

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.Е. Александрова

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

конспект лекций для студентов
всех специальностей



ХАРЬКОВ - 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

И.Е. Александрова

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Конспект лекций для
студентов всех специальностей

*Утверждено
методической комиссией по
контрактному обучению ХГПУ,
протокол № 11
от 21.08.2000.*

Харьков, ХГПУ, 2000

Александрова І.Є. Імітаційне моделювання: Конспект лекцій для студентів всіх спеціальностей. - Харків, ХДПУ, 2000. - 91с. - Рос. мовою.

© Факультет управління бізнесом
ХДПУ, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Часть 1. Математические модели и метод имитационного моделирования.....	9
1.1 Математическое моделирование объектов.....	9
1.2 Идентификация математических моделей.....	13
1.3 Аналитическое исследование объектов с помощью математических моделей.....	16
1.4 Исследование объектов численными методами.....	20
1.5 Аппаратурное моделирование.....	24
1.6 Метод имитационного моделирования.....	29
Часть 2. Метод имитационного моделирования.....	33
2.1 Моделирующие алгоритмы.....	33
2.2 Обработка результатов имитационного моделирования.....	35
2.3 Выбор количества реализаций случайного процесса.....	39
2.4 Моделирование случайных чисел.....	42
2.5 Моделирование случайных событий.....	45
2.6 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения.....	46
2.7 Формирование реализаций случайных функций.....	49
2.8 Критерий Пирсона.....	53
Часть 3. Планирование эксперимента при поиске оптимальных решений.....	56
3.1 Параметры оптимизации и факторы.....	56
3.2 Полный факторный эксперимент.....	61
3.3 Дробный факторный эксперимент.....	69
3.4 Статистическая проверка результатов экспериментальных исследований.....	70
3.5 Планирование экспериментов для оптимизации детерминированных систем.....	75
3.6 Планирование экспериментов для оптимизации стохастических систем.....	77
Часть 4. Имитационное моделирование в экономико-организационных системах.....	82
4.1 Оптимальное управление запасами.....	82
4.2 Оптимальное управление многопродуктовыми запасами.....	86
4.3 Система массового обслуживания.....	87

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования. Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется *объектом*. Объекты существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собою и внешней средой. Эффективное функционирование объектов требует получения и обработки информации об объектах и выработки управляющих воздействий на объект. Такую задачу выполняет автоматизированная система управления (АСУ) объектом (рис.1).

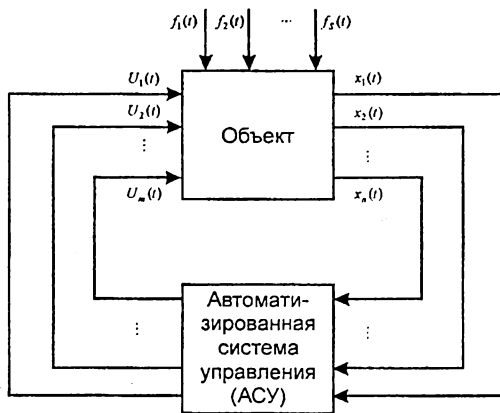


Рис. 1 - Обобщенная схема замкнутой АСУ.

Переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ характеризуют состояние объекта и в совокупности образуют n -мерный вектор состояния

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T.$$

Переменные $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_s(t)$ характеризуют воздействие на объект внешней среды и образуют s -мерный вектор внешних воздействий

$$F(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_s(t)]^T.$$

АСУ объектом получает и преобразует информацию о компонентах вектора состояния $X(t)$ и формирует управляющие воздействия на объект $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_m(t)$, которые в совокупности образуют m -мерный вектор управления

$$U(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \dots u_m(t)]^T.$$

В общем случае для формирования вектора управления $U(t)$ АСУ использует информацию и о векторе внешних воздействий $F(t)$ (рис.2).

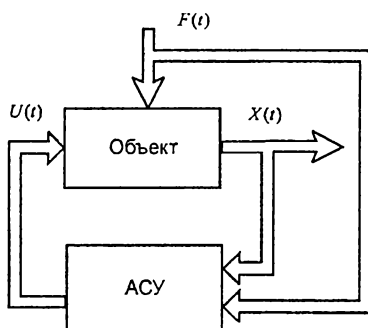


Рис.2 - Обобщенная векторная схема замкнутой АСУ.

При исследовании собственно объектов или замкнутых АСУ часто используют принцип аналогии.

Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов. С помощью аналогии объект сводится к удобной для исследования логической схеме, называемой *моделью*. Модель – это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Замещение одного объекта другим, с целью изучения свойств объекта-оригинала с помощью объекта-модели, называется *моделированием*. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследование свойств объектов на их моделях называется *теорией моделирования*.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель *адекватна* объекту.

В последнее десятилетие основные достижения в различных областях науки и техники неразрывно связаны с внедрением вычислительной техники и, прежде всего, персональных ЭВМ. Ресурсы современной вычислительной техники дают возможность ставить и решать задачи такой сложности, которые в недавнем прошлом казались нереализуемыми, например моделирование больших систем. К классу *больших* или *сложных систем* обычно относят крупные технологические, производственные, энергетические, коммуникационные, экономические, социологические, биологические, экологические и другие объекты.

Термин «*сложная система*» ассоциируется с объектом составным, представляющим собой совокупность отдельных частей, и в то же время объектом комплексным, отдельные части которого функционируют в тесном взаимодействии, составляют единое целое. Здесь и начинается интерпретация исследуемого объекта как *сложной системы*, а его частей – как *подсистем*.

Если некоторые подсистемы оказываются все еще чрезмерно сложными, то каждую из них расчленяют на конечное число более мелких подсистем. Процедура расчленения подсистем продолжается до получения таких подсистем, которые в условиях данной задачи будут признаны достаточно простыми и удобными для непосредственного изучения. Эти подсистемы, не подлежащие дальнейшему расчленению, назовем *элементами* сложной системы. Таким образом, в общем случае сложная система представляется как многоуровневая конструкция из взаимодействующих элементов, объединенных в подсистемы различных уровней. Расчленение системы на элементы в общем случае может быть выполнено неоднозначным образом и является в высшей степени условным.

В качестве примера рассмотрим автомобиль, являющийся сложной технической системой.

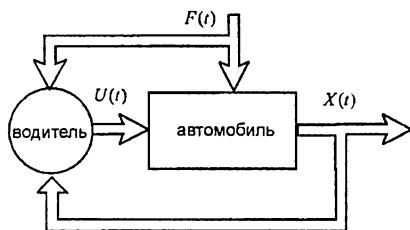


Рис.3 - Автомобиль как сложная техническая система.

Водитель, получая и перерабатывая информацию о компонентах векторов состояния $X(t)$ и внешних воздействий $F(t)$ со стороны дороги, создает вектор управляющих воздействий $U(t)$. В качестве компонент вектора состояния могут быть выбраны скорость движения автомобиля $V(t)$ и направление движения $\Psi(t)$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(t) \\ \Psi(t) \end{bmatrix}.$$

Компонентами вектора внешних воздействий являются профиль дороги $f(t)$, сопротивление движению $q(t)$ и ограничение скорости движения $V_{\max}(t)$:

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ q(t) \\ V_{\max}(t) \end{bmatrix}.$$

Компонентами вектора управления являются: угол поворота рулевого колеса $\alpha(t)$, положение рукоятки переключения передач $i(t)$, положение педали газа $\beta(t)$ и положение педали тормоза $\gamma(t)$:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ i(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}.$$

Автомобиль является сложной технической системой, которую можно расчленить на ряд подсистем (рис.4)

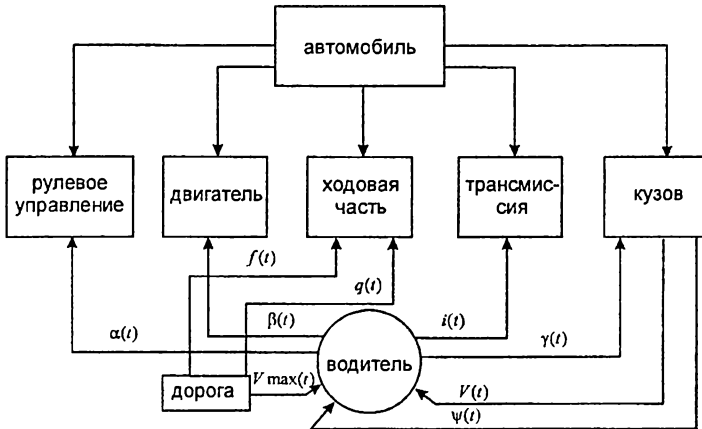


Рис.4 - Расчленение сложной технической системы на ряд подсистем.

Если управление сложной системой сосредоточено в едином центре, оно называется **централизованным**. Так, управление такой сложной технической системой как автомобиль, является централизованным и сосредоточено в руках водителя.

На практике встречаются различные степени децентрализации управления, когда функция управления распределена между главными и периферийными центрами управления. Например, современный бомбардировщик, как сложная техническая система может быть расчленен на ряд подсистем. каждая из которых управляется отдельным членом экипажа (рис.5).

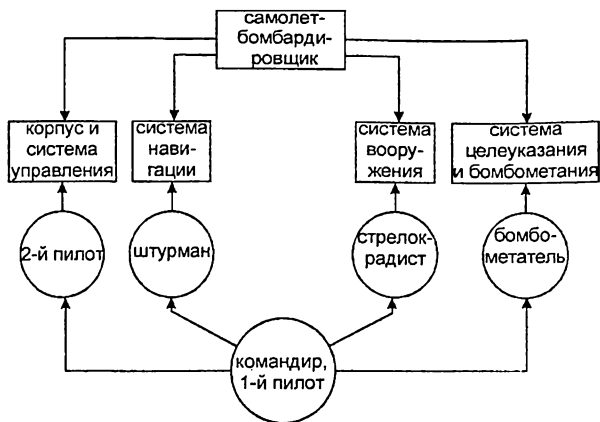


Рис. 5 - Децентрализация управления бомбардировщиком.

Исторически первым сложился *аналитический* подход к моделированию объектов, когда ЭВМ использовалась в качестве вычислителя по аналитическим зависимостям. Анализ функционирования сложных систем с помощью аналитических методов исследования наталкивается обычно на значительные трудности, приводящие к необходимости существенного упрощения моделей либо на этапе их построения, либо в процессе работы с моделью, что может привести к получению недостоверных результатов. Поэтому в настоящее время наряду с построением аналитических моделей большое внимание уделяется *имитационным моделям*, реализованным на современных ЭВМ с высоким быстродействием и большим объемом оперативной памяти. Имитационное моделирование позволяет проводить не только анализ характеристик исследуемых объектов, но и решать задачи *структурной и параметрической оптимизации* таких объектов при заданных критериях оптимизации и ограничениях.

Действительно, аналитические методы оптимизации (принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов А. М. Летова, метод функций А. М. Ляпунова) оказываются весьма эффективными для объектов, поведение которых описывается системами дифференциальных или разностных уравнений невысокого порядка и которые находятся под действием детерминированных возмущений. Для уравнения 10-го порядка применение указанных методов становится проблематичным. Кроме того, внешние возмущения, действующие на сложную систему, как правило, являются случайными. В отличие от других методов, имитационное моделирование является весьма удобным аппаратом для исследования случайных процессов в сложных системах. Результаты моделирования, полученные при воспроизведении единственной реализации случайного процесса, не могут объективно характеризовать изучаемый объект.

Поэтому искомые величины при исследовании процессов методом имитационного моделирования обычно определяют как средние значения по данным большого числа реализаций процесса. Допустим, что качество функционирования объекта характеризуется скалярной величиной, определяемой соотношением

$$I = \Phi[x(t), u(t), f(t)],$$

где $x(t)$ – функция, характеризующая состояние объекта, $u(t)$ – управляющее воздействие, $f(t)$ – случайное внешнее воздействие на объект. Обозначим через $f^j(t)$ j -тую реализацию случайной функции $f(t)$. В результате получаем j -тую реализацию случайной величины I , обозначенную I^j . Если число реализаций N , используемых для оценки величины I , достаточно велико, то в силу закона больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость, а величина

$$\bar{I} = \frac{\sum_{j=1}^N I^j}{N}$$

с достаточной для практики точностью может быть принята в качестве приближенного среднего значения.

Метод имитационного моделирования имеет весьма обширную сферу применения. Он дает возможность проводить достаточно полное исследование разнообразных объектов и процессов, независимо от их физической природы, выбора искомых величин и формулировки прикладных задач.

ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОД ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 Математическое моделирование объектов

Моделирование – один из наиболее распространенных способов изучения различных процессов и явлений. В настоящее время известны и широко применяются в инженерной практике многочисленные методы и приемы моделирования. Обычно различают *физическое моделирование* и *математическое моделирование*.

При физическом моделировании модель воспроизводит изучаемый объект с сохранением его физической природы. Преимущества физического моделирования перед натурным экспериментом заключаются в том, что условия ре-

лизации объекта - модели могут значительно отличаться от условий, свойственных объекту – оригиналу, и выбираются, исходя из удобства и простоты исследования.

Так, при разработке ходовой системы автомобиля, содержащей рессоры, колеса и амортизаторы, часто пользуются физической моделью, приведенной на рис.1.1.

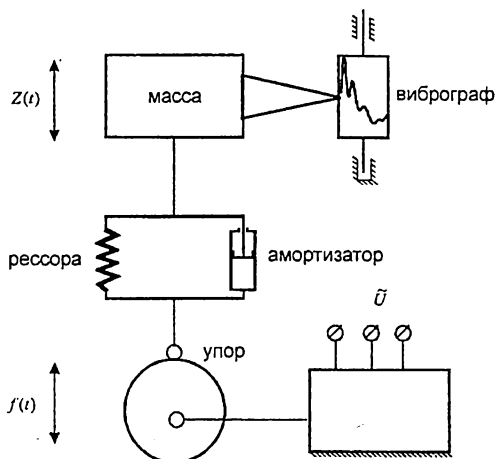


Рис.1.1 - Физическая модель ходовой системы автомобиля.

Физическая модель содержит реальную рессору и амортизатор. Вертикальное перемещение упора осуществляется с помощью эксцентрика, приводимого во вращение электродвигателем. При этом вертикальное перемещение массы регистрируется вибрографом.

При физическом моделировании нет необходимости сохранять размеры объекта исследований и реальные условия его нагружения, что дает возможность получить существенный выигрыш по времени и стоимости. Однако условия моделирования выбираются не абсолютно произвольно. Между объектом-оригиналом и объектом-моделью должны быть сохранены некоторые соотношения подобия, гарантирующие возможность использования результатов моделирования для оценки свойств объекта – оригинала. Так поддрессоренная масса модели должна выбираться путем масштабирования.

Физическое моделирование имеет ограниченную сферу применения. Заведомо более широкими возможностями обладает математическое моделирование. Под *математическим моделированием* понимают способ исследования объектов, имеющих *различную физическую природу*, но описываемых *одинаковыми математическими соотношениями*.

Рассмотрим возмущенное движение поддрессоренной части физической модели, представленной на рис.1.1. Используя принцип Даламбера, согласно

которому сила инерции, действующая на объект, уравновешивается внешними силами, действующими на тот же объект, запишем условия динамического равновесия поддрессоренной массы

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = f_a(t) + f_p(t) + f(t), \quad (1.1)$$

где m - масса поддрессоренной части; $z(t)$ - координата, характеризующая вертикальное перемещение поддрессоренной части физической модели; $f_a(t)$, $f_p(t)$ - усилия действующие на поддрессоренную часть модели со стороны амортизатора и рессоры; $f(t)$ - усилие, действующее на систему поддрессоривания через упор со стороны эксцентрика.

Усилие, действующее на поддрессоренную часть модели со стороны амортизатора пропорционально скорости перемещения поддрессоренной части и направлено в сторону, противоположную ее перемещению, следовательно,

$$f_a(t) = -\xi \frac{dz(t)}{dt}. \quad (1.2)$$

Усилие, действующее на поддрессоренную часть физической модели со стороны рессоры, пропорционально перемещению поддрессоренной части и направлено в сторону, противоположную перемещению

$$f_p(t) = -cz(t). \quad (1.3)$$

Величина ξ в соотношении (1.2) называется коэффициентом демпфирования амортизатора, а величина c в соотношении (1.3) – коэффициентом жесткости рессоры.

Внешнее возмущение $f(t)$, передаваемое через упор на систему поддрессоривания, изменяется по гармоническому закону при постоянной угловой скорости ротора электродвигателя ω_0

$$f(t) = H \sin \omega_0 t. \quad (1.4)$$

Подставим соотношения (1.2), (1.3) и (1.4) в уравнение (1.1):

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \xi \frac{dz(t)}{dt} + cz(t) = H \sin \omega_0 t. \quad (1.5)$$

Обе части уравнения (1.5) разделим на коэффициент при старшей производной

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{\xi}{m} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{c}{m} z(t) = \frac{H}{m} \sin \omega_0 t \quad (1.6)$$

и введем обозначения

$$\frac{\xi}{m} = 2n; \quad \frac{c}{m} = k^2; \quad \frac{H}{m} = h.$$

Тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2n \frac{dz(t)}{dt} + k^2 z(t) = h \sin \omega_0 t. \quad (1.7)$$

Рассмотрим электрическую систему, представленную на рис.1.2.

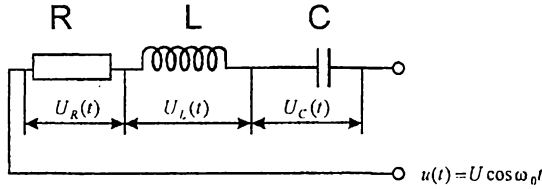


Рис.1.2 - Электрическая колебательная система.

Последовательно соединенные активное сопротивление, индуктивность и емкость включены в цепь переменного тока постоянной частоты $\omega_0(t)$.

Падение напряжения на каждом из элементов обозначим соответственно через $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$. Условие динамического равновесия электрической системы имеет следующий вид:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = U \cos \omega_0(t). \quad (1.8)$$

Падение напряжения на активном сопротивлении R составляет

$$u_R(t) = RI(t), \quad (1.9)$$

где $I(t)$ - мгновенная сила тока в электрической цепи.

Падение напряжения на катушке индуктивности равно

$$u_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}, \quad (1.10)$$

а падение напряжения на конденсаторе составляет

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt. \quad (1.11)$$

Подставим соотношения (1.9), (1.10) и (1.11) в уравнение (1.8):

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = U \cos \omega_0 t. \quad (1.12)$$

Продифференцируем обе части уравнения (1.12) по времени:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -U \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (1.13)$$

Разделим обе части уравнения (1.13) на L :

$$\frac{dI^2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = -\frac{U\omega_0}{L} \sin \omega_0 t, \quad (1.14)$$

и введем обозначения

$$\frac{R}{L} = 2n, \quad \frac{1}{LC} = k^2, \quad -\frac{U\omega_0}{L} = h,$$

с учетом которых уравнение (1.14) принимает вид

$$\frac{dI^2(t)}{dt^2} + 2n \frac{dI(t)}{dt} + k^2 I(t) = h \sin \omega_0 t. \quad (1.15)$$

Дифференциальные уравнения (1.7) и (1.15) совпадают, хотя и описывают различные по своей природе физические объекты. Отсюда следует, что закономерности, свойственные механической колебательной системе, представленной на рис.1.1, можно изучать на электрической модели, представленной на рис.1.2.

При изучении любого объекта методом математического моделирования необходимо в первую очередь построить его математическое описание или его *математическую модель*. В простейших случаях, как рассмотренный выше, математическая модель позволяет для данного объекта-оригинала подобрать удобную физическую объект-модель, а также установить соотношения подобия, связывающие их параметры. Для рассматриваемой задачи эти соотношения подобия принимают вид:

$$\frac{\xi}{m} = \frac{R}{L}; \quad \frac{c}{m} = \frac{1}{LC}; \quad \frac{H}{m} = -\frac{U\omega_0}{L},$$

из которых можно получить следующие уравнения связи:

$$m = \frac{LH}{U\omega_0}; \quad \xi = \frac{RH}{U\omega_0}; \quad c = \frac{H}{CU\omega_0}.$$

1.2 Идентификация математических моделей

Основным требованием, предъявляемым к математической модели объекта, является ее адекватность объекту. Для отыскания значений параметров математической модели объекта часто приходится решать задачу идентификации математической модели.

Рассмотрим математическую модель, описывающую систему поддрессирования автомобиля (1.7). Уравнение (1.7) в том случае адекватно физической

модели, представленной на рис.1.1, если известны точные значения коэффициентов n и k . Если отыскание коэффициента жесткости рессоры c , связанного с величиной k соотношением $\frac{c}{m} = k^2$, не представляет особых затруднений, то отыскание значения коэффициента демпфирования амортизатора ξ , связанного с величиной n формулой $\frac{\xi}{m} = 2n$, может стать проблематичным. В этой связи рассмотрим задачу идентификации коэффициента n математической модели (1.7), соответствующей физической модели на рис.1.1.

Зададим частоту вращения ротора электродвигателя равную ω_0^1 . Выждав время, необходимое для затухания переходных процессов, измерим амплитуду гармонического сигнала $z(t)$, описывающего вынужденные колебания подрессоренной части физической модели. Учитывая, что

$$z(t) = z(\omega_0^1) \sin[\omega_0^1 t + \psi(\omega_0^1)],$$

где $\psi(\omega_0^1)$ - фазовый сдвиг выходного сигнала физической модели относительно входного, найдем отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала при частоте входного сигнала ω_0^1 :

$$M_0(\omega_0^1) = \frac{z(\omega_0^1)}{h}. \quad (1.16)$$

Задавая различные значения частоты входного сигнала ω_0^j ($j = 1, \dots, l$) с помощью соотношения (1.16) найдем l значений величины $M_0(\omega_0^j)$ ($j = 1, \dots, l$). Нанесем эти значения на координатную плоскость (M, ω_0) . Соединяя нанесенные точки плавной кривой, получим амплитудно-частотную характеристику физической модели (рис.1.3).

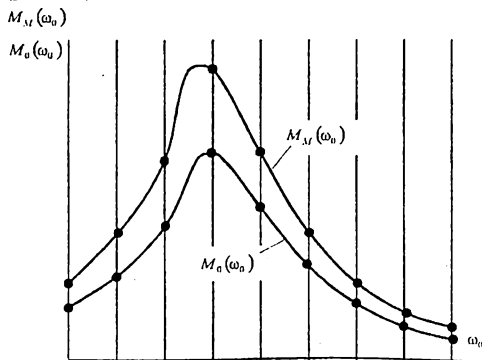


Рис. 1.3 - Амплитудно-частотные характеристики физической и математической моделей системы поддрессоривания.

Построим теперь амплитудно-частотную характеристику математической модели (1.7). Уравнение (1.7) запишем в операторной форме

$$(p^2 + 2np + k^2)z(t) = h \sin \omega_0 t. \quad (1.17)$$

Преобразуем уравнение (1.17) по Лапласу:

$$(s^2 + 2ns + k^2)z(s) = hL\{\sin \omega_0 t\},$$

тогда передаточная функция математической модели (1.7) записывается в виде

$$W(s) = \frac{h}{s^2 + 2ns + k^2}. \quad (1.18)$$

Для построения амплитудно-частотной характеристики математической модели (1.7) в соотношении (1.18) произведем замену $s = j\omega_0$, где j - мнимая единица. В результате получаем выражение для частотной передаточной функции

$$W(j\omega_0) = \frac{h}{(k^2 - \omega_0^2) + 2j\omega_0 n}. \quad (1.19)$$

Избавимся от комплексной величины в знаменателе (1.19) для чего умножим числитель и знаменатель на сопряженную комплексную величину

$$W(j\omega_0) = \frac{h[(k^2 - \omega_0^2) - 2j\omega_0 n]}{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 n^2}. \quad (1.20)$$

Представим частотную передаточную функцию в виде суммы действительной и мнимой части

$$W(j\omega_0) = U(\omega_0) + jV(\omega_0). \quad (1.21)$$

Из сравнения (1.20) и (1.21) получаем

$$U(\omega_0) = \frac{h(k^2 - \omega_0^2)}{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 n^2}, \quad (1.22)$$

$$V(\omega_0) = -j \frac{2h\omega_0 n}{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 n^2}. \quad (1.23)$$

Амплитудно-частотная характеристика математической модели (1.7) определяется зависимостью

$$M_u(\omega_0) = \sqrt{U^2(\omega_0) + V^2(\omega_0)} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 n^2}}. \quad (1.24)$$

С помощью соотношения (1.24) построим в плоскости (M, ω) амплитудно-частотную характеристику (1.24)

Характеристики $M_0(\omega_0)$ и $M_m(\omega_0)$ не совпадают друг с другом, так как нам неизвестно точное значение величины n . Для идентификации этой величины сформируем функцию невязок

$$I(n) = \sum_{j=1}^l [M_0(\omega'_j) - M_m(\omega'_j)]^2, \quad (1.25)$$

представляющую собой сумму квадратов несовпадений в опорных точках ω'_j амплитудно-частотных характеристик физической и математической моделей. Построим зависимость функции (1.25) от идентифицируемого параметра n (рис.1.4).

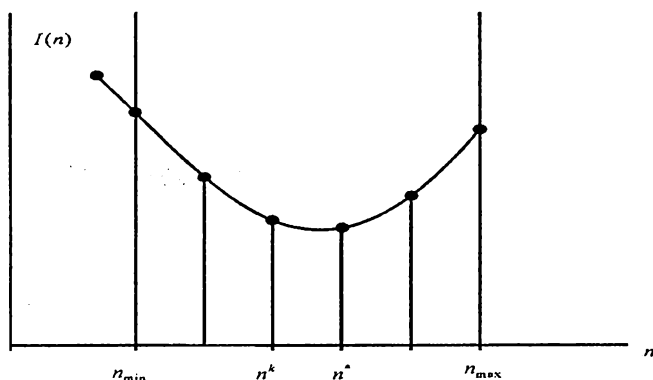


Рис. 1.4 - К идентификации математической модели.

Разумеется, для каждой точки $n = n^k$ требуется строить амплитудно-частотную характеристику математической модели (1.7) и вычислять функцию невязок (1.25). Минимум функции (1.25) соответствует значению идентифицируемого параметра $n = n^*$.

1.3 Аналитическое исследование объектов с помощью математических моделей

Если математическая модель объекта допускает аналитическое решение, то оно может быть использовано для оценки характеристик объекта.

Рассмотрим математическую модель (1.7). Общее решение дифференциального уравнения (1.7) может быть представлено как сумма общего решения однородного уравнения без правой части

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2n \frac{dz(t)}{dt} + k^2 z(t) = 0 \quad (1.26)$$

и частного решения уравнения (1.7) с правой частью. Отыщем решение уравнения (1.26), для чего запишем его в операторной форме

$$(p^2 + 2np + k^2)z(t) = 0. \quad (1.27)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (1.27), запишем в виде

$$p^2 + 2np + k^2 = 0. \quad (1.28)$$

Отыщем корни характеристического уравнения (1.28):

$$p_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (1.29)$$

Обычно $n^2 < k^2$, следовательно

$$p_{1,2} = -n \pm j\sqrt{k^2 - n^2},$$

т.е. корни характеристического уравнения (1.28) комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения (1.26) равно

$$z_1(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}, \quad (1.30)$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные, определяемые начальными условиями $z_1(0)$ и $\dot{z}_1(0)$.

Подставим в формулу (1.30) значения корней p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= c_1 e^{-n t} e^{j\sqrt{k^2 - n^2} t} + c_2 e^{-n t} e^{-j\sqrt{k^2 - n^2} t} = e^{-n t} \left[c_1 e^{j\sqrt{k^2 - n^2} t} + c_2 e^{-j\sqrt{k^2 - n^2} t} \right] = \\ &= e^{-n t} \left[c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Продифференцируем по времени соотношение (1.31):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -n e^{-n t} \left[c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] + \\ &+ e^{-n t} \left[-c_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right] = \\ &= e^{-n t} \left[(-n c_1 + c_2 \sqrt{k^2 - n^2}) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + (-n c_2 - c_1 \sqrt{k^2 - n^2}) \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

В соотношениях (1.31) и (1.32) положим $t = 0$:

$$z_1(0) = c_1, \quad (1.33)$$

$$\dot{z}_1(0) = -n c_1 + c_2 \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (1.34)$$

Подставляя (1.33) в (1.34) находим

$$c_2 = \frac{\dot{z}_1(0) + n z_1(0)}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1.26) записывается в виде

$$z_1(t) = e^{-nt} \left[z_1(0) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{\dot{z}_1(0) + n z_1(0)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right]. \quad (1.35)$$

Частное решение $z_2(t)$ неоднородного дифференциального уравнения (1.7) будем искать в виде

$$z_2(t) = A(\omega_0) \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)], \quad (1.36)$$

где $\varphi(\omega_0)$ - фазовый сдвиг выходного сигнала $z_2(t)$ относительно входного $h \sin \omega_0 t$.

Подставим (1.36) в уравнение (1.7):

$$-A(\omega_0) \omega_0^2 \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] + 2nA(\omega_0) \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] + k^2 A(\omega_0) \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] = h \sin \omega_0 t \quad (1.37)$$

Правую часть соотношения (1.37) представим в виде

$$\begin{aligned} \sin \omega_0 t &= \sin\{\omega_0 t + \varphi(\omega_0) - \varphi(\omega_0)\} = \\ &= \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \cos \varphi(\omega_0) - \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \sin \varphi(\omega_0) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Подставим (1.38) в правую часть (1.37) и приравняем коэффициенты при $\sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$ и $\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$:

$$A(\omega_0)(k^2 - \omega_0^2) = h \cos \varphi(\omega_0), \quad (1.39)$$

$$A(\omega_0) 2n \omega_0 = -h \sin \varphi(\omega_0). \quad (1.40)$$

Возведем обе части соотношений (1.39) и (1.40) в квадрат и сложим

$$A^2(\omega_0) [(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2 \omega_0^2] = h^2. \quad (1.41)$$

Из (1.41) получаем

$$A(\omega_0) = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2 \omega_0^2}}. \quad (1.42)$$

Разделив уравнение (1.40) на (1.39), имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega_0) = -\frac{2n\omega_0}{k^2 - \omega_0^2}. \quad (1.43)$$

Из соотношения (1.43) следует, что фазовый сдвиг выходного сигнала $z_2(t)$ относительно входного $h \sin \omega_0 t$ отрицательный, т.е. имеет место фазовое запаздывание выходного сигнала относительно входного.

Теперь запишем общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1.7):

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = e^{-nt} \left[z_1(0) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{\dot{z}_1(0) + n z_1(0)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - n^2)^2 + 4n^2 \omega_0^2}} \sin \left[\omega_0 t - \frac{2n \omega_0}{k^2 - \omega_0^2} \right] \quad (1.44)$$

Первое слагаемое решения (1.44) соответствует свободным колебаниям поддрессоренной части физической модели. Эти колебания являются затухающими, так что спустя более или менее продолжительный промежуток времени ими можно будет вообще пренебречь и считать, что в дальнейшем движении система совершает чисто вынужденные колебания

$$z(t) = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - n^2)^2 + 4n^2 \omega_0^2}} \sin \left[\omega_0 t - \frac{2n \omega_0}{k^2 - \omega_0^2} \right] \quad (1.45)$$

с частотой внешнего воздействия ω_0 . На рис.1.5 представлен общий ход установления вынужденных колебаний.

Определим частоту возмущающего воздействия, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Для этого отыщем производную выражения (1.42) по ω_0 и результат дифференцирования приравняем нулю:

$$\frac{\partial A(\omega_0)}{\partial \omega_0} = - \frac{h}{(k^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2 \omega_0^2} [-4(k^2 - \omega_0^2)\omega_0 + 8n^2 \omega_0] = 0. \quad (1.46)$$

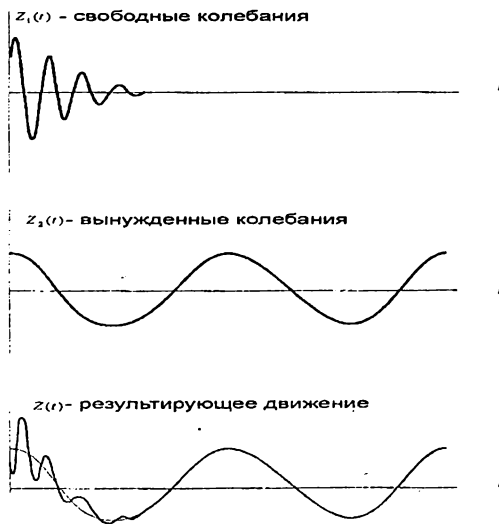


Рис. 1.5 - Колебания поддрессоренной части физической модели.

Приравняв нулю выражение в квадратных скобках, имеем

$$-(k^2 - \omega_0^2) + 2n^2 = 0. \quad (1.47)$$

В результате из (1.47) получаем:

$$\omega_0^2 = k^2 - 2n^2. \quad (1.48)$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний подрессоренной части физической модели достигает максимума не при резонансной частоте, когда частота собственных колебаний совпадает с частотой возмущающего воздействия $k = \omega_0$, а до наступления резонанса, когда $\omega_0 < k$ (рис.1.6).

При отсутствии амортизатора $\xi = 0$; $n = 0$ максимальная амплитуда соответствует резонансной частоте $k = \omega_0$. При этом амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности, что может привести к разрушению конструкции.

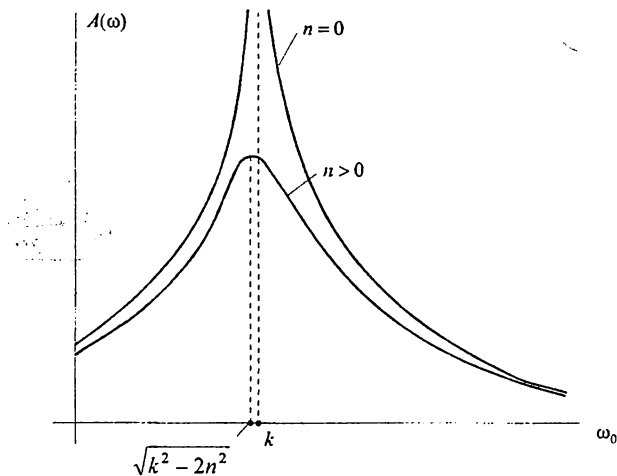


Рис.1.6. Резонансный режим физической модели.

1.4 Исследование объектов численными методами

Исследование объектов аналитическими методами обычно является настолько полным решением задачи, что к аналитическому исследованию объектов стремятся в первую очередь. Однако воспользоваться аналитическим исследованием удастся сравнительно редко, так как преобразование математической модели в систему уравнений, допускающую аналитическое решение, является трудной задачей, а для сложных объектов эти трудности часто оказываются не-

преодолимыми. Тем не менее использование аналитических методов столь заманчиво, что при решении многих прикладных и теоретических задач идут на умышленное отступление от первоначальной модели, на упрощение и огрубление ее ради возможности получить хотя бы упрощенное решение задачи.

Типичным примером такого упрощения реальной картины явлений может служить предположение о пропорциональности сил, действующих на подпрессоренную часть физической модели, представленной на рис.1.1, со стороны амортизатора и со стороны рессоры, соответственно скорости перемещения и перемещению. В действительности соотношения (1.2) и (1.3) носят более сложный характер. В амортизаторах имеет место сухое трение, поэтому его характеристика имеет нелинейную зависимость от скорости перемещения, представленную на рис.1.7.

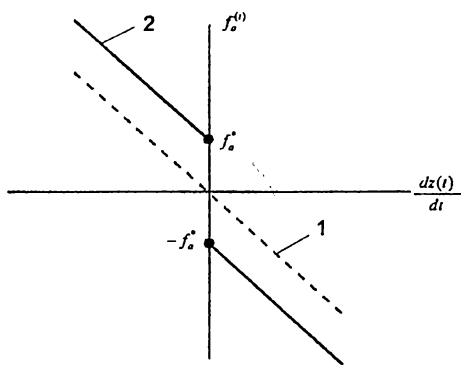


Рис.1.7 - Статическая характеристика амортизатора: 1 – соотношение (1.2); 2 – соотношение (1.49).

В соответствии с рис.1.7, сила сопротивления амортизатора определяется формулой

$$f_a(t) = \begin{cases} -f_a^* - \xi \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} > 0; \\ f_a^* - \xi \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} < 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

При аналитическом исследовании эффектом сухого трения в амортизаторе пренебрегают, так как получение решения нелинейного дифференциального уравнения в аналитической форме невозможно.

Нелинейную зависимость имеет также сила, действующая на подпрессоренную часть модели со стороны рессоры. Эта зависимость имеет вид

$$f_p(t) = -cz(t) - c_1 z^3(t) \quad (1.50)$$

и представлена на рис.1.8.

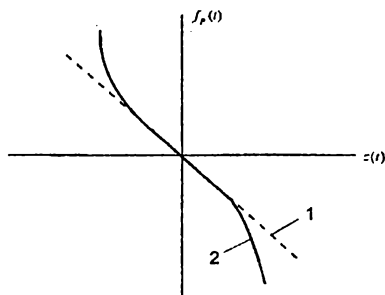


Рис.1.8 - Статическая характеристика рессоры: 1- соотношение (1.3); 2 – соотношение (1.50).

Нелинейные зависимости (1.49) и (1.50) сознательно были нами упрощены и представлены в виде линейных зависимостей (1.2) и (1.3), т.е. дифференциальное уравнение (1.1) было линеаризовано и представлено в виде линейного дифференциального уравнения (1.5). Линеаризация позволяет получить многие полезные выводы и рекомендации, но дает искаженную картину поведения реального объекта. Так, при малых значениях величин f_s^* и c_1 решение линеаризованного дифференциального уравнения (1.5) дает приближенное представление о поведении реального объекта. Однако с увеличением этих величин линеаризация приводит к недопустимо грубым результатам и от аналитического метода исследований приходится отказываться.

Более широкую сферу применения имеет исследование объектов с помощью численных методов. Содержание работы при численном исследовании объектов остается в основном таким же, как и при использовании аналитических методов. Разница заключается в том, что после выполнения наиболее трудной части работы – составления математической модели объекта – необходимо с использованием вычислительной техники произвести расчеты – реализовать соответствующий численный метод.

Класс уравнений, которые могут быть решены приближенно численными методами, значительно шире, чем класс уравнений, доступных аналитическому исследованию. Вместе с тем решение задач при использовании численных методов бывает обычно менее полным по сравнению с аналитическим исследованием и ограничивается анализом небольшого числа частных реализаций процесса.

С учетом формул (1.49) и (1.50) дифференциальное уравнение возмущенного движения подрессоренной части физической модели принимает вид:

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \begin{cases} f_a^* + \xi \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} > 0 \\ -f_a^* + \xi \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} < 0 \end{cases} + cz(t) + c_1 z^3(t) = H \sin \omega_0 t. \quad (1.51)$$

Приведем нелинейное дифференциальное уравнение (1.51) к нормальной форме Коши, для чего разрешим его относительно старшей производной

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \begin{cases} -\frac{f_a^*}{m} - \frac{\xi}{m} \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} > 0 \\ \frac{f_a^*}{m} - \frac{\xi}{m} \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} < 0 \end{cases} - \frac{c}{m} z(t) - \frac{c_1}{m} z^3(t) + \frac{H}{m} \sin \omega_0 t. \quad (1.52)$$

Если в (1.51) положить $f_a^* = 0$ и $c_1 = 0$, то уравнение (1.51) вырождается в уравнение (1.5).

Обозначим

$$\frac{f_a^*}{m} = \bar{f}_a^*; \quad \frac{c_1}{m} = k_1^2.$$

С учетом этих обозначений, а также с учетом обозначений, принятых в разделе 1.1, запишем уравнение (1.52) в виде

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \begin{cases} -\bar{f}_a^* - 2n \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} > 0 \\ \bar{f}_a^* - 2n \frac{dz(t)}{dt} & \text{при } \frac{dz(t)}{dt} < 0 \end{cases} - k^2 z(t) - k_1^2 z^3(t) + h \sin \omega_0 t. \quad (1.53)$$

В уравнении (1.53) произведем замену переменных $x_1(t) = z(t)$; $x_2(t) = \dot{z}(t)$ и представим уравнение (1.53) второго порядка в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \begin{cases} -\bar{f}_a^* - 2n x_2(t) & \text{при } x_2(t) > 0 \\ \bar{f}_a^* - 2n x_2(t) & \text{при } x_2(t) < 0 \end{cases} - k^2 x_1(t) - k_1^2 x_1^3(t) + h \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (1.54)$$

Введем вектор состояния и вектор внешних возмущений системы (1.54)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \sin \omega_0 t \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (1.54) можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)] + F(t), \quad (1.55)$$

где вектор-функция $\Phi[X(t)]$ равна

$$\Phi[X(t)] = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \begin{cases} -\bar{f}_a^* - 2n x_2(t) & \text{при } x_2(t) > 0 \\ \bar{f}_a^* - 2n x_2(t) & \text{при } x_2(t) < 0 \end{cases} - k^2 x_1(t) - k_1^2 x_1^3(t) \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнения (1.55) на ЭВМ необходимо задать вектор начальных условий

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Шаг интегрирования уравнения (1.55) выбирается автоматически при использовании программных продуктов MatCAD и MatLAB. Шаг вывода результатов интегрирования на печать необходимо выбрать после визуального анализа процесса на мониторе. Слишком крупный шаг печати может существенно исказить характер процесса, как это показано на рис.1.9.

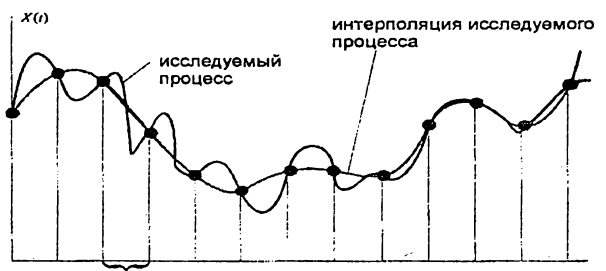


Рис.1.9 - К выбору шага печати.

Анализ рис.1.9 позволяет сделать вывод, что завышение величины шага печати может привести к искажённому представлению об исследуемом процессе, например, могут остаться неисследованными собственные высокочастотные колебания системы. Шаг печати должен быть таким, чтобы можно было составить представление о высокочастотных составляющих процесса.

1.5 Аппаратурное моделирование

В случае аппаратурного моделирования для исследования объекта используются специальные моделирующие установки, называемые аналоговыми вычислительными машинами (АВМ) или вычислительными машинами непрерывного действия.

В состав АВМ входят *вычислительные блоки*, которые делятся на *инверторы*, *сумматоры*, *интеграторы*, *сумматоры-интеграторы*, *блоки нелинейностей*, *блоки перемножения* и *блоки деления*. Основой любого вычислительного блока является *операционный усилитель* (ОУ) или усилитель постоянного тока (УПТ), представленный на рис.1.10.

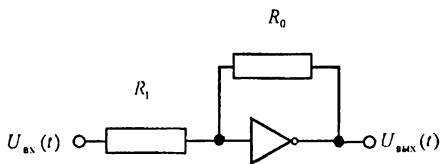


Рис. 1.10 - Операционный усилитель.

Сопротивление R_1 называется входным сопротивлением операционного усилителя, а сопротивление R_0 - сопротивлением обратной связи. Связь между выходным и входным напряжениями ОУ определяется формулой

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{R_0}{R_1} u_{\text{вх}}(t). \quad (1.56)$$

Из соотношения (1.56) видно, что ОУ инвертирует входной сигнал, т.е. изменяет его знак.

Если $R_0 = R_1$, то соотношение (1.56) принимает вид

$$u_{\text{вых}}(t) = -u_{\text{вх}}(t). \quad (1.57)$$

ОУ с одинаковыми значениями входного сопротивления и сопротивления обратной связи, имеющий коэффициент усиления равный -1 , называется **инвертором**.

Сумматор, выполненный на базе ОУ, приведен на рис.1.11.

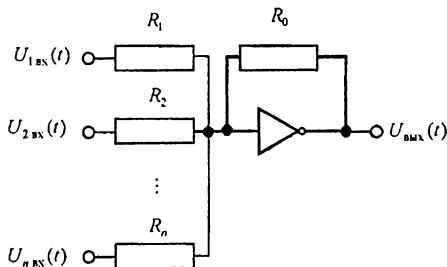


Рис. 1.11 - Сумматор.

Связь между выходным и входным напряжениями сумматора определяется формулой

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{R_0}{R_1} u_{1\text{вх}}(t) - \frac{R_0}{R_2} u_{2\text{вх}}(t) - \dots - \frac{R_0}{R_n} u_{n\text{вх}}(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i} u_{i\text{вх}}(t) = \sum_{i=1}^n k_i u_{i\text{вх}}(t). \quad (1.58)$$

Интегратор содержит конденсатор в цепи обратной связи (рис.1.12).

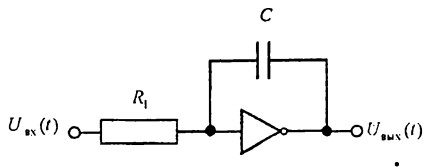


Рис.1.12 - Интегратор.

Связь между выходным и входным напряжениями интегратора задается соотношением

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt. \quad (1.59)$$

Обозначим коэффициент передачи интегратора через $k_1 = -\frac{1}{R_1 C}$, тогда

$$u_{\text{вых}}(t) = k_1 \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt. \quad (1.60)$$

Сумматор-интегратор представлен на рис.1.13.

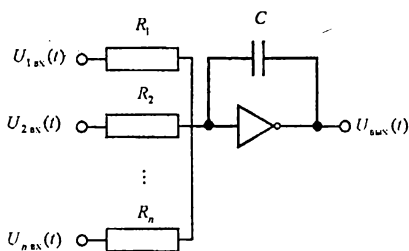


Рис.1.13 - Сумматор-интегратор.

В сумматоре-интеграторе связь между выходными и входными сигналами определяется зависимостью

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^n k_i \int_0^t u_{i\text{вх}}(t) dt, \quad (1.61)$$

где $k_i = -\frac{1}{R_i C}$.

Блок нелинейностей является функциональным преобразователем, обеспечивающим моделирование различных функций одной независимой переменной

$$u_{\text{вых}}(t) = F[u_{\text{вх}}(t)].$$

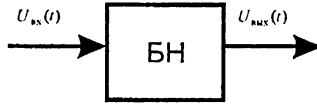


Рис. 1.14 - Блок нелинейностей.

Блок перемножения и блок деления реализуют функции

$$u_{\text{вых}}(t) = k u_{1\text{вх}}(t) u_{2\text{вх}}(t), \quad u_{\text{вых}}(t) = k \frac{u_{1\text{вх}}(t)}{u_{2\text{вх}}(t)}.$$

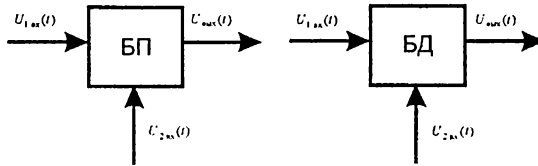


Рис. 1.15 - Блоки перемножения (БП) и деления (БД).

Основным методом составления схем набора на АВМ при моделировании обыкновенных дифференциальных уравнений является метод понижения порядка производных. Разрешим уравнение (1.7) относительно старшей производной

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -2n \frac{dz(t)}{dt} - k^2 z(t) + h \sin \omega_0 t. \quad (1.62)$$

На вход R_1 сумматора 1 подан сигнал $pz(t) = \frac{dz(t)}{dt}$, на вход R_2 - сигнал $z(t)$, а на вход R_3 - выходной сигнал блока нелинейностей БН, формирующего синусоиду. При этом, в соответствии с уравнением (1.62), на выходе сумматора 1 имеет место сигнал $p^2 z(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$, если входные коэффициенты сумматора 1 и коэффициент обратной связи выбраны в соответствии с условиями

$$\frac{R_0}{R_1} = 2n; \quad \frac{R_0}{R_2} = k^2; \quad \frac{R_0}{R_3} = h.$$

На вход интегратора 5 подается постоянный входной сигнал, пропорциональный частоте входного сигнала ω_0 . Тогда на выходе интегратора 5, соединенного со входом БН, имеет место сигнал $-\omega_0 t$, а с выхода БН на вход R_3 сумматора 1 подается синусоида $-\sin \omega_0 t$.

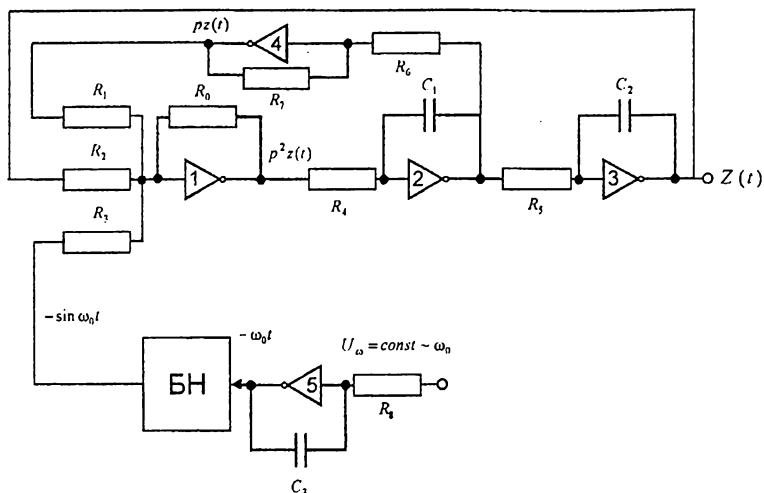


Рис. 1.16 - Схема набора на АВМ уравнения (1.62).

Интегратор 2 интегрирует сигнал $p^2z(t)$, а с его выхода сигнал $pz(t)$ через инвертор 4 подается на вход R_1 сумматора 1, а также на вход интегратора 3, выход которого связан со входом R_2 сумматора 1.

Схема моделирования, представленная на рис.1.16 может быть упрощена, если сумматор 1 и интегратор 2 объединить в виде сумматора-интегратора. Упрощенная схема приведена на рис.1.17.

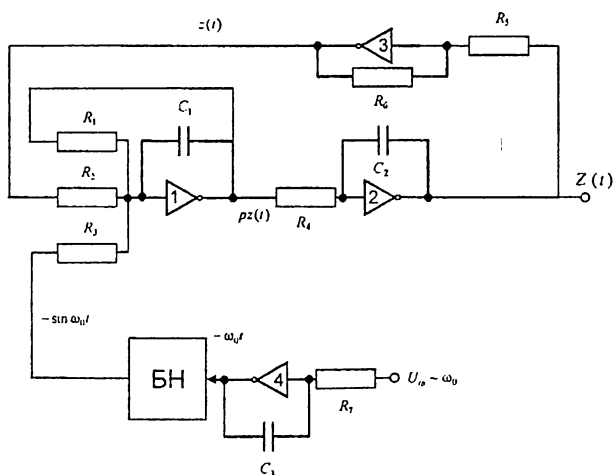


Рис. 1.17 - Упрощенная схема набора на АВМ уравнения (1.62).

Значения соответствующих сопротивлений и емкостей следует выбирать из условий:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 2n; \quad \frac{1}{R_2 C_1} = k^2; \quad \frac{1}{R_3 C_1} = h;$$

$$\frac{1}{R_4 C_2} = 1; \quad \frac{R_6}{R_5} = 1; \quad \frac{u_\omega}{R_7 C_3} = \omega_0.$$

1.6 Метод имитационного моделирования

Метод имитационного моделирования включает в себя процесс создания логико-математической модели исследуемой системы, описывающей структуру и поведение системы, а также процедуру проведения экспериментов с моделью на цифровой ЭВМ с целью получения данных о функционировании системы в заданных условиях.

В ходе имитационного моделирования исследователь имеет дело с тремя основными элементами: *реальной системой*, *имитационной моделью* и *ЭВМ*. Реальная система описывается некоторым множеством характеристик $X(t)$. Имитационная модель включает набор инструкций по изменению значений множества характеристик $X(t)$, выполнение которых позволяет воссоздать с некоторыми приближениями процесс функционирования реальной системы. Проведение экспериментов с моделью на цифровой ЭВМ, т.е. *имитация* функционирования реальной системы, заключается в проведении машинных прогонов с целью сбора, накопления и последующей обработки данных об изменении значений характеристик $X(t)$ в различных условиях функционирования.

Обратимся к физической модели системы подпрессоривания автомобиля, приведенной на рис.1.1. Внешнее воздействие на подпрессоренную часть модели, передаваемое через систему подпрессоривания, формируется с помощью эксцентрика и носит гармонический характер. Однако в реальных условиях движения автомобиля на его систему подпрессоривания действует случайное воздействие, реализовать которое в физической модели невозможно. Имитация случайного внешнего воздействия возможна лишь с помощью специальной программы, реализованной в ЭВМ. Математическая модель, соответствующая рассматриваемой физической модели, имеет более общий вид, чем уравнение (1.7)

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2n \frac{dz(t)}{dt} + k^2 z(t) = f(t), \quad (1.63)$$

где $f(t)$ - случайная функция. При этом переменные $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ также являются случайными функциями. Качество системы поддрессирования автомобиля может быть количественно оценено функционалом

$$I = \int_0^T [\dot{z}^2(t) + c z^2(t)] dt, \quad (1.64)$$

где c - весовой коэффициент.

Чем меньше значение функционала (1.64), тем выше качество системы поддрессирования. В самом деле, при больших амплитудах колебаний $z(t)$ экипаж автомобиля испытывает симптомы морской болезни, а при больших значениях амплитуд величины $\dot{z}(t)$ экипаж испытывает толчки и удары. Каждая конкретная реализация случайной функции $f(t)$ приводит к различным значениям величины I . Случайные функции $z(t)$ и $\dot{z}(t)$, а также случайная величина I являются элементами множества $X(t)$

$$X(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ I \end{bmatrix}.$$

В связи с тем, что функционал (1.64) является случайной величиной, для оценки качества работы системы поддрессирования может служить среднее значение или математическое ожидание функционала (1.64)

$$\bar{I} = M \left\{ \int_0^T [\dot{z}^2(t) + c z^2(t)] dt \right\}, \quad (1.65)$$

где M - символ математического ожидания.

Одним из наиболее сложных и ответственных этапов имитационного моделирования является разработка моделирующего алгоритма. Каждый такой алгоритм представляет собой совокупность операций, выполняемых в определенной последовательности. При разработке моделирующих алгоритмов группы элементарных операций объединяют в *операторы*. Все основные операторы моделирующего алгоритма принадлежат к одному из следующих типов:

1. **Вычислительные операторы.** Вычислительные операторы объединяют совокупность элементарных операций, обеспечивающих вычисление значений каких-либо величин, например, корней характеристического уравнения (1.28). Решение этого уравнения имеет вид (1.29). Введем следующие операторы:

$$A_1 - \text{вычисление величины } n = \frac{\xi}{2m};$$

$$A_2 - \text{вычисление величины } n^2 = (n)^2;$$

$$A_3 - \text{вычисление величины } k^2 = \frac{c}{m}$$

$$A_4 - \text{вычисление величины } D^2 = n^2 - k^2;$$

P_5 - проверка условия $D^2 \geq 0$;

A_6 - вычисление действительных корней $p_{1,2} = -n \pm D$;

A_7 - вычисление комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -n \pm jD$;

$Я_8$ - окончание вычислений и выдача результатов.

Тогда операторная схема рассматриваемого алгоритма будет иметь вид

$$A_1 A_2 A_3 A_4 P_{5 \downarrow 7} A_6^8 A_7 Я_8. \quad (1.66)$$

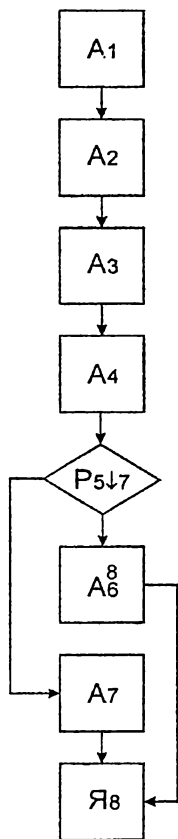


Рис. 1.18 - Блок-схема алгоритма вычисления корней характеристического уравне-

Все вычислительные операторы, реализующие описанный выше алгоритм подразделяются на *арифметические* и *логические*. Арифметические операторы производят действия, связанные с вычислениями, а логические операторы предназначены для проверки справедливости заданных условий. В наиболее простом случае проверка заданного условия может быть сведена к сравнению двух чисел. Характерным свойством логических операторов является то, что после реализации логического оператора управление передается одному из арифметических операторов.

В операторных схемах алгоритмов арифметические операторы обозначаются буквой A с соответствующим индексом A_i . Если от данного оператора управление передается не следующему по порядку $i+1$, а некоторому другому j -тому оператору, то к символу, обозначающему данный оператор, приписывается справа сверху номер того оператора, которому передается управление A_i^j .

Логические операторы в операторных схемах обозначаются с помощью буквы P с указанием номера оператора. Стрелка, поставленная справа внизу от символа логического оператора, обозначает направление передачи управления для случая, когда условие, проверяемое данным логическим оператором, оказывается невыполненным. Так, в операторной схеме (1.66) логический оператор $P_{5 \downarrow 7}$ означает, что данный логический оператор передает управление

оператору A_6 , если условие $D^2 \geq 0$ выполняется, и оператору A_7 , если это условие не выполняется. Оператор, означающий окончание вычислений, обозначают символом $Я$.

На рис.1.18 представлена блок-схема алгоритма вычисления корней характеристического уравнения (1.28).

2. Операторы формирования реализаций случайных величин. Для имитации действия различных случайных факторов, сопровождающих исследуемый объект, при имитационном моделировании возникает необходимость формировать реализации случайных событий, случайных величин, случайных функций, а иногда и случайных объектов. Исходным материалом для формирования в цифровых ЭВМ реализаций, несущих в себе элемент случайности, обычно служат *датчики случайных чисел*, вырабатываемые самой ЭВМ.

Однако случайные числа являются только исходным материалом для получения реализаций различных случайных процессов. Операторы формирования реализаций случайных процессов и решают задачу преобразования случайных чисел стандартного вида в реализации случайных процессов с заданными свойствами.

3. Операторы формирования неслучайных величин принципиально не отличаются от обычных вычислительных операторов. Однако часто оказывается удобным из всей совокупности вычислительных операторов выделять специфический тип операторов формирования неслучайных величин, например, оператор вычисления математического ожидания функционала (1.64) на основании анализа случайной величины I^j , значения которой соответствуют $j = 1...N$ реализации случайной функции $f_j(t)$. Оператор вычисления математического ожидания реализует формулу

$$\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I^j.$$

4. Счетчики служат для подсчета числа объектов, реализаций и т.д. Результаты, выдаваемые счетчиками, обычно являются исходными данными для логических операторов, обеспечивающих синхронизацию моделирующего алгоритма.

ЧАСТЬ 2. МЕТОД ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1 Моделирующие алгоритмы

Имитационное моделирование принципиально отличается от физического и аппаратного моделирования тем, что операторы, реализуемые на ЭВМ действуют *последовательно* и необходимо определенное время Δt для произведения ЭВМ необходимых вычислений. Если при аппаратном моделировании на аналоговой ЭВМ известно состояние моделируемой системы в любой текущий момент времени t , то при имитационном моделировании состояние моделируемой системы известно в отдельные дискретные моменты $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением (1.63). В соотношении (1.64) положим верхний предел интегрирования переменным и введем еще одно уравнение

$$\dot{I}(t) = z^2(t) + c z^2(t), \quad (2.1)$$

которое вместе с уравнением (1.63) описывает поведение моделируемой системы. Введем векторы состояния и возмущения

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнение 2-го порядка (1.63) может быть представлено в нормальной форме, а именно в виде двух уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -k^2 x_1(t) - 2n x_2(t) + f(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Систему (2.2) запишем в векторно-матричной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t), \quad (2.3)$$

матрица A равна

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2n \end{bmatrix}.$$

Интегрируя уравнение (2.3), получаем

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A\tau} F(t-\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где матрица

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.5)$$

называется фундаментальной матрицей состояния. Эта матрица может быть представлена в виде сходящегося бесконечного ряда (матрицанта)

$$e^{At} = E + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k. \quad (2.6)$$

При решении векторно-матричного дифференциального уравнения (2.3) с помощью цифровой ЭВМ, уравнение (2.3) заменяется разностным уравнением на интервале $[kT_0, (k+1)T_0]$, где T_0 - период квантования. Используя соотношение (2.4) можно записать

$$X[(k+1)T_0] = e^{AT_0} X[kT_0] + \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} e^{A\tau} d\tau \cdot F[kT_0]. \quad (2.7)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = \int_0^t E d\tau + \int_0^t A\tau d\tau + \frac{1}{2!} \int_0^t A^2 \tau^2 d\tau + \dots = Et + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} + \dots \quad (2.8)$$

Умножим обе части соотношения (2.8) на матрицу A

$$A \int_0^t e^{A\tau} d\tau = At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = e^{At} - E.$$

Откуда

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1} (e^{At} - E). \quad (2.9)$$

Тогда интеграл, входящий в разностное уравнение (2.7), равен

$$\Gamma(T_0) = \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} e^{A\tau} d\tau = A^{-1} (e^{AT_0} - E),$$

а разностное уравнение (2.7) принимает вид

$$X[(k+1)T_0] = e^{AT_0} X[kT_0] + \Gamma(T_0) F[kT_0]. \quad (2.10)$$

Отыскание состояния системы в момент времени $t_{i+1} = (i+1)T_0$ по ее состоянию в момент времени $t_i = iT_0$ и по значению внешнего возмущения в тот же момент времени с помощью соотношения (2.10) носит название «*принцип Δt* », причем $\Delta t = T_0$.

Так как величина периода квантования T_0 должна быть достаточно малой, чтобы не пропустить каких-либо событий, то этот метод связан со значительными затратами машинного времени. Вместе с тем при анализе процесса функционирования реальных систем можно обнаружить существенную неравноправность состояний системы. При этом можно выделить два типа состояний: *обычные (неособые) состояния*, в которых система находится почти все время, и *особые состояния*, характерные для системы в некоторые изолированные моменты времени, когда какие-либо характеристики системы выходят на границу области существования. Примером особого состояния рассматриваемой в

примерах системы подрессоривания автомобиля может служить резонансный режим, когда величина $z(t)$ достигает предельно допустимых величин (рис.2.1).

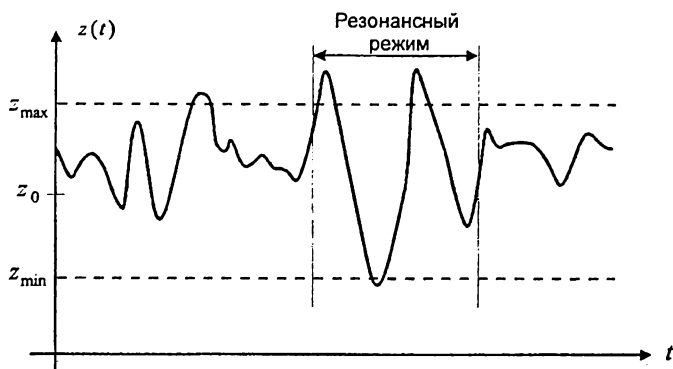


Рис.2.1 - Штатный и резонансный режимы работы системы подрессоривания автомобиля.

Заметим, что, как правило, свойства системы проявляются и оцениваются именно в моменты пребывания в особых состояниях, а неособые состояния большого интереса для исследователей не представляют. В соответствии с этим «*принцип особых состояний*» состоит в определении моментов перехода системы в особые состояния, по достижению которых происходит передача управления соответствующей программе.

2.2 Обработка результатов имитационного моделирования

Для большого количества реализаций, воспроизводимых при имитационном моделировании, объем информации о состоянии объекта может быть настолько значительным, что запоминание ее в памяти ЭВМ, обработка и последующий анализ оказываются практически невозможными, или, во всяком случае, чрезмерно трудоемкими. Поэтому необходимо таким образом организовать обработку результатов моделирования, чтобы оценки для искомых величин формировались постепенно по ходу моделирования, без запоминания всей информации о состоянии системы или объекта.

Если при имитационном моделировании системы или объекта учитываются случайные факторы, то и среди результатов моделирования присутствуют случайные величины. Так, если в правую часть дифференциального уравнения

(1.63) входит случайная функция $f(t)$, то значение функционала (1.64), вычисленное на решениях уравнения (1.63) является случайной величиной. В такой ситуации в качестве оценок для искомых величин используют математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение, полученные по результатам многократного моделирования. Это обстоятельство позволяет формировать оценки таким образом, что в памяти машины для запоминания самой оценки занимается только одна ячейка, а все остальные величины, уже использованные в данной оценке, не запоминаются.

В самом деле, пусть в качестве искомой величины фигурирует вероятность некоторого события A . В качестве оценки $\bar{p}(A)$ для искомой вероятности $p(A)$ используется частота наступления соответствующего события A при некотором количестве испытаний. Выделим специальную ячейку памяти, в которую будем записывать количество наступлений события A : если событие A наступило при воспроизведении на машине данной реализации, то к содержимому упомянутой ячейки прибавляется единица, если же оно не наступило, то прибавляется нуль. Пусть в результате воспроизведения N реализаций процесса, количество которых подсчитывается счетчиком, получено m случаев наступления события A . Тогда оценкой $\bar{p}(A)$ для вероятности $p(A)$ события A может служить величина $\bar{p}(A) = \frac{m}{N}$.

Аналогично можно подойти к оценке закона распределения случайной величины ξ . Разобьем область возможных значений случайной величины на n интервалов. В специальных ячейках будем накапливать количества m_k ($k = 1, 2, \dots, n$) попаданий случайной величины ξ в эти интервалы. Тогда оценкой для вероятности попадания случайной величины ξ в интервал с номером k служит величина $p_k = \frac{m_k}{N}$.

Если через A_k обозначить событие, состоящее в попадании случайной величины ξ на k -тый интервал, то события A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) составляют полную группу, следовательно, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Для оценки среднего значения (математического ожидания) случайной величины ξ в специальной ячейке будем накапливать сумму $\sum x_k$ возможных значений x_k случайной величины ξ , которые она принимает при различных реализациях процесса. Тогда в соответствии с теоремой Чебышева, согласно которой при достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины стремится к ее математическому ожиданию, получаем

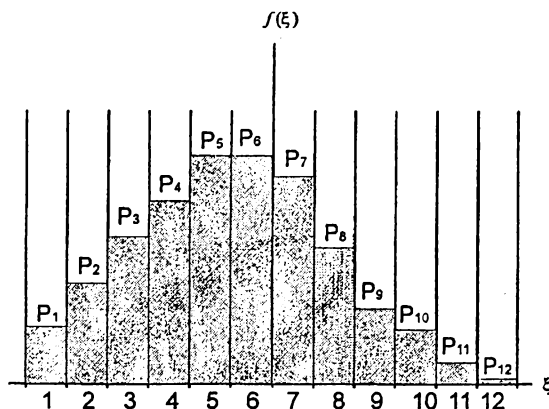


Рис.2.2 - Плотность распределения случайной величины ξ .

$$\bar{M}\{\xi\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k. \quad (2.11)$$

Из теории вероятностей известно, что при ограниченном количестве опытов N дисперсия случайной величины ξ оценивается по формуле

$$\bar{D}\{\xi\} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [x_k - \bar{M}\{\xi\}]^2. \quad (2.12)$$

Непосредственное вычисление дисперсии случайной величины ξ по формуле (2.12) неудобно, т.к. оценка математического ожидания с помощью формулы (2.11) изменяется в процессе накопления значений x_k , а это, в свою очередь, приводит к сложным подсчетам, либо требует запоминания всех N значений x_k . Более удобно можно организовать фиксацию результатов для оценки дисперсии, исходя из другого выражения для $D\{\xi\}$. Возведем выражение в квадратных скобках в квадрат:

$$\bar{D}\{\xi\} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [x_k^2 - 2x_k \bar{M}\{\xi\} + \bar{M}^2\{\xi\}]. \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.13) вместо $\bar{M}\{\xi\}$ его выражение из (2.11), получаем

$$\bar{D}\{\xi\} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{k=1}^N x_k \right)^2. \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.14) следует, что для оценки дисперсии достаточно накапливать значения $\sum_{k=1}^N x_k^2$ и $\sum_{k=1}^N x_k$.

Оценка для среднего квадратичного отклонения может быть произведена по формуле

$$\bar{\sigma}(\xi) = \sqrt{\frac{\overline{D(\xi)}}{N}}. \quad (2.15)$$

Часто искомыми величинами являются *математические ожидания* и *корреляционные функции* случайных процессов, зависящих от времени. Обычно для оценки этих характеристик случайного процесса интервал времени $[0, T]$ разбивают на отрезки Δt . Накапливая значения $X_k(t)$ реализаций случайного процесса $X(t)$ для фиксированных моментов времени t_i , можно вычислить оценки для математического ожидания и корреляционной функции по формулам

$$\bar{M}\{X(t_i)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t_i), \quad (2.16)$$

$$\bar{K}\{X(t_i), X(t_j)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N X_k(t_i) X_k(t_j) - \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N X_k(t_i) \sum_{k=1}^N X_k(t_j). \quad (2.17)$$

При $t_i = t_j$ соотношения (2.17) и (2.14) совпадают.

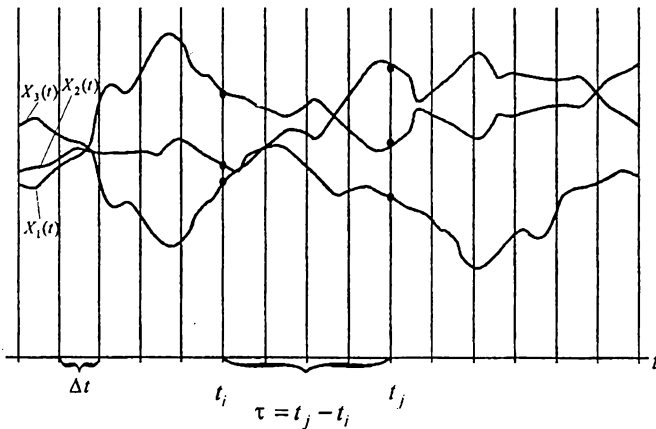


Рис.2.3 - К оценке математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса по его реализациям.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие по времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются *стационарными*. В качестве примера стационарного случайного процесса можно привести колебания поддрессоренной массы автомобиля при движении по равнинной местности с неизменными характеристиками дороги.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределенно долго. При исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, мы должны получить одни и те же его характеристики.

Для стационарных случайных процессов математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит не от моментов времени t_i и t_j , а только лишь от разности $\tau = t_j - t_i$.

Указанные свойства стационарного случайного процесса позволяют сформулировать основное его свойство – *свойство эргодичности*, а именно, *среднее по времени равно среднему по множеству наблюдений*. Это означает, что при обработке случайного стационарного процесса нет необходимости располагать несколькими реализациями процесса. Достаточно выбрать одну продолжительную реализацию $X(t)$. Из теории вероятностей известно, что в этом случае математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса определяются формулами

$$M\{X(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad (2.18)$$

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau) dt - M^2\{X(t)\}. \quad (2.19)$$

На практике интервал $(0, T)$ оказывается ограниченным и, кроме того, значения случайной функции $X(t)$ удастся определить только для конечного набора моментов времени t_i . Поэтому для оценки математического ожидания и корреляционной функции стационарного случайного процесса используют приближенные формулы

$$\bar{M}\{X(t)\} = \frac{\Delta t}{T} \sum_{i=1}^m X(t_i), \quad (2.20)$$

$$K(\tau) = \frac{\Delta t}{T} \sum_{i=1}^m X(t_i)X(t_i + \tau) - \bar{M}^2\{X(t)\}. \quad (2.21)$$

где $m = \frac{T}{\Delta t}$.

2.3 Выбор количества реализаций случайного процесса

Для обеспечения статистической устойчивости оценок случайных величин эти оценки вычисляются как средние значения по большому количеству

реализаций. Выбор количества реализаций зависит от того, какие требования предъявляются к оценкам случайных величин.

Пусть для параметра a получена из опыта некоторая статистическая оценка $\bar{a}$. Назначим некоторую достаточно большую вероятность β ($\beta = 0,95$; $\beta = 0,97$; $\beta = 0,99$), такую что событие с вероятностью β можно считать практически достоверным, и найдем такое значение ε , для которого

$$P(|\bar{a} - a| \leq \varepsilon) = \beta. \quad (2.22)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене a на $\bar{a}$ будет $\pm \varepsilon$. Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью $\alpha = 1 - \beta$.

Перепишем соотношение (2.22) в виде

$$P(\bar{a} - \varepsilon < a < \bar{a} + \varepsilon) = \beta. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра a попадет в интервал $I_\beta = (\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon)$.

Вероятность β называется *доверительной вероятностью*, а интервал I_β - *доверительным интервалом*.

Рассмотрим задачу о доверительном интервале для оценок математического ожидания и дисперсии по формулам (2.11) и (2.12). Для решения этой задачи воспользуемся тем, что величина $\bar{M}(\xi)$ представляет собой сумму n независимых случайных величин x_i и, согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом N ее закон распределения близок к нормальному. На практике даже при относительно небольшом числе слагаемых, порядка 10-20, закон распределения суммы можно приближенно считать нормальным. Будем исходить из того, что величина $\tilde{M}(\xi)$ распределена по нормальному закону. Найдем такую величину ε_β , для которой

$$P(|\tilde{M}(\xi) - M(\xi)| \leq \varepsilon_\beta) = \beta. \quad (2.24)$$

Для нормальной функции распределения

$$F(\xi) = \Phi\left(\frac{\xi - M(\xi)}{\sigma(\xi)}\right) \quad (2.25)$$

составлены таблицы, приведенные в любом учебнике по теории вероятностей. В рассматриваемом случае в качестве случайной величины ξ выбрана оценка математического ожидания, следовательно,

$$F(\bar{M}(\xi)) = \Phi\left(\frac{\bar{M}(\xi) - M(\xi)}{\sigma(\xi)}\right). \quad (2.26)$$

Из теории вероятностей известно, что

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < l\right) = 2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma(\xi)}\right) - 1. \quad (2.27)$$

Тогда из сравнения формул (2.24) и (2.27) можно записать

$$2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma(\xi)}\right) - 1 = \beta. \quad (2.28)$$

Из соотношения (2.28) получаем

$$\varepsilon_\beta = \sigma(\xi) \arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right), \quad (2.29)$$

где $\arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ - значение аргумента, при котором функция $\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma(\xi)}\right)$ равна $\frac{1+\beta}{2}$.

Введем обозначение

$$t_\beta = \arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right), \quad (2.30)$$

тогда для оценки доверительного интервала имеем

$$\varepsilon_\beta = \sigma(\xi) t_\beta, \quad (2.31)$$

причем для t_β удобно составить специальную таблицу, выражающую из формулы (2.30) зависимость t_β от β .

Формула (2.31) определяет точность оценки математического ожидания с помощью формулы (2.11) с вероятностью β . В эту формулу входит величина $\sigma(\xi)$, которая нам в точности неизвестна. В качестве ее ориентировочного значения можно воспользоваться оценкой (2.15) и записать:

$$\varepsilon_\beta = \bar{\sigma}(\xi) t_\beta. \quad (2.32)$$

Для отыскания необходимого количества реализаций в соотношение (2.32) подставим соотношение (2.15)

$$\varepsilon_\beta = \sqrt{\frac{\bar{D}(\xi)}{N}} t_\beta. \quad (2.33)$$

Возведем обе части (2.33) в квадрат $\varepsilon_\beta^2 = \frac{\bar{D}(\xi)}{N} t_\beta^2$, откуда

$$\bar{N} = \frac{\bar{D}(\xi) t_\beta^2}{\varepsilon_\beta^2}. \quad (2.34)$$

Черта над N означает, что соотношение (2.34) определяет необходимое количество реализаций, а не количество реализаций N , произведенных для оценки $\bar{M}(\xi)$ и $\bar{D}(\xi)$.

Можно указать следующий алгоритм вычисления величины N .

1. Пусть над случайной величиной ξ проведено N опытов. Используя соотношения (2.11) и (2.12) или (2.13) произведем оценку математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ .
2. Зададимся необходимой точностью оценки случайных величин $\bar{M}(\xi)$ и $\bar{D}(\xi)$, т.е. величиной ε и вероятностью β , которая означает вероятность того, что оцениваемые величины будут оценены с точностью ε_β . Вычислим величину $\frac{1+\beta}{2}$.
3. Используя таблицу значений нормальной функции распределения $\Phi^*(x)$, найдем значение x , при котором выполняется соотношение $\Phi^*(x) = \frac{1+\beta}{2}$. Это значение x обозначим через t_β .
4. С помощью формулы (2.34) найдем необходимое количество реализаций $\bar{N}$, которое нужно произвести над случайной величиной ξ , чтобы с вероятностью β обеспечить заданную точность ε_β оценки ее математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

2.4 Моделирование случайных чисел

При исследовании сложных систем методом имитационного моделирования существенное внимание уделяется учету случайных факторов. Для формализации действия этих факторов используются *случайные события, случайные величины и случайные функции*.

Под *случайным событием* понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее какое именно. Случайная величина, изменяющаяся в процессе опыта, называется *случайной функцией*.

Формирование на ЭВМ случайных событий величин и функций сводится к выработке случайных чисел.

В качестве исходной совокупности случайных чисел необходимо выбирать такую совокупность, которая может быть получена с наименьшими затратами машинного времени и обеспечивает простоту и удобство дальнейших преобразований. Обычно считают, что этим требованиям удовлетворяет совокупность случайных чисел с равномерным распределением на интервале $(0,1)$.

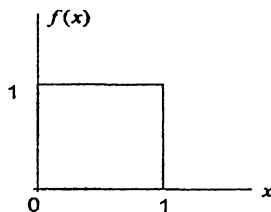


Рис.2.4 - Плотность равномерного распределения случайных чисел на интервале $(0,1)$.

Основное свойство плотности распределения, а именно $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, выполняется.

Найдем функцию распределения, соответствующую заданной плотности:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx = x. \quad (2.35)$$

В соответствии с рис.2.4 и формулой (2.35) запишем соотношения для плотности распределения и функции распределения чисел, равномерно распределенных на интервале $(0,1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Используя формулу для математического ожидания, находим

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x dx = \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (2.36)$$

Отыщем дисперсию

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}. \quad (2.37)$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (2.38)$$

На цифровой ЭВМ получить последовательность равномерно распределенных случайных чисел не представляется возможным в силу того, что число в цифровой ЭВМ не может быть представлено сколь угодно точно, а только лишь

с точностью цены младшего разряда. Числа в ЭВМ записываются в k -разрядную ячейку (рис.2.5).

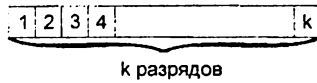


Рис.2.5 - K -разрядная ячейка ЭВМ.

Количество несовпадающих между собой чисел, каждое из которых может быть записано в k -разрядную ячейку в двоичной системе счисления, составляет не бесконечность, а число 2^k . Поэтому приходится вместо непрерывной совокупности случайных чисел с равномерным распределением использовать дискретную совокупность 2^k чисел с одинаковой вероятностью появления любого из них $P_i = \frac{1}{2^k}$.

Такое распределение иногда называют *квазиравномерным*, а случайная величина X , имеющая квазиравномерное распределение в интервале $(0,1)$, принимает значения $x_i = \frac{i}{2^k - 1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X , распределенной квазиравномерно на интервале $(0,1)$:

$$M[X] = \sum_{i=0}^{2^k-1} x_i P_i = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k - 1} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, получаем

$$M[X] = \frac{1}{2^k - 1} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{(2^k - 1)2^k}{2} = \frac{1}{2}. \quad (2.39)$$

Для определения дисперсии случайной величины X воспользуемся соотношением (2.12)

$$D(X) = \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{i=0}^{2^k-1} \left[\frac{i}{2^k - 1} - \frac{1}{2} \right]^2.$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получаем

$$D(X) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^k + 1}{2^k - 1}, \quad (2.40)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2^k + 1}{2^k - 1}}. \quad (2.41)$$

При $k \rightarrow \infty$ соотношения (2.40) и (2.41) стремятся к значениям (2.37) и (2.38) для равномерного распределения. При $k = 8, 16, 32$ разницей можно пренебречь.

2.5 Моделирование случайных событий

Пусть необходимо реализовать событие A , наступающее с заданной вероятностью p . Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение случайного числа x_i удовлетворяет неравенству

$$x_i \leq p. \quad (2.42)$$

Вероятность события A равна

$$P(A) = \int_{-\infty}^p f(x) dx = \int_0^p 1 \cdot dx = x|_0^p = p.$$

Противоположное событие $\bar{A}$ состоит в том, что x_i удовлетворяет неравенству $x_i > p$, а вероятность его равна

$$P(\bar{A}) = \int_p^1 1 \cdot dx = x|_p^1 = 1 - p.$$

Процедура моделирования рассматриваемого события состоит в выборе случайных чисел x_i и сравнении их с величиной p . Если при этом условие (2.42) выполняется, то исходом испытания будем считать событие A , если не выполняется – то событие $\bar{A}$.

Изложенные соображения могут быть обобщены на группу событий $A_1, A_2, \dots, A_S$, которые составляют полную группу событий, наступающих с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_S$. Для полной группы событий $p_1 + p_2 + \dots + p_S = 1$.

Определим событие A_m как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины X , равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} \leq x_i \leq l_m, \quad (2.43)$$

где $l_m = \sum_{i=1}^m p_i$. Тогда вероятность события A_m равна

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} 1 \cdot dx = x|_{l_{m-1}}^{l_m} = l_m - l_{m-1} = \sum_{i=1}^m p_i - \sum_{i=1}^{m-1} p_i = p_m.$$

Процедура моделирования событий в данном случае состоит в последовательном сравнении случайных чисел x_i с величиной l_m . Исходом испытаний оказывается событие A_m , если выполняется условие (2.43).

При реализации алгоритмов на ЭВМ имеется возможность пользоваться только случайными числами с квазиравномерным распределением. Пусть

$$x_i^* = \frac{i}{2^k - 1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1. \quad (2.44)$$

Моделируемое событие A^* определим как событие, состоящее в том, что

$$x_i^* \leq p. \quad (2.45)$$

Вероятность $P(A^*)$ может быть получена как отношение n чисел вида (2.44), удовлетворяющих неравенству (2.45), к количеству всех чисел вида (2.44). Как известно, $N = 2^k$. Таким образом,

$$P(A^*) = \frac{n}{2^k}. \quad (2.46)$$

Из соотношения (2.46) можно сделать следующий вывод: если вероятность p события A^* изменяется в пределах

$$\frac{n}{2^k} \leq p < \frac{n+1}{2^k}, \quad (2.47)$$

то $P(A^*) = \frac{n}{2^k}$.

Из (2.47) следует, что использование квазиравномерного распределения вместо равномерного, т.е. использование чисел x_i^* вместо x_i приводит к ошибке в определении вероятности события, не превышающей $\Delta p = \frac{1}{2^k}$.

2.6 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

Для формирования возможных значений случайных величин с заданным законом распределения используются случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0,1).

Из теории вероятностей известно, что если случайная величина Y имеет плотность распределения $f(y)$, то распределение случайной величины $X = \int_{-\infty}^y f(y) dy$ является равномерным на интервале (0,1). На основании этой теоремы можно прийти к следующему правилу.

Чтобы получить число, принадлежащее совокупности случайных чисел $\{y_i\}$, имеющих плотность распределения $f(y)$, необходимо разрешить относительно y_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{y_i} f(y) dy = x_i, \quad (2.48)$$

где x_i - число, принадлежащее совокупности чисел $\{x_i\}$, равномерно распределенных на интервале $(0,1)$.

Пусть требуется получить случайные числа y_i с показательным законом распределения

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0. \quad (2.49)$$

В силу соотношения (2.48) получаем

$$\lambda \int_0^{y_i} e^{-\lambda y} dy = x_i. \quad (2.50)$$

Вычисляя интеграл в левой части (2.50), имеем

$$-\frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^{y_i} = e^{-\lambda y} \Big|_{y_i}^0 = 1 - e^{-\lambda y_i} = x_i, \text{ или}$$

$$e^{-\lambda y_i} = 1 - x_i. \quad (2.51)$$

Логарифмируя (2.51), получаем $-\lambda y_i = \ln(1 - x_i)$, откуда

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i). \quad (2.52)$$

Если в нашем распоряжении имеются случайные числа x_i с равномерным распределением в интервале $(0,1)$, то воспользовавшись формулой (2.52), можно получить последовательность случайных чисел y_i , имеющих показательное распределение (2.49).

Рассмотрим рэлеевский закон распределения с плотностью распределения

$$f(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.53)$$

Подставим (2.53) в (2.48)

$$f(y) = \int_0^{y_i} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = x_i. \quad (2.54)$$

Вычисляя интеграл в левой части (2.54) получаем $-e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{y_i} = 1 - e^{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}} = x_i,$

или

$$e^{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}} = 1 - x_i, \quad (2.55)$$

Логарифмируя (2.55), имеем $-\frac{y_i^2}{2\sigma^2} = \ln(1 - x_i)$, откуда

$$y_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - x_i)}.$$

Нужно иметь в виду, что в большинстве случаев уравнение (2.48) невозможно решить точно. В связи с этим на практике широко используют приближенные методы получения чисел, распределенных в соответствии с заданным законом. Одним из них является метод Неймана.

Предположим, что случайная величина Y имеет плотность распределения $f(y)$ на конечном интервале (a, b) . Так как плотность распределения ограничена сверху (рис.2.6), то можно ввести нормированную плотность распределения

$$f^*(y) = \frac{f(y)}{f_{\max}}. \quad (2.56)$$

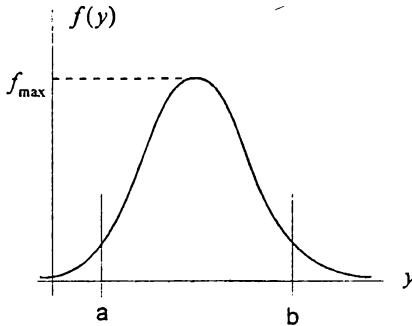


Рис.2.6 - Кривая плотности распределения случайной величины Y .

При этом график функции $f^*(y)$ окажется вписанным в прямоугольник с координатами $(a, 0), (a, 1), (b, 1), (b, 0)$, (рис.2.7).

Выберем число x_i из равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$ последовательности $\{x_i\}$. При этом пара чисел

$$y_i = a + (b - a)x_i, \quad (2.57)$$

и x_i определяют случайную точку $M_i(y_i, x_i)$ в указанном прямоугольнике. Если выполняется неравенство $x_i \leq f^*(y_i)$, т.е. точка M_i находится под кривой нормированной плотности распределения, то число y_i , вычисляемое из формулы (2.57) считается числом последовательности $\{y_i\}$. Если же это неравенство не

выполняется, то число y_i отбрасывается и формируется новое число x_i . Закон распределения отобранных таким образом чисел y_i соответствует плотности распределения $f(y)$.

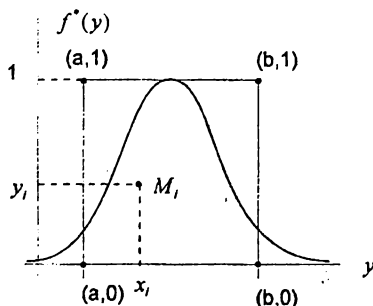


Рис.2.7 - Нормированная плотность распределения случайной величины Y .

2.7 Формирование реализаций случайных функций

Рассмотрим физическую модель движения автомобиля по неровностям, представленную на рис.1.1. Эта модель может быть использована для исследования резонансных свойств подвески. Внешние воздействия на колеса в рассматриваемой модели носят синусоидальный характер $f(t) = h \sin \omega_0 t$.

В реальных дорожных условиях расположение неровностей имеет случайный характер. При этом случайные колебательные процессы автомобиля можно рассматривать как стационарные, протекающие во времени относительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний около некоторого среднего значения z_0 , которое представляет собой положение центра масс поддрессоренной части автомобиля, расположенного на горизонтальной плоскости.

Корреляционная функция случайных неровностей дороги может быть описана следующей аппроксимирующей зависимостью:

$$k(\tau) = D e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta V \tau, \quad (2.58)$$

где D - дисперсия высот неровностей дороги; V - скорость движения автомобиля; α, β - коэффициенты корреляции. Численные значения коэффициентов корреляции зависят от дорожных покрытий и лежат в пределах $\alpha = 0,2 - 0,5$; $\beta = 0,45 - 0,95$.

Связь между спектральной плотностью случайного процесса и его корреляционной функцией определяется преобразованием Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (2.59)$$

Подставляя (2.58) в (2.59), получаем

$$S(\omega) = D \left\{ \frac{2\alpha V(\alpha^2 V^2 + \beta^2 V^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2\omega^2 V^2(\alpha^2 - \beta^2) + V^4(\alpha^2 + \beta^2)} \right\}. \quad (2.60)$$

Примерный вид спектральной плотности случайного профиля дороги приведен на рис.2.8.

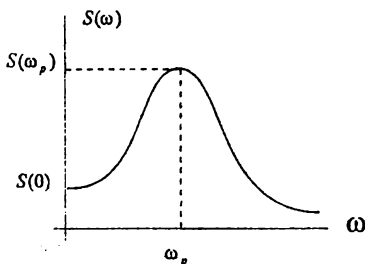


Рис.2.8 - Кривая спектральной плотности случайного профиля дороги.

Известно, что спектральные плотности входного и выходного сигналов линейной стационарной системы связаны между собой соотношением

$$S_y(\omega) = M^2(\omega) S_x(\omega), \quad (2.61)$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность входного сигнала; $S_y(\omega)$ - спектральная плотность выходного сигнала; $M(\omega)$ - амплитудно-частотная характеристика системы.

Предположим, что входной сигнал представляет собой некоррелированный белый шум, спектральная плотность которого постоянна

$$x(t) = \xi(t); \quad S_\xi(\omega) = S_\xi(0) = q_\xi, \quad (2.62)$$

где величина q_ξ называется интенсивностью белого шума. Предположим также, что спектральная плотность выходного сигнала имеет вид, представленный на рис.2.8. Тогда можно сделать вывод о том, что линейная стационарная система является колебательной с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}, \quad (2.63)$$

где k - коэффициент усиления, T_1, T_2 - постоянные времени системы.

Подставим в (2.63) $s = j\omega$. В результате получаем

$$M^2(\omega) = \frac{k^2}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2}. \quad (2.64)$$

С учетом соотношений (2.61) и (2.62) имеем

$$S_y(\omega) = \frac{k^2 q_z}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2}. \quad (2.65)$$

Полагая в (2.65) $\omega = 0$, получаем

$$S_y(0) = k^2 q_z. \quad (2.66)$$

Предположим, что интенсивности входного и выходного сигналов системы одинаковы: $q_z = q_y = S_y(0)$. Тогда из соотношения (2.66) следует $k = 1$. Постоянные времени T_1, T_2 могут быть определены из соотношений:

$$1 - \omega_p^2 T_1^2 = 0, \quad (2.67)$$

$$S_y(\omega_p) = \frac{q_z}{\omega_p^2 T_2^2}. \quad (2.68)$$

Действительно, в резонансной точке обращается в нуль выражение в скобках спектральной плотности (2.65), что соответствует записи (2.67). В этой же точке значение спектральной плотности составляет $S_y(\omega_p)$, что соответствует записи (2.68). Тогда из соотношений (2.67) и (2.68) имеем:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_p}; \quad T_2 = \frac{1}{\omega_p} \sqrt{\frac{q_z}{S_y(\omega_p)}}.$$

Если линейная стационарная система имеет передаточную функцию (2.63), то ее динамика описывается дифференциальным уравнением

$$T_1^2 \ddot{y}(t) + T_2 \dot{y}(t) + y(t) = \xi(t). \quad (2.69)$$

Формируя с помощью датчика случайных чисел и генератора белого шума процесс $\xi(t)$ и решая дифференциальное уравнение (2.69) при начальных условиях $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, получаем случайный процесс $y(t)$, представляющий собой воздействие микропрофиля дороги на колесо автомобиля $y(t) = f(t)$.

Запишем совместно уравнения (1.63) и (2.69)

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + 2n\dot{z}(t) + k^2 z(t) &= y(t), \\ T_1^2 \ddot{y}(t) + T_2 \dot{y}(t) + y(t) &= \xi(t). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Теперь можно сделать следующий вывод: объект, описываемый уравнением (1.63) со случайной функцией $f(t)$ на входе статистически эквивалентен объекту, описываемому уравнениями (2.70) с белым шумом $\xi(t)$ на входе.

Рассмотрим алгоритм формирования на ЭВМ белого шума $\xi(t)$. В связи с тем, что в цифровой ЭВМ невозможно сформировать непрерывный сигнал, будем имитировать непрерывную функцию $\xi(t)$ последовательностью чисел, нормально распределенных на интервале $(-1,+1)$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Возьмем последовательность чисел $\{x_i\}$, равномерно распределенных на интервале $(0,1)$ и описываемых соотношением (2.44). Введем последовательность $\{\alpha_i\}$, определяемую формулой

$$\alpha_i = 2x_i - 1. \quad (2.71)$$

Понятно, что последовательность (2.71) равномерно распределена на интервале $(-1,+1)$.

Введем также случайную величину

$$\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n (2x_i - 1). \quad (2.72)$$

В соответствии с центральной предельной теоремой при достаточно большом n случайная величина β распределена по нормальному закону с параметрами

$$M(\beta) = M\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\right] = \sum_{i=1}^n M[\alpha_i], \quad (2.73)$$

$$D(\beta) = D\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\right] = \sum_{i=1}^n D[\alpha_i]. \quad (2.74)$$

Математическое ожидание равномерно распределенных в интервале $(-1,+1)$ чисел может быть вычислено с помощью формулы (2.36)

$$M\{\alpha_i\} = \int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

следовательно, $M[\beta] = 0$.

Аналогично можно получить для дисперсии

$$D\{\alpha_i\} = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}. \quad (2.75)$$

Подставляя (2.75) в (2.74), получаем $D[\beta] = \frac{2n}{3}$.

Занормируем случайную величину β , введя в рассмотрение случайную величину $\xi = \frac{1}{\sigma[\beta]} \beta$. Случайная величина ξ нормально распределена и имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Случайные числа ξ определяются соотношениями

$$\xi_i = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1). \quad (2.76)$$

Экспериментально установлено, что при $n \geq 8$ формула (2.76) дает хорошие результаты. Если в (2.76) положить $n = 12$, то соотношение (2.76) упрощается

$$\xi_i = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6. \quad (2.77)$$

Последовательность (2.77) имитирует белый шум $\xi(t)$.

2.8 Критерий Пирсона

При моделировании случайных чисел, событий и случайных величин требуется осуществить проверку принятой гипотезы о том, что случайные числа равномерно распределены на заданном интервале $[0,1]$, случайное событие состоит в попадании случайного числа в заданный интервал, а случайная величина распределена в соответствии с заданным законом. В тех случаях, когда уравнение (2.48) можно решить точно, например, для показательного (2.49) или рэлеевского (2.53) законов распределения, то вопрос проверки отпадает. В случае же использования приближенных методов, например, метода Неймана, необходима проверка правдоподобия гипотезы о соответствии полученных величин заданному закону распределения. Этот закон может быть задан в виде функции распределения $F(x)$, плотности распределения $f(x)$, или же в виде совокупности вероятностей p_i , где p_i - вероятность того, что величина X попадет в пределы i - го интервала (рис.2.2).

Для того, чтобы принять или опровергнуть гипотезу о том, что случайная величина X подчиняется некоторому определенному закону распределения, рассмотрим некоторую величину U , характеризующую степень расхождения теоретического и моделируемого распределений, например,

$$U = \sum_{i=1}^k c_i (p_i^* - p_i)^2, \quad (2.78)$$

где p_i - теоретическая вероятность попадания случайной величины X на i -й интервал; p_i^* - статистическая вероятность того же события, определяемая формулой

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}, \quad (2.79)$$

где m_i - количество попаданий случайной величины X в i -й интервал; n - общее количество наблюдений случайной величины X , c_i - весовые коэффициенты.

Зная теоретический закон распределения $f(x)$, можно найти теоретические вероятности попадания величины X в каждый из интервалов

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.80)$$

Предположим, что проведено n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в k интервалов.

интервал	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_k, x_{k+1}
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Следует проверить, согласуются ли экспериментальные данные с гипотезой о том, что случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$, причем в качестве экспериментальных данных могут служить результаты использования метода Неймана.

Пирсоном было показано, что если положить $c_i = \frac{n}{p_i}$, то при больших n закон распределения величины U не зависит от плотности распределения $f(x)$ и от числа опытов n , а зависит только от числа интервалов k . При этом мера расхождения (2.78) обозначается

$$U = \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}. \quad (2.81)$$

Для удобства вычислений можно внести n под знак суммы и, с учетом формулы (2.79), привести формулу (2.81) к виду

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (2.82)$$

Обычно с достаточной для практических приложений точностью в формуле (2.82) можно положить $k = 10$.

Полученную с помощью критерия Пирсона (2.82) величину степени расхождения χ^2 нужно сравнить с некоторой критической величиной $\chi_{кр}^2$.

Если вероятность выполнения неравенства

$$\chi^2 > \chi_{кр}^2 \quad (2.83)$$

мала, например, меньше 0,05, то гипотеза принимается, если велика, то отвергается.

Значение $\chi^2_{кр}$ зависит от параметра f , называемого числом степеней свободы. Число степеней свободы f равно числу интервалов k минус число независимых условий l , наложенных на величины p_i^* , например

$$\sum_{i=1}^k p_i^* = 1, \quad (2.84)$$

и минус число параметров r плотности распределения $f(x)$

$$f = k - l - r. \quad (2.85)$$

В таблице 1 приведены значения $\chi^2_{кр}$ в зависимости от числа степеней свободы f для вероятности выполнения неравенства (2.83) $p = 0,05$.

Таблица 1 - Значения $\chi^2_{кр}$ для $p = 0,05$.

f	$\chi^2_{кр}$	f	$\chi^2_{кр}$	f	$\chi^2_{кр}$
1	3,84	11	19,68	21	32,7
2	5,99	12	21,0	22	33,9
3	7,82	13	22,4	23	35,2
4	9,49	14	23,7	24	36,4
5	11,07	15	25,0	25	37,7
6	12,59	16	26,3	26	38,9
7	14,07	17	27,6	27	40,1
8	15,51	18	28,9	28	41,3
9	16,92	19	30,1	29	42,6
10	18,31	20	31,4	30	43,8

Величину $p = 0,05$ называют еще уровнем значимости и обозначают α . Сравнивая величину χ^2 , полученную с помощью формулы (2.82), с соответствующей величиной $\chi^2_{кр}$, полученной из таблицы 1, принимаем гипотезу соответствия, если $\chi^2 \leq \chi^2_{кр}$, и отвергаем ее в случае выполнения неравенства (2.83).

ЧАСТЬ 3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

3.1 Параметры оптимизации и факторы

Большинство научных исследований связано с экспериментом. Эксперимент может быть физическим или модельным, т.е. проводится непосредственно на объекте (физический эксперимент) или на его модели (модельный эксперимент). Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой. Так, физическая модель системы поддрессирования автомобиля рассмотренная в разделе I, по своим масштабам значительно меньше автомобиля, а проведение эксперимента на такой модели значительно проще и дешевле, чем на реальном объекте – автомобиле. Вместе с тем, динамические свойства системы поддрессирования могут успешно исследоваться на электрической модели или с помощью математической модели, реализованной на аналоговой или цифровой ЭВМ.

Обычно перед разработчиком объекта ставится задача выбора значений параметров объекта, доставляющих объекту наилучшие, в определенном смысле свойства. Так, перед разработчиком системы поддрессирования стоит задача выбрать значения коэффициента жесткости рессоры и коэффициента демпфирования амортизатора таким образом, чтобы амплитуда колебаний поддрессорируемой части автомобиля была незначительной, т.е. удовлетворять условию

$$|z(t)| \leq z^* \quad (3.1)$$

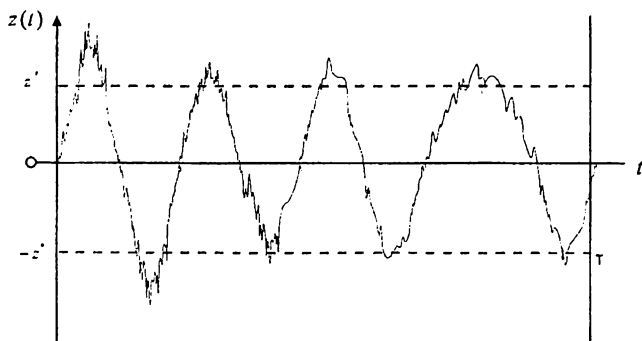


Рис. 3.1 - К выбору функционала качества

. Очевидно, что если выбрать значения варьируемых параметров таким образом, чтобы площадь под кривой переходного процесса оказалась минималь-

ной, т.е. чтобы на решениях математической модели (1.63) достигал минимума функционал

$$I_z = \int_0^T |z(t)| dt, \quad (3.2)$$

то условие (3.1) будет выполняться. Так как подынтегральная функция в (3.2) неаналитическая, то вместо функционала (3.2) можно использовать функционал

$$I_z = \int_0^T z^2(t) dt \quad (3.3)$$

Однако функционал (3.3) не отражает всех требований к системе поддрессоривания. Минимизация амплитуд колебаний поддрессоренной части автомобиля избавляет членов экипажа от морской болезни, но не от толчков и вибраций, передаваемых от неровностей дороги. Влияние вибраций можно значительно уменьшить, если выбирать варьируемые параметры из условия минимизации скорости перемещения центра масс автомобиля, т.е. из условия минимума функционала

$$I_z = \int_0^T \dot{z}^2(t) dt \quad (3.4)$$

Одновременное обеспечение минимума функционалов (3.3) и (3.4) невозможно, поэтому параметры системы поддрессоривания выбирают из условия минимума аддитивного функционала

$$I = \int_0^T [z^2(t) + c\dot{z}^2(t)] dt, \quad (3.5)$$

вычисленного на решениях уравнения

$$\ddot{z}(t) + 2n\dot{z}(t) + k^2 z(t) = f(t) \quad (3.6)$$

В теории планирования эксперимента варьируемые параметры системы называются факторами, а численные характеристики целей исследования (функционалы) называются параметрами оптимизации. Уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (3.7)$$

называется уравнением регрессии.

Рассмотрим получение уравнения регрессии в рассматриваемом примере оптимизации системы поддрессоривания автомобиля. Воспользовавшись концепцией возмущенно-невозмущенного движения Ляпунова, согласно которой динамические свойства системы являются ее внутренними свойствами и полностью определяются решением однородного уравнения

$$\ddot{z}(t) + 2n\dot{z}(t) + k^2 z(t) = 0, \quad (3.8)$$

будем отыскивать значения функционала (3.5) на решениях однородного уравнения (3.8) с начальными условиями $z(0)$ и $\dot{z}(0)$. Задаваясь различными значениями коэффициентов n и k при одних и тех же начальных условиях будем вычислять значение функционала (3.5), причем каждой паре (n_i, k_i) соответствует определенное значение функционала $I_i(n_i, k_i)$. Это значение вычисляется по следующему правилу. Введем переменные

$$z_1(t) = z(t); \quad z_2(t) = \dot{z}(t); \quad z_3(t) = \int_0^T [z^2(t) + c\dot{z}^2(t)] dt$$

запишем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t); \\ \dot{z}_2(t) &= -k_i^2 z_1(t) - 2n_i z_2(t); \\ \dot{z}_3(t) &= z_1^2(t) + c z_2^2(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

которую решаем при начальных условиях $z_1(0) = z_{10}$, $z_2(0) = z_{20}$; $z_3(0) = 0$ и различных сочетаниях (n_i, k_i) . В результате получаем $I(n_i, k_i) = z_3(T)$.

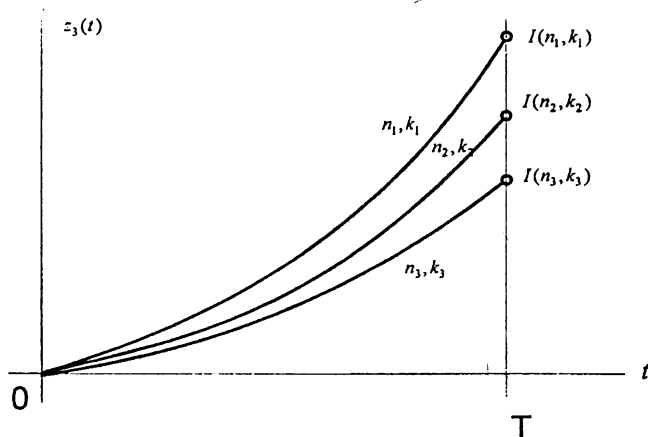


Рис. 3.2 - К вычислению функционала качества

Для рассматриваемых точек (n_i, k_i) строим поверхность $I(n_i, k_i)$

Исходя из физического смысла выберем границы допустимых значений параметров n и k построим в плоскости (n, k) область допустимых значений (заштрихованная область). Выбирая из этой области пары (n_i, k_i) и вычисляя значения $I(n_i, k_i)$, получим множество точек, образующих поверхность

$$I(n_i, k_i) = \Phi(n_i, k_i), \quad (3.10)$$

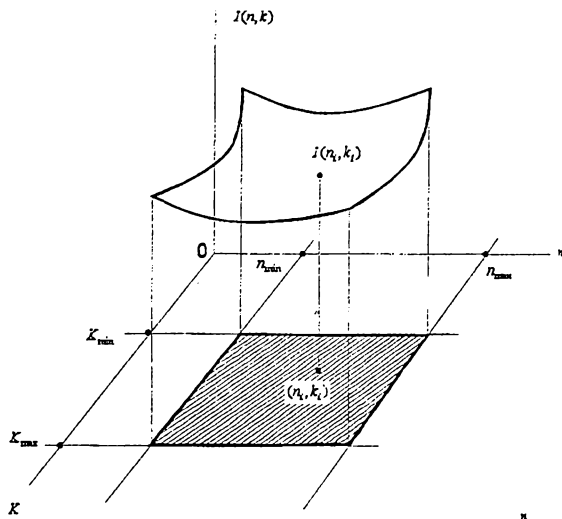


Рис. 3.3 - К построению уравнения регрессии

где $\Phi(n_i, k_i)$ - некоторая аппроксимирующая функция. Уравнение (3.10) и является уравнением регрессии для рассматриваемой задачи.

Рассмотрим требования, предъявляемые к параметру оптимизации:

- параметр оптимизации должен быть количественным и может быть вычислен при любой возможной комбинации факторов;
- параметр оптимизации должен быть однозначным, т.е. заданному набору факторов $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ должно соответствовать одно единственное значение параметра оптимизации y_i , однако обратное положение неверно: одному и тому же значению параметра оптимизации могут соответствовать разные наборы значений факторов.

Второе требование проиллюстрируем рисунком 3.4. Зададимся величиной $I(n_i, k_i) = c$ и построим плоскость, параллельную плоскости (nok) и отстоящую от нее на расстоянии c . Эта плоскость пересекает поверхность

$$I(n, k) = \Phi(n, k),$$

образуя замкнутую линию пересечения l .

Спроектируем эту линию на плоскость (nok) . В результате получим замкнутую линию l' . Выбирая любую комбинацию факторов (n_i, k_i) на линии l' , получаем одно и то же значение параметра оптимизации $I(n_i, k_i) = c$.

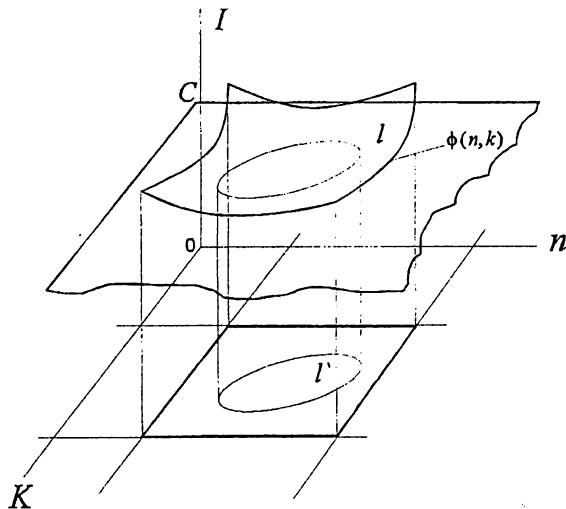


Рис. 3.4 - Пересечение поверхности $I(n, k) = \Phi(n, k)$
с плоскостью $I(n, k_i) = c$

Фактор считается заданным, если вместе с его названием указана и область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Обычно полагают

$$x_{i_{\min}} \leq x_i \leq x_{i_{\max}}, \quad (i = \overline{1, k})$$

при планировании эксперимента обычно одновременно варьируются несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Первое требование – требование совместимости. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Второе требование – независимость факторов, т.е. возможность установления величины одного фактора вне зависимости от величины других факторов.

Остановимся на проблеме аппроксимации параметра оптимизации аналитическими функциями, включающими факторы. Аппроксимацией называется замена одной функции другой функцией, в каком-то смысле эквивалентной. Обычно неизвестную функцию ϕ , входящую в правую часть уравнения (3.7), аппроксимируют полиномами. Так, в случае двух факторов x_1 и x_2 функции ϕ могут быть представлены различными полиномами:

- полином нулевой степени

$$y = b_0;$$

- полином первой степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2;$$

- полином второй степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2;$$

- полином третьей степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + \\ + b_{111}x_1^3 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{222}x_2^3.$$

3.2 Полный факторный эксперимент

При выборе области эксперимента прежде всего надо оценить границы областей определения факторов. Каждая комбинация факторов является многомерной точкой в факторном пространстве. Выбор начальной точки факторного пространства x_i^0 ($i = 1, n$) (основного уровня i -того фактора) и интервалов варьирования основан на предварительных данных об исследуемом процессе. Желательно, чтобы эта точка находилась недалеко от оптимальных значений варьируемых факторов.

Во время проведения факторных экспериментов используют кодированные значения уровней факторов. При этом основной уровень выбирают нулевым, верхний $+1$, нижний -1 . Кодирование осуществляют при помощи формулы

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.11)$$

где $\bar{x}_i$ - кодированное значение фактора; x_i - натуральное значение фактора; x_i^0 - натуральное значение основного уровня; Δx_i - интервал варьирования.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается $+1$, а другой -1 . При такой системе изменения факторов можно найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных значений факторов $N = 2^k$.

Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Будем называть такие таблицы матрицами планирования эксперимента. Матрица планирования эксперимента для двух факторов содержит два вектора-столбца независимых переменных и один вектор-столбец значений параметра оптимизации.

Таблица 3.1 - Матрица планирования двухфакторного эксперимента.

Номер опыта	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Матрица планирования факторного эксперимента 2^3 приведена ниже. Она содержит $2^3=8$ строк и четыре столбца – для каждого из трех варьируемых факторов и параметра оптимизации.

Таблица 3.2 - Матрица планирования трехфакторного эксперимента.

Номер опыта	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	y
1	-1	-1	+1	y_1
2	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4
5	-1	-1	-1	y_5
6	-1	+1	+1	y_6
7	+1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	-1	y_8

Матрица планирования эксперимента обладает следующими свойствами:

1. Свойство симметричности относительно центра эксперимента: алгебраическая сумма элементов вектора столбца каждого фактора равна нулю

$$\sum_{i=1}^N \bar{x}_{ji} = 0,$$

где j – номер фактора, i – номер опыта.

2. Свойство нормировки: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{i=1}^N \bar{x}_{ji}^2 = N.$$

3. Свойство ортогональности матрицы планирования: скалярное произведение двух любых векторов – столбцов равно нулю

$$\sum_{i=1}^N \bar{x}_{ji} \bar{x}_{ki} = 0 \quad j \neq k$$

4. Свойство ротатабельности: точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления, иными словами точки факторного пространства, используемые для испытаний лежат на поверхности сферы, центром которой является точка основного уровня (рис.3.5)

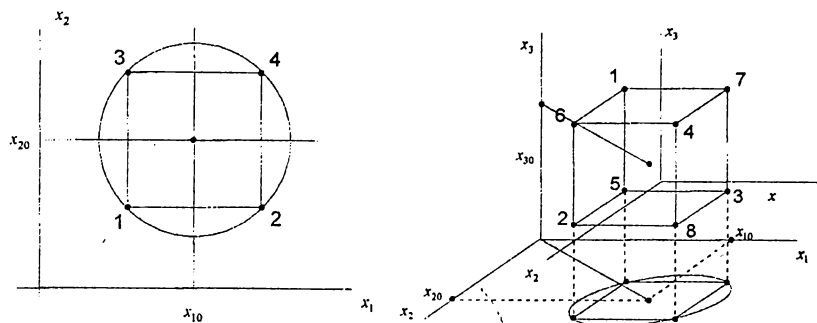


Рис. 3.5 - Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^2 и 2^3 .

На рис. 3.5 номера точек соответствуют номерам строк матриц планирования эксперимента или номерам опытов.

Перейдем к вычислению коэффициентов уравнения регрессии, начиная с полинома первой степени:

$$y = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 \quad (3.12)$$

Введем фиктивный фактор $\bar{x}_0$, который во всех опытах принимает значение +1. Матрица планирования в этом случае принимает вид:

Таблица 3.3 - Матрица планирования.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y
1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

а полином (3.12) записывается:

$$y = b_0 \bar{x}_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 \quad (3.13)$$

Тогда коэффициенты полинома (3.13) могут быть вычислены по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}_{ji} y_i}{N}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (3.14)$$

где j - количество факторов.

Для эксперимента 2^2 коэффициенты b_j равны:

$$b_0 = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4};$$

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4};$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4}.$$

Коэффициенты уравнения регрессии (3.13) указывают на интенсивность влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор на величину параметра оптимизации. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается.

Планируя эксперимент, на первом этапе мы стремимся получить линейную модель, т.е. воспользоваться полиномом первой степени (3.13). Однако у нас нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования возможна линейная аппроксимация. А если модель нелинейна, как количественно оценить нелинейность, пользуясь полным факторным экспериментом?

Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае говорят, что имеет место эффект взаимодействия двух факторов. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия. Пусть уравнение регрессии выглядит следующим образом:

$$y = b_0 \bar{x}_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad (3.15)$$

Матрица планирования эксперимента 2^2 в рассматриваемом случае дополняется вектором-столбцом:

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2,$$

называемым столбцом эффекта взаимодействия. Очень важно, что при добавлении таких столбцов все рассмотренные ранее свойства матриц планирования сохраняются:

Таблица 3.4 - Матрица планирования.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2$	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Коэффициент b_{12} вычисляется обычным путем по формуле (3.14):

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}.$$

Столбцы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ задают планирование, по ним непосредственно определяются условия опытов, а столбцы $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_3$ служат только для расчета коэффициентов уравнения регрессии.

Однако изложенное выше справедливо лишь в том случае, если уравнение регрессии содержит только линейные члены и произведения факторов. Между тем существенными могут оказаться члены при квадратах факторов. Так, полное уравнение регрессии в двухфакторном эксперименте записывается в виде:

$$y = b_0 \bar{x}_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{11} \bar{x}_1^2 + b_{22} \bar{x}_2^2 \quad (3.16)$$

Попытаемся построить матрицу планирования эксперимента для рассматриваемого уравнения (3.16).

Таблица 3.5 - Матрица планирования.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1^2$	$\bar{x}_2^2$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4

Столбцы $\bar{x}_1^2$ и $\bar{x}_2^2$ единичны, следовательно, влияние каждого из факторов $\bar{x}_1^2$ и $\bar{x}_2^2$ отдельно на параметр оптимизации проследить нельзя. Число опытов в таблице 5 равно четырем, а число неопределенных коэффициентов в уравнении (3.16) равно шести, так, что числа опытов явно недостаточно для отыскания коэффициентов уравнения (3.16).

Обычно к квадратному уравнению регрессии переходят, как правило, тогда, когда определяется неадекватность линейного уравнения (3.13) при аппроксимации параметра оптимизации. С целью сохранения полученных для расчетов линейных коэффициентов регрессии b_0, b_1, b_2 и b_{12} , к полному факторному плану добавляют новые точки, а именно:

- нулевую точку или точку основного уровня;
- "звездные" точки, расположенные на осях кодовой системы координат

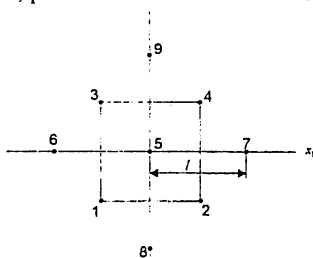


Рис. 3.6 - К выбору дополнительных точек планирования полного факторного эксперимента 2^2 : 1÷4 – основные точки; 5÷9 – дополнительные точки.

Полученная таким образом матрица планирования эксперимента называется композиционной. "Звездные" точки расположены на осях координат на одинаковом расстоянии l от нулевой точки. Матрица композиционного планирования двухфакторного эксперимента приведена в виде таблицы 3.6.

Таблица 3.6 - Композиционная матрица планирования.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1^2$	$\bar{x}_2^2$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	0	0	0	0	0	y_5
6	+1	-l	0	0	l^2	0	y_6
7	+1	+l	0	0	l^2	0	y_7
8	+1	0	-l	0	0	l^2	y_8
9	+1	0	+l	0	0	l^2	y_9

В результате получаем для расчета коэффициентов уравнения регрессии (3.16) соотношения:

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9}{9};$$

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4 + (-l)y_6 + (+l)y_7}{9};$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4 + (-l)y_8 + (+l)y_9}{9};$$

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{9};$$

$$b_{11} = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4 + l^2y_6 + l^2y_7}{9};$$

$$b_{22} = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4 + l^2y_8 + l^2y_9}{9}.$$

Звездное плечо l отыскивается из решения биквадратного уравнения:

$$4l^4 + 4 \cdot 2^n l^2 - 2^n (2n+1) = 0, \quad (3.17)$$

где n - число факторов. При $n=2$ имеем:

$$4l^4 + 16l^2 - 20 = 0$$

или

$$l^4 + 4l^2 - 5 = 0. \quad (3.18)$$

Решая биквадратное уравнение (3.18), получаем:

$$l^2 = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3 = 1.$$

При $n=3$ получаем:

$$4l^4 + 32l^2 - 56 = 0,$$

или

$$l^4 + 8l^2 - 14 = 0,$$

откуда

$$l^2 = -4 \pm \sqrt{16+14} = -4 \pm \sqrt{30} = -4 \pm 5,47$$

$$l^2 = 1,47; \quad l = 1,21.$$

Теперь матрицу композиционного планирования двухфакторного эксперимента с уравнением регрессии (3.16) можно представить в виде таблицы 3.7.

Таблица 3.7 - Матрица композиционного планирования.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1^2$	$\bar{x}_2^2$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	0	0	0	0	0	y_5
6	+1	-1	0	0	+1	0	y_6
7	+1	+1	0	0	+1	0	y_7
8	+1	0	-1	0	0	+1	y_8
9	+1	0	+1	0	0	+1	y_9

3.3 Дробный факторный эксперимент

Количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых коэффициентов уравнения регрессии. Другими словами факторный эксперимент обладает большой избыточностью опытов. Было бы заманчиво сократить их число за счет информации, которая не очень существенна при построении линейных моделей параметра оптимизации. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих свойств.

Запишем матрицу планирования для трехфакторного эксперимента, введя в таблицу 2 фиктивный вектор – столбец $\bar{x}_0$.

Таблица 3.8 - Матрица планирования для трехфакторного эксперимента

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	-1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	+1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	-1	y_8

Матрица таблицы 8 удовлетворяет всем свойствам матрицы планирования эксперимента 2^3 .

Рассмотрим теперь матрицу таблицы 4 для двухфакторного эксперимента. В эту таблицу мы введем третий фактор $\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2$. Из сравнения таблиц 4 и 8 ясно, что таблица 3.4 представляет собой верхнюю половину таблицы 8, т.е. проведя четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента или "полуреplikой". Если бы мы положили $\bar{x}_3 = -\bar{x}_1\bar{x}_2$, то получили бы вторую полуреplikу. Объединение этих полуреplik и есть полный факторный эксперимент 2^3 .

Для построения полуреplik 2^{3-1} существует всего две возможности: принять $\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2$ или $\bar{x}_3 = -\bar{x}_1\bar{x}_2$.

Условные обозначения дробных реплик и количество опытов приведены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 - Условные обозначения дробных реплик.

Число факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Число опытов	
			ПФЭ	Дробная реплика
3	½ реплики от 2 ³	2 ³⁻¹	8	4
4	½ реплики от 2 ⁴	2 ⁴⁻¹	16	8
5	½ реплики от 2 ⁵	2 ⁵⁻¹	32	16
6	¼ реплики от 2 ⁵	2 ⁵⁻²	32	8
7	¼ реплики от 2 ⁶	2 ⁶⁻²	64	16
8	1/8 реплики от 2 ⁶	2 ⁶⁻³	64	8

При построении дробных реплик используют следующее правило: для того, чтобы сократить число опытов при введении в планирование нового фактора, нужно поместить этот фактор в вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.

3.4 Статистическая проверка результатов экспериментальных исследований

После вычисления коэффициентов уравнения регрессии переходят к статистическому анализу полученных результатов, который проводится в три этапа:

- первый этап – проверка однородности дисперсий;
- второй этап – проверка значимости коэффициентов регрессии;
- третий этап – проверка адекватности уравнения регрессии.

Начнем с проверки однородности дисперсий. Корректное использование полученного уравнения регрессии возможно лишь в том случае, если дисперсии измерения параметра оптимизации в каждой точке эксперимента одинаковы. Это свойство называется однородностью дисперсий.

Статистическая оценка $\sigma^2\{y_j\}$ для каждого j -того опыта определяется формулой:

$$\sigma^2\{y_j\} = \frac{1}{K-1} \sum_{s=1}^K (y_{js} - y_j)^2, \quad (3.19)$$

где k - число дублирования эксперимента в каждой точке плана; y_{js} - значение параметра оптимизации, полученное в j -той точке плана при проведении s -того

эксперимента; y_j - математическое ожидание значения параметра оптимизации в j -той точке плана, вычисленное по формуле

$$y_j = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k y_{js} \quad (3.20)$$

Среди вычисленных по формуле (3.19) дисперсий находят наибольшую

$$\sigma_{\max}^2 = \max_j \sigma^2\{y_j\}$$

Затем вычисляют отношение наибольшей оценки дисперсии к сумме оценок всех дисперсий

$$G = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sum_{j=1}^N \sigma^2\{y_j\}} \quad (3.21)$$

После этого вычисляют число степеней свободы

$$\begin{aligned} f_1 &= k - 1 \\ f_2 &= N \end{aligned}$$

По данным f_1 и f_2 в специальной таблице, приведенной ниже, находят критическое значение $G_{кр}$.

Затем сравнивают величины G и $G_{кр}$. Если $G \leq G_{кр}$, то гипотеза об однородности дисперсий выполняется, если $G > G_{кр}$, то гипотеза отбрасывается.

Приняв гипотезу об однородности дисперсий, можно найти дисперсию параметра оптимизации

$$\sigma^2\{y\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma^2\{y_j\} \quad (3.22)$$

Если проверка однородности дисперсии дает отрицательный результат, то полученный материал не рекомендуется использовать для аппроксимации. Следует повторить эксперименты, увеличив число k - число дублирований эксперимента в каждой точке плана.

Перейдем к проверке значимости коэффициентов регрессии.

Значимость коэффициентов регрессии проверяют отдельно для каждого коэффициента с помощью критерия Стьюдента. Схема проверки состоит из следующих шагов.

Сначала находят дисперсию ошибки значения коэффициентов b_i

$$\sigma^2\{b_i\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{Nk}, \quad (3.23)$$

где $\sigma^2\{y\}$ - дисперсия параметра оптимизации (3.22); N, k - число опытов и повторений каждого опыта.

Затем вычисляем отношение абсолютного значения коэффициента регрессии b_i к среднему квадратичному отклонению ошибки его определения

$$t_i = \frac{|b_i|}{\sigma\{b_i\}} \quad (3.24)$$

Определяем число степеней свободы

$$f_3 = N(k - 1) \quad (3.25)$$

Затем в специальной таблице для полученного из (3.25) f_3 находим значение $t_{кр}$.

Те коэффициенты регрессии, для которых выполняются соотношения

$$t_i \geq t_{кр} \quad (3.26)$$

считаем значимыми. Те коэффициенты, для которых

$$t_i < t_{кр}$$

следует признать незначимыми и приравнять нулю. Соответствующие факторы должны быть из уравнения регрессии исключены.

И, наконец, приступим к проверке адекватности полученного уравнения регрессии.

Вычислим оценку дисперсии адекватности

$$\sigma_{ад}^2 = \frac{1}{N - g} \sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - y_j)^2, \quad (3.27)$$

где g - число членов аппроксимирующего полинома; $\bar{y}_j$ - значение параметра оптимизации, вычисленное с помощью аппроксимирующего полинома; y_j - значение параметра оптимизации в j -той точке плана, вычисленное по результатам экспериментальных данных по формуле (3.20).

Затем вычисляют значение критерия Фишера

$$F = \frac{\sigma_{ад}^2}{\sigma^2\{y\}}, \quad (3.28)$$

где $\sigma^2\{y\}$ отыскивается с помощью формулы (3.22).

После этого вычисляют значения степеней свободы

$$f_4 = N - g;$$

$$f_5 = N(k-1).$$

Из специальной таблицы по значениям f_4 и f_5 находят критическое значение критерия Фишера $F_{кр}$.

Если $F \leq F_{кр}$, то уравнение регрессии считается адекватным. Если $F > F_{кр}$, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии. Например, если неадекватна линейная модель, то линейный полином необходимо дополнить, включая в него нелинейные члены взаимодействия факторов.

Таблица 3.10 - Значения величины $G_{кр}$

f_2	f_1											
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,85159	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6333	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5175	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4387	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3817	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3384	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3043	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2768	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2541	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2187	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1815	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1422	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1216	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1002	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0780	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0552	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0292	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0

Таблица 3.11 - Значения величины $t_{кр}$

f_2	$t_{кр}$	f_2	$t_{кр}$
1	12,71	18	2,10
2	4,30	19	2,09
3	3,18	20	2,09
4	2,78	21	2,08
5	2,57	22	2,07
6	2,45	23	2,07
7	2,36	24	2,06
8	2,31	25	2,06
9	2,26	26	2,06
10	2,23	27	2,05
11	2,20	28	2,05

Продолжение таблицы 3.11

12	2,18	29	2,05
13	2,16	30	2,04
14	2,14	40	2,02
15	2,13	60	2,00
16	2,12	120	1,98
17	2,11	∞	1,96

Таблица 3.12 - Значения величины $F_{кр}$

f_3	f_4									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
00	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

3.5 Планирование экспериментов для оптимизации детерминированных систем

Сформулируем следующую детерминированную задачу оптимизации. Требуется отыскать значения варьируемых параметров n и k математической модели свободных колебаний подпрессоренной части автомобиля, таких чтобы на решениях системы (3.9) достигала минимума функция $I(n, k)$.

В соответствии с изложенным выше мы имеем задачу двухфакторного эксперимента, где в качестве факторов вступают величины n и k .

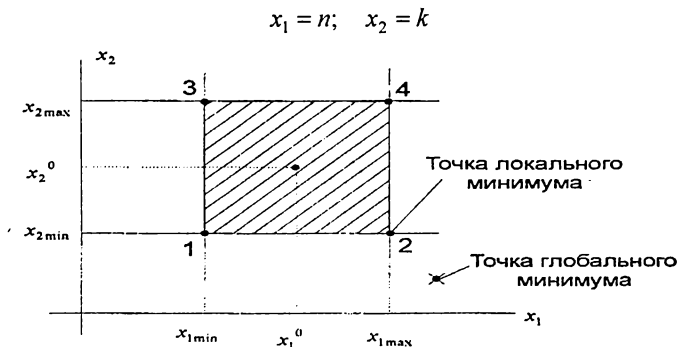


Рис. 3.7 - К планированию двухфакторного эксперимента

Выберем значения факторов основного уровня в центре заштрихованного прямоугольника и произведем кодирование факторов

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2}}{\frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2}} \quad (3.29)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2 - \frac{x_{2\max} + x_{2\min}}{2}}{\frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{2}} \quad (3.30)$$

Кодированные факторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ могут изменяться в интервале $(-1, +1)$.

Обозначим

$$n_0 = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2}; \quad \Delta n_0 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2}$$

$$k_0 = \frac{x_{2\max} + x_{2\min}}{2}; \quad \Delta k_0 = \frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{2}$$

Тогда соотношения (3.29) и (3.30) примут вид:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - n_0}{\Delta n_0}; \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2 - k_0}{\Delta k_0} \quad (3.31)$$

Выберем матрицу планирования двухфакторного эксперимента (см. таблицу 3), соответствующую выбранным точкам планирования. Осуществляя решение системы (3.9) при $c=1$, начальных условиях $z_1(0)=1$; $z_2(0)=1$; $z_3(0)=0$, $T=10c$

$$\begin{array}{lll} n_0 = 3,5 \text{ с}^{-1}; & n_{\min} = 3 \text{ с}^{-1}; & n_{\max} = 4 \text{ с}^{-1}; \\ k_0 = 4,5 \text{ с}^{-1}; & k_{\min} = 4 \text{ с}^{-1}; & k_{\max} = 5 \text{ с}^{-1} \end{array}$$

в плановых точках:

1 - ($n=3$; $k=4$);

2 - ($n=4$; $k=4$);

3 - ($n=3$; $k=5$);

4 - ($n=4$; $k=5$).

Результаты интегрирования системы (3.9) занесем в матрицу планирования

Таблица 3.13 - Матрица планирования эксперимента.

Номер опыта	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y
1	+1	-1	-1	1,755
2	+1	+1	-1	1,441
3	+1	-1	+1	2,413
4	+1	+1	+1	1,890

Уравнение регрессии выберем в виде

$$y = b_0 \bar{x}_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad (3.32)$$

Используя формулу (3.14) вычислим коэффициенты уравнения регрессии (3.32).

$$b_0 = \frac{1,755 + 1,441 + 2,413 + 1,890}{4} = 1,875$$

$$b_1 = \frac{-1,755 + 1,441 - 2,413 + 1,890}{4} = -0,209$$

$$b_2 = \frac{-1,755 - 1,441 + 2,413 + 1,890}{4} = 0,277$$

$$b_{12} = \frac{1,755 - 1,441 - 2,413 + 1,890}{4} = -0,109$$

Отыщем минимум функции y , определяемой уравнением (3.32)

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_2} = b_1 + b_{12}\bar{x}_2 = 0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_1} = b_2 + b_{12}\bar{x}_1 = 0.$$

Тогда, оптимальные значения $\bar{x}_1^*$ и $\bar{x}_2^*$ равны

$$\bar{x}_1^* = -\frac{b_2}{b_{12}} = \frac{0,277}{0,109} = 2,540;$$

$$\bar{x}_2^* = -\frac{b_1}{b_{12}} = -\frac{0,209}{0,109} = -1,826.$$

Подставляя значения $\bar{x}_1^*$ и $\bar{x}_2^*$ в уравнение регрессии (3.32), получаем

$$y^* = 1,345$$

Таким образом, глобальный минимум параметра оптимизации находится вне заштрихованной площади. Локальный минимум находится в вершине 2 заштрихованного прямоугольника и составляет, как видно из таблицы 13, $y=1,441$, что в общем близко к глобальному минимуму.

Отыщем абсолютные значения параметров n и k , соответствующие глобальному минимуму.

$$x_1^* = n^* = n_0 + \bar{x}_1^* \Delta n_0 = 3,5 + 2,54 \cdot 0,5 = 4,77 c^{-1}$$

$$x_2^* = k^* = k_0 + \bar{x}_2^* \Delta k_0 = 4,5 - 1,826 \cdot 0,5 = 3,587 c^{-1}.$$

3.6 Планирование экспериментов для оптимизации стохастических систем

Рассмотрим стохастическую модель, описывающую поведение системы подрессоривания автомобиля, содержащую уравнения (2.70). К этим уравнениям добавим уравнение:

$$\dot{z}_5(t) = z_1^2(t) + z_2^2(t)$$

В качестве параметра оптимизации в j -той точке выступает величина:

$$y_j = M_i \{z_5^i(T, n_j, \kappa_j)\},$$

где i означает i -тую реализацию белого шума $\xi^i(t)$. Таким образом, в каждой точке факторного эксперимента вычисляется K значений $y_j = M_i \{z_5^i(T, n_j, \kappa_j)\}$. Для этих значений составим таблицу.

Таблица 3.14 - Таблица значений для факторного эксперимента.

Номер реализации	Номер опыта				
	1	2	3	4	0
1	$y_{11}=1,741$	$y_{21}=1,447$	$y_{31}=2,418$	$y_{41}=1,903$	$y_{01}=1,812$
2	$y_{12}=1,752$	$y_{22}=1,441$	$y_{32}=2,445$	$y_{42}=1,900$	$y_{02}=1,825$
3	$y_{13}=1,749$	$y_{23}=1,437$	$y_{33}=2,432$	$y_{43}=1,891$	$y_{03}=1,834$
4	$y_{14}=1,763$	$y_{24}=1,441$	$y_{34}=2,409$	$y_{44}=1,867$	$y_{04}=1,824$
5	$y_{15}=1,754$	$y_{25}=1,449$	$y_{35}=2,403$	$y_{45}=1,902$	$y_{05}=1,823$
6	$y_{16}=1,768$	$y_{26}=1,448$	$y_{36}=2,414$	$y_{46}=1,895$	$y_{06}=1,831$
7	$y_{17}=1,755$	$y_{27}=1,446$	$y_{37}=2,404$	$y_{47}=1,894$	$y_{07}=1,813$
8	$y_{18}=1,771$	$y_{28}=1,441$	$y_{38}=2,387$	$y_{48}=1,904$	$y_{08}=1,816$
9	$y_{19}=1,766$	$y_{29}=1,456$	$y_{39}=2,425$	$y_{49}=1,889$	$y_{09}=1,821$
10 ...	$y_{110}=1,759$	$y_{210}=1,435$	$y_{310}=2,433$	$y_{410}=1,887$	$y_{010}=1,814$

Каждому j - тому опыту в точке проведения факторного эксперимента соответствует 10 реализаций белого шума $\xi^i(t)$. Параметр оптимизации при каждой реализации вычисляется на решениях системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t);$$

$$\dot{z}_2(t) = -K_j^2 z_1(t) - 2n_j z_2(t) + z_3(t);$$

$$\dot{z}_3(t) = \dot{z}_4(t);$$

$$\dot{z}_4(t) = -\frac{1}{T_1^2}(t) - \frac{T_2}{T_1^2} z_4(t) + \frac{1}{T_1^2} \xi^i(t);$$

$$\dot{z}_5(t) = z_1^2(t) + z_2^2(t);$$

с начальными условиями:

$$z_1(0) = 1; z_2(0) = 1; z_3(0) = 0; z_4(0) = 0; z_5(0) = 0.$$

Каждый элемент матрицы таблицы 14 равен:

$$y_{ji} = z_5^i(T, n_j, \kappa_j).$$

Вычислим математические ожидания функции регрессии в каждой точке эксперимента:

$$y_1 = 1,758; y_2 = 1,444; y_3 = 2,417;$$

$$y_4 = 1,887; y_0 = 1,821.$$

Сравнение полученных результатов с данными таблицы 13 позволяет сделать вывод, что математические ожидания функции регрессии стохастической системы весьма близки к значениям функции регрессии детерминированной системы, вычисленных в соответствующих точках факторного пространства – обычные имеются лишь в третьем знаке после запятой. Вместе с тем, значения функции регрессии при различных реализациях случайного процесса $\xi^i(t)$ заметно отличаются друг от друга в одной и той же точке факторного пространства. В этой связи, в соответствии с изложенным выше, требуется статистическая проверка полученных результатов.

Для проверки гипотезы однородности дисперсий вычислим дисперсии функции регрессии в каждом опыте в соответствии с формулой (3.19):

$$\sigma^2\{Y_1\} = 0,000091; \sigma^2\{Y_2\} = 0,000039;$$

$$\sigma^2\{Y_3\} = 0,000303; \sigma^2\{Y_4\} = 0,000475.$$

Среди вычисленных дисперсий находим наибольшую:

$$\sigma_{\max}^2 = \max_j \sigma^2\{y_j\} = 0,000475.$$

Затем по формуле (3.21) вычислим величину:

$$G = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sum_{j=1}^N \sigma^2\{y_j\}} = 0,523.$$

Следующим этапом проверки гипотезы однородности дисперсий является оценка степеней свободы:

$$f_1 = K - 1 = 10 - 1 = 9; \quad f_2 = N = 4.$$

По величинам f_1 и f_2 из таблицы 10 находят величину:

$$G_{кр} = 5,02.$$

Строго говоря, $G > G_{кр}$, однако значения величин G и $G_{кр}$ приблизительно равны; поэтому можно считать, что гипотеза однородности дисперсии выполняется и найти дисперсию функции регрессии, воспользовавшись формулой (3.22):

$$\sigma^2\{Y\} = 0,000227.$$

Перейдем к проверке значимости коэффициентов регрессии, для чего отыщем в соответствии с формулой (3.23) дисперсию ошибок значений коэффициентов регрессии:

$$\sigma^2\{b_i\} = \frac{\sigma^2\{Y\}}{N K} = \frac{0,000227}{40} = 0,567 \cdot 10^{-5},$$

а затем – значения величин t по формуле (3.24):

$$t_1 = \frac{|b_1|}{\sigma\{b_i\}} = 0,78 \cdot 10^3; \quad t_2 = \frac{|b_2|}{\sigma\{b_i\}} = 0,87 \cdot 10^2;$$

$$t_3 = \frac{|b_3|}{\sigma\{b_i\}} = 0,115 \cdot 10^3; \quad t_4 = \frac{|b_{12}|}{\sigma\{b_i\}} = 0,454 \cdot 10^2.$$

В соответствии с формулой (3.25), число степеней свободы равно:

$$f_3 = N(K - 1) = 4 \cdot 9 = 36.$$

Воспользовавшись таблицей 11, находим величину $t_{кр} = 2,03$.

Все значения $t_i, (i = \overline{1,4})$ значительно превышают величину $t_{кр}$, следовательно, все коэффициенты функции регрессии (3.32) являются значимыми и ни одним из них нельзя пренебречь.

И наконец, перейдем к проверке адекватности уравнения регрессии (3.32), для чего оценим дисперсию адекватности по формуле (3.27). Однако использование этой формулы встречает затруднения – число точек факторного эксперимента $N=4$, а число членов функции (3.32) также равно $g=4$, следовательно,

формула (3.27) оказывается неработоспособной. Добавим к числу точек факторного эксперимента нулевую точку и вычислим значения величин $\bar{y}_j$:

$$\bar{y}_0 = b_0 = 1,875; \quad \bar{y}_1 = b_0 - b_1 - b_2 + b_{12} = 1,698;$$

$$\bar{y}_2 = b_0 + b_1 - b_2 - b_{12} = 1,498;$$

$$\bar{y}_3 = b_0 - b_1 + b_2 - b_{12} = 2,470;$$

$$\bar{y}_4 = b_0 + b_1 + b_2 + b_{12} = 1,834.$$

Подставим полученные величины в формулу:

$$\sigma_{ad}^2 = \sum_{j=0}^4 (\bar{y}_j - y_j)^2$$

и отыщем значение дисперсии адекватности:

$$\sigma_{ad}^2 = 0,0156$$

и критерия Фишера:

$$F = \frac{\sigma_{ad}^2}{\sigma^2\{y\}} = \frac{0,0156}{0,000227} = 68,$$

а также число степеней свободы:

$$f_4 = N - g = 1; \quad f_5 = N(K - 1) = 45.$$

Из таблицы 12 по значениям f_4 и f_5 находим критическое значение критерия Фишера:

$$F_{кр} = 4,06.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $F > F_{кр}$ и, строго говоря, уравнение регрессии (3.32) нельзя считать адекватным с вероятностью 0,95, а именно для такой вероятности составлена таблица 3.12. В этом случае либо следует удовлетвориться полученным результатом и считать уравнение регрессии (3.32) адекватным с меньшей вероятностью, либо перейти к более сложному виду уравнения регрессии, например, к полиному третьей степени. При этом резко возрастает величина g - число членов аппроксимирующего полинома и для пользования формулой (3.27) необходимо увеличивать число точек факторного эксперимента N путем введения "звездных" точек.

ЧАСТЬ 4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКО-ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

4.1 Оптимальное управление запасами

Запасом называют пригодный к использованию, но временно не используемый дополнительный объем материальных ресурсов. На промышленных предприятиях задача материально-технического снабжения состоит в обеспечении производства материальными ресурсами – сырьем, полуфабрикатами, комплектующими изделиями, запасы которых содержатся на центральных складах предприятия или на складах основных цехов.

Существуют объективные факторы, которые обуславливают необходимость создания запасов:

- несовпадение ритмов снабжения и использования материальных ресурсов;
- случайные колебания спроса между поставками, интервала времени между поставками, объема поставок;
- сезонность спроса предметов потребления.

С точки зрения перечисленных факторов может показаться, что чем больше запас, тем лучше. Однако существуют и серьезные аргументы в пользу уменьшения запаса материальных ресурсов. К ним относятся:

- плата за физическое сохранение запаса;
- связывание оборотных средств в запасах.

Таким образом, задача выбора необходимых запасов ресурсов носит альтернативный характер и решать ее надо оптимизационными методами.

Затраты на организацию снабжения складываются из трех компонент:

- затраты на организацию поставок;
- затраты на сохранение материалов на складе;
- затраты на штрафы из-за недостатка необходимых ресурсов.

Совокупность этих затрат в формализованной форме используются как целевая функция в моделях управления запасами.

Стратегией управления запасами называют совокупность правил, с помощью которых определяют моменты времени поставок и объемы заказов на восполнение запасов.

Наиболее распространены две стратегии управления запасами:

- периодические стратегии;
- стратегии с критическими уровнями.

В периодических стратегиях заказы формируются в каждом периоде T . К таким стратегиям относятся:

- стратегия постоянного уровня (T, H), в соответствии с которой через каждый промежуток времени T заказ пополняется по граничному значению. Объем заказа – переменная величина

$$q = H - y,$$

где y - текущий запас

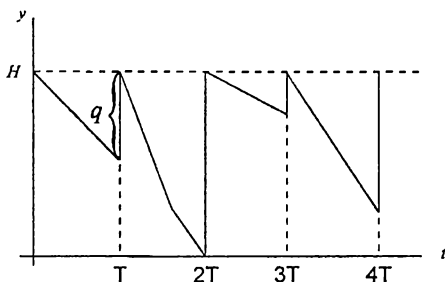


Рис.4.1 - К стратегии постоянного уровня.

- стратегия фиксированной поставки (T, q), в соответствии с которой через интервал времени T выдается заказ размером q .

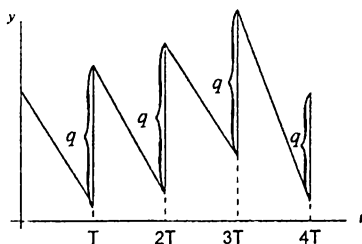


Рис. 4.2 - К стратегии фиксированной поставки.

В стратегиях с критическими уровнями постоянно следят за уровнем текущего запаса и, как только он опускается ниже порогового уровня, выдается заказ на пополнение запаса. К этому типу стратегий относятся следующие стратегии:

- стратегия фиксированного размера заказа (h, q), сущность которой состоит в следующем:

если $y < h$, заказать q ;

если $y \geq h$, ничего не заказывать

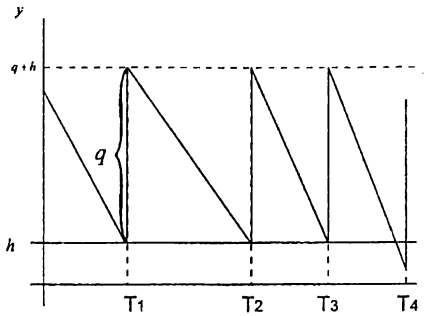


Рис. 4.3 - К стратегии фиксированного размера заказа.

- стратегия двух уровней (h, H):
если $y < h$, заказать $q = H - y$;
если $y \geq h$, ничего не заказывать

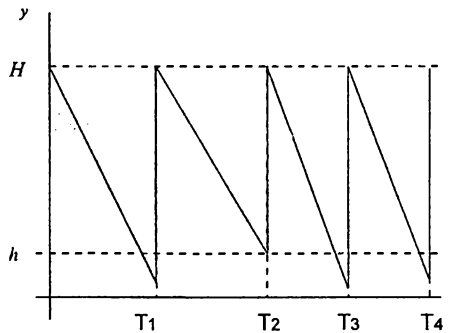


Рис. 4.4 - К стратегии двух уровней

Рассмотрим процесс управления однопродуктовым запасом на изолированном складе. Пусть выполняются следующие условия:

- спрос непрерывный с постоянной интенсивностью μ ;
- пополнение запасов - мгновенное;
- дефицит не допускается, т.е. затраты на штрафы отсутствуют;
- каждой поставке соответствуют постоянные затраты g ;
- стоимость сохранения продукта пропорциональна уровню запаса и времени сохранения;
- выбирается стратегия постоянного уровня (T, H).

Требуется отыскать оптимальные значения параметров стратегии управления T^* и H^* , которые минимизируют общие затраты за единицу времени.

Общие затраты за время T составляют:

$$L_T = L_p + L_z + L_d, \quad (4.1)$$

где L_p - затраты на поставку;

L_z - затраты на хранение;

L_d - затраты на штрафы из-за дефицита.

Выше указывалось, что затраты на штрафы не допускаются, т.е. $L_d=0$, а затраты на поставку равны g , т.е. $L_p = g$.

Затраты на хранение записываются в виде

$$L_z = \frac{1}{2} SHT, \quad (4.2)$$

где S - коэффициент пропорциональности, $\frac{1}{2}H$ - средний уровень запаса, T - время хранения.

Тогда соотношение (4.1) может быть записано

$$L_T = g + \frac{1}{2} SHT$$

Целевой функцией являются затраты в единицу времени

$$L = \frac{L_T}{T} = \frac{g}{T} + \frac{1}{2} SH.$$

С другой стороны спрос является непрерывным, следовательно

$$H = \mu T, \quad (4.3)$$

откуда

$$L = \frac{g}{T} + \frac{1}{2} S\mu T \quad (4.4)$$

Отыщем минимум функции (4.4), для чего продифференцируем ее по времени T и результат дифференцирования приравняем нулю

$$-\frac{g}{T^2} + \frac{1}{2} S\mu = 0,$$

откуда

$$T^* = \sqrt{\frac{2g}{S\mu}}.$$

Воспользовавшись формулой (4.3) отыщем оптимальное значение граничного запаса

$$H^* = \sqrt{\frac{2g\mu}{S}}$$

Поскольку в данных условиях граничный запас равняется партии поставок, то

$$q^* = \sqrt{\frac{2g\mu}{S}} \quad (4.6)$$

Формула (4.6) называется формулой Вильсона или формулой наиболее экономичной партии поставок.

4.2 Оптимальное управление многопродуктовыми запасами

Рассмотрим следующие условия работы системы снабжения:

- система снабжения обеспечивает спрос на n продуктов в течении года;
- затраты на поставку определяются соотношением

$$L_p = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{q_i} g_i, \quad (4.7)$$

где b_i - годовая потребность в i -том продукте; q_i - размер поставки i -того продукта; g_i - стоимость одной партии поставки;

- поставки моментальные и дефицит исключается $L_d=0$;
- затраты на сохранение пропорциональны средней стоимости запаса и времени его хранения

$$L_z = \sum_{i=1}^n \frac{q_i c_i}{2} T \rho, \quad (4.8)$$

где c_i - цена за единицу i -того продукта; T - время хранения; ρ - коэффициент начисления на связанные оборотные фонды. Если положить $T=1$ год, то формула (4.8) несколько упростится

$$L_z = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i \quad (4.9)$$

- задан норматив оборотных фондов и средняя стоимость запаса не должна превышать этой величины, т.е.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i \leq E \quad (4.10)$$

Требуется найти значения q_i^* , которые минимизируют годовые затраты на снабжение

$$L = L_p + L_z = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{q_i} g_i + \frac{\rho}{2} q_i c_i \quad (4.11)$$

при ограничении (4.10)

Составим функцию Лагранжа

$$F(q_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{b_i}{q_i} g_i + \frac{\rho}{2} q_i c_i \right] + \lambda \left(E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i^* c_i \right), \quad (4.12)$$

где λ - множитель Лагранжа.

Найдем соответствующие частные производные и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F(q_i, \lambda)}{\partial q_i} = \left[\frac{\rho}{2} c_i - \frac{b_i}{2q_i^2} g_i \right] - \frac{\lambda}{2} c_i = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial F(q_i, \lambda)}{\partial \lambda} = E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i = 0. \quad (4.14)$$

Для отыскания $n+1$ неизвестных имеем $n+1$ алгебраическое уравнение (4.13), (4.14).

Из уравнений (4.13) имеем

$$q_i^2 = \frac{b_i g_i}{(\rho - \lambda) c_i}$$

или

$$q_i = \sqrt{\frac{b_i g_i}{(\rho - \lambda) c_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.15)$$

Подставим соотношения (4.15) в формулу (4.14)

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b_i g_i c_i}{\rho - \lambda}} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\rho - \lambda} = \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i g_i c_i} \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15), получим оптимальное значение q_i^*

$$q_i^* = \sqrt{\frac{b_i g_i}{c_i}} \cdot \frac{2E}{\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i g_i c_i}}$$

4.3 Система массового обслуживания

Примерами систем массового обслуживания могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, парикмахерские. Каждая такая система состоит из какого-то числа обслуживающих

единиц, которые назовем каналами обслуживания. Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего на нее потока требований или заявок. Заявки поступают одна за другой в некоторые случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается какое-то время, после чего канал освобождается и снова готов для приема следующей заявки. Каждая система массового обслуживания, в зависимости от числа каналов и их производительности, обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок.

В качестве характеристик эффективности обслуживания могут применяться различные величины, например:

- средний процент заявок, получивших отказ и покидающих систему не обслуженными;
- среднее время простоя отдельных каналов и системы в целом;
- среднее время ожидания в очереди;
- вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию.

Под *пропускной способностью* системы понимают среднее число заявок, которое система может обслужить в единицу времени.

Пропускная способность зависит не только от параметров системы, но и от характера потока заявок. Если бы заявки поступали регулярно, через точно определенные промежутки времени, а обслуживание каждой заявки имело бы строго определенную длительность, расчет пропускной способности системы не представлял бы никакой трудности. На практике обычно моменты поступления заявок случайны, по большей части случайно и время обслуживания заявки. Таким образом, процесс функционирования системы массового обслуживания представляет собой случайный процесс, состоящий в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое: меняется число занятых каналов, число заявок и т.п. Таким образом, система массового обслуживания представляет собой случайную систему дискретного типа с конечным множеством состояний:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

В любой момент времени t система X с конечным множеством состояний может находиться в одном из этих состояний. Обозначим через $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии X_k . Очевидно, что для любого t :

$$\sum_{k=1}^n P_k(t) = 1 \quad (4.17)$$

Для того, чтобы описать случайный процесс, протекающий в дискретной системе с непрерывным временем, прежде всего нужно проанализировать причины, вызывающие переход системы из одного состояния в другое. Такой при-

чиной является поток заявок. Такой поток можно изобразить, как последовательность точек на числовой оси.

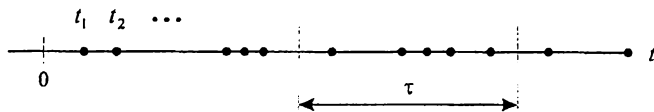


Рис. 4.5 - Поток заявок.

Поток заявок называется регулярным, если заявки следуют одна за другой через строго определенные промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах. Типичным для системы массового обслуживания является случайный поток заявок.

Поток заявок называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа заявок на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси времени расположен этот участок.

Поток заявок называется потоком без последействия, если для любых неперекрывающихся участков времени число заявок, попадающих на один из них, не зависит от числа заявок, попадающих на другие.

Поток заявок называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной заявки.

Если поток заявок обладает всеми тремя свойствами, т.е. стационарен, ординарен и не имеет последействия, то он называется стационарным пуассоновским потоком. Название "пуассоновский" связано с тем, что при соблюдении всех трех условий, число заявок, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (4.18)$$

где m - число заявок на фиксированном интервале времени; a - параметр закона Пуассона.

Понятие стационарного пуассоновского потока имеет важное значение в теории массового обслуживания, в которой доказана следующая теорема:

При суммировании большого числа ординарных стационарных потоков с практически любым последствием получается стационарный пуассоновский поток.

Любая система массового обслуживания представляет собой сумму большого количества потоков, проходящих по каналам, следовательно, суммарный поток системы можно считать пуассоновским.

Параметр закона Пуассона a представляет собой не что иное как математическое ожидание случайной величины X - числа заявок на фиксированном интервале времени:

$$a = M[X] \quad (4.19)$$

Дисперсия случайной величины X , распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию:

$$D[X] = M[X] = a. \quad (4.20)$$

Величину a представим в виде:

$$a = \lambda \tau, \quad (4.21)$$

где λ - плотность потока, т.е. среднее число заявок, приходящихся на единицу времени. Тогда вероятность того, что за время τ на систему поступит m заявок равно:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau}. \quad (4.22)$$

В частности, вероятность того, что в течение времени τ на систему не поступит заявки, равна:

$$P_0(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^0}{0!} e^{-\lambda \tau} = e^{-\lambda \tau}. \quad (4.23)$$

Важной характеристикой системы массового обслуживания является закон распределения интервала T между соседними заявками.

Функцию распределения интервала T запишем в виде:

$$F(t) = P(T < t).$$

Вероятность противоположного события:

$$1 - F(t) = P(T \geq t). \quad (4.24)$$

Вероятность того, что на участке $T \geq t$ не произойдет поступления заявки, вычисляется с помощью формулы (4.23), следовательно формулу (4.24) можно представить в виде:

$$1 - F(t) = e^{-\lambda t}. \quad (4.25)$$

Из (4.55) можно записать:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4.26)$$

Плотность распределения случайной величины T можно получить дифференцированием соотношения (4.26):

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (4.27)$$

Закон распределения с плотностью (4.27) называется показательным законом распределения.

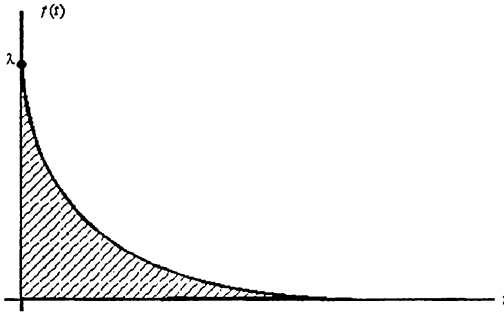


Рис. 4.6 - Показательный закон распределения.

Найдем математическое ожидание величины T , распределенной по показательному закону:

$$M[T] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.28)$$

Дисперсия величины T равна:

$$D[T] = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (4.29)$$

следовательно:

$$\sigma[T] = \frac{1}{\lambda}.$$

Навчальне видання

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Конспект лекцій для студентів всіх спеціальностей

Укладач: Александрова Ірина Євгенівна

Відповідальний

випускний: Конохова З.П.

Технічний

редактор: Оксанінко К.М.

План 2000 р.

Підписано до друку 31.08.2000. Формат 60 * 84_{1/16}; Папір - офсетний.

Друк - ризографія. Умов. друк. арк. 5,35. Тираж 200 прим. Зам. _____

Видавничий центр ХДПУ. 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

ПП «ГЕММА» м. Харків, вул. Олімпійська, 31
