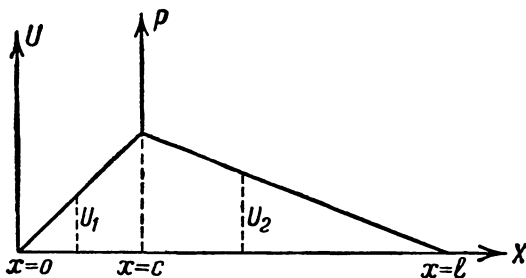


Черт. 15.

976. Струна длиной l закреплена на концах $x=0$ и $x=l$ и в начальный момент времени в точке $x=c$ получает удар от молоточка (струна пианино). Предполагается, что во время удара

молоточек касается очень малого участка струны и что сам удар длится очень недолго по сравнению с периодом колебания струны. Найти выражение для отклонения $u(x, t)$ струны (см. задачу 969).

Указание. Начальные условия колебания: $f(x)=0$ во всём интервале $(0, l)$, $F(x)=0$ во всём интервале $(0, l)$ за исключением очень малого участка $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, где $F(x) > 0$.



Черт. 16.

977. Абсолютно изолированный электрический провод длиной l в некоторый момент времени, принимаемый за начальный, заряжен до некоторого постоянного потенциала p_0 . Определить величину напряжения и силу тока i по истечении времени t от начального момента, предполагая, что один из концов провода замкнут накоротко, а другой открыт (см. задачу 933).

Указание. Задача приводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

при условиях:

$$p|_{x=0} = 0, \quad i|_{x=l} = 0 \text{ при всяком } t, \\ p|_{t=0} = p_0, \quad i|_{t=0} = 0 \text{ при } 0 < x < l.$$

978. Однородная струна длиной l под влиянием сильного натяжения T_0 находится в прямолинейном положении равновесия и закреплена на концах $x=0$ и $x=l$. В точке $x=c$ на струну действует сосредоточенная гармоническая сила $\rho P(t) = \rho A \sin \omega t$.

Определить отклонение $u(x, t)$ струны от положения равновесия (черт. 16).

У к а з а н и е. Задачу можно привести к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

и выполнению граничных условий:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=c} = u_2|_{x=c}, \quad u_2|_{x=l} = 0.$$

$$T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=c} - T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=c} + P\rho = 0.$$

979. Однородная струна длиной l , закреплённая на концах $x=0$ и $x=l$, колеблется под действием внешней возмущающей силы $\rho Y(x, t)$, распределённой непрерывным образом вдоль всего отрезка струны. Найти отклонения струны от положения равновесия, приняв во внимание её свободные колебания, вызываемые начальным отклонением и начальной скоростью.

У к а з а н и е. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Y(x, t); \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}};$$

интеграл этого уравнения пишется в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где u_1 есть интеграл однородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющий условиям:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0, \quad u_1|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x),$$

а u_2 есть интеграл неоднородного уравнения (1), подчинённый условиям:

$$u_2|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l} = 0, \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

980. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закреплённой на конце $x=0$ и подверженной на конце $x=l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$.

981. Решить предыдущую задачу в предположении, что струна закреплена на концах $x=0$ и $x=l$ и что внешняя возмущающая сила сосредоточена в точке $x=c$ струны. Исследовать частный случай, когда сила действует гармонически.

У к а з а н и е. Сосредоточенную в точке $x=c$ силу можно рассматривать как предельный случай силы $\rho Y(x, t) > 0$, непрерывно распределённой по очень малому участку $(c - \epsilon, c + \epsilon)$.

982. Две разнородные струны, длиной l_1 и l_2 , связаны между собою в точке $x=l_1$ и закреплены на концах $x=0$ и $x=l_1+l_2$. Определить период поперечных колебаний.

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; \quad a_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_1}}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_2}}$$

при условиях:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l_1+l_2} = 0, \quad u_1|_{x=l_1} = u_2|_{x=l_1};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1}.$$

983. Струна, закреплённая на концах, состоит из двух неоднородных частей $AB=l_1$ и $BC=l_2$, причём в точке B помещается шарик массы M . Доказать, что период T поперечных колебаний определяется из уравнения

$$\frac{1}{a_1} \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{T a_1} + \frac{1}{a_2} \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_2}{T a_2} = M \frac{2\pi}{T T_0},$$

где T_0 — величина натяжения нити.

Указание. Следует принять во внимание условие

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1} = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1} = -T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} + T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1}.$$

984. Стержень AC , закреплённый в начале A и свободный на конце C , состоит из двух неоднородных частей $AB=l_1$ и $BC=l_2$. Доказать, что период T продольных колебаний стержня определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{a_1 T} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{a_2 T} = \frac{E_1 a_2}{E_2 a_1},$$

где $a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$.

Указание. Выделить колебания одной и той же частоты, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u_1 \Big|_{x=l_1} = u_2 \Big|_{x=l_1}; \quad E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1}$$

985. Тяжёлый растяжимый стержень, длина которого в нерастянутом состоянии равна l , подвешен за конец $x=0$, а конец $x=l$ оставлен свободным. Изучить вынужденные колебания стержня.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

при условиях:

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$u \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

986. Доказать, что радиальные колебания однородного газа, заключённого между двумя неподвижными концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), могут происходить гармоническим образом, причём период тона выражается формулой

$$T_1 = \frac{2\pi(R_2 - R_1)}{\mu} \sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}},$$

где μ — наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{p\mu^2 + 1}; \quad p = \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)^2};$$

здесь γ — постоянная Пуассона, p_0 и ρ_0 — начальные давление и плотность.

987. Доказать, что уравнение радиальных колебаний газа $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ имеет решение $\Phi = \frac{A}{r} \cos \frac{\omega}{a} (at - r)$, обращающееся в нуль при $\lim r = \infty$.

988. Доказать, что если уравнение малых колебаний газа имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

то оно допускает интеграл

$$\Phi = \frac{A \cos \theta}{r} \left\{ \cos \frac{\omega}{a} (at - r) + \frac{a}{\omega r} \sin \frac{\omega}{a} (at - r) \right\},$$

обращающийся в нуль при $\lim r = \infty$.

989. Доказать, что решением задачи 926 служит ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx; \quad f(x) = u \Big|_{t=0},$$

$$b_k = \frac{1}{a\mu_k \sqrt{l} J_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx, \quad F(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a} \right)^2},$$

а μ_1, μ_2, \dots означают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

990. Линейная плотность подвешенной нити изменяется по закону $\rho = ax^m$, где $m > -1$. Вывести уравнение малых колебаний нити

и доказать, что отклонение от равновесного положения выражается формулой

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{J_m \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right)}{x^{\frac{m}{2}}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l(m-1)}} \mu_k t + \varphi_k \right),$$

где μ_1, μ_2, \dots — положительные корни уравнения $J_m(x) = 0$, а N_k и φ_k — постоянные, зависящие от начальных условий.

991. На круглую мембрану, закреплённую по краю, действует внешняя гармоническая сила

$$\rho Y = \rho A \sin \omega t,$$

непрерывно распределённая по всей её площади.

Доказать, что вынужденные колебания мембраны выражаются ра-
венством

$$u = \frac{A}{\omega^2} \left\{ \frac{J_0 \left(\frac{\omega}{a} r \right)}{J_0 \left(\frac{\omega}{a} R \right)} - 1 \right\} \sin \omega t,$$

где R — радиус мембраны.

992. Дан тонкий однородный стержень длиной l , изолированный от внешнего пространства. Во всё время наблюдения концы $x=0$ и $x=l$ удерживаются при постоянной температуре $u=0$. Кроме того, известно начальное распределение температуры вдоль стержня.

Определить его температуру в момент времени t (см. задачу 935).

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ при условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$, при всяком t ; $u|_{t=0} = f(x)$ при $0 < x < l$.

993. Решить предыдущую задачу в предположении, что конец $x=0$ стержня имеет температуру, равную нулю, а на конце $x=l$ происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой считается равной нулю.

У к а з а н и е. Второе из пограничных условий предыдущей задачи следует заменить условием: $k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -hu \Big|_{x=l}$, где через k и h обозначены коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности вещества стержня.

994. Решить предыдущую задачу в предположении, что лучеиспускание тепла в окружающую среду происходит на обоих концах стержня.

У к а з а н и е. Пограничные условия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{h}{k} u \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{h}{k} u \Big|_{x=l}.$$

995. Применить метод Фурье к исследованию распространения тепла в однородном кольце, предполагая, что известно начальное распределение тепла (см. задачу 937).

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, \quad u = v e^{-bt}$$

при выполнении начального условия

$$u|_{t=0} = f(\theta) \quad \text{при } 0 < \theta < 2\pi.$$

996. Дана однородная сфера радиуса R , центр которой расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки сферы зависит только от расстояния r этой точки от центра сферы. Во всё время наблюдения внешняя поверхность сферы удерживается при температуре 0° . Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени t (см. задачу 939).

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $u = \frac{v}{r}$, $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ и выполнению условий: $v|_{r=0} = 0$, $v|_{r=R} = 0$ при всяком t ; $v|_{t=0} = rf(r)$ при $0 < r < R$.

997. Решить предыдущую задачу в предположении, что поверхность сферы всё время свободно охлаждается в среду, имеющую температуру 0° .

У к а з а н и е. Второе из предельных условий в предыдущей задаче надо переменить на следующее:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} + \left(H - \frac{1}{R} \right) v \Big|_{r=R} = 0, \quad H = \frac{h}{k}.$$

998. Однородный газ заключён в неподвижный сосуд, имеющий форму шара радиуса R . Исследовать радиальные колебания газа, предполагая, что движение происходит с потенциалом скоростей.

У к а з а н и е. При малых колебаниях потенциал скоростей удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

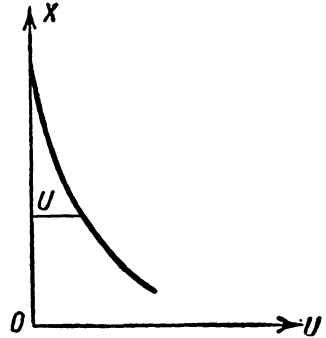
$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, где p_0 и ρ_0 — начальные давление и плотность, а γ — постоянная Пуассона.

Преобразовав уравнение колебаний к сферическим координатам r , θ , φ , искать по способу Фурье интеграл, удовлетворяющий условиям $u|_{r=0} =$ конечной величине,

$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$ при всяком t , $u|_{t=0} = f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(r)$
при $0 < r < R$.

999. Тяжёлая однородная нить длиной l , подвешенная за один из своих концов ($x=l$), выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости (черт. 17). Определить отклонение u в функции от абсциссы x и времени t .

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $a = \sqrt{g}$ при условиях: $u|_{x=0} =$ конечной величине, $u|_{x=l} = 0$ при всяком t , $u|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ при $0 < x < l$.



Черт. 17.

1000. Дана цилиндрическая трубка радиуса R настолько длинная, что её можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Исследовать малые радиальные колебания однородного газа, заключённого в трубке.

Указание. Уравнение колебаний следует преобразовать к цилиндрическим координатам r, φ, z , направив ось z по оси трубки, затем искать интеграл уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, удовлетворяющий условиям: $u|_{r=0} =$ конечной величине, $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = 0$ при всяком t ; $u|_{t=0} = f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r)$ при $0 < r < R$.

1001. Применить метод Фурье к исследованию радиальных колебаний мембраны, имеющей форму круга радиуса R и закреплённой на краю (см. задачу 934).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. $a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}$ при условиях $u_{z=0} =$ конечной величине, $u|_{r=R} = 0$ при всяком t и $u|_{t=0} = f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r)$ при $0 < r < R$.

1002. Исследовать радиальное распространение тепла в бесконечном цилиндре радиуса R , боковая поверхность которого всё время имеет температуру 0° .

Указание. Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

Следует искать интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условиям $u|_{r=0} =$ конечной величине, $u|_{r=R} = 0$ при всяком t и $u|_{t=0} = f(r)$ при $0 < r < R$.

1003. Цилиндр с радиусом основания R и высотой h имеет во всё время опыта температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную 0° , а температура верхнего основания есть определённая функция от r . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Указание. Для решения задачи необходимо отыскать такой интеграл уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, который удовлетворял бы условиям: $u|_{r=0} =$ конечной величине, $u|_{z=0} = 0$, $u|_{r=R} = 0$, $u|_{z=h} = f(r)$ при $0 < r < R$.

1004. Решить предыдущую задачу в предположении, что боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом.

Указание. Третье из пограничных условий, указанных в предыдущей задаче, заменить следующим: $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$.

1005. Решить задачу 1003 в предположении, что боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздух, имеющий температуру 0° .

Указание. Пограничное условие на боковой поверхности имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + h_1 u|_{r=R} = 0$, где $h_1 = \frac{h}{k}$; значение букв h и k см. задачу 993.

1006. Цилиндр с радиусом основания R и высотой h имеет температуру обоих оснований, равную 0° , а температура боковой поверхности представляет данную функцию от z : $u = f(z)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

1007. Дана тонкая прямоугольная пластинка со сторонами l и m (совпадающими с осями координат), для которой известно начальное распределение температуры. В течение всего времени наблюдения периметр пластинки удерживается при температуре 0° . Требуется определить температуру каждой точки пластинки по истечении времени t от начального момента (см. задачу 936).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

при условиях:

$$\left. \begin{array}{l} u=0 \text{ при } x=0 \\ u=0 \text{ при } x=l \end{array} \right\} \text{ при } 0 < y < m \text{ и при всяком } t,$$

$$\left. \begin{array}{l} u=0 \text{ при } y=0 \\ u=0 \text{ при } y=m \end{array} \right\} \text{ при } 0 < x < l \text{ и при всяком } t,$$

$$u|_{t=0} = f(x, y) \text{ при } 0 < x < l \text{ и } 0 < y < m.$$

1008. Дан прямоугольный параллелепипед с рёбрами l , m , n (три его ребра совпадают с осями координат). Во всё время наблюдения боковые грани удерживаются при температуре 0° , а оба основания имеют данное распределение температуры. Определить стационарную температуру внутренних точек параллелепипеда.

Указание. Искомая функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ при условиях: $u = 0$ при $x = 0$, $u = 0$ при $x = l$, $u = 0$ при $y = 0$, $u = 0$ при $y = m$, $u = f(x, y)$ при $z = 0$, $u = F(x, y)$ при $z = n$.

1009. Исследовать малые колебания мембраны, закреплённой на краях и имеющей форму прямоугольника, стороны которого l и m совпадают с осями координат x и y (см. задачу 934).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}$$

при условиях:

$$\left. \begin{aligned} u = 0 \text{ при } x = 0, \quad u = 0 \text{ при } x = l, \\ u = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = 0 \text{ при } y = m. \\ \left. \begin{aligned} u|_{t=0} = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x, y) \end{aligned} \right\} \text{ при } \begin{cases} 0 < x < l, \\ 0 < y < m. \end{cases} \end{aligned}$$

1010. Исследовать распространение тепла в бесконечно длинном стержне, изолированном от внешнего пространства (см. задачу 935).

Указание. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}} \text{ и условию } u|_{t=0} = f(x).$$

1011. Дан однородный стержень, у которого один конец удалён на бесконечность, а другой имеет температуру, изменяющуюся известным образом с течением времени. Определить температуру стержня по истечении времени t от начального момента.

Указание. Следует проинтегрировать уравнение распространения тепла в стержне при условиях: $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $u|_{t=0} = f(x)$.

1012. Исследовать распространение тепла в тонкой пластинке, предполагая, что она настолько велика, что её можно считать неограниченно простирающейся во все стороны (см. задачу 936).

Указание. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}} \text{ и условию } u|_{t=0} = f(x, y).$$

1013. Исследовать распространение тепла в бесконечной пластинке, ограниченной с одного края, на котором температура изменяется известным образом.

У к а з а н и е. Если провести ось ординат вдоль края пластинки, то задача приводится к интегрированию уравнения, указанного в предыдущей задаче, при выполнении условий:

$$u|_{x=0} = \varphi(y, t); \quad u|_{t=0} = f(x, y).$$

1014. Определить температуру в точке $M(x, y, z)$ неограниченного пространства, предполагая, что известно начальное распределение температуры.

У к а з а н и е. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}} \text{ и условию } u|_{t=0} = f(x, y, z).$$

1015. Гибкая однородная нить вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В момент времени, принимаемый за начальный, нить выводится из своего относительного положения равновесия, и её точкам сообщаются начальные скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ нити по истечении времени t от начального момента (см. задачу 927).

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

при условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} =$ конечной величине при всяком t и $u|_{t=0} = f(x)$,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \text{ при } 0 < x < l.$$

1016. Доказать, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

допускает частное решение

$$u = \left(Ar^m + \frac{B}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos \theta),$$

где A и B обозначают произвольные постоянные, m есть целое положительное число или нуль, а $P_m(\cos \theta)$ есть многочлен Лежандра с индексом m .

1017. Данная функция $f(r)$ может быть разложена в ряды следующего вида:

$$f(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n + \dots \text{ при } r < R,$$

$$f(r) = \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \dots + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} + \dots \text{ при } r > R.$$

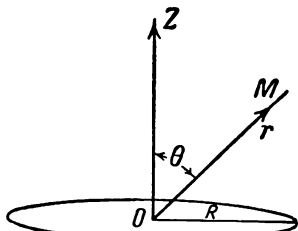
Найти такое решение уравнения, приведённого в предыдущей задаче, которое удовлетворяло бы условию

$$u|_{\theta=0} = f(r).$$

1018. Круговое проволочное кольцо радиуса R заряжено E единицами статического электричества. Найти потенциал $v(r, \theta)$ на электризованного кольца на любую точку поля (черт. 18).

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

1019. Найти такое решение уравнения задачи 1016, чтобы при $r = R$ (на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат) оно обращалось в данную функцию угла θ , т. е. $u|_{r=R} = f(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \pi$.



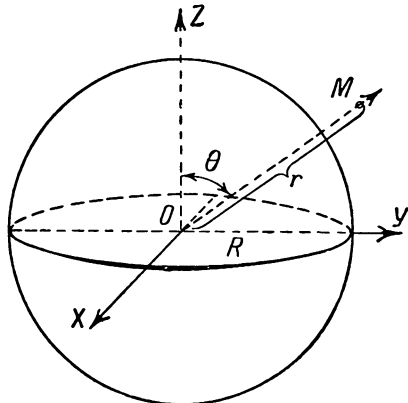
Черт. 18.

Указание. Принять во внимание результат задачи 1016 и воспользоваться разложением функции $f(\theta)$ в ряд по многочленам Лежандра

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta),$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta.$$

1020. Слой непроводящего вещества поверхность шарового проводника радиуса R разделена на две полусферы, заряженные до потенциалов: v_1 (верхняя) и v_2 (нижняя). Найти потенциал $v(r, \theta)$ такого проводника на любую точку поля (черт. 19).



Черт. 19.

Указание. Следует воспользоваться результатом предыдущей задачи, приняв во внимание равенства:

$$v|_{r=R} = f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ v_2 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

1021. Металлический шарик радиуса R с закопчённой поверхностью подвержен действию солнечных лучей в воздухе, температура которого равна 0° . Определить стационарную температуру внутренних точек шарика (черт. 20).

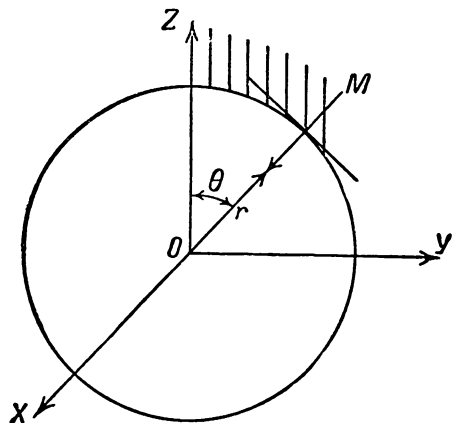
Указание. Воспользоваться результатом задачи 1019, приняв во внимание равенства:

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения Лапласа (см. задачу 1016) при следующем условии:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + H(u - f(\theta)) \Big|_{r=R} = 0, \text{ где } H \text{ постоянно, а}$$

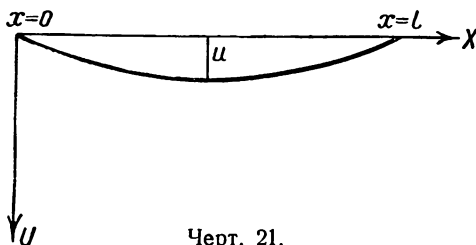
$$f(\theta) = \begin{cases} M \cos \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (M = \text{const}).$$

1022. Проинтегрировать по способу Фурье уравнение поперечных колебаний балки $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ при условиях $u = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$



Черт. 20.

при $x = 0, x = l$, выражающих, что оба конца балки закреплены наглухо (черт. 21).



Черт. 21.

Указание. Характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ задачи определяются из уравнения

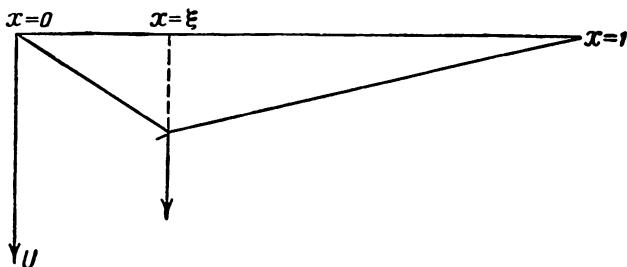
$$\text{ch } \lambda l \cdot \cos \lambda l = 1,$$

а соответствующие им фундаментальные функции

$X_n(x) = (\text{sh } \lambda_n l - \sin \lambda_n l) (\text{ch } \lambda_n x - \cos \lambda_n x) - (\text{ch } \lambda_n l - \cos \lambda_n l) (\text{sh } \lambda_n x - \sin \lambda_n x)$ образуют систему функций, ортогональных на интервале $(0, l)$.

§ 6. Интегральные уравнения

1023. В точке $x = \xi$ однородной нити ($\rho = 1$), подверженной действию сильного натяжения T_0 и закреплённой на концах $x = 0$ и $x = 1$, подвешен груз $Q = 1$ (черт. 22).



Черт. 22.

Доказать, что уравнение провеса нити имеет вид

$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) \cdot \frac{1}{T_0} & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1-x) \cdot \frac{1}{T_0} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

1024. Тяжёлая однородная нить закреплена в точке $x = 1$ и подвержена в точке $x = \xi$ действию горизонтальной силы $Q = 1$ (черт. 23).

Доказать, что равновесное уравнение нити имеет форму

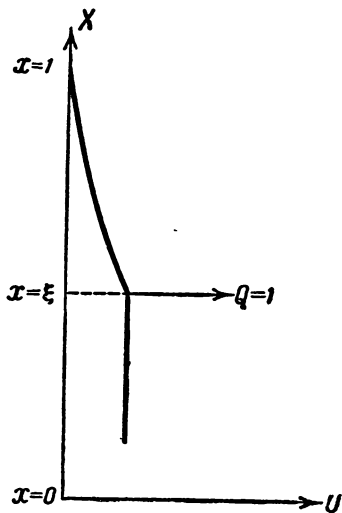
$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} -\ln \xi & \text{при } x \leq \xi, \\ -\ln x & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Указание. Натяжение нити в точке $M(x)$ принимается равным $-x$.

1025. Однородная нить длиной $l = 1$ прикреплена концом $x = 0$ к неподвижной оси и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью. К точке $x = \xi$ такой нити приложена сила $Q = 1$ (черт. 24).

Доказать, что уравнение относительного равновесия нити имеет вид:

$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$



Черт. 23.

Указание. Натяжение нити в точке $M(x)$, вызываемое центробежной силой, принимается равным

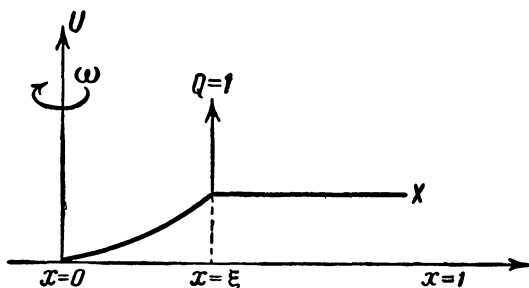
$$R = 2 \int_x^1 x dx = (1 - x^2).$$

1026. Доказать, что при непрерывно распределённой нагрузке уравнение провеса нити имеет форму

$$u = \int_0^1 K(x, \xi) p(\xi) d\xi,$$

где через $p(\xi)$ обозначена величина нагрузки, рассчитанная на единицу длины нити.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 1023.



Черт. 24.

1027. Доказать, что задача о малых колебаниях закреплённой нити может быть приведена к решению однородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где симметричное ядро $K(x, \xi)$ имеет вид, указанный в задаче 1026.

1028. На однородную струну, закреплённую на концах, действует непрерывно распределённая сила

$$F(\xi, t) = p_0(\xi) \sin \omega t.$$

Доказать, что задача о вынужденных колебаниях такой нити сводится к решению неоднородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi.$$

1029. Рассматривая последовательность

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

в промежутке $(-1, +1)$, заменить её последовательностью ортогональной и нормальной, взяв за весовую функцию

$$p(x) = 1.$$

Составить первые три члена последовательности.

Примечание. Рассматривая квадратичную погрешность

$$\int_a^b p(x) [f(x) - s_n(x)]^2 dx,$$

мы называем $p(x)$ весом.

1030. Решить задачу 1029, взяв за весовую функцию

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1031. Рассматривая последовательность

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

в промежутке $(0, \infty)$, заменить её ортогональной и нормальной, считая, что весовая функция

$$p(x) = e^{-x}.$$

Составить первые три члена последовательности.

1032. Рассматривая последовательность

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

в промежутке $(-\infty, +\infty)$, заменить её ортогональной и нормальной, считая, что весовая функция

$$p(x) = e^{-x^2}.$$

Составить первые три члена последовательности.

Указание. Использовать свойства функции $\Gamma(p)$.

1033. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1034. Найти $u(x)$ из уравнения

$$u(x) = x + 4 \int_0^x (t-x) u(t) dt.$$

1035. Заменить нахождение y из уравнения $y'' + y = 0$ при начальном условии $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ решением интегрального уравнения.

1036. Заменить нахождение y из уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ решением интегрального уравнения.

1037. Заменить нахождение y из уравнения $y'' + y = \cos x$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ решением интегрального уравнения.

1038. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt\varphi(t) dt + \frac{5x}{6}.$$

1039. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 3 \int_0^1 xt\varphi(t) dt + 3x - 2.$$

1040. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 xt\varphi(t) dt + \frac{5x}{6}.$$

1041. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 3 \int_0^2 xt\varphi(t) dt + 3x - 2.$$

1042. Найти определитель Фредгольма и резольвенту для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy + F(x),$$

а также первое характеристическое число и его фундаментальную функцию, если

$$K(x, y) = g(x)g(y);$$

решить уравнение, считая, что λ нехарактеристическое число.

1043. То же, предполагая

$$K(x, y) = g(y).$$

1044. То же, предполагая

$$K(x, y) = g(x).$$

1045. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^2 - 1} \int_0^1 e^x e^y \varphi(y) dy.$$

1046. Решить уравнение

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy) \varphi(y) dy.$$

1047. Найти все решения уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 y \varphi(y) dy + F(x).$$

1048. В уравнении

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy + F(x)$$

$$K(x, y) = x, \text{ если } x < y; \quad K(x, y) = y, \text{ если } x > y.$$

Найти определитель Фредгольма и резольвенту.

1049. Найти определитель Фредгольма и резольвенту для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + F(x),$$

а также первое характеристическое число и его фундаментальную функцию, если

$$K(x, y) = c.$$

1050. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy + F(x)$$

найти характеристические числа и фундаментальные функции.

1051. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy + 18x^2 - 9x - 4.$$

У к а з а н и е. См. задачу 1050.

1052. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y) \varphi(y) dy + F(x)$$

составить определитель Фредгольма, его миноры, резольвенту и фундаментальные функции.

1053. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x + y) \varphi(y) dy + F(x)$$

составить определитель Фредгольма, его минор, резольвенту, фундаментальные функции и решение.

1054. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi} \cos(x+y) \varphi(y) dy + 1.$$

У к а з а н и е. См. задачу 1053.

1055. Найти резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right] \varphi(y) dy;$$

найти фундаментальные функции.

1056. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 6 \int_0^1 \left(xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + x.$$

1057. Найти резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy + F(x).$$

1058. Найти резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 y + y^2 x) \varphi(y) dy + F(x).$$

1059. Составить резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1 + x + y) \varphi(y) dy + F(x).$$

1060. Составить резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x - y) \varphi(y) dy + F(x).$$

1061. Проверить, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy$$

имеет решение при всяком $\lambda > \frac{1}{2}$.

У к а з а н и е. Составить дифференциальное уравнение для $\varphi(x)$.

1062. Решить систему уравнений

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-y) \psi(y) dy, \quad \psi(x) = \lambda \int_0^1 (y-x) \varphi(y) dy.$$

Указание. См. задачу 1055.

1063. Дано, что

$$K(x, y) = -\frac{1}{2}, \quad \text{если } x < y,$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2}, \quad \text{если } x > y.$$

Решить систему уравнений

$$\varphi(x) = \pi \int_0^1 K(x, y) \psi(y) dy,$$

$$\psi(x) = \pi \int_0^1 K(y, x) \varphi(y) dy.$$

1064. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$(xy)' + \lambda xy = 0$$

при граничных условиях:

$$y(0) \text{ ограничено, } y(1) = 0.$$

1065. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$(xy)' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

при граничных условиях:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

1066. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — лежандровы функции порядка m :

$$[(1-x^2)y']' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0;$$

граничное условие:

$$y \text{ ограничено при } x = -1 \text{ и } x = +1.$$

1067. Решить задачу 1066 для случая $m = 0$ лежандровых многочленов.

Указание. Рассматривать уравнение

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = \frac{1}{2}.$$

1068. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — многочлены Эрмита:

$$y'' + (1 - x^2)y' + \lambda y = 0,$$

$y = 0$ при $x = \pm \infty$.

Указание. Положить $\lambda = -2 + \mu$.

1069. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — многочлены Лагерра:

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0;$$

y ограничено при $x = 0$ и $x = +\infty$.

Указание. Положить $\lambda = -1 + \mu$.

1070. Найдя соответственную функцию Грина, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

интегральным.

1071. Найдя соответственную функцию Грина, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y'(0) = hy(0), \quad y'(1) = -Hy(1)$$

интегральным уравнением.

1072. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(y) |x - y| dy + F(x).$$

Указание. Выяснив граничные условия, свести нахождение характеристических чисел к интегрированию обыкновенного уравнения.

1073. Найдя соответственную функцию Грина $G(\xi, x)$, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = -hy(1)$$

интегральным.

1074. Проверив, что фундаментальные функции уравнения задачи 1073 равны

$$\sqrt{\frac{2(h^2 + k_n^2)}{h^2 + h + k_n^2}} \sin k_n x,$$

где k_n — корень уравнения

$$k = -h \operatorname{tg} k,$$

решить уравнение

$$y(x) = k^2 \int_0^1 G(\xi, x) y(\xi) d\xi + 1.$$

1075. Проверить, что для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

в случае круга радиуса R при граничном условии $u=0$ функция Грина равна

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{R},$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки (x, y) до точек

$$(\xi, \eta) \text{ и } \left(\frac{\xi R^2}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta R^2}{\xi^2 + \eta^2} \right).$$

Убедиться в симметрии функции $G(x, y, \xi, \eta)$.

1076. Проверить, что для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

в случае сферы радиуса R при граничном условии $u=0$ функция Грина равна

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{r_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки (x, y, z) до точек (ξ, η, ζ) и

$$\left(\frac{\xi R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\eta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\zeta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right).$$

1077. Проверить, что характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_{(\Omega)} G(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где G — функция Грина задачи 1075, а (Ω) — площадь круга радиуса R , могут быть найдены нахождением характеристических чисел и фундаментальных функций уравнения

$$\psi(l) = -\lambda \int_0^R \rho J(\rho, l) \psi(\rho) d\rho,$$

где

$$J(\rho, l) = \ln l - \ln R, \quad \rho < l; \quad J(\rho, l) = \ln \rho - \ln R, \quad \rho > l,$$

ρ и l — расстояния точек (ξ, η) , (x, y) от центра круга.

Указание. Обратить внимание на симметрию граничных условий относительно центра круга.

1078. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения задачи 1077.

1079. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$V(x, y, z) = -\frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{(\Omega)} V(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta + F(x, y, z),$$

где $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ — функция Грина задачи 1076, а Ω — сфера радиуса R .

Указание. Используя симметрию относительно центра, можно прийти к заключению, что фундаментальные функции зависят только от расстояния от начала координат. Воспользоваться дифференциальным уравнением 2-го порядка, определяющим эти функции.

1080. Найти решение уравнения

$$\Delta V = \lambda V + F(a),$$

где $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, удовлетворяющее на границе сферы радиуса R с центром в начале координат условию $V = 0$; функция V должна быть задана внутри сферы.

Указание. См. задачу 1079.

1081. Фундаментальные функции уравнения

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{(\Omega)} \frac{V(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta + F(x, y, z),$$

где r — расстояние между точками (x, y, z) и (ξ, η, ζ) , называются универсальными функциями Корна.

Найти универсальные функции Корна, предполагая, что область (Ω) есть сфера радиуса R .

Указание. Вследствие симметрии искомые функции зависят только от расстояния a точки от начала координат ($a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Функция выражается линейно через решения некоторого дифференциального уравнения, и неопределённые коэффициенты вместе с характеристическими числами находят постановкой в данное уравнение. Нормирование достигается использованием дифференциального уравнения.

1082. Доказать, что интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\infty} J_\nu(xt) tu(t) dt \quad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right)$$

имеет следующее решение:

$$u(x) = \frac{f(x) + \lambda \int_0^{\infty} J_{\nu}(xt) t f(t) dt}{1 - \lambda^2}.$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулой Фурье-Ганкеля:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a da \int_0^{\infty} f(\beta) J_{\nu}(a\beta) J_{\nu}(xa) \beta d\beta.$$

1083. Доказать, что интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^{\infty} J_{\nu}(xt) t u(t) dt, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

при $\lambda = \pm 1$ имеет следующее решение:

$$u(x) = \frac{x^{\nu}}{(a^2 + x^2)^{\nu + 1/2}} \pm \frac{\sqrt{\pi} x^{\nu-1} e^{-ax}}{2^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)},$$

где через a обозначен произвольный параметр, подчинённый единственному условию $\operatorname{Re} a > 0$.

Первые два параграфа настоящего отдела содержат в себе упражнения на основную простейшую задачу вариационного исчисления. Задачи § 1 сводятся к разысканию экстремалей того или другого интеграла. В задачах 1094—1096 приёмом Эйлера изопериметрическая задача сводится к обычной. Задачи 1097—1098 являются примерами обратных задач вариационного исчисления.

Часть задач § 2 решается элементарно, путём составления полного приращения интеграла, другая часть решается обычными методами; наконец, ряд задач относится к случаю, когда общая теория неприменима и служит для выяснения различных случаев, которые могут здесь представиться.

В задачах § 3 разобраны геодезические линии на простейших поверхностях, как примеры задач на минимум интегралов в параметрической форме. Вторая половина параграфа служит для уяснения понятия трансверсальности и даёт примеры задач с переменными пределами. Следующий параграф содержит задачи на построение поля, инвариантный интеграл Гильберта и уравнение Гамильтона-Якоби. Эта теория имеет большие приложения в физике и механике.

В § 5 о минимуме интегралов, содержащих высшие производные или несколько неизвестных функций, часть задач трактует теоретические вопросы, например составление обобщённых условий трансверсальности. Следует обратить внимание на задачи 1166—1171 об устойчивости прямолинейной формы стержня при сжатии его продольной силой. В то время как при граничных условиях, данных в задачах 1166 и 1167, можно рассматривать экстремум интеграла, содержащего только первую производную от некоторой функции, в задачах 1168—1170 этого сделать нельзя; здесь приходится рассматривать или изопериметрическую задачу или же задачу о минимуме интеграла, содержащего вторую производную. В задаче 1171 требуется найти минимум выражения, которое, кроме интеграла, содержит аддитивно заданную функцию от значения искомой функции на верхнем пределе.

В § 6 задачи о разрывных решениях сводятся по большей части к установлению условий Эрдмана для угловых точек. Другой тип задач этого параграфа, в которых допускаемые до сравнения линии лежат в определённой области, решаются при помощи метода односторонней вариации.

В § 7 задачи 1210 и 1213 освещают вопрос об инвариантном характере дифференциальных выражений, получающихся из задач вариационного исчисления. В этом же параграфе дан ряд задач на вывод уравнений математической физики из принципа Гамильтона. Как в задачах этого параграфа, так и в двух последующих параграфах ставится почти исключительно вопрос об экстремальных.

§ 1. Уравнения Эйлера-Лагранжа

1084. Найти достаточные условия сильного минимума интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

при условии, что конечные точки минимальной кривой лежат соответственно на прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

Примеры: 1) $I = \int_{-1}^{+1} (y^3 - 3x^4y) dx$; 2) $I = \int_0^1 y(y+x) dx$;

$$3) I = \int_{-a}^{+a} \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 - a^2y \right) dx \quad (a > 0);$$

$$4) I = \int_0^{x_1} (6ax - y^2)y dx \quad (a > 0, x_1 > 0).$$

Указание. Воспользоваться формулой Тэйлора с остаточным членом.

1085. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (y^2 + 2xyy') dx.$$

1086. Найти экстремум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (xy + y^2 - 2y^2y') dx.$$

1087. Найти экстремум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (x^2 + y^2 + yy') dx.$$

1088. Найти экстремаль интеграла

$$I = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx,$$

проходящую через заданные точки A и B , лежащие в верхней полуплоскости $y > 0$.

1089. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \sqrt{y(1+y'^2)} dx, \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0.$$

1090. Найти в квадратурах экстремали интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} y^n \sqrt{1+y'^2} dx.$$

1091. Найти экстремали интеграла $I = \int_{M_1}^{M_2} r^n ds$ (в полярных координатах r, θ), выражающего момент n -й степени дуги M_1M_2 относительно начала координат.

1092. Материальная точка движется в плоскости так, что её скорость v обратно пропорциональна расстоянию до начала координат, причём $\int v ds$, взятый вдоль траектории между двумя любыми точками последней, является экстремумом. Найти направление силы, действующей на точку и орбиту точки.

1093. Плоская кривая является орбитой для свободного движения материальной точки под действием центральной силы и в то же время брахистохроной (см. задачу 1112) для другого движения уже при другой центральной силе. Показать, что если v и v' суть скорости точки в этих двух движениях в некоторой точке траектории, то для всех точек траектории произведение vv' остаётся постоянным.

1094. Среди всех кривых, соединяющих начало координат с прямой $x=a$, определить ту, которая, заключая вместе с осью Ox и указанной прямой площадь заданной величины S , имеет наименьшую длину.

Указание. Взять за независимую переменную $u = \int_0^x y dx$, т. е. площадь, ограниченную кривой, осью Ox и переменной ординатой (приём Эйлера).

1095. На сторонах OA и OB угла с вершиной O даны точки A и B ; требуется соединить их кратчайшей линией ACB , при условии, что площадь $OACBO$ имеет заданную величину S .

Указание. Взять за независимую переменную площадь сектора OAC , за функцию — длину радиуса OC .

1096. Найти поверхность вращения около оси OX , имеющую заданную площадь и заключающую наибольший объём при условии, что поверхность пересекает ось вращения ровно два раза.

1097. Найти все интегралы $I = \int_{(x,y)}^{(x,y')} F(x, y, y') dx$, для которых экстремалами служат прямые линии.

Указание. Составив дифференциальное уравнение экстремалей, $y'' = G(x, y, y')$, получить из уравнения Эйлера $G_{F_{y'y'}} + y' F_{y'y'} + F_{y'x} - F_y = 0$ дифференцированием по y' уравнение в частных производных для $R = F_{y'y'}$

$$\frac{\partial R}{\partial x} + y' \frac{\partial R}{\partial y} + G \frac{\partial R}{\partial y'} + G_{y'} R = 0.$$

Таким образом, существует бесчисленное множество задач вариационного исчисления, имеющих заданное уравнение $y'' = G(x, y, y')$ своим уравнением Эйлера.

1098. Найти все интегралы $I = \int_{\tilde{x}_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$, для которых экстремалами являются параболы $y = ax + bx^2$.

Указание. См. задачу 1097.

§ 2. Необходимые и достаточные условия для простейшей задачи вариационного исчисления

1099. Среди кривых, соединяющих точки $A(1, 3)$ и $B(2, 5)$, найти ту, которая даёт минимум интеграла

$$I = \int_1^2 y' (1 + x^2 y') dx.$$

Указание. Рассмотреть также полное приращение интеграла ΔI .

1100. Найти среди линий, соединяющих точки $A(0, 1)$ и $B(1, 4)$, ту, которая даёт минимум интеграла

$$I = \int_0^1 (12xy + yy' + y'^2) dx.$$

1101. Среди линий, соединяющих точки $A(1, 0)$ и $B(2, 1)$, найти ту, которая даёт минимум интеграла $I = \int_1^2 (xy'^2 - y) dx$.

Найти характер минимума.

1102. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(1,0)}^{(2,1)} (xy'^4 - 2yy'^3) dx$$

и определить его характер.

1103. Показать, что если подинтегральная функция интеграла

$$I = \int_{(A)}^{(B)} F(x, y') dx$$

не содержит явно y , то каждая экстремаль всегда может быть окружена полем, и для сильного минимума достаточно выполнения условия $\frac{\partial^2 F(x, y')}{\partial y'^2} > 0$ в каждой точке поля для любого направления.

1104. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} e^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

1105. Показать, что прямая $y=0$ даёт только слабый минимум интеграла $I = \int_{(0,0)}^{(1,0)} (y'^2 - yy'^3) dx$, хотя условие Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ в точках экстремали $y=0$ выполняется для всех y' .

1106. Найти критические сопряжённые точки на экстремалих интеграла $I = \int_A^B y \sqrt{1+y'^2} dx$ при помощи дифференциального уравнения Якоби.

1107. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (y'^2 + 2y'y - 9y^2) dx.$$

1108. Найти минимум интеграла $I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{1+y^2}{y'^2} dx$. Найти экстремали, проверить условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и найти характер минимума.

1109. Найти минимум интеграла $I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{y}{y'^2} dx$. Найти экстремали, проверить условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и найти характер минимума.

1110. Показать, что экстремали интеграла

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} y^m G(y') dx$$

получаются одна из другой преобразованием подобия и переноса параллельно оси OX . При этом касательные в сопряжённых критических точках пересекаются на оси OX .

1111. Среди кривых, соединяющих точки $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$, найти ту, которая при вращении около OX даёт наименьшую поверхность. При этом:

- 1) найти экстремали;
- 2) исследовать вопрос о возможности проведения экстремали через две данные точки;
- 3) в случае существования экстремали, проходящей через две данные точки, выяснить, какая из них даёт минимум, и найти характер этого минимума.

1112. Задача о брахистохроне. Среди кривых, лежащих в плоскости XOY (ось OY направлена вертикально вниз), найти ту, скользя по которой, тяжёлая точка скорее всего скатится из точки $O(0, 0)$ в точку $M(a, b)$. При этом начальная скорость точки равна нулю.

1113. Найти в вертикальной плоскости XOY кривую, двигаясь по которой, тяжёлая материальная точка придёт в кратчайшее время из точки $O(0, 0)$ в точку $M(a, b)$; при этом дано, что начальная скорость в точке O равна $\sqrt{2gh}$.

1114. Задача Ньютона. Найти форму, какую надо придать телу вращения, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление при равномерном движении вдоль оси вращения. При этом предполагается, что при скорости v элемент $d\sigma$ испытывает в направлении оси OX сопротивление $kv^2 \cos^3 \varphi d\sigma$. Здесь φ — угол нормали к $d\sigma$ с OX . Требуется найти экстремали, рассмотреть условие Якоби, исследовать характер минимума.

Указание. Если уравнение меридиана поверхности $y=f(x)$, то полная сила сопротивления будет равна интегралу

$$k \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y v^2 \cos^3 \varphi ds = 2\pi k v^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'^3}{1+y'^2} dx.$$

Принять за параметр $q = \frac{1}{y'}$. По поводу условия Якоби см. задачу 1110.

1115. Среди линий, соединяющих точки $A(-1, -1)$ и $B(1, 1)$, найти ту, которая даёт минимум интеграла:

$$I = \int_{(-1, -1)}^{(1, 1)} (x^2 y'^2 + 12y^2) dx.$$

Исследовать полное приращение интеграла ΔI .

Замечание. Здесь общая теория неприменима, так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ обращается в нуль внутри данного интервала.

1116. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(0, 0)}^{(1, 1)} x y'^2 dx.$$

1117. Показать, что для интеграла

$$I = \int_{(-1, 0)}^{(1, 0)} (x^2 y'^2 + x y'^3) dx$$

OX является такой экстремалью, для которой вторая вариация положительна, но интеграл всё же не имеет сильного минимума.

1118. Показать, что не существует непрерывной функции $y = \varphi(x)$, которая давала бы минимум интеграла

$$I = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx$$

и удовлетворяла бы условиям: $\varphi(-1) = -1; \varphi(1) = 1$. (Пример Вейерштрасса.)

Указание. Вывод можно основать на изучении функции $y = \frac{\arctg ax}{\arctg a}$.

1119. Найти минимум интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,1)} y'^2 \cos^2 x \, dx.$$

1120. Найти минимум интеграла

$$\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} x^{\frac{2}{3}} y'^2 \, dx.$$

§ 3. Параметрическая форма интегралов, трансверсальность

1121. Найти максимум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \left[\frac{1}{2} (xy' - yx') - R\sqrt{x'^2 + y'^2} \right] d\tau, R > 0.$$

Указание. Взять уравнение Эйлера в форме

$$\frac{1}{r} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_{x'}y - F_{y'}x}{F_1(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1122. Найти геодезические линии на поверхности вращения

$$r^2 = 2f(z)$$

(r, φ, z — цилиндрические координаты). Выяснить, для каких дуг

M_1M_2 интеграл $\int_{M_1}^{M_2} ds$ действительно будет минимумом.

1123. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

1124. Найти геодезические линии конуса $r = z \operatorname{tg} \alpha$.

1125. Исследовать геодезические линии на шаре радиуса R .

Найти экстремали, исследовать условие Якоби и выяснить характер минимума интеграла $\int ds$.

Указание. Полезно ввести сферические координаты.

1126. Геодезические линии на параболоиде вращения $2z = r^2$. При каком условии геодезическая линия между двумя точками на одном меридиане будет кратчайшим расстоянием?

1127. Для сплюснутого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b$$

экватор ($y = 0, x^2 + z^2 = a^2$) есть геодезическая линия. Показать, что сопряжённая с точкой A критическая точка A' этой линии отстоит от A на расстоянии πb .

Указание. Применить дифференциальное уравнение Якоби.

1128. Имеем две окружности радиуса r с центрами в точках $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$. Кривая лежит в верхней полуплоскости, кончаясь на данных окружностях, а при вращении вокруг OX даёт поверхность наименьшей площади. В каких точках и под каким углом она пересекает окружности?

1129. Написать условие трансверсальности для интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{1}{2} (xy' - x'y) - R \sqrt{x'^2 + y'^2} \right] d\tau.$$

1130. Для каких интегралов вида $\int F(x, y, y') dx$ трансверсальность приводится к ортогональности?

1131. Найти все интегралы $\int f(x, y, y') dx$, у которых трансверсали пересекают экстремали под углом 45° .

1132. Среди линий, соединяющих точку $O(0, 0)$ с кривой $y^3 = 2 - x$, найти ту, которая даёт минимум интеграла

$$I = \frac{1}{2} \int_{(0, 0)}^{(x_1, y_1)} (y'^2 - y^2) dx.$$

1133. В вертикальной плоскости XOY с направленной вниз осью OY найти кривую, двигаясь вдоль которой, тяжёлая материальная точка придёт в кратчайшее время из точки O на заданную прямую $y = (x - c) \operatorname{tg} \beta$; $0 < \beta < \pi$. При этом начальная скорость равна нулю.

Указание. Положить $y' = \operatorname{ctg} \phi$, где ϕ — параметр.

§ 4. Уравнение Гамильтона-Якоби

1134. Найти функцию поля $p(x, y)$ и само поле экстремалей, проходящих через начало координат, интеграла

$$\int_{(0, 0)}^{(x, y)} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx \quad (y > 0).$$

1135. Дано, что семейство экстремалей проходит через точку (x_0, y_0) . Обозначая через (x_1, y_1) точку пересечения этих экстремалей с некоторой трансверсалью, показать, что взятый по экстремали интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} f(x, y, y') dx$$

имеет постоянную величину.

1136. Семейство экстремалей, зависящих от одного параметра, пересечено двумя трансверсальями. Доказать, что интеграл $\int f(x, y, y') dx$, взятый по любой экстремали между точками пересечения с трансверсальями, имеет постоянное значение.

Указание к задачам 1135 и 1136. Использовать криволинейный интеграл Гильберта

$$w = \int [f(x, y, p) - pf_p(x, y, p)] dx + f_p(x, y, p) dy,$$

а также условие трансверсальности.

1137. Среди линий, соединяющих прямую $x=0$ с точкой $A(x_1, y_1)$, где $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, найти ту, которая даёт минимум интегралу:

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+v'^2}}{y} dx \quad (y > 0).$$

Составить также уравнение Гамильтона-Якоби и найти эквидистантные кривые для экстремалей, трансверсально пересекающих прямую $x=0$.

1138. Найти уравнение Гамильтона-Якоби и трансверсали для поля экстремалей $y=ax$ интеграла $\int y'^2 dx$.

1139. Найти трансверсали для поля экстремалей $y=ax$ интеграла

$$I = \int G(y') dx.$$

1140. Найти трансверсали для поля экстремалей $y=x+a$ интеграла

$$I = \int (xy'^4 - 2yy'^3) dx.$$

1141. Найти трансверсали для поля экстремалей $y=x - \frac{x^2}{a}$ интеграла

$$\int \sqrt{y(1-y'^2)} dx; \quad (a > 0, x > 0; y > 0).$$

1142. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} G(y) \sqrt{1+y'^2} dx$$

путём решения уравнения Гамильтона-Якоби и обратно — найти решение уравнения Гамильтона-Якоби, исходя из первого интеграла уравнения Эйлера.

1143. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

при помощи решения уравнения Гамильтона-Якоби.

1144. Зная, что путями лучей света являются такие кривые, по которым свет распространяется в наикратчайшее время, и зная, что скорость света обратно пропорциональна коэффициенту преломления среды n , показать, что брахистохрона (задача 1112) есть путь света в среде, в которой коэффициент преломления n выражается формулой

$$n = \frac{1}{\sqrt{2gy}}.$$

В связи с этим найти пути лучей света в такой среде и уравнение волновых поверхностей. Для брахистохрон найти синхроны, т. е. кривые, куда точки, двигающиеся из точки $(0, 0)$ по разным брахистохронам, приходят одновременно.

1145. Найти траекторию материальной точки, движущейся под влиянием силы тяжести, исходя из принципа наименьшего действия, согласно которому для траектории точки первая вариация интеграла «действие» обращается в нуль:

$$I = \int \sqrt{2(U + h)} ds.$$

Здесь U — силовая функция; в данном случае $U = -gy$, если ось OY направлена вверх.

Составить уравнение Гамильтона-Якоби и, решив его, найти экстремали, в частности те, которые проходят через начало координат. Исследовать характер минимума интеграла.

Указание. Если масса точки равна единице, то закон живой силы даёт:

$$\frac{v^2}{2} = h - gy.$$

1146. Найти траекторию для движения точки в плоскости под действием силы отталкивания от оси OX , пропорциональной расстоянию точки до этой прямой и направленной параллельно оси OY при условии, что интеграл живой силы имеет вид $\frac{v^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 0$, исходя из интеграла «действие»

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (y > 0).$$

1147. Материальная точка описывает окружность $r = 2R \cos \theta$ (в полярных координатах r и θ) радиуса R под действием центральной

силы $\frac{k}{r^5}$, обратно пропорциональной пятой степени расстояния от центра силы, лежащего в начале координат. Показать, что интеграл «действие», взятый по любой дуге этой окружности: $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, является сильным минимумом.

Указание. В рассматриваемом случае $U = \frac{k}{4r^4}$, и действие пропорционально $\int \sqrt{\frac{k}{4r^4} + h} ds$. Показать, что $h = 0$.

1148. Изучить движение материальной точки под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию от центра O силы, исходя из принципа наименьшего действия и применяя метод Якоби-Гамильтона.

Показать, что в сопряжённых критических точках какой-либо траектории точки, рассматриваемой как экстремаль интеграла «действия», касательные взаимно перпендикулярны.

1149. Найти геодезические линии на поверхности Лиувилля, для которой элемент дуги имеет вид

$$ds^2 = [f(x) + g(y)](dx^2 + dy^2),$$

решая уравнение Гамильтона-Якоби.

1150. Доказать, что для поверхностей, у которых элемент дуги определяется равенством

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2,$$

уравнение Якоби-Гамильтона для задачи о геодезической линии имеет вид:

$$G \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + E \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 = EG - F^2.$$

1151. Найти кратчайшее расстояние между заданной точкой и параболой $v^2 = 2px$.

1152. Найти минимум интеграла

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 + y y' + y' + y \right) dx,$$

если значения на концах интервала не даны.

1153. Найти кратчайшее расстояние между двумя окружностями C_1 и C_2 , лежащими в одной плоскости.

1154. Для задачи о нахождении минимума интеграла

$$I = \int f(x, y, y') dx$$

дано уравнение Гамильтона-Якоби: $w_x = H(x, y, w_y)$. Найти функцию $f(x, y, y')$.

Пример. $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 1$.

Указание. Воспользоваться равенствами:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y, p) - pf_p(x, y, p), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = f_p(x, y, p),$$

где p — функция поля.

1155. Уравнение Гамильтона-Якоби для задачи о минимуме интеграла

$$\int f(x, y, y') dx$$

имеет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Найти функцию $f(x, y, y')$.

§ 5. Интегралы, зависящие от производных высших порядков или от нескольких функций

1156. Для задачи о минимуме интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'') dx$$

найти уравнение Эйлера и граничные условия, считая заданными только координаты конечных точек.

1157. Показать, что уравнение Эйлера для условий задачи 1156 имеет первый интеграл:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = \text{const},$$

если f не содержит y . В случае же, если f не содержит x , то первый интеграл можно написать в таком виде:

$$f - y' \left[\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = \text{const}.$$

Если, наконец, f не содержит ни x , ни y , то уравнение Эйлера имеет второй интеграл:

$$f - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = C_1 + C_2 y'.$$

1158. Среди линий, проходящих через точки $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, найти ту, которая обращает в минимум интеграл $\int_0^1 y'^2 dx$ в двух случаях: 1) если $y'(0) = a$; $y'(1) = b$; 2) если не дано никаких других условий.

1159. Найти экстремали интеграла $\int (y'')^n dx$.

1160. Ищется минимум интеграла $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'') dx$, причём для переменного верхнего предела дано условие: $\varphi(x, y, y') = 0$. Найти условие на этом конце, обобщающее условие трансверсальности.

1161. Та же задача, но на верхнем пределе даны значение $y'(x_2)$ и кривая $h(x, y) = 0$, на которой должна лежать точка (x_2, y_2) .

1162. Найти такую плоскую кривую, чтобы площадь, ограниченная дугой M_1M_2 , нормальными M_1C_1 и M_2C_2 в точках M_1 и M_2 и дугой эволюты C_1C_2 , обратилась в минимум. При этом даны величины x_1, y_1, y_1' и x_2, y_2, y_2' , т. е. положения и направления концов M_1M_2 .
Пример. $x_1 = y_1 = 0, y_1' = 1; x_2 = 1, y_2 = 0; y_2' = -1$.

Указание. Положить $y' = \operatorname{tg} \phi$ и принять ϕ за параметр.

1163. Прежняя задача, только не даны направления в точках M_1 и M_2 . При этом $M_1(0, 0)$ и $M_2(2\pi, 0)$.

1164. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ при любом выборе функции y была полной производной по x от некоторой функции

$$\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

1165. Является ли $v = x^2 y'' + xy'' + (2xy - 1)y' + y^2 + 2x$ полной производной от функции $u(x, y, y', y'')$, и если это так, то найти функцию u .

1166. Вертикальный стержень зажат на своих концах O и A . Нижний конец O неподвижен, верхний может перемещаться по горизонталу. На верхний конец его A действует сила P , направленная вниз. Определить критическую нагрузку P^0 , при которой прямолинейная форма стержня перестаёт быть устойчивой. Модуль упругости E . Момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно к плоскости изгиба, равен I .

Указание. В случае равновесия полная потенциальная энергия должна быть минимумом. При этом потенциальная энергия изгиба выразится интегралом $\frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{ds}{\rho^2}$, где ρ — радиус кривизны. Потенциальная энергия,

происходящая от опускания верхнего конца, равна $P \cdot \Delta y$, где Δy — смещение конца A против неизогнутого состояния (ось OY направлена вертикально вверх). За искомую функцию полезно принять угол θ между касательной к стержню и осью OY . На концах очевидно $\theta = 0$. На нижнем конце должно быть равно нулю боковое смещение конца.

1167. Тот же вопрос, но при условии, что нижний конец зажат, верхний свободен, т. е. на нижнем конце $\theta = 0$, на верхнем не задано.

Указание. Вопрос о минимуме разобрать в предположении малых прогибов, считая $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

1168. Та же задача при условии опёртых концов.

Указание. Считать прогибы малыми и положить

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dy^2}; \quad \theta = \frac{dv}{dy},$$

где v — горизонтальное смещение точки. Полная потенциальная энергия может быть выражена интегралом

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI \left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right)^2 - P \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \right\} dy.$$

На концах $v = 0$.

1169. Та же задача, но при условии, что оба конца зажаты, т. е. на них $v = 0$, $v' = 0$.

1170. Та же задача, но нижний конец зажат, а верхний опёрт, т. е. на верхнем конце $v = 0$, а v' не задано.

1171. Горизонтальный стержень AB длиной l одним концом свободно опёрт, а другим лежит на упругой опоре и сжимается двумя горизонтальными силами P . Определить критическую нагрузку P_0 , считая, что при вертикальном смещении v упругая опора даёт сопротивление, равное $-kv$.

Указание. Потенциальная энергия упругой опоры равна $\frac{kv^2}{2}$.

1172. Если интеграл $I = \int f(x, y, y', y'') dx$ преобразовать по Вейерштрассу в $I = \int F(x, x', x'', y, y', y'') dt$, то функция F будет тождественно удовлетворять равенствам:

$$F = x' F_{x'} + y' F_{y'} + 2x'' F_{x''} + 2y'' F_{y''}; \quad 0 = x' F_{x''} + y' F_{y''}.$$

1173. Показать, что уравнения Эйлера для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx$$

допускают следующие первые интегралы:

$$1) \frac{\partial f}{\partial y'} = C, \text{ если } f \text{ не содержит } y;$$

$$2) f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = C, \text{ если } f \text{ не содержит } x.$$

1174. Показать, что уравнения Эйлера для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx$$

могут быть представлены так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \eta}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \zeta}; \quad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z};$$

$$H(x, y, z, \eta, \zeta) = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial z'} - f; \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad \zeta = \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

1175. Найти условие трансверсальности для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx,$$

если конечная точка лежит на поверхности $S(x, y, z) = 0$.

1176. Та же задача, но конечная точка лежит на кривой

$$y = F(x), \quad z = G(x).$$

1177. Показать, что для интегралов $\int f(x, y, z) ds$ и только для них условия трансверсальности на поверхности или кривой совпадают с условиями ортогональности.

1178. Ищется минимум интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} \mu(x, y, z) ds,$$

где $\mu(x, y, z)$ — положительная функция, непрерывная вместе со своими производными. Показать, что:

1) В точке пересечения экстремали с поверхностью уровня $\mu = C$ соприкасающаяся плоскость экстремали содержит нормаль к поверхности уровня.

2) Если ϕ — угол между касательной к экстремали и нормалью к поверхности уровня, причём поверхность проходит через точку касания, то $\mu \sin \phi = C$ на всей экстремали.

3) Условие Вейерштрасса выполняется.

1179. Гибкая нить находится под действием силы F , имеющей потенциал U , так что

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

При этом сила F отнесена к единице длины нити. Уравнения равновесия нити имеют вид:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Здесь T — натяжение нити, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Из этих уравнений следует, что $T = U + h$, где h — постоянная.

Доказать, что условия равновесия нити являются необходимыми условиями минимума интеграла $\int \varphi(x, y, z) ds$, где $\varphi = U + h$.

1180. Найти дифференциальные уравнения геодезических линий в n -мерном пространстве Римана, т. е. экстремали интеграла, определяющего длину кривой между двумя точками:

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) x'_i x'_k} d\tau.$$

При этом квадратичная форма $dS^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k$ симметрична (т. е. $g_{ik} = g_{ki}$) и положительна.

1181. Найти кривую между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ так, чтобы её линейный момент относительно оси OX , т. е. интеграл

$$\int \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

был минимумом.

1182. Найти минимум интеграла $\int \sqrt{h - x^2 - y^2 - z^2} ds$, дающего «действие» в случае, если материальная точка притягивается к неподвижному центру силою, пропорциональною расстоянию.

1) Найти экстремали непосредственно и по способу Гамильтона-Якоби.

2) Найти сопряжённые критические точки.

1183. Найти кратчайшее расстояние между кругом

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

и гиперболой

$$z^2 - y^2 = c^2, \quad x = 0.$$

§ 6. Разрывные решения. Односторонняя вариация

1184. Найти разрывные решения с угловой точкой для задачи о минимуме интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} y'^2 (y' - 1)^2 dx.$$

1185. Среди линий, идущих из точки $A(0, 0)$ в точку $B(2, 0)$, найти линию с угловой точкой, вдоль которой интеграл

$$\int_A^B (y'^4 - 6y'^2) dx$$

принимает минимальное значение.

1186. Найти разрывные решения с угловой точкой задачи о минимуме интеграла

$$\int_{M_1}^{M_2} (y'^4 - 2y'^2) dx.$$

1187. Для задачи об экстремуме интеграла

$$\int_{(0, 0)}^{(x_1, y_1)} \sin y' dx$$

найти непрерывные решения, а также решения с угловой точкой.

1188. Среди всех цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными OZ , найти ту, на которой плоскость $z=0$, конус $z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} a$ и две образующие, проходящие через точку $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, отсекают наименьшую площадь.

Указание. См. задачу 1091.

1189. В плоскости XOY найти кривую, соединяющую две точки $M_1(r_1, \theta_1)$ и $M_2(r_2, \theta_2)$ и имеющую наименьший момент инерции относительно точки O . Найти непрерывные и разрывные решения.

1190. Среди линий, лежащих в верхней полуплоскости и соединяющих точки A и B , найти ту, которая при вращении вокруг OX даёт наименьшую поверхность.

Найти разрывные решения (см. задачу 1111).

1191. Найти кривую, лежащую в области $y \geq k > 0$, соединяющую точки $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$ и образующую при вращении вокруг OX наименьшую поверхность.

1192. Среди линий, соединяющих данные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, найти разрывное решение задачи о минимуме интеграла

$$I = \int_A^B \sqrt{(h - gy)(x'^2 + y'^2)} d\tau.$$

1193. Найти кратчайший путь из точки $A(-2, 3)$ в точку $B(2, 3)$, расположенный в области $y \leq x^2$.

Указание. На пограничной линии в силу односторонности вариации должно быть выполнено неравенство.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \leq 0.$$

1194. Среди кривых, соединяющих точки $A(0, 0)$ и $B(b, 0)$ и лежащих в области $y \geq 0$, найти ту, которая даёт максимум интеграла

$$\int_A^B (y^2 - ay\sqrt{1+y'^2}) dx$$

при условии $b \geq 2a > 0$.

1195. Ищется минимум интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{U(x, y) + h} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

в области $y \geq f(x)$ при условии, что на одном пределе заданы значения функции и её производной (a, y_a, y'_a) , а на другом пределе дано только само число b . Показать, что если экстремаль встречает граничную кривую $y = f(x)$, то её дальнейшее продолжение составляет с граничной кривой тот же угол, т. е. угол падения равен углу отражения.

1196. Внутри выпуклой области B заданы две точки M_1 и M_2 . Найти кратчайший путь из M_1 в M_2 с заходом на границу B .

1197. Найти минимум интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 - y'^2} dx$$

при условиях

$$y \geq 0; \quad 1 - y'^2 \geq 0.$$

1198. Между кривыми, соединяющими точки $A(a, y_a)$ и $B(b, y_b)$, найти ту, которая даёт экстремальное значение интегралу

$$\int_a^b y \sqrt{1 - y^2 y'^2} dx$$

при условии

$$y \geq 0, \quad 1 - y^2 y'^2 \geq 0.$$

1199. На поверхности $z = \varphi(x, y)$ даны точки M_1 и M_2 .

Провести на поверхности кратчайшую линию из M_1 в M_2 при условии, чтобы наклон кривой, т. е. $\frac{dz}{ds}$, не превосходил данного числа k (горная железная дорога).

1200. Соединить точки A и B кратчайшим путём, выходящим из A в данном направлении и имеющим кривизну, не превосходящую данной величины $\frac{1}{R}$. Точка B лежит вне кругов радиуса R , касающихся данного направления в точке A . (Задача Маркова).

1201. Свет идёт по такому пути, что первая вариация интеграла

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} n(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

вдоль пути равна нулю.

При этом $n(x, y)$ — показатель преломления среды.

Если луч проходит из одной среды в другую, то $n(x, y)$ может plötzlich измениться. Вывести условие преломления луча света при переходе луча из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 (см. задачу 1178).

§ 7. Кратные интегралы

1202. Составить уравнение Эйлера для интеграла $\iint \nu dS$, где ν — отрезок нормали между поверхностью и плоскостью xu .

1203. Уравнение Эйлера для интеграла

$$\iint_S f(x, y, z, p, q) dx dy,$$

где f принимает на контуре заданные значения, способно обращаться в тождество. Доказать, что необходимым и достаточным условием для этого является равенство:

$$f = L(x, y, z) + M(x, y, z)p + N(x, y, z)q; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$

(С другой стороны, необходимым и достаточным условием является независимость величины интеграла от вида поверхности S .)

1204. Найти уравнение Эйлера для задачи о минимуме интеграла

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf(x, y) \right] dx dy$$

при заданных значениях u на контуре области.

1205. Найти минимум интеграла

$$\iint_S (p^2 + q^2) dx dy,$$

если даны значения функции u на контуре. При этом:

1) составить уравнение Эйлера;

2) показать, что всякое решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям на контуре, даёт сильный минимум.

1206. Найти уравнение Эйлера для задачи об экстремуме интеграла

$$I = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Указание. Обратит внимание на то, что можно найти функцию $\varphi(x, y)$, имеющую непрерывные первые производные, но не имеющую вторых производных и, следовательно, не удовлетворяющую уравнению Эйлера, но, тем не менее, обращающую первую вариацию интеграла в нуль.

1207. Получить дифференциальное уравнение минимальных поверхностей, т. е. среди всех поверхностей $z = z(x, y)$, опирающихся на заданный контур C (или несколько контуров), найти ту, которая имеет наименьшую площадь. В частности, найти минимальные поверхности, уравнение которых имеет форму $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

1208. Показать, что если мы имеем минимальную поверхность $z = z(x, y)$, опирающуюся на заданный контур C , то эта поверхность даёт сильный минимум интеграла

$$I = \iint_S \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

1209. Показать, что задача о минимуме интеграла

$$\iint G(\sqrt{u^2 + v^2}) dx dy,$$

где

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

приводит к уравнению Эйлера

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

где

$$c^2 = \frac{-q^2 G'(q)}{q G''(q) - G'(q)}$$

(к такому уравнению приводит задача о плоском стационарном адиабатическом движении сжимаемой жидкости с потенциалом скорости φ , если положить:

$$G(q) = [2a^2 + (\gamma - 1)(U^2 - q^2)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$

a, γ, U — постоянные).

1210. Пусть $\xi(x, y), \eta(x, y)$ — криволинейные координаты и пусть:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = e(\xi, \eta) d\xi^2 + 2f(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(\xi, \eta) d\eta^2.$$

Исходя из первой вариации интеграла

$$J = \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

показать, что оператор Лапласа Δu преобразуется к новым криволинейным координатам по формуле:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{eu_\eta - fu_\xi}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \right\}.$$

Пример. Полярные координаты, где $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Указание. Если

$$D = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}},$$

то

$$\xi_x = \frac{D(\xi, y)}{D(x, y)} = Dy_\eta; \quad \xi_y = -Dx_\eta; \quad \eta_x = -Dy_\xi; \quad \eta_y = Dx_\xi;$$

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = D^2 g; \quad \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = -D^2 f; \quad \eta_x^2 + \eta_y^2 = D^2 e.$$

Поэтому

$$J = \iint D [gu_\xi^2 - 2fu_\xi u_\eta + eu_\eta^2] d\xi d\eta.$$

1211. Значения функции u даны на поверхности объёма V . Найти необходимое условие минимума интеграла

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

1212. Тот же вопрос в применении к интегралу:

$$\iiint_V \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} dx dy dz.$$

1213. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — криволинейные ортогональные координаты, определяемые формулами:

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Пусть также

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 d\xi_1^2 + H_2^2 d\xi_2^2 + H_3^2 d\xi_3^2.$$

Пользуясь первой вариацией интеграла

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

показать, что оператор Лапласа Δu в новых координатах имеет вид:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right].$$

Пример. Сферические координаты, где

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2.$$

1214. Показать, что для задачи о минимуме интеграла

$$I = \frac{1}{2} \iiint (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) dx dy dz dt,$$

где

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; & H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; & H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \\ E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}; & E_y &= -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}; & E_z &= -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}$$

уравнения Эйлера совпадают с уравнениями Максвелла распространения электромагнитных волн:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial t}; & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

1215. Составить дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня, исходя из принципа Гамильтона.

Стержень расположен по оси OX между точками $(0, 0, 0)$ и $(l, 0, 0)$ и работает на продольное сжатие и растяжение. Обозначения: $u(x, t)$ — смещение; $\omega(x)$ — площадь поперечного сечения; $\rho(x)$ — плотность материала; E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона; $I(x)$ — полярный момент поперечного сечения относительно точки $(x, 0, 0)$; $F(x)$ — внешняя сила на единицу массы. Выяснить, какие граничные условия можно рассматривать на концах.

Указание. Потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} E \int_0^l \omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx,$$

кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^l \rho I \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx.$$

Для работы внешних сил имеем выражение

$$\delta A = \int_0^l \rho \omega F \delta u dx.$$

1216. Составить дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний стержня, исходя из принципа Гамильтона. Стержень длиной l расположен по оси OX и работает на изгиб. Колебания происходят в плоскости XOY . Обозначения: $v(x, t)$ — смещение; $\omega(x)$ — поперечное сечение; $\rho(x)$ — плотность материала; E — модуль упругости; $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести его перпендикулярно к XOY ; $F(x)$ — внешняя сила, отнесённая к единице массы. Найти также вид предельных условий, которые должны выполняться в разных случаях.

У к а з а н и е. Потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} E \int_0^l I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Кинетическая энергия имеет выражение

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \omega \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 dx,$$

если учитывать и поступательное и вращательное движение элемента стержня.

1217. Исходя из принципа Гамильтона, составить дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний мембраны, расположенной в плоскости XOY и работающей только на растяжение. Обозначения: $\zeta(x, y, t)$ — смещение, перпендикулярное к XOY ; $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность; S_0 — площадь мембраны в положении равновесия; P — натяжение мембраны, постоянное и дающее силу, действующую в плоскости XOY на единицу длины контура, ограничивающего какой-либо элемент площади; $F(x, y)$ — внешняя сила, перпендикулярная к XOY , отнесённая к единице массы; φ — внешняя сила, перпендикулярная к XOY , действующая на контуре и отнесённая к единице длины контура. Найти также вид предельного условия на контуре S мембраны, когда он не закреплён (если он закреплён, то предельное условие будет $\zeta_c = \varphi(c, t)$ — заданная функция положения точки на контуре).

У к а з а н и е. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

потенциальная энергия

$$V = \iint_{S_0} P (dS - dS_0).$$

Для малых деформаций

$$V = \frac{1}{2} P \iint_{S_0} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

1218. Составить дифференциальное уравнение равновесия мембраны и выяснить граничные условия в том случае, когда на неё действует внешняя сила только на контуре, равная $k(s)\zeta(s)$, где k — коэффициент пропорциональности, а $\zeta(s)$ — поперечное смещение точки мембраны. Сила направлена противоположно смещению.

У к а з а н и е. Потенциальная энергия, происходящая от внешней силы, равна

$$\frac{1}{2} \int k(s) \zeta^2(s) ds.$$

1219. Составить точное дифференциальное уравнение равновесия мембраны, служащей дном цилиндрического сосуда, в котором налита жидкость плотностью ρ_0 , глубиной h (относительно первоначального положения мембраны). Обозначения: $\zeta(x, y, t)$ — смещение точки мембраны в вертикальном направлении OZ (положительное направление вниз), P — постоянное натяжение мембраны.

У к а з а н и е. Потенциальная энергия, происходящая от силы тяжести,

$$V_1 = \frac{1}{2} g \iint_{S_0} \rho_0 (h^2 - \zeta^2) dx dy,$$

энергия растяжения мембраны

$$V_2 = P \iint_{S_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} - 1 \right) dx dy.$$

При этом

$$\iint_{S_0} \rho_0 (h + \zeta) dx dy = M - \text{масса жидкости.}$$

1220. Исходя из принципа Гамильтона, составить уравнение малых поперечных колебаний тонкой пластинки. Пластика работает на растяжение и изгиб, толщина её $2h$. В положении равновесия срединная плоскость пластинки лежит в плоскости XOY и ограничена контуром C . При этом: $\zeta(x, y, t)$ — смещение точки по OZ , ρ — постоянная плотность пластинки, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, внешних сил нет. Выяснить характер предельных условий.

У к а з а н и е. Кинетическая энергия пластинки

$$T = \rho h \iint_{S_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx dy.$$

Потенциальная энергия

$$V = \frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \iint_{S_0} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{2(1-\sigma)}{R_1 R_2} \right] dx dy.$$

Полезны приближённые формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}; \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

В дальнейшем величины $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial y}$ полезно выразить через $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n}$ и $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial s}$, где n и s — направления нормали и касательной к контуру.

1221. Вывести уравнения равновесия упругого изотропного тела, исходя из принципа виртуальных перемещений, т. е. из условия:

$$\delta \iiint \Pi \, dx \, dy \, dz = 0,$$

где

$$\Pi = A - W, \quad W = \rho(uX + vY + wZ),$$

$$2A = (\lambda + 2\mu)(u_x + v_y + w_z)^2 + \\ + \mu[(w_y + v_z)^2 + (v_x + u_y)^2 + (u_z + w_x)^2 - 4v_y w_z - 4w_z u_x - 4u_x v_y],$$

λ и μ — упругие постоянные, A — энергия деформации, рассчитанная на единицу объёма, X, Y, Z — составляющие внешней силы на единицу массы, u, v, w — перемещения точек упругого тела, заданные на поверхности; u_x обозначает $\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д.

1222. Вывести уравнения движения упругого изотропного тела, исходя из принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) \, dt = 0,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz,$$

а величина Π имеет то же значение, что и в задаче 1221.

§ 8. Изопериметрические задачи

1223. Найти форму тела вращения относительно оси OX , однородного, имеющего данный объём V и оказывающего наибольшее притяжение по закону Ньютона на точку, лежащую на пересечении тела с OX .

1224. Найти однородное тело вращения около оси OX с заданным объёмом V и с наименьшим моментом инерции относительно оси OZ .

1225. Стоимость земли зависит от её положения и может быть характеризована заданием положительной функции $\rho(x, y)$. Среди кривых длиной l , соединяющих точки M_1 и M_2 , найти ту, которая вместе с хордой $M_1 M_2$ ограничивала бы площадь наибольшей стоимости.

Указание. Ищется максимум $\iint (\rho(x, y) \, dx \, dy)$; найти только кривизну экстремали.

1226. Из кривых длиной l , соединяющих точки $M_1(-a, 0)$, $M_2(a, 0)$, определить ту, которая вместе с OX ограничивает наибольшую площадь. При этом $l > 2a$.

1227. Соединить две неизвестные точки M_1 и M_2 на оси OX кривой наименьшей длины, заключающей вместе с OX площадь данной величины S .

1228. Найти замкнутую кривую данной длины l , ограничивающую площадь наибольшей величины.

1229. На двух данных ординатах AA_1 ($x=a$) и BB_1 ($x=b$) найти такие точки M и N и такую соединяющую их кривую, чтобы площадь $AMNB$ была максимальная. При этом дана сумма длин дуги MN и ординат AM и BN .

1230. Среди всех кривых, проведённых между ординатами $x=x_0$ и $x=x_1$ и образующих вместе с ними и OX заданной величины площадь, найти ту, у которой центр тяжести этой площади занимает наименьшее положение.

1231. Данную точку $(0, b)$ оси OY соединить с OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY данную площадь S и образующей при вращении около OX наименьшую поверхность.

1232. Из начала координат плоскости XOY провести кривую OA длиной l , кончающуюся на прямой $y=h$ и образующую вместе с ординатой точки A и осью OX наибольшую площадь.

1233. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку M_1 на одной стороне угла с неизвестной точкой другой стороны M_2 кривой длины l так, чтобы площадь между кривой и сторонами угла была наибольшая.

1234. Среди кривых длиной l , соединяющих точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, найти ту, у которой центр тяжести лежит наиболее низко.

1235. Найти форму тяжёлой однородной нити, один конец которой закреплён в точке $B(x_1, y_1)$, а другой конец находится на оси OY . Длина нити l .

1236. Среди кривых, проведённых от периферии круга $x^2 + y^2 = R^2$ в точку $M(a, 0)$ и для которых площади сектора с вершиной в центре круга имеют данное значение, найти такую, для которой потенциал дуги в точке O имеет наименьшее значение. Плотность постоянна, притяжение — по закону Ньютона.

1237. Среди кривых длиной l , проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и имеющих в этих точках данные углы наклона θ_1 и θ_2 , определить ту, которая вместе с нормальными $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ и дугой эволюты $N_1 N_2$ заключает наименьшую площадь.

Указание. Взять дугу s за независимую переменную, а угол θ за функцию. Получим:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^l \rho ds = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{ds}{\theta'} = \min; \quad \int_0^l \cos \theta ds = x_2 - x_1;$$

$$\int_0^l \sin \theta ds = y_2 - y_1.$$

1238. Найти положение равновесия упругого стержня, зажатого на концах.

Указание. Надо найти экстремум интеграла $I = \int_0^l \frac{dx}{r^2}$, где r — радиус кривизны. Условия на концах дают координаты концов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а также углы наклона θ_1 и θ_2 .

Задача сводится к изопериметрической, если за функцию взять угол наклона θ .

1239. Самолёт имеет собственную скорость u . Ветер дует параллельно оси OX со скоростью $v < u$. Самолёт имеет запас горючего на определённое время полёта. Определить максимальную площадь кривой, какую может описать самолёт при полёте с возвратом в точку отлёта.

1240. Найти минимум интеграла $\int_0^\pi y'^2 dx$, если $\int_0^\pi y^2 dx = 1$, $y(0) = y(\pi) = 0$. Найти экстремали и проверить условие Якоби.

1241. Найти минимум интеграла $\int_0^\pi y''^2 dx$ при условиях:

$$\int_0^\pi y'^2 dx = 1; \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

1242. Найти минимум $\int_0^\pi y''^2 dx$, если $\int_0^\pi y^2 dx = 1$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

1243. Среди линий, идущих из $A(0, 0)$ в $B\left(1, \frac{1}{4}\right)$, найти ту, которая даёт экстремум интегралу $\int_0^1 y'^2 dx$ при условии:

$$\int_0^1 (y - y'^2) dx = \frac{1}{12}.$$

1244. Из линий от точки $A(0, 0, 0)$ до $B(1, 1, 1)$, у которых

$$\int_A^B (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2,$$

найти ту, у которой

$$\int_A^B (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

— минимум. Рассмотреть такую же задачу при условии, что про точку A известно лишь, что она лежит в плоскости YOZ .

1245. Среди всех поверхностей $z = z(x, y)$, опирающихся на заданный контур L и ограничивающих вместе с цилиндром, проектирующим L на XOY , и основанием этого цилиндра данный объём v , найти ту, которая имеет наименьшую площадь. При этом составить уравнение Эйлера и выяснить его геометрическое значение.

1246. Среди поверхностей с заданной площадью S , опирающихся на плоскость XOY и ограничивающих данный объём V , найти ту, у которой центр тяжести этого объёма имел бы наименьшее положение. При этом выяснить геометрическое значение уравнения Эйлера и найти, какие граничные условия должны выполняться на линии пересечения поверхности с плоскостью XOY .

1247. Среди всех поверхностей $z = z(x, y)$ заданной площади и опирающихся на данный контур найти ту, у которой центр тяжести лежит наиболее низко. Составить уравнение Эйлера и выяснить его геометрическое значение.

1248. Среди замкнутых поверхностей данной площади найти ограничивающую наибольший объём. Составить уравнение Эйлера, выяснить его геометрическое значение и показать, что сферическая поверхность удовлетворяет уравнению Эйлера.

1249. Дана система материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n . Масса точки M_v равна m_v , координаты её — x_v, y_v, z_v , действующая на неё сила имеет составляющие X_v, Y_v, Z_v . Пусть существует функция $V(x_v, y_v, z_v, t)$ — потенциальная энергия, такая, что

$$X_v = -\frac{\partial V}{\partial x_v}, \quad Y_v = -\frac{\partial V}{\partial y_v}, \quad Z_v = -\frac{\partial V}{\partial z_v}.$$

Обозначим через T кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n m_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + \dot{z}_v^2);$$

при этом точка означает дифференцирование по t . Пусть дано m условий вида $\varphi_a(x_v, y_v, z_v, t) = 0$, ($a = 1, 2, \dots, m$).

Показать, что отыскание экстремума интеграла Гамильтона

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$

при заданных x_v, y_v, z_v для $t = t_1$ и $t = t_2$ приводит к дифференциальным уравнениям Лагранжа первого рода:

$$m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = X_v + \sum_{a=1}^m \lambda_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_v}.$$

Если же выразить координаты через $r = 3n - m$ независимых переменных q_1, q_2, \dots, q_r и t , то придём к дифференциальным уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \frac{\partial V}{\partial q_\nu} = 0; \quad (\nu = 1, 2, \dots, r).$$

1250. При обозначениях предыдущей задачи допустим, что функции φ_α и $V = -U$ не содержат t . Назовём траекторией кривую в $3n$ -мерном пространстве: $x_\nu = x_\nu(\tau)$, $y_\nu = y_\nu(\tau)$, $z_\nu = z_\nu(\tau)$, удовлетворяющую всем условиям $\varphi_\alpha(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0$.

Каждому движению точек под действием заданных сил отвечает своя траектория. Показать, что эта траектория является экстремалью для задачи о минимуме интеграла «действия»

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_\nu (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)} d\tau.$$

Здесь h — постоянная интеграла живых сил $T = U + h$, а дифференцирование совершается по τ ; значения переменных на концах заданы.

Указание. Составив уравнения Эйлера, выбрать τ так, чтобы оказалось:

$$\sum m_\nu (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2) = 2(U+h).$$

Найденное значение параметра τ обозначить через t .

§ 9. Разные задачи

1251. Функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнению:

$$y^2 + y'^2 = z'.$$

Кроме того, дано, что

$$y(0) = a + b; \quad y(n) = ae^n + be^{-n}, \quad z(0) = a^2 - b^2.$$

Найти y и z из условия, что $z(n)$ — максимум.

1252. Задачу о кратчайшем расстоянии между двумя точками M_1 и M_2 в пространстве рассмотреть как задачу Майера.

Указание. $u' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, $z(t_1) = z_1$, $x(t_2) = x_2$, $y(t_2) = y_2$, $z(t_2) = z_2$; $u(t_1) = 0$, $u(t_2) = \text{минимум}$.

1253. Среди всех кривых, соединяющих данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие в вертикальной плоскости XOY (OY — вниз), найти ту, двигаясь по которой, тяжёлая точка придёт из M_1 в M_2 в кратчайший срок. Начальная скорость v_1 ; на точку действует, кроме тяжести, сопротивление $R = kv^n$.

Указание. Закон живых сил даёт

$$vv' - gy' + kuv\sqrt{x'^2 + y'^2} = 0.$$

За параметр принять v .

1254. Среди кривых, соединяющих данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие в плоскости XOY (OY —вниз), найти ту, двигаясь вдоль которой, точка придёт в M_2 с наибольшей скоростью. При этом скорость точки в M_1 равна v_1 , на точку действует сила тяжести и сила сопротивления $R = kv^n$. Сравнить нормальную реакцию кривой с центробежной силой.

Указание. За параметр взять $p = \frac{dy}{dx}$.

1255. Соединить точки $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(a, 0, 0)$ кривой, имеющей данную кривизну $\frac{1}{\rho}$ и наибольшую длину.

1256. Самолёт вылетает из точки $A(x_1, y_1)$ в момент $t=0$, имея в виду в кратчайшее время попасть в точку $B(x_2, y_2)$. Найти, как нужно для этого направлять самолёт, если известно распределение ветра в пространстве и времени, т. е. известны проекции скорости ветра w на оси OX и OY ; $w_x = u(x, y, t)$, $w_y = v(x, y, t)$. Собственная скорость самолёта V , причём $w^2 = u^2 + v^2 < V^2$.

1257. Крыло самолёта длиной l расположено по оси OX и движется параллельно оси OY со скоростью v_0 (плоскость XOY горизонтальна). Обозначим через $f(x)dx$ подъёмную силу элемента крыла длиной dx . В аэродинамике показывается при некоторых допущениях, что при таких условиях от элемента крыла отходит вихрь интенсивности $d\Gamma = \frac{1}{\rho v_0} f'(x) dx$. Здесь ρ —плотность воздуха, считаемая постоянной. (Эта формула есть следствие основной формулы Н. Е. Жуковского.) Эти вихри вызывают в каждой точке ξ крыла направленную вниз скорость воздуха.

$$w(\xi) = \frac{1}{4\pi\rho v_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{f'(x)}{\xi - x} dx.$$

При этом ось OZ направлена вниз, а y интеграла берётся здесь и дальше главное значение. Индуктивное сопротивление крыла определяется по формуле

$$B = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\omega(\xi)}{v_0} f(\xi) d\xi = \frac{1}{4\pi\rho v_0^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{f'(x) f(\xi)}{\xi - x} dx d\xi.$$

Требуется определить при заданной полной подъёмной силе крыла

$$A = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx$$

такое распределение подъёмной силы, т. е. такую функцию $f(x)$, чтобы индуктивное сопротивление было наименьшим. При этом следует учесть, что благодаря отсутствию вихрей вне промежутка $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$

должно быть выполнено условие: $f\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$.

Указание. Обратит внимание на формулу

$$\frac{d}{dx} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{f'(\xi) d\xi}{\xi - x} - \frac{f\left(\frac{l}{2}\right)}{\left(\frac{l}{2}\right) - x} - \frac{f\left(-\frac{l}{2}\right)}{\left(-\frac{l}{2}\right) + x}.$$

1258. Даны два уравнения

$$u' = f(x, y, y', z, u), \quad z' = g(x, y, y', z, u).$$

Найти u как функцию от x при условии, что значения x, y, z и u даны при $x = x_0$, дано также y при $x = x_1$ и $u(x_1)$ должно быть экстремумом. Пример:

$$u(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', z) dx; \quad z = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Составить дифференциальные уравнения Эйлера.

1259. Найти экстремум функции $W = f(u, v)$, где

$$u = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt, \quad v = \int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y') dt$$

при заданных значениях x и y на концах промежутка (t_1, t_2) .

1260. Найти вид экстремалей для задачи о минимуме интеграла

$$\int_{(A)}^{(B)} y dx \cdot \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — заданные точки.

ОТДЕЛ XVII

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задачи § 1 имеют целью разъяснить применение основных теорем теории вероятностей. Начинаясь с примеров непосредственного вычисления вероятности и постепенно усложняясь, задачи рассматривают разнообразные случаи использования основных теорем. При составлении текста задач этого параграфа, как и везде в дальнейшем, было обращено внимание на чёткую формулировку условий, при которых производится вычисление вероятности, так как только в этом случае можно говорить об определённой числовой характеристике вероятности. При решении задач, особенно в начале, на это следует обратить должное внимание.

В § 2 даются задачи на вычисление математических ожиданий и задачи, решение которых связано с вычислением математических ожиданий. Здесь же рассматриваются и более сложные вопросы, решение которых связано с использованием конечных разностей и метода производящих функций.

К § 3 отнесены задачи, связанные с законом больших чисел. Задачи § 3 дают примеры на применение неравенства Чебышева. Они непосредственно примыкают к задачам § 4, в котором рассматривается применение теорем Лапласа и Ляпунова-Маркова.

В § 4 введены задачи на выборочный метод, который непосредственно связан с упомянутыми теоремами. С целью облегчения решения задач § 4 в

конце отдела приложена таблица значений интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Эта таб-

лица позволяет избежать при решении задач § 4 обращения к специальным таблицам, которые не всегда могут быть под рукой учащегося.

§ 5 посвящён задачам на вычисление геометрических вероятностей. В этом параграфе обращено внимание на составление кривых распределения и даются примеры на вычисление характеристической функции.

§ 6 охватывает лишь простейшие вопросы математической статистики. В начале параграфа даются задачи на вычисление сводных характеристик, построение гистограмм и кривых накопленных частостей.

Далее следуют задачи на выравнивание частот и составление уравнений выравненной кривой и, наконец, задачи на обработку корреляционных таблиц.

Все сложные задачи сопровождаются либо указаниями к их решению, либо подробными ответами, разъясняющими ход решения.

§ 1. Применение основных теорем. Формула Байеса

1261. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых равно 360, оказалось, что начальной буквой фамилии у семи была *A*, у пяти была *E*, у восьми была *I*, у девяти — *O*, у четырёх — *U*, у двух — *Ю*, у всех прочих фамилия начиналась согласной. Требуется определить вероятность *P*, что фамилия члена данного собрания начинается гласной.

1262. Из ящика, в котором находится 20 шаров белого цвета и 2 чёрных, вынимается *m* шаров, причём после каждого вынимания

шар кладётся обратно; требуется определить наименьшее значение x_0 числа m выниманий, при котором вероятность P достать хоть один раз чёрный шар более $\frac{1}{2} \left(P > \frac{1}{2} \right)$.

1263. При тех же условиях определить наименьшее значение x числа выниманий m , если шар не кладётся обратно, чтобы вероятность P достать хоть один белый шар была более $\frac{1}{2}$.

1264. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление 6 очков хоть один раз получило вероятность больше 0,7? больше 0,8? больше 0,9?

1265. Колода карт разделяется на две пачки поровну (по 26 карт). Требуется определить вероятность P , что в обеих пачках окажется равное (2) число тузов.

1266. При тех же условиях определить вероятность P_1 , что карт красных и чёрных мастей в каждой пачке будет поровну (13).

1267. Из колоды карт берётся 6 карт. Требуется определить вероятность P , что среди этих карт будут представительницы всех четырёх мастей.

1268. Каково наименьшее число x_0 карт, которое необходимо взять из колоды, чтобы вероятность P_{x_0} , что среди них встретятся две карты одинакового наименования, была более $\frac{1}{2}$?

1269. 20 человек, среди которых 10 мужчин и 10 женщин, группируются попарно. Какова вероятность P , если группировка происходит случайно, что каждая из 10 пар состоит из лиц разного пола?

1270. Общество из 5 мужчин и 10 женщин разбивается на 5 групп по 3 человека. Какова вероятность при случайной группировке, что в каждой группе будет по 1 мужчине?

1271. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность P , что все цифры различны (каждая цифра может иметь 10 значений).

1272. В трёх урнах содержатся белые и чёрные шары. В первой содержатся 3 белых шара и 1 чёрный, во второй урне 6 белых и 4 чёрных, в третьей — 9 белых и 1 чёрный. Из урны, выбранной наудачу, извлекается шар. Вычислить вероятность, что этот шар белый, считая, что выбор любой из урн одинаково вероятен.

1273. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложено два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

1274. В трёх урнах содержатся белые и чёрные шары. В первой 2 белых и 3 чёрных шара, во второй 2 белых и 2 чёрных шара, в третьей 3 белых и 1 чёрный шар. Из первой урны переложено шар во вторую. После этого шар из второй урны переложено в третью. Наконец из третьей урны шар переложено в первую.

Какое распределение чёрных и белых шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? Вычислить эту вероятность.

Что представляется более вероятным, сохранение первоначального состава урны или его изменение?

1275. В условиях предыдущей задачи определить вероятность, что состав шаров во всех урнах не изменится от перекладывания.

1276. В условиях задачи 14 вычислить вероятность, что при перекладывании шаров из одной урны в другую два раза был переложён шар белого цвета и один раз шар чёрного цвета. Указать вероятность, что при этом состав первой урны не изменится.

1277. Требуется показать, что $(A \text{ или } B) = (A) + (B) - (A \text{ и } B)$; в частности, если A и B независимы, то $(A \text{ или } B) = (A) + (B) - (AB)$.

1278. Доказать, что если $Y = X + \delta$, причём вероятность, что $X \leq 10$ равна 0,9, а вероятность, что $|\delta| \leq 1$ равна 0,95, то вероятность P_1 , что $Y \leq 9$, и вероятность P_2 , что $Y \leq 11$, удовлетворяют неравенствам

$$P_1 \leq P_2 \leq 0,95,$$

какова бы ни была зависимость между X и δ .

1279. Доказать, что

$$(A \text{ или } B \text{ или } C) = (A) + (B) + (C) - (A \text{ и } B) - (A \text{ и } C) - (B \text{ и } C) + (A \text{ и } B \text{ и } C).$$

1280. Рассматриваются n фактов A_1, A_2, \dots, A_n ; обозначим через $p_i = (A_i)$; $p_{ik} = (A_i \text{ и } A_k)$, $p_{ikl} = (A_i \text{ и } A_k \text{ и } A_l)$ и т. д. Показать, что вероятность $(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \dots \text{ или } A_n) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^n p_{ik} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=3}^n p_{ikl} + \dots + (-1)^{n-1} p_{12} \dots n$.

1281. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \dots, N$, производятся последовательно извлечения шара. Каждый раз по извлечении шар возвращается обратно в урну. Вычислить вероятность, что при n -кратном извлечении номера последовательно вынутых шаров будут идти в возрастающем порядке.

1282. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, n$ отмечено число k . Какова вероятность, что два числа, выбранных наудачу из этой последовательности, окажутся одно меньше и другое больше, чем k ?

1283. Из последовательности чисел $1, 2, 3, \dots, N$ отобраны наудачу n чисел: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Найти вероятность, что $x_m = M$.

1284. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \dots, N$, производятся последовательные извлечения n шаров. Каждый раз по извлечении шар возвращается в урну обратно. Номера вынутых шаров записаны в порядке возрастания. Вычислить вероятность, что номер m -го шара окажется равным M .

1285. Предполагая в предыдущей задаче числа M и N весьма большими и отношение их равным x , найти предельный закон распределения величины x .

1286. 6 билетов с номерами 1, 2, ..., 6, последовательно вынимаемых из ящика, имеют одинаковую вероятность появиться в любом порядке. Нужно определить (пользуясь решением задачи 1280) вероятность P , что порядковый номер, по крайней мере у одного из билетов, совпадает с его собственным номером. Решить ту же задачу, если число билетов неограниченно возрастает.

1287. Дано N билетов с номерами 1, 2, ..., N , как в предыдущей задаче. Определить вероятность P , что, последовательно выбирая $n < N$, из них, по крайней мере, один раз порядковый номер извлечения билета совпадает с его собственным номером. Рассмотреть случай $N = 10$, $n = 5$.

1288. Из сосуда, содержащего m белых и n чёрных шаров, вынимаются последовательно шары и не возвращаются обратно в урну. Операция извлечения продолжается, пока не получится белый шар. Выяснить закон распределения числа извлечённых чёрных шаров.

1289. Предполагая в предыдущей задаче величины m , n весьма большими, установить предельный закон распределения. Отношение $n:(m+n) = a$.

1290. Из сосуда, содержащего m белых и n чёрных шаров, извлекается шар и возвращается в сосуд обратно. Извлечение продолжается до тех пор, пока не появится белый шар. Вычислить вероятность k -кратного извлечения чёрного шара.

1291. Предположив в задаче 1290, что величины m и n возрастают беспредельно и отношение $n:(m+n)$ стремится к a , установить предельный закон распределения.

1292. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 чёрных шара, двое поочередно извлекают шары. По извлечении шар каждый раз возвращается в сосуд обратно. Извлечение прекращается при появлении белого шара.

Вычислить вероятность извлечь первым белый шар каждому из участников, если шар извлекается не больше $2k$ раз.

1293. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 чёрных шара, двое поочередно извлекают шар. Вычислить вероятность вынуть первым белый шар каждому из участников.

1294. Двое играют в игру, бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первый откроет решётку. Во сколько раз больше вероятность выигрыша начавшего, если бросание монеты может быть продолжено сколь угодно долго?

1295. В сосуде заключается N билетов с различными номерами. Из сосуда вынимают m раз по n билетов, каждый раз возвращая их обратно. Вычислить вероятность, что k билетов не появится. Вычислить вероятность, что все билеты появятся.

1296. В сосуде заключается N билетов с различными номерами. Из сосуда k раз извлекаются n билетов и по вынутии их возвращаются обратно. Установить закон распределения для числа различных номеров, появившихся при k извлечениях.

1297. В трёх ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 чёрных шара, 2) 4 белых и 3 чёрных шара, 3) 6 белых и 2 чёрных шара. Предполагая, что извлечение из всех трёх ящиков одинаково вероятно, определить вероятность того, что извлечение было произведено из первого ящика, в следующих случаях: 1) если известно, что вынутый шар оказался белым; 2) если вынутый шар оказался чёрным; 3) ту же задачу решить, если вероятность извлечения из каждого ящика $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,7$; $a_3 = 0,2$.

1298. При тех же условиях определить вероятности x_1 и x_2 , если известно, что после трёх извлечений (с возвратом шара) из того же ящика: 1) все три шара оказались белыми; 2) все три шара оказались чёрными.

1299. Даны два ящика: в первом находятся 2 белых, 3 красных и 20 чёрных шаров, во втором — 8 белых, 15 красных и 2 чёрных шара. После извлечений шара из одного, а потом из другого ящика вынутыми оказались сперва чёрный, а потом красный шары.

Определить вероятность, что извлечение производилось сначала из первого, а потом из второго ящика, предполагая обе последовательности а priori равновероятными.

1300. Событие A имеет вероятность P произойти в любой момент промежутка времени T . Требуется определить его вероятность p произойти в течение остающегося времени $T - t$, если по истечении времени $t < T$ A ещё не произошло.

1301. Если известно, что вероятность двум близнецам быть одинакового пола вдвое больше, чем вероятность быть разного пола, причём, вообще, вероятность рождения мальчика равна 0,51, требуется определить вероятность, что другой из близнецов мальчик, после того как установлено, что первый из них — мальчик.

1302. Какова вероятность p_0 , что среди 1000 лампочек нет испорченной, если из взятых 100 наудачу все оказались исправными? Решить задачу, при предположении, что число плохих лампочек не может превысить 5 на тысячу и все значения (0, 1, 2, 3, 4, 5) числа испорченных лампочек а priori равно возможны.

1303. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность вынуть белый шар из этого сосуда? Все предположения о первоначальном составе шаров считаются одинаково возможными.

1304. Из сосуда, содержащего n шаров неизвестного цвета, вынут один шар, оказавшийся белым. Вычислить вероятность, что вновь вынутый шар будет тоже белый. Все предположения о первоначальном составе сосуда считать одинаково возможными.

1305. Из сосуда, содержащего n шаров неизвестного цвета, вынут один шар, оказавшийся белым. По возвращении этого шара в урну вновь вынут шар. Определить вероятность, что этот шар будет белого цвета. Первоначальный состав сосуда представляется одинаково вероятным.

1306. Из сосуда, содержащего N шаров, вынуты $m + n$ шаров, среди которых m шаров белого цвета. Установить вероятность, что до изъятия в сосуде было M шаров белого цвета.

1307. Из отвала, содержащего на поверхности n кусков окислённой руды и n' кусков сульфидной руды, отобрано наудачу m образцов и отправлено в лабораторию для анализа. При вскрытии ящика с образцами оказалось, что первые k из вынутых кусков относятся к рудам окислённым.

Какова вероятность, что и следующий кусок будет относиться к той же руде? При решении задачи принять, что любые m из $n + n'$ кусков на поверхности отвала могли быть отобраны в ящик с одинаковой вероятностью.

1308. В сосуде содержатся белые и чёрные шары. Общее число N шаров в сосуде известно, но не известно ни число белых, ни число чёрных шаров.

При $m + n$ -кратном извлечении шара из сосуда m раз появился белый шар и n раз чёрный.

Какой состав шаров в сосуде представляется наиболее вероятным? Все предположения о первоначальном составе сосуда одинаково вероятны.

1309. Обозначая через $P_{i,n}$ вероятность появления события A_i раз при n независимых опытах, если вероятности A последовательно равны p_1, p_2, \dots, p_n , доказать неравенства

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} > \dots > \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}},$$

из которых вытекает, что $P_{i,n}$ возрастает вместе с i до некоторого максимального значения, после которого она начинает убывать.

Пример:

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{4},$$

$$p_4 = \frac{1}{5}, \quad p_5 = \frac{1}{6}.$$

1310. Даны 3 попарно независимых события, которые, однако, все 3 вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность x , определить наибольшее возможное значение x .

§ 2. Математические ожидания. Способ конечных разностей и производящих функций

1311. В лотерее разыгрывают два предмета: велосипед стоимостью в 2500 руб. и часы ценою в 500 руб. Чему равно математическое ожидание выигрыша для лица, обладающего одним билетом, если общее число выигрышных билетов равно 1000?

1312. Из ящика, содержащего 4 белых и 20 чёрных шаров, вынимают 5 шаров и перекладывают в другой ящик, где положено было 16 белых шаров; после этого из второго ящика в первый обратно перекладывают 6 шаров. Спрашивается, каковы будут после этого математические ожидания чисел белых шаров x_1 и x_2 в обоих ящиках?

1313. При бросании 3 игральных костей игрок выигрывает 100 руб., если на всех костях по 6 очков, и получает 10 руб., если шесть будет только на 2 костях. Какую сумму он должен внести за билет на право участия в игре, чтобы игра была безобидна?

1314. При бросании n игральных костей определить м. о. (математическое ожидание) суммы очков на всех костях и дисперсию этой суммы.

1315. Вероятность появления события A равна p . Вычислить м. о. x числа последовательных опытов, где A неизменно повторяется, и дисперсию B этого числа.

1316. За каждую серию из $a > 0$ опытов, где A неизменно повторяется, игрок получает y^a руб.; напротив, если $a = 0$, он платит 1 руб. Требуется определить величину y при условии, что игра будет безобидной. Рассмотреть пример $p = \frac{1}{13}$.

1317. В случаях задачи 1284 найти м. о. M .

1318. Из сосуда, содержащего m белых и n чёрных шаров, вынимаем шары, извлекая их последовательно до тех пор, пока не появится белый шар. Определить м. о. числа вынутых при этом чёрных шаров.

1319. Из сосуда, содержащего m белых и n чёрных шаров, извлекаются шары и возвращаются обратно, пока не появится белый шар. Вычислить м. о. числа вынутых чёрных шаров и его дисперсию.

1320. В сосуде содержится a билетов с номером 1, b билетов с номером 2, ... и k билетов с номером m . Из сосуда вынута n билетов. Вычислить м. о. числа не вышедших номеров.

1321. В сосуде содержится a билетов с номером 1, b билетов с номером 2, c билетов с номером 3 и т. д., k билетов с номером m . Определить м. о. числа совпадений номера вышедшего билета с номером извлечения, когда извлекаются все шары

$$a + b + \dots + k \geq m.$$

1322. Доказать, что если м. о. $x^2 =$ м. о. $x^3 =$ м. о. $x^4 = a$, то величина x не может получать иных значений, кроме 0 и 1.

1323. Известно, что $x \leq A$ и м. о. $x = 0$; показать, что вероятность P неравенства $x < -At^2$ меньше, чем $\frac{1}{1+t^2}$.

1324. Доказать тождество

$$1 + 2 \frac{A-a}{A-1} + 3 \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \dots + \frac{(A-a)!}{(A-1)\dots a} = \frac{A(A+1)}{a(a+1)}$$

(где $A \geq a$ — целые положительные числа), вычисляя двумя различными способами м. о. числа m чёрных шаров, отделяющих 2 соседних белых в серии, состоящей из $A+1$ шара, среди которых имеется a белых.

1325. Показать, что дисперсия σ^2 величины x не может превысить квадрата полуразности между крайними её значениями. Указать условия, при которых этот верхний предел достигается.

1326. Величина x может получать все целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Требуется определить знаменатель прогрессии q так, чтобы м. о. $x = 10$, и вычислить при этом условии вероятность P_{10} , что $x \leq 10$, и вероятность P_{100} , что $x \leq 100$.

1327. Величина x может получать значение 0 с вероятностью a_0 и любое целое положительное значение $n > 0$ с вероятностями p_n , убывающими в геометрической прогрессии ($p_n = B^n$). Надо определить указанные вероятности, если даны м. о. $x = a$, м. о. $x^2 = b$, и установить условия, которым должны подчиняться a и b , чтобы задача была возможна. Проверить, приемлемы ли значения $a = 4$, $b = 25$.

1328. Величина x получает целые неотрицательные значения $n \geq 0$ с вероятностями $a_n = A \frac{k^n}{n!}$. Определить A и k , если известно, что м. о. $x = a$, и найти наиболее вероятное значение μ числа n .

1329. Найти условия, необходимые и достаточные, которым надо подчинить $a =$ м. о. x , $b =$ м. о. x^2 , $c =$ м. о. x^3 , для того чтобы величина x получала только целые неотрицательные значения $n \geq 0$ с вероятностями $a_n = \frac{Akn + Bl^n}{n!}$, где $A \geq 0$, $B \geq 0$, $k \geq 0$, $l \geq 0$. Рассмотреть численный пример: $a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{13}{2}$, $c = \frac{13}{4}$; определить наиболее вероятное значение n .

1330. Решить предыдущую задачу при условии, что k может быть отрицательным.

Пример: $a = 1,85$; $b = 5,7$; $c = 20,95$.

1331. Доказать, что $[м. о. $x^p]^q \geq [м. о. $x^q]^p$$, если $x \geq 0$ и $p > q > 0$.$

1332. Доказать что, какова бы ни была величина x , моменты, т. е. м. о. последовательных её степеней $a_l =$ м. о. x^l , удовле-

творяют неравенствам

$$\Delta_{2i} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_i \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{i+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_i & \dots & a_{2i} & & \end{vmatrix} \geq 0.$$

1333. Величина x может получить три значения, из которых одно есть нуль. Зная моменты его первых четырёх степеней, определить значения x и их вероятности; указать условия, необходимые и достаточные, чтобы эти значения были: 1) действительны, 2) неотрицательны.

Пример: $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$, $a_4 = \frac{21}{2}$.

1334. Число $x \geq 0$ может получить любые целые значения с вероятностью $a_h = \frac{M}{(a+h)(a+1+h)(a+2+h)}$.

Вычислить a_h , если известно, что м. о. $x = A$; показать, что м. о. x^2 не имеет смысла. Полагая $A = 3$, вычислить вероятность P_{10} , что $x < 10$.

1335. Известно, что

$$a_h = \frac{M}{(a+h)(a+h+1)(a+h+2)(a+h+3)}$$

представляет вероятность числу $x \geq 0$ получить целое значение h . Определить a_h по условию, чтобы стандарт σ числа x , так же как и его м. о. A , были целыми числами.

1336. Даны 2 ящика с шарами; в первом N шаров, из них M белых, во втором N_1 шаров, из них M_1 белых. Одновременно один шар из одного ящика заменяется шаром из другого, и обратно. Эта операция смешения производится последовательно l раз. Требуется определить м. о. числа белых шаров после этого в каждом из ящиков. Рассмотреть случай, когда $l \rightarrow \infty$.

1337. Решить предыдущую задачу в предположении, что $N_1 = \infty$, т. е. при условии, что вынутый из первого ящика шар всегда заменяется чёрным. Рассмотреть случай, когда $l \rightarrow \infty$, причём $\frac{l}{N} = a$ остаётся конечным.

1338. Вычислить дисперсию B_l числа белых шаров после l выниманий при условиях предыдущей задачи.

1339. Вероятность появления события изменяется от испытания к испытанию. Построить производящую функцию вероятностей $P'_{m,n}$ появления события m или менее раз при n независимых испытаниях.

1340. При некоторой игре игрок имеет одинаковую вероятность $p = \frac{1}{5}$ ничего не выиграть или же выиграть или проиграть по 20

или 40 копеек. Требуется определить вероятность, что после 12 партий он проиграет не менее 3 руб., и дисперсию B его выигрыша.

1341. При бросании игральной кости игрок уплачивает 1 руб. в случае появления нечётного числа очков и получает 3 руб. при появлении 6 очков, остальные (2 и 4) чётные числа очков считаются безразличными. Определить вероятность $R_{15, 12}$, что после 12 партий он выиграет не менее 15 руб., и дисперсию B выигрыша.

1342. Предполагая, что при составлении 7-значной таблицы (мантисс) логарифмов все цифры равновероятны, какова вероятность R_5 , что сумма S цифр мантиссы окажется меньше 20? Каковы м. о. S и м. о. S^2 ?

1343. Число x может получать любые целые значения m с вероятностью $(1 - q)q^m$; складывая h значений этого числа, определить вероятность P_a , что полученная сумма y равна a . Найти наиболее вероятное значение S этой суммы; рассмотреть предельный случай, когда $h \rightarrow \infty$, причём $hq = t$ остаётся конечным.

1344. Число x_n с увеличением n на 1 получает приращение ± 1 или -1 , причём оба значения равновозможны, если $x_n = 0$; если $x_n \geq 0$, то вероятность уменьшения $|x_n|$ равна $A \geq \frac{1}{2}$ (вероятность увеличения $|x_n|$ равна $B = 1 - A \leq \frac{1}{2}$). Полагая $x_0 = 0$, найти вероятность $P_{n, h}$ равенства $|x_n| = h$ при любых n и h ; рассмотреть случай $n \rightarrow \infty$. Вычислить м. о. $|x_n|$. Рассмотреть случай $A = B = \frac{1}{2}$.

§ 3. Теорема Бернулли. Неравенства Чебышева

Применяя лемму Чебышева-Маркова, решить нижеследующие задачи:

1345. Указать нижнюю границу вероятности P неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}, \quad (1)$$

при n независимых опытах, если в каждом опыте вероятность равна $\frac{1}{2}$, полагая $n = 10\,000$; $n = 100\,000$.

1346. Как велико должно быть n , чтобы вероятность P неравенства (1) была больше, чем 0,99?

1347. При $n = 10\,000$, какую верхнюю границу для $\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right|$ можно указать с вероятностью не меньшей, чем 0,99?

1348. Если игрок при бросании игральной кости выигрывает 4 руб. в случае появления 6 очков и выплачивает 1 руб. в прочих случаях, какова вероятность, что при 10 000 бросаниях он проиграет не менее 200 руб.?

1349. Предполагая, что в n последовательных и независимых опытах вероятности появления A соответственно $p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, определить нижнюю границу вероятности, что число его появлений $m \leq 1$.

1350. Показать, что каковы бы ни были случайная величина x и данное положительное число ε , вероятность неравенства

$$\varepsilon x > t^2 + \lg I \quad (\text{A})$$

меньше, чем e^{-t^2} , где $I = m$. о. $e^{\varepsilon x}$.

1351. Полагая, что m есть число появлений события A в серии независимых опытов с соответственными вероятностями p_i , вывести из (A), что вероятность неравенства

$$m - \sum_1^n p_i \geq \frac{t^2}{\varepsilon} + \varepsilon \sum_1^n p_i q_i \geq 2t \sqrt{\sum_1^n p_i q_i} \quad (\text{B})$$

меньше, чем e^{-t^2} (если $\varepsilon \leq 1$, $t^2 \leq \sum_1^n p_i q_i$).

1352. Показать тем же способом, что вероятность неравенства

$$\sum p_i - m \geq 2t \sqrt{\sum_1^n p_i q_i} \quad (\text{C})$$

меньше, чем e^{-t^2} ($t^2 \leq \sum_1^n p_i q_i$).

1353. Пользуясь неравенствами (B) и (C), решить задачи 1346 и 1348.

1354. Показать, что если $p = \frac{1}{2}$, то вероятность неравенства

$$\frac{m}{n} \geq \frac{t}{\sqrt{2n}}$$

меньше, чем e^{-t^2} . Применить к решению задачи 1347.

1355. Производится n независимых опытов, где вероятность p_i в i -м опыте появления события A равна $\left(\frac{3}{4}\right)^i$; требуется определить верхнюю границу вероятности p , что число m появлений A будет более 10.

1356. Величина x_k принимает три значения: $+k^{\beta}$, $-k^{\beta}$ и 0 с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{2k^{\alpha}}$, $\frac{1}{2k^{\alpha}}$ и $1 - \frac{1}{k^{\alpha}}$.

Требуется доказать, что к сумме независимых величин $\sum_1^n x_k$ применим закон больших чисел, если $\alpha > 1$.

1357. Обобщить результат предыдущей задачи, показав применимость закона больших чисел к сумме $\sum_{k=1}^n x_k$ независимых случайных

переменных x_k , определяемых следующим образом. Случайная переменная x_k принимает серию значений с вероятностями, указанными в таблице

x_k	a_k	0	$-a_k$
p_k	p_k	$1 - 2p_k$	p_k

Ряд $p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots$ сходящийся.

§ 4. Теоремы Лапласа и Ляпунова-Маркова

1358. Пользуясь формулой Лапласа, указать, сколько раз n надо бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100}$$

была не менее, чем вероятность противоположного неравенства, где m — число появлений 6 очков.

1359. Игрок выигрывает 7 руб. при появлении 6 очков и уплачивает 1 руб. в других случаях. Требуется с вероятностью $2\Phi(4) \approx 0,999936$ указать, между какими пределами будет его выигрыш R после 8000 бросаний кости.

1360. Вероятность появления события в каждом из серии независимых испытаний одна и та же и равна $\frac{3}{4}$. С какой вероятностью можно ожидать, что при 10 000 испытаний отношение числа m появления события к числу n произведённых испытаний отличается от вероятности $\frac{3}{4}$ меньше чем на 0,0001, меньше чем на 0,001 и меньше чем на 0,01?

1361. Бюффон, производя опыт для проверки закона больших чисел, бросил монету 4040 раз. Герб появился 2048 раз. Вычислить вероятность, с которой можно ожидать, что при повторении опыта Бюффона отклонение частоты появлений герба от вероятности не превзойдёт величины уклонения, имевшей место в опыте Бюффона.

1362. Для события, имеющего вероятность появления $p = 0,2$, будет произведена серия независимых испытаний. Указать, какое отклонение частоты появления события от вероятности можно ожидать с вероятностью $P = 0,9128$ при 5000 испытаний.

1363. Производились опыты по выяснению устойчивости различных железных сплавов против коррозии.

Произведённые для определённого сплава опыты обнаружили, что этот сплав не поддаётся коррозии в среднем в течение 875 дней. Это определение сопровождается стандартным отклонением, равным 85 дням.

Пользуясь интегралом вероятностей, указать, какое количество листов, изготовленных из данного сплава, должно быть подвергнуто испытанию, чтобы с вероятностью 0,90 ожидать величину отклонения от средней не больше, чем на 50/0.

1364. Из урны, содержащей чёрные и белые шары в отношении 1:3, производят n извлечений шара. При каждом извлечении регистрируется цвет шара, после чего он возвращается в урну. Каким следует выбрать число n , чтобы ожидать отклонение частоты появления белого шара от его вероятности не больше, чем на 0,001, с вероятностью 0,9966?

1365. Сколько раз следует бросать монету, чтобы с вероятностью 0,6 ожидать, что отклонение частоты появления герба от вероятности 0,5 оказалось меньше 0,01?

1366. Определить уравнение огибающей всех нормальных кривых $y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

1367. При подсчёте числа простых чисел, которые в восьмом, девятом и десятом миллионах приходится на каждую из 2 000 групп по 500 последовательных чисел, обнаружили следующие данные: ни в одной группе не оказалось менее 17 простых чисел и более 46. В верхней строке прилагаемой таблицы поставлены все числа x ($17 \leq x \leq 46$), фактически наблюдавшиеся; в дальнейших трёх строках в каждом столбце под соответствующим значением x указано число групп $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$, содержащих x простых чисел соответственно в восьмом, девятом и десятом миллионах.

x	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$N_1(x)$	—	1	4	5	6	11	18	48	63	70	102	141	149	165	188
$N_2(x)$	1	—	—	2	7	9	15	40	68	61	106	174	202	168	202
$N_3(x)$	—	1	1	7	9	13	20	46	73	105	130	135	171	177	210

x	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
$N_1(x)$	203	181	160	141	115	78	63	38	16	15	14	4	4	—	—
$N_2(x)$	187	187	135	140	82	82	48	41	20	11	5	1	4	1	1
$N_3(x)$	194	171	143	111	89	72	54	27	20	11	4	4	2	—	—

Вычислить средние числа M_1 , M_2 , M_3 простых чисел на каждую группу и их дисперсии σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 для каждого миллиона. Показать,

что если бы в каждом миллионе простые числа были расположены случайно, то дисперсии были бы значительно больше.

1368. Показать, что если бы указанные в предыдущем примере средние значения M_1, M_2, M_3 и соответствующие им средние квадратичные отклонения $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ получены были бы в результате механических выборок, то разница между M_1 и M_3 не могла бы быть признана случайной; напротив, разница между M_1 и M_2 могла бы быть и случайной.

1369. Построить по схеме Пуассона совокупности групп из 500 опытов в каждой, где вероятность p_i появления простого числа была бы равна 0 или p в i -м опыте так, чтобы средняя вероятность была равна $P = \frac{1}{16} = 0,0625$ при заданной дисперсии $\sigma^2 = 18 \frac{11}{48} = \frac{875}{48}$.

Показать, пользуясь элементарными соображениями о делимости чисел, что в натуральной последовательности 500 чисел не может быть более 119 простых чисел.

1370. В двух местностях распределение рабочих по возрасту характеризуется таблицей

Местность	Число рабочих	Число рабочих старше 35 лет
<i>A</i>	35 311	11 721
<i>B</i>	21 812	4 032

Выяснить, представляется ли разность отношения числа рабочих старше 35 лет к общему числу рабочих в данной местности больше той, которую можно ожидать при случайной выборке.

У к а з а н и е. Решить задачу, вычисляя уклонение отношения, составленного для отдельных местностей, от отношения, вычисленного на основании всех данных. Одновременно рассмотреть вопрос и иначе, вычислив разность отношений для данных местностей.

1371. Стальная проволока, идущая на изготовление канатов, выдерживает в среднем растягивающее усилие в 6 720 кг на 1 кв. см. Стандартное уклонение отдельных образцов от этого среднего имеет величину 220 кг на 1 кв. см. Серия последовательно проведённых наблюдений показала, что в отношении растягивающих усилий, выдерживаемых отдельными образцами проволоки, имеет место нормальный закон распределения.

Из каждой партии проволоки, поступившей на завод, было подвергнуто испытанию 20 экземпляров. Результаты испытаний даются в приводимой ниже таблице.

**Величина растягивающего усилия,
выдерживаемого проволокой на 1 кв. см**

1-я партия		2-я партия	
6300	6900	7150	7280
6870	7130	6950	7120
6720	6690	7230	6690
6980	6750	7240	7070
6780	6560	7090	6950
6780	6700	6800	6590
6780	6930	7000	6890
6720	6720	7070	6910
6630	6950	6700	6630
6660	6960	7140	7220

Возможно ли на основании этих испытаний утверждать, что обе партии проволоки требуемого качества и результаты испытаний следует объяснить случайностью выборки?

1372. Пользуясь данными предыдущей задачи, что можно было бы сказать относительно качества проволоки, поступившей на завод, если бы в журнале испытаний не была указана принадлежность образцов к отдельным партиям?

1373. Приёмка партий проволоки (см. задачу 1372) происходит при условиях, когда оказывается, что как среднее значение растягивающего усилия, так и его стандартное отклонение для проволоки, поступающей на завод, раньше не определялись. Можно ли сказать в этом случае, что качество поступивших партий проволоки различно, или результат испытаний следует отнести за счёт случайности выборки?

1374. Испытания на растяжение, произведённые для одного и того же сплава, приготовленного на пяти различных заводах, показали следующий результат:

Завод	I	II	III	IV	V
Средняя величина растягивающего усилия	7 328	6 165	7 052	7 997	8 583
Стандартное отклонение	299	609	132	311	251

Растягивающее усилие и его стандартное отклонение выражаются в килограммах на квадратный сантиметр.

Следует ли объяснить различие средних случайным отбором образцов, или же различием качества сплавов, т. е. отклонением в производстве одного из заводов от стандартной марки.

1375. Для того чтобы вал радиуса r мог вращаться в круговой отверстии опоры радиуса R , необходимо, чтобы между валом и отверстием опоры оставалось свободное пространство. Величина разности между R и r должна, однако, оставаться в известных пределах

$$a < R - r < b.$$

При серийном изготовлении валов и опор обе части готовятся раздельно, причём при сборке может оказаться, что части не подходят одна к другой. Полагая, что в налаженном производстве отклонения величин r и R от средних значений r_0 и R_0 следует нормальному закону распределения, вычислить, какой процент изделий придётся отбросить при сборке на конвейере.

1376. Распределение значений величины x имеет стандартное отклонение σ . Отдельное измерение значений x сопровождается средней квадратичной ошибкой σ' . Для измерения x приходится пользоваться образцами, изготовление которых обходится в a рублей за штуку. Стоимость производства одного измерения — a' рублей. Сколько следует изготовить отдельных образцов и сколько измерений произвести над каждым, чтобы среднее значение величины x , установленное в результате этой серии наблюдений, сопровождалось средней квадратичной ошибкой, не превосходящей a , и стоимость производства опыта была бы возможно малой?

1377. Доказать, что если x_k может получать с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, два значения $\pm k^\lambda$, где $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, то к сумме $S_n = \sum_1^n x_k$ теорема Ляпунова-Маркова применима.

1378. Рассматривается серия из весьма большого числа n опытов, разбивающихся на группы по 3 в каждой так, что в первых двух опытах каждой группы вероятность появления события A равна $\frac{1}{2}$, а исход третьего опыта предопределён результатами предыдущих двух опытов тем, что число появлений A в каждой группе должно быть чётным (0 или 2). Показать, что число m появлений события A во всей серии n подчиняется тому же предельному закону Лапласа-Гаусса, как если бы все опыты (как в схеме Бернулли) были независимы.

1379. Величина x_k может получать значения $\pm k^\lambda$ с вероятностями $\frac{1}{2k^\lambda}$, либо значение 0 с вероятностью $1 - \frac{1}{k^\lambda}$, где $0 < \lambda < 1$.

Требуется доказать, что к сумме $\sum_1^n x_k$ независимых величин x_k применима теорема Ляпунова-Маркова.

§ 5. Геометрические вероятности и законы распределения вероятностей

1380. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Какова вероятность, что точка L окажется ближе к точке A , нежели точка M ? Все положения точек L и M на отрезке AB одинаково возможны.

1381. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Какова вероятность, что точка L ближе к точке M , чем к точке A ? Все положения точек L и M одинаково возможны.

1382. На отрезке AB длины l поставлена наудачу точка L . Какова вероятность, что расстояние этой точки от середины отрезка меньше, чем расстояние этой точки до одного из краёв, и какова вероятность, что расстояние от середины меньше, чем расстояние до определённого края? Все положения точки L на отрезке AB одинаково возможны.

1383. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Вычислить м. о. длины отрезка LM и величину стандартного отклонения при условии, что все положения точек L и M на отрезке AB одинаково возможны.

1384. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Предполагая, что все положения точек L и M одинаково возможны, построить интегральную и дифференциальную кривые распределения длины отрезка LM .

1385. Какова вероятность, что из трёх взятых наудачу отрезков можно составить треугольник? Длина каждого из отрезков не превышает a , и все значения её одинаково возможны.

1386. Прут длины l разламывается на две части, после чего большая часть опять разламывается надвое. Вычислить вероятность, что из получившихся частей можно составить треугольник.

1387. Предполагая, что все значения $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$ равновероятны и единственно возможны, определить вероятности, что корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

1) действительны; 2) оба положительны.

1388. Предполагая, что оба корня уравнения

$$(x - a)(x - \beta) = x^2 + px + q = 0$$

имеют одинаковую вероятность получать любое значение в промежутках $-1 \leq a \leq 1$; $-1 \leq \beta \leq 1$, определить плотности $f(p)$ и $\varphi(q)$ распределения вероятностей коэффициентов p , q .

1389. Какова вероятность, что все корни кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0,$$

написанного наудачу, окажутся вещественными? При этом предполагается, что все значения коэффициентов p и q одинаково возможны и не превосходят по абсолютному значению величины M .

Указание. Принять во внимание условие вещественности корней кубического уравнения.

1390. Двое условились встретиться в определённом месте. Относительно времени уговорились, что каждый из них будет на месте встречи между 1 ч. и 2 ч. и ранее пришедший подождёт другого в течение четверти часа. Вычислить вероятность, что встреча произойдёт.

1391. Два лица, встречающихся в назначенном месте, имеют одинаковую вероятность притти в любой момент промежутка времени T .

Определить вероятность $P(t_0)$, что одному из двух придётся ждать другого, времени $t \leq t_0$, м. о. t и м. о. t^2 .

1392. Необработанный алмаз разбился на K частей. Предполагая, что ценность негранённого алмаза пропорциональна квадрату его веса, определить, во сколько раз уменьшилась его ценность, вычислив м. о. стоимости осколков. При решении задачи считать все возможные деления объёма на K частей одинаково вероятными.

1393. На окружности круга наудачу поставлены две точки A и B . Считая все положения точек на окружности одинаково возможными, вычислить плотность вероятности, что отношение расстояния между ними к диаметру окружности равно данной величине x , и составить кривую распределения вероятностей.

1394. Материальная точка описывает под действием центральной силы эллиптическую траекторию. В некоторый момент времени производится измерение расстояния движущейся частицы от притягивающего центра. Предполагая, что с одинаковой вероятностью следует ожидать производства измерения в любой момент времени, вычислить м. о. расстояния движущейся точки от центра. Большая ось орбиты a и эксцентриситет e .

1395. Доказать, что при любом законе вероятностей м. о. квадрата расстояния между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ данной области не больше удвоенного м. о. квадрата расстояния любой точки области до начала координат, которому оно равно, если м. о. $x_1 =$ м. о. $y_1 = 0$.

1396. Две точки x и y находятся на двух противоположных сторонах прямоугольника, стороны которого равны a и b ; полагая распределение вероятностей для каждой точки равномерным, определить вероятность $P(z_1)$, что расстояние между ними $z < z_1$, а также м. о. z и м. о. z^2 .

1397. Решить задачу, отличающуюся от предыдущей тем, что точки x и y находятся на смежных сторонах прямоугольника.

1398. Определить м. о. квадрата расстояния между двумя точками, находящимися на любой из четырёх сторон прямоугольника, если все положения точек равновозможны; проверить, что оно зависит только от периметра $2p$.

1399. Вычислить м. о. квадрата расстояния между внутренними точками: 1) прямоугольника (a, b — стороны прямоугольника), 2) эллипса; определить, каковы должны быть полуоси эллипса $A = \lambda a$, $B = \lambda b$, чтобы оба м. о. были равны.

1400. На отрезке AB длины l поставлены наудачу k отрезков одинаковой длины a . Какова вероятность, что точка M , находящаяся на расстоянии b от одного из концов, окажется не покрытой ни одним из отрезков? Все положения каждого из отрезков считаются одинаково возможными.

1401. На отрезке AB длины l поставлены наудачу 2 отрезка одинаковой длины a . Вычислить м. о. длины, перекрытой этими отрезками.

1402. На отрезке (a, b) разбросано наудачу n точек x_i (так что закон вероятностей x_i на (a, b) равномерен). Требуется определить закон распределения вероятностей $p_m(x_m)$ точки x_m , занимающей m -е место от конца b .

1403. Сохраняя условия предыдущей задачи, вычислить м. о. x_m и её дисперсию $\sigma^2(x_m)$.

1404. Показать, сохранив условия задачи 1402, что если a и b — данные постоянные величины, а числа m и n бесконечно возрастают так, что м. о. $x_m = 0$, то вероятность неравенства $\frac{\beta}{\sqrt{n}} < x_m < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$

имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{-2\pi ab}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{z^2}{2ab}} dz$, где α и β — произвольные конечные числа.

1405. Найти в условиях задачи 1402 уравнение поверхности корреляции между x_k и x_m ($k > m$), вычислить коэффициент корреляции R_{mk} между x_k и x_m и показать, что обе линии регрессии прямые.

1406. Найти в условиях задачи 1402 плотность распределения вероятностей $p(z)$ расстояния $z = x_m - x_k$, полагая $k - m = h$.

1407. Найти в условиях задачи 1402 предельный закон вероятностей $n(x_m - x_n)$ при $n \rightarrow \infty$, если $h = k - m$ остаётся конечным.

1408. Вычислить в условиях задачи 1402 вероятность $u(\delta)$, что наименьшее из расстояний $x_i - x_{i+1}$ ($x_0 = a$, $x_{n+1} = b$) больше данной величины $\delta \leq \frac{b-a}{n+1}$. Рассмотреть случай $n \rightarrow \infty$.

1409. Вычислить вероятность $u_1(\delta)$ того, что одно и только одно из расстояний $x_i - x_{i+1} < \delta$, и вероятность $u_2(\delta)$ того, что два и только два из этих расстояний менее δ .

1410. Величина a , которая при $t=0$ равна нулю, имеет вероятность $p \Delta t$ увеличиться на одну единицу и вероятность $1 - p \Delta t$ остаться неизменной. Требуется определить предел вероятности, что $a = k$ по истечении времени t , полагая, что $\Delta t \rightarrow 0$.

1411. Событие A происходит m раз в течение периода времени T_0 , причём вероятность его появления в любой момент одна и та же.

Требуется определить вероятность, что оно произошло k раз в продолжение данного промежутка T , полагая, что $T_0 \rightarrow \infty$ и $\frac{m}{T_0} \rightarrow p$.

1412. Появление события A при n наблюдениях сопровождалось появлением события B . Определить вероятность P_m , что при m дальнейших наблюдениях появление события A будет сопровождаться появлением события B . Все предположения относительно первоначального значения величины вероятности появления события A одинаково возможны.

1413. Призовой стрелок при n выстрелах попадал в центральное поле мишени.

Каким количеством наблюдений надо располагать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, ожидать попадания в центр при новом выстреле?

До поступления сведений о результатах стрельбы все предположения о вероятности стрелку попасть в центр мишени представлялись одинаково возможными.

1414. Появление события A при n наблюдениях сопровождалось появлением события B .

Каким количеством наблюдений необходимо располагать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, ожидать появления события B при следующих десяти появлениях события A . Первоначальные предположения о величине вероятности появления события A одинаково возможны.

1415. Отрезок AB состоит из двух неоднородных частей. Ряд проб, взятых в различных точках этого отрезка наудачу, дал m проб, относящихся к одной части, и n проб, относящихся к другой.

Какое соотношение между частями представляется наиболее вероятным?

1416. На диске имеются отверстия, размеры и расположение которых трудно замерить. На диск брошено N дробинок, из которых M провалилось в отверстия. Принимая дробинку за точку и допуская, что до опыта все предположения о соотношении между площадью диска и площадями отверстий одинаково возможны, установить наиболее вероятное соотношение между площадями отверстий и площадью диска,

Вычислить характеристические функции

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

для непрерывных кривых распределения вероятностей $f(x)$:

$$1417. f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$1418. f(x) = 0 \text{ при } |x| > 2; f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) \text{ при } |x| \leq 2.$$

Вычислить характеристические функции для распределения вероятностей $\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, соответствующих интегральному закону $F(x)$ распределения вероятностей:

$$1419. F(x) = 0 \text{ при } x < a; F(x) = p \text{ при } a \leq x < b;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x > b.$$

$$1420. F(x) = 0 \text{ при } x < a, F(x) = 1 - e^{-k2(x-a)} \text{ при } x \geq a.$$

$$1421. F(x) = 0 \text{ при } x < -a, F(x) = \frac{x+a}{2a} \text{ при } -a \leq x < a, F=1 \text{ при } x \geq a.$$

1422. Вычислить характеристическую функцию и моменты распределения задачи 1393.

1423. Для данной линии трамвая от пункта O до L известна функция $F(a, b)$, представляющая, что пассажир, едущий по этой линии, сел в точке $x < a$ и едет до точки $y \leq b$. Требуется определить:

1) относительную плотность движения, а именно, функцию $\varphi(z)$, представляющую вероятность, что пассажир, едущий по данной линии, проезжает через точку z ;

2) вероятность $\varphi_1(z)$, что он сел до пункта z ;

3) вероятность $\varphi_2(z)$, что он сошёл не позже z .

1424. Предполагая все функции, введённые в предыдущей задаче, непрерывными и дифференцируемыми, установить зависимости между ними и функцией $p(x, b)$, выражающей плотность вероятности для пассажира, севшего в точке x , сойти в точке $b > x$.

1425. Определить функцию $\varphi(x)$ плотности движения, если дано, что вероятность $\varphi_1(x)$ сест в трамвай в точке x пропорциональна $x(L-x)^2$, а вероятность $p(x, y)$ пропорциональна $(y-x)^h$, где $h \geq 0$. Рассмотреть случаи $h=1$ и $h=0$.

1426. Определить $p(x, y)$ и $\varphi(z)$, если вероятность маршрута от x к y , представляющая $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, пропорциональна $(y-x)^h$, где $h \geq 0$. Определить при каждом значении h отношение P_h максимальной плотности движения к средней плотности; исследовать изменение P_h в зависимости от h .

1427. Определить $\varphi(z)$, если $p(x, y)$ пропорционально $\sin \frac{\pi y}{L}$, а $\varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{2L}$ (т. е. вероятность посадки $\varphi'_1(z) = \frac{\pi}{2L} \cos \frac{\pi z}{2L}$).

1428. Определить вероятность $\varphi'_1(z)$ посадки в точке z и плотность движения $\varphi(z)$, если вероятность маршрута (x, y) равна 0 при $y - x < a$ и пропорциональна $x(L - y)$ при $y - x \geq a$ ($a < L$; рассмотреть случай $a = \frac{L}{2}$).

1429. Требуется найти предельный закон распределения вероятностей y_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + \frac{p}{n}\right) + \frac{kx_i}{\sqrt{n}},$$

где x_i — независимые между собой случайные величины, у которых м. о. $x_i = 0$, м. о. $x_i^2 = 1$, м. о. $|x_i|^3 < c^3$, причём p, k, c — определённые числа (предполагается известной предельная теорема Ляпунова-Маркова).

1430. Найти м. о. x_i^2 и предельный закон вероятностей для $S_n = \sum_0^n x_i$ при $n \rightarrow \infty$, если $x_{i+1} = \left(1 - \frac{1}{A}\right)x_i + \alpha_{i+1}$, где α_i — независимые случайные величины, причём м. о. $\alpha_i = 0$, м. о. $\alpha_i^2 = b^2$, полагая, что отношение $\frac{\text{м. о. } |\alpha_i|^3}{b^3} < \delta$ ограничено, $A > 1$, $x_0 = 0$ и $\lim \frac{A}{n} = 0$.

1431. Сохраняя условия предыдущей задачи, найти предел коэффициента R_λ корреляции между S_n и S_{n+1} , где $n_1 = \lambda^2 n$; $\lambda^2 < 1$.

1432. Решить две предшествующие задачи при условии, что $\lim \frac{A}{n} = a$ отличен от 0. Рассмотреть случай, когда $a \rightarrow \infty$, причём $b^2 = \frac{K}{nA^2}$, где K — конечное число.

1433. Найти предельную плотность $p(y)$ распределения вероятностей для y_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$y_{i+1} - y_i = -y_i \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right),$$

полагая, что α_i — независимые случайные величины, которые принимают лишь значения ± 1 , -1 с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$.

1434. Найти предельный закон $P(y)$ вероятностей для y_n , если

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + \frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}\right), \quad y_0 = 1,$$

где α_i принимает значения qa и $-pa$ ($a > 0$) с соответственными вероятностями p и q .

1435. Вычислить коэффициент R_{n+1} корреляции между $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ и $\Delta y_{n+1} = y_{n+2} - y_{n+1}$, если величины y_n независимы и м. о. $y_n = a$, полагая м. о. $y_n^2 = \sigma_n^2$; проверить, что $R_i < 0$; показать, что при $n \rightarrow \infty \lim R_n = -\frac{1}{2}$, если $\lim \sigma_n = \sigma$ для всех i .

1436. Для совершения некоторого производственного процесса необходимо участие k независимых факторов A_1, A_2, \dots, A_k , которые заканчивают свою работу в течение времени x_1, x_2, \dots, x_k , так что весь процесс заканчивается по истечении времени X , равного наибольшему из значений $x_i (i=1, 2, \dots, k)$. Требуется определить м. о. суммарной потери времени \sum_k всех факторов, если известны интегральные законы вероятностей $P_i(x_i)$ каждого фактора. Рассмотреть случай, когда $P_i(x) = P(x)$ не зависит от i .

1437. Решить предыдущую задачу в случае, когда $P(x) = 0$ при $x < a$; $P(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2b} (x - a)$ при $a < x < a + b$; $P(x) = 1$ при $x > a + b$.

§ 6. Математическая обработка статистических наблюдений

1438. Таблица

4,781	4,764	4,777	4,809	4,761	4,769
4,795	4,776	4,765	4,790	4,792	4,806
4,769	4,771	4,785	4,779	4,758	4,779
4,792	4,789	4,805	4,788	4,764	4,785
4,779	4,772	4,768	4,772	4,810	4,790
4,775	4,789	4,801	4,791	4,799	4,777
4,772	4,764	4,785	4,788	4,799	4,749
4,791	4,774	4,783	4,783	4,797	4,781
4,782	4,778	4,808	4,740	4,790	
4,767	4,791	4,771	4,775	4,747	

даёт 58 значений величины e , полученных при определении величины заряда электрона, равной $e \cdot 10^{-10}$ ед. Вычислить среднее значение величины заряда. Определить медиану и моду. Найти среднее между максимальным и минимальным значениями. Сопоставить между собой полученные средние характеристики.

1439. Дифференциальная функция распределения величины скорости v движения молекул газа характеризуется равенством

$$\varphi(v) = 4\pi \left(\frac{3}{2\pi a^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{3v^2}{2a^2}}$$

Приняв для кислорода $a = 461,2$ м/сек, вычислить величину средней скорости движения молекул кислорода, величину среднего квадратического отклонения и величину наиболее вероятнейшей скорости движения молекулы.

1440. Пользуясь данными предыдущей задачи, указать примерное число молекул кислорода на тысячу, которые двигаются со скоростями от 0 до 100 м/сек, число молекул, движущихся со скоростями от 100 до 200 м/сек, от 200 до 300 м/сек и т. д.

1441. Вычислить величину σ_x стандартного отклонения для распределения

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1+x^2)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\varphi(x)$ — дифференциальная функция распределения.

1442. Распределение значений изучаемой величины характеризуется таблицей

Значения величины	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Частоты	13	10	8	43	100	815	1 761	2 397	3 431	3 703	2 165	510	77	15	2

выведенной на основании 15 050 наблюдений над различными объектами.

Ошибки отдельного измерения характеризуются таблицей, полученной в результате повторных измерений над одним и тем же объектом.

Значение величины	2,8	3,1	3,4	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2
Частота . . .	2	16	46	83	138	113	71	22	4

Вычислить среднее значение изучаемой величины и её дисперсию, утя возможные ошибки наблюдений.

1443. Пропитывая креозотом столбы, предназначенные для установки телеграфной линии, и железнодорожные шпалы, заметили, что глубина проникновения креозота увеличивается, вообще говоря, с увеличением толщи древесины. Нижеприводимая таблица даёт сведения о средней толщине древесины столбов, изготовленных из семи различных видов деревьев, данные о средней глубине проникновения креозота, установленные с помощью взятия пробы бурением столба, и величину коэффициента корреляции, установленного по этим пробам.

X обозначает среднюю толщину древесины в сантиметрах, Y — среднюю глубину проникновения креозота в сантиметрах.

Выяснить с помощью данных этой таблицы: а) можно ли считать, что глубина проникновения креозота не зависит от вида дерева; б) можно ли считать, что средняя толщина древесины не характерна

для вида дерева; в) теснота связи, характеризуемая коэффициентом корреляции r_{xy} , одна и та же для всех видов или нет? Иначе говоря, можно ли цифровой материал таблицы объяснять случайными колебаниями выборки или нельзя?

Вид	Число столбов	Число проб	X	σ_x	Y	σ_y	r_{xy}
1	48	350	7,1222	1,2120	3,7932	1,2652	0,2597
2	50	239	6,3104	1,3844	4,1590	1,4182	0,4433
3	50	316	5,7918	1,3334	3,4032	1,1850	0,4913
4	47	323	6,7926	1,4186	4,1306	1,4306	0,1584
5	48	346	7,2214	1,1870	3,9284	1,3730	0,1815
6	50	241	6,8024	1,1974	4,0640	1,5092	0,4181
7	50	346	6,3700	1,2770	3,3664	1,3126	0,3855
Всего	343	2 161	6,6484	1,3726	3,8106	1,3822	0,3926

1444. Вычислить основные статистические характеристики распределения, указанного в таблице. Построить кривую распределения.

Возраст	До 20 л.	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60 и больше
Число лиц	66	1 659	3 622	3 492	2 455	1 333	664	200	54	16

1445. Распределение FeO в руде характеризуется таблицей

x	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24	24—26	26—28	28—30	30—32
y	11	16	20	17	19	16	20	22	19	18	27	37	27	18	5	4

В первой строке даётся содержание FeO в пробе, выраженное в процентах от общего веса пробы. Во второй строке приведены частоты.

Построить гистограмму распределения. Вычислить среднее содержание FeO в руде и его среднюю ошибку.

1446. Построить гистограмму распределения, характеризуемого таблицей, дающей содержание свинца в руде некоторого месторождения.

Содержание Рь	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
Частота . . .	122	75	43	23	13	9	7	5	1

Вычислить основные характеристики распределения.

1447. Построить гистограмму распределения серебра в руде на основании данной таблицы:

Содержание Ag	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32	32—36	36—40
Частота	188	75	44	24	13	8	6	5	1	1

Содержание серебра даётся в процентах от веса всей пробы.

Вычислить среднее содержание серебра в руде.

1448. Построить гистограмму распределения цинка в этой же руде по таблице:

Содержание Zn	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50
Частота	23	30	36	40	42	41	37	29	17	2

Содержание цинка дано в процентах от общего веса пробы.

Вычислить среднее содержание цинка в руде.

1449. Пользуясь таблицей задачи 1446, построить кривую накопленных частостей содержания свинца. С помощью этой кривой или по таблице накопленных частостей найти медиану.

Содержание	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Накопленные частости . .	0,42	0,66	0,81	0,88	0,92	0,96	0,99	0,99	1,00

1450. Пользуясь таблицей задачи 1453, построить кривую накопленных частостей содержания серебра.

С помощью полученной кривой определить первую, вторую и третью четверть.

1451. Пользуясь данными задачи 1454, построить кривую накопленных частостей распределения содержания цинка. С помощью

этой кривой или соответствующей таблицы определить четыре первых децили.

1452. Записи технического контроля содержат следующую таблицу распределения изготавливаемых телефонных аппаратов на категории по их качеству:

Категория	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число аппаратов	6	18	164	1 904	2 904	1 916	662	101	11

Вычислить основные статистические характеристики распределения, представляемого данной таблицей, приняв оценку качества аппарата разрядом за величину случайной переменной. При вычислении моментов ввести поправки Шеппарда.

1453. Опыты по определению глубины пропитывания столбов и шпал креозотом установили наличие связи между глубиной проникновения креозота и толщиной древесины. Нижеследующая таблица даёт распределение толщины древесины в деревьях, употребляющихся для изготовления шпал.

Толщина древесины	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2	5,5
Частоты	2	29	62	106	153	186	193	188	151	123	82	48	27	14	5	1

Вычислить основные статистические характеристики распределения: среднее значение, стандартное уклонение, меру скошенности и меру крутости.

1454. Проверить, что распределение 2000 групп по 500 чисел в 10-м миллионе по числу входящих в них простых чисел, согласно последней строке таблицы, приведённой в задаче 1368, вполне удовлетворительно выражается законом Гаусса.

1455. Проверить, что для 9-го миллиона приближение к закону Гаусса менее удовлетворительно.

1456. Изменение содержания FeO в руде некоторого месторождения с глубиной характеризуется таблицей, приведённой на стр. 202.

Буквой x обозначено содержание FeO, выраженное в процентах от веса пробы, буквой y обозначена глубина места взятия пробы, выраженная в метрах. Вычислить коэффициент корреляции и корреляционные отношения. Выяснить характер связи и составить уравнение линий регрессии.

1457. Содержание Fe_2O_3 и FeO в рудах некоторого месторождения на основании ряда взятых проб характеризуется таблицей, приведённой на стр. 203.

$x \backslash y$	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24	24—26	26—28	28—30	30—36—72
0—10	6	3	9	5	3	6		1	2							
10—20	3	3	6	4	4	2	8	3	3		1					
20—30	1	5	3	5	7		6	2	4	2	3	1	1			
30—40	1	2	1	1	3	5	1	6	3	3	4	3	1			
40—50		2		2	1	1	1	4	4	5	2	6	4	3		
50—60		1	1		1		2	1		3	9	3	6	5	2	1
60—70						2	1	2	1	3	4	6	3	4	1	2
70—80								1	1	1	3	4	5	1	1	
80—90						1	1	2			1	2	4	3	1	1
90—100									1	1	1	3	2	2		
100—110											2					
110—120													1			

Буквой x обозначено содержание Fe_2O_3 , а буквой y — содержание FeO . Величина содержания компонентов даётся в процентах от общего веса взятой пробы.

Выяснить корреляцию между x и y .

1458. Изменение содержания серы с глубиной в железных рудах некоторого месторождения характеризуется по взятым пробам таблицей, приведённой ниже, в которой буквой x обозначено содержание серы во взятых пробах, а буквой y — глубина места взятия пробы.

$x \backslash y$	0,0—0,5	0,5—1,0	1,0—1,5	1,5—2,0	2,0—2,5	2,5—3,0	3,0—3,5	3,5—4,0	4,0—4,5	4,5—5,0	5,0—5,5	5,5—6,0
0—10	34	1										
10—20	31	5		1								
20—30	31	6	1			1				1		
30—40	18	6	3	3	4		2					
40—50	12	6	1		4	2		3		2	2	1
50—60	5	4	1	3	3	8	2	5	1		1	2
60—70	4	1	2	4	1	4	6	5			2	1
70—80	1			1	1	4	4	1	4			
80—90					3	2	5	1	2	1	1	
90—100					3	2	2	3				
100—110						1						
110—120					1							1

Содержание выражено в процентах. Глубина даётся в метрах.

Выяснить связь между содержанием серы по взятой пробе и глубиной места взятия пробы.

1459. При изготовлении одной из деталей машины свариваются две части, изготовленные из различных стандартных материалов.

Испытания твёрдости этих частей после сварки даны таблицей:

№ испы- тания	Твёрдость		№ испы- тания	Твёрдость		№ испы- тания	Твёрдость	
	I часть	II часть		I часть	II часть		I часть	II часть
1	50,9	44,3	21	48,7	36,8	41	47,9	36,7
2	44,8	25,7	22	44,9	36,7	42	45,8	35,3
3	51,6	39,5	23	46,8	37,1	43	47,9	35,5
4	43,8	19,3	24	49,6	37,8	44	45,8	35,1
5	49,0	43,2	25	51,4	33,5	45	49,1	33,2
6	45,4	26,9	26	45,8	37,5	46	50,0	36,1
7	44,9	34,5	27	48,5	38,3	47	47,3	35,9
8	49,0	37,4	28	46,2	30,7	48	46,9	35,2
9	53,4	38,1	29	49,5	33,9	49	49,1	38,1
10	48,5	33,0	30	50,9	39,6	50	48,2	35,9
11	46,0	32,6	31	47,5	36,9	51	46,9	33,8
12	49,0	35,4	32	45,0	37,5	52	49,0	37,6
13	43,4	36,2	33	46,6	32,4	53	44,7	35,5
14	44,4	32,5	34	48,0	39,8	54	51,7	36,2
15	46,6	31,5	35	44,5	35,3	55	45,2	34,4
16	50,4	38,1	36	48,5	38,3	56	44,8	27,5
17	45,9	35,2	37	46,0	38,1	57	42,4	31,1
18	47,3	33,4	38	48,9	35,0	58	48,5	36,8
19	46,6	30,7	39	46,3	34,9	59	50,1	34,4
20	47,3	36,8	40	46,1	32,9			

Таблица обнаруживает изменчивость твёрдости обеих составных частей детали. Единственной общей причиной колебания твёрдости частей могут являться изменения термических условий в процессе сварки. Для выяснения влияния процесса сварки на твёрдость частей детали машины решить вопрос, правдоподобно ли объяснять корреляцию твёрдости частей детали с точки зрения случайной выборки

Таблица значений

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Продолжение

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,499997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

ОТВЕТЫ

Отдел XII

11. При $x \leq 1$ расходится; при $x > 1$ сходится. **12.** Сходится при $|x| \neq 1$. **13.** То же. **14.** Сходится при $|x| < 1$. **15.** Сходится при $|x| < 4$. **16.** Сходится при $|x| < e$. **17.** Сходится при $|x| < \frac{1}{e}$. **18.** Сходится при $|x| \leq 1$. **19.** Сходится при всяком x . **20.** Сходится при $x > 1$. Расходится при $0 < x \leq 1$. **21.** Сходится при $b - a > 2$. Расходится при $b - a \leq 2$. **22.** Сходится при $b > a$. Расходится при $b \leq a$. **23.** Сходится при $\beta < \alpha$. Расходится при $\beta \geq \alpha$. **24.** Расходится. **25.** Сходится при $x \neq$ кратному $\frac{\pi}{2}$. **26.** Расходится. **27.** Расходится. **28.** Сходится. **29.** Сходится. **30.** Расходится. **31.** Сходится при $a > 2$. Расходится при $a \leq 2$. **32.** Сходится при $|x| < 1$. Расходится при $|x| > 1$. При $x = +1$ ряд сходится, когда $\gamma > \alpha + \beta$; при $x = -1$ ряд сходится, когда $\gamma > \alpha + \beta - 1$. **33.** Сходится. **34.** Расходится. **35.** Сходится. **36.** Сходится при $a > 0$. **37.** То же. **38.** Сходится при любом вещественном x . **39.** То же. **41.** Сходится при $a > 2$, расходится при $a \leq 2$.

$$56. \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n-1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \quad 57. \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}. \quad 58. \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$59. \frac{-\sin nx \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\cos \frac{x}{2}}. \quad 60. \frac{(-1)^{n-1} \sin^2 2nx - [1 + (-1)^{n-1}] \sin^2 x}{2 \cos 2x}.$$

$$61. \frac{x \sin a - x^n \sin na + x^{n+1} \sin (n-1)a}{1 - 2x \cos a + x^2}. \quad 163. \sum_0^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}.$$

$$164. \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}. \quad 165. \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

$$166. 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}. \quad 167. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad 168. \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

169. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$. 170. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.
171. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right]$. 172. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{a^2 - n^2}$.
173. $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$. 174. $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$. 175. $\frac{1}{4} -$
 $-\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1) 2\pi x}{(2n+1)^2}$. 176. $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi nx}{3}}{n^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{m^2}$.
177. $\frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + \frac{24}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos (2m+1)x}{(2m+1)^4}$.
178. $2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$. 179. $\frac{1}{h} \operatorname{sh} h -$
 $- 2h \operatorname{sh} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{h^2 + \pi^2 n^2} \cdot \cos \frac{\pi nx}{h} + 2\pi \operatorname{sh} h \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{h^2 + \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nx}{h}$.
180. $\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 + n^2} \right)$.
181. $\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \sin nx}{a^2 + n^2}$. 192. $\frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$.
193. $-\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)$; $0 < x < 2\pi$. 194. $\frac{\pi}{4}$. 195. $\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.
196. $\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2} \sin x$. 197. $\sin x \left(\frac{1}{4} - \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right)$.
198. $\frac{1}{2a^2} [\pi - x - \pi \operatorname{ch} ax + \pi \operatorname{cth} a\pi \operatorname{sh} ax]$. 199. $\frac{1}{a^2} \left(\frac{\pi \operatorname{sh} ax}{2 \operatorname{sh} a\pi} - \frac{x}{2} \right)$.
200. $\frac{1}{8} \left[1 - \frac{\pi \cos x \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sin \pi \sqrt{2}} - \frac{\pi \operatorname{ch} x \sqrt{2}}{\sqrt{2} \operatorname{sh} \pi \sqrt{2}} \right]$. 234. $x^3 = \frac{3}{4} T_1(x) + T_3(x)$.
235. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m+1} T_{2m+1}(x)}{2m+1}$.

$$236. \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} T_{2n}(x).$$

$$237. T_{2n}(x) + \frac{C_{2n}^1}{2^2} T_{2n-2}(x) + \frac{C_{2n}^2}{2^4} T_{2n-4}(x) + \dots + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} T_0.$$

$$238. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4n-1)(2n-2)!}{2^{2n} n! (n-1)!} P_{2n-1}(x).$$

$$239. \frac{1}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (4n+1)(2n-2)!}{2^{2n} (n-1)! (n+1)!} P_{2n}(x). \quad 240. \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^n L_n(x).$$

$$241. \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{\nu} \cdot (n!)^2}{\nu! (n-\nu)!} L_{\nu}(x).$$

$$242. \sum_{n=0}^{\infty} B_n L_n(x); \quad B_n = \frac{1}{2i} \left[\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}} - \frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}} \right].$$

$$243. \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(x); \quad A_n = \frac{1}{2} \left[\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}} + \frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}} \right].$$

$$244. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)! 2n}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{n-1} n!} H_{2n+1}(x).$$

$$245. \frac{2}{\sqrt{2\pi}} H_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)! (2n-2)!}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{n-1} n!} H_{2n}(x).$$

$$246. e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a^n H_n(x).$$

$$247. e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} H_{2n}(x).$$

$$248. e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n+1} H_{2n}(x).$$

$$273. \frac{\pi a - 1}{2a^2} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a} - 1)}.$$

$$274. \frac{\pi a - 2}{4a^4} + \frac{\pi [(2\pi a + 1)e^{2\pi a} - 1]}{2a^3 (e^{2\pi a} - 1)^2}. \quad 275. \frac{\pi}{x^3 \sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi x \sqrt{2}) + \sin(\pi x \sqrt{2})}{\operatorname{ch}(\pi x \sqrt{2}) - \cos(\pi x \sqrt{2})}.$$

Отдел XIII

- 313.** 0,05 м. **314.** g определяется с точностью до 1 см/сек²; ошибка в измерении времени больше влияет на результат, чем ошибка при измерении длины. **315.** С точностью до 20 см приблизительно. **316.** При 45°. **317.** 125 ± 1 м. **318.** Около 0,005. **319.** Погрешности угла при нахождении по синусу —

около $2''$, по тангенсу — около $1''$. **320.** Точность вычисления подкоренных величин такова: под первым корнем: $6 \cdot 10^{-7}$, под вторым $2 \cdot 10^{-6}$, под третьим 10^{-5} , под четвёртым $4 \cdot 10^{-5}$. **321.** Приблизительно 37 м.

322. $2x - 1$. **323.** $2x - 1 - \frac{29}{13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 5} (x - 2)(x - 4)(x - 5)(x - 10)$.

324. $2 - \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} -$

$- 28 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. **325.** $f(x) = \frac{4x - x^3}{3}$; значения раз-

ности: $-0,08$; $+0,18$; -320 . **326.** $f(x) = \frac{640 - 196x^2 + 9x^4}{640}$; значения

разности: $0,001$; $0,090$; 111 . **327.** $\Delta y_0 = 0,471$; $\Delta^2 y_0 = -0,054$; $\Delta^3 y_0 = +0,006$.

328. $\Delta y_0 = 0,0292$; $\Delta^2 y_0 = 0,0568$; $\Delta^3 y_0 = 0,0012$; $\Delta^4 y_0 = 0,0048$. **329.** $y =$

$= \frac{118x + 3}{161}$. **330.** $y = \frac{29x^2 - 9x + 40}{84}$. **331.** $3,002268462$. **332.** Найдя

после первого приближения $x = 1005,237$ и вычислив $\Delta \ln 1005,237$ при $h = 0,001$, после второго приближения получаем $x = 1005,237437$.

333. $0,52375$. **334.** $u = 0,50206$. **335.** $0,66043863$; до $\frac{1}{2 \cdot 10^9}$. **336.** $0,3751467$;

до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$. **337.** $\varphi = 28^\circ 4' 58'' ,89$. **338.** $\psi(0,715) = 0,220378903$; до $\frac{1}{10^9}$.

339. $x = 0,834350$. **340.** Погрешности формул Грегори, Гаусса и Бесселя

равны 50 , 47 и 8 единицам 8-го знака после запятой. **341.** Погрешности

равны 72 , 35 и 2 единицам 8-го знака. **342.** 508 и 443 . **343.** Около 8026 .

344. Около $84\,640$. **345.** $196\,121$. **346.** $0,6970$. **347.** $0,6970$. **348.** $0,783$.

349. $1,3655$. **350.** $0,26965$. **351.** $0,82318$. **352.** $0,69325$; $0,69326$; $0,78539$; $1,37079$;

$0,27233$; $0,82249$. **353.** $0,69318$; $0,69318$; $0,78553$; $1,37076$; $0,272222$; $0,82247$.

354. $0,69313$; $0,69313$; $0,78530$; $1,37076$; $0,27218$; $0,822464$. **355.** $0,693147$;

$0,693146$; $0,785403$; $1,370762$; $0,272203$; $0,822467$. (Значения последних инте-

гралов, взятые до 7-го знака, таковы: $0,6931472$; $0,7853982$; $1,3707622$; $0,2721982$;

$0,8224670$.) **356.** $\frac{\pi}{4}$; $1,3108$. **357.** $0,7870$; $1,3104$. **358.** $0,8671$. **367.** $0,479256$.

368. $2,6208$. **371.** Применяя разности до четвёртого порядка, получим

$0,7853987$. **372.** Пользуясь формулой с пятью разностями, получим

$0,7853982$. **373.** Применяя формулу Грегори с двумя разностями, получаем

результат $0,095310181$, верный до 10^{-9} . **378.** При $p = 9$ получаем

$c = 0,57721566$ с точностью до 10^{-8} . **379.** $7,4854701$. **381.** $1,2020569$; $0,9375483$.

403. $0,69315$. **404.** $0,78540$. **405.** $0,91596$. **406.** $0,90154$. **407.** $0,13629$.

408. $0,22184$. **428.** $0,74682$. **429.** $1,10474$. **430.** $1,37076$. **431.** $1,21770$.

432. $0,11769$. **433.** $0,49577$. **434.** $0,83446$. **435.** $0,91596$. **436.** $1,83193$.

437. $0,83565$. **438.** $0,86697$. **453.** $3,0489$; $-1,6920$; $-1,3569$. **454.** $-3,5042$;

$1,7521 \pm i \cdot 1,1003$. **455.** $-2,2340$; $0,3276$; $0,9532 \pm i \cdot 0,6765$. **456.** $1,2963$;

—1,4305; $-0,1103 \pm i \cdot 1,2669$; $0,1774 \pm 0,5495i$. **457.** 29,53660. **458.** 0,739085.
459. 2,75295. **460.** 0,61906 (один из двух корней). **461.** 4,49341. **462.** 4,73004.

$$\mathbf{463.} \quad 1,20241. \quad \mathbf{465.} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu+1)} + a_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{2 \cdot 4 \dots 2\nu} = \\ = y_0 e^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$\mathbf{466.} \quad y = C \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \dots \nu} x^\nu = C(1+x)^n.$$

$$\mathbf{467.} \quad C_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$\mathbf{468.} \quad a_0 \sum \frac{x^{3\nu}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3\nu-1) 3\nu} + a_1 \sum \frac{x^{3\nu+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3\nu(3\nu+1)}.$$

$$\mathbf{477.} \quad y_{n+1} = C e^x \left[1 + \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2 x^4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{a^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right] \rightarrow C e^{x + \frac{ax^2}{2}}.$$

$$\mathbf{478.} \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \sigma^n. \quad \text{Здесь } \varphi_0(x) = \sin ax \cdot \varphi_n(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sin a(x-t) \cdot t \varphi_{n-1}(t) dt.$$

$$\mathbf{481.} \quad y = \cos x + \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{6} \cos 2x \right) + \\ + \sigma^2 \left(-\frac{2}{3} + \frac{61}{72} \cos x + \frac{1}{6} x \sin x - \frac{2}{9} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 3x \right) + O(\sigma^3).$$

483. При $n=2m$ имеем: $H_{2m}(x) =$

$$= \frac{(-1)^m e^{\frac{x^2}{4}}}{2^m \cdot m!} \left[\cos \frac{x}{a} + \frac{a}{24} x^3 \sin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{16} x^2 \cos \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^4}{72} \right) + O(a^3) \right].$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m + \frac{1}{2}}}. \quad \text{При } n=2m-1: H_{2m-1} =$$

$$= \frac{(-1)^m e^{\frac{x^2}{4}} \cdot 2ma}{2^m \cdot m!} \left[\sin \frac{x}{a} - \frac{ax^3 \cos \frac{x}{a}}{24} + \frac{a^2}{16} x^2 \sin \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^4}{72} \right) + O(a^3) \right].$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m - \frac{1}{2}}}.$$

$$\mathbf{484.} \quad y = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3(2n+5)(2n-3)}.$$

$$\mathbf{485.} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos nx}{n^2(n^4+1)}; \quad n=1, 3, 5, \dots$$

486.

x	y	$u = -0,1xy$	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	Δy
-0,10	0,990050	9 900,5	-4 913,0	-74,5	74,5	
-0,05	0,997503	4 987,5	-4 987,5	0	74,5	
0	1,000000	0	-4 987,5	74,5	72,7	
0,05	997 503	-4 987,5	-4 913,0	147,2	69,1	
0,10	990 050	-9 900,5	-4 765,8	216,3	63,6	-12 298
0,15	977 752	-14 666,3	-4 549,5	279,9		-16 961
0,20	960 791	-19 215,8	-4 269,6			-21 375
0,25	939 416	-23 485,4				-25 480
0,30	913 936					

487.

x	y	Δy	$hy' = \frac{x+y}{10}$	$\Delta hy'$	$\Delta^2 hy'$	$\Delta^3 hy'$	$\Delta^4 hy'$
1	1		0,2	31 551	3 319	347	41
1,1	1,21551		0,231551	34 870	3 666	388	37
1,2	1,46421		0,266421	38 536	4 054	425	46
1,3	1,74957		0,304957	42 590	4 479	471	50
1,4	2,07547	0,37069	0,347547	47 069	4 950	521	54
1,5	2,44616	0,42019	0,394616	52 019	5 471	575	61
1,6	2,86635	0,47490	0,446635	57 490	6 046	636	
1,7	3,34125	0,53536	0,504125	63 536	6 682		
1,8	3,87661	0,60218	0,567661	70 218			
1,9	4,47879	0,67603	0,637879				
2,0	5,15482						

488. Значения y таковы: 0,03090; 0,09368; 0,18020; 0,28738; 0,41337; 0,55706; 0,71738; 0,89359; 1,08519; 1,29158. При решении следует вычислить разложением в ряд значения y при $x=0,100$; 0,1125; 0,1250; 0,1375; 0,1500, положив $h=0,0125$. **489.** $u = \sin x$; $\cos x = v$; $u' = v$; $v' = -u$.

x	u	hu'	Δ	Δ^2	Δ^3	v	hv'	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0	0,1	-0,00050	-99	0	1	0	-998	9	12
0,1	0,0998	0,09950	-0,00149	-99	4	0,9950	-0,00998	-989	21	8
0,2	0,1987	0,09801	-0,00248	-95	3	0,9801	-0,01987	-968	29	10
0,3	0,2955	0,09553	-0,00343	-92	5	0,9553	-0,02955	-939	39	9
0,4	0,3894	0,09210	-0,00435	-87	4	0,9210	-0,03894	-900	48	8
0,5	0,4794	0,08775	-0,00522	-83	7	0,8775	-0,04794	-852	56	9
0,6	0,5646	0,08253	-0,00605	-76	6	0,8253	-0,05646	-796	65	6
0,7	0,6442	0,07648	-0,00681	-70		0,7648	-0,06442	-731	71	
0,8	0,7173	0,06967	-0,00751			0,6967	-0,07173	-660		
0,9	0,7833	0,06216				0,6216	-0,07833			
1,0	0,8414					0,5103				

490.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$J_0(x)$	1	0,998	0,990	0,978	0,960	0,938	0,912	0,881	0,846	0,808	0,765
$J_1(x)$	0	0,050	0,100	0,148	0,196	0,242	0,287	0,329	0,369	0,406	0,440

491.

x	y	y'	hy''	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1	0	0,1	500	1 007	13	13
0,1	1,00500	0,10017	0,100500	1 507	1 020	26	10
0,2	1,02007	0,20134	0,102007	2 527	1 046	36	11
0,3	1,04534	0,30452	0,104534	3 573	1 082	47	10
0,4	1,08107	0,41075	0,108107	4 655	1 129	57	14
0,5	1,12762	0,52109	0,112762	5 784	1 186	71	10
0,6	1,18546	0,63665	0,118546	6 970	1 257	81	
0,7	1,25516	0,75858	0,125516	8 227	1 338		
0,8	1,33743	0,88810	0,133743	9 565			
0,9	1,43308	1,02651	0,143308				
1,0	1,54307	1,17519					

492. 1; 0,99750; 0,99002; 0,97763; 0,96040; 0,93847; 0,91200; 0,88120; 0,84629; 0,80752; 0,76520. **493.** 0,07074; —0,02920; —0,12884; —0,22720; —0,32329; —0,41615.

Отдел XIV

- 494.** $w(z) = \frac{z^2}{2}(2 - i)$. **495.** $w = z^3(1 - 2i)$. **496.** $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$.
- 497.** $w = ze^z$. **498.** $w = \operatorname{ctg} z$. **499.** $w = ai \ln z + \beta i + \gamma$; a, β, γ — вещественные.
- 500.** $w = a \sqrt{z} + \beta + i\gamma$; a, β, γ — вещественные. **501.** $w = ai \ln z + \beta i + \gamma$.
- 504.** $w = a \ln z + \beta i + \gamma$. **505.** $e^{\frac{\alpha}{z} + \beta + i\gamma}$. **506.** $\ln w = \frac{i\alpha}{z^2} + \beta + i\gamma$. **507.** cz^{i^2} .
- 510.** $z = \pm i$ — простые полюсы. **511.** $z = 0$; ± 1 — простые полюсы.
- 512.** $z = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — простые полюсы; $z = \infty$ — (не изолированная) существенно особая точка. **513.** $z = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$ — простые полюсы.
- 514.** $z = 0$ — существенно особая точка. **515.** $z = \pm 1$ — точки ветвления 1-го порядка. **516.** $z = 1, e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}, \infty$ — точки ветвления 1-го порядка.
- 517.** 1) $|w| = c; x^2 + y^2 = ax$; 2) $\operatorname{arc} w = c; x^2 + y^2 = by$. **520.** $\Delta \operatorname{arc} \sqrt[n]{z - a} = \frac{2\pi}{n}$ при одном обходе. **521.** $\Delta \operatorname{arc} w$ равна соответственно: а) π ; б) 2π ; с) 0. **522.** В первом случае $w = e^{-e(1+\pi i)}$, во втором $w = e^{-e(1-\pi i)}$.
- 523.** $\sqrt{2 \sin \varphi} \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}}$, если $\sin \varphi > 0$ и $\sqrt{-2 \sin \varphi} e^{\frac{\pi i}{4}}$, если $\sin \varphi < 0$. **524.** $\ln 8 + \pi i$.
- 525.** $\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi i}{2}$; $-\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi i}{2}$. **531.** $w_1 = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{24} - \frac{19z^4}{720} - \frac{49z^5}{480} - \dots$; $w_2 = 1 + \frac{z}{3} - \frac{4z^4}{45} + \frac{44}{945}z^6 - \frac{428}{14175}z^8 + \frac{10196}{467775}z^{10} + \dots$
- 532.** $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}iz^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 \dots \right]$.
- 533.** Обе функции разлагаются в ряд на всей плоскости.
- 534.** $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^{2v+1}}{4^v}$. **535.** $\frac{1}{9} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{2n}$, где $a_n = 1$ для $n < 0$ и $a_n = \frac{3n+7}{4n+2}$ для $n > 0$. **536.** $\frac{1}{9} \sum_1^{\infty} \frac{1 + (3n-7)4^{n-2}}{z^{2n}}$. **537.** 1) При $|z| < \pi$ имеем:
- $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - 2 \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^{2v-1}$; $a_v = \frac{1}{\pi^{2v}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2v}}$. 2) При $\pi < |z| < 2\pi$ имеем:
- $\operatorname{ctg} z = \frac{3}{z} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\pi^{2v}}{z^{2v+1}} - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} z^{2\mu-1}$; $a_{\mu} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{2\mu}}$.

538 и 539. При $1 < |z| < 2$: $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{2}\right)^n$. При $|z| > 2$:

$\sum_{n=2}^{\infty} C_n \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Здесь $C_{2\nu} = C_{2\nu+1} = -i \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)2^{2\nu-1}} \right]$;

$a = -\frac{1}{2} \ln \frac{2-i}{2+i}$; $b_n = a + C_n$. **540.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+5}}{n!}$. **541.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$;

$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu!)^2}$; $a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu! (n+\nu)!}$. **546.** При $z=0$ вычет 1, при $z = \pm 1$ он

равен $-\frac{1}{2}$. **547.** Вычет $\mp \frac{i}{4}$. **548.** $(-1)^{n+1} C_{2n}^{n+1}$; $(-1)^n C_{2n}^{n+1}$.

549. $e^\alpha - e^\beta$. **550.** $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **551.** $\frac{-\pi i}{2}$. **552.** $\frac{3\pi i}{64}$. **553.** 0. **554.** 0. **555.** 0.

556. $2n+1$. **557.** $\frac{\pi i}{2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{2}}$. **558.** При $b=0$. **559.** $\pi\sqrt{2}$. **560.** $\frac{4}{3}\pi$.

561. $\frac{\pi}{2a}$. **562.** $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3(a+b)^2b}$. **563.** $\frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{2m+1}{2n}\pi$. **564.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

565. $\pi \frac{1+p^4}{1-p^2}$. **566.** $\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$. **567.** $\pi i \cdot \operatorname{sign} \operatorname{Im} a$. **569.** $I_1 = 2\pi i e^{-a}$;

$I_2 = 0$. **570.** πe^{-ar} ; $a > 0$; $r > 0$. **571.** $\frac{\pi}{2r} \cdot e^{-ar}$; $a > 0$; $r > 0$. **572.** $\frac{\pi}{2}$.

573. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \pi e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}} + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$. **574.** $\frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab})$. **612.** 1. **613.** 0.

614. 5. **615.** 1. **616.** По корню в квадранте. **617.** То же.

665. $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} \left(\frac{w}{2}\right)^n$; $|w| < 1$.

666. $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n$; $|w| < e^{-1}$. **667.** $z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{w^{2n+1}}{(2n+2)}$.

668. $z = bw + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b^{nm+1} w^{(m+1)n+1} \frac{(nm+2)(nm+3) \cdots (nm+n)}{n!}$.

Здесь $|w^{m+1} b^m| < \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$.

669. $e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!}$; $a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{2n}^{\nu} \frac{(n-1)!}{(n-1-\nu)!}$; $|w| < \frac{1}{4}$.

$$670. e^{-z} = e^{-a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-a} a^n)^{(n-1)}}{n!} \omega^n. \quad 671. E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n d^{n-1} (\sin^n M)}{n! dM^{n-1}}.$$

$$672. x = 1; x = -1. \quad 673. x = 0, x^6 = 4. \quad 674. x = \pm 1; x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}; x = \pm \sqrt{1 - \sqrt{2}}. \quad 675. x = 1, \rho, \rho^2; x = \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}; \rho \sqrt{1 \pm \sqrt{2}};$$

$$\rho^2 \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}; \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \quad 676. y_1 = \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{81} x^5 + \dots y_{2,3} = \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} x^2 -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{72} x^2 \dots \quad 677. y_1 = -\frac{x}{4} + \frac{x^4}{1024} \dots \quad y_{2,3,4} = \sqrt[3]{4} + \frac{x}{12} + \dots$$

$$678. y_{1,2,3} = (b^2 x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} a \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{8}{3}} + \dots; y_{4,5} = a^{\frac{1}{2}} b^{-1} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} a^2 b^{-6} x^5 + \dots$$

$$679. y_1 = x + \frac{4}{3} x^2 + \dots; y_{2,3} = \sqrt{\frac{x}{2}} - 2 \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \dots; y_{4,5} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} x -$$

$$- \frac{(\sqrt{3}-1)^4}{24} x^2 + \dots \quad 689. |z| \neq 1. \quad 690. \text{Вся плоскость, кроме точек}$$

$z = -1, -2, -3, \dots$ **691.** $|z| < 1$. **692.** Всюду, кроме точек $z = \pm ia^{-n}$.

712. Логарифмическая спираль при $a \neq 0$ и окружность при $a = 0$.

713. При $a \neq 0$ циклоида, удлиненная или укороченная циклоида, соответственно $a = b, a < b, a > b$. **714.** Эллипс. **715.** Парабола. **716.** Развёртка

круга. **717.** Полу плоскость $x > 1$. **718.** Замкнутый круг. **719.** Внутренность

лемнискаты. **720.** Окружность. **721.** При соответствующем определении

значений аркусов область вне круга $(x+1)^2 + y^2 = 2$ при условии $x < 0$.

722. Общая, а также внешняя часть окружностей: $x^2 + (y-1)^2 = 2$;

$x^2 + (y+1)^2 = 2$. **730.** Линии $|z| = C$ переходят в эллипсы с фокусами

в точках ± 1 ; линии $\arg z = C$ — в софокусные гиперболы. Область

$|z| > C > 1$; $a < \arg z < \pi - a$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$ переходит в часть внеш-

ней области эллипса, ограниченную двумя гиперболами. **731.** На верх-

нюю полу плоскость с вертикальными разрезами между точками $n\pi$ и $n\pi + ai$.

732. $\frac{\pi}{2}$. **733.** На внутренность эписцилоиды с площадью $\pi a^2 n(n+1)$.

734. S_n — область внутри правого острого угла величиной $\frac{\pi}{n}$ с вершиной

в точке $z = -n$ и со стороной на оси OX ; $\lim S_n$ — полосы шириной π .

735. На внутренность окружности $\left|z - \frac{a}{4}\right| < \frac{a}{4}$. **739.** $a\bar{d} - \bar{b}c = 0$,

$\operatorname{Im} \left(\frac{b}{d}\right) > 0$. **740.** $w = \frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+3i+1}$. **741.** $w = \frac{2z+1}{z+2}$. **742.** $w = c \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^a$.

743. $w = \frac{2z}{1+z^2}$. **744.** $w = \frac{2+iz^2}{2-iz^2}$. **745.** $w = -\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^2$ — один из ответов.

746. $w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. **747.** $w = \sqrt{\frac{a-z}{z-b}}$. **748.** $w = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$.

749. $\pi z l = a \ln w.$ **750.** $(b-a)zw = \pi a(2bl - z).$ **751.** $w = \ln z.$

752. $w = \frac{z+24}{3z};$ $\rho = \frac{2}{3}.$ **753.** $w = z + \sqrt{z^2-1};$ $A = 2 + \sqrt{5}.$

754. $z = w^2 + 2lw.$ **755.** $z = 2 \operatorname{ch} \left\{ \frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \ln w + l\alpha \right\},$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

756. $w = \frac{1}{a}(z^2 - a^2).$ **761.** В многоугольную звезду с равными сторонами. Внутренние углы поочередно равны $\pi - \frac{2\pi}{n} - \lambda\pi$ и $\pi + \lambda\pi.$

762. $w = \int_0^z \frac{(1+z^5)^{\frac{2}{5}}}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} dz.$ **763.** $w = c \int_1^z \frac{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}{z^2} dz + c_1.$ **764.** $w = \sqrt{z^2-1}.$

765. $w = l \ln \sin z.$ **766.** $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2-1},$ $\zeta = \frac{4}{9} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{9}.$

767. $z = \frac{4w}{(1+w)^2}.$ **797.** $y = [a + (b-a)x]e^x + \int_0^x (x-t)e^{(x-t)} f(t) dt.$

798. $6x = 3(a-c) + 2(b+c)e^{-t} + (3a-2b+c)e^{2t},$

$6y = 3(a-c) + 4(b+c)e^{-t} - (3a-2b+c)e^{2t},$

$6z = 3(c-a) + 2(b+c)e^{-t} + (3a-2b+c)e^{2t}.$

799. $9x = (14 + 24t)e^{-2t} + 4et - 9e^{-t};$ $9y = (-10 + 24t)e^{-2t} + et.$

800. $x = e^{2t} - 2et;$ $y = (1-t)e^t;$ $z = 2e^t - e^{2t} + tet.$

801. $2x = (3t-1)e^t + (3+t)e^{-t};$ $4y = (4-3t)e^t - (4+t)e^{-t}.$

802. $y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right].$

803. $y = a_0 \left[1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right].$

804. $y =$

$= a_0 \left[1 - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^9}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \dots \right] +$
 $+ a_2 \left[x^2 - \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{10}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} - \dots \right].$

805. $y = a_0 \left[1 - \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{12}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} - \dots \right] +$

$+ a_1 \left[x - \frac{x^7}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} - \dots \right] +$

$+ a_2 \left[x^2 - \frac{x^8}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^{14}}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14} - \dots \right].$

806. $y = \frac{a_0 + a_1 x}{1 - x^2}.$

807. $y = 2c_1 \left[x - \frac{3x^2}{(2!)^3} + \frac{11x^3}{(3!)^3} - \frac{50x^4}{(4!)^3} + \dots \right] +$

$+ (c_1 \ln x + c_2) \left[1 - \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots \right].$ **808.** $xy = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$

$$812. y = A \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)[n(n+1)-2 \cdot 3]}{4!} x^4 - \dots \right\} + \\ + B \left\{ x - \frac{n(n+1)-1 \cdot 2}{3!} x^3 + \frac{[n(n+1)-1 \cdot 2][n(n+1)-3 \cdot 4]}{5!} x^5 - \dots \right\}.$$

$$813. y = A \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right] + \\ + B \left[x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} + \dots \right].$$

$$814. \varphi(a, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot (2a+1)(2a+3) \dots (2a+2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n \cdot (2a+2)(2a+4) \dots (2a+2n)} x^n, (a \neq 0);$$

если $a=0$, то общее решение имеет вид $y = C_1 \varphi(0, x) + C_2 \left\{ \varphi(0, x) \ln x + \right.$

$$\left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right]^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} \right) x^n \right\},$$

$$\text{где } \varphi(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 x^n. \quad 815. y_1 = \varphi(0, 1-x);$$

$$y_2 = y_1 \cdot \ln(1-x) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} \right) x^n.$$

$$816. y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x); \quad I_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

$$818. y = \int_C e^{tx} (t^2 + 1)^{n-\frac{1}{2}} dt. \text{ За контур } C \text{ можно взять кривые, идущие из } \infty$$

в направлении $\operatorname{Re} xt < 0$ и уходящие в том же направлении после обхода точек i и $-i$. Можно также выбрать контур, обходящий точки i и $-i$ в противоположных направлениях так, чтобы изменение функции под интегралом при обходе контура равнялось нулю. 819. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Каждая из функций y_1 и y_2 представляется интегралом

$$\int_{\gamma} e^{tx} (t-\alpha)^{-\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}-1} (t-\beta)^{-\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}-1} dt. \text{ Контур } \gamma \text{ выбирается так, что}$$

бы точки α и β лежали внутри него, а приращение подинтегральной функции вдоль него равнялось нулю. Если $\alpha < 0$; $0 < \beta < -\alpha$, то за один контур можно взять отрезок от α до β , а за другой — отрезок от одной из точек α или β и уходящий в ∞ в направлении $\operatorname{Re} xt < 0$.

$$820. \text{ При } \operatorname{Re} x > 0 \text{ имеем } y = c_1 \int_{-q}^q (t^2 - q^2)^{\alpha-1} e^{tx} dt + c_2 \int_{-\infty}^{-q} (t^2 - q^2)^{\alpha-1} e^{tx} dt.$$

При $\operatorname{Re} x < 0$ пределы второго интеграла меняют знак.

$$822. y_1 = \int_0^{\infty} \sin \frac{x}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad y_2 = \int_0^{\infty} \cos \frac{x}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$823. y_1 + iz_1 = \int_0^{\infty} e^{-t-xit} \frac{dt}{\sqrt{t}}; \quad y_2 + iz_2 = i \int_0^{\infty} e^{-t-xit} \frac{dt}{\sqrt{t}}, \text{ где } y_1, z_1, y_2,$$

z_2 — вещественные.

843. Линии потенциала — вертикали, линии тока — горизонталы, скорость равна a и направлена в положительную сторону оси OX . **844.** Линии тока и потенциала — вертикали и горизонталы. Скорость равна a и направлена в отрицательную сторону оси OY . **845.** Линии тока $xy = C$, линии потенциала $x^2 - y^2 = C$. Скорость по величине $2|z|$, $v_x = 2x$, $v_y = -2y$.

846. Линии тока: $x^2 + y^2 = Cy$, линии потенциала: $x^2 + y^2 = Cx$. $v_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$v_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad v = \frac{1}{x^2 + y^2}. \quad \mathbf{847.}$$

$$\text{Линии тока и потенциала лемнискаты: } r^2 = C \sin 2\varphi, \quad r^2 = C \cos 2\varphi; \quad v = \frac{2}{|z|^3}. \quad \mathbf{848.}$$

$$\text{Линии тока и потенциала лемнискаты: } y = Cx \text{ и } x^2 + y^2 = C^2. \quad v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v_y = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{1}{|z|}.$$

$$849. \arcsin(z-a) + \arcsin(z+a) - \arcsin(z-ai) - \arcsin(z+ai) = C.$$

$$850. w = 2i \ln(z^2 - a^2) + c; \quad \varphi = -2 \arctg \frac{r^2 \sin 2\theta}{r^2 \cos 2\theta - a^2}.$$

$$851. w = \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a} + c. \quad 852. \frac{1}{2}. \quad 853. \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

854. Линии тока и потенциала: $A(x-a) + By = 0$; $(x-a)^2 + y^2 = c^2$.

857. Поток по любому замкнутому контуру равен нулю. Циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, если точка a вне контура, и равна Γ , если точка a внутри контура. **859.** Поток равен 6π , циркуляция равна нулю. **860.** Обе циркуляции равны -4π . **861.** Источники в точ-

ках: $e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$, 0 . Их обильности 2π , 2π , 2π , 2π , -4π .

$$866. w = \frac{E}{2\pi} \ln \left(z + z^{-1} - a - \frac{1}{a} \right); \quad |z| = 1 \text{ — одна из линий тока.}$$

$$867. w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-\frac{1}{a}}; \quad |z| = 1 \text{ — одна из линий тока.}$$

$$868. w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z-ai) \left(z + \frac{i}{a} \right)}{(z+ai) \left(z - \frac{i}{a} \right)}. \quad 869. w = \frac{Q}{\pi} \ln(z^2 - 1).$$

$$870. w = \frac{E}{2\pi} \ln(z^6 + a^6). \quad 871. w = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}. \quad 872. w = -\frac{E}{\pi} \frac{1}{z}.$$

$$883. w = -v \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad 888. w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\Gamma \left(-\frac{z}{l} - \frac{1}{4} - \frac{hi}{2l} \right)}{\Gamma \left(-\frac{z}{l} + \frac{1}{4} + \frac{hi}{2l} \right)}.$$

$$889. v = \frac{\Gamma}{4d} \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{d}, \text{ параллельно стенкам. } 890. w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sin z.$$

$$891. w(z) = \frac{Q}{4\pi} \ln \sin(z - hi). \quad 892. w = -v \left(z + \frac{a^2}{z} \right). \quad 893. w = v \sqrt{z^2 + 1}.$$

894. Скорость равна нулю в точках $z_1 = \operatorname{Re} \beta$, $z_2 = -\operatorname{Re} -\beta$, где $\sin \beta = \frac{\Gamma}{4\pi a R}$ (при $\Gamma < 4\pi a R$). Циркуляция по кругу $|z| = R$ равна Γ ;

$$v_\infty = a. \quad 895. w(z) = c \operatorname{arsh} z. \quad 896. w = \frac{v}{a-b} (az - b \sqrt{z^2 - c^2}), \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

$$898. w = -v \left[z + \frac{4}{3} + \frac{4}{3(3z+4)} \right]. \quad 900. \text{ Силовые и потенциальные}$$

линии — прямые и окружности $\varphi = C$; $r = C$, где $z = re^{i\varphi}$. 901. Потенциал

$$v = \frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} \cdot \ln \left| \frac{z+7+\sqrt{48}}{z+7-\sqrt{48}} \right| + 2. \quad 902. v = 2\sigma \ln \left| \frac{z+i\sqrt{3}}{z-i\sqrt{3}} \right|;$$

плотность σ_1 в точке $z = 2l + e^{i\varphi}$ выражается формулой $\sigma_1 = \frac{\sigma \sqrt{3}}{2\pi(2 + \sin \varphi)}$.

$$903. \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{24 \ln 2} \leq |\sigma| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{3}{8 \ln 2}. \quad 904. V = 2\delta \ln 3.$$

906. $2z = (a+b)e^{i\omega} + (a-b)e^{-i\omega}$. Софокусные линии $\lambda x^2 + (c^2 + \lambda)y^2 = \lambda(c^2 + \lambda)$ — линии потенциала при $\lambda > 0$, силовые линии при $0 > \lambda > -c^2$.

$$907. w = \frac{\gamma_0}{h} z. \quad 908. v = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

$$909. \sigma_{\max} = \frac{1}{4\pi \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})}, \quad \sigma_{\min} = \frac{1}{8\pi \ln(2 + \sqrt{3})}.$$

$$910. w = \frac{2v_0}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) - iv_0. \quad 911. \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$912. z = \int_0^w \sqrt{e^w + 1} dw + 2[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

913. $w = -2iq \ln[z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}] + i \cdot c$, где c — вещественная постоянная.

$$\text{ная. } 914. q(z-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \tau} d\tau = i \int_0^w \sqrt{\cos \frac{w}{q}} dw. \quad 915. t = \frac{100^\circ}{\ln 2} \ln \left| \frac{4z+1}{z+4} \right|.$$

$$916. t = \frac{100^\circ}{\ln 4} \cdot \ln \frac{17}{5}. \quad 917. t = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \frac{z+a}{z-a}. \quad 918. t = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \left| \frac{1+z}{1-z} \right|.$$

$$919. t = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \frac{z^{\frac{\pi}{a}} + a}{z^{\frac{\pi}{a}} - a}.$$

Отдел XV

$$940. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \quad \xi = x - y, \quad \eta = x + y. \quad 941. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0; \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

$$942. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = y^2; \quad \eta = x^2. \quad 943. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0;$$

$$\xi = xy; \quad \eta = \frac{y}{x}. \quad 944. \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{W}{(\xi - \eta)^2}; \quad \xi = \frac{y}{2} + \sqrt{l - x},$$

$$\eta = \frac{y}{2} - \sqrt{l - x}, \quad u = \frac{W}{\sqrt{2} \sqrt[4]{l - x}}. \quad 945. \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{W}{\sin^2(\xi - \eta)}; \quad \xi = \frac{y + \omega}{2},$$

$$\eta = \frac{y - \omega}{2}, \quad u = \frac{W}{\sqrt{\sin \omega}} \quad (x = l \cos \omega). \quad 946. \quad \xi = \operatorname{tg} x; \quad \eta = \operatorname{tg} y;$$

$$v = u \frac{\sin^{\beta'}(x - y)}{(\xi - \eta)^m} \cos^{n - m} x = u \frac{\sin^{\beta}(x - y)}{(\xi - \eta)^n} \cos^{m - n} y;$$

$$\beta' - \beta = m - n; \quad p = \beta(1 - \beta') - n(1 - m).$$

$$950. \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad u \Big|_{t=\frac{l}{a}} = -\frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \text{где } h = u_{\max} \text{ при } t=0.$$

$$952. \quad u = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(z) dz}{\sqrt{p - z}}, \quad \text{где } \alpha = x - \sqrt{p - x} y - \frac{1}{4} y^2;$$

$$\beta = x + \sqrt{p - x} y - \frac{1}{4} y^2.$$

$$953. \quad u = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(z) dz}{\sqrt{p^2 - z^2}}, \quad \text{где } \alpha = x \cos y - \sqrt{p^2 - x^2} \sin y;$$

$$\beta = x \cos y + \sqrt{p^2 - x^2} \sin y. \quad 962. \quad \text{При } t, \text{ лежащем внутри интервалов } \left(0, \frac{r-R}{a}\right) \text{ и } \left(\frac{r+R}{a}, \infty\right), \text{ конденсация равна нулю; при } \frac{r-R}{a} < t < \frac{r+R}{a}$$

$$\text{конденсация } S = \frac{S_0(r - at)}{2r}. \quad 968. \quad \text{Искомое решение имеет вид: } u(x, y) =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin(\omega - \nu)} f[l \cos(\omega - \nu)] + \sqrt{\sin(\omega + \nu)} f[l \cos(\omega + \nu)]}{2 \sqrt{\sin \omega}} +$$

$$+ \frac{1}{2 \sqrt{\sin \omega}} \int_{\omega - \nu}^{\omega + \nu} \Phi(\omega, y, z) dz,$$

$$\text{где } \Phi(\omega, y, z) = \varphi(l \cos z) \sqrt{\sin z} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos \nu}{2 \sin \omega \sin z}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} f(l \cos z) \frac{\sin y}{\sin \omega \sqrt{\sin z}} F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos \nu}{2 \sin \omega \sin z}\right). \quad \omega = \arccos \frac{x}{l}.$$

Указание. Надо привести заданное уравнение к простейшему каноническому виду (см. задачу 945). Область интегрирования та же, что и в предыдущей задаче.

$$969. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$970. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$$

$$971. \quad u = \frac{1}{l} \int_0^l [f(x) + tF(x)] dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right] \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$972. \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

$$a_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l f'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{4l}{a\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l F'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx, \quad \text{где } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \text{ обозначают по-}$$

ложительные корни трансцендентного уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \left(\gamma = l \frac{k}{k_1} \right)$.

$$973. \quad \vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l} \right\} \left\{ \sin \frac{\mu_k}{l} x - \frac{p}{\mu_k} \cos \frac{\mu_k}{l} x \right\};$$

$$a_k = \frac{2\mu_k}{\mu_k^2 + p(p+2)} \int_0^l f'(x) \left\{ \cos \frac{\mu_k}{l} x + \frac{p}{\mu_k} \sin \frac{\mu_k}{l} x \right\} dx;$$

$$b_k = \frac{2l}{a[\mu_k^2 + p(p+2)]} \int_0^l F'(x) \left\{ \cos \frac{\mu_k}{l} x + \frac{p}{\mu_k} \sin \frac{\mu_k}{l} x \right\} dx,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}$; $p = l \frac{k}{k_1}$.

974. $u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{\mu_k x}{l}$, где

$$T_k(t) = \frac{2}{a\mu_k^2} \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(\mu + 1) + \mu_k^2} \int_0^l d\tau \int_0^l \frac{\partial Y(\xi, \tau)}{\partial \xi} \sin \frac{a\mu_k}{l} (t - \tau) \cos \frac{\mu_k \xi}{l} d\xi,$$

а μ_1, μ_2, \dots обозначают положительные корни уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = p$, причём $p = \frac{gl\rho}{P}$.

975. $u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$.

976. $u(x, t) = \frac{2K}{a\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}$, где число K , определяемое

равенством $\frac{K}{\rho} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} F(x) dx$, есть импульс силы удара молоточка о струну.

977. $p = e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin(\omega_n t + \varphi_n),$

$$i = e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \omega_n t,$$

где $a_n = \frac{4p_0}{\pi(2n+1)} \frac{1}{\sin \varphi_n}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = 2\omega_n \frac{L}{R}$ и $b_n = -\frac{2p_0}{iL\omega_n}$,

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2 l^2}{L\pi^2(2n+1)^2}}. \quad \mathbf{978.} \quad u_1 = \frac{A}{a\omega} \frac{\sin p(l-c)}{\sin pl} \sin px \sin \omega t,$$

$$u_2 = \frac{A}{a\omega} \frac{\sin pc}{\sin pl} \sin p(l-x) \sin \omega t, \quad \text{где } p = \frac{\omega}{a}.$$

979. $u_2(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \int_0^t d\tau \int_0^l Y(\xi, \tau) \sin p_n(t - \tau) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$, где

$$p_n = \frac{a n \pi}{l}.$$

$$980. \quad u = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \cdot \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

$$981. \quad u = \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l} (t - \tau) d\tau, \quad \text{где } F(t) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} Y(x, t) dx. \quad \text{Если внешняя возмущающая сила гармоническая,}$$

т. е. $F(t) = F_0 \sin \omega t$, то

$$u = -\frac{2\omega F_0}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a t}{l} + \frac{2F_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \omega t,$$

причём предполагается, что ни одна из частот $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ в точности не равна частоте ω . **982.** Период T определяется из уравнения

$$a_1 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{T a_1} + a_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{T a_2} = 0.$$

$$985. \quad u = \frac{-gx^2}{2a^2} + \frac{glx}{a^2} - \frac{16gl^2}{a^2\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

$$992. \quad u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi.$$

$$993. \quad u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{l^2} t} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi, \quad p = \frac{hl}{k},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\gamma \mu$, $\gamma = \frac{k}{lh}$.

$$994. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n}{l} x + p \sin \frac{\mu_n}{l} x}{p(p+2) + \mu_n^2} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{l^2} t} \int_0^l f(\xi) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n \xi}{l} + p \sin \frac{\mu_n \xi}{l} \right) d\xi,$$

$p = \frac{hl}{k}$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного

$$\text{уравнения } 2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}.$$

$$995. u(x, t) = e^{-bt} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) e^{-n^2 \alpha^2 t} \right],$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

$$996. u(x, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2}{R^2} t} \sin \frac{n\pi r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{n\pi \rho}{R} \, d\rho.$$

$$997. u(x, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} \sin \frac{\mu_n r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} \, d\rho,$$

$p = HR - 1$, где через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначены положительные корни уравнения $\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0$.

$$998. u(r, t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 [f(\rho) + tF(\rho)] \, d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{a\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a\mu_n t}{R} \right] \frac{\sin \frac{\mu_n r}{R}}{r},$$

$$a_n = \frac{2}{R} \left(1 + \frac{1}{\mu_n} \right) \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} \, d\rho, \quad b_n = \frac{2}{a\mu_n} \left(1 + \frac{1}{\mu_n} \right) \int_0^R \rho F(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} \, d\rho,$$

где μ_1, μ_2, \dots — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

$$999. u(x, t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}} \right)}{J_1^2(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}} \int_0^l f(\xi) J_0 \left(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}} \right) \, d\xi,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(x) = 0$ [$J_0(x)$ и $J_1(x)$ — бesselовы функции нулевого и первого порядка].

$$1000. u(r, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R [f(\rho) + tF(\rho)] \rho \, d\rho +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{a\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a\mu_n t}{R} \right] J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right), \quad a_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) \, d\rho,$$

$$b_n = \frac{2}{aR\mu_n J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) \, d\rho, \quad \text{где } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \text{ обозначают положи-}$$

тельные корни уравнения $J_1(x) = 0$.

$$1001. u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{\mu_n t}{R} \right] J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho; \quad b_n = \frac{2}{R \mu_n J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$1002. u(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} \frac{J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho, \text{ где } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$1003. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho, \text{ где } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$1004. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_1(x) = 0$.

$$1005. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \frac{J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)}{\left(1 + \frac{h_1^2 R^2}{\mu_n^2} \right) J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения

$$x J_1(x) - h_1 R J_0(x) = 0.$$

$$1006. u(r) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{h} \frac{J_0 \left(\frac{n\pi r}{h} \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi R}{h} \right)} \int_0^h f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{h} d\xi.$$

$$1007. u(x, y, t) =$$

$$= \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \pi^2 \left(\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2} \right) t} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy.$$

$$\begin{aligned}
 1008. \quad u(x, y, z, t) = & \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m}}{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi n \right)} \times \\
 & \times \left\{ \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi (n - z) \right] \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy + \right. \\
 & \left. + \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi z \right] \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy \right\}.
 \end{aligned}$$

$$1009. \quad u(x, y, t) =$$

$$\begin{aligned}
 = & \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi a t \right) \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi a t \right)}{a\pi \sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy \right] \sin \frac{j\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{l} y.
 \end{aligned}$$

$$1010. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}} d\xi.$$

$$\begin{aligned}
 1011. \quad u(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}} - e^{-\frac{1}{4} \frac{(x+\xi)^2}{a^2 t}} \right] d\xi + \\
 & + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\eta) \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{a^2 (t-\eta)}}}{(t-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\eta.
 \end{aligned}$$

$$1012. \quad u(x, y, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} d\xi d\eta.$$

$$1013. \quad u(x, y, t) =$$

$$\begin{aligned}
 = & \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \left[e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} - e^{-\frac{1}{4} \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} \right] d\eta d\xi + \\
 & + \frac{x}{4\pi a^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta, \xi) \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2 + (y-\eta)^2}{a^2 (t-\xi)}}}{(t-\xi)^2} d\eta d\xi.
 \end{aligned}$$

$$1014. u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta.$$

$$1015. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \sqrt{2n(2n-1)} at + b_n \sin \sqrt{2n(2n-1)} at] P_{2n-1} \left(\frac{x}{l} \right),$$

где

$$a_n = \frac{4n-1}{l} \int_0^l f(\xi) P_{2n-1} \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi,$$

$$b_n = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)} at} \int_0^l F(\xi) P_{2n-1} \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi$$

$[P_k(x)$ — многочлен Лежандра с индексом k]. 1017. $u(r, \theta) = A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) + \dots + A_n r^n P_n(\cos \theta) + \dots$ при $r < R$, $u(r, \theta) = \frac{B_1}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{B_2}{r^2} P_1(\cos \theta) + \dots + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \dots$ при $r > R$. 1018. $v(r, \theta) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \dots \right]$ при $r < R$,

$$v(r, \theta) = \frac{E}{R} \left[\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{r} \right)^5 P_4(\cos \theta) - \dots \right]$$

при $r > R$. 1019. $u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{r}{R} \right)^m P_m(\cos \theta)$ при $r < R$, $u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} P_m(\cos \theta)$ при $r > R$. 1020. $v(r, \theta) = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots + (-1)^k \left(\frac{r}{R} \right)^{2k+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} (4k+3) P_{2k+1}(\cos \theta) + \dots \right]$

при $r < R$, $v(r, \theta) = \frac{v_1 + v_2}{2} \frac{R}{r} + \frac{v_1 - v_2}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{R}{r} \right)^6 P_5(\cos \theta) - \dots + (-1)^k \left(\frac{R}{r} \right)^{2k+2} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} (4k+3) P_{2k+1}(\cos \theta) + \dots \right]$

при $r > R$. 1021. $u(r, \theta) = MHR \left[\frac{1}{4HR} + \frac{1}{HR+1} \frac{1}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + \frac{1}{HR+2} \frac{5}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^3 P_2(\cos \theta) + \dots + \frac{1}{HR+2k} \frac{(-1)^{k-1}}{2} \times \frac{3 \cdot 5 \dots (2k-3)(4k+1)}{2 \cdot 4 \dots (2k+2)} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} P_{2k}(\cos \theta) + \dots \right]$ при $0 \leq \theta \leq \pi$ и $r \leq R$.

$$1022. \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a\lambda_n^2 t + b_n \sin a\lambda_n^2 t) X_n(x),$$

$$a_n = \frac{4\lambda_n^4}{l} \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{[X_n'(l)]^2}, \quad b_n = \frac{4\lambda_n^2}{al} \frac{\int_0^l F(x) X_n(x) dx}{[X_n'(l)]^2},$$

где $u|_{t=0} = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$.

$$1029. \quad \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \dots, \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \text{ где}$$

$P_n(x)$ — многочлен Лежандра. 1030. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1) \dots$

Вообще $\sqrt{\frac{2n-1}{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \sqrt{\frac{2n-1}{\pi}} T_n(x)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева. 1031. $1, -x+1, \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1), \dots$ Вообще

$\frac{1}{n!} L_n(x)$, где $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) =$ многочлену Лагерра. Проверить

последнее указание. 1032. $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}, \dots$ Вообще

$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} n!^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\pi}} H_n(x)$, где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} =$ многочлену Эрмита.

$$1033. \quad y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 + 1, \quad u(x) = -1 + \int_0^x (t-2x) u(t) dt.$$

$$1034. \quad u(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$1035. \quad y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 - x, \quad u(x) = x - \int_0^x (x-t) u(t) dt.$$

$$1036. \quad y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 + x, \quad u(x) = 5 - 6x + \int_0^x (6t - 6x + 5) dt.$$

$$1037. \quad y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2, \quad u(x) = \cos x - \int_0^x (x-t) u(t) dt.$$

$$1038. \quad \varphi(x) = x. \quad 1039. \quad \varphi(x) = -2 + cx. \quad 1040. \quad \varphi(x) = -\frac{5}{2}x.$$

$$1041. \quad \varphi(x) = \frac{9}{7}x - 2. \quad 1042. \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b g^2(x) dx,$$

$$R\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda \right) = \frac{g(x)g(y)}{1 - \lambda \int_a^b g^2(x) dx}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b g^2(x) dx},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}}, \quad \varphi(x) = F(x) + \frac{\lambda g(x)}{\left(1 - \lambda \int_a^b g^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}} \int_a^b g(y) F(y) dy.$$

$$1043. \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b g(x) dx, \quad R\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \frac{g(y)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \varphi(x) = F(x) +$$

$$+ \frac{\lambda}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx} \cdot \int_a^b g(y) F(y) dy. \quad 1044. \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b g(x) dx,$$

$$R\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \frac{g(x)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}}, \quad \varphi(x) = F(x) + \frac{\lambda g(x)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx} \int_a^b F(y) dy.$$

$$1045. \quad \varphi(x) = Cex. \quad 1046. \quad \varphi(x) = x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{12}. \quad 1047. \quad \varphi(x) = F(x) +$$

$$+ \frac{2\lambda}{2-\lambda} \int_0^1 yF(y) dy, \quad \text{если } \lambda \neq 2, \quad \varphi(x) = F(x) + C, \quad \text{если}$$

$$y = 2 \text{ и } \int_0^1 yF(y) dy = 0. \quad 1048. \quad \frac{\cos(\sqrt{\lambda}(1-y)) \sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}, \quad x < y,$$

$$\frac{\cos(\sqrt{\lambda}(1-x)) \sin(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}, \quad x > y, \quad D(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}.$$

$$1049. \quad D(\lambda) = 1 - c(b-a)\lambda, \quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = c, \quad \lambda_1 = \frac{1}{c(b-a)},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}. \quad 1050. \quad \text{Определитель Фредгольма } D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{1}{12}\lambda^2.$$

$$\lambda = -6 \pm 4\sqrt{3}, \quad \varphi(x) = \pm x\sqrt{3} + 1. \quad 1051. \quad \varphi(x) = 18x^2 + 12x + 9.$$

$$1052. D(\lambda) = (1 - \lambda\pi)^2, \quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = (1 - \lambda\pi)(\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y),$$

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{matrix} \middle| \lambda\right) = (\sin x_1 \sin 2x_2 - \sin x_2 \sin 2x_1)(\sin y_1 \sin 2y_2 - \sin y_2 \sin 2y_1)\lambda.$$

Фундаментальные функции, отвечающие числу $\lambda = \frac{1}{\pi}$: $\sin x$ и $\sin 2x$.

$$1053. D(\lambda) = 1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2, \quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \cos(x+y) + \frac{\lambda\pi \cos(x-y)}{2}.$$

Фундаментальные функции — $\sin x$ и $\cos x$.

$$\varphi(x) = F(x) - \frac{\lambda \sin x}{\lambda + \frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} F(x) \sin x \, dx - \frac{\lambda \cos x}{\lambda - \frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} F(x) \cos x \, dx.$$

$$1054. \quad \varphi(x) = 1 - \frac{2 \sin x}{1 + \frac{\pi}{2}}. \quad 1055. \quad \frac{xy - \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{\lambda}{12}}; \text{ фундаментальные}$$

функции: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{12}$, $\lambda_1 = 12$ 1056. $\varphi(x) = 2x$.

$$1057. \quad \frac{x^2 + y^2 + \left[x^2y^2 - \frac{x^2 + y^2}{3} + \frac{1}{5}\right]\lambda}{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{45}\lambda^2}.$$

$$1058. \quad \frac{x^2y + y^2x + xy \left[\frac{xy}{3} - \frac{x+y}{4} + \frac{1}{5}\right]\lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{240}\lambda^2}.$$

$$1059. \quad \frac{1 + x + y + \left[\frac{1}{3} - \frac{x+y}{2} + xy\right]\lambda}{1 - 2\lambda - \frac{1}{12}\lambda^2}.$$

$$1060. \quad \frac{x - y - \lambda \left[\frac{1}{3} - \frac{x+y}{2} + xy\right]}{1 + \frac{\lambda^2}{12}}. \quad 1061. \quad \varphi(\lambda) = e^{xi\sqrt{2\lambda-1}}.$$

$$1062. \quad \lambda = \sqrt{12}, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_1 = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} - x\right); \quad \varphi_2 = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_2 = 1.$$

$$1063. \quad \varphi(x) = A_1 \cos \pi x + A_2 \sin \pi x, \quad \psi(x) = A_2 \cos \pi x - A_1 \sin \pi x. \quad 1064. \quad G = \\ = -\ln \xi, \quad x \leq \xi, \quad G = -\ln x, \quad x \geq \xi, \quad y(x) = +\lambda_n \int_0^1 \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad y(x) = \\ = J_0(x\sqrt{\lambda_n}), \quad \text{где } \lambda_n \text{ — корень уравнения } J_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

$$1065. \quad G = \frac{1}{2n} \left[-(x\xi)^n + \left(\frac{x}{\xi} \right)^n \right], \quad x \leq \xi; \quad G = \frac{1}{2n} \left[-(x\xi)^n + \left(\frac{\xi}{x} \right)^n \right], \\ x \geq \xi; \quad y(x) = +\lambda_n \int_0^1 \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi = J_n(x \sqrt{\lambda_n}),$$

где λ_n — корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$.

$$1066. \quad G = \frac{1}{2m} \left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{m}{2}}, \quad x \leq \xi; \quad G = \frac{1}{2m} \left(\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{m}{2}}, \\ x \geq \xi, \quad y(x) = +n(n+1) \int_{-1}^{+1} G(x, \xi) y(\xi) d\xi = V(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad \text{где}$$

$P_n(x)$ — многочлен Лежандра. **1067.** $G = -\frac{1}{2} \ln[(1-x)(1+\xi)] + \ln 2 -$
 $-\frac{1}{2}, \quad x \leq \xi; \quad G(x, \xi) = G(\xi, x), \quad y(x) n = (n+1) \int_{-1}^{+1} G(x, \xi) y(\xi) d\xi = P_n(x).$

$$1068. \quad G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \int_{\xi}^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad x \leq \xi; \quad G(x, \xi) = G(\xi, x), \\ y(x) = +\mu \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad \mu = 2n+2 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

$$1069. \quad G = e^x + \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad G(x, \xi) = G(\xi, x), \\ y(x) = +\mu \int_0^{\infty} \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad \mu = n+1 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

1070. $G(\xi, x) = \xi(1-x)$, если $\xi < x$, $G(\xi, x) = x(1-\xi)$, если $\xi > x$.

$$y(x) = k^2 \int_0^1 G(\xi, x) y(\xi) d\xi - \int_0^1 f(\xi) G(\xi, x) d\xi.$$

1071. $G(x, \xi) = \frac{(1+hx)(1+H(1-\xi))}{h+H+Hh}$; $x < \xi$. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$;

$$y(x) = k^2 \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi - \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

1072. $\operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$, $\varphi_n = C_n \left[\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \cos \sqrt{\lambda_n} x \right]$,

$$\varphi'(0) + \varphi'(1) = 0, \quad \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi'(0) = 0.$$

1073. $G(\xi, x) = \xi \left(1 - \frac{h}{1+h} x\right)$, если $\xi < x$, $G(\xi, x) = x \left(1 - \frac{h}{1+h} \xi\right)$,
если $\xi > x$, $y(x) = k^2 \int_0^1 G(\xi, x) y(\xi) d\xi - \int_0^1 f(\xi) G(\xi, x) d\xi$.

1074. $y(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k_n^2 - k^2} \cdot \frac{2h(\cos k_n - 1)}{k_n(h + \cos^2 k_n)} \sin k_n x$.

1078. $\lambda_n = \frac{a_n^2}{R^2}$, $\varphi_n(l) = J_0\left(\frac{a_n l}{R}\right)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого
порядка, а a_n — её корни. **1079.** $V(a) = \lambda \int_0^R \rho^2 G(\rho, a) V(\rho) d\rho$, $G(\rho, a) =$

$= \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}$, $a < \rho$; $G(\rho, a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{R}$, $a > \rho$; $V_k(a) = \sqrt{\frac{2}{R}} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{a}{R}\right)}{a}$,

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^2$. **1080.** $V(a) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \cdot \int_0^R \rho^2 F(\rho) V_n(\rho) d\rho V_n(a)$, где λ_n
и $V_n(a)$ — характеристические числа и фундаментальные функции задачи 1079.

1081. $V(a) = \lambda \int_0^R \rho^2 G(\rho, a) V(\rho) d\rho$, $G(\rho, a) = \frac{1}{\rho}$, $a < \rho$, $G(\rho, a) = \frac{1}{a}$,

$a > \rho$. $V_n(a) = \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2R}\right)}{a}$, $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2R}\right)^2$.

Отдел XVI

1084. $f_y = 0$, $f_{yy} > 0$. 1) $y = x^2$; 2) $y = -\frac{x}{2}$; 3) верхняя полуокружность
 $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$; 4) дуга параболы $y = -\sqrt{2ax}$. **1085.** Интеграл не зави-
сит от пути интегрирования и равен $I = x_2 y_2^2 - x_1 y_1^2$. **1086.** Минимум $I = 0$
при $y = -\frac{x}{2}$, если $x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 = 0$; в противном случае экстремума
не существует. **1087.** Минимум интеграла для прямой $y = 0$, если $y_1 =$
 $= y_2 = 0$; в противном случае экстремума нет. **1088.** Окружность ϵ цент-
ром на оси OX , проходящая через заданные точки. Через любые две точки,
лежащие в верхней полуплоскости, проходит одна и только одна экстре-
маль. Если назвать эти экстремали прямыми линиями, а значение интеграла
 $I = \int_A^B \frac{\sqrt{1+v'^2}}{y} dx$, взятого по этой экстремали, назвать расстоянием

между точками A и B , то получится осуществление геометрии Лобачевского на полуплоскости $y > 0$. **1089.** Экстремали параболы $y = \frac{(x - \beta)^2}{4\alpha} + \alpha =$

$= \alpha \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x - \beta}{\alpha} \right)^2 \right]$, получающиеся одна из другой преобразованиями подобия и переноса параллельно оси OX . Через данные две точки могут проходить две экстремали, одна или ни одной. **1090.** $x = \alpha \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - \alpha^2}} + \beta$.

1091. $r^{n+1} \cos[(n+1)(\theta - \alpha)] = \beta$. Две точки $M_1(r_1, \theta_1)$ и $M_2(r_2, \theta_2)$ можно соединить непрерывной экстремалью только в том случае, если $|\theta_1 - \theta_2| < \frac{\pi}{n+1}$. **1092.** Линия действия силы проходит через начало координат, орбитой точки является логарифмическая спираль. **1094.** Дуга окружности. **1095.** Дуга окружности, проходящей через точки O , A и B . **1096.** Сфера.

1097. $F(x, y, y') = \int_0^{y'} (y' - t) \Phi(t, y - xt) dt + y' \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}$, где

Φ и μ — произвольные функции своих аргументов. **1098.** $F(x, y, y') =$

$= \int_0^u (u - \alpha) \Phi\left(\alpha, \frac{y}{x} - \alpha x\right) d\alpha + y' \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$, где $u = \frac{xy' - y}{x^2}$,

α Φ и ψ — произвольные функции своих аргументов. **1099.** $y = 7 - \frac{4}{x}$

даёт сильный минимум. **1100.** $y = x^3 + 2x + 1$ даёт сильный минимум, ибо полное приращение интеграла ΔI положительно. **1101.** $y = \frac{3 \ln x}{2 \ln 2} - \frac{x - 1}{2}$

даёт сильный минимум, ибо полное приращение интеграла ΔI положительно. **1102.** $y = x - 1$, слабый минимум. **1104.** Если $|y_1| \geq \pi$, то нет экстремали, соединяющей заданные точки, и минимума интеграла не существует. Если $|y_1| < \pi$, то среди экстремалей $e^{(x - C_1)} \cos(y - C_2) = 1$ есть одна, проходящая через заданные точки; эта экстремаль даёт сильный минимум.

1105. Касательная прямая к характеристической кривой $U = y'^2 - yy'^3$ в точке $(y' = 0, U = 0)$ пересекает характеристическую кривую U в точке с абсциссой $\frac{1}{y}$. В любом соседстве экстремали функция Вейерштрасса E может менять знак, условие Вейерштрасса не выполнено. **1106.** Экстремали $y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}$; уравнение Якоби $\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{th} \frac{x - \beta}{\alpha} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\alpha^2} u = 0$; его

решения $u_1 = \operatorname{sh} v$, $u_2 = \operatorname{ch} v - v \operatorname{sh} v$, где $v = \frac{x - \beta}{\alpha}$. Если x и x_0 ($v_0 =$

$= \frac{x_0 - \beta}{\alpha}$) — сопряжённые критические точки, то $\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v_0 - \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v_0 +$

$+(v - v_0) \operatorname{sh} v \operatorname{sh} v_0 = 0$. **1107.** $y = \alpha \sin(3x + \beta)$, где постоянные α и β определяются из условия, чтобы кривая проходила через заданные точки, даёт

сильный минимум, если $|x_2 - x_1| < \frac{\pi}{3}$; если $|x_2 - x_1| > \frac{\pi}{3}$, то минимума нет.

1108. $y = \text{sh}(ax + b)$; через две заданные точки проходит всегда одна и только одна экстремаль. Условия Лежандра и Якоби выполняются, условие Вейерштрасса не выполняется, слабый минимум. **1109.** Экстремали — параболы $y = c(x + a)^2$; через две точки, лежащие с одной стороны от оси OX , проходят две экстремали; через две точки, лежащие с разных сторон от оси OX , — ни одной; если обе точки лежат в верхней полуплоскости OXY ($y > 0$), то дуга одной из экстремалей, соединяющих две заданные точки, не содержит точки оси OX ; на этой дуге условия Лежандра и Якоби выполняются, условие Вейерштрасса не выполняется; эта дуга даёт поэтому слабый минимум. **1110.** Уравнение экстремалей имеет вид: $y = a\varphi\left(\frac{x - \beta}{a}\right)$.

Если рассматривать пучок экстремалей, проходящий через точку $A(x_0, y_0)$, то β будет функцией от a , определённой уравнением $y_0 = a\varphi\left(\frac{x_0 - \beta}{a}\right)$.

В сопряжённой критической точке B : $\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y - (x - \beta - a\beta')y'}{a} = 0$, откуда

$\beta + a\beta' = x - \frac{y}{y'}$, т. е. $\beta + a\beta'$ есть абсцисса точки пересечения касательной к экстремали в точке B с осью OX . С другой стороны, в точке

A : $\frac{\partial y_0}{\partial a} = 0$, откуда $\beta + a\beta' = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$, т. е. $\beta + a\beta'$ есть в то же время абсцисса точки пересечения касательной к экстремали в точке A с осью OX .

1111. 1) $y = c \text{sh} \frac{x - \xi}{c}$. 2) Через заданные точки проходят две экстремали

$y = c \text{ch} \frac{x}{c}$, если $b > a \text{tg} \alpha$, где α — решение уравнения $\sin \alpha = \text{th} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)$,

$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, а c есть решение уравнения $\frac{b}{c} = \text{ch} \frac{a}{c}$. Если $b = a \text{tg} \alpha$, то

через заданные точки проходит только одна экстремаль и ни одной, если $b < a \text{tg} \alpha$. 3) Для нахождения сопряжённой с M_1 точки на экстремали M_1M_2

имеем уравнение $\frac{x}{c} - \text{cth} \frac{x}{c} = -\frac{a}{c} + \text{cth} \frac{a}{c}$. При этом $x > a$, если $\frac{a}{c} <$

$< \text{cth} \frac{a}{c}$, и $x < a$, если $\frac{a}{c} > \text{cth} \frac{a}{c}$. 4) Минимум, и притом сильный, при

$b > a \text{tg} \alpha$ даёт та экстремаль, у которой $\frac{a}{c} < \text{cth} \frac{a}{c}$, т. е. та из цепных

линий, которая выше. **1112.** Дуга циклоиды $x = c(2\phi - \sin 2\phi)$, $y = c \times$
 $\times (1 - \cos 2\phi)$, не содержащая между O и M точки возврата. Она даёт сильный минимум. **1113.** Экстремали-циклоиды: $x = c_2 + c_1(2\phi - \sin 2\phi)$, $y + h =$
 $= c_1(1 - \cos 2\phi)$. Существует только одна экстремаль, удовлетворяющая

граничным условиям и не содержащая между точками O и M точек возврата. Она даёт сильный минимум. **1114.** 1) Экстремаль $y = a \frac{(1 + q^2)^2}{q}$;

$x = a \left(q^2 + \frac{3}{4} q^4 - \ln q \right) + \beta$. Она состоит из двух ветвей, уходящих в

бесконечность. Условие Лежандра выполняется только на одной ветви, вогнутой в сторону отрицательной оси OY (при $q \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$). 2) На той же ветви кривой выполняется и условие Якоби, ибо абсцисса точки пересечения касательной к экстремали с осью OX убывает, если двигаться по ветви в сторону возрастающих q (см. задачу 1110), 3) Условие Вейерштрасса на рассматриваемой ветви не выполнено. Поэтому минимум — слабый. **1115.** $y = x^3$

даёт сильный минимум, ибо полное приращение интеграла $\Delta I = \int_{-1}^{+1} (x^2 \eta'^2 + 12\eta^2) dx$ всегда положительно. **1116.** Общее решение уравнения Эйлера $y = C_1 \ln x + C_2$; непрерывной экстремали, соединяющей заданные точки, не существует. **1117.** Не выполнено условие Вейерштрасса, что сразу видно из рассмотрения характеристической кривой. **1118.** Интегральная кривая уравнения Эйлера $y = \frac{1}{x}$ решением служить не может, так как является разрывной линией. Точная нижняя граница интеграла есть нуль. **1119.** Точная нижняя граница интеграла равна нулю. Непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, дающей минимум интеграла, не существует. **1120.** $y = \sqrt[3]{x}$ даёт сильный минимум. **1121.** Если расстояние между заданными точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) меньше $2R$, то меньшая из двух дуг окружности, проходящей через заданные точки, даёт сильный максимум. **1122.** Уравнение геодезических линий

$\theta = \alpha + \frac{1}{2} a \int \sqrt{\frac{2f + f'^2}{2f - a^2}} \frac{dz}{f}$, $r^2 = 2f(z)$. Для двух сопряжённых критических точек $M_1(r_1, \theta_1, z_1)$ и $M'_1(r'_1, \theta'_1, z'_1)$ на геодезической линии $M_1 M_2$

имеет место равенство $\int_{z_1}^{z'_1} \frac{\sqrt{2f + f'^2}}{\sqrt{(2f - a^2)^3}} dz = 0$ (корень берётся на разных

промежутках с надлежащим знаком). Дуга $M_1 M_2$ даёт сильный минимум, если точка M_2 лежит ближе ближайшей сопряжённой с M_1 в направлении $M_1 M_2$ точкой. **1123.** Винтовые линии $\theta = \alpha + \frac{z}{R} \operatorname{ctg} \beta$ дают сильный минимум между любыми двумя своими точками (R, θ_1, z_1) и (R, θ_2, z_2) , равный

$\left| \frac{z_2 - z_1}{\sin \beta} \right|$. Между двумя точками можно провести бесчисленное множество

геодезических линий, а именно: $\operatorname{ctg} \beta = \frac{R}{z_2 - z_1} (\theta_2 - \theta_1 + 2p\pi)$, где p — любое целое число. **1124.** $r \sin[(\theta - \beta) \sin \alpha] = C$; если $C \neq 0$, то сопряжённых точек нет, и геодезическая линия даёт сильный минимум интеграла между любыми двумя своими точками. **1125.** Дуги больших кругов. Сопряжёнными точками являются диаметрально-противоположные точки. Дуга большого круга, меньшая полуокружности, даёт сильный минимум.

1126. $\theta = \alpha - \operatorname{arctg}(au) + \frac{a}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}$, где $u = \sqrt{\frac{r^2+1}{r^2-a^2}}$, в частности при

$a=0$ дуги меридианов. Геодезическая линия даёт кратчайшее расстояние между двумя точками меридиана всегда, если обе точки лежат по одну сторону от начала координат; если же точки лежат по разные стороны от начала координат, то должно быть выполнено условие

$$\ln(\sqrt{r_1^2+1}+r_1)+\ln(\sqrt{r_2^2+1}+r_2)-\frac{\sqrt{r_1^2+1}}{r_1}-\frac{\sqrt{r_2^2+1}}{r_2}<0.$$

1128. $\ln \frac{1+\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{a-r \cos \phi}{(b-r \sin \phi) \cos \phi}$, где ϕ — угол, составляемый касательными в концах кривой с осью OX . Эти касательные проходят через центры окружностей. **1129.** $2R \cos(\theta-\bar{\theta})=x \sin \bar{\theta}-y \cos \bar{\theta}$, где θ и $\bar{\theta}$ — соответственно углы с осью OX касательных к экстремали и к трансверсали в точке x, y . **1130.** $F(x, y, y')=G(x, y) \sqrt{1+y'^2}$.

1131. $F(x, y, y')=G(x, y) \sqrt{1+y'^2} e^{\pm \arctg y'}$. **1132.** $y = \frac{y_1 \sin x}{\sin x_1}$, где x_1 определяется из уравнения $3(x_1-2)-\sin 2x_1=0$, $y_1 = \sqrt[3]{2-x_1}$; $x_1 = 1,83 \dots$

Условие Якоби выполнено. Интеграл имеет сильный минимум. **1133.** Дуга циклоиды $x = \frac{c}{2(\pi-\beta)} \{2\phi - \sin 2\phi\}$, $y = \frac{c}{2(\pi-\beta)} \{1 - \cos 2\phi\}$ даёт сильный

минимум. **1134.** Экстремали суть полуокружности $y = \sqrt{a^2 - (x-\beta)^2}$ с центрами на оси OX . Пучок экстремали через начало координат есть $y = \sqrt{x(2a-x)}$. Поле есть верхняя полуплоскость; $p(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

1137. Уравнение Гамильтона-Якоби $(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = \frac{1}{y^2}$; экстремали окружности с центром на оси OX $y = \sqrt{\beta^2 - (x-a)^2}$. Экстремали, трансверсально (в данном случае ортогонально) пересекающие полуось OY , суть концентрические полуокружности $y = \sqrt{\beta^2 - x^2}$, заполняющие полуплоскость $y > 0$. Условие Лежандра выполнено — всюду $F_{y'y'} > 0$. Эквидистантные кривые $\frac{x}{y} = \text{const}$. Дуга окружности с центром в начале координат, проходящей через точку B , даёт сильный минимум. **1138.** Параболы $y^2 = Cx$.

Уравнение Гамильтона-Якоби есть $4 \frac{\partial W}{\partial x} + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = 0$. **1139.** $xG(\frac{y}{x}) = \text{const}$.

1140. Эллипсы $3x^2 - 8xy + 6y^2 = \text{const}$. **1141.** $W = \frac{1}{3} \sqrt{y-x}(x+2y) = \text{const}$.

1142. Уравнение Гамильтона-Якоби $(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = G(y)^2$. Его решение:

$$W = ax + \int_{y_0}^y \sqrt{G(y)^2 - a^2} dy + \beta. \text{ Экстремали } x - a \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{G(y)^2 - a^2}} = \gamma.$$

1143. Гиперболы $x^2 - \frac{1-\beta^2}{\beta} xy - y^2 = a \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta} \right)^2$.

1144. Уравнение Гамильтона-Якоби $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2gy}$; его решение:

$$W\sqrt{2g} = \alpha x + \sqrt{y(1-\alpha^2y)} + \frac{1}{\alpha} \arcsin \alpha \sqrt{y} + \gamma.$$

Для кривых, проходящих через начало $\gamma = 0$. Лучи — циклоиды:

$x + \frac{1}{\alpha} \sqrt{y(1-\alpha^2y)} - \frac{1}{\alpha^2} \arcsin \alpha \sqrt{y} = 0$. Определяя отсюда α и подставляя в $W = \text{const.}$, получим уравнение волн и вместе с тем уравнение синхрон:

$W\sqrt{2g} = 2\alpha x + 2\sqrt{y(1-\alpha^2y)} = \text{const.}$ **1145.** Уравнение Гамильтона-Якоби $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + 2(gy - h) = 0$. Пусть $h = ag$; тогда $\frac{W}{\sqrt{2g}} =$

$= \beta x + \int \sqrt{a - \beta^2 - y} dy = \beta x - \frac{2}{3} (a - \beta^2 - y)^{\frac{3}{2}} + \gamma$. Экстремали — параболы $y = a - \beta^2 - \frac{(x - a)^2}{4\beta^2}$. Экстремали, проходящие через начало:

$y = -\frac{x^2}{4\beta^2} + \frac{\sqrt{a - \beta^2}}{\beta} x$. Если точка брошена из O под углом α к оси Ox

со скоростью $v_0 = \sqrt{2h}$, то $a = \frac{v_0^2}{2g}$; $\frac{\sqrt{a - \beta^2}}{\beta} = \text{tg } \alpha$, $\beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{2g}}$, и полу-

чаются параболы $y = -\frac{g^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \text{tg } \alpha$. Огибающая этих парабол, граница поля, — тоже парабола. Если конечная точка B лежит внутри этой параболы, то дуга экстремальной параболы OB , не касающаяся границы поля, даёт сильный минимум «действию».

Хорда, соединяющая точку O с сопряжённой критической точкой на экстремали OB , проходит через фокус этой экстремали. **1146.** Цепная линия. **1148.** Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = h - \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

$$W = \int \sqrt{a - \frac{kx^2}{2}} dx + \int \sqrt{h - a - \frac{ky^2}{2}} dy + \gamma.$$

Экстремали $\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\beta}{\sqrt{2k}}$ будут эллипсы:

$$\sqrt{\frac{k}{2a}} x = \sin(\theta + \beta), \quad \sqrt{\frac{k}{2(h-a)}} y = \sin \theta \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{h-a} - \frac{2xy}{\sqrt{a(h-a)}} \cos \beta = \frac{2}{k} \sin^2 \beta.$$

1149. $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)+a}} - \int \frac{dy}{\sqrt{g(y)-a}} = \beta$.

1151. Экстремали, пересекающие параболу трансверсально, являются нормальными к параболе. Поле экстремалей имеет границей эволюту параболы. Если отрезок нормали AB (где B — точка на параболе) таков, что центр кривизны параболы в точке B лежит на AB , то AB не является минимальным расстоянием до параболы (если только точка A не совпадает с точкой возврата эволюты

параболы). Если же центр вне отрезка AB , то AB даёт сильный минимум интеграла $\int ds$. Если вдобавок AB не пересекает ось параболы, то AB даёт кратчайшее расстояние от A до любой точки параболы. **1152.** $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$

даёт сильный минимум. **1153.** Отрезок AB прямой, проходящей через центры данных окружностей, даёт сильный минимум интеграла, если между точками A и B не лежат центры заданных окружностей. **1154.** Заданное уравнение Гамильтона-Якоби соответствует задаче о минимуме интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad \mathbf{1155.} \quad f(x, y, y') = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2}.$$

$$\mathbf{1156.} \quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0, \quad f_{y''}(M_1) = f_{y''}(M_2) = 0.$$

$$\mathbf{1158.} \quad 1) y = x(x-1)[(a+b)x-a] \text{ и } 2) y = 0.$$

$$\mathbf{1159.} \quad y = \frac{(n-1)^2}{n(2n-1)a^2} (ax + \beta)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \delta; \quad \text{при } n = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{a^2} \ln(ax + \beta) + \gamma x + \delta, \quad \text{при } n = 1 \text{ полный дифференциал.}$$

$$\mathbf{1160.} \quad \varphi(x, y, y') = 0$$

$$\frac{f - y' \left\{ f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right\} - y'' f_{y''}}{\varphi_x} = \frac{f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''}}{\varphi_y} = \frac{f_{y''}}{\varphi_{y'}}.$$

$$\mathbf{1161.} \quad y'(x_2), h(x, y) = 0, \quad \frac{f - y' \left\{ f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right\}}{h_x} = \frac{f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''}}{h_y}.$$

$$\mathbf{1162.} \quad \text{Циклоида: } x = h + a(2\phi + \sin 2\phi) - b \cos 2\phi, \\ y = k + b(2\phi - \sin 2\phi) - a \cos 2\phi.$$

При этом постоянные определяются из начальных условий. Для примера:

$x = \frac{1}{2} - \frac{2\phi + \sin 2\phi}{\pi + 2}$; $y = \frac{\cos 2\phi}{\pi + 2}$. **1163.** Полная арка циклоиды, основанием которой служит отрезок M_1M_2 :

$$\begin{aligned} x &= \pi + 2\phi + \sin 2\phi & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right). \\ y &= -1 - \cos 2\phi \end{aligned}$$

$$\mathbf{1164.} \quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

1165. $u = x^2 y'' - xy' + xy^2 + x^2 + C$. **1166.** $\theta = 0$ даёт сильный минимум,

пока $l < \pi \sqrt{\frac{JE}{P}}$; $P_0 = \frac{\pi^2 JE}{l^2}$. При $P > P_0$ экстремали — упругие линии $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi$, где

$$s = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}}; \quad l = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}}.$$

1167. $\theta = 0$ даёт сильный минимум, пока $l < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{JE}{P}}$; $P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{JE}{l^2}$.

1168. $P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$. **1169.** $P_0 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$. **1170.** $P_0 = \frac{\mu^2 EJ}{l^2}$, где $\mu = 4,49\dots$ — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$. **1171.** P_0 равно наименьшему из двух чисел $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ и kl ; в последнем случае балка при потере устойчивости остаётся прямолинейной, прогибается только опора.

1175. $S(x, y, z) = 0, \frac{f - y'f_{y'} - z'f_{z'}}{S_x} = \frac{f_{y'}}{S_y} = \frac{f_{z'}}{S_z}$.

1176. $f - y'f_{y'} - z'f_{z'} + F'(x)f_y + G'(x)f_{z'} = 0$.

1180. $\sum_{i=1}^n g_{ih} \frac{d^2 x}{ds^2} + \sum_{i, h=1}^n \left[\frac{ik}{h} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_h}{ds} = 0, (h = 1, 2, \dots, n)$,

где $\left[\frac{ik}{h} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_h} \right)$ — символы Кристоффеля первого рода.

1181. Экстремали $y = c \cos \alpha \operatorname{ch} \frac{x + \beta}{c}$ } Условие Лежандра выполняется; условие Якоби требует, чтобы при $x_1 < x_2$ было $x_2 \leq x$, где x есть наименьшее, из удовлетворяющих неравенству $x > x_1$ решение уравнения

$\frac{x - x_1}{c} \left\{ \cos^2 \alpha \operatorname{sh} \frac{x_1 + \beta}{c} \operatorname{sh} \frac{x + \beta}{c} + \sin^2 \alpha \operatorname{sh} \frac{x_1 + \gamma}{c} \operatorname{sh} \frac{x + \gamma}{c} \right\} + \operatorname{sh} \frac{x - x_1}{c} = 0$.

1182. Экстремали — эллипсы $x = c_1 \sin t$,

$y = c_2 \sin(t + \beta),$
 $z = \sqrt{h - c_1^2 - c_2^2} \sin(t + \gamma),$ }

в сопряжённых точках касательные к эллипсу взаимно перпендикулярны.

1183. $\sqrt{c^2 + \frac{a^2}{2}}$. **1184.** Ломаная линия, составленная из отрезков прямых $y = x$ и $y = 1$ или из отрезков прямых $y = 0$ и $y = x - 1$, даёт абсолютный минимум. Прямая $y = \frac{1}{2}x$ даёт слабый максимум. **1185.** Ломаная линия, составленная из прямых $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}(x - 2)$, даёт сильный минимум интеграла.

1186. Экстремали — прямые линии. Если $\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < 1$, то существуют два разрывных решения — ломаные линии, составленные двумя отрезками прямых линий, параллельных биссектрисам координатных углов.

1187. Прямая $y = x \operatorname{tg} \varphi$, соединяющая заданные точки, даёт слабый максимум, если $0 < \operatorname{tg} \varphi < \pi$, слабый минимум, если $\pi < \operatorname{tg} \varphi < 2\pi$, и т. д. Ломаная линия, составленная из отрезков прямых, тангенсы углов наклона которых равны $\frac{(4n - 1)\pi}{2}$ (n — целое), даёт сильный минимум. **1188.** Экстре-

мали — равнобочные гиперболы с центром в начале координат и прямые, проходящие через начало координат. Если точки A и B расположены так, что угол AOB прямой или тупой, то-есть только разрывное решение — пара прямых, соединяющих данные точки A и B с вершиной конуса. Если угол AOB острый, то равнобочная гипербола, проходящая через точки A и B , даёт сильный и притом абсолютный минимум. В этом случае разрывного решения нет. **1189.** Если $\theta_2 = \theta_1$, то единственное решение — прямая M_1M_2 ; если $0 < |\theta_2 - \theta_1| < \frac{\pi}{3}$, то единственное решение есть кривая

$r^3 \cos(3\theta + \alpha) = \beta$, соединяющая заданные точки; если $|\theta_2 - \theta_1| \geq \frac{\pi}{3}$, то су-

ществует только разрывное решение в виде ломаной M_1OM_2 . **1190.** Искомое разрывное решение состоит из отрезков AC и BD перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось OX , и отрезка CD оси OX . Это разрывное решение является единственным, если через данные точки нельзя провести цепной линии, директрисой которой является ось OX . **1191.** Всегда существует разрывное решение $M_1N_1N_2M_2$, где M_1N_1 и N_2M_2 — дуги цепных линий $y = k \operatorname{ch} \frac{x \pm \beta}{k}$, отвечающие интервалам $-a \leq x \leq -\beta$ и $\beta \leq x \leq a$,

где $\beta = a - k \ln \left(\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} \right)$, а N_1N_2 — отрезок прямой $y = k$. Кроме

того, через заданные точки могут проходить одна или две непрерывные экстремали. **1192.** Ломаная линия $ACDB$, составленная из отрезка пограничной прямой CD и перпендикуляров, опущенных из точек A и B на пограничную прямую CD , даёт сильный минимум. Для соответствующей задачи механики о движении точки под действием силы тяжести полученное решение значения не имеет. **1193.** Искомая минимальная линия составлена из отрезков прямых линий и дуги параболы $y = x^2$. Согласно условию Эрдмана прямые касательны к параболе; уравнения этих прямых $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 1$. **1194.** Уравнение Эйлера приводит к решениям $y = 0$ и $y^2 + (x - a)^2 = a^2$. Поэтому решением являются линии, составленные из полуокружности радиуса a с центром на оси OX в одной из точек $a \leq x \leq b - a$ и двух отрезков пограничной линии $y = 0$, а также прямая $y = 0$. **1196.** Линия $M_1M_0M_2$, которой прямолинейные отрезки M_1M_0 и M_0M_2 образуют с касательной к границе в точке M_0 одинаковые углы. **1197.** Экстремали — параболы $y = \beta - \frac{(x - a)^2}{4\beta}$.

Пучок экстремалей, проходящих через начало координат, есть $y = x - \frac{x^2}{a}$.

Поле есть область, образованная осью OX и прямой $y = x$. Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$, то имеем сильный максимум, если точка (x_1, y_1) лежит внутри поля. Ломаная линия, составленная из отрезков прямых $y = 0$ и $y - y_1 = x - x_1$, даёт абсолютный минимум, так же как ломаная, составленная из отрезков прямых $y = x$ и $y - y_1 = -(x - x_1)$. **1198.** Экстремали — эллипсы $\frac{(x - \beta)^2}{a^2} + y^2 = a^2$

с центрами на оси OX . Пограничные линии: прямая $y=0$ и параболы $y^2 = \pm 2(x-\gamma)$ (решение уравнения $1-y^2y'^2=0$). Дуги эллипсов дают максимальное значение интеграла. Дуги пограничных парабол и отрезок прямой $y=0$ дают интегралу его наименьшее значение нуль, образуя разрывное решение, угловые точки которого лежат на прямой $y=0$. **1199.** Решение состоит из геодезических линий, поскольку они удовлетворяют условию, и из кривых постоянного подъёма $\frac{dz}{ds} = k$. В точках перехода геодезические линии

также должны иметь подъём k . **1200.** Кратчайшим путём является линия, составленная из дуги пограничного круга радиуса R и отрезка прямой, касательной к этому кругу. **1201.** Если $\bar{\phi}$ и $\bar{\psi}$ — углы, образованные лучом падения и лучом преломления с нормалью к линии преломления, то

$$\frac{\sin \bar{\phi}}{\sin \bar{\psi}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad \mathbf{1202.} \quad 2z(r+t) = 1 - p^2 - q^2. \quad \mathbf{1204.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

1205. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r+t=0$. **1206.** $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, $\varphi(x, y) = f(x+y) + g(x-y)$. **1207.** $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$; это уравнение выражает, что в каждой точке минимальной поверхности средняя кривизна поверхности равна нулю, т. е. главные радиусы кривизны равны по величине и имеют прямопротивоположное направление. Единственным решением уравнения, имеющим форму $z = \varphi(x) + \psi(y)$, является кроме плоскости $z = Ax + By + C$ лишь $e^{\alpha(z-z_0)} = \frac{\cos \alpha(y-y_0)}{\cos \alpha(x-x_0)}$, где α — постоянная.

$$\mathbf{1210.} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\}. \quad \mathbf{1211.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$\mathbf{1212.} \quad (1+u_y^2+u_z^2)u_{xx} + (1+u_x^2+u_z^2)u_{yy} + (1+u_x^2+u_y^2)u_{zz} - 2(u_x u_y u_{xy} + u_y u_z u_{yz} + u_x u_z u_{zx}) = 0.$$

$$\mathbf{1213.} \quad \Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\}.$$

$$\mathbf{1215.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\rho I \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \omega F;$$

на свободном конце должно выполняться условие: $\sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho I \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + E \omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, или же движение конца может быть задано: $u = \varphi(t)$.

$$\mathbf{1216.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \omega \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\rho I \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \rho \omega F.$$

Если конец стержня заделан наглухо и совершает заданное движение, то на этом конце $v = \varphi_1(t)$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_2(t)$; если конец опёрт, то $v = \varphi(t)$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$;

если конец свободен, то $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho I \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$. **1217.** $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = P \Delta \zeta + \rho F$; на свободном контуре C должно выполняться условие

$P \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \Phi$. **1218.** $\Delta \zeta = 0$; на контуре C должно быть задано смещение $\zeta(s)$ или же должно выполняться естественное граничное условие $\frac{\partial \zeta}{\partial n} + \frac{k}{P} \zeta = 0$.

$$\mathbf{1219.} \quad P \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \right\} +$$

$+ g\rho_0(\lambda + \zeta) = 0$ или, если обозначить $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = r$,

$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = t$, а главные радиусы кривизны через R_1 и R_2 , то

$$P \frac{(1 + q^2)r - 2pqqs + (1 + p^2)t}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)^3}} + g\rho_0(\lambda + \zeta) = 0 \quad \text{или} \quad P \left(\frac{1}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} \right) +$$

$$+ g\rho_0(\lambda + \zeta) = 0. \quad \mathbf{1220.} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{3\rho(1 - \sigma^2)} \left[\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right] = 0.$$

Граничные условия на контуре C имеют следующий вид:

$$\zeta = \varphi_1(c, t), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \varphi_2(c, t),$$

если контур заделан наглухо; $\zeta = \varphi(c, t)$,

$$\Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right],$$

где θ — угол нормали к контуру C с осью OX , если контур оперт:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \varphi_2(c, t), \quad \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} = (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right],$$

если на контуре задано только

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n}; \quad \Delta \zeta = (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right]$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} = (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right],$$

если контур свободен.

$$\mathbf{1221.} \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0, \quad X_x = 2\mu u_x + \lambda \Delta, \quad Y_y = Z_z = \mu(w_y + v_z),$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \quad Y_y = 2\mu v_y + \lambda \Delta, \quad Z_x = X_z = \mu(u_z + w_x),$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0, \quad Z_z = 2\mu w_z + \lambda \Delta, \quad X_y = Y_x = \mu(v_x + u_y),$$

$$\Delta = u_x + v_y + w_z. \quad \mathbf{1222.} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X,$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z, \quad \text{где буквы}$$

имеют то же значение, что в задаче 1221. **1223.** Если ось OX взять за ось полярной системы координат, то $r = a \sqrt{\cos \theta}$, где $a = \sqrt[3]{\frac{15V}{4\pi}}$.

1224. $2x^2 + (y^2 + z^2) = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$. **1225.** $\frac{1}{r} = -\frac{\rho(x, y)}{4\lambda}$, где λ — постоянная,

r — радиус кривизны экстремали. **1226.** Дуга окружности, радиус которой R определяется из уравнения $R \sin \frac{l}{2R} = a$, причём $R > \frac{l}{2\pi}$. **1227.** Полуокруж-

ность. **1228.** Окружность радиуса $\frac{1}{2\pi}$. **1229.** MN — полуокружность радиуса $\frac{b-a}{2}$, обращённая вогнутостью к оси OX и построенная на диаметре, параллельном оси OX .

1230. Прямая $y = \frac{S}{x_1 - x_0}$. **1231.** Прямая линия:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $ab = 2S$. **1232.** Окружность $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, где $R = \frac{1}{w}$, а w есть решение уравнения $\sin lw = hw$, лежащее в пределах $0 < w < \frac{\pi}{l}$.

1233. Дуга окружности, пересекающая под прямым углом сторону угла, проходящую через точку M_2 . **1234.** Цепная линия: $y - \lambda = a \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{a}$ даёт силь-

ный минимум. **1235.** $y + \lambda = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ — цепная линия. **1236.** Дуга окружности, проходящей через точки O и M .

1237. $x = c_1 + c_2 \sin \theta - \lambda(2\theta + \sin 2\theta) + \mu \cos 2\theta$,

$$y = c_3 - c_2 \cos \theta + \lambda \cos 2\theta - \mu(2\theta - \sin 2\theta),$$

где постоянные определяются из условий

$$\begin{cases} x(\theta_1) = x_1, y(\theta_1) = y_1, \\ x(\theta_2) = x_2, y(\theta_2) = y_2, \\ l = c_2(\theta_2 - \theta_1) - \\ - 4\lambda(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + \\ + 4\mu(\cos \theta_2 - \cos \theta_1). \end{cases}$$

1238. Упругая линия. **1239.** $\frac{(x-x_0)^2}{u^2 - v^2} + \frac{(y-y_0)^2}{u^2} = \lambda^2$, где $\lambda =$

$$= \frac{T \sqrt{u^2 - v^2}}{2\pi u}, S = \frac{T^2 (u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}}{4\pi u}. \quad \mathbf{1240.} \quad y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \text{ даёт мини-}$$

мум 1, условие Якоби выполняется; на других экстремалиях $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ (n — целое), проходящих через заданные точки, условие Якоби не выполняется.

1241. Минимум равен 1 при $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$. **1242.** Минимум l равен

1 при $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$. **1243.** Единственная кривая, удовлетворяющая условию $l_1 = \frac{1}{12}$, есть $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$, так что кривых для

сравнения не имеется. **1244.** $y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$; $z = x$; если точка A

не задана, то $y = -x^2 + 2$; $z = 1$. **1245.** 1) $\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \lambda$;

2) экстремальные поверхности суть поверхности постоянной средней кривизны.

1246. 1) и 2) $\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{z+\lambda}{R}$. 3) Поверх-

ность должна пересекать плоскость xy ортогонально. **1247.** 1) $(z+\lambda)[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] = 1+p^2+q^2$. 2) $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{N}$, где ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности, а N — длина отрезка нормали между поверхностью и горизонтальной плоскостью $z+\lambda=0$.

1248. 1) $\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \frac{1}{\lambda}$; 2) средняя кривизна поверхности постоянна. **1251.** $y = aex + be^{-x}$, $z = a^2e^{2x} - b^2e^{-2x}$.

1252. Прямая линия. **1253.** $p(v)$ определяется из квадратного уравнения $g + (pa - \beta)kv^{n+1} = gva\sqrt{1+p^2}$, и тогда $x = \int \frac{v dv}{gp - kv^n \sqrt{1+p^2}}$,

$y = \int \frac{pv dv}{gp - kv^n \sqrt{1+p^2}}$, причём, кроме заданных, имеет место ещё

граничное условие $[ap(v_2) - \beta]v_2 = 0$. **1254.** $v = \sqrt[n]{\frac{ag\sqrt{1+p^2}}{k(pa - \beta)}}$.

$x = \frac{1}{ng} \int \frac{v^2 dp}{1+p^2}$, $y = \frac{1}{ng} \int \frac{v^2 p dp}{1+p^2}$. Так как радиус кривизны $r = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds(1+p^2)}{dp} = \frac{v^2 \sqrt{1+p^2}}{ng}$, то легко показать, что $N = \frac{n-1}{n} \frac{v^2}{r}$.

При $n=1$ $N=0$. **1255.** Дуга окружности радиуса ρ , соединяющая заданные точки. **1256.** Обозначив через φ угол, составляемый продольной осью, или, что то же, направлением относительной скорости самолёта с осью OX , имеем прежде всего очевидные равенства

$$\frac{dx}{dt} = u + V \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v + V \sin \varphi,$$

откуда выводим равенство

$$(V^2 - w^2) dt^2 + 2(u dx + v dy) dt - (dx^2 + dy^2) = 0.$$

Вводя в качестве независимого переменного τ и обозначая дифференцирование по τ штрихом, будем иметь уравнение $t' - L(x, y, t, x', y') = 0$, где L есть решение уравнения

$$(V^2 - w^2) L^2 + 2(ux' + vy') L - (x'^2 + y'^2) = 0. (*)$$

При этом известны значения функций $x(\tau)$, $y(\tau)$, $t(\tau)$ при $\tau = \tau_0$ и функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$ при $\tau = \tau_1$ и требуется определить эти функции при всех τ так, чтобы $t(\tau_1)$ было минимумом. Получилась задача Майера, для которой уравнениями Эйлера являются $\frac{d}{d\tau} \left(\lambda \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \lambda \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{d\tau} \left(\lambda \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = 0$,

$\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, где λ — функция от τ . На основании последнего уравнения два первых дают $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial x'}$, $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial y'}$. (**)

Продифференцировав уравнение (*) по x' , получим

$$[(V^2 - w^2) L + (ux' + vy')] \frac{\partial L}{\partial x'} + Lu - x' = 0$$

и точно так же найдём другие производные от L по y' , x , y , t . Выгодно теперь взять за параметр τ время t , т. е. положить $\tau = t$; тогда, очевидно, будет $L = 1$, $x' = \dot{x}$, $y' = \dot{y}$ (точка означает дифференцирование по t), и предыдущее

уравнение даст ($W = u \cos \varphi + v \sin \varphi$): $\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\dot{x} - u}{V^2 - w^2 + (u\dot{x} + v\dot{y})} = \frac{\cos \varphi}{V + W}$;

точно так же найдём $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{u_x \cos \varphi + v_x \sin \varphi}{V + W}$, $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{u_t \cos \varphi + v_t \sin \varphi}{V + W}$,

где $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, и т. д. Поэтому первое из уравнений (**) даёт

$$\frac{d}{dt} \frac{\cos \varphi}{V + W} + \frac{u_x \cos \varphi + v_x \sin \varphi}{V + W} = -\frac{(u_t \cos \varphi + v_t \sin \varphi) \cos \varphi}{(V + W)^2};$$

точно так же второе из уравнений (**) даёт

$$\frac{d}{dt} \frac{\sin \varphi}{V + W} + \frac{u_y \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{V + W} = -\frac{(u_t \cos \varphi + v_t \sin \varphi) \sin \varphi}{(V + W)^2}.$$

Умножая последнее уравнение на $\cos \varphi$ и вычитая из него предыдущее уравнение, умноженное на $\sin \varphi$, получаем уравнение $\frac{d\varphi}{dt} = -u_y \cos^2 \varphi - (v_y - u_x) \sin \varphi \cos \varphi + v_x \sin^2 \varphi$, которое вместе с двумя уравнениями, приведёнными в самом начале ответа, даёт полную систему уравнений для определения трёх функций $x(t)$, $y(t)$ и $\varphi(t)$. Если в некоторый момент направить оси так, чтобы $\varphi = 0$, то получим, что $\frac{d\varphi}{dt} = -u_y$, т. е. самолёт надо рулить так, чтобы он поворачивался в ту сторону, где составляющая скорости ветра в направлении продольной оси самолёта меньше.

1257. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f'(x)}{\xi - x} dx = \lambda$, т. е. $w(\xi) = \text{const}$. Решением уравнения

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f'(x)}{x - \xi} dx = -4\pi\rho v_0 w \quad f'(x) = \frac{-4\rho v_0 w x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}},$$

откуда $f(x) = 4\rho v_0 w \sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}$ $A = \frac{1}{2} \pi\rho v_0 w l^2$,

$W = A \frac{w}{v_0} = \frac{A^2}{\pi \left(\frac{\rho}{2} v_0^2 \right) l^2}$. Можно также воспользоваться тем обстоя-

тельством, что движение жидкости, вызываемое перемещением прямолинейного отрезка длиной l в направлении, перпендикулярном к этому отрезку, со скоростью w , можно считать происходящим в силу наличия вихрей интенсивности

$$d\Gamma = - \frac{2xw dx}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}},$$

перпендикулярных как к направлению отрезка, так и к направлению скорости w . В нашем случае вихри простираются от отрезка только в одну сторону, поэтому их интенсивность надо удвоить, так что

$$d\Gamma = - \frac{4xw dx}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}}, \quad \text{с другой стороны, } d\Gamma = \frac{1}{\rho v_0} f'(x) dx, \quad \text{откуда}$$

$$f'(x) = \frac{-4\rho v_0 w x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}}. \quad \mathbf{1258.} \quad \lambda' + \lambda f_u + \mu g_u = 0; \quad \mu' + \lambda f_z + \mu g_z = 0; \quad \mu(x_1) = 0;$$

$\lambda f_y + \mu g_y - \frac{d}{dx}(\lambda f_y' + \mu g_y') = 0. \quad \mathbf{1259.}$ Экстремали являются в то же время экстремалими задачи $\delta \int (\lambda F + \mu G) dt = 0$, значения постоянных λ и μ связаны со значениями u и v формулами $f_u(u, v) = \lambda; f_v(u, v) = \mu. \quad \mathbf{1260.}$ Окружности.

Отдел XVII

$$\mathbf{1261.} \quad P = \frac{7+5+8+9+4+2}{360} = \frac{35}{360} = \frac{7}{72}; \quad \text{вероятность } Q, \text{ что началь-$$

ная буква согласная $Q = 1 - P = \frac{65}{72}. \quad \mathbf{1262.} \quad x_0 = 8. \quad \text{Действительно, } P =$
 $= 1 - \left(1 - \frac{2}{22}\right)^m; \quad \text{поэтому нужно, чтобы } \left(\frac{10}{11}\right)^m < \frac{1}{2}, \text{ откуда } m > \frac{3010}{414} > 7.$

$\mathbf{1263.} \quad x_1 = 7. \quad \text{Действительно, } P = 1 - \frac{C_{20}^m}{C_{22}^m}. \quad \text{Поэтому нужно, чтобы } \frac{C_{20}^m}{C_{22}^m} < \frac{1}{2};$

следовательно, x_1 есть наименьшее целое число m , удовлетворяющее неравенству $\frac{(22-m)! 20!}{(20-m)! 22!} = \frac{(22-m)(21-m)}{22 \cdot 21} < \frac{1}{2}$, откуда $m^2 - 43m + 231 < 0$.

Поэтому $x_1 > \frac{43}{2} - \sqrt{\frac{925}{4}}$.

$\mathbf{1264.} \quad m_1 > \frac{1 - \ln 3}{\ln 1,2}; \quad m_2 > \frac{1 - \ln 2}{\ln 1,2}; \quad m_3 > \frac{1}{\ln 1,2}, \text{ откуда } m_1 = 7; m_2 = 9; m_3 = 13.$

$\mathbf{1265.} \quad P = \frac{C_{48}^{24} \cdot C_4^2}{C_{52}^{26}} = \frac{325}{833}. \quad \mathbf{1266.} \quad P_1 = \frac{[C_{26}^{13}]^2}{C_{52}^{26}} = \frac{(26!)^4}{52! (13!)^4}. \quad \text{Применяя}$

формулу Стирлинга, $n \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, получим приближённое значение

$$P_1 \sim \frac{26^{104} e^{-104}}{52^{52} \cdot 13^{52} e^{-104}} \sqrt{\frac{2}{13\pi}} = \sqrt{\frac{2}{13\pi}} \neq 0,221. \quad \mathbf{1267.} \quad C_4^1 (C_{13}^1)^3 C_{13}^3 +$$

$$+ C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^2)^2. \quad \mathbf{1268.} \quad P_2 = 1 - \frac{48}{51} = \frac{1}{17}; \quad P_3 = 1 - \frac{48 \cdot 44}{51 \cdot 50} = \frac{23}{375};$$

$$P_4 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{1349}{4165}; \quad P_5 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{2053}{4165};$$

$$P_6 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36 \cdot 32}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} = \frac{128 \ 171}{195 \ 755}. \quad \text{Поэтому } x_0 = 6.$$

$$\mathbf{1269.} \quad P = \frac{2^{10} (10!)^2}{20!} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 20}{1 \cdot 3 \dots 19} = \frac{256}{46 \ 189}. \quad \mathbf{1270.} \quad P = \frac{3^5 \cdot 5! \cdot 10!}{15!} = \frac{81}{1001}.$$

$$\mathbf{1271.} \quad P = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0,3024. \quad \mathbf{1272.} \quad P = 0,25 + 0,2 + 0,3 = 0,75.$$

$$\mathbf{1273.} \quad P = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot 0,6 + 2 \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot 0,5 + \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \cdot 0,4 = 0,52. \quad \mathbf{1274.} \quad \text{Первоначально}$$

имевшееся в урне. Вероятность 0,480. **1275.** 0,336. **1276.** 0,336; 0,096.

1277. Событие $[A \text{ или } B]$ равноценно событию $A \text{ или } [B \text{ и } \bar{A}]$, вероятность которого равна $(A) + (B \text{ и } \bar{A}) = (A) + (B) - (A \text{ и } B)$. **1279.** В силу предыдущего, $(A \text{ или } [B \text{ или } C]) = (A) + (B \text{ или } C) - (A \text{ и } [B \text{ или } C]) = (A) + (B) + (C) -$

$-(B \text{ и } C) - (A \text{ и } [B \text{ или } C])$; но $(A \text{ и } [B \text{ или } C])$ равносильно $[A \text{ и } B]$ или $[A \text{ и } C]$, откуда $(A \text{ и } [B \text{ или } C]) = (A \text{ и } B) + (A \text{ и } C) - (A \text{ и } B \text{ и } C)$.

1282. Действительно, полагая формулу доказанной для $n-1$, имеем $(A_2$

$$\text{или } A_3 \text{ или } \dots \text{ или } A_n) = \sum_{i=2}^{i=n} p_i - \sum_{i=2, k=3}^{i=n-1, k=n-1} p_{ik} + \dots + (-1)^{n-2} p_{23 \dots n} \quad ([A_1 \text{ и } A_2]$$

$$\text{или } [A_1 \text{ и } A_3] \dots \text{ или } [A_1 \text{ и } A_n]) = \sum_{k=2}^{k=n} p_{1k} - \sum_{k=2, l=3}^{k=n-1, l=n} p_{1kl} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-2} p_{12 \dots n} \text{ откуда } (A_1 \text{ или } [A_2 \text{ или } \dots \text{ или } A_n]) =$$

$$= p_1 + (A_2 \text{ или } A_3 \dots \text{ или } A_n) - ([A_1 \text{ и } A_2] \text{ или } \dots \text{ или } [A_1 \text{ и } A_n]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i - \sum_{i=1, k=2}^{i=n-1, k=n-1} p_{ik} + \sum_{i=1, k=2, l=3}^{i=n-1, k=n-1, l=n} p_{ikl} + \dots + (-1)^{n-1} p_{12 \dots n}.$$

$$\mathbf{1281.} \quad \frac{1}{n!}. \quad \mathbf{1282.} \quad \frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}. \quad \mathbf{1283.} \quad P = \frac{\binom{M-1}{m-1} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}.$$

$$\mathbf{1284.} \quad n \binom{n-1}{m-1} \left(\frac{M}{N}\right)^{m-1} \left(\frac{N-M+1}{N}\right)^{n-m} \frac{1}{N} =$$

$$= n \binom{n-1}{m-1} \frac{M^{m-1} (N-M+1)^{n-m}}{N^n}. \quad \mathbf{1285.} \quad \text{Дифференциальный закон рас-$$

$$\text{пределения } n \binom{n-1}{m-1} x^{m-1} (1-x)^{n-m}.$$

1286. $P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{91}{144}$, так как в данном случае

$p_i = \frac{1}{6}$, $p_{ik} = \frac{1}{6 \cdot 5}$, $p_{ikl} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}$ и т. д. при любых i, k, l . Если число билетов увеличивать, то мы получим для P сумму возрастающего числа последовательных членов разложения в ряд e^{-1} , и при бесконечном возрастании числа билетов $\lim P = e^{-1}$.

1287. $P = \frac{n}{N} - \frac{n(n-1)}{2!N(N-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!N(N-1)(N-2)} - \dots +$
 $+\frac{(-1)^{n-1}}{N(N-1)\dots(N-n+1)}$. Если $n=5$, $N=10$, то $P = \frac{12151}{30240}$.

1288. $P_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)m}{(m+n)(m+n-1)\dots(m+n-k)}$. **1289.** $(1-a)a^k$.

1290. $\left(\frac{n}{m+n}\right)^k \frac{m}{m+n}$. **1291.** $(1-a)a^k$. **1292.** Для первого вероятность

$P_1 = \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right)$, $P_2 = \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right)$. **1293.** $P_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} +$
 $+\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$, $P_2 = \frac{2}{5}$. **1294.** $P_1:P_2 \approx 2$.

1295. $\frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}^m} \left\{ \binom{n}{N-k} - \frac{N-k}{1} \binom{n}{N-k-1} + \right.$
 $\left. + \frac{(N-k)(N-k-1)}{1 \cdot 2} \binom{n}{N-k-2} \dots \right\} 1 - \frac{N}{1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^m +$
 $+ \binom{N}{2} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^m \left(1 - \frac{n}{N-1}\right)^n - \dots$ **1296.** Вероятность выхода:

m различных билетов

$$P_m = \frac{\binom{N}{N-m}}{\left(\frac{N}{n}\right)^k} \left\{ \binom{n}{m} - \binom{m}{1} \binom{n}{m-1}^k + \binom{m}{2} \binom{n}{m-2}^k + \dots \right\}.$$

1297. 1) $x_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{3}{4}} = \frac{56}{241}$, 2) $y_1 = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{1}{4}} = \frac{84}{179}$;

$x = \frac{4}{59}$, $y = \frac{6}{41}$. **1298.** 1) $x_1 = \frac{\frac{8}{125}}{\frac{8}{125} + \frac{64}{343} + \frac{27}{64}} = \frac{175616}{1845241}$;

$x_2 = \frac{\frac{27}{125}}{\frac{27}{125} + \frac{27}{343} + \frac{1}{64}} = \frac{592704}{851579}$. **1299.** $x = \frac{\frac{20}{25} \cdot \frac{15}{25}}{\frac{20}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{2}{25} \cdot \frac{3}{25}} = \frac{300}{306} = \frac{50}{51}$.

$$\mathbf{1300.} \quad p = \frac{P(T-t)}{T-Pt} \quad \mathbf{1301.} \quad p = \frac{0,51 - \frac{1}{6}}{0,51} = \frac{103}{153} \approx 0,673.$$

$$\mathbf{1302.} \quad p_0 = \frac{1}{1 + \frac{900}{1000} + \frac{900 \cdot 899}{1000 \cdot 999} + \dots + \frac{900 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897 \cdot 896}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996}} \approx 0,214.$$

$$\mathbf{1303.} \quad \frac{n+2}{2n+2} \quad \mathbf{1304.} \quad \frac{2}{3} \quad \mathbf{1305.} \quad \frac{2n+1}{3n} \quad \mathbf{1306.} \quad \binom{M}{m} \binom{N-M}{n} : \binom{N+1}{m+n+1}.$$

$$\mathbf{1307.} \quad \frac{n-k}{n+n'-k} \quad \mathbf{1308.} \quad a = \left[\frac{mN}{m+n} \right] \text{ белых шаров и } b = N - \left[\frac{mN}{m+n} \right]$$

чёрных шаров, если $(a+1)^m (N-a-1)^n < a^m (N-a)^n$, и $a = \left[\frac{mN}{m+n} \right] + 1$

белых шаров и $b = N - \left[\frac{mN}{m+n} \right] - 1$ чёрных шаров, если

$(a+1)^m (N-a-1)^n > a^m (N-a)^n$. **1309.** Проверив непосредственно правильность неравенств (I) для $n=2$, применяем метод математической индукции, полагая (I) верным для n и вводя новый $(n+1)$ -й независимый опыт, в котором $p_{n+1}=p$ имеет произвольное значение. Тогда $P_{m,n+1} = P_{m-1,n}p + P_{m,n}q$, где $q=1-p$, поэтому достаточно заметить, что $(P_{m,n}p + P_{m+1,n}q)^2 - (P_{m+1,n}p + P_{m+1,n}q)(P_{m-1,n}p + P_{m,n}q) > 0$, так как по раскрытии скобок коэффициенты при p^2 , pq и q^2 положительны благодаря тому, что $\frac{P_{m,n}}{P_{m-1,n}} > \frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} > \frac{P_{m+2,n}}{P_{m+1,n}}$. **1310.** $x \leq \frac{1}{2}$.

1311. $\frac{1}{1000} 2500 + \frac{1}{1000} 500 = 3$ рублям. **1312.** $7 \frac{14}{42}$ в первом ящике и $12 \frac{1}{42}$ во втором, так как после первого извлечения м. о. $x_1 = 4 - \frac{5}{6}$ и м. о. $x_2 = 16 + \frac{5}{6}$, а поэтому вероятность после того вынуть белый шар из вто-

рого ящика равна $\frac{16 + \frac{5}{6}}{21} = \frac{101}{126}$, откуда следует, что м. о. числа белых шаров, вынутых при извлечении 6 шаров из 2-го ящика, равна $\frac{101}{126} 6 = \frac{101}{21}$. **1313.** $\frac{125}{108}$ руб. Игра выгодна при стоимости билета 1 руб. 15 коп.

и невыгодна при стоимости билета 1 руб. 16 коп. **1314.** м. о. $x = \frac{7}{2} n$,

м. о. $\left[x - \frac{7}{2} n \right]^2 =$ м. о. $x^2 - \frac{49}{4} n^2 = \frac{35}{12} n$. **1315.** м. о. $x = \frac{p}{1-p}$;

$B =$ м. о. $\left[x - \frac{1}{1-p} \right]^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$. **1316.** м. о. выигрыша равно

$$M = -(1-p) + p(1-p)y + p^2(1-p)y^2 + \dots = (1-p) \left[\frac{2py-1}{1-py} \right].$$

Поэтому $M=0$, если $y = \frac{1}{2p}$. Полагая $p = \frac{1}{13}$, $y = \frac{13}{2}$; в этом случае игра была бы выгодна при $y=7$ руб. и невыгодна при $y=6$ руб.

$$1317. \quad n \binom{n-1}{m-1} \cdot \frac{1}{N^n} \sum_{M=1}^N Mm(N-M+1)^{n-m}. \quad 1318. \quad 1 \cdot \frac{m}{m+n-1} \frac{n}{m+n} + \\ + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{m}{m+n-2} + \dots + n \cdot \frac{n(n-1)\dots 1}{(m+n)\dots(m+1)} \cdot \frac{m}{m}.$$

$$1319. \quad \text{м. о. } k = \sum_{k=0}^n \frac{m \cdot k \cdot n^k}{(m+n)^{k+1}} = \frac{m}{m+n} \sum_{s=1}^n \frac{\left(\frac{n}{m+n}\right)^s - \left(\frac{n}{m+n}\right)^{s+1}}{1 - \frac{n}{m+n}} = \\ = \frac{\frac{n}{m+n} - \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1}}{1 - \frac{n}{m+n}} - n \cdot \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1}; \quad Dk = \frac{m}{n+m} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 n^k}{(m+n)^k} - (\text{м.о. } k)^2.$$

$$1320. \quad \frac{\binom{n}{b+c+\dots+k} + \binom{n}{a+c+\dots+k} + \dots}{\binom{n}{a+b+c+\dots+k}}. \quad 1321. \quad 1. \quad 1322. \quad \text{Вытекает из}$$

неравенства м. о. $x^2 \cdot \text{м. о. } x^4 \geq \text{м. о. } x^3$. **1323.** $-At^2P + A(1-P) > 0$, откуда $P < \frac{1}{1+t^2}$. **1324.** м. о. $m = \frac{A-a+1}{a+1}$, так как число чёрных шаров $A-a+1$ и они разбиваются на $a+1$ группу. С другой стороны, м. о.

$m = \frac{(A-a+1)a}{(A+1)A} + \frac{2(A-a+1)(A-a)a}{(A+1)A(A-1)} + \dots$ **1325.** Вытекает из неравенства $\sigma^2 \leq \sum p_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \sum p_i \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, где $a > b$ — крайние значения x . Равенство осуществляется, если м. о. $x = \frac{a+b}{2}$ и, кроме того, x_i получает лишь значения: a, b ; следовательно, соответствующие вероятности равны $\frac{1}{2}$. **1326.** $q = 0,9$; $P_{10} = 1 - q^{10} = 1 - (0,9)^{10} \approx 0,652$;

$P_{100} = 1 - (0,9)^{100} \approx 0,9999737$. (Применяя лемму Чебышева-Маркова, можно à priori утверждать, что $P_{100} > 0,9$ каков бы ни был закон распределения вероятностей, лишь бы было известно, что м. о. $x = 10$.)

1327. $p_n = \frac{4a^3}{b^2 - a^2} \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n$, $a_0 = 1 - \frac{2a^2}{b+a}$. Чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно осуществление условий $b \geq a$, $b+a \geq 2a^2$: первое из неравенств необходимо, чтобы $p_n \geq 0$, второе неравенство выражает, что $a_0 \geq 0$. Значения $a=4$, $b=25$ недопустимы, так как $4+25 < 2 \cdot 4^2$: наименьшее приемлемое значение b (при $a=4$) равно 28, тогда $p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $a_0 = 0$. **1328.** $k = a$, $A = e^{-k}$. Замечая, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k}{n+1}$ заключаем, что $\mu = [a]$, если a не целое число; если же a — целое число,

то наиболее вероятны будут оба значения a , $a-1$. **1329.** Необходимо и достаточно, чтобы $b \geq a^2 + a$, $c + a \geq \frac{b^2}{a} + b$. Полагая $a_2 + m$ о. $x(x-1) = b - a$, $a_3 = m$ о. $x(x-1)(x-2) = c - 3b + 2a$, $Ae^k = u$, $Be^l = u_1$, имеем $u + u_1 = 1$, $uk + u_1l = a$, $uk^2 + u_1l^2 = a_2$, $uk^3 + u_1l^3 = a_3$. Из этих уравнений видно, что для положительности k , l , u , u_1 необходимо, чтобы $a_2 \geq a^2$, $aa_3 \geq a_2^2$, откуда вытекает также $a_3 \geq aa_2$, которые равноценны $b \geq a^2 + a$ и $a(c + a) \geq b^2 + ab$. Достаточность этих условий обнаруживается фактическим решением этих уравнений, из которых следует, что k и l являются корнями уравнения

$$P(z) = (a_2 - a^2)z^2 - (a_3 - aa_2)z + (aa_3 - a_2^2) = 0.$$

Достаточно проверить, что при сделанных условиях корни последнего уравнения положительны так же, как значения $u = \frac{l-a}{l-k}$, $u_1 = \frac{a-k}{l-k}$, для чего надо заметить, что $P(a) = -(a_2 - a^2)^2 < 0$, так что величина a заключена между l и k . В численном примере $k=1$, $l=4$, $u = \frac{3}{4}$, $u_1 = \frac{1}{4}$,

$A = \frac{3}{4}e^{-1}$, $B = \frac{1}{4}e^{-4}$; наиболее вероятное значение n равно 1. **1330.** Как и

раньше, нужно, чтобы $\delta = a_2 - a^2 \geq 0$ и $\delta_1 = a_3 - aa_2 \geq 0$, т. е. $b \geq a^2 + a$ и $c \geq b(a+3) - a(a+2)$, так как в таком случае корни $P(z) = 0$ действительны, $k+l \geq 0$ и значения $u \geq 0$, $u_1 \geq 0$. Но, кроме того, надо, чтобы $a_1 = Ak + Bl = uke^{-k} + u_1le^{-l} \geq 0$. В численном примере $l=2$, $k=-1$, $u = \frac{1}{20}$, $u_1 = \frac{19}{20}$, $a_1 = \frac{e}{20}(19e^{-3} - 1) > 0$ предстает

относительный минимум, причём вообще $a_n = \frac{e}{20} \left[\frac{19e^{-32n} + (-1)^n}{n!} \right] > 0$,

абсолютный максимум соответствует $n=2$. **1331.** Полагая $x^q = z$, можно ограничиться случаем $q=1$. Предполагая затем все вероятности рациональ-

ными, приводим рассматриваемое неравенство к
$$\sum_1^n \frac{x_i^p}{n} \geq \frac{1}{n^p} \left[\sum_1^n x_i^p \right]^p;$$

после этого достаточно проверить, что если $x_1 + x_2 = s$ дано, то $x_1^p + x_2^p$ достигает минимума при $x_1 = x_2$ ($p > 1$). Поэтому минимум отношения

$\frac{\sum x_i^p}{\left[\sum x_i \right]^p}$ осуществляется, когда все x_i равны. Случай, когда вероятности

иррациональны, разрешается переходом к пределу. **1332.** Если величина получает не более i значений, то $\Delta_{2i} = 0$, так как он представляется в виде суммы определителей, в которых по крайней мере 2 колонны имеют пропорциональные члены. В общем же случае, каждой совокупности $i+1$ значений x соответствует определитель, являющийся квадратом определителя Вандермонда, умноженным на произведение вероятностей всех этих значений. **1333.** Из уравнений $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_1x_1 + p_2x_2 = a$, $p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = a_2$, $p_1x_1^3 + p_2x_2^3 = a_3$, $p_1x_1^4 + p_2x_2^4 = a_4$, заключаем, что коэффици-

енты уравнения $x^2 + A_1x + A_2 = 0$, корнями которого служат x_1, x_2 , удовлетворяют равенствам $A_2p_0 = A_2 + A_1a_1 + a_2$, $0 = A_2a_1 + A_1a_2 + a_3$, $0 = A_1a_2 + A_1a_3 + a_4$, откуда $p_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ (по предыдущей задаче $\Delta_2 > 0$, $\Delta_1 \geq 0$). Эти условия достаточны для вещественности $x_1 - x_2$ и неотрицательности p_1, p_2 , так как $p_1p_2x_1^2x_2^2(x_1 - x_2)^2 = \Delta_2$. Для положительности $x_1 - x_2$ дополнительно необходимо и достаточно, чтобы $a_1 > 0$ и $a_1a_2 - a_2^2 = p_1p_2x_1x_2(x_2 - x_1)^2 > 0$ (т. е. все миноры и элементы Δ_1 не отрицательны).

Пример: $x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{2}, p_1 = \frac{2}{9}, p_2 = \frac{8}{45}$. **1334.** Из условия, что

$\sum_0^{\infty} a_h = 1$, следует, что $M = 2a(a + 1)$; $\sum_0^{\infty} ha_h = \frac{M}{2(a + 1)} = a$, поэтому

$$a = A; \sum_0^{\infty} h^2 a_h \rightarrow \infty. \text{ Полагая } A = 3, \text{ имеем } P_{10} = \sum_0^q \frac{24}{(3+h)(4+h)(5+h)} = \\ = 12 \left[\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{13 \cdot 14} \right] = \frac{85}{91}. \text{ **1335. } M = 3a(a + 1)(a + 2); A = \frac{a}{2};**$$

$\sigma^2 = 3A(A + 1)$; поэтому $A = 3, \sigma^2 = 36, a = 6$,

$a_h = \frac{1008}{(6+h)(7+h)(8+h)(9+h)}$. **1336.** Обозначив через X_i и Y_i соответственные м. о. числа белых шаров в каждом ящике после i перекладываний имеем, очевидно, $X_i + Y_i = M + M_1$. С другой стороны, после i перекладываний $P_{i+1} = \frac{X_i}{N}, P_{i+1} = \frac{Y_i}{N}$ представляет собой соответственные вероятности появления белого шара из каждого ящика при $(i + 1)$ -м вынимании. Поэтому

$$X_k = M - \sum_1^k p_i + \sum_1^k P_1 = M + \sum_1^k \left(\frac{Y_{i-1}}{N_1} - \frac{X_{i-1}}{N} \right) = \\ = M + \sum_1^k \left[\frac{M + M_1 - X_{i-1}}{N_1} - \frac{X_{i-1}}{N} \right],$$

откуда получаем уравнение: $X_{k+1} - X_k = \frac{M + M_1 - X_k}{N_1} - \frac{X_k}{N}$, решением которого, при начальном условии $X_0 = M$, будет

$$X_k = \frac{M + M_1}{N + N_1} N + \frac{MN_1 - NM_1}{N + N_1} \left(1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{N_1} \right)^k. \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{M + M_1}{N + N_1} N,$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \frac{M + M_1}{N + N_1} N_1$. **1337.** $X_i = M \cdot \left(1 - \frac{1}{N} \right)^i \rightarrow Me^{-a}$. **1338.** B_i опре-

деляется из уравнения в конечных разностях $B_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N} \right) B_n + \frac{M}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \left[1 - \frac{M}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right]$, решением которого при $B_i = 0$ является

$$B_i = M \left(1 - \frac{1}{N} \right)^i + (M^2 - M) \left(1 - \frac{2}{N} \right)^i - M^2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2i}.$$

1339. $\frac{\prod_{i=1}^n (p_i x + q_i)}{1-x}$. **1340.** Обозначая через $P_{m,n} = P_{-m,n}$ вероят-

ность выиграть $\frac{m}{5}$ рублей при n партиях, имеем $F(x) = \sum_{-2n}^{2n} P_{m,n} x^m =$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^n \left[x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right]^n = \left(\frac{1}{5x^2}\right)^n \left(\frac{1-x^5}{2-x}\right)^n, \text{ откуда}$$

$P_{m,n} = \frac{1}{5^n} [C_{3n-m-1}^{n-1} - n C_{3n-m-6}^{n-1} + \dots]$; вероятность $P_{m,n}$ проиграть не

менее $\frac{m}{5}$ рублей равна $R_{m,n} = \sum_{k=m}^{2n} P_{k,n} = \frac{1}{5^n} [C_{3n-m}^n - n C_{3n-m-5}^n + \dots]$;

$$R_{15,12} = \frac{9}{5^{12}} [C_{21}^{12} - 12 C_{16}^{12}] = \frac{27209 \cdot 2^{12}}{10^{11}} = 0,00111448064,$$

$B = \frac{1}{25} \sum_{-2n}^{2n} m^2 P_{m,n} = \frac{1}{25} [F_{(1)}^{11} - F_{(1)}^1] = \frac{2n}{25} = 0,96$ рубль. **1341.** Вероятности

$P_{m,n}$ выиграть m рублей при n партиях являются коэффициентами производящей функции $F(x) = \left(\frac{x^4 + 2x + 3}{6x}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[1 + \frac{3+x^4}{2x}\right]^n$, откуда

$$P_{m,n} = \sum_{l=m}^{3n} \frac{3^{k-n}}{2^k} C_n^h C_n^k \text{ где } 3h - 4k = m, h \leq n; R_{m,n} = \sum_{l=m}^{3n} P_{l,n}$$

$$R_{15,12} = \frac{1}{3^{12} \cdot 2^5} \left[C_{12}^5 + \frac{1}{2} C_{12}^6 + \frac{11}{2} C_{12}^7 + \frac{277}{8} C_{12}^8 + \frac{665}{4} C_{12}^9 + \frac{1838}{16} C_{12}^{10} + \right. \\ \left. + \frac{15857}{32} C_{12}^{11} + \frac{119561}{64} \right] = \frac{4747049}{3^{12} 2^{11}} \neq 0,004367; \quad B = 2n = 24 \text{ руб.}$$

1342. $F(x) = \sum P_m x^m = \frac{1}{10^7} \left[\frac{1-x^{10}}{1-x} \right]^7$; $R_s = \frac{1}{10^7} [C_{s+6}^7 - 7C_{s-4}^7 + \dots]$.

$$R_{20} = \frac{1}{10^7} [C_{26}^7 - 7C_{16}^7] = 0,057772. \text{ м. о. } S = F'(1) = \frac{7}{10^7} \cdot \frac{9}{2} \cdot 10^7 = 31,5.$$

м. о. $S^2 = F''(1) + F'(1) = 168 + 850,5 + 31,5 = 1050$. **1343.** $F(x) = \sum P_a x^a =$

$$= \left(\frac{1-q}{1-qx}\right)^h, \quad P_a = \frac{(h+a-1)!}{a!(h-1)!} (1-q)^h q^a; \text{ м. о. } y = h \frac{q}{1-q} = b. \text{ Если}$$

b — не целое число, то $S = [b+1]$; если же b — целое число, то наиболее вероятными будут значения b и $b+1$. При $h \rightarrow \infty$, $P_a \rightarrow \frac{e^{-t} t^a}{a!}$.

1344. Из уравнений $P_{n+1, h+1} = AP_{n, h+2} + BP_{n, h}$ для $h > 0$ и $P_{n+1, 0} = AP_{n, 1}$; $P_{n+1, 1} = AP_{n, 2} + P_{n, 0}$ следует, что производящая функция

$$F(x, y) = \sum P_{n, h} x^n y^h = f(x) \left[1 + \frac{2xy}{1 - 2Bxy + \sqrt{1 - 4ABx^2}} \right], \text{ где } f(x) =$$

$= \sum P_{n,0} x^n = \frac{A-B+\sqrt{1-4ABx^2}}{2A(1-x^2)}$. $P_{n,h}=0$, если $n-h$ нечётное число; м. о. $|x_n|=M_n$, где производящей функцией для M_n служит

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, 1) = \frac{x[A-B+\sqrt{1-4ABx^2}](1+\sqrt{1-4ABx^2})}{A(1-x^2)[1-2Bx+\sqrt{1-4ABx^2}]^2}$. Если $A=B$,

$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 + 2 \frac{xy}{1-xy+\sqrt{1-x^2}} \right]$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, 1) = \frac{x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$;

поэтому $M_n = \frac{3 \cdot 5 \dots (n+1)}{2 \cdot 4 \dots n}$ при n чётном и $M_n = M_{n-1}$ при n не-

чётном. Возвращаясь к общему случаю, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,h} = \frac{A-B}{A^2} \left(\frac{B}{A} \right)^{h-1}$.

(при условии, что $n-h$ нечётное), так как при малых значениях y ближайшими особенными точками $F(x, y)$ будут полюсы $x = \pm 1$, и поэтому коэффициенты при x^n асимптотичны соответствующим коэффициентам функции

$\left(A > \frac{1}{2} \right)$, $F_0(x, y) = \frac{A-B}{A(1-x^2)} \left[1 + \frac{xy}{A-Bxy} \right]$. **1345.** $P > \frac{3}{4}$ в первом

случае; $P > \frac{39}{40}$ во втором случае. **1346.** $n \geq 250\,000$. **1347.** $\frac{1}{20}$. С требуемой

вероятностью можно утверждать, что $4500 < m < 5500$. **1348.** $P > 0,99$.

1349. $M =$ м. о. $m = 1 - \frac{1}{2^n}$; м. о. $(m-M)^2 < \frac{2}{3}$. Поэтому искомая веро-

ятность больше, чем $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ (при всяком n). **1350.** Неравенство (A)

равноценно неравенству $e^{\varepsilon x} > e^{t^2} I$, вероятность которого по лемме Чебышева-Маркова меньше, чем e^{-t^2} . **1351.** Для доказательства первого

неравенства надо лишь заметить, что

$$\ln I = \sum_1^n \ln(p_i e^{\varepsilon} + q_i) \leq \sum_1^n \varepsilon p_i (1 + \varepsilon q_i);$$

для второго неравенства следует заметить, что средняя геометрическая двух чисел не больше средней арифметической. **1352.** $\sum_i p_i - m = n - m - \sum_i q_i$.

1353. 1346) $n \geq 50\,000$, 1348) $P > 1 - e^{-169} > 1 - \frac{3}{10^{65}}$. **1354.** Применяя спо-

соб рассуждения задач 1351 и 1352, достаточно заметить, что $\ln \frac{1}{2} (e^{\varepsilon} + 1) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} \right)$. Для решения задачи надо определить $z = t \sqrt{\frac{1}{20\,000}}$, где

$2e^{-t^2} = 0,01$, так что $z^2 \neq \frac{\ln 200}{20\,000} \neq \frac{272}{10^6}$, откуда $z < \frac{1}{50}$.

1355. Вероятность неравенства $m - 3 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] \geq 2t \sqrt{\frac{12}{7}}$ меньше e^{-t^2} ;

поэтому $P < \frac{1}{e^t}$.

1356. Фиксировать вспомогательное число N так, чтобы $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^a} < \eta$. При

достаточно большом n выполняется, очевидно, неравенство $\sum_{k=1}^N k^{\beta} < \frac{1}{2} \varepsilon n$.

Числа ε и η — положительные наперед заданные числа. Легко видеть, что

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k\right| > \varepsilon n\right) \leq P\left(\left|\sum_{k=N+1}^n x_k\right| > \frac{1}{2} \varepsilon n\right) \leq \sum_{k=N+1}^n P(|x_n| > 0) < \eta,$$

откуда следует закон больших чисел. **1357.** Доказательство можно провести тем же приёмом, что и в предыдущей задаче. **1358.** $n > 625$.

1359. $1600 < R < 3733$. **1360.** $P_1 = 0,0184$; $P_2 = 0,1824$, $P_3 = 0,9790$.

1361. $P = 0,6218$. **1362.** $0,00967$. **1363.** $n = 10$. **1364.** $n \geq 1609700$.

1365. $n = 1764$. **1366.** $y = \pm \frac{1}{x\sqrt{2\varepsilon\pi}}$. **1367.** $M_1 = 31,5645$; $M_2 = 31,476$;

$M_3 = 30,995$; $\sigma_1^2 = 17,1888$; $\sigma_2^2 = 16,071$; $\sigma_3^2 = 16,592975$. При случайном распределении в каждом миллионе вероятности встретить простое число равны соответственно: $p_1 = \frac{M_1}{500} = 0,063129$; $p_2 = 0,062952$;

$p_3 = 0,06199$. Таким образом, например, для 10-го миллиона дисперсия, соответствующая схеме Бернулли, была бы $np_3q_3 = 500p_3q_3 = 29,073$ вместо наблюдаемой $\sigma_3^2 = 16,592975$. (Схема с невозвращаемыми шарами даёт

29,015.) **1368.** $M_1 - M_3 = 0,5695$ превышает свой стандарт $\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2000}}$

несколько больше, чем в 4,4 раза; напротив, $M_2 - M_1 = 0,0885$ немного менее своего стандарта. **1369.** $\sigma^2 = 500P - mp^2$, где m — число опытов,

в которых вероятность простого числа отлична от нуля, откуда $m = \frac{(500P)^2}{500P - \sigma^2}$,

так как $p = \frac{500P}{m}$. В данном численном примере $m = 75$, $p = \frac{5}{12}$. В натуральной последовательности 6 чисел не более 2 простых; среди 30 чисел не более 8; среди 210 не более 48; поэтому из 500 последовательных чисел:

420	соответствует не более	$2 \cdot 48 = 96$
60	»	»	$2 \cdot 8 = 16$
18	»	»	$3 \cdot 2 = 6$
2	»	»	$1 = 1$,

т. е. всего не более 119. Поэтому во всяком случае $\frac{(500P)^2}{500P - \sigma^2} < 120$, т. е.

$\sigma^2 < 500P \left(1 - \frac{25}{6}P\right)$. **1370.** Расхождение такое, которое может иметь место и при случайной выборке, ибо величина разности

$\frac{4032}{21\ 812} - \frac{11\ 721}{35\ 311} \approx 0,147$ больше, нежели утроенная величина дисперсии этой разности. **1371.** Средняя величина растягивающего усилия, выдерживаемого проволокой первой партии, заключается в пределах $6\ 770 \pm 3 \frac{220}{\sqrt{20}} \left\{ \begin{array}{l} 6572,4 \\ 6867,6 \end{array} \right.$

Первая партия проволоки стандартного качества. Средняя величина растягивающего усилия, выдерживаемого проволокой второй партии, больше нежели 6867 кг на кв. см. Качество проволоки второй партии выше стандартного. Результаты испытаний нельзя объяснять случайностью выборки.

1372. Рассматривая результаты испытаний как случайную выборку, нетрудно убедиться, что средняя величина растягивающего усилия, получаемая на основании результатов испытаний, превышает 6867 кг на кв. см. Качество поступающей проволоки уклоняется от стандартных условий.

1373. Средняя величина растягивающего усилия для первой партии отличается от средней величины для второй на $210,5$ кг на кв. см. Разность превосходит $3 \cdot \frac{221}{\sqrt{40}}$ кг на кв. см, где 221 есть величина стандартного

уклонения, определённая на основании результатов всех испытаний. Результат испытаний нужно объяснять не случайностью выборки, а различным качеством проволоки обеих партий. **1374.** Сплав, приготавливаемый на II заводе, иной марки, чем сплавы четырёх остальных. Результат полу-

чается путём применения правила Зс. **1375.** $100 \cdot p$, $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

где $t_1 = \frac{a - (R_0 - r_0)}{\sigma}$; $t_2 = \frac{b - (R_0 - r_0)}{\sigma}$; $\sigma = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2}$.

$$\mathbf{1376.} \quad n' = \max \left(\left[\frac{\sigma'}{\sigma} \sqrt{\frac{a}{a'}} \right], \left[\frac{\sigma'}{\sigma} \sqrt{\frac{a}{a'}} \right] + 1 \right) \quad \text{и} \quad n = \left[\frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{a^2} \right] + 1.$$

Указание. Стоимость производства опыта равна $A = an + a'n + n'$. Точность определения средней по этой серии опытов характе-

ризуется величиной средней квадратичной ошибки $\sqrt{\frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{n}}$. Исходя

из того, что при данном n' величина n определяется равенством

$$n = \left[\frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{a^2} \right] + 1, \text{ легко получить указанный результат, изучив изменение } A \text{ при изменении } n'.$$

1377. м. о. $x_k^2 = k^{2\lambda}$; м. о. $|x_k|^3 = k^{3\lambda}$; поэтому

$$\text{при } \lambda > -\frac{1}{3}: \quad \varepsilon_n = \frac{\sum_1^n k^{3\lambda}}{\left(\sum_1^n k^{2\lambda} \right)^{3/2}} \approx \frac{n^{3\lambda+1}}{3\lambda+1} \cdot \left(\frac{2\lambda+1}{n^{2\lambda+1}} \right)^{3/2} = \frac{(2\lambda+1)^{3/2}}{3\lambda+1} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0.$$

При $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\varepsilon_n = \frac{\sum_1^n \frac{1}{k}}{\left[\sum_1^n \left(\frac{1}{k} \right)^{3/2} \right]^{2/3}} \approx \ln n \left(\frac{1}{3n^{1/2}} \right)^{2/3} \rightarrow 0$. При $-\frac{1}{2} < \lambda < -\frac{1}{3}$

$\varepsilon_n < \left(\frac{A}{n} \right)^{2/3(2\lambda+1)} \rightarrow 0$. При $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\varepsilon_n < (A \ln n)^{-1} \rightarrow 0$, где A — конечная постоянная. **1378.** Вероятность числа «нуль» появлений A равна $\frac{1}{4}$,

вероятность двух появлений в группе равна $\frac{3}{4}$. Поэтому число $m = 2m_1$, где m_1 есть число появлений некоторого факта A_1 , имеющего вероятность $p = \frac{3}{4}$ при $n_1 = \frac{n}{3}$ независимых опытах. По теореме

Лапласа, вероятность неравенства $\frac{t_0}{4} \sqrt{3n_1} < m_1 - \frac{3}{4} n_1 < \frac{t_1}{4} \sqrt{3n_1}$, которое тождественно с неравенством $\frac{t_0}{2} \sqrt{n} < m - \frac{n}{2} < \frac{t_1}{2} \sqrt{n}$, имеет пре-

делом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. **1379.** м. о. $x_k^2 = k\lambda$, м. о. $|x_k|^3 = k^{2\lambda}$;

$\frac{\sum_1^n k^{2\lambda}}{\left[\sum_1^n k^\lambda \right]^{2/3}} \sim \frac{(\lambda+1)^{3/2}}{2\lambda+1} \frac{n^{2\lambda+1}}{n^{3/2(\lambda+1)}} = \frac{(\lambda+1)^{3/2}}{2\lambda+1} n^{\lambda-1} \rightarrow 0$. **1380.** $\frac{1}{2}$. **1381.** $\frac{3}{4}$.

1382. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. **1383.** $\frac{1}{3}l$ и $\frac{l}{3\sqrt{2}}$. **1384.** Интегральная кривая ха-

рактеризуется уравнением $P = \frac{2ax - x^2}{a^2}$ ($0 \leq x \leq a$). Дифференциальная

кривая распределения $y = \frac{2(a-x)}{a^2}$. **1385.** $\frac{1}{2}$. **1386.** $\frac{1}{3}$.

1387. $P_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = \frac{13}{24}$, $P_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{48}$. **1388.** 1) $|p| \leq 2$;

$f(p) = \frac{2-p}{4}$. 2) $|q| \leq 1$; $\varphi(q) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{q}$. **1389.** $P = \frac{2\sqrt{3M}}{45}$, если

$M \leq \frac{27}{4}$; $P = \frac{1}{2} - \frac{9}{20} \sqrt[3]{\frac{2}{M}}$, если $M \leq \frac{27}{4}$. **1390.** $\frac{7}{16}$.

1391. $P(t_0) = \frac{2t_0}{T} - \frac{t_0^2}{T^2}$, м. о. $t = \frac{T}{3}$, м. о. $t^2 = \frac{T^2}{6}$. **1392.** $\frac{2}{k+1}$.

1393. Дифференциальная функция распределения вероятностей $\varphi(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$; $0 \leq x \leq 1$. $\varphi(x) = 0$; $x < 0$; $\varphi(x) = 0$, $x > 1$. Интегральная

кривая распределения вероятностей $\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$. $\Phi(x) = 0$,

$x < 0$, $\Phi(x) = 1$, $x > 1$. **1394.** $a \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right)$. **1395.** м. о. $[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] =$

$= 2$ м. о. $(x_1^2 + y_1^2) - 2$ (м. о. x_1^2) $- 2$ (м. о. y_1^2). **1396.** $P(z_1) = 0$ при $z_1 < b$;

$$P(z_1) = \frac{2a \sqrt{z_1^2 - b^2} - (z_1^2 - b^2)}{a^2} \quad \text{при} \quad b \leq z_1 \leq \sqrt{a^2 + b^2}; \quad P(z_1) = 1$$

при $z_1 > \sqrt{a^2 + b^2}$, полагая, что точки находятся на стороне a ; м. о.

$$z = \frac{b^2}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2b^2}{3(b + \sqrt{a^2 + b^2})}; \quad \text{м. о.}$$

$z^2 = b^2 + \frac{a^2}{6}$. **1397.** $P(z_1) = 0$ при $z_1 < 0$; $P(z_1) = \frac{\pi z_1^2}{4ab}$ при $0 \leq z_1 < a$,

$$P(z_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 - a^2}}{2b} + \frac{z_1^2 \arcsin \frac{a}{z_1}}{2ab} \quad \text{при} \quad a \leq z_1 < b; \quad P(z_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 - a^2}}{2b} +$$

$$+ \frac{\sqrt{z_1^2 - b^2}}{2a} + \frac{z_1^2}{2ab} \left[\arcsin \frac{a}{z_1} - \arccos \frac{b}{z_1} \right] \quad \text{при} \quad b \leq z_1 < \sqrt{a^2 + b^2}; \quad P(z_1) = 1$$

при $z_1 > \sqrt{a^2 + b^2}$; м. о. $z = \frac{a^2}{6b} \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + \frac{b^2}{6a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} +$

$$+ \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \text{м. о.} \quad z^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2). \quad \text{1398. м. о.} \quad z^2 = \frac{(a+b)^2}{6} = \frac{p^2}{6}.$$

1399. 1) $\frac{a^2 + b^2}{6}$, 2) $\frac{A^2 + B^2}{2}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **1400.** 1. $\left(\frac{l-2a}{l-a}\right)^k =$

$= \left(1 - \frac{a}{l-a}\right)^k$, $b \geq a$, $b+a < l$; 2. $\left(\frac{l-a-b}{l-a}\right)^k = \left(1 - \frac{b}{l-a}\right)^k$; $b < a$;

$b+a < l$; 3. 0; $b < a$, $a+b \geq l$; 4. $\left(\frac{b-a}{l-a}\right)^k$; $b > a$, $a+b < l$.

1401. $\frac{1}{3} (4a-l)$ при $l \leq 2a$, $\frac{a^2}{3(l-a)^2} (3l-4a)$ при $l \geq 2a$. **1402.** $p_m(x_m) =$

$$= \frac{C_m}{b-a} \left(\frac{x_m-a}{b-a}\right)^{n-m} \left(\frac{b-x_m}{b-a}\right)^{m-1}, \quad \text{где постоянная} \quad C_m = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} =$$

$= m C_n^m$. **1403.** м. о. $x_m = \frac{ma + (n+1-m)b}{n+1}$, $\sigma^2(x_m) = \frac{(b-a)^2 m(n-m+1)}{(n+1)^2 (n+2)}$.

1404. $\ln p_m(x) = \lambda - (n-m) \left[\frac{x}{a} + \frac{x^3}{2a^2} + \dots \right] - (m-1) \left[\frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} + \dots \right]$,

где λ — постоянная, не зависящая от x ; поэтому, принимая во внимание, что

x порядка $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, и замечая, что $-\frac{n-m}{a} - \frac{m-1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, заключаем, что

$$\ln p_m(x) = \lambda - \left[\frac{n-m}{a^2} + \frac{m-1}{b^2} \right] \frac{x^2}{2} + \epsilon, \quad \text{где} \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \text{как} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad \text{Поэтому}$$

$p_m(x) \approx e^{\lambda - \frac{nx^2}{2ab}}$. **1405.** При заданном x_m плотность вероятностей для x_k равна $(k-m) C_{n-m}^{k-m} \left(\frac{x_k - a}{x_m - a} \right)^{n-k} \left(\frac{x_m - x_k}{x_m - a} \right)^{k-m-1}$; поэтому поверхности корреляции $P_{m,k}(x_m, x_k) = A_{m,k} (x_k - a)^{n-k} (x_m - x_k)^{k-m-1} (b - x_m)^{m-1}$, где постоянная $A_{m,k} = \frac{1}{(b-a)^n \cdot (m-1)! (k-m-1)! (n-k)!}$. Линия регрессии x_k по x_m имеет уравнением $Y = \frac{(n-k+1)x_m + (k-m)a}{n-m+1}$, другая линия регрессии $Y = \frac{mx_k + (k-m)b}{k}$. Коэффициент корреляции

$$R_{mk} = \sqrt{\frac{m(n-k+1)}{k(n-m+1)}}$$

$$\mathbf{1406.} \quad p(z) = A_{m,k} z^{k-m-1} \int_a^{b-z} (x-a)^{n-k} (b-z-x)^{m-1} dx = \\ = \frac{C_h}{b-a} \left(\frac{z}{b-a} \right)^{h-1} \left(1 - \frac{z}{b-a} \right)^{n-h}.$$

$$\mathbf{1407.} \quad \frac{1}{n} p \left(\frac{z}{n} \right) = \frac{n-h C_h}{b-a} \left(\frac{z}{b-a} \right)^{h-1} \left(1 - \frac{z}{n(b-a)} \right)^{n-h} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{(h-1)! (b-a)} \left(\frac{z}{b-a} \right)^{h-1} e^{-\frac{z}{b-a}}.$$

$$\mathbf{1408.} \quad u(\delta) = \left(\frac{b-a-n\delta}{b-a} \right)^n.$$

При $n \rightarrow \infty$ полагаем $\delta = \frac{t}{n^2}$, тогда $u \left(\frac{t}{n^2} \right) \rightarrow e^{-\frac{t}{b-a}}$.

$$\mathbf{1409.} \quad u_1(\delta) = (n+1) \left\{ \left[\frac{b-a-n\delta}{b-a} \right]^n - \left[\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a} \right]^n \right\},$$

$$u_2(\delta) = \frac{(n+1)n}{2} \left\{ 2 \left[\frac{b-a-n\delta}{b-a} \right]^n - \left[\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a} \right]^n - \left[\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a} \right]^n \right\}.$$

Первая из формул получается, если заметить, что вероятность, что все расстояния, кроме, быть может, одного определённого расстояния, больше δ равна $\left[\frac{b-a-n\delta}{b-a} \right]^n$; поэтому вероятность, что только расстояние

между двумя определёнными смежными точками меньше δ , равна $\left[\frac{b-a-n\delta}{b-a} \right]^n - \left(\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a} \right)^n$. Точно так же вероятность, что все расстояния, кроме, быть может, двух данных расстояний, больше δ равна

$\left[\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a} \right]^n$. Поэтому вероятность, что они оба и только они меньше δ , равна

$$\left\{ 2 \left[\frac{(b-a)-n\delta}{b-a} \right]^n - \left[\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a} \right]^n - \left[\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a} \right]^n \right\}.$$

Остаётся умножить последнее значение на $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2}$.

1410. При любом данном Δt вероятность $P_{\Delta t, t}(k)$, что $a = k$ в момент t , равна $P_{\Delta t, t}(k) = C_n^k (p \Delta t)^k (1 - p \Delta t)^{n-k}$, где $n \Delta t = t$,

$P_{0,t}(k) = \lim \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} (pt)^k \left(1 - \frac{pt}{n}\right)^{n-k} = e^{-pt} \frac{(pt)^k}{k!}$. **1411.** Решение приводится к предыдущей задаче. **1412.** $P_m = \frac{n+1}{m+n+1}$. **1413.** $n \geq 9980$.

1414. 9989. **1415.** Длины частот относятся друг к другу, как m к n .

1416. $\frac{M}{N}$. **1417.** $\theta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. **1418.** $\theta(t) =$

$= \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos tx dx = \frac{\sin^2 t}{t^2}$. **1419.** $\theta(t) = pe^{iat} + qe^{ibt}$, где $q = 1 - p$.

1420. $\theta(t) = k^2 \int_a^{\infty} e^{itx - k^2(x-a)} dx = \frac{k^2 e^{iat}}{k^2 - it}$. **1421.** $\theta(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{itx} dx = \frac{\sin at}{at}$.

1422. $\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{itx}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Моменты: $M_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \frac{1}{2}$.

$M_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}$. **1423.** $\varphi_1(z) = F(z, L)$, $\varphi_2(z) = F(z, z)$; $\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$.

1424. $p(x, y) = \frac{F''_{xy}(x, y)}{\varphi'_1(x)}$; $F(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \varphi'_1(x) p(x, y) dx dy$.

1425. $\varphi_1(x) = \frac{\int_0^x x(L-x)^2 dx}{\int_0^L x(L-x)^2 dx} = \frac{6x^2L^2 - 8x^3L + 3x^4}{L^4}$;

$$p(x, y) = \frac{(h+1)(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}};$$

$F(x', y') = \int_0^{x'} \int_0^{y'} \frac{12(h+1)x(L-x)^2(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}L^4} dx dy = \int_0^{x'} \frac{12(y'-x)^{h+1}x}{(L-x)^{h-1}L^4} dx$.

При $h=1$ $F(x, y) = \int_0^x \frac{12}{L^4} (y-x)^2 x dx = \frac{6xy^2 - 8x^3y + 3x^4}{L^4}$, поэтому

$\varphi(x) = \varphi_1(x) - F(x, x) = \frac{x^2}{L^2} \left[6 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) - 8 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] =$

$= \frac{2x^2}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(3 - \frac{x}{L}\right)$. При $h=0$ $F(x, y) = \frac{12}{L^4} \int_0^x (y-x)(L-x)x dx =$

$= \frac{6Lyx^2 - 4(L+1)x^3 + 3x^4}{L^4}$. $\varphi(x) = \frac{2x^2}{L^2} \left[1 - \frac{x}{L} \right] \left[3 - \frac{2x}{L} \right]$.

1426. $p(x, y) = \frac{(h+1)(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}}$; $F(x, y) = \left(\frac{y}{L}\right)^{h+2} - \left(\frac{y-x}{L}\right)^{h+2}$,
 $\varphi_1'(z) = \frac{(h+2)(L-z)^{h+1}}{L^{h+2}}$; $\varphi_2'(z) = \frac{h+2}{L} \left(\frac{z}{L}\right)^{h+1}$, $\varphi(z) = 1 - \left(\frac{z}{L}\right)^{h+2} -$
 $- \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{h+2}$; $P_h = \frac{(h+3)}{(h+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{h+1}}\right)$ достигает максимума (который
 менее чем 2) при $h < 1$ и с возрастанием h убывает до 1 при $h = \infty$.

$$\mathbf{1427.} F(z, y) = \frac{1}{2} \int_0^z \int_x^y \frac{\cos \frac{\pi x}{2L} \sin \frac{\pi y}{L}}{1 + \cos \frac{\pi x}{L}} dx dy =$$

$$= \frac{L}{4\pi} \int_0^z \frac{\cos \frac{\pi x}{L} - \cos \frac{\pi y}{L}}{\cos \frac{\pi x}{2L}} dx = \sin \frac{\pi z}{2L} - \cos^2 \frac{\pi y}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L}\right);$$

$$\varphi_2(z) = \sin \frac{\pi z}{2L} - \cos^2 \frac{\pi z}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L}\right); \quad \varphi(z) = \cos^2 \frac{\pi z}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L}\right).$$

1428. $\varphi_1(z) = \frac{12z(L-a-z)^2}{(L-a)^4}$, если $z \leq L-a$; $\varphi_1'(z) = 0$, если $z > L-a$;

$$p(x, y) = 0 \text{ при } y-x < a; p(x, y) = \frac{2(L-y)}{(L-a-x)^2} \text{ при } y-x \geq a. F(x, y) =$$

$$= \left(\frac{x}{L-a}\right)^2 \left\{ 6 \left[1 - \left(\frac{L-y}{L-a}\right)^2 \right] - 8 \frac{x}{L-a} + 3 \left(\frac{x}{L-a}\right)^2 \right\} \text{ при } y-x \geq a;$$

$$F(x, y) = F(y-a, y) = \left(\frac{y-a}{L-a}\right)^3 \left[4 - 3 \frac{y-a}{L-a} \right] \text{ при } y-x < a;$$

$$\varphi(z) = 1 - \left(\frac{z-a}{L-a}\right)^3 \left[4 - 3 \frac{z-a}{L-a} \right] \text{ при } z > L-a; \varphi(z) =$$

$$= \left(\frac{z}{L-a}\right)^2 \left[6 - 8 \frac{z}{L-a} + 3 \left(\frac{z}{L-a}\right)^2 \right] - \left(\frac{z-a}{L-a}\right)^3 \left[4 - 3 \frac{z-a}{L-a} \right]$$

при $z \leq L-a$.

1429. $y_n = z_n \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^n$, где $z_{i+1} = z_i + \frac{kx_i}{\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{i+1} \sqrt{n}}$. Поэтому

$$z_n = y_0 + \sum_0^{n-1} \frac{kx_i}{\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{i+1} \sqrt{n}}, \quad y_n = y_0 \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^n + Y_n, \quad \text{где}$$

$$Y_n = \frac{k}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} x_i \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{n-i-1}. \text{ Следовательно, м. о. } Y_n = 0, \text{ м. о.}$$

$$Y_n^2 = \frac{k^2}{n} \sum_0^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{2i} = \frac{k^2}{n} \frac{\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{2n} - 1}{\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^2 - 1} \rightarrow \frac{k^2}{2\rho} [e^{2\rho} - 1]; \quad \text{применяя}$$

теорему Ляпунова и замечая, что $\lim (y_n - Y_n) = y_0^{ep}$, находим, что

вероятность неравенства $t_0 k \sqrt{\frac{e^{2\rho} - 1}{2\rho}} < y_n - y_0^{ep} < t_1 k \sqrt{\frac{e^{2\rho} - 1}{2\rho}}$

имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. **1430.** $x_i = \sum_1 a_h \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{i-h}$;

$$S_n = A \sum_1^n a_h \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n-h+1}\right]; \text{ м. о. } S_n^2 =$$

$$= A^2 b^2 \left\{ n - 2A \left(1 - \frac{1}{A}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^n\right] + \frac{A(A-1)}{2A-1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{2n}\right] \right\} \approx$$

$$\approx A^2 b^2 n. \text{ м. о. } x_i^2 = b^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{2i}}{2 - \frac{1}{A}} A \approx \frac{b^2 A}{2}. \text{ Теорема Ляпунова}$$

применима, так как $\frac{\sum_1^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)\right]^3}{n^{3/2}} \rightarrow 0$ и предельная

плотность вероятности равна $\frac{e^{-\frac{S^2}{2nA^2b^2}}}{Ab\sqrt{2\pi n}}$. **1431.** $R_n \approx \frac{\text{м. о. } S_n S_{n_1}}{A^2 b^2 \lambda n} =$

$$= \frac{1}{\lambda n} \sum_1^{n_1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n_1-h+1}\right] \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n-h+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda n} \left\{ n_1 - A \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n_1}\right] \left[\left(1 - \frac{1}{A}\right) + \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n-n_1+1}\right] + \right. \\ \left. + \frac{A}{2 - \frac{1}{A}} \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n-n_1} \left[\left(1 - \frac{1}{A}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^n\right] \right\} \approx \frac{n_1}{\lambda n} = \lambda.$$

$$\mathbf{1432.} \text{ м. о. } x_{h_1}^2 = \frac{b^2 A}{2} \left[1 - e^{-\frac{2\lambda^2}{a}}\right]; \text{ м. о. } S_n^2 \approx A^2 b^2 \left[n - 2A \left(1 - e^{-\frac{1}{a}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{A}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{a}}\right) \right] = A^2 b^2 n \left[1 - a \left(\frac{3}{2} - 2e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{a}}\right)\right];$$

$$R_\lambda \approx \frac{\lambda - a \left(1 + \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda^2 - 1}{a}} - e^{-\frac{\lambda^2}{a}} - e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2 + 1}{a}}\right)}{1 - a \left(\frac{3}{2} - 2e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{a}}\right)}. \text{ При } a \rightarrow \infty$$

м. о. $x_n^2 \approx \frac{b^2 A \lambda^2}{a} = \frac{k \lambda^2}{A^2} = n b \lambda^2$; м. о. $S_n^2 \approx 2k$; $R_\lambda \approx \frac{\lambda - \lambda^3}{2}$. **1433.** $y_n =$

$$= y_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i \sqrt{n}}{n-1}\right). \text{ Полагаем } z_n = \ln \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i \sqrt{n}}{n-1}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sum_1^n a_i - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right)^3 \sum_1^n a_i^3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n a_i - \frac{1}{2} + \varepsilon_n, \text{ где } \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ Поэтому предельная плот-}$$

ность вероятностей z_n равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+\frac{1}{2})^2}{2}}$. Но $\lim y_n = y_0 \lim e^{z_n-1}$,

$$\text{откуда } p(y) = \frac{1}{y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\ln \frac{y}{y_0} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{y_0^3}{2\pi y^5}} e^{-\frac{9}{8} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{y}{y_0}\right)^2}, \text{ если}$$

$$\frac{y}{y_0} > 0 \text{ и } p(y) = 0, \text{ если } \frac{y}{y_0} \leq 0.$$

1434. $y_n = \left(1 + \frac{aq}{\sqrt{n}}\right)^m \left(1 - \frac{ap}{\sqrt{n}}\right)^{n-m}$ с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$. Применяя теорему Лапласа и полагая $m = np + t\sqrt{npq}$, находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$

$$= e^{-\frac{pq a^2}{2} + tA}, \text{ где } A = a\sqrt{pq}, \text{ причём } t \text{ подчиняется нормальному закону}$$

Гаусса $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$; поэтому

$$P(y) = \frac{1}{Ay \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\ln y + \frac{1}{2} nqa^2\right)^2}{2A^2}} = \frac{C}{y^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2A^2}}, \text{ где } C = \frac{e^{-\frac{pq a^2}{2}}}{A \sqrt{2\pi}}.$$

1435. $R_i = -\frac{\sigma_i^2}{V(\sigma_{i+1}^2 + \sigma_i^2)(\sigma_i^2 + \sigma_{i-1}^2)}$. **1436.** м. о. $\Sigma_k =$

$$= \sum_{i=1}^k \int_0^\infty x \left[k \prod_{j \neq i} P_j(x) - 1 \right] dP_i(x). \text{ Если } P_i(x) = P(x), \text{ то м. о. } \Sigma_k =$$

$$= k \int_0^\infty x \left[k P^{k-1}(x) - 1 \right] dP(x). \text{ 1437. м. о. } \sum_k = \frac{bk}{2} \left[1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots (2k-2)} \right].$$

1438. Средняя арифметическая $4,781 \cdot 10^{-10}$. Медиана $4,781 \cdot 10^{-10}$. Мода $4,779 \cdot 10^{-10}$. Среднее между наибольшим и наименьшим — $4,775 \cdot 10^{-10}$.

1439. Средняя скорость движения молекулы кислорода — $424,9 \text{ м/сек}$. Среднее квадратическое уклонение — $179,3 \text{ м/сек}$. Наиболее вероятная скорость движения — $376,6 \text{ м/сек}$. **1440.** Примерное распределение скоростей характеризуется таблицей:

Скорость в м/сек	0—100	100—200	200—300	300—400
Число молекул	13	82	168	216

Скорость в м/сек	400—500	500—600	600—700	> 700
Число молекул	203	152	92	75

1441. $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$. **1442.** Среднее значение 4,025 выводится из первой

таблицы. Для определения величины стандартного уклонения σ исходим из того положения, что распределение отдельных значений изучаемой величины не коррелировано с распределением ошибок измерения. В таком случае $\sigma_1^2 = \sigma^2 + \sigma_2^2$, где σ_1 — стандартное уклонение наблюденного распределения, а σ_2 — средняя квадратичная ошибка отдельного наблюдения $\sigma = 0,680$.

1443. Как глубина пропитывания древесины креозотом, так и толщины древесины и теснота связи между ними характерны для отдельных видов деревьев. Колебания средних величин в таблице и коэффициента корреляции нельзя отнести за счёт случайности выборки. При определении случайности значения коэффициента корреляции вычислить стандартное уклонение

коэффициента корреляции по формуле $\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}$, где n — объём совокупности, служившей для определения коэффициента.

1444. Среднее 32,96. Стандартное уклонение 7,40. Медиана 32. **1445.** $m = 15,97 \pm 0,48$.

1446. $m = 9,41$; $\sigma = 8,58$. **1447.** $6,55 \pm 0,40$. **1448.** $21,59 \pm 0,67$. **1449.** Медиана 6,7. **1450.** Таблица накопленных частотей содержания Ag:

Содержание Ag	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Накопление частоты . . .	0,51	0,71	0,84	0,91	0,94	0,96	0,98	0,99	0,99	100

Первая квартиль 2,00%. Медиана 4%. Третья квартиль 9,2%. **1451.** Таблица накопленных частотей содержания Zn:

Содержание Zn	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Накопленные частоты . . .	0,08	0,19	0,30	0,44	0,57	0,71	0,85	0,94	0,99	100

Первые четыре децилы $60/0$, $100/0$, $150/0$, $22,50/0$. **1452.** Среднее значение 5,166. Стандартное уклонение 0,995. Мера скошенности 0,318. Мера крутости 3,71. **1453.** $m = 2,914$, $\sigma = 0,803$, $k = 0,241$, $\beta = 2,687$. **1454.** Вычисляя числа $N'_3(x)$ групп, содержащих x простых чисел, которые соответствовали бы кривой Гаусса с центром 30,995 и стандартом 4,073, находим, что коэффициент точности $H_3 = 0,65$. **1455.** $H_2 = 1,95$. **1456.** $r = 0,652$; $\sigma_r = 0,034$; $\eta_x = 0,685$, $\sigma_{\eta_x} = 0,031$, $\eta_y = 0,717$, $\sigma_{\eta_y} = 0,029$. Линия регрессии y по x прямая: $x - 16,14 = 0,332(y - 41,83)$. Линия регрессии x по y кривая. **1457.** $r = -0,82$; $\sigma_r = 0,020$; $\eta_x = 0,87$; $\sigma_{\eta_x} = 0,014$, $\eta_y = 0,84$, $\sigma_{\eta_y} = 0,018$. Линия регрессии x по y кривая. Регрессия y по x прямолинейная: $y - 68,63 = -1,408(x - 15,83)$. **1458.** $r = 0,64$; $\sigma_r = 0,04$; $\eta_x = 0,70$; $\sigma_{\eta_x} = 0,03$; $\eta_y = 0,73$; $\sigma_{\eta_y} = 0,03$. Величина среднего содержания серы в руде данного горизонта может быть представлена в виде линейной функции от глубины, так как разность $\eta_x^2 - r^2 = \zeta_x$ меньше $3\sigma_{\zeta_x}$. Уравнение линии регрессии x по y . $x - 1,53 = 0,0335(y - 41,72)$. **1459.** Коэффициент корреляции равен 0,519. Он больше, нежели $\frac{3}{\sqrt{59-1}}$. Объяснение наличия подобной величины коэффициента условиями случайной выборки обладает малой вероятностью.

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
21	6 сн.	$(m+4)$	$(m+3)$
48	9 св.	числа	члена
56	6 св.	$\theta(b)b^2$	$\theta(b)b^3$
65	6 св.	\int	\int
83	4 св.	$ z =1$	$ z =1$
		$P_n^{\alpha, \beta}(x)$	$P_n^{\alpha, \beta}(x)$
128	7 св.	$+\frac{\partial^3 u}{\partial z^2}$	$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
134	9 сн.	1026	1025

Гюнтер и Кузьмин, Сборник, т. III.