



д Е Р Р

д а и

Д. А. КАЛАХАН

**современный
синтез
цепей**



СОВРЕМЕННЫЙ СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ

ДОНАЛЬД КАЛАХАН

СОВРЕМЕННЫЙ СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ

Перевод с английского И. В. СОЛОВЬЕВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭНЕРГИЯ»
МОСКВА 1966 ЛЕНИНГРАД



УДК 621.011.1
К 17

В первой части монографии исследуется равново-
льная аппроксимация реакций цепи.

Во второй части исследуются следующие вопросы:
анализ и синтез многополюсных цепей $R L C M$, анализ
и синтез активных цепей, волновые матрицы, зависи-
мость реакций цепи от изменений ее элементов (чувст-
вительность) и эквивалентность цепей при шовном из-
менении элементов (непрерывно эквивалентные цепи).

Книга предназначена для инженеров и научных
работников, занимающихся изучением синтеза цепей и
проектированием фильтров.

Donald A. Calahan

MODERN NETWORK SYNTHESIS

v. I, II Hayden Book Company, Inc., New York, a division of Hayden
Publishing Company, Inc., 1964

Дональд Калахан

СОВРЕМЕННЫЙ СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ

перевод с англ., М.—Л., изд-во «Энергия», 1966, 192 с. с илл.

3-3-8

150.66

Редакторы: Н. Ф. Ильинский, В. А. Озерский Техн. редактор Т. Н. Царева

Сдано в набор 29/III 1966 г.

Подписано к печати 27/VI 1966 г.

Бумага типографская № 2 84×108¹/₃₂.

Печ. л. 10,08

Уч.-изд. л. 10,18

Тираж 6 000 экз.

Цена 82 коп.

Зак. 2349

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Усложнение функций, выполняемых различными устройствами автоматики, радиотехники, измерительной техники и т. п., и повышение требований к качеству работы таких устройств делают актуальной задачу синтеза сложных электрических цепей, обладающих заданными характеристиками. Возможности, появившиеся в связи с развитием вычислительной техники, позволяют быстро и эффективно решать задачи, связанные с синтезом весьма сложных электрических цепей. Эти обстоятельства определяют интерес к новым работам в области синтеза цепей, в которых на современном уровне ставятся и решаются задачи проектирования цепей с заданными свойствами.

Книга Д. Калахана, предлагаемая в русском переводе советскому читателю, содержит весьма интересный и полезный материал, относящийся к теории аппроксимации и синтезу цепей с активными элементами.

В первой части книги (в первом томе американского издания) рассматриваются некоторые важные свойства отдельных компонент функций цепей (входной, передаточной и т. п.) и определяются возможности реализации некоторых «идеальных» реакций цепей на заданное возмущение. В качестве функций, аппроксимирующих «идеальные» реакции, автор использует, в частности, эллиптические функции. В первой части книги приводятся основные сведения об эллиптических функциях и показывается, что их применение дает существенный поло-

жительный эффект. Автор показывает, как можно использовать цифровую вычислительную машину для решения задачи аппроксимации некоторой произвольной функции цепи.

Во второй части книги (втором томе американского издания) рассматриваются собственно задачи синтеза цепей, включая цепи с активными элементами. Автор анализирует условия реализуемости цепей, если заданы матрицы параметров, и показывает, что в ряде случаев весьма полезным оказывается применение волновой матрицы, так как при этом облегчается задача реализации цепи с помощью обычного набора элементов. Во второй части книги рассматривается также чувствительность цепи к изменениям отдельных элементов и приводятся сведения по непрерывно эквивалентным цепям, т. е. по цепям, сохраняющим неизменной какую-либо характеристику при непрерывном изменении параметров.

В конце книги приведена обширная библиография, которая принесет пользу специалистам, глубоко занимающимся теорией цепей.

Язык книги весьма лаконичен: она насыщена математическими выкладками, предполагающими наличие у читателя неплохой математической подготовки. Вместе с тем оригинальность рассмотренных в книге вопросов, своеобразность их решения, большая практическая ценность результатов — все это, несомненно, привлечет внимание специалистов, работающих в области теории электрических цепей, которые найдут в книге много полезного.

Н. Ф. Ильинский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первая часть монографии может служить введением в литературу по аппроксимации. Она предназначена для лиц, изучивших курс синтеза цепей по одному из стандартных учебников (см. в списке литературы раздел [Л. 1.1]) или имеющих соответствующую подготовку по математике и теории цепей. Материал первой части будет полезен как для проектировщиков фильтров, которые пожелают обновить свои знания, так и для учащихся, для которых материал книги (в частности, задачи) послужит введением к более глубокому изучению электрических цепей.

Изложение начинается с рассмотрения реализуемости некоторых идеальных реакций, затем разбираются эллиптические функции и их свойства как оптимальных аппроксимирующих функций. В конце первой части описано применение вычислительной машины для аппроксимации. Во всех главах приводятся примеры, в частности даны примеры проектирования фильтров и использования вычислительной машины.

Вторая часть монографии может служить введением в изучение литературы по многополюсным пассивным и активным цепям и родственным вопросам. Она предназначена для лиц, изучивших курс анализа цепей или имеющих соответствующую подготовку по математике и теории цепей. Главы об активных цепях и чувствительности будут полезны проектировщикам цепей, а учащиеся могут найти полезные сведения в главах о многопо-

люсниках RLC , волновых и эквивалентных цепях. Монография может служить дополнительным пособием при углубленном изучении курса синтеза цепей.

Для облегчения поисков литературы в конце книги приведен обширный список литературы, разбитой по отдельным вопросам.

Январь 1964

Беркли, Калифорния

Дональд Калахан

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АППРОКСИМАЦИЯ

Глава первая

ВВЕДЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИЮ

Прежде чем изучать аппроксимацию некоторых «идеальных» реакций рациональными функциями, т. е. отношениями многочленов, мы разберем в этой главе свойства модульной функции, функции запаздывания и фазовой функции, на которые разлагаются рациональные функции цепей. После этого мы дадим определение «идеальных» реакций и рассмотрим их реализуемость.

1-1. КОМПОНЕНТЫ ФУНКЦИИ ЦЕПЕЙ

Модульная функция. Возьмем функцию цепи z_{12} , y_{12} и т. д. и обозначим ее $T(s)$. Представим квадрат модуля $T(s)$ как функцию от ω :

$$|T(j\omega)|^2 = T(j\omega)T^*(j\omega) \quad (1-1)$$

или

$$|T(j\omega)|^2 = T(j\omega)T(-j\omega). \quad (1-2)$$

Из уравнения (1-2) очевидно, что $|T(j\omega)|^2$ есть отношение четных многочленов по ω . Определим:

$$W(s^2) = |T(j\omega)|_{\omega^2 = -s^2}^2, \quad (1-3)$$

т. е.

$$W(s^2) = T(s)T(-s). \quad (1-4)$$

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы $|T(j\omega)|^2$ была модульной (квадратичной) функцией, следующие (рис. 1-1):

1. $W(s^2)$ должна быть четной функцией от s , следовательно, ее нули и полюсы должны быть расположены симметрично по квадратам.

2. Все нули или полюсы на мнимой оси должны иметь четную кратность.

Пример 1-1.

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 4}; \quad (1-5)$$

$$W(s^2) = \frac{-s^2 + 1}{s^4 + 4} \quad (1-6)$$

или

$$W(s^2) = \frac{(s+1)(-s+1)}{(s^2+2s+2)(s-2s+2)}. \quad (1-7)$$

Следовательно,

$$T(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} \cdot \frac{1-s}{s^2+2s+2}, \dots \quad (1-8)$$

Ввиду произвольности выбора $T(s)$ можно получить различные функции цепей: минимальной или немини-

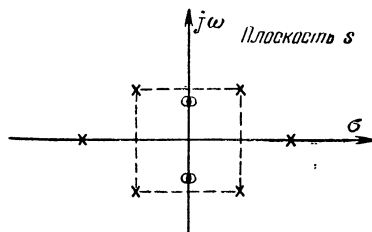


Рис. 1-1. Нули и полюсы функции $W(s^2)$.

мальной фазы, устойчивые или неустойчивые. Мы рассмотрим дальше, какие выводы следуют из этого.

Фазовая функция. Положим

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} \quad (1-9)$$

и определим

$$\varphi(s) = \text{Arth} \frac{n_1(s)}{m_1(s)} - \text{Arth} \frac{n_2(s)}{m_2(s)} \quad (1-10)$$

или

$$\varphi(s) = \text{Arth} \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}, \quad (1-11)$$

где m и n — соответственно четные и нечетные части функций $N(s)$ и $D(s)$.

Можно показать, что при $s = j\omega$:

$$\varphi(j\omega) = j \arctg \frac{\operatorname{Im} T(j\omega)}{\operatorname{Re} T(j\omega)}; \quad (1-12)$$

$$\varphi(j\omega) = j \arctg A(\omega) \quad (1-13)$$

или

$$\varphi(j\omega) = j \arg T(j\omega). \quad (1-14)$$

Функция $A(\omega)$, называемая функцией угла, представляет собой отношение нечетного многочлена к четному многочлену по ω .*

Чтобы составить $T(s)$ из $A(\omega)$, замечаем, что

$$jA(\omega) = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2} \Big|_{s=j\omega}, \quad (1-15)$$

и, следовательно,

$$[1 + jA(\omega)] \Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2 + n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2} \quad (1-16)$$

или

$$[1 + jA(\omega)] \Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = \frac{(m_1 + n_1)(m_2 - n_2)}{m_1 m_2 - n_1 n_2}. \quad (1-17)$$

Таким образом, если заданная функция $A(\omega)$ имеет вид:

$$A(\omega) = \frac{p(\omega)}{q(\omega)}, \quad (1-18)$$

то мы образуем многочлен $q(\omega) + jp(\omega)$ и подставляем s/j вместо ω . Тогда на основании уравнения (1-17) нули полученного многочлена по s станут нулями или полюсами функции $T(s)$, причем здесь имеет место такая же произвольность, как и для модульной функции.

* Возможно также отношение четного многочлена к нечетному, если учесть, что в $A(\omega)$ сократилось одно ω , дающее нуль или полюс функции $T(s)$ в начале координат.

Пример 1-2.

$$A(\omega) = \frac{-\omega^3 - \omega}{15 - \omega^2}; \quad (1-19)$$

$$q(\omega) + jp(\omega) = -j\omega^3 - \omega^2 - j\omega + 15; \quad (1-20)$$

$$q(\omega) + jp(\omega) \Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = s^3 + s^2 - s + 15, \quad (1-21)$$

т. е.

$$q(\omega) + jp(\omega) \Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = (s + 3)(s^2 - 2s + 5). \quad (1-22)$$

Итак, можно выбрать любую из функций

$$T(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 5}; \quad (s + 3)(s^2 - 2s + 5);$$

$$\frac{s^2 - 2s + 5}{s - 3}. \quad (1-23)$$

Таким образом, для того чтобы функция $A(\omega)$ была функцией угла, необходимо и достаточно, чтобы она была нечетной рациональной функцией от ω .

*Функция запаздывания*¹. Если заданная передаточная функция $T(s)$ имеет вид:

$$T(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{r=1}^n (s - p_r)}, \quad (1-24)$$

то можно записать:

$$\frac{T(s)}{T(-s)} = (-1)^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i) \prod_{r=1}^n (s + p_r)}{\prod_{r=1}^n (s - p_r) \prod_{i=1}^m (s + z_i)}. \quad (1-25)$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)} \right| = 1 \quad (1-26)$$

¹ См. [Л. 2. 423].

и

$$\ln \frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)} = j \arg \frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)} \quad (1-27)$$

или

$$\ln \frac{T(j\omega)}{T(-j\omega)} = 2j \arg T(j\omega). \quad (1-28)$$

Теперь определим запаздывание (групповое):

$$D_l(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg T(j\omega) \quad (1-29)$$

и из уравнений (1-12) и (1-29) найдем:

$$D_l(\omega) = \frac{j}{2} \frac{d}{d\omega} \ln \left[\frac{(-1)^{m-n} \prod_{i=1}^m (j\omega - z_i) \prod_{r=1}^n (j\omega + p_r)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_r) \prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)} \right]; \quad (1-30)$$

$$D_l(\omega) = \frac{j}{2} \left[\sum_i^m \frac{d}{d\omega} \ln \frac{j\omega - z_i}{j\omega + z_i} - \sum_r^n \frac{d}{d\omega} \ln \frac{j\omega - p_r}{j\omega + p_r} \right]; \quad (1-31)$$

$$D_l(\omega) = \frac{j}{2} \left[\sum_i^m \frac{-2jz_i}{\omega^2 + z_i^2} - \sum_r^n \frac{-2jp_r}{\omega^2 + p_r^2} \right]; \quad (1-32)$$

$$D_l(\omega) = \sum_i^m \frac{z_i}{\omega^2 + z_i^2} - \sum_r^n \frac{p_r}{\omega^2 + p_r^2}. \quad (1-33)$$

Следовательно, для того чтобы отношение четных многочленов по ω было функцией запаздывания, необходимо, чтобы оно разлагалось на простые дроби по ω^2 с остатками, определяемыми уравнениями (1-33). Чтобы показать, что это условие является также достаточным, перепишем уравнение (1-33) в виде

$$D_l(\omega) = \sum_i^m \frac{-\frac{1}{z_i}}{1 + \left(\frac{\omega}{z_i}\right)^2} - \sum_r^n \frac{-\frac{1}{p_r}}{1 + \left(\frac{\omega}{p_r}\right)^2}. \quad (1-34)$$

После интегрирования получаем:

$$\arg T(j\omega) = \sum_i^m \operatorname{arctg} \frac{\omega}{-z_i} - \sum_r^n \operatorname{arctg} \frac{\omega}{-p_r}. \quad (1-35)$$

При вещественных p_r и z_i этой функции соответствует передаточная функция

$$T(s) = \frac{\pi(s - z_i)}{\pi(s - p_r)}. \quad (1-36)$$

Комплексные p_r или z_i в разложении функции $D_l(\omega)$ дают после интегрирования члены такого вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\operatorname{Re} p_r + j \operatorname{Im} p_r} + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\operatorname{Re} p_r - j \operatorname{Im} p_r} = \\ = \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} p_r \omega}{(\operatorname{Re} p_r)^2 + (\operatorname{Im} p_r)^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (1-37)$$

Уравнение (1-37), очевидно, представляет фазу квадратичного множителя $s^2 + 2 \operatorname{Re} p_r + (\operatorname{Re} p_r)^2 + (\operatorname{Im} p_r)^2$. Таким образом, по $D_l(\omega)$ с соответствующими остатками можно построить $T(s)$. Это доказывает достаточность условия.

Пример 1-3.

$$D_l(\omega) = \frac{\omega^4 + 6\omega^2}{\omega^6 + \omega^4 + 4\omega^2 + 4}; \quad (1-38)$$

$$D_l(\omega) = \frac{-1}{\omega^2 + 1} + \frac{1 + j1}{\omega^2 + j2} - \frac{1 - j1}{\omega^2 - j2}. \quad (1-39)$$

Можно выбрать¹:

$$z_1 = -1; \quad p_1 = -1 + j1; \quad p_1^* = -1 - j1 \quad (1-40)$$

и

$$T(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2}. \quad (1-41)$$

¹ В чем произвольность выбора z_i и p_r ?

1-2. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ИДЕАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ

Мы определяем идеальную реакцию фильтра нижних частот как реакцию, изображенную на рис. 1-2. Реакция

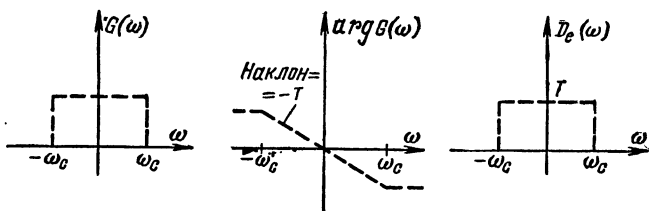


Рис. 1-2. Идеальная характеристика фильтра нижних частот.

цепи на импульс длительностью τ может тогда быть вычислена следующим образом (рис. 1-3):

$$g(t) = \frac{1}{\pi} S_i[\omega_c(t - T + \tau/2)] - S_i[\omega_c(t - T - \tau/2)], \quad (1-42)$$

где

$$S_i(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx.$$

Эта реакция не равна нулю при $t < 0$, т. е. выходной импульс возникает раньше, чем приложен входной импульс, что, очевидно, невозможно. Следовательно, такая характеристика теоретически нереализуема. Сразу возникает вопрос: можно ли получить идеальную амплитудную характеристику, если мы можем допустить нелинейность фазы?

Критерий Пейли — Винера. Чтобы ответить на этот вопрос, мы применим критерий Пейли — Винера [Л. 102, 1.202, 1.204,

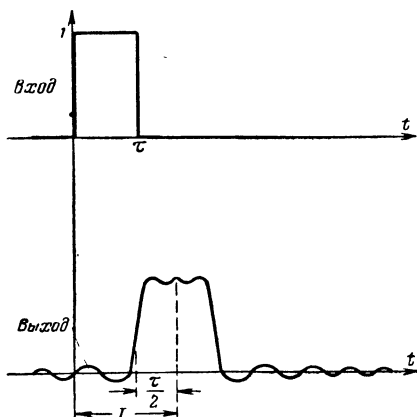


Рис. 1-3. Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот.

2.106]. Согласно этой теореме необходимое и достаточное условие теоретической реализуемости четной модульной функции $|G(\omega)|$ * записывается как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |G'(\omega)| |}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (1-43)$$

Если интеграл ограничен, то можно найти такую фазовую функцию, при которой полная частотная характеристика $|G(\omega)| e^{j \arg G(\omega)}$ будет соответствовать нулевой преходящей реакции при $t < 0^{**}$.

Заметим, что приведенное выше условие не является достаточным условием физической осуществимости самой цепи; очевидно, это есть необходимое условие.

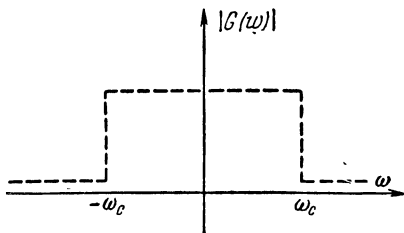


Рис. 1-4. Модифицированная идеальная амплитудная характеристика.

Применение этого критерия к идеальной амплитудной характеристике показывает, что в полосе задерживания подынтегральное выражение будет равно бесконечности, и, следовательно, харак-

теристика будет нереализуемой. Если в полосе задерживания задана ненулевая выходная функция (рис. 1-4), характеристика является реализуемой (соответствующая преходящая реакция равна нулю при $t < 0$).

Если задана теоретически реализуемая амплитудная характеристика $|G(\omega)|$, то представляет интерес отыскание соответствующей фазовой характеристики. К сожалению, соответствующая функция $\arg G(\omega)$ не является единственной.

Эта произвольность фазы связана с тем, что, как указано выше, для данной рациональной модульной функ-

* Символом $G(\omega)$ мы будем обозначать любую комплексную функцию от ω , рациональную или иррациональную; символ $T(j\omega)$ будет использоваться для обозначения рациональных функций.

** Оригинал выражения $[I(\omega) e^{j\varphi(\omega)}] [|G(\omega)| e^{j \arg G(\omega)}]$ равен нулю при $t \leq 0$; здесь первое выражение есть изображение Фурье функции $f(t)$, равной нулю при $t < 0$.

ции $|T(j\omega)|^2$, состоящей из множителей вида $\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0$, можно выбрать любое сочетание нулей и полюсов функции $T(s)$ в правой или левой полуплоскости. Заданной функции $|T(j\omega)|^2$ могут соответствовать различные функции $T(s)$ и, следовательно, различные функции $\arg T(j\omega)$. Если же мы ограничимся устойчивыми функциями минимальной фазы [т. е. функциями $T(s)$, у которых все нули и полюсы находятся в левой полуплоскости], то функция $\arg T(j\omega)$ будет единственной. Это утверждение справедливо для любой функции $G(\omega)$. Чтобы найти эту единственную фазовую характеристику в общем случае, применим преобразование Гильберта.

Преобразование Гильберта. Преобразование Гильберта [Л. 1.102] связывает между собой изменения по оси $j\omega$ вещественной и мнимой частей функции, аналитической в правой полуплоскости и на оси $j\omega$.

Мы замечаем, что если функция $G(s/j)$ аналитическая и не равна нулю в правой полуплоскости [т. е. если $T(s)$ — устойчивая функция минимальной фазы], то этому условию удовлетворяет функция $\ln G'(s/j)$. Тогда преобразование Гильберта связывает между собой затухание $\ln|G(\omega)| = \alpha(\omega)$ и фазовый угол $\arg G(\omega) = \beta(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\zeta) d\zeta}{\omega - \zeta}; \quad (1-44)$$

$$\beta(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\zeta) d\zeta}{\omega - \zeta}. \quad (1-45)$$

В том случае, если $\alpha(\omega)$ и/или $\beta(\omega)$ являются неаналитическими в ряде дискретных точек на оси $j\omega$,

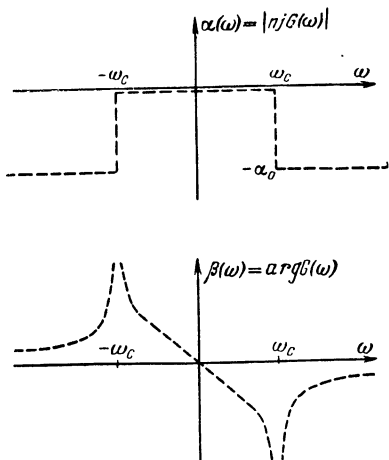


Рис. 1-5. Модифицированная идеальная амплитудная характеристика и соответствующая фазовая характеристика.

уравнения (1-44) и (1-45) можно рассматривать как пределы уравнений:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \zeta) \beta(\zeta) d\zeta}{\sigma^2 + (\omega - \zeta)^2}; \quad (1-46)$$

$$\beta(\omega) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \zeta) \alpha(\zeta) d\zeta}{\sigma^2 + (\omega - \zeta)^2}. \quad (1-47)$$

Теперь мы можем вычислить единственную фазовую функцию, соответствующую видоизмененной идеальной аппроксимации (рис. 1-4):

$$\begin{aligned} \beta(\omega) = & -\frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\omega_c} \frac{-\alpha_0 (\omega - \zeta) d\zeta}{\sigma^2 + (\omega - \zeta)^2} - \\ & -\frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{-\alpha_0 (\omega - \zeta) d\zeta}{\sigma^2 + (\omega - \zeta)^2}; \end{aligned} \quad (1-48)$$

$$\beta(\omega) = -\frac{\alpha_0}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\omega_c}^{\infty} \left[\frac{-(\omega + \zeta)}{\sigma^2 + (\omega - \zeta)^2} - \frac{(\omega - \zeta)}{\omega^2 + (\omega - \zeta)^2} \right] d\zeta; \quad (1-49)$$

$$\beta(\omega) = +\frac{\alpha_0}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \ln \frac{\sqrt{\sigma^2 + (\omega - \omega_c)^2}}{\sqrt{\sigma^2 + (\omega + \omega_c)^2}}; \quad (1-50)$$

$$\begin{aligned} \beta(\omega) = & \frac{\alpha_0}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\sigma \pm j(\omega - \omega_c)}{\sigma \pm j(\omega + \omega_c)} \right| = \\ = & \frac{\alpha_0}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega + \omega_c} \right|. \end{aligned} \quad (1-51)$$

Эти функции изображены на рис. 1-5. Заметим, что хотя функция $\alpha(\omega)$ аналитическая, $\beta(\omega)$ не является аналитической функцией на оси ω , так как она имеет точки

ветвления при $\omega = \pm \omega_c$, поэтому здесь требуется переход к пределу.

В качестве упражнения предоставляем читателям найти запаздывание для этой реакции (при условии, что допустимо дифференцирование до перехода к пределу).

Подводя итоги, мы приходим к следующему заключению:

1. Идеальная амплитудная характеристика нижних частот, имеющая нулевую величину в полосе задерживания, теоретически нереализуема.

2. Нельзя одновременно добиться хорошей аппроксимации идеальных характеристик $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ посредством устойчивых функций минимальной фазы, так как, если мы приближаемся к идеальной характеристике для одной функции, другая принимает вид, изображенной на рис. 1-5 или 1-6 (задача 1-5).

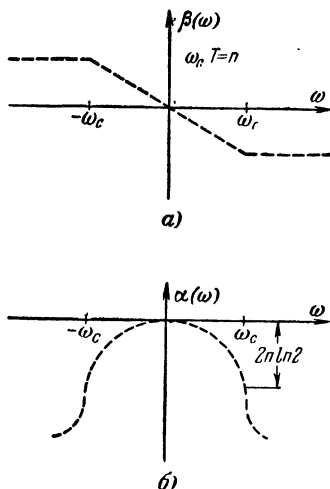


Рис. 1-6. Идеальная фазовая характеристика и соответствующая амплитудная характеристика.

1-3. АППРОКСИМАЦИЯ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ НЕМИНИМАЛЬНОЙ ФАЗЫ

Хотя мы избегаем создавать идеальные характеристики на нижних частотах одновременно по модулю и по запаздыванию при помощи неустойчивых систем для уравновешенных цепей RLC или активных цепей, аппроксимация посредством функций неминимальной фазы дает определенные преимущества¹. Имеются два очевидных способа получения таких функций:

1. а) Берут функцию $T_1(s)$ с хорошей амплитудной характеристикой нижних частот.

¹ Если нули и полюсы $T(s)$ расположены вблизи мнимой оси (как в случае полосового фильтра), то можно реализовать заземленные цепи RLC даже при функции неминимальной фазы.

б) Корректируют характеристику запаздывания функции $T_1(s)$ при помощи функции постоянного модуля $T_2(s)$:

$$T_2(s) = \frac{\pi(s^2 - 2\rho_i \omega_i s + \omega_i^2)}{\pi(s^2 + 2\rho_i \omega_i s + \omega_i^2)}, \quad (1-52)$$

тогда

$$|T(j\omega)| = |T_1(j\omega)| |T_2(j\omega)| \quad (1-53)$$

или

$$|T(j\omega)| = |T_1(j\omega)|. \quad (1-54)$$

Этот способ разобран далее в гл. 5.

2. а) Берут функцию неминимальной фазы $T_1(s) = 1/D(s)$, имеющую желаемую характеристику запаздывания, деленную на масштабный множитель 2.

б) Образуют

$$T_2(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1-55)$$

где $N(s)$ выбрана так, чтобы $|T_2(j\omega)|$ была равна квадратному корню из требуемой квадратичной амплитудной характеристики.

в) Тогда искомая $T(s)$ равна:

$$T(s) = \frac{N(s)N(-s)}{D^2(s)}. \quad (1-56)$$

В качестве упражнения предоставляем доказать, что $T(s)$ действительно есть требуемая функция. Заметим, что оба указанных способа позволяют независимо получать требуемые аппроксимации. Из этого следует, что при использовании функций неминимальной фазы можно подойти сколь угодно близко к идеальным амплитудным и фазовым характеристикам нижних частот.

Задачи

1-1. Какие из нижеприведенных выражений являются модульными функциями? Дайте обоснование, найдя соответствующие передаточные функции:

$$\text{а) } \frac{1}{1 + \omega^2}; \quad \text{б) } \frac{1}{1 + \frac{j\omega^2}{\omega^2 - 1}};$$

$$\text{в) } \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1}\right)}; \quad \text{г) } 1 + \omega^4.$$

1-2. Какие из нижеприведенных выражений являются функциями угла?

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{\omega}{1 + \omega^2}; \quad \text{б) } \frac{\omega}{1 - \omega^2}; \\ \text{в) } & \omega(1 + \omega^2); \quad \text{г) } \frac{1 + \omega^2}{3\omega}. \end{aligned}$$

Найдите соответствующие функции $T(s)$.

1-3. Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция угла $A|\omega|$ принадлежала устойчивой передаточной функции неминимальной фазы?

1-4. При каких значениях K нижеприведенное выражение является функцией запаздывания?

$$D_1(\omega) = K \frac{\omega^2 - 3}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 9)}.$$

Найдите все возможные функции $T(s)$.

1-5. Покажите, что идеальной фазовой характеристике, изображенной на рис. 1-6,а, соответствует функция $\alpha(\omega)$, изображенная на рис. 1-6,б.

1-6. Утверждают, что разность степеней многочленов числителя и знаменателя функции запаздывания должна быть равна двум. Докажите это утверждение или опровергните его.

Глава вторая

РАВНОВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Для более подробного изучения теории аппроксимации необходимы беглые сведения по теории эллиптических функций. Поэтому мы должны ознакомиться с эллиптическими функциями и их применением при образовании рациональных функций.

2-1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения. Приступая к изучению эллиптических функций, определим интеграл

$$z(\varphi; m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\Omega}{\sqrt{1 - m \sin^2 \Omega}}, \quad (2-1)$$

который называется эллиптическим интегралом первого рода. Этот интеграл нельзя выразить элементарными

функциями, но можно вычислить z при данных φ и параметре m путем разложения в ряд*.

Если уравнение (2-1) понимать как преобразование переменной φ в переменную z (при постоянном m), то можно определить следующие функции (так называемые эллиптические функции Якоби):

$$\operatorname{sn} z = \sin \varphi \text{ (эллиптический синус);} \quad (2-2)$$

$$\operatorname{cn} z = \cos \varphi \text{ (эллиптический косинус).} \quad (2-3)$$

Тогда, так же как в случае тригонометрических функций, определяем:

$$\operatorname{sc} z = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z} \text{ (эллиптический тангенс);} \quad (2-4)$$

$$\operatorname{cs} z = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z} \text{ (эллиптический котангенс);} \quad (2-5)$$

$$\operatorname{nc} z = \frac{1}{\operatorname{cn} z} \text{ (эллиптический секанс);} \quad (2-6)$$

$$\operatorname{ns} z = \frac{1}{\operatorname{sn} z} \text{ (эллиптический косеканс).} \quad (2-7)$$

Уместно определить, кроме того, дополнительную функцию, для которой нет аналогии среди тригонометрических функций:

$$\operatorname{dn} z = (1 - m \operatorname{sn}^2 z)^{1/2}. \quad (2-8)$$

Отсюда определяются следующие функции:

$$\operatorname{nd} z = \frac{1}{\operatorname{dn} z}; \quad (2-9)$$

$$\operatorname{ds} z = \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}; \quad (2-10)$$

$$\operatorname{sd} z = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}; \quad (2-11)$$

$$\operatorname{dc} z = \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}; \quad (2-12)$$

$$\operatorname{cd} z = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}. \quad (2-13)$$

* Некоторые авторы предпочитают рассматривать как параметр величины k или θ ; тогда m можно вычислить из равенств: $m = k^2 = \sin^2 \theta$. В нашем случае $0 \leq m \leq 1$, хотя это условие вообще не обязательно.

В итоге мы получаем 12 эллиптических функций. Если нужно особо выделить параметр m , можно использовать например, следующую запись: $\operatorname{sn}(z; m)$.

Из уравнения (2-1) мы заключаем, что

$$z(-\varphi, m) = -z(\varphi; m), \quad (2-14)$$

откуда

$$\operatorname{sn}[-z(\varphi; m)] = \operatorname{sn}[z(-\varphi; m)]; \quad (2-15)$$

$$\operatorname{sn}[-z(\varphi); m] = \sin(-\varphi); \quad (2-16)$$

$$\operatorname{sn}[-z(\varphi); m] = -\sin \varphi; \quad (2-17)$$

$$\operatorname{sn}[-z(\varphi); m] = -\sin[z(\varphi; m)]. \quad (2-18)$$

Подобно этому можно показать, что

$$\operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z; \quad (2-19)$$

$$\operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z. \quad (2-20)$$

Вырожденные эллиптические функции. Если в уравнении (2-1) положить $m=0$, то $z=\varphi$ и, как следует из уравнений (2-2) — (2-13), эллиптические функции вырождаются в тригонометрические функции:

$$\operatorname{sn}(z; 0) = \sin z; \quad (2-21)$$

$$\operatorname{cn}(z; 0) = \cos z; \quad (2-22)$$

$$\operatorname{dn}(z; 0) = 1 \quad (2-23)$$

и т. д.

При $m=1$ вместо (2-1) получим:

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\Omega}{\cos \Omega}; \quad (2-24)$$

$$\text{при } z = \operatorname{Arcsch} \cos \varphi = \operatorname{Arcth} \sin \varphi, \quad (2-25)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sn}(z; 1) = \sin \varphi \text{ [из уравнения (2-2)];} \quad (2-26)$$

$$\operatorname{sn}(z; 1) = \operatorname{th} z \text{ [из уравнения (2-25)].} \quad (2-27)$$

Подобно этому можно показать, что

$$\operatorname{cn}(z; 1) = \operatorname{dn}(z; 1) = \cos \varphi; \quad (2-28)$$

$$\operatorname{cn}(z; 1) = \operatorname{sch} z. \quad (2-29)$$

Период эллиптических функций на вещественной оси. На рис. 2-1,а нанесено подынтегральное выражение в уравнении (2-1) при вещественных φ , Ω . Если

$u(\varphi; m)^*$ истолковывать как площадь под кривой, то можно начертить u в зависимости от φ (рис. 2-1,б). Но $\sin \varphi = \sin u$, так что для данного значения u (u_1 на рис. 2-1,б) можно найти $\sin u_1$ (рис. 2-1,в) простым построением, как показано на рисунке.

Поскольку функция $\sin \varphi$ периодическая, можно найти другие значения $u(u_n)$, такие, что $\sin u_1 = \sin u_n$. На рисунке показано построение для отыскания u_n .

Из симметрии функции $u(\varphi; t)$ и периодичности $\sin \varphi$ следует, что

$$u_n - u_{n-1} = \text{const.} \quad (2-30)$$

Другими словами, функция $\operatorname{sn} u$ — периодическая. Посредством аналогичных рассуждений можно показать, что другие эллиптические функции также периодические.

Подобно круговым функциям, любую эллиптическую функцию можно воспроизвести во всем периоде, зная ее поведение за четверть периода. Поэтому уместно определить полный эллиптический интеграл

$$K(m) \equiv u\left(\frac{\pi}{2}; m\right) \quad (2-31)$$

ИЛИ

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Omega}{V \sqrt{1 - m \sin^2 \Omega}}, \quad (2-32)$$

* $z = u + jv$.

который представляет четверть периода эллиптического синуса на вещественной оси¹. Из рис. 2-1,а и 2-1,б сразу находим

$$\operatorname{sn}[K(m); m]=1; \quad (2-33)$$

$$\operatorname{sn}[2K(m); m]=0 \quad (2-34)$$

и т. д.

Период эллиптических функций на мнимой оси. В отличие от тригонометрических функций (но подобно гиперболическим функциям) эллиптические функции являются периодическими на мнимой оси. Чтобы доказать это, перепишем уравнение (2-1):

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\Omega}{\sqrt{1 - m \sin^2 \Omega}} \quad (2-35)$$

и произведем следующую замену переменной:

$$\sin \Omega = j \operatorname{tg} \zeta, \quad (2-36)$$

тогда

$$\cos \Omega = \sqrt{1 - \sin^2 \Omega}; \quad (2-37)$$

$$\cos \Omega = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta}; \quad (2-38)$$

$$\cos \Omega = \sec \zeta. \quad (2-39)$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - m \sin^2 \Omega} = \sqrt{1 + m \operatorname{tg}^2 \zeta}; \quad (2-40)$$

$$\sqrt{1 + m \sin^2 \Omega} = \sec \zeta \sqrt{1 - (1 - m) \sin^2 \zeta}. \quad (2-41)$$

Определим теперь дополнительный параметр

$$m_1 = 1 - m \quad (2-42)$$

и вместо уравнения (2-40) будем иметь:

$$\sqrt{1 - m \sin^2 \Omega} = \sec \zeta \sqrt{1 - m_1 \sin^2 \zeta}. \quad (2-43)$$

¹ Заметим, что $K(0) = \frac{\pi}{2}$; $K(1) = \infty$.

Кроме того, можно записать:

$$d(\sin \Omega) = j d(\operatorname{tg} \zeta); \quad (2-44)$$

$$\cos \Omega d\Omega = j \sec^2 \zeta d\zeta \quad (2-45)$$

и с учетом уравнения (2-30):

$$d\Omega = j \sec \zeta d\zeta. \quad (2-46)$$

Подставляя уравнения (2-43) и (2-46) в (2-35), получаем:

$$-jz = \int_0^{\gamma} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - m_1 \sin^2 \zeta}}, \quad (2-47)$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg}(-j \sin \varphi) \text{ [из уравнения (2-36)]}. \quad (2-48)$$

Так как уравнение (2-47) имеет такую же форму, как уравнение (2-35), из определения эллиптических функций [уравнения (2-2)—(2-13)] имеем:

$$\operatorname{sn}(-jz; m_1) = \sin \gamma; \quad \operatorname{cn}(-jz; m_1) = \cos \gamma, \quad (2-49)$$

тогда как

$$\operatorname{sn}(z; m) = \sin \varphi; \quad (2-50)$$

$$\operatorname{sn}(z; m) = j \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \text{ [из уравнения (2-48)];} \quad (2-51)$$

$$\sin(z; m) = j \frac{\operatorname{sn}(-jz; m_1)}{\operatorname{cn}(-jz; m_1)} \text{ [из уравнения (2-49)];} \quad (2-52)$$

$$\operatorname{sn}(z; m) = j \operatorname{sc}(-jz; m_1), \quad (2-53)$$

отсюда заключаем, что

$$\operatorname{sn}(jz; m) = j \operatorname{sc}(z; m_1). \quad (2-54)$$

Но у $\operatorname{sc}(z; m_1)$ четверть периода на вещественной оси равна $K(m_1) = K(1 - m)$, поэтому на основании уравне-

ния (2-54) для $\operatorname{sn}(z; m)$ четверть периода на мнимой оси равна $K(m_1)$. Подобно этому можно показать, что

$$\operatorname{cn}(jz; m) = \frac{1}{\operatorname{cn}(z; m_1)}; \quad (2-55)$$

$$\operatorname{dn}(jz; m) = \frac{\operatorname{dn}(z; m_1)}{\operatorname{cn}(z; m_1)}; \quad (2-56)$$

$$\operatorname{sc}(jz; m) = j \operatorname{sn}(z; m_1). \quad (2-57)$$

Например,

$$\operatorname{cn}[jK(m_1); m] = \frac{1}{\operatorname{cn}[K(m_1); m_1]}; \quad (2-58)$$

$$\operatorname{cn}[jK(m_1); m] = \frac{1}{\cos \pi/2} \text{ [из уравнения (2-3)]; } (2-59)$$

$$\operatorname{cn}[jK(m_1); m] = \infty. \quad (2-60)$$

Следовательно, в отличие от тригонометрических и гиперболических функций эллиптические функции могут иметь конечные полюсы.

Поведение в комплексной плоскости. Зная поведение функций $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и т. д. на вещественной и мнимой осях, мы можем вычислить их во всей комплексной плоскости посредством известных формул (табл. 2-5), подобных соответствующим формулам для тригонометрических функций. В табл. 2-1 даны значения важных эллиптических функций для различных значений z .

Таблица 2-1

Некоторые важные значения эллиптических функций

$z \rightarrow f(z)$	0	$K(m)$	$2K(m)$	$jK(m)$	$2jK(m_1)$	$K(m) + jK(m_1)$	$\frac{2K(m) + 2jK(m_1)}{}$
$\operatorname{sn} z$	0	1	0	∞	0	$m^{-1/2}$	0
$\operatorname{cn} z$	1	0	-1	∞	-1	$j \left(\frac{m_1}{m} \right)^{1/2}$	1
$\operatorname{dn} z$	1	$m_1^{1/2}$	1	∞	-1	0	-1
$\operatorname{sc} z$	0	∞	0	$j1$	0	$j \left(\frac{1}{m_1} \right)^{1/2}$	0
$\operatorname{ds} z$	∞	$m_1^{1/2}$	∞	$-jm^{1/2}$	∞	0	∞
$\operatorname{dc} z$	1	∞	-1	$m^{1/2}$	1	0	-1

Т а б л и ц а 2-2

$$\operatorname{sn}(jz; m) = j \operatorname{sc}(z; m_1)$$

$$\operatorname{dn}(jz; m) = \operatorname{ds}(z; m_1)$$

$$\operatorname{cn}(jz; m) = \operatorname{nc}(z; m_1)$$

Т а б л и ц а 2-3

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = \operatorname{sn}^{-1} \left(\omega; \frac{1}{a^2} \right) + C$$

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = \frac{a}{(1 + a^2)^{1/2}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\omega; \frac{1}{a^2 + 1} \right) + C$$

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = ja \operatorname{dn}^{-1} (\omega; 1 - a^2) + C$$

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = \operatorname{sc}^{-1} \left(\omega; \frac{a^2 - 1}{a^2} \right) + C$$

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = j \frac{a}{(1 + a^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \operatorname{ds}^{-1} \left[\frac{\omega}{(1 + a^2)^{1/2}}; \frac{a^2}{1 + a^2} \right] + C$$

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] (1 - \omega^2) \right\}^{1/2}} = \operatorname{dc}^{-1} \left(\omega; \frac{1}{a^2} \right) + C$$

Т а б л и ц а 2-4

Аргумент	sn	cn	dn
z	$\operatorname{sn} z$	$\operatorname{cn} z$	$\operatorname{dn} z$
$-z$	$-\operatorname{sn} z$	$\operatorname{cn} z$	$\operatorname{dn} z$
$z \pm 2K(m)$	$-\operatorname{sn} z$	$-\operatorname{cn} z$	$\operatorname{dn} z$
$z \pm 2jK(m)$	$\operatorname{sn} z$	$-\operatorname{cn} z$	$-\operatorname{dn} z$
$z \pm 2K(m) \pm 2jK(m_1)$	$-\operatorname{sn} z$	$-\operatorname{cn} z$	$-\operatorname{dn} z$
$z \pm K(m)$	$\pm \operatorname{cd} z$	$\mp m_1^{1/2} \operatorname{sd} z$	$m_1^{1/2} \operatorname{nd} z$
$z \pm jK(m_1)$	$\pm m^{-1/2} \operatorname{ns} z$	$\mp jm^{1/2} \operatorname{ds} z$	$\mp j \operatorname{cs} z$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(z_1 + z_2) &= (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)/D \\
\operatorname{cn}(z_1 + z_2) &= (c_1 c_2 - s_1 d_1 s_2 d_2)/D \\
\operatorname{dn}(z_1 + z_2) &= (d_1 d_2 - m s_1 c_1 s_2 c_2)/D \\
\operatorname{sn}(z_1 + z_2) \operatorname{sn}(z_1 - z_2) &= (s_1^2 - s_2^2)/D \\
\operatorname{cn}(z_1 + z_2) \operatorname{cn}(z_1 - z_2) &= (c_1^2 - s_2^2 d_1^2)/D \\
\operatorname{dn}(z_1 + z_2) \operatorname{dn}(z_1 - z_2) &= (d_1^2 - m c_1^2 s_1^2)/D,
\end{aligned}$$

где $D = 1 - m s_1^2 s_2^2$;

$s_1 = \operatorname{sn}(z_1, m)$;

$s_2 = \operatorname{sn}(z_2, m)$ и т. д.

Кроме того, на рис. 2-2 показано распределение нулей и полюсов этих функций в некоторой области плоскости z около начала координат.

Ввиду периодичности функций можно очевидным образом распространить сведения, содержащиеся в таблице и на рисунке, на всю плоскость z .

Формулы эллиптических функций. Можно связать параметр m (и, следовательно, m_1) с четвертями периода, поскольку они определяются через этот параметр [см. уравнение (2-31)]. Ниже приводятся эти соотношения вместе с формулами для вычисления эллиптических функций Якоби на всей вещественной (или мнимой) оси. Имеются также таблицы эллиптических функций [Л. 2.112, 2.114].

В [Л. 2.112] даны следующие формулы.

Определим

$$l = \frac{1}{2} \frac{(1 - m_1^{1/4})}{(1 + m_1^{1/4})}; \quad (2-61)$$

$$q = l + 2l^5 + 15l^9 + 150l^{13} + \dots \quad (2-62)$$

Тогда

$$\frac{K(m_1)}{K(m)} = \frac{1}{\pi} \ln 1/q;$$

$$K(m) = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2. \quad (2-63)$$

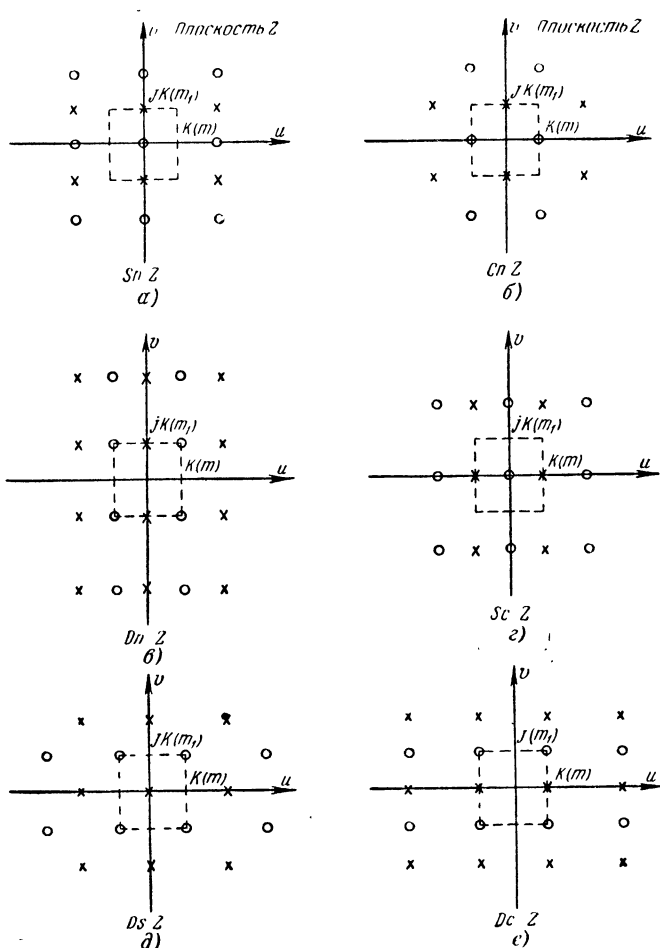


Рис. 2-2. Расположение нулей и полюсов эллиптических функций.

Можно показать, что при m , близком к 0^* :

$$\frac{K(m_1)}{K(m)} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{m}, \quad (2-64)$$

* При m , близком к 1, меняются местами m и m_1 и определяются l_1 , q_1 и т. д. Тогда можно показать, что $\ln q \ln q_1 = \pi^2$.

а при m , близком к 1:

$$\frac{K(m)}{K(m_1)} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{m_1}. \quad (2-65)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(n; m) &= \left(\frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\operatorname{sn} \pi u' - q^2 \sin^3 \pi u' + q^6 \sin 5\pi u' - \dots}{D(q; u')} \right); \end{aligned} \quad (2-66)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u; m) &= \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\cos \pi u' + q^2 \cos^3 \pi u' + q^6 \cos 5\pi u' + \dots}{D(q; u')} \right); \end{aligned} \quad (2-67)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u; m) &= \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1 + 2q \cos 2\pi u' + 2q^4 \cos^4 \pi u' + 2q^9 \cos 6\pi u' + \dots}{D(q; u')} \right), \end{aligned} \quad (2-68)$$

где

$$\begin{aligned} D(q; u') &= 1 - 2q \cos 2\pi u' + \\ &+ 2q^4 \cos 4\pi u' - 2q^9 \cos 6\pi u' + \dots; \end{aligned} \quad (2-69)$$

$$u' = \frac{u}{2K(m)}. \quad (2-70)$$

Пример 2-1. Найти

$$z_1 = \operatorname{sn} \left[\frac{2K(m)}{3} - j 0,438; 0,566 \right]. \quad (2-71)$$

Вычисляем из формул (или таблиц) $K(m) = 1,909$. Затем из табл. 2-2 и 2-5 находим:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{[\operatorname{sn}(1,277; m) \operatorname{dn}(-0,438; m_1) j \operatorname{cn}(1,277; m) \times \dots \rightarrow \\ &\leftarrow \dots \times \operatorname{dn}(1,277; m) \operatorname{sn}(-0,438; m_1) \operatorname{cn}(-0,438; m_1)]}{\operatorname{cn}^2(-0,438; m_1) + 0,566 \operatorname{sn}^2(1,277; m) \operatorname{sn}^2 \times} \quad (2-72) \\ &\quad \times (-0,438; m_1) \end{aligned}$$

где $m = 0,566$; $m_1 = 0,434$. Производя вычисления, получаем:

$$z_1 = \frac{0,906 \cdot 0,962 - j 0,420 \cdot 0,420 \cdot 0,730 \cdot 0,420 \cdot 0,908}{0,908^2 + 0,566 \cdot 0,906^2 \cdot 0,920^2}; \quad (2-73)$$

$$z_1 = 0,962 - j1,129. \quad (2-74)$$

2-2. ПРИВЕДЕНИЕ КРУГОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К РАЦИОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Введение. В теории аппроксимации оказывается удобным использование некоторых сочетаний тригонометрических и обратных тригонометрических функций вследствие их поведения в экстремальных точках. Поскольку лишь рациональные функции могут быть частями реализуемых функций цепи, нам нужно сначала ознакомиться с условиями, при которых такие сочетания являются рациональными функциями.

Приведение круговых функций. Рассмотрим функцию

$$C_n(\omega) = \cos n \arccos \omega, \quad (2-75)$$

где n — целое положительное число. Имеем:

$$C_1(\omega) = \cos(\arccos \omega); \quad (2-76)$$

$$C_1(\omega) = \omega; \quad (2-77)$$

$$C_2(\omega) = \cos^2(\arccos \omega); \quad (2-78)$$

$$C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1; \quad (2-79)$$

$$C_3(\omega) = \cos^3(\arccos \omega); \quad (2-80)$$

$$C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega \text{ и т. д.} \quad (2-81)$$

С другой стороны, если мы определим

$$S_n(\omega) = \sin n \arccos \omega, \quad (2-82)$$

то

$$S_1(\omega) = \sin(\arccos \omega); \quad (2-83)$$

$$S_1(\omega) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos \omega)}; \quad (2-84)$$

$$S_1(\omega) = \sqrt{1 - \omega^2}; \quad (2-85)$$

$$S_2(\omega) = 2\omega \sqrt{1 - \omega^2}; \quad (2-86)$$

$$S_3(\omega) = \sqrt{1 - \omega^2} (4\omega^2 - 1). \quad (2-87)$$

Исследуем, почему $C_n(\omega)$, очевидно, всегда является многочленом, а $S_n(\omega)$ не является таковым.

Прежде всего введем переменную

$$z = \arccos \omega \quad (2-88)$$

и построим путь, проходимый в плоскости z , когда s меняется в плоскости s от $-\infty$ до ∞ (рис. 2-3).

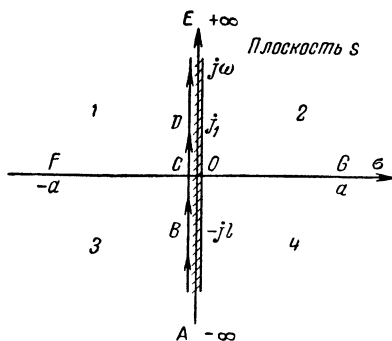


Рис. 2-3. Определение пути в плоскости s .

1 — верхний левый квадрант; 2 — верхний правый квадрант; 3 — нижний левый квадрант; 4 — нижний правый квадрант.

Для облегчения построения запишем:

$$z = - \int \frac{d\omega}{1 - \omega^2}; \quad (2-89)$$

$$z = j \int \frac{ds}{s^2 + 1} \quad (2-90)$$

и рассмотрим это соотношение как пример преобразования Шварца—Кристофеля:

$$z = A \int (\pi s - s_i)^{-a_i} ds + B, \quad (2-91)$$

где

$$s_1 = j1; s_2 = -j1; a_1 = a_2 = \frac{1}{2}; A = j1; B = 0.$$

Следовательно, отображение пути, проходимого в плоскости s , в плоскость z при $s = \pm j1$ будет повернуто на угол 90° . На основании этого, используя условия

$$\omega = -\infty; z = -\pi + j\infty; \quad (2-92)$$

$$\omega = -1; z = -\pi; \quad (2-93)$$

$$\omega = 0; z = \pi/2; \quad (2-94)$$

$$\omega = +1; z = 0; \quad (2-95)$$

$$\omega = +\infty; z = +j\infty, \quad (2-96)$$

можем построить путь в плоскости z (прямоугольник I на рис. 2-4, а). Но из условия

$$\omega = \cos z = \cos(-z) \quad (2-97)$$

мы заключаем, что прямоугольник II также представляет путь в плоскости z . Наконец, ввиду периодичности

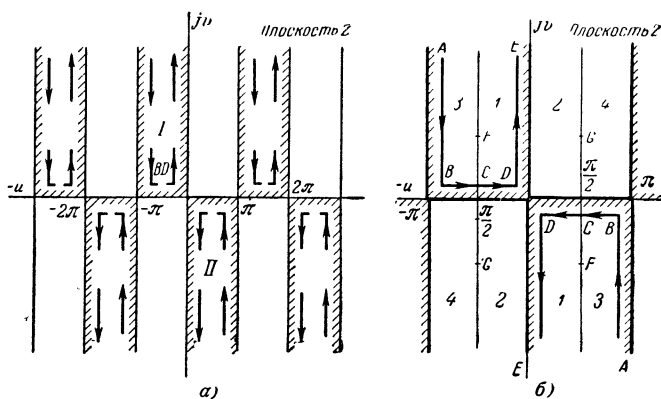


Рис. 2-4. Отображение функции $z = \arccos \omega$.

Обозначения 1, 2, 3, 4 см. на рис. 2-3.

$\cos z$ должна иметь место горизонтальная симметрия, как показано на рис. 2-4, а. Взяв путь в плоскости s от $\sigma = -\infty$ до $\sigma = +\infty$, читатель при помощи аналогичных рассуждений может построить полное отображение плоскости s в плоскость z (рис. 2-4, б).

Далее, замечая, что

$$C_n(\omega) = \cos nz, \quad (2-98)$$

можем расположить нули функции $C_n(\omega)$ в плоскости nz , где

$$nz = \pm (\pi/2 + 2k\pi), \quad k=0, 1, 2. \quad (2-99)$$

Наконец, накладываем многозначный путь в плоскости z (при изменении ω) на плоскость nz и замечаем, что

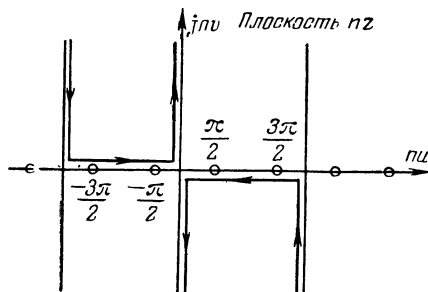


Рис. 2-5. Отображение в плоскости nz функции $z = \arccos \omega$ ($n=2$).

при целом n нули функции $C_n(\omega)$ расположены при одних и тех же значениях ω_i во всех прямоугольных путях (рис. 2-5). Напротив, при нецелом n может иметь место одно из двух¹:

а) Нули $\cos nz$ в плоскости nz могут быть расположены в разных точках внутри прямоугольника. Например, как показано на рис. 2-3 и 2-6, нуль функции $C_n(\omega)$ будет находиться в точке M в прямоугольнике I , а в прямоугольниках II и III — в других точках. Поскольку при отображении в плоскость z точки M должны отображаться в одну-единственную точку, она не может быть нулем функции $C_n(\omega)$.

б) Одиночный нуль $\cos nz$ в плоскости nz может быть расположен в точке, где встречаются два соседних прямоугольника. Это есть частный случай положения а, так как нуль можно связать лишь с одним прямоугольником, и, следовательно, он образует в функции множитель вида $(\omega + \omega_1)^{1/2}$, а не нуль.

¹ Более строгий вывод с использованием римановских поверхностей содержится в [Л. 1.105].

Можно легко показать, что $\sin n \arccos \omega$ не может быть многочленом, наложив прямоугольные пути на нули функции $\sin nz$ в плоскости nz (рис. 2-6, б). Мы замечаем, что два прямоугольника всегда встречаются в точке $nz = 0$ ($\omega = +1$), являющейся нулем функции $\sin nz$. Следо-

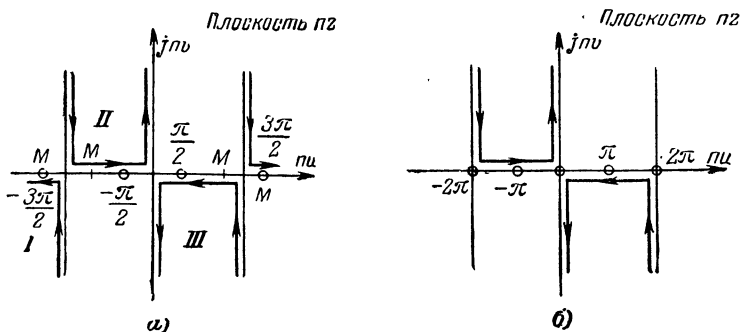


Рис. 2-6. Образование рациональных функций.

вательно, имеет место условие (б), и в $S_n(\omega)$ входит один множитель вида $\sqrt{1 - \omega}$.

Приведение эллиптических функций. Исследуем теперь, при каких условиях

$$E_n(\omega) = \operatorname{cn} [n \operatorname{sn}^{-1}(\omega; m); m']^* \quad (2-100)$$

будет рациональной функцией. При $m \rightarrow 0$ и $m_1 \rightarrow 0$ $E_n(\omega) \rightarrow C_n(\omega)$, так что этот раздел является обобщением предшествующего раздела.

Следуя вышеописанной процедуре, положим:

$$z = \operatorname{sn}^{-1}(\omega; m) \quad (2-101)$$

и построим отображение в плоскости z пути, показанного на рис. 2-7. Используем опять интеграл (табл. 2-3):

$$\int \frac{d\omega}{\left\{ \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] [1 - \omega^2] \right\}^{1/2}} = \frac{a}{(a^2 + 1)^{1/2}} \operatorname{sn}^{-1} \left[\omega; \frac{1}{a^2 + 1} \right], \quad (2-102)$$

* Символ sn^{-1} используется для обозначения обратной эллиптической функции (в данном случае обратного эллиптического косинуса). (Прим. ред.)

из которого следует, что отображение в плоскости z при $\omega = \pm 1 \pm ja$ будет повернуто на $+90^\circ$.

Далее, из табл. 2-1 и 2-5 находим [эти уравнения аналогичны условиям (2-92) — (2-96)]:

$$\operatorname{cn}[-2K(m) + jK(m_1); m] = -\infty; \quad (2-103)$$

$$\operatorname{cn}[-2K(m); m] = -1; \quad (2-104)$$

$$\operatorname{cn}[-K(m); m] = 0; \quad (2-105)$$

$$\operatorname{cn}(0; m) = +1; \quad (2-106)$$

$$\operatorname{cn}[+jK(m); m] = +\infty. \quad (2-107)$$

Эти точки расположены на сторонах и в углах прямоугольника I (рис. 2-7, а). На основании четности и перио-

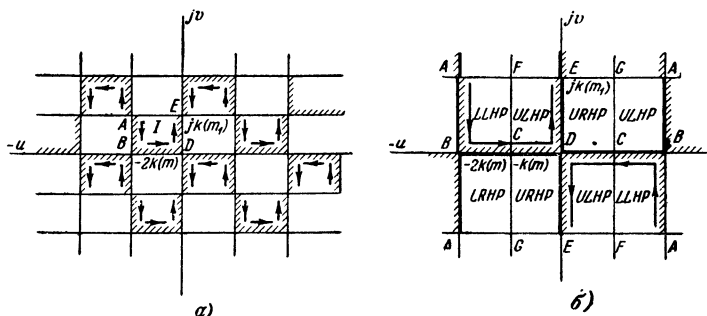


Рис. 2-7. Отображение функции $z = \operatorname{cn}^{-1}\omega$.

LLHP — нижний левый квадрант; ULHP — верхний левый квадрант;
URHP — верхний правый квадрант; LRHP — нижний правый квадрант.

дичности функции cn находим искомые пути в плоскости z , изображенные на рис. 2-7, а. Выбрав путь вдоль оси σ в плоскости s , находим соответствующий путь в плоскости z (EFCGE на рис. 2-7, б).

На рис. 2-7, б показано также отображение во всей плоскости z .

Теперь мы можем на основании пути, представленного на рис. 2-7, построить путь обхода нулей и полюсов функции $\operatorname{cn}(nz; m')$. Рациональную функцию можно получить при нескольких путях обхода.

а) Если $m' = m$:

$$E_n(\omega) = \operatorname{cn}[n \operatorname{cn}^{-1}(\omega; m); m] \quad (2-108)$$

и $E_n(\omega)$ является рациональной функцией при всех целых n . Из табл. 2-5 находим:

$$E_2(\omega) = \operatorname{cn} [2 \operatorname{cn}^{-1}(\omega; m); m]; \quad (2-109)$$

$$E_2(\omega) = \frac{\operatorname{cn}^2 [\operatorname{cn}^{-1} \omega] - \operatorname{sn}^2 [\operatorname{cn}^{-1} \omega] \operatorname{dn} [\operatorname{cn}^{-1} \omega]}{1 - m \operatorname{sn}^4 [\operatorname{cn}^{-1} \omega]}; \quad (2-110)$$

$$E_2(\omega) = \frac{\omega^2 - (1 + \omega^2)(m_1 + m\omega^2)}{1 - m(1 - \omega^2)^2}. \quad (2-111)$$

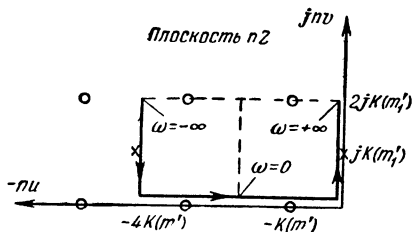


Рис. 2-8. Образование рациональной функции ($m = m'$).

Путь обхода показан на рис. 2-8. Сколько нулей имеет $E_2(\omega)$ на оси ω ?

б) Если

$$n = \frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m_1')}{K(m_1)}, \quad (2-112)$$

где N — нечетное положительное целое число¹, то путь в плоскости nz будет таким, как изображено на рис. 2-9 (для $N=3$). Чтобы убедиться в этом, проверим точки:

$$\omega = 0, z = -K(m), nz = \frac{3K(m')}{K(m)} [-K(m)] = -3K(m'); \quad (2-113)$$

$$\omega = \infty, z = jK(m_1), nz = \frac{K(m_1')}{K(m_1)} jK(m_1) = jK(m_1'); \quad (2-114)$$

$$\omega = -\infty, z = -2K(m) + jK(m_1), \quad nz = -6K(m') + jK(m_1'). \quad (2-115)$$

¹ Мы замечаем, что если N — четное, нуль функции $\operatorname{sn}(nz)$ расположен в точке F (рис. 2-7,б); это нарушение условия б, на сей раз для пути $EFCGE$, представляющего отображение оси σ .

Чтобы перейти от нулей и полюсов nz к нулям и полюсам в плоскости s , используем равенства (для случая, когда полюс расположен в g) (рис. 2-9):

$$nz = -4K + jK(m'_1); \quad (2-116)$$

$$z = \frac{-4}{n} K(m') + j \frac{1}{n} [K(m'_1)]; \quad (2-117)$$

$$z = \frac{K(m)}{3K(m')} [-4K(m')] + j \frac{K(m_1)}{K(m'_1)} K[(m'_1)]; \quad (2-118)$$

$$z = \frac{-4}{3} K(m) + jK(m_1). \quad (2-119)$$

Из табл. 2-4 находим:

$$\omega = \operatorname{sn} \left[-\frac{4}{3} K(m) + jK(m_1); m \right]; \quad (2-120)$$

$$\omega = jm^{1/2} ds \left[\frac{4}{3} K(m); m \right]. \quad (2-121)$$

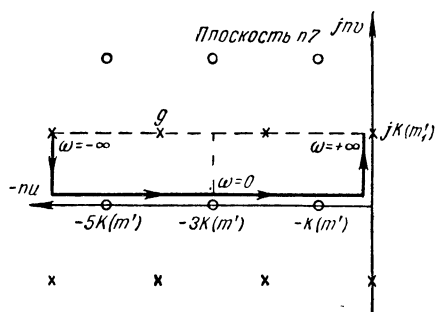


Рис. 2-9. Образование рациональной функции $\left[n = \frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m'_1)}{K(m_1)} \right]$.

Полюс расположен на отрицательной действительной оси, как видно из рис. 2-9.

в) Если

$$n = \frac{NK(m'_1)}{K(m_1)} = \frac{K(m')}{K(m)}, \quad (2-122)$$

где N — нечетное положительное целое число, то путь будет, как это изображено на рис. 2-10 (для $N=3$).

Другие отображения. На рис. 2-11 изображен путь в плоскости z ($-\infty \leq \omega \leq \infty$) для

$$z = \operatorname{sn}^{-1}(\omega; m). \quad (2-123)$$

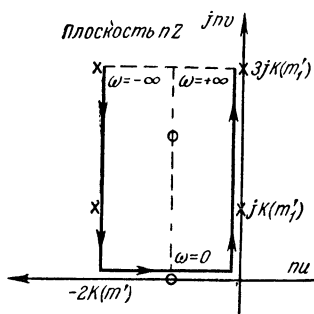


Рис. 2-10. Образование рациональной функции

$$\left[n = \frac{NK(m'_1)}{K(m_1)} = \frac{K(m')}{K(m)} \right].$$

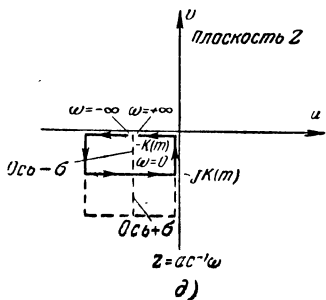
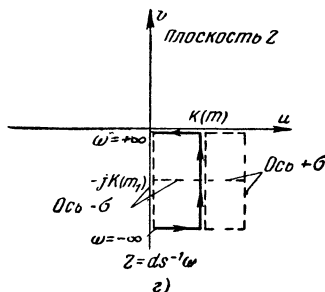
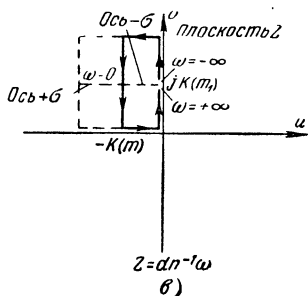
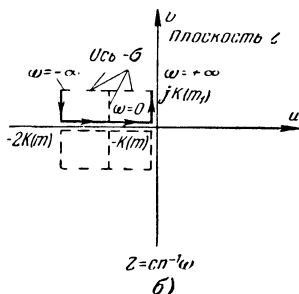
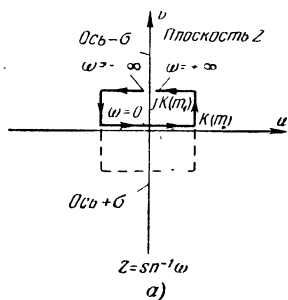


Рис. 2-11. Отображение обратных эллиптических функций.

Здесь показано отображение оси σ . На рис. 2-11 показаны также отображения других существенных обратных эллиптических функций.

2.3. РАВНОВОЛНОВЫЕ АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Обоснование применения равноволновых функций. В этом разделе мы объясним, по каким причинам для аппроксимации применяются равноволновые функции. Ниже приводится без доказательства теорема, которая дает такое обоснование.

Заданы интервал $[\omega_1, \omega_2]$ на вещественной оси ω и вещественная функция $f(\omega)$. Составим выражение

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}; \quad (2-124)$$

$$F(\omega) = \frac{q_0 + q_1\omega + \dots + q_n\omega^n}{p_0 + p_1\omega + \dots + p_m\omega^m}, \quad (2-125)$$

где m и n заданы. Требуется определить p_i и q_i так, чтобы

$$\varepsilon = \max |f(\omega) - F(\omega)| \text{ при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (2-126)$$

было минимально.

Теорема Чебышева [Л.2.118]. Если оптимальное отношение многочленов равно:

$$F(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega + \dots + a_{n-v}\omega^{n-v}}{b_1 + b_1\omega + \dots + b_{m-u}\omega^{m-u}} \quad (2-127)$$

при $0 \leq v \leq n$ и $0 \leq u \leq m$, то число N последовательных точек в интервале $[\omega_1, \omega_2]$, в которых разность

$$f(\omega) - F(\omega) \quad (2-128)$$

с чередующимися знаками принимает значения $\pm \varepsilon$, не меньше $m+n+1-d$, где $d = \min(v, u)$.

В большинстве случаев $u=v=d=0$, поэтому $F(\omega)$ должна отклоняться вверх и вниз от $f(\omega)$ на одну и ту же величину по меньшей мере $m+n+1$ раз, если не наложено другое требование. Применение этой теоремы читатель найдет в задачах.

Образование равноволновых функций. Ниже будет показано, что некоторые желательные характеристики

цепи можно составить по одной из характеристик, изображенных на рис. 2-12, где $F(\omega)$ есть отношение многочленов, один или оба из которых являются четными или нечетными по ω . Мы рассмотрим образование каждой из этих характеристик в отдельности.

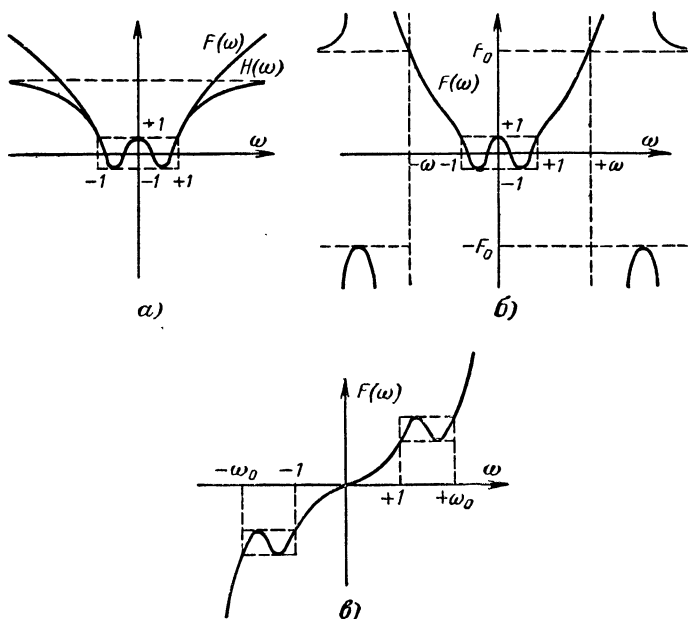


Рис. 2-12.

а — четная и нечетная аппроксимация нуля ($\omega^2 \leq 1$); б — четная и нечетная аппроксимация нуля ($\omega^2 \leq 1$) и бесконечности ($\omega_0^2 \leq \omega^2$); в — нечетная аппроксимация постоянной передачи ($1 \leq \omega^2 \leq \omega_0^2$).

Четная и нечетная аппроксимация нуля. На основании рис. 2-12,а определим следующие необходимые условия:

а) Если

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{d\omega} = 0, \text{ то } F = +1, \frac{d^2F}{d\omega^2} \leq 0, \\ F = -1, \frac{d^2F}{d\omega^2} \geq 0 \end{aligned} \right\} -1 \leq \omega \leq 1. \quad (2-129)$$

$$F = -1, \frac{d^2F}{d\omega^2} \geq 0 \quad (2-130)$$

$$б) F|_{\omega=\pm 1} = \pm 1, \quad (2-131)$$

$$в) \left. \frac{dF}{d\omega} > 0 \right\} \begin{array}{l} \text{при } \omega = \pm 1, F \text{ нечетном,} \\ \text{при } \omega = \pm 1, F \text{ четном;} \end{array} \quad (2-132)$$

$$\frac{dF}{d\omega} < 0 \text{ при } \omega = -1, F \text{ четном.} \quad (2-133)$$

Возьмем в качестве равноволновой аппроксимации решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dF}{d\omega}\right)^2 - k^2 \frac{(1-F^2)}{1-\omega^2} L(\omega) = 0, \quad (2-134)$$

где $L(\omega)$ не имеет нулей и полюсов в интервале $-1 \leq \omega \leq \pm 1$. Заметим, что

$$\frac{dF}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow F = \pm 1, \quad -1 < \omega < +1 \quad (2-135)$$

и

$$F(\pm 1) = \pm 1 \quad (2-136)$$

(при условии, что $dF(\pm 1)/d\omega \neq \infty$). Наконец, можно показать, что

$$\left. \frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} \right|_{F=\pm 1} = \frac{(\pm 1) L(\omega)}{1-\omega^2}, \quad (2-137)$$

так что уравнения (2-129) и (2-130) выполняются.

Указанные выше условия не являются достаточными для того, чтобы получить рациональную равноволновую функцию $F(\omega)$. Они приведены для того, чтобы наглядно представить свойства равноволновых функций, описанные ниже.

Пусть $L(\omega)$ имеет такой вид:

$$L(\omega) = \frac{P^2(\omega)}{Q^2(\omega)} = \frac{\frac{p}{\pi}(\omega^2 + a_i^2)^2}{\frac{q}{\pi}(\omega^2 + b_i^2)^2}, \quad (2-138)$$

где P и Q — четные функции от ω и $p \leq q$. Теперь можно разделить переменные в уравнении (2-134):

$$-\frac{dF}{V_{1-F^2}} = -\frac{kP d\omega}{Q V_{1-\omega^2}}. \quad (2-139)$$

Интегрируя, получаем:

$$\arccos F = -k \int \frac{\pi(\omega^2 + a_i^2)}{\pi(\omega^2 + b_i^2) \sqrt{1 - \omega^2}} + C; \quad (2-140)$$

$$\arccos F = -k \int \left[\frac{d_0}{\sqrt{1 - \omega^2}} + \sum_i^q \frac{d_i}{(\omega^2 + b_i^2) \sqrt{1 - \omega^2}} \right] d\omega + C; \quad (2-141)$$

$$\arccos F = n \arccos \omega - \sum_i^q k_i \operatorname{arctg} \frac{c_i \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} + C, \quad (2-142)$$

где a_i, b_i — вещественные или комплексные числа;

$$n = kd_0;$$

$$\frac{1}{c_i^2 - 1} = b_i^2. \quad (2-143)$$

Решая относительно $F(\omega)$, находим:

$$F(\omega) = \cos \left[n \arccos \omega - \sum_i^q k_i \operatorname{arctg} \frac{c_i \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} + C \right]; \quad (2-144)$$

$$F(\omega) = \cos z. \quad (2-145)$$

При n целом, $C = 0$ или π^* и $k_i = 2$ можно показать [Л.2.103], что $F(\omega)$ имеет:

1) n полюсов в бесконечности; (2-146)

2) полюсы при $\omega^2 = b_i^2$; (2-147)

3) $n + 2q + 1$ равных пульсаций в интервале

$$-1 \leq \omega \leq 1. \quad (2-148)$$

Свойства 1 и 3 можно представить наглядно, совершив обход пути в плоскости z [уравнение (2-145)], как

* От выбора 0 или π зависит лишь знак перед $F(\omega)$. Для удобства примем, что C выбрано так, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) > 0$.

показано на рис. 2-13, а и б, для $n=1$, $q=1$. То, что функция является равноволновой, вытекает из периодичности $\cos z$ при изменении z в интервале $-q\pi \leq z \leq (q+n)\pi$ (рис. 2-13, б).

Отметим несколько частных случаев уравнения (2-144):

1. $q=0$, тогда $F(\omega)$ является полиномом Чебышева.

2. $n=0$, тогда $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине [на рис. 2-12, а она обозначена $H(\omega)$]. За-

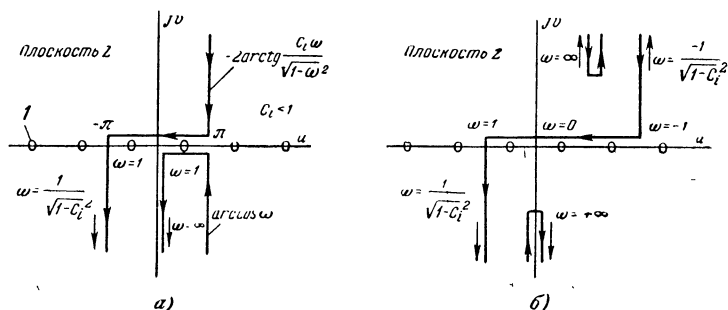


Рис. 2-13.

а — отображение функций $\arccos \omega - z \arctg \frac{C_i \omega}{1 - \omega^2}$ в плоскости z ; б — совместное отображение этих функций в плоскости z ; 1 — нули $\cos z$.

метим, кроме того, что если полюсы $-b_i^2$ выбраны произвольно, $H(\omega)$ при $\omega^2 > 1$ необязательно монотонная (как может показаться из рассмотрения рис. 2-12, а).

Пример 2-2. Найти функцию $F(\omega)$, проходящую вблизи нуля и имеющую полюсы при $\omega = \pm j1$, а также два полюса в бесконечности. Имеем:

$$F(\omega) = \cos \left(2 \arccos \omega - 2 \arctg \frac{\sqrt{2} \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} + C \right); \quad (2-149)$$

$$F(\omega) = [\pm 1] \left[(2\omega^2 - 1) \left(\frac{1 - 3\omega^2}{\omega^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + (2\omega \sqrt{1 - \omega^2}) \left(\frac{2 \sqrt{2} \omega \sqrt{1 - \omega^2}}{\omega^2 + 1} \right) \right]; \quad (2-150)$$

$$F(\omega) = \frac{+11,66\omega^4 - 10,66\omega^2 + 1}{\omega^2 + 1}, \quad C = \pi. \quad (2-151)$$

Эта функция является равноволновой в интервале $-1 \leq \omega \leq +1$.

Равноволновая аппроксимация нуля и бесконечности. Дифференциальное уравнение, описывающее характеристику, представленную на рис. 2-12,б, можно вывести из этого рисунка таким же эвристическим способом, как и уравнение (2-134):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{d\omega}\right)^2 - n^2 \frac{(1-F^2) \left[1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2\right]}{(1-\omega^2) \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} L(\omega) = \\ = 0 \begin{cases} F(0) = 0, & F \text{ нечетная,} \\ F(0) = \pm 1, & F \text{ четная.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-152)$$

Положим $L(\omega) = 1$ и решим полученное уравнение

$$\begin{aligned} \int \frac{dF}{\sqrt{(1-F^2) \left[1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2\right]}} = \\ = n \int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2) \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}} + c, \end{aligned} \quad (2-153)$$

или (табл. 2-3):

$$\operatorname{sn}^{-1}\left(F; \frac{1}{F_0^2}\right) = n \operatorname{sn}^{-1}\left(\omega; \frac{1}{\omega_0^2}\right) + c, \quad (2-154)$$

откуда

$$F = \operatorname{sn} \left[n \operatorname{sn}^{-1}\left(\omega; \frac{1}{\omega_0^2}\right) + c; \frac{1}{F_0^2} \right]. \quad (2-155)$$

Это рациональная функция при любом из вышеуказанных условий для n . Но она является равноволновой нечетной функцией лишь при

$$n = \frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m'_1)}{K(m_1)}, \quad c = 0, \quad N \text{ — нечетное} \quad (2-156)$$

и равноволновой четной функцией лишь при

$$n = \frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m'_1)}{K(m_1)}, \quad c = K(m'), \quad N \text{ — четное.} \quad (2-157)$$

Это следует из рассмотрения пути в плоскости nz (рис. 2-14, а и б). В этом случае функция является равноволновой на основании периодичности $\operatorname{sn}(nz)$ в интервалах:

$$-NK(m') \leq nz \leq NK(m'), \quad jK(m'_1) - NK(m'_1) \leq \\ \leq nz \leq jK(m'_1) + NK(m'_1) \text{ при нечетном } N.$$

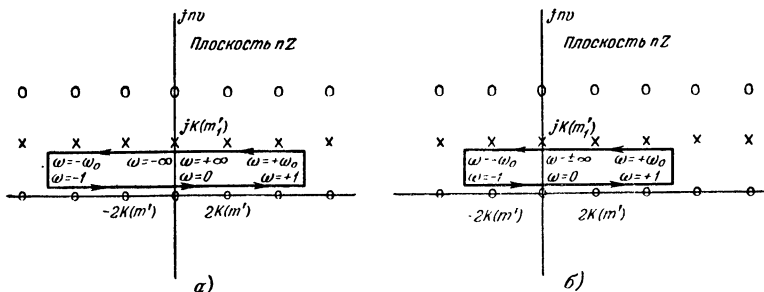


Рис. 2-14. Отображение $\operatorname{sn}^{-1}\omega$ в плоскости nz [см. уравнение (2-156)].

а — $N=5$; б — $N=4$.

Равноволновая аппроксимация ненулевой постоянной величины в полосе частот посредством нечетной функции. Уравнение (2-152) можно также решить и получить характеристику, изображенную на рис. 2-12,б, при условии, что

$$n = \frac{NK(m'_1)}{K(m_1)} = \frac{K(m')}{K(m)}, \quad c = 0. \quad (2-158)$$

Путь представлен на рис. 2-15. Заметим, что пути и полюсы функции $F(\omega)$ расположены на отрицательной вещественной оси.

Доказательство оптимальности функции. Теорема Чебышева выражает необходимое условие, при котором аппроксимация функции является наилучшей, но нужно еще показать, что функции $F(\omega)$, представленные уравнениями (2-144) и (2-155), являются оптимальными. Мы покажем, что они действительно дают наилучшее приближение к нулю, и установим, в каком смысле они являются оптимальными.

Теорема 2-1 [Л. 2.320]. Из всех четных (нечетных) рациональных функций $P(\omega)$, имеющих:

1) q полюсов в точках b_i^2 ; (2-159)

2) n полюсов в бесконечности; (2-160)

3) максимальное отклонение от нуля ε , (2-161)

где $|\varepsilon| \leq 1$, $\omega^2 \leq 1$, (2-162)

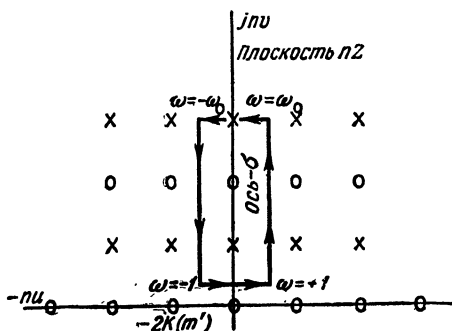


Рис. 2-15. Отображение $\sin^{-1} \omega$ в плоскости pz [см. уравнение (2-158)]. $N=3$.

функция $F(\omega)$, выраженная уравнением (2-144), обладает следующими свойствами:

$$|F(\omega)| \geq |P(\omega)|, \quad \omega^2 < 1. \quad (2-163)$$

Доказательство. Поскольку $|P(\omega)| \leq 1$ при $\omega^2 < 1$, разность

$$B(\omega) = F(\omega) - P(\omega) \quad (2-164)$$

такова, что

$$B(\omega_i) \geq 0, \text{ если } F(\omega_i) = +1; \quad (2-165)$$

$$B(\omega_i) \leq 0, \text{ если } F(\omega_i) = -1. \quad (2-166)$$

Кроме того, так как экстремумы функции $F(\omega)$ имеют место при $\omega = \pm 1$, получаем:

$$|F(\pm 1)| \geq |P(\pm 1)|. \quad (2-167)$$

Рассмотрим следующие случаи:

Случай I. Выражения (2-165) — (2-167) при любом ω_i представляют строгие неравенства. Так как $F(\omega)$ в ин-

тервале $(-1 \leq \omega \leq +1)$ принимает значение ± 1 попеременно всего $n+2q+1$ раз, то $B(\omega)$ становится положительной и отрицательной попеременно $n+2q+1$ раз и, следовательно, должна иметь в этом интервале по меньшей мере $n+2q$ нулей. Если при некотором $\omega_2 > 1$:

$$|P(\pm\omega_2)| \geq |F(\pm\omega_2)|, \quad (2-168)$$

то существует $\omega_1 (1 < \omega_1 \leq \omega_2)$ такая, что $B(\pm\omega_1) = 0$ (рис. 2-16, а). Но тогда $B(\omega)$ должна иметь $n+2q+2$ ну-

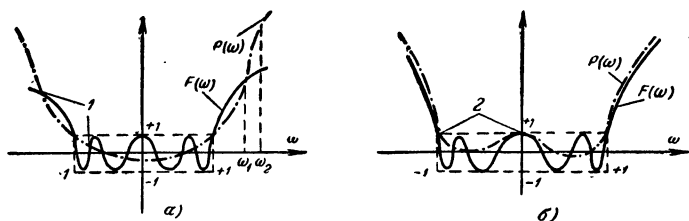


Рис. 2-16. Пояснение доказательства оптимальности.

1 — нули $B(\omega)$; 2 — двойной нуль $B(\omega)$.

лей. Это невозможно, так как $P(\omega)$ и $F(\omega)$ имеют одни и те же знаменатели, а степень числителей равна $n+2q$. Следовательно, такое ω_2 не существует.

Случай II. По меньшей мере одно из выражений (2-165) — (2-167) является равенством. Тогда $dB(\omega)/d\omega|_{\omega=\omega_i} = 0$ и $B(\omega_i)$ должны иметь по меньшей мере двойной нуль при ω_i . Следовательно, $B(\omega)$ должна иметь такое же число нулей, как и в случае 1, и теорема доказана.

Теорема 2-2. Из всех четных (нечетных) рациональных функций $P(\omega)$, имеющих:

1) числитель степени N_1 и знаменатель степени N_2 , где

$$N_2 \leq N; N_1 \leq N; \quad (2-169)$$

2) максимальное отклонение от нуля ϵ , такое, что

$$\epsilon \leq 1 \text{ при } \omega^2 \leq 1, \quad (2-170)$$

функция $F(\omega)$, выраженная уравнением (2-155) порядка N , имеет наибольшее минимальное отклонение от нуля (F_0) при $\omega^2 \geq \omega_0^2$, где ω_0 задано.

Доказательство. Предоставляем доказать это читателям [указание: $P(\omega)$ может иметь любое число N (или меньше) полюсов, так что нужно сосчитать нули разности $B(\omega)$ в интервалах $(-\infty \leq \omega \leq \omega_0)$, $(-1 \leq \omega \leq +1)$ и $(+\omega_0 \leq \omega \leq +\infty)$].

Теорема 2-3. Теорема подобна теореме 2-2 со следующим изменением: «функция $F(\omega)$, выраженная уравнением (2-155), имеет наименьшее ω_0 для данного минимального отклонения от нуля (F_0) при $\omega^2 \geq \omega_0^2$ ».

Задачи

2-1. Найти (с тремя значащими цифрами):

а) $\text{sn}(0,51; 0,36)$.

б) $\text{cn}\left(\frac{K(m)}{3}; 0,6\right)$.

в) $\text{cd}(0,6 + j0,5; 0,7)$.

2-2. Найти приближенно:

а) $\text{sn}(0,7; 0,98)$.

б) $\text{sc}\left(\frac{K(m)}{7}; 0,01\right)$.

в) $\frac{K(m)}{K(m_1)}$, если

1) $m = 0,7$;

2) $m = 0,99$.

г) m_1 , если $\frac{K(m_1)}{K(m)} = 20$.

2-3. Дана функция

$$P(s) = \text{sn}\left[n \text{sn}^{-1}(\omega; m); m'\right] \Big|_{\omega = \frac{s}{j}},$$

где

$$n = \frac{NK(m_1)}{K(m_1)} = \frac{K(m')}{K(m)}.$$

Ответьте на следующие вопросы:

а) Сколько нулей имеет $P(s)$ на оси ω и на оси σ ?

б) При $m = \frac{1}{4}$, $N = 5$ найдите все нули функции $P(s)$.

Ответьте на те же вопросы, если

$$n = \frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m_1')}{K(m_1)}.$$

2-4. Покажите, что

$$\text{а) } \text{sn}\left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m'\right] = \text{sn } z \prod_{r=1}^{N-1} \frac{\text{sn}^2 z - \text{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N}}{1 - m \left[\text{sn}^2 z \text{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N} \right]};$$

$$\text{б) } \operatorname{cn} \left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m' \right] = \operatorname{cn} z \prod_{r=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\operatorname{cn}^2 z - \operatorname{dn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N}}{1 - m \left[\operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N} \right]};$$

$$\text{в) } \operatorname{dn} \left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m' \right] = \operatorname{dn} z \prod_{r=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\operatorname{dn}^2 z - m \operatorname{cn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N}}{1 - m \left[\operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{2rK(m)}{N} \right]},$$

где

$$\frac{NK(m')}{K(m)} = \frac{K(m'_1)}{K(m_1)},$$

N — нечетное и

$$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z, m), \text{ и т. д.}$$

Покажите, что при N четном

$$\operatorname{sn} \left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m' \right] = \prod_{r=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N}}{1 - m \left[\operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N} \right]};$$

$$\operatorname{cn} \left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m' \right] = \prod_{r=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\operatorname{cn}^2 z - \operatorname{dn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N}}{1 - m \left[\operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N} \right]};$$

$$\operatorname{dn} \left[\frac{NK(m')}{K(m)} z; m' \right] = \prod_{r=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\operatorname{dn}^2 z - m \operatorname{cn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N}}{1 - m \left[\operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \frac{(2r-1)K(m)}{N} \right]}.$$

2-5. На основании теоремы Чебышева докажите, что из всех полиномов степени n с коэффициентом единица при высшем члене полином Чебышева имеет наименьшее отклонение от нуля [указание: измените задачу так, чтобы $f(\omega) = \omega^n$].

2-6. Найдите функцию $F(\omega)$ с полюсами при $\omega^2 = 1 \pm j1$ такую, чтобы отклонение ее от нуля было наименьшим в интервале $[1, +1]$. (Коэффициент при высшем члене в числителе и знаменателе равен единице.)

2-7. Докажите теорему 2-2.

2-8. Докажите теорему 2-3.

2-9. Написав уравнение (2-152) в виде

$$\left(\frac{dF}{d\omega} \right)^2 - \frac{k^2 (F_0^2 - F^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} L(\omega) = 0,$$

покажите, что равноволновая характеристика при $F_0 \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow 0$ стремится к максимально гладкой характеристике.
Докажите это:

а) при $L(\omega) = 1$;

б) при $L(\omega) = \frac{Q^2(\omega^2)}{P^2(\omega^2)}$,

где степень Q не выше степени P [указание: общая форма максимально гладкой характеристики: $F(\omega^2) = \omega^m / P(\omega)$].

Глава третья

РАВНОВОЛНОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ЦЕПЕЙ

Ознакомившись с рациональными круговыми и эллиптическими функциями и их свойствами, важными для аппроксимации, рассмотрим теперь их применение для образования функций, приближающихся к некоторым «идеальным» функциям цепей. Здесь будут выведены известные формулы расчета фильтров с соответствующими примерами и будет рассмотрена кратко реализация фильтров.

3-1. МОДУЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Чтобы получить амплитудную характеристику фильтра нижних частот, подобную изображенной на рис. 3-1,

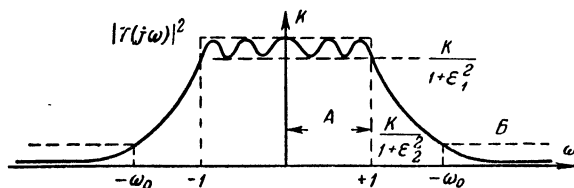


Рис. 3-1. Аппроксимация амплитудной характеристики фильтра нижних частот.

A — полоса пропускания; B — полоса задерживания.

из равноволновых функций, представленных на рис. 2-12,а, можем образовать либо [Л. 2.139]:

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon'^2 F(\omega)}, \quad (3-1)$$

либо

$$|T(j\omega)|^2 = 1 - \varepsilon'' H(\omega), \quad (3-2)$$

где (см. гл. 2):

$$F(\omega) = \cos \left(2n \arccos \omega - \sum \arctg \frac{c_i \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} + c \right); \quad (3-3)$$

$$H(\omega) = 2 \sum \arctg \frac{c_i \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} + c, \quad (3-4)$$

и ε'' выбирается из условия $|T(j\omega)|^2 \geq 0$ при всех ω . Так как полюсы функций $F(\omega)$ или $H(\omega)$ можно выбрать заранее, мы выбираем нули или полюсы в зависимости от

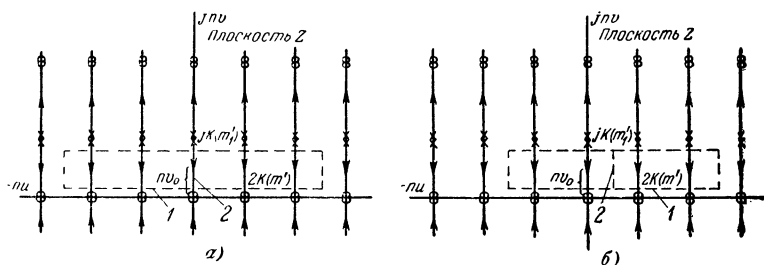


Рис. 3-2. Годограф полюсов функции $[T(j\omega)]^2$.

1 — ось ω ; 2 — ось δ .

того, что задано для функции $|T(j\omega)|^2$. В любом случае частотная характеристика фильтра будет иметь наиболее резкий спад (в том смысле, как указано в теореме 2-1) при допустимой ширине полосы для функции той же степени с выбранными нулями (полюсами).

Если нули или полюсы функции $T(s)$ не заданы заранее, можно взять

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon F^2(\omega)}, \quad (3-5)$$

где

$$F(\omega) = \operatorname{sn}[n \operatorname{sn}^{-1}(\omega; m); m]; \quad (3-6)$$

$$F(\omega) = \operatorname{sn} nz. \quad (3-7)$$

На рис. 3-2 показан корневой годограф полюсов функции $|T(j\omega)|^2$ в плоскости nz (как функций от ε). Из теорем 2-2 и 2-3 следует, что из функций с одинаковым числом полюсов эллиптическая функция дает наилучший

результат: 1) в полосе пропускания; 2) в полосе задерживания; 3) в переходной области (наименьшая ширина переходной области ω_0). Приближение в каждой из этих областей можно улучшить за счет других областей. Заметим, что функция $|T(j\omega)|^2$, обладающая такими оптимальными свойствами, является равноволновой как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания.

Расчетные формулы и пример. Выведем теперь формулы эллиптических функций, необходимых для получения амплитудной характеристики, изображенной на рис. 3-1. Прежде всего замечаем [уравнение (3-5)], что

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon \operatorname{sn}^2(nz + c; m')}, \quad (3-8)$$

где

$$z = \operatorname{sn}^{-1}(\omega; m); \quad (3-9)$$

$$m = \frac{1}{\omega_1^2}; \quad (3-10)$$

n , N и c определяются уравнениями (2-156) и (2-157). Кроме того, поскольку

$$z|_{\omega=\pm 1} = \operatorname{sn}^{-1}(\pm 1; m); \quad (3-11)$$

$$z|_{\omega=\pm 1} = \pm K(m), \quad (3-12)$$

то можно записать:

$$|T(\pm j1)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon \operatorname{sn}^2 \left[\pm \frac{NK(m')}{K(m)} K(m) + c; m' \right]}; \quad (3-13)$$

$$|T(\pm j1)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon}. \quad (3-14)$$

Таким образом, при $K=1$ (рис. 3-1) $\epsilon = \epsilon_1^2$. Кроме того, поскольку

$$z|_{\omega=\pm \omega_0} = \pm K(m) \pm jK(m_1), \quad (3-15)$$

имеем

$$|T(\pm j\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 \pm \epsilon_1^2 \left(\frac{1}{m'} \right)} \quad (3-16)$$

и

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{m'} \quad (3-17)$$

Из уравнения (3-8) и рис. 3-2 явствует, что нули функции $|T(j\omega)|^2$ двойные и расположены в точках (при нечетном N)*:

$$nz_r = \pm rK(m') + jK(m'_1), \quad r=0, 2, \dots, N-1, \quad (3-18)$$

так что

$$\operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{z_r}{j}; m\right) = \pm \frac{rK(m')}{n} + j \frac{K(m'_1)}{n}; \quad (3-19)$$

$$\operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{z_r}{j}; m\right) = \frac{r}{N} K(m) \pm jK(m_1). \quad (3-20)$$

Таким образом, имеем:

$$z_r = j \operatorname{sn} \left[\pm \frac{r}{N} K(m) + jK(m_1); m \right], \quad (3-21)$$

или (из табл. 2-4):

$$z_r = \frac{\pm j}{m^{1/2} \operatorname{sn} \left[\frac{r}{N} K(m); m \right]}. \quad (3-22)$$

Полюсы расположены в точках (рис. 3-2):

$$np_r = \pm rK(m') + jnv_0, \quad r=0, 2, \dots, N-1, \quad (3-23)$$

т. е.

$$p_r = j \operatorname{sn} \left[\pm \frac{r}{N} K(m) + jnv_0; m \right]. \quad (3-24)$$

Чтобы найти v_0 , замечаем, что

$$1 + \varepsilon_1^2 \operatorname{sn}^2 [\pm rK(m') + jnv_0; m'] = 0. \quad (3-25)$$

* Доказательство для четного N предоставляем выполнить читателю в качестве упражнения.

Следовательно (из табл. 2-3),

$$1 + \epsilon_1^2 \operatorname{sn}^2(jnv_0; m') = 0, \quad (3-26)$$

откуда получаем:

$$1 - \epsilon_1^2 \operatorname{sc}^2(nv_0; m'_1) = 0; \quad (3-27)$$

$$v_0 = \frac{1}{n} \operatorname{sc}^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon_1} j m'_1 \right). \quad (3-28)$$

Порядок расчета следующий (при заданных $\omega_0, \epsilon_1, \epsilon_2$):

1. Вычисляют:

$$m = \frac{1}{\omega_0^2}; \quad (3-29)$$

$$m' = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2. \quad (3-30)$$

2. Определяют степень аппроксимирующей функции, выбирая наименьшее целое N такое, что

$$N \geq \frac{K(m'_1) K(m)}{K(m_1) K(m')}. \quad (3-31)$$

Для m , близких к единице, и m' , близких к нулю, находим из уравнения (2-64) приближенную формулу

$$N \geq \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{4\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{8}{\omega_0 - 1}. \quad (3-32)$$

3. Определяют нули и полюсы функции $T(s)$ при помощи формул:

$$z_r = \frac{\pm j}{m^{1/2} \operatorname{sn} \left[\frac{r}{N} K(m); m \right]}; \quad (3-33)$$

$$p_r = j \operatorname{sn} \left[\pm \frac{r}{N} K(m) + jv_0; m \right], \quad (3-34)$$

где

$$r = 0, 2, \dots, N-1 \quad (N - \text{нечетное}); \quad (3-35)$$

$$r = 1, 3, \dots, N-1 \quad (N - \text{четное}); \quad (3-36)$$

$$v_0 = \frac{K(m)}{NK(m')} \operatorname{sc}^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon_1}; m'_1 \right); \quad (3-37)$$

$$v_0 \approx \frac{K(m)}{NK(m')} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\epsilon_1} \quad (3-38)$$

при m' , близком к нулю.

Пример 3-1. Пусть пульсации в полосе пропускания составляют 2 дБ,

$$0 \leq \omega \leq 1; \quad (3-39)$$

ослабление в полосе задерживания не менее 2 дБ:

$$1,33 \leq \omega \leq \infty; \quad (3-40)$$

$$m = 0,566; \quad (3-41)$$

$$\varepsilon_1 = 0,765; \quad (3-42)$$

$$\varepsilon_2 = 161. \quad (3-43)$$

Оценивая N , находим для m' , близкого к нулю,

$$N \geq \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{4\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right] \left[\frac{K(m)}{K(m_1)} \right] = 2,98. \quad (3-44)$$

Берем $N = 3$ и вычисляем нули и полюсы (см. пример 2-1):

$$z_1 = \frac{\pm j}{0,75 \operatorname{sn} \left[\frac{2K(m)}{3}; 0,566 \right]}; \quad (3-45)$$

$$z_1 = \pm 1,47; \quad (3-46)$$

$$v_0 = \frac{1,909}{3 \frac{\pi}{2}} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{0,765} = 0,438; \quad (3-47)$$

$$p_1 = j \operatorname{sn}(j 0,438; 0,566) = -\operatorname{sc}(0,438; 0,434); \quad (3-48)$$

$$p_1 = -0,463; \quad (3-49)$$

$$p_2 = j \operatorname{sn} \left[\frac{\pm 2K(m)}{3} + j 0,438; 0,566 \right]; \quad (3-50)$$

$$p_2 = -0,129 \pm j 0,962. \quad (3-51)$$

Результирующая передаточная функция имеет вид:

$$T(s) = \frac{(s^2 + 2,16)}{s^3 + 0,721s^2 + 1,061s + 0,437}.$$

Амплитудная характеристика показана на рис. 3-3.

В этом простом случае преимущество эллиптического фильтра невелико. Однако для выполнения строгих требований, например:

пульсация в полосе пропускания $\frac{1}{2}$ дб,

$$0 \leq \omega \leq 1; \quad (3-52)$$

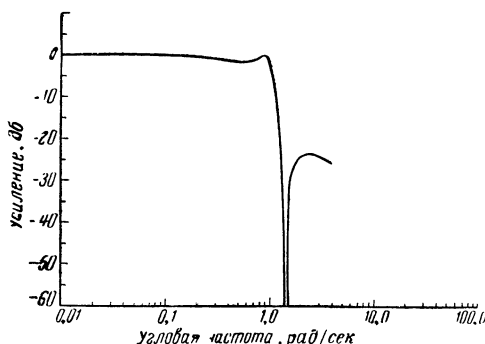


Рис. 3-3. Амплитудная характеристика эллиптического фильтра примера 3-1 (эллиптический фильтр 3-го порядка с пульсацией 2 дб).

ослабление в полосе задерживания 80 дб,

$$1,03 \leq \omega \leq \infty, \quad (3-53)$$

необходимо иметь (см. задачу 3-9):

при эллиптической аппроксимации $N_э = 14$, при аппроксимации по Чебышеву $N_ч = 45$, при аппроксимации по Баттерворту

$$N_Б = 350 \quad (3-54)$$

и соответственно 14, 45 и 350 реактивных элементов. Преимущество эллиптического фильтра очевидно.

3-2. ФАЗОВАЯ ФУНКЦИЯ

Поскольку лишь нечетная рациональная функция может быть функцией угла (см. гл. 1), взяв функцию $A(\omega)$, представленную уравнениями (2-155) и (2-158), получим аппроксимацию ненулевой фазы внутри полосы

частот (рис. 3-4,а). На рис. 3-4,б показан корневой годограф выражения

$$1 + j\epsilon \operatorname{sn}(nz; m') = 0 \quad (3-55)$$

(см. гл. 2), из которого можно определить нули и полюсы функции $T(s)$.

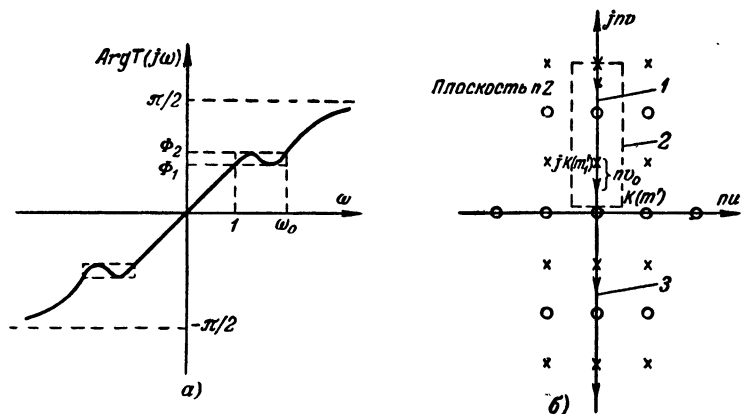


Рис. 3-4.

а — фазовая характеристика; б — корневой годограф фазовой функции $[1 + j\epsilon A(\omega)]$; 1 — ось $(-\delta)$; 2 — ось (ω) ; 3 — ось $(+\delta)$.

Расчетные формулы и пример. Нижеследующие расчетные формулы можно вывести из формул, приведенных в § 3-1. Константы определены на рис. 3-4.

1. Вычисляют:

$$m = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (3-56)$$

$$m' = \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \right)^2. \quad (3-57)$$

2. Находят степень аппроксимирующей функции из выражения:

$$N = \frac{K(m_1) K(m')}{K(m'_1) K(m)}, \quad (3-58)$$

$$N \approx \frac{\pi^2}{2} \ln \frac{16}{m'_1} \ln 4\omega_0 \quad (3-59)$$

при m , близком к 0, m' , близком к 1.

3. Определяют нули и полюсы функции $T(s)$ при помощи формул:

$$z_r = -\operatorname{sc} \left[\frac{r}{N} K(m_1) - v_0; m_1 \right],$$

$$r = 1, 3, \dots, N \text{ (} N \text{ — нечетное); } \dots, N-1 \text{ (} N \text{ — четное);} \quad (3-60)$$

$$p_r = -\operatorname{sc} \left[\frac{r}{N} K(m_1) + v_0; m_1 \right], \quad (3-61)$$

$$r = 1, 3, \dots, N-2 \text{ (} N \text{ — нечетное); } \dots, N-1 \text{ (} N \text{ — четное),}$$

где

$$v_0 = \frac{K(m_1)}{NK(m'_1)} \operatorname{sc}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{m'^{1/2}}; m'_1 \right). \quad (3-62)$$

При $m_1 \approx 0$:

$$v_0 \approx \frac{2K(m_1)}{N\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{m'^{1/2}} \right). \quad (3-63)$$

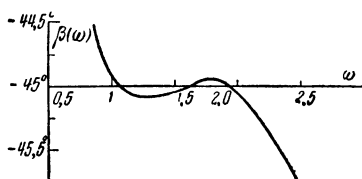


Рис. 3-5. Пример фазовой характеристики с постоянной фазой.

Пример 3-2. Требуется получить приближенно-постоянную фазу $-45^\circ \pm 0,5^\circ$ в полосе частот от $\omega = 1$ до $\omega = 2$. Имеем:

$$m = \frac{1}{4}; m' = 0,9326; m'_1 = 0,0674; N \geq 2,26. \quad (3-64)$$

Выбрав $N = 3$, $v_0 = -0,3625$, находим:

$$T(s) = \frac{s + 1,402}{(s + 0,3680)(s + 5,391)}. \quad (3-65)$$

На рис. 3-5 показан график $B(\omega)$. Применение этой аппроксимации смотрите в задаче 3-9.

3.3. ФУНКЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ¹

Чтобы составить равноволновую аппроксимацию постоянной функции запаздывания ($0 \leq \omega \leq 1$), рассмотрим уравнение

$$D_l(\omega) = \tau - \varepsilon H(\omega), \quad (3-66)$$

где $H(\omega)$ определяется уравнением (3-4).

Как было указано в гл. 1, при условии, что $T(s)$ — функция неминимальной фазы, мы должны иметь:

$$\tau - \varepsilon H(\varepsilon) = - \sum \frac{p_i}{\omega^2 + p_i^2}, \quad (3-67)$$

т. е.

$$\operatorname{Res}_{-p_i^2} [-\varepsilon H(\omega)] = -p_i. \quad (3-68)$$

Поэтому находим сперва вычет функции $H(\omega)$ в выбранном полюсе $-p_k^2$.

Определим:

$$B(\omega) = \arccos \sqrt{\frac{1 - c_k^2}{2}} \omega; \quad (3-69)$$

$$C(\omega) = \sum_{i \neq k} \operatorname{arctg} \frac{c_i \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}};$$

$$D(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{c_k \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \quad (3-70)$$

где $p_k^2 = 1/(c_k^2 - 1)$. Теперь решаем уравнение (3-69) и получаем:

$$\cos 2B = (1 - c_k^2) \omega^2 - 1 \quad (3-71)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Res}_{-p_k^2} [-\varepsilon H(\omega)] = \frac{-\varepsilon}{1 - c_k^2} \lim_{\omega^2 \rightarrow -1/(c_k^2 - 1)} [\cos 2B \cos (2C + 2D)]. \quad (3-72)$$

¹ См. [Л. 2.419, 2.423, 2.427, 2.430].

Можно легко показать справедливость следующих равенств:

$$1. \cos 2B \cos (2C + 2D) = \cos 2B \cos 2D \cos 2C - \\ - \sqrt{\cos^2 2B - (\cos 2B \cos 2D)^2} \sin 2C. \quad (3-73)$$

$$2. \cos 2B \cos 2D = \cos^2 (B + D) - \sin^2 (B - D); \quad (3-74)$$

$$\cos 2B \cos 2D = \cos^2 \left(\arccos \frac{1 - c_k^2}{2} \omega + \operatorname{arctg} \frac{c_k \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} - \right. \\ \left. - \sin^2 \left(\arccos \frac{1 - c_k^2}{2} \omega - \operatorname{arctg} \frac{c_k \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} \right); \quad (3-75)$$

$$\cos 2B \cos 2D = \omega^2 (1 + c_k^2) - 1. \quad (3-76)$$

$$3. \lim_{\omega^2 \rightarrow -1/(c_k^2 - 1)} \cos 2B \cos 2D = \frac{2c_k^2}{1 - c_k^2}. \quad (3-77)$$

$$4. \lim_{\omega^2 \rightarrow -1/(c_k^2 - 1)} \cos 2C = \sum_{i \neq k}^q \operatorname{arctg} \frac{jc_i}{c_k}. \quad (3-78)$$

$$5. \lim_{\omega^2 \rightarrow -1/(c_k^2 - 1)} \cos 2B = 0. \quad (3-79)$$

Следовательно, вместо (3-72) получим:

$$\operatorname{Res}_{-p_k^2} = \frac{-e}{(1 - c_k^2)} \left[\cos 2 \left(\sum_{i \neq k}^q \operatorname{arctg} \frac{jc_i}{c_k} \right) \left(\frac{2c_k^2}{1 - c_k^2} \right) - \right. \\ \left. - j \left(\sin 2 \sum_{i \neq k}^q \operatorname{arctg} \frac{jc_i}{c_k} \right) \left(\frac{2c_k^2}{1 - c_k^2} \right) \right]; \quad (3-80)$$

$$\operatorname{Res}_{-p_k^2} = - \frac{2ec_k^2}{(1 - c_k^2)^2} \exp \left(- 2j \sum_{i \neq k}^q \operatorname{arctg} \frac{jc_i}{c_k} \right); \quad (3-81)$$

$$\operatorname{Res}_{-p_k^2} = - \frac{2ec_k^2}{(1 - c_k^2)^2} \exp \left(- \sum_{i \neq k}^q \ln \frac{1 - c_i/c_k}{1 + c_i/c_k} \right); \quad (3-82)$$

$$\operatorname{Res}_{-p_k^2} = \frac{2ec_k^2}{(1 - c_k^2)} \prod_{i \neq k}^q \frac{c_k + c_i}{c_k - c_i}. \quad (3-83)$$

Таблица 3-1

$$T(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + \dots + s^n}$$

n	ω	a_1	$a_2 \times 10^{-3}$	$a_3 \times 10^{-4}$	$a_4 \times 10^{-5}$	$a_5 \times 10^{-1}$	$a_6 \times 10^{-1}$	$a_7 \times 10^{-2}$	$a_8 \times 10^{-8}$	$a_9 \times 10^{-7}$	$a_{10} \times 10^{-8}$
Пульсация $\pm 2\%$ ($\pm 0,002$ сек)											
1	1,06318	1,0020									
2	0,61284	0,99800	3,4708	0,76596							
3	1,5482	1,0020	4,05331	1,0054	1,2565						
4	2,6795	0,99800	4,3648	1,1780	1,7962	1,6502					
5	3,9202	0,0020	4,4930	1,2575	2,2703	2,4973	1,7999				
6	5,2290	0,99800	4,6060	1,3351	2,5284	2,4040	2,8558	1,6899			
7	6,5836	1,0020	4,6566	1,3711	2,7739	3,9224	4,1485	2,7599	1,3748		
8	7,9708	0,99800	4,7147	1,4169	2,9193	4,4790	4,9619	4,2771	2,3223	0,99913	
9	9,3829	1,0020	4,7411	1,4354	3,0694	4,8037	5,8579	5,2596	3,7975	1,17206	0,65068
10	10,813	0,99800	4,7771								
Пульсация $\pm 1\%$ ($\pm 0,01$ сек)											
1	0,14073	1,0100									
2	0,91076	0,99000	3,6317	0,84090							
3	2,0151	1,0100	4,0453	1,0039	1,4214						
4	3,2676	0,99000	4,4817	1,2151	1,8166	1,9309					
5	4,5996	1,0100	4,4862	1,2506	2,3592	2,9265	2,1388				
6	5,9805	0,99000	4,6343	1,3614	2,5398	3,6100	2,9264	2,0525			
7	7,3940	0,0100	4,6503	1,3616	2,8303	4,4272	2,8245				
8	8,8309	0,99000	4,7339			2,3981			1,6881		

n	ω	a_1	$a_2 \times 10^{-3}$	$a_3 \times 10^{-4}$	$a_4 \times 10^{-5}$	$a_5 \times 10^{-1}$	$a_6 \times 10^{-1}$	$a_7 \times 10^{-2}$	$a_8 \times 10^{-6}$	$a_9 \times 10^{-7}$	$a_{10} \times 10^{-8}$
Пульсация $\pm 1\%$ ($\pm 0,01$ сек)											
9	10,285	1,0100	4,7354	1,4385	2,9520	4,6389	5,0234	4,6540	2,4054	1,2509	
10	11,753	0,99000	4,7910	1,4295	3,1090	4,7903	6,0734	5,3077	4,1510	1,1775	0,81757
Пульсация $\pm 0,5\%$ ($\pm 0,05$ сек)											
1	0,30999	1,0500									
2	1,3438	0,95000	3,9453								
3	2,6159	1,0500	3,9643	0,9831							
4	3,9835	0,95000	4,5234	0,95178	1,6675						
5	5,4014	1,0500	4,4290	1,0309	1,7824	2,3988					
6	6,8502	0,95000	4,6900	1,1892	2,4964	2,3973	2,6125				
7	8,3198	1,0500	4,6047	1,4409	2,4995	4,0206	2,8817	2,6344			
8	9,8042	0,95000	4,7688	1,2966	2,9170	3,7263	4,8233	2,6861	2,1130		
9	11,300	1,0500	4,6967	1,5118	2,8842	5,0077	4,9432	5,3276	2,3760	1,1691	
10	12,804	0,95000	4,8146	3,3577	3,1682	4,5461	6,3773	5,0336	4,6322	1,6938	1,0401

Выраженный через c_k вычет любого полюса функции запаздывания должен быть равен $-1/\sqrt{1-c_k^2}$ [на основании уравнения (3-68)]. Следовательно, для любого данного значения ϵ получаются совместные уравнения следующего вида:

$$1 - \frac{2\epsilon c_k^2}{(1-c_k^2)^{3/2}} \prod_{i \neq k}^q \frac{c_k + c_i}{c_k - c_i} = 0, \quad k=1, 2, \dots, q. \quad (3-84)$$

Эту систему уравнений можно решить на цифровой вычислительной машине¹. Отметим, что в уравнение (3-84) не входит номинальная величина запаздывания, а входит лишь ошибка ϵ . Чем определяется τ ? Какова минимальная ошибка запаздывания?

В табл. 3-1 приведены коэффициенты соответствующей равноволновой функции запаздывания неминимальной фазы [Л. 2.427] по отношению к номинальному запаздыванию в 1 сек (рис. 3-6) (см. определение масштаба в [Л. 1.107]). Поскольку равноволновая аппроксимация эффективнее максимально гладкой аппроксимации, можно ожидать, что при том же самом допустимом изменении запаздывания ω_c будет больше. Мы замечаем, например, что, если в полосе от $\omega=0$ до $\omega=6$ допускается ошибка запаздывания $\pm 1\%$, нужно иметь максимально гладкую аппроксимирующую функцию восьмой степени, тогда как при равноволновой аппроксимации достаточно иметь функцию шестой степени.

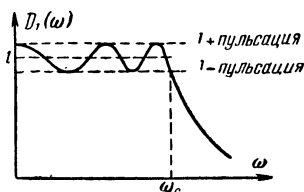


Рис. 3-6. Нормализованная характеристика запаздывания для табл. 3-1.

3-4. РЕАЛИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Хотя в задачу этой книги не входит подробное изучение методов реализации, мы рассмотрим их кратко, чтобы дать возможность читателю пользоваться литературой об эллиптических фильтрах.

¹ Существование и единственность решения не доказаны, но решения, приведенные в табл. 3-1, обычно считаются единственными.

1. Поскольку все нули функции $T(s)$ [уравнение (3-8)] лежат на мнимой оси, мы сразу видим, что нужно применять методы реализации со смещением нулей и исключением полюсов, приводящие к цепным схемам с нагрузкой на одном конце, общая форма которых изображена на рис. 3-7.

2. Если требуется реализовать $T(s)$ как функцию вносимых потерь цепи, нагруженной на обоих концах

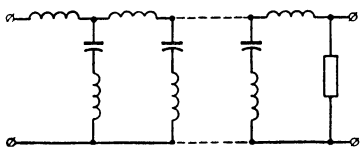


Рис. 3-7. Цепная схема с нагрузкой на одном конце.

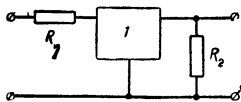


Рис. 3-8. Цепная схема с нагрузками на обоих концах.
 l — цепная схема LC.

(рис. 3-8), то $|T(j\omega)| = 0^*$, так как все L и C при $\omega \rightarrow \infty$ должны превратиться соответственно в разомкнутые или короткозамкнутые ветви. Но этому требованию удовлетворяют лишь эллиптические функции нечетного порядка; поэтому при четном n для создания нуля в бесконечности применяются частотные преобразования [Л. 2.716].

3. При составлении цепных схем, нагруженных на обоих концах, нули передачи должны быть реализованы в заданном порядке [Л. 2.709, 2.717]. Кроме того, для того чтобы получить приемлемую характеристику, вычисление нужно проводить весьма точно [Л. 2.215, 2.727]. Были составлены таблицы величин элементов для эллиптических фильтров [Л. 2. 724, 2.732]. В последней работе фильтры описываются, например, следующими символами:

C	04	30	45	b
Кауэр	4-го	α	$\arcsin m$	тип частотного
	порядка		$1/2$	преобразования

* Другой возможный случай, когда $|T(j\omega)| \rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, не представляет интереса при типичных величинах R_1 и R_2 . Путем таких же рассуждений можно показать, что $|T(j0)| = R_1/(R_1 + R_2)$.

при допускаемом отклонении в полосе пропускания =

$$= 10 \log \left[1 - \left(\frac{\alpha}{100} \right)^2 \right], \text{ дб.} \quad (3-85)$$

4. Из одной реализации фильтра нижних частот можно получить несколько реализаций полосовых фильтров.

Так, из эллиптического фильтра четного порядка, представленного на рис. 3-9,а, путем стандартного преобразования всех L и C можно получить полосовое звено, изображенное на рис. 3-9,б. С другой стороны, можно допустить большую свободу в выборе формы конечной цепи, если преобразовывать звенья фильтра

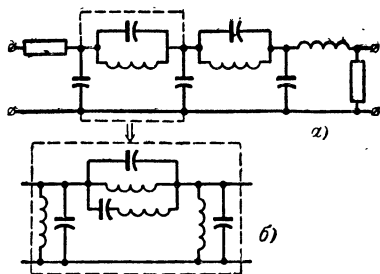


Рис. 3-9. Частотное преобразование по отдельным элементам.

целиком, а не отдельные элементы фильтров. Например, можно преобразовать звено так, как показано на рис. 3-10, причем общая передаточная функция будет

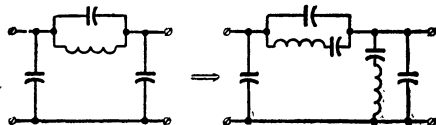


Рис. 3-10. Частотное преобразование, дающее минимальное число индуктивных элементов.

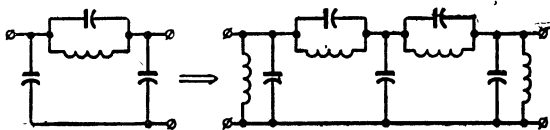


Рис. 3-11. Преобразование, учитывающее паразитные емкости.

такой же, как при обычном преобразовании отдельных элементов (но при этом потребуются изменить окончное сопротивление). Например, цепь, изображенная на рис. 3-10, имеет то практическое преимущество, что она

содержит наименьшее возможное число катушек индуктивности¹ [Л. 2.717, 2.210, 2.321]. С другой стороны, в преобразованном звене, представленном на рис. 3-11 [Л. 2.717], все катушки могут содержать паразитные емкости.

5. В литературе [Л. 2.211, 2.713, 2.714, 2.720, 2.722, 2.728, 2.730, 2.731] описано применение предварительного искажения для коррекции потерь фильтра нижних частот.

Задачи

3-1. Применив функцию, найденную в задаче 2-6, и уравнение (3-1), постройте амплитудную характеристику нижних частот, изображенную на рис. 3-1.

3-2. Начертите график числителя функции, найденной в задаче 2-6, и полинома Чебышева четвертого порядка с коэффициентом единица при высшей степени. Можно ли применить полином для образования функции неминимальной фазы? Если да, дайте точную формулировку.

3-3. Существует ли какая-нибудь другая передаточная функция неминимальной фазы, амплитудная характеристика которой имеет столько же пульсаций, как функция Чебышева того же порядка?

3-4. Условие рациональности для эллиптической амплитудной характеристики

$$N = \frac{K(m'_1) K(m)}{K(m_1) K(m')},$$

очевидно, будет нарушено, если на второй ступени расчета принять N за целое число. Как объяснить это кажущееся расхождение?

3-5. Чтобы получить характеристику двойного полосового фильтра, Ватанабе [Л. 2.323] предлагает положить

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 \pm \varepsilon F(\omega)},$$

где $F(\omega)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dF}{d\omega}\right)^2 - \frac{k(1-F^2)}{(1-\omega^2)\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} L(\omega) = 0.$$

Если $L(\omega)$ содержит только полюсы функции $F(\omega)$, при каких условиях можно записать $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = \cos 2 \arccos \sqrt{\frac{A(\omega)}{B(\omega)}},$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — многочлены? Заметим, что в этом случае $F(\omega)$ — рациональная функция.

¹ Интересно отметить, что основным элементом в этой цепи представляет эквивалентную схему кристалла.

3-6. Найдите равноволновую характеристику запаздывания для полосового фильтра [Л. 2.403], если заданы граничные частоты ω_1 и ω_2 .

3-7. Укажите некоторые возможности применения эллиптических функций при аппроксимации амплитудных характеристик посред-

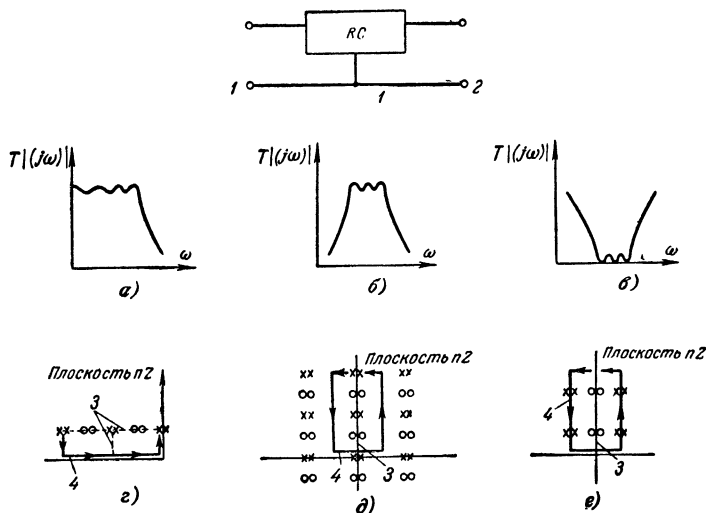


Рис. 3-12. Реализация равноволновых характеристик цепями RC .

a — характеристика фильтра нижних частот; b — характеристика полосового фильтра; c — характеристика задерживающего фильтра; 1 — цепная схема; 2 — параллельная цепная схема; 3 — ось $(-j\omega)$; 4 — ось (ω) .

ством функций цепи с полюсами на отрицательной вещественной оси (и, следовательно, реализуемых цепями RC [Л. 2.307]). Рассмотрим три случая, представленные на рис. 3-12, a — c .

Все эти аппроксимирующие функции можно образовать из выражения вида

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 \pm F(\omega^2)}.$$

На рис. 3-12, d — e показаны расположения нулей и полюсов функции $F(\omega^2)$ для всех случаев [все нули и полюсы функции $F(\omega)$ — двойные].

а) Найдите $F(\omega^2)$ для RC -фильтра нижних частот, характеристика которого изображена на рис. 3-12, a .

б) Покажите нули и полюсы в плоскости s .

- в) Выведите соответствующие расчетные формулы.
 г) Покажите, что в отличие от эллиптических аппроксимирующих функций, реализуемых цепями RC , у которых при достаточно большом N может быть достигнута любая крутизна спада, крутизна спада в этом случае ограничена.

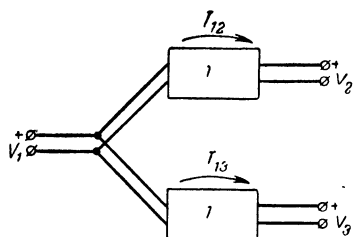


Рис. 3-13. Модель реализации постоянной разности фаз.

1 — цепь RC постоянного модуля.

д) Прodelайте пп. «а—г» для характеристики, изображенной на рис. 3-12,б.

е) Прodelайте пп. «а—г» для характеристики, изображенной на рис. 3-12,в.

3-8. Требуется построить функции $v_2(t)$ и $v_3(t)$ (рис-3-13) вида: $v_2(t) \sin [\omega t + \theta(\omega)]$ и $v_3(t) = \sin [\omega t + \theta(\omega) + 90^\circ \pm \delta]$, где $\delta \leq \delta_0$, т. е. $v_2(t)$ и $v_3(t)$ имеют одинаковые амплитуды и различаются по фазе приблизительно на 90° .

Покажите, как можно использовать функцию $T(s)$, указанную в примере 3-2, для образования $t_{12}(s)$ и $t_{13}(s)$.

Реализации описаны в [Л. 2415].

Таблица 3-2

Фильтр	N
Баттерворта	$B_0 \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$
Чебышева	$\left(\frac{B_0}{2}\right)^{1/2} \ln \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1}$
Эллиптический	$\frac{2}{\pi^2} \ln \frac{4\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln 8B_0$ $B_0 = \frac{1}{\omega_0 - 1}.$

3-9. а) Покажите, что число N , указывающее сложность фильтра, выражается для различных фильтров формулами, приведенными в табл. 3-2 [Л. 1.101].

б) Какую величину предварительного искажения можно допустить в полюсах передаточных функций вышеуказанных фильтров (по отношению к заданным параметрам)?

Глава четвертая

ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы рассмотрим в соответствии с вопросами, поставленными в первой главе, не обычную задачу переноса одной лишь амплитудной характеристики из полосы нижних частот в полосу средних частот [Л. 1.107], но задачу одновременного преобразования амплитудной характеристики и характеристики запаздывания.

4-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для данной функции $T(s)$ с известной амплитудной характеристикой при $s = j\omega$ стандартное преобразование полосы нижних частот в полосу средних частот имеет вид:

$$\omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\omega_1 \omega_2}{\bar{\omega}} \right); \quad (4-1)$$

$$\omega = \omega(\bar{\omega}). \quad (4-2)$$

По этому уравнению составлена табл. 4-1.

Т а б л и ц а 4-1

ω	$\bar{\omega}$
-1	$\omega_1, -\omega_2$
0	$\pm \omega_1 \omega_2$
1	$\omega_2, -\omega_1$

Определим

$$\bar{T}(j\omega) = T[j\omega(\bar{\omega})], \quad (4-3)$$

откуда следует

$$|\bar{T}(j\omega)| = |T(j\omega)|_{\omega=\omega(\bar{\omega})}. \quad (4-4)$$

Таким образом, можно написать:

$$|\bar{T}(j\bar{\omega})|_{\omega_1 \leq \bar{\omega} \leq \omega_2} = |\bar{T}(j\bar{\omega})|_{-\omega_1 \leq \bar{\omega} \leq -\omega_2} = |T[j\omega(\bar{\omega})]|_{-1 \leq \omega \leq +1}, \quad (4-5)$$

т. е. для любого $\bar{\omega}$ в интервале $-1 \leq \bar{\omega} \leq +1$ существует ω в интервалах $-\omega_1 \leq \bar{\omega} \leq -\omega_2$ и $\omega_1 \leq \bar{\omega} \leq \omega_2$, такое,

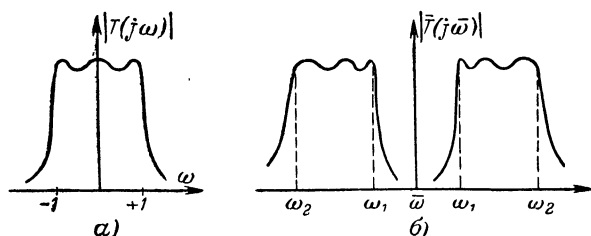


Рис. 4-1. Стандартный перенос амплитудной характеристики из полосы нижних частот в полосу средних частот.

что уравнение (4-3) выполняется (при измененной вследствие преобразования шкале частот, рис. 4-1, б).

Рассмотрим влияние такого преобразования на характеристику запаздывания. Определим:

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = \frac{-d \arg T(j\bar{\omega})}{d\bar{\omega}}; \quad (4-6)$$

$$D_l(\omega) = \frac{-d \arg T(j\omega)}{d\omega}; \quad (4-7)$$

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = \frac{-d \arg T[j\omega(\bar{\omega})]}{d\bar{\omega}}; \quad (4-8)$$

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = \left[\frac{-d \arg T(j\omega)}{d\omega} \right] \left(\frac{d\omega}{d\bar{\omega}} \right) \Big|_{\omega=\omega(\bar{\omega})}; \quad (4-9)$$

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = [D_l(\omega)] \Big|_{\omega=\omega(\bar{\omega})} \left[\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{1}{\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (4-10)$$

Преобразованная характеристика запаздывания в полосе нижних частот

Искажение

Итак, сравнивая уравнение (4-4) и (4-10), мы видим, что при преобразовании передаточной функции в полосе нижних частот (например, с максимально гладкой характеристикой запаздывания) посредством уравнения (4-1) функция запаздывания в полосе средних частот получается искаженной (уже не максимальной гладкой).

4-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Подобно этому можно произвести преобразование, сохраняющее запаздывание, за счет искажения амплитудной характеристики [Л. 2.423, 2.429].

Дана функция $T(s)$ с известной характеристикой запаздывания при $s=j\omega$. Рассмотрим преобразования

$$\omega_{\pm} = \frac{2\bar{\omega} \pm (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_2 - \omega_1}; \quad (4-11)$$

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\bar{\omega}), \quad (4-12)$$

представляющие сочетание сдвига и изменения масштаба ω (табл. 4-2).

Т а б л и ц а 4-2

ω	$\bar{\omega}$
-1	$-\omega_2, \omega_1$
0	$\pm (\omega_2 + \omega_1)/2$
+1	$-\omega_1, \omega_2$

Определим теперь

$$\bar{T}(j\bar{\omega}) = T[j\omega(\bar{\omega})_+] T[j\omega(\bar{\omega})_-], \quad (4-13)$$

тогда

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = \frac{-d\{\arg T[j\omega(\bar{\omega})_+] + \arg T[j\omega(\bar{\omega})_-]\}}{d\bar{\omega}}; \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_l(\bar{\omega}) = & -\left\{ \left[\frac{d \arg T(j\omega)}{d\omega} \right] \left[\frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \right] \right\} \Big|_{\omega=\omega(\bar{\omega})_+} - \\ & - \left\{ \left[\frac{d \arg T(j\omega)}{j\omega} \right] \left[\frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \right] \right\} \Big|_{\omega=\omega(\bar{\omega})_-}; \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) = \left[\frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \right] [D_l(\omega)|_{\omega=\omega(\bar{\omega})_+} + D_l(\omega)|_{\omega=\omega(\bar{\omega})_-}]. \quad (4-16)$$

Так как при достаточно большом сдвиге характеристики запаздывания на $\pm (\omega_2 + \omega_1)/2$ [уравнение (4-11)] $D_l(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ [уравнение (1-33)], то компоненты функции

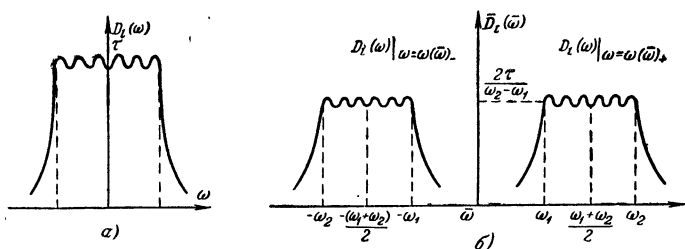


Рис. 4-2. Перенос характеристики запаздывания из полосы нижних частот в полосу средних частот.

$\bar{D}_l(\bar{\omega})$ [уравнение (4-16) и рис. 4-2] независимы, следовательно,

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) \approx \left(\frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \right) D_l(\omega) |_{\omega = \omega(\bar{\omega})_+}, \quad \omega_1 \leq \bar{\omega} \leq \omega_2; \quad (4-17)$$

$$\bar{D}_l(\bar{\omega}) \approx \left(\frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \right) D_l(\omega) |_{\omega = \omega(\bar{\omega})_-}; \quad -\omega_2 \leq \bar{\omega} \leq -\omega_1. \quad (4-18)$$

Таким образом, если функция $D_l(\omega)$ максимально гладкая при $\omega = 0$, $\bar{D}_l(\bar{\omega})$ почти максимально гладкая при $\bar{\omega} = \pm (\omega_1 + \omega_2)/2$. В задаче 4-1 рассматривается влияние преобразования на амплитудную характеристику.

Задачи

4-1. Допустим, что функцию $20 \log |T(j\omega)|$ можно аппроксимировать, как показано на рис. 4-3.

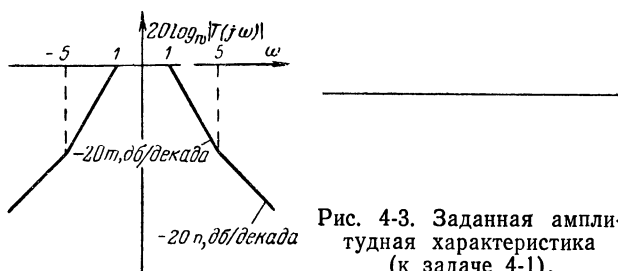


Рис. 4-3. Заданная амплитудная характеристика (к задаче 4-1).

а) Покажите результирующую амплитудную характеристику $|\bar{T}(j\omega)|$, определенную как в уравнении (4-13) при $\omega_1=15$, $\omega_2=16$, если: 1) $m=n=2$; 2) $m=3$; $n=2$.

б) Укажите сравнительные достоинства преобразований (4-1) и (4-11).

в) Дано преобразование

$$\bar{T}(j\omega) = j\omega^n T[j\bar{\omega}(\omega)_+] T[j\bar{\omega}(\omega)_-]. \quad (4-19)$$

1. Как влияет введение s^n на запаздывание, записанное в уравнении (4-16)?

2. Как влияет введение s^n на амплитудную характеристику в полосе средних частот, описанную в п. «а»?

3. Сравните это преобразование с преобразованием (4-1), если $T(s)$ — функция неминимальной фазы.

Глава пятая

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ

5-1. ЗАДАЧА ВЫРАВНИВАНИЯ

До сих пор мы разбирали задачи аппроксимации, в которых ставилась цель аппроксимации постоянной величины в некоторой области частот. Более общая зада-

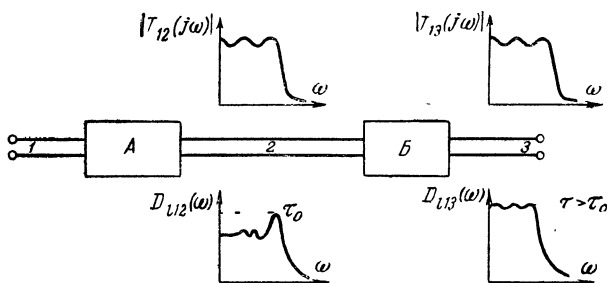


Рис. 5-1. Типичная схема согласования запаздывания. А — фильтр Чебышева; Б — устройство для согласования запаздывания цепи.

ча — аппроксимация произвольной (но достаточно гладкой) характеристики модуля, фазы или запаздывания. Такая задача может возникнуть, например, при выравнивании амплитудной характеристики физического устройства (от кабелей до кристаллов) или (как описано

в § 1-2) при согласовании характеристики запаздывания чебышевского фильтра таким образом, чтобы получить одновременно приблизительно постоянные модуль и запаздывание (рис. 5-1) [Л. 2. 209, 2.213]. Существует следующая простая, но практически пригодная процедура согласования в общем случае:

1. Осуществить грубую аппроксимацию желательной кривой модуля, фазы или запаздывания путем синтеза переломных точек кривой.

2. Улучшить аппроксимацию посредством итеративных вычислений на машине.

Полагая, что п. 1 читателю известен [Л. 1.107], мы разберем лишь п. 2.

5-2. УТОЧНЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ МАШИНЫ

Допустим, что требуется аппроксимировать (скажем, по критерию наименьшей квадратичной ошибки) желаемую амплитудную характеристику $[T_s(j\omega)]$, заданную при значениях $\omega = \omega_1, \dots, \omega_k^*$ функцией вида

$$T(s) = \frac{\sum_i^p a_i s_i}{\sum_j^q a_p + j s_j}, \quad (5-1)$$

где p и q заданы. Тогда средняя квадратичная ошибка определяется как

$$ERR = \frac{1}{k} \sum_r^k [|T(j\omega_r)| - |T_s(j\omega_r)|]^2. \quad (5-2)$$

Если для уменьшения ошибки вместо a_i мы возьмем $a_i + \Delta a_i$, то получим:

$$ERR_{\Delta} - ERR = \Delta ERR; \quad (5-3)$$

$$\Delta ERR \approx \frac{dERR}{da_i} \Delta a_i, \quad (5-4)$$

* Выравнивание запаздывания и фазы производится таким же способом.

причем ΔERR будет отрицательно, если знак Δa_i противоположен знаку $dERR/da_i$.

Если изменяется несколько коэффициентов, определим вектор градиента

$$\hat{G} = \Sigma \frac{\partial ERR}{\partial a_i} \hat{a}_i \quad (5-5)$$

и вектор

$$\Delta \hat{a} = \Sigma \Delta a_i \hat{a}_i. \quad (5-6)$$

Тогда скалярное произведение G и Δa равно:

$$(\hat{G}, \Delta \hat{a}) = \Sigma \frac{\partial ERR}{\partial a_i} \Delta \hat{a}_i; \quad (5-7)$$

$$(\hat{G}, \Delta \hat{a}) \approx \Delta ERR. \quad (5-8)$$

Если ограничить длину $\Delta \hat{a}$ данной величиной Δa (величина шага), т. е. если

$$\Delta a = \sqrt{\Sigma \Delta a_i^2}, \quad (5-9)$$

то скалярное произведение (5-7) минимально, когда $\Delta \hat{a}$ и \hat{G} коллинеарны, т. е.

$$\Delta a_i = -\alpha \frac{\partial ERR}{\partial a_i}. \quad (5-10)$$

Чтобы выполнить уравнение (5-9), выбираем α равным:

$$\alpha = \frac{\Delta a}{\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial ERR}{\partial a_i} \right)^2}}, \quad (5-11)$$

так что

$$\sqrt{\Sigma \Delta a_i^2} = \sqrt{\alpha^2 \Sigma \left(\frac{\partial ERR}{\partial a_i} \right)^2}; \quad (5-12)$$

$$\sqrt{\Sigma \Delta a_i^2} = \Delta a. \quad (5-13)$$

Следовательно, изменение коэффициента a_i должно быть равно:

$$\Delta a_i = \frac{-\Delta a \left(\frac{\partial ERR}{\partial a_i} \right)}{\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial ERR}{\partial a_i} \right)^2}}, \quad (5-14)$$

при этом ΔERR будет минимальным. Этот способ изменения a_i называется методом наискорейшего спуска¹. По уравнениям (5-2) и (5-14) можно составить итеративные процедуры последовательного изменения исходной передаточной функции таким образом, чтобы минимизировать ошибку (5-2).

1. Берется Δa достаточно малое, чтобы выполнялось (5-4).

2. Вычисляются частные производные $\partial ERR / \partial a_i$, для чего немного изменяется каждый коэффициент и вычисляются соответствующие изменения ошибки ERR .

3. Вычисляется Δa_i по уравнению (5-14).

4. Каждое a_i изменяется на одну и ту же величину Δa_i .

5. Вся процедура повторяется.

Для этой процедуры можно легко составить программу вычислений на вычислительной машине.

Мы замечаем, что в приведенных выше рассуждениях нет никаких упоминаний о свойствах модульной функции. Если аппроксимируемая функция достаточно гладкая (так что во всех точках ω_k ее можно разложить в ряд Тейлора), можно взять достаточно малый размер шага, при котором уравнение (5-4) дает хорошее приближение. Таким образом, для аппроксимации характеристик фазы и запаздывания в довольно широких границах можно применять тот же метод.

5-3. ПРИМЕР ПРОГРАММЫ²

Получив посредством синтеза точек перелома начальную аппроксимирующую функцию $T(s)$ и оценив надлежащий размер шага (Δa), мы можем составить поточную схему итерации (рис. 5-2). Нужно предусмотреть уменьшение размера шага $\Delta \Delta a$, поскольку процесс сходится (чтобы не перейти за истинный минимум), и остановку программы, когда размер шага становится достаточно малым (Δa_{\min}).

¹ Так называется всякий метод изменения в направлении градиента. Размер шага (также существенная величина) выбирается различным в соответствии с задачей [Л. 2.202, 2.213].

² Другие применения метода наискорейшего спуска читатель найдет в задачах к этой главе.

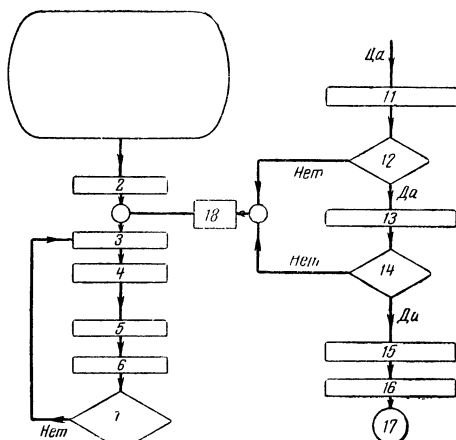


Рис. 5-2. Поточная схема программы для вычислительной машины.

1 — прочитать: заданную функцию $IT_s(j\omega)$, $\omega = \omega_1, \dots, \omega_k$, коэффициенты грубой аппроксимации, величины шага —

$\Delta a_{\text{нач}}$, $\Delta a_{\text{мин}}$, $\Delta \Delta a$; 2 — вычислить ERR ; 3 — изменить коэффициент; 4 — вычислить $\Delta a_i ERR$; 5 — вычислить D_i ; 6 — восстановить коэффициент; 7 — все ли D_i вычислены? 8 — вычислить Δa_i ; 9 — взять $a_i + \Delta a$ вместо a_i ; 10 — все ли коэффициенты измерены? 11 — вычислить $ERR\Delta$; 12 — $ERR\Delta > ERR$? 13 — $(\Delta a) = (\Delta a)(\Delta \Delta a)$; 14 — $\Delta a < \Delta a_{\text{мин}}$; 15 — напечатать заголовки; 16 — напечатать частотную характеристику функции $T(j\omega)$; 17 — остановить; 18 — $ERR = ERR\Delta ERR\Delta$, a_i — средний квадрат ошибки после измерения a_i ; D_i — приближенная

частная производная $\frac{\Delta ERR}{\Delta a_i}$.

В приложении описана вся программа в коде Фортран¹.

После того, как достигнута аппроксимация амплитудной характеристики, ошибка вычисляется по формуле

$$ERR = \frac{1}{k} \sum_r^k [20 \log_{10} |T_s(j\omega_r)| - 20 \log_{10} |T(j\omega_r)|]^2, \quad (5-15)$$

¹ Эта программа не является ни в каком смысле оптимальной, но она проста и сходится даже при плохих начальных оценках.

т. е. кривую можно аппроксимировать в логарифмическом масштабе одинаково хорошо во всей области ее значений.

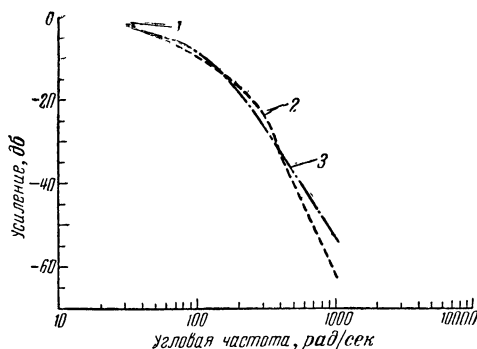


Рис. 5-3. Усовершенствование синтеза по переломным точкам при помощи вычислительной машины (пример).

1 — общая часть кривой; 2 — уточненная характеристика, полученная при помощи вычислительной машины (максимальное отклонение от заданной характеристики 1 дБ); 3 — оценка характеристики по переломным точкам.

Пример 5-1. Требуется составить аппроксимацию для величин, указанных в табл. 5-1, посредством рациональной функции степени не выше пятой.

Таблица 5-1

Угловая частота, рад/сек	Модуль, дБ	Угловая частота, рад/сек	Модуль, дБ
1	20	50	-4,2
2	14	70	-6,5
4	8,5	100	-9,5

Беря лишь члены аппроксимации первого порядка, выбираем функцию

$$T(s) = \frac{100(s+10)(s+560)(s+600)}{(s+0,1)(s+40)(s+200)(s+360)(s+370)};$$

$$\Delta a_{\text{нач}} = 0,1; \Delta a_{\text{мин}} = 0,01; \Delta \Delta a = 0,5.$$

На рис. 5-3 изображена функция $|T(j\omega)|$ и кривая, уточненная на машине¹. Погрешность [измеренная по

¹ Уточненная функция для реализации требуемого спада должна иметь комплексные полюсы (см. задачу 1,а).

уравнению (5-15) в заданных точках] уменьшилась с 0,88 до 0,113. Максимальное отклонение уточненной кривой от заданной 1 дБ. Вычисления на машине ИБМ 7090 заняли 1 мин.

Задачи

5-1. Было предложено вместо того, чтобы последовательно изменять коэффициенты первоначальной аппроксимирующей функции $T(s)$, реализовать цепь с передаточной функцией $T(s)$ и затем менять поочередно величины элементов так, чтобы достигнуть требуемой точности приближения.

а) Укажите преимущества и недостатки этого подхода, в частности для цепей, имеющих элементы двух видов.

б) Рассмотрите применение метода к цепным схемам:

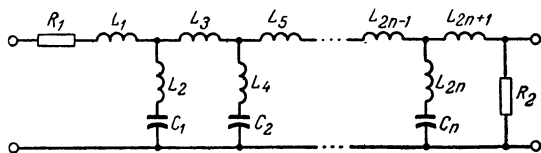


Рис. 5-4. Цепной фильтр нижних частот с нагрузками на обоих концах.

1. Начертите поточную схему подпрограммы вычисления функции $|t_{21}(j\omega_k)|$ цепной схемы, изображенной на рис. 5-4 (даны величины элементов и ω_k).

2. Начертите поточную схему полной программы вычислений (по методу наискорейшего спуска), когда величины элементов, указанных на рис. 5-4, последовательно изменяются так, чтобы получить аппроксимацию общей амплитудной характеристики.

3. Рассмотрите п. «а» в применении к цепным схемам.

4. Выполните п. «б» для цепных схем с неравномерными потерями [Л. 2.211].

5-2. Как при помощи программы, использованной в задаче 5-1, можно обнаружить отклонения величин элементов в физической цепи от их идеальных значений?

5-3. Примерная программа для ясности записана так, что она является неэффективной. Определите по методу наискорейшего спуска, что именно в этой программе является неэффективным?

5-4. Требуется придумать способ вычисления величин элементов «приблизненно эллиптических» фильтров высокой степени (для которых нет таблиц) с произвольными допусками для полосы задерживания. Предлагается следующий метод (для фильтров нечетного порядка, где не требуется частотное преобразование).

а) По ε_1 и ε_2 вычислить m , m' и N . Затем вычислить действительное ε_2 , получающееся при целом значении N .

б) Вычислить частоты минимумов и максимумов в полосе задерживания и в полосе пропускания, используя формулы гл. 3.

в) Имея первоначальные оценки величин элементов в данной цепи (при которых реализуются точно нули передачи, вычисленные в п. «б»), изменить величины элементов, как описано в задаче 5-1, сохраняя на каждом шаге заданные нули передачи.

При выполнении этого пункта нужно решить следующие задачи:

1. Вывести формулы для величин, указанных в пп. «а» и «б».

2. Составить начальную оценку величин элементов.

3. По пп. «а» и «б» составить критерий ошибки такой, чтобы величины элементов сходились к значениям, дающим «приближенно эллиптическую» характеристику.

4. Для цепи, изображенной на рис. 5-4, написать подпрограмму вычисления функции $|t(j\omega_k)|_{k=1,2}$ при данных L_{2n-1} ($n=1, 2, \dots$), C_n , z_n (нули передачи) и ω_k . Отметим, что L_{2r} определяется величинами C_r и z_r , и нули передачи должны быть реализованы в определенном порядке (см. § 3-5).

Хотя нельзя строго доказать сходимость, оказывается, что сходимость получается даже при довольно плохих начальных оценках.

Если желательно иметь лишь один фильтр высокого порядка, этот метод очень полезен, так как здесь нет затруднений в смысле обеспечения точности, и можно легко составить программу в коде Фортран.

5-5. Почему на рис. 5-1 $\tau > \tau_0$?

МНОГОПОЛЮСНИКИ, АКТИВНЫЕ ЦЕПИ И РОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Глава шестая МНОГОПОЛЮСНИКИ¹

6-1. АНАЛИЗ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Прежде чем приступить к методам анализа многополюсников, введем некоторые определения:

1. Цепь *RLC* — цепь, состоящая из сопротивлений, индуктивных элементов и емкостных элементов.

2. Цепь *RLCM* — цепь, состоящая из сопротивлений, индуктивных элементов, емкостных элементов и идеальных трансформаторов.

3. Многополюсник (цепь с *n* входами) — цепь с *n* парами доступных зажимов (необязательно различных). Заметим, что все такие зажимы являются узлами, но не все узлы являются доступными зажимами.

4. Матрицы контурных (полных) сопротивлений $[Z]$ и узловых (полных) проводимостей $[Y]$ — матрицы, образуемые уравнениями для каждого независимого контура (каждого узла) цепи:

$$[V_l] = [Z][I_l], \quad (6-1)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_{11} + \frac{1}{sC_{11}} + G_{11} & \dots & -sL_{1n} - \frac{1}{sC_{1n}} - G_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -sL_{n1} - \frac{1}{sC_{n1}} - G_{n1} & \dots & sL_{pp} + \frac{1}{sC_{pp}} + G_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

$$[I_N] = [Y][Y_N]. \quad (6-3)$$

¹ Английский термин «*n*-port network» означает собственно цепь с *n* входами. (Прим. переводчика.)

5. Матрицы сопротивлений холостого хода и проводимостей короткого замыкания — матрицы, получающиеся при записи соотношений между токами и напряжениями в узлах, называемых полюсами цепи:

$$[I] = [y][V]; \quad (6-4)$$

$$[V] = [z][I]. \quad (6-5)$$

Так, матрица проводимостей короткого замыкания для шестиполюсника:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}. \quad (6-6)$$

Элементы матрицы определяются по уравнению (6-4), когда все входы закорочены (но не соединены между

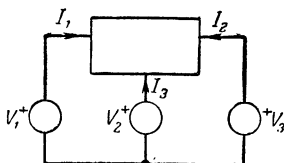


Рис. 6-1. Модель трех-полюсника.

собой), за исключением входа, на который подается возбуждение.

Неопределенные матрицы (см. [Л. 1.103, 1.106]). Пусть имеется шестиполюсник с параметрами короткого замыкания $[y]$. Если соединить цепь, как показано на рис. 6-1, то на основании принципа суперпозиции:

$$y_{11}V_1 + y_{12}V_2 + y_{13}V_3 = I_1; \quad (6-7)$$

$$y_{21}V_1 + y_{22}V_2 + y_{23}V_3 = I_2; \quad (6-8)$$

$$y_{31}V_1 + y_{32}V_2 + y_{33}V_3 = I_3 \quad (6-9)$$

или

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (6-10)$$

Это так называемая неопределенная матрица проводимостей $[y]_i$. Ее элементы представляют проводимости

короткого замыкания цепи, измеренные по отношению к общему, но произвольно выбранному заземленному зажиму.

Складывая уравнения (6-7) — (6-9), получаем:

$$(y_{11} + y_{21} + y_{31}) V_1 + (y_{12} + y_{22} + y_{32}) V_2 + (y_{13} + y_{23} + y_{33}) V_3 = 0. \quad (6-11)$$

Уравнение (6-11) при произвольных величинах V выполняется лишь в том случае, если каждая сумма по отдельности равна нулю, т. е.

$$y_{31} = -y_{11} - y_{21}; \quad y_{32} = -y_{22} - y_{12}; \quad y_{33} = -y_{13} - y_{23}. \quad (6-12)$$

Далее, положив $V_1 = V_2 = V_3$, получим:

$$(y_{11} + y_{12} + y_{13}) V_1 = I_1. \quad (6-13)$$

Но так как теперь нет разности потенциалов между зажимами, то $I_1 = 0$ и

$$y_{13} = -y_{11} - y_{12}. \quad (6-14)$$

Следовательно, $[y]_i$ можно написать в виде

$$[y]_i = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -y_{11} - y_{12} \\ y_{21} & y_{22} & -y_{21} - y_{22} \\ -y_{11} - y_{21} & -y_{12} - y_{22} & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}. \quad (6-15)$$

Заметим, что $|y|_i = 0$.

Пример применения неопределенных матриц. Пусть имеется пятиполюсник и мы хотим ввести в него трехполюсник¹. Если рассматривать две несоединенные цепи как одну цепь N , то неопределенная матрица проводимостей цепи N имеет такой вид (рис. 6-2,а):

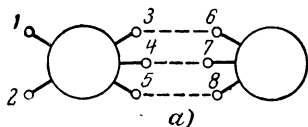
$$[y]_i = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & & & \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & & & \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & & 0 & \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & & & \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & & & \\ & & & & & & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ & & & & & 0 & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ & & & & & & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix}. \quad (6-16)$$

¹ Описываемая ниже процедура является общей и не зависит от числа зажимов.

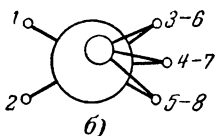
Когда два зажима соединены, их напряжения одинаковы, а их токи складываются, образуя ток через зажим (рис. 6-2,б). Это равносильно сложению строк и столбцов матрицы (6-16). В результате получается (см. задачу 6-2):

$$[y]'_i = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} + y_{66} & y_{34} + y_{67} & y_{35} + y_{68} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} + y_{76} & y_{44} + y_{77} & y_{45} + y_{78} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} + y_{86} & y_{54} + y_{87} & y_{55} + y_{88} \end{bmatrix}. \quad (6-17)$$

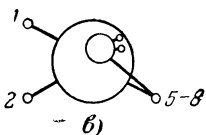
Если исключить зажим t как доступный (и, следовательно, ввести зажим в цепь N), элементы новой матрицы выражаются формулой¹ (см. задачу 6-3):



$$y''_{ik} = \frac{|y'_{ik} \ y'_{it}|}{y'_{tt}}; \quad (6-18)$$



$$y''_{ik} = \frac{|y'_{iktt}|}{y'_{tt}}. \quad (6-19)$$



Если ввести внутрь цепи одновременно два общих зажима (r и t) (рис. 6-2,б), получим формулу

$$y''_{ik} = \frac{\begin{vmatrix} y'_{ik} & y'_{ir} & y'_{it} \\ y'_{rk} & y'_{rr} & y'_{rt} \\ y'_{tk} & y'_{tr} & y'_{tt} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_{rr} & y'_{rt} \\ y'_{tr} & y'_{tt} \end{vmatrix}}; \quad (6-20)$$

Рис. 6-2. Ступени приведения восьмиполусника к трехполуснику.

$$y''_{ik} = \frac{|y_{ikrrtt}|}{|y_{rrtt}|}. \quad (6-21)$$

В данной задаче, введя внутрь цепи зажимы 3-6 и 4-7 исходной цепи, получим:

$$[y]''_i = \frac{y_{ik3344}}{(y_{33} + y_{66})(y_{44} + y_{77}) - (y_{43} + y_{76})(y_{34} + y_{67})}. \quad (6-22)$$

¹ Заметим, что t заземляется при измерении y'_{ki} , но не при измерении y''_{ik} .

Чтобы составить матрицу проводимостей короткого замыкания, выбираем любой зажим в качестве земли и затем исключаем соответствующие строку и столбец в $[y]''_i$. В данном случае цепь превращается в трехполюсник. Мы применим формулу (6-20) далее, когда будем рассматривать введение в цепь RLC активных элементов.

Итак, преимущество неопределенной матрицы проводимостей состоит в том, что она дает возможность описывать цепь с $n+1$ зажимами по отношению ко всем доступным зажимам, независимо от того, какой из зажимов будет впоследствии выбран в качестве земли. Другие применения этой матрицы смотрите в задаче 6-4.

6-2. СИНТЕЗ

Прежде чем обсуждать свойства многополюсников $RLCM$ и их синтез, необходимо определить некоторые термины теории матриц, с которыми читатель, возможно, незнаком.

Определенность матрицы. Рассмотрим функцию $q_1 = 29 a_1^2 + 24 a_1 a_2 + 5 a_2^2$ (a_1, a_2 — вещественные), (6-23) принадлежащую к классу функций:

$$q = \sum_{ij}^n a_i a_j x_{ij} \quad (a_i \text{ — вещественные}). \quad (6-24)$$

Такие функции называются квадратичными формами. Для каждой квадратичной формы существует единственная вещественная симметричная матрица $[x]$ такая, то

$$q = [a] [x] [a]^T, \quad (6-25)$$

где

$$[a] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]; \quad (6-26)$$

$$[x] = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & & x_{nn} \end{bmatrix}; \quad (6-27)$$

$[a]^T$ — транспонированная матрица по отношению к $[a]$. (6-28)

В вышеприведенном примере можно показать, что

$$[x] = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}. \quad (6-29)$$

Возникают два существенных вопроса относительно функции q :

1. Бывает ли q отрицательна при любых вещественных значениях a_i ? Если нет, то q называется положительной *полуопределенной* квадратичной формой, а $[x]$ — положительной полуопределенной матрицей.

2. Бывает ли q отрицательной или *равной нулю* при любых вещественных значениях a_i ?* Если нет, то q называется *положительной* определенной квадратичной формой, а $[x]$ — положительной матрицей.

Прямая (но несколько длинная) проверка положительной определенности или полуопределенности вещественной симметричной матрицы $[x]$ (и, следовательно, функции q) состоит в следующем.

Дано:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & \dots & \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & \\ x_{1n} & \dots & \dots & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (6-30)$$

Вычисляют главные миноры:

$$p_1 = |x_{11}|; \quad (6-31)$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix}; \quad (6-32)$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} \quad (6-33)$$

и т. д.

Если $p_i \geq 0$ при всех i ($i=1, \dots, n$), $[x]$ — положительная полуопределенная матрица. Если $p_i > 0$ при всех i , $[x]$ — положительная определенная матрица. Матрица (6-29), очевидно, положительная определенная.

Доминирующие и главенствующие матрицы

1. Вещественная симметричная матрица $[x]=[x_{ij}]$ называется *доминирующей*, если каждый элемент ее главной диагонали не меньше суммы абсолютных величин

* Конечно, за исключением случая, когда все $x_i=0$.

всех элементов в той же строке или в том же столбце, т. е.

$$x_{kk} \geq \sum_{i=k} |x_{ik}|.$$

2. Вещественная симметричная матрица $[x]$ называется *главенствующей*, если каждый главный минор порядка r не меньше абсолютной величины любого минора порядка r , составленного из тех же строк или столбцов, $r=1, 2, \dots, n-1$. Всякая главенствующая матрица является положительной определенной (см. задачу 6-6).

Пример 6-1.

$$[x] = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}. \quad (6-34)$$

Матрица $[x]$ не является доминирующей, так как $3+2 > 4$. Кроме того, составив миноры:

$$\begin{array}{cc} \text{Главный минор} & \text{Субминоры} \\ |5| = |5| & |2| = 2, \quad |-2| = -2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 16 & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 19, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 14, \end{array} \quad (6-35)$$

видим, что матрица не является главенствующей, так как $19 > 16$. Однако матрица является положительной определенной.

Многополюсники RLCM. Возвращаясь к нашей теме, допустим, что у нас имеется цепь *RLCM* с n входами (цепь N на рис. 6-3). Тогда можно образовать новую цепь с одним лишь входом (двухполюсник), расположив все входы последовательно и соединив их между собой идеальными трансформаторами с произвольными коэффициентами трансформации (цепь N_1 на рис. 6-3). Пока-

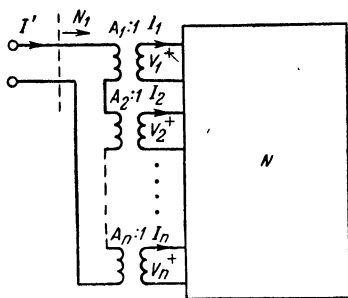


Рис. 6-3. Последовательное соединение входов в многополюснике.

жем, что из положительности и вещественности полного сопротивления двухполюсника можно вывести необходи-

мые условия, которым должен удовлетворять исходный многополюсник. Матрица сопротивлений холостого хода цепи N^* :

$$|z| = \begin{bmatrix} z_{12} & z_{12} & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix}. \quad (6-36)$$

Так как все элементы матрицы суть рациональные функции от s , коэффициенты которых являются функциями величин элементов, то эти коэффициенты представляют вещественные числа (условие 1).

Мы можем написать:

$$[z][I] = [V], \quad (6-37)$$

где

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}. \quad (6-38)$$

В двухполюснике N входные токи и напряжения равны I' и V' , так что можно записать:

$$V' = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n V_n = [a][V], \quad (6-39)$$

$$I_1 = a_1 I', \quad I_2 = a_2 I', \dots, I_n = a_n I' \quad (6-40)$$

или

$$[I] = [a]^T [I'], \quad (6-41)$$

где

$$[a] = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n]; \quad (6-42)$$

$$[I'] = I'. \quad (6-43)$$

Объединяя уравнения (6-37) и (6-41), получаем:

$$[z][a]^T [I'] = [V] \quad (6-44)$$

* Заметим, что $z_{ki} = z_{ik}$.

и

$$[a][z][a]^T [I'] = [a][V']; \quad (6-45)$$

$$[a][z][a]^T [I'] = V'. \quad (6-46)$$

Из уравнения (6-46) имеем:

$$[a][z][a]^T = \frac{V'}{I'} = Z, \quad (6-47)$$

где Z должно быть положительным вещественным при любом коэффициенте трансформации. Следовательно, при $s = j\omega$ находим:

$$[z]_{s=j\omega} = [\operatorname{Re} z(j\omega)] + j[\operatorname{Im} z(j\omega)]; \quad (6-48)$$

$$[z]_{s=j\omega} = [r(\omega)] + j[x(\omega)]. \quad (6-49)$$

Из уравнений (6-47) и (6-49) замечаем, что

$$[a][r(\omega)][a]^T \geq 0 \text{ при всех } \omega \text{ и всех вещественных } [a]. \quad (6-50)$$

Следовательно, левая часть представляет положительную полуопределенную квадратичную форму (условие 2). Поскольку $[r(\omega)]$ симметрична, определенность формы можно установить проверкой $[r(\omega)]$, как описано выше.

Из вышеизложенного можно вывести еще одно ограничение. Напишем:

$$Z = \sum_{i, k=1}^m z_{ik} a_i a_k; \quad (6-51)$$

$$\begin{aligned} Z = & z_{11}a_1^2 + z_{22}a_2^2 + \dots + z_{nn}a_n^2 + 2z_{12}a_1a_2 + \dots + \\ & + 2z_{13}a_1a_3 + \dots \end{aligned} \quad (6-52)$$

Если одна из величин z_{ik} имеет полюс в правой полуплоскости или кратный полюс на оси $j\omega$, то либо

1. $Z(s)$ также имеет полюс, так что $Z(s)$ не является положительной вещественной величиной, что противоречит условию, либо:

2. вычет в полюсе¹ сокращается с вычетом в том же полюсе другого сопротивления. В этом случае полагаем все $a_i=0$ за исключением тех, которые являются множителями при z_{ih} . Тогда можно написать:

$$Z = z_{ii}a_i^2 + z_{hh}a_h^2 + 2a_i a_h z_{ih}. \quad (6-53)$$

Но поскольку z_{ii} и z_{hh} представляют входные сопротивления, они не имеют таких полюсов; следовательно, вычеты не сокращаются, и $Z(s)$ должно иметь те же самые полюсы — еще одно противоречие.

Отсюда заключаем, что ни одно z_{ih} не может иметь полюса в правой полуплоскости или кратный полюс на оси $j\omega$ (условие 3).

Наконец, если z_{ih} имеет простой полюс на оси $j\omega$, мы можем выделить его из $[z]$ следующим образом:

$$[z] = [z_1] + \frac{[k_j]}{s + j\omega_j} + \frac{[k_j]^*}{s - j\omega_j}, \quad (6-54)$$

где $[k_j]$ — матрица вычетов в полюсе. На основании уравнения (6-52) вычеты на оси $j\omega$ всех z_{ih} должны быть вещественными, иначе надлежащим выбором a_i можно добиться того, что Z будет иметь такой же комплексный вычет. Следовательно, $[k_j] = [k_j]^*$, а вместо (6-54) получим:

$$[z] = [z_1] + [k_j] \frac{2s}{s^2 + \omega_j^2}. \quad (6-55)$$

Подставляя теперь это выражение для $[z]$ в уравнение (6-47), получим:

$$[a][z][a]^T = [a][z_1][a]^T + [a][k_j][a]^T \frac{2}{s^2 + \omega_j^2}; \quad (6-56)$$

$$[a][z][a]^T = Z_1 + \frac{2K_s}{s^2 + \omega_j^2}, \quad (6-57)$$

где

$$[a][k_j][a]^T = K \text{ (вещественное число)}, \quad (6-58)$$

¹ Или первый член разложения в ряд Лорана, если полюс кратный.

т. е.

$$[a][k_j][a]^T \geq 0, \quad (6-59)$$

так как $Z(s)$ — положительное вещественное.

Тогда левая часть представляет положительную полуопределенную квадратичную форму (условие 4), а $[k_j]$ — вещественная и симметричная матрица, и это можно проверить.

Удивительно то, что если симметричная матрица $[Z]$ удовлетворяет четырем указанным условиям, то $[Z]$ можно реализовать как матрицу сопротивлений холостого хода цепи $RLCM$, хотя мы не будем доказывать, что условия достаточны. Такое же утверждение справедливо для матрицы проводимостей короткого замыкания $[y]$ (см. приложение). Действительно, этот выбор условий настолько важен, что мы называем всякую матрицу, удовлетворяющую этим условиям, положительной вещественной матрицей.

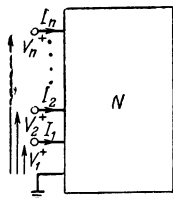


Рис. 6-4. Многополюсник с n входами и $n+1$ зажимами.

К сожалению, практическое применение решения этой задачи ограничено, так как обычно в процедуре синтеза требуются идеальные трансформаторы и доказательство достаточности. Во всяком случае следует стремиться избегать их применения.

Большее практическое значение имеет исследование синтеза многополюсников с $n+1$ зажимами (заземленных) (рис. 6-4).

Многополюсники RLC . Общие условия реализуемости цепей RLC без трансформаторов и особенно заземленных многополюсников неизвестны. Немногие известные условия основаны на изучении омических цепей. Это объясняется следующими причинами:

1. Если матрица проводимостей короткого замыкания $[y(s)]$ реализуема, то матрица вещественных чисел $[y(\sigma_0)]_{\sigma_0 \geq 0}$ для данного σ_0 **обязательно** реализуема. Эту последнюю можно реализовать, заменив все индуктивности (L), емкости (C) и сопротивления (R) в реализации первой матрицы соответственно сопротивлениями $\sigma_0 L$, $1/\sigma_0 C$ и R . Таким образом, любая цепь RLC при $s = \sigma \geq 0$ ведет

себя как цепь из безреактивных сопротивлений (рис. 6-5). Из этой физической интерпретации замены s на σ непосредственно вытекает, что $t_{21}(\sigma)|_{\sigma \geq 0} \leq 1$, поскольку чисто безреактивная цепь не может дать усиления напряжения.

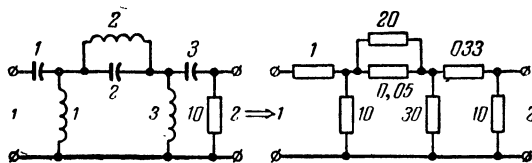


Рис. 6-5. Омическая цепь, эквивалентная цепи RLC при $s=10$.

2. Рассмотрим матрицу $[y(s)]$, элементы которой представляют входные и передаточные проводимости цепей RC , RL или LC , например:

$$[y]_{RC} = \begin{bmatrix} {}_0k_{11} + {}_{\infty}k_{11}s + \sum_i^m \frac{{}_ik_{11}s}{s + \sigma_i} \dots {}_0k_{1n} + {}_{\infty}k_{1n}s + \\ + \sum_i^m \frac{{}_ik_{1n}s}{s + \sigma_i} \\ {}_0k_{n1} + {}_{\infty}k_{n1}s + \sum_i^m \frac{{}_ik_{n1}s}{s + \sigma_i} \dots {}_0k_{nn} + {}_{\infty}k_{nn}s + \\ + \sum_i^m \frac{{}_ik_{nn}s}{s + \sigma_i} \end{bmatrix} \quad (6-60)$$

$$[y]_{RC} = [{}_0k] + [{}_{\infty}k]s + \sum_i [{}_ik] \frac{s}{s + \sigma_i}. \quad (6-61)$$

Допустим, что все матрицы вычетов, поскольку они вещественны, можно реализовать уравновешенными омическими многополюсниками¹, так что получится

¹ Под уравновешенным многополюсником подразумевается цепь, которую можно расположить таким образом, чтобы она была симметрична относительно некоторой линии, проведенной между любыми двумя входами. Если такие цепи соединить параллельно, их матрицы $[y]$ складываются, так как ввиду симметрии через два зажима каждого входа должны протекать одинаковые, но противоположные токи.

$m+2$ таких многополюсников. Теперь заменим сопротивления R_i в реализации матрицы $[\infty k]$ емкостями $C_i = 1/R_i$ и заменим все сопротивления R_i в реализации матрицы $[i k]$ последовательными соединениями RC соответственно с величинами R_i и $1/\sigma_i R_i$. Таким образом, все $m+2$ частей матрицы $[y(s)]$ будут реализованы. Наконец, поскольку цепи по-прежнему уравновешены, их можно

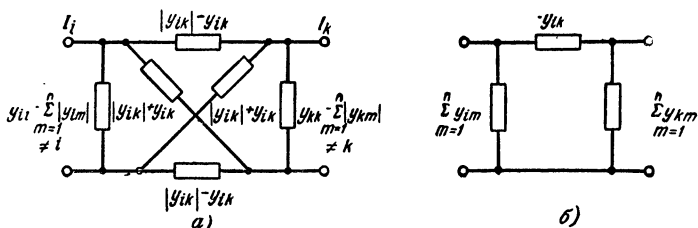


Рис. 6-6. Составляющие цепи при реализации.
 а — симметричными цепями и б — заземленными цепями.

соединить параллельно и реализовать $[y(s)]$. Следовательно, достаточное условие для реализации $[y(s)]$ состоит в том, чтобы матрицы вычетов были реализованы по отдельности как уравновешенные (или заземленные) чисто безреактивные многополюсники.

Синтез безреактивных цепей. Для того чтобы вещественная симметричная матрица $[y]$ (которую мы будем обозначать $[g]$) могла быть реализована безреактивной цепью, она должна быть положительной вещественной или положительной полуопределенной. Это условие необходимо, но, как будет показано, оно недостаточно.

Ниже указаны два наиболее общие¹ условия реализуемости матрицы $[g]$ омической цепью [Л. 2.110]:

1. Достаточное условие реализации безреактивной цепью состоит в том, чтобы матрица $[g]$ была доминирующей; реализующее звено между любыми двумя входами i и k должно быть уравновешенным, и все его элементы должны быть положительными (рис. 6-6, а). Если матрица $[g]$ является доминирующей и, кроме того, все ее недиагональные члены отрицательны, то каждое звено реализации может быть заменено заземленной безре-

¹ Известны также другие условия [Л. 2].

активной цепью (рис. 6-6,б). Читатель может легко проверить, что при таком соединении всех входов матрица $[g]$ будет реализована.

2. Необходимое условие реализации любого вида состоит в том, чтобы матрица $[g]$ была главенствующей.

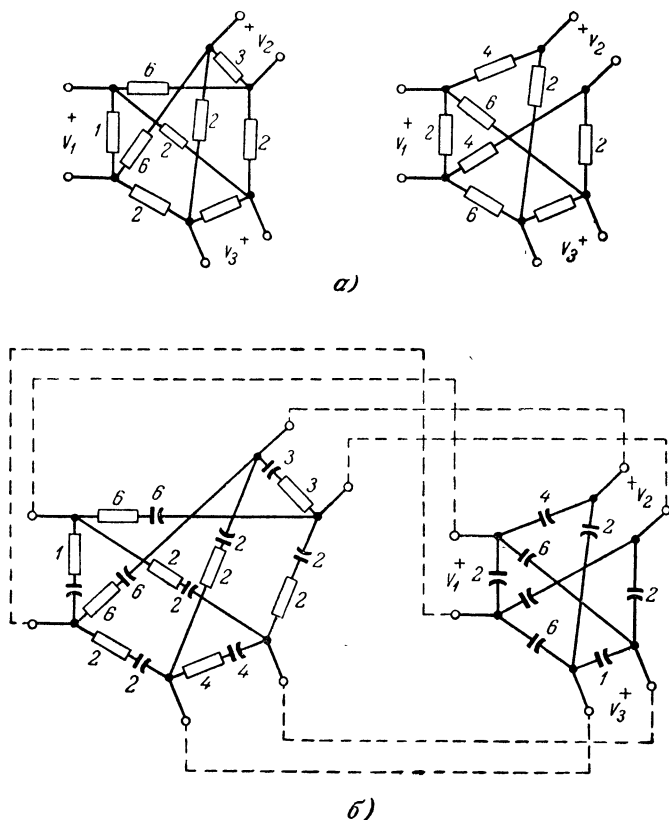


Рис. 6-7. Реализация в виде уравновешенной цепи.

а — величины в MO ; б — величины в MO в фарадах.

Это вытекает из того, что безреактивная цепь не может давать усиление напряжения [Л. 2]. Заметим, что поскольку матрица $[g]$ может быть положительной и не главенствующей, мы доказали, что положительность и вещественность недостаточны.

Пример 6-2. Реализовать

$$y[s] = \left[\begin{array}{l} \frac{5s}{s+1} + 7s + \frac{4s}{s^2+2} \dots \frac{3s}{s+1} - 2s + \frac{2s}{s^2+2} \frac{-s}{s+1} - 3s \\ \frac{3s}{s+1} - 2s + \frac{2s}{s^2+2} \frac{-s}{s+1} - 3s \dots \frac{7s}{s+1} + 3s + \frac{10s}{s^2+2} \frac{s}{s+1} + \\ + s - \frac{6s}{s^2+2} \frac{-s}{s+1} + s - \frac{6s}{s^2+2} \frac{6s}{s+1} + 5s + \frac{10s}{s^2+2} \end{array} \right]. \quad (6-62)$$

Матрицы вычетов:

$$\left| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{array} \right|; \left| \begin{array}{ccc} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{array} \right|; \left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -10 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{array} \right|. \quad (6-63)$$

Все матрицы вычетов — доминирующие. На рис. 6-7,а представлена безреактивная реализация первых двух матриц по модели, изображенной на рис. 6-6. На рис. 6-7,б показан окончательный вид цепи, после того как сопротивления заменены сочетаниями *RLC* и аналогичные входы соединены параллельно. Читателю предоставляется завершить реализацию.

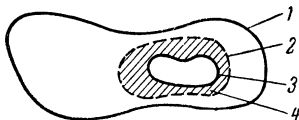


Рис. 6-8. Области реализуемости многополюсников.

1 — область положительной вещественности и симметрии матрицы $[z]$, $[y]$; 2 — область, где реализуемость неизвестна; 3 — область, где матрицы вычетов являются доминирующими (реализуемость известна); 4 — задача реализации многополюсников.

6-3. РЕЗЮМЕ

Условия реализуемости матриц $[z]$ или $[y]$ цепями *RLCM* известны и состоят в том, что они должны быть симметричны, положительны и вещественны.

Условия реализации матриц цепями *RLC* указаны в приложениях и на рис. 6-8. Очевидно, способы синтеза цепями *RLC* применимы лишь к матрицам, обладающим вполне определенными свойствами, связанными с доминированием.

Задачи

6-1. Что означает $[Z]^{-1}$, $[z]^{-1}$?

6-2. Проверить, что из матрицы (6-16) получается матрица (6-17).

6-3. Проверить уравнение (6-20) [указание: ток исключенного узла равен нулю; при всех V_i должно выполняться уравнение (6-10)].

6-4. Укажите различия между цепью с N входами и цепью с $2n$ зажимами. Сравните обратимый четырехполюсник на рис. 6-9,а

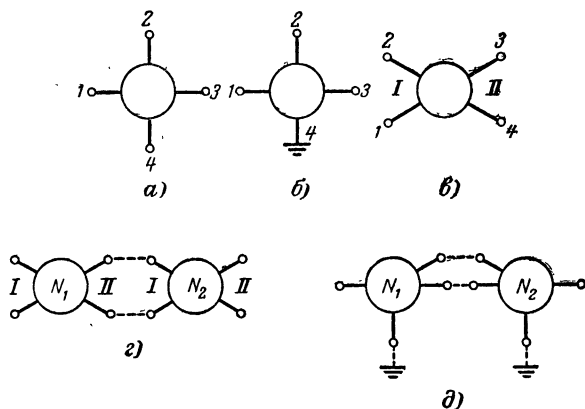


Рис. 6-9. Соединения четырехполюсников.

и цепи, получающиеся при двух различных расположениях его зажимов (рис. 6-9,б и в).

а) Какой порядок матрицы $[y]$ для каждой из этих схем?

б) Сколько нужно измерений, чтобы описать каждую из этих цепей? Покажите, как вы будете проводить эти измерения. Если соединить две такие цепи, как показано на рис. 6-9,г, д, то сколько

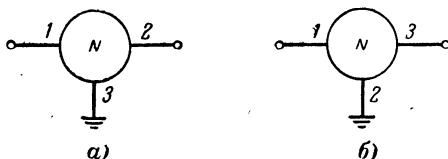


Рис. 6-10. Различное расположение зажимов трехполюсника с двумя входами.

измерений нужно иметь в каждой цепи в первом и во втором случае, чтобы предсказать поведение объединенной цепи?

в) Для цепи, изображенной на рис. 6-9,в, выразите проводимости короткого замыкания через элементы неопределенной матрицы проводимостей цепи, изображенной на рис. 6-9,а. Обратите внимание на общность и полезность неопределенной матрицы проводимостей.

6-5. Выразите проводимости короткого замыкания схемы на рис. 6-10,б через параметры цепи, изображенной на рис. 6-10,а.

6-6. Покажите, что главенствующая вещественная симметричная матрица должна быть положительной вещественной.

6-7. Покажите, что условия, определяющие положительную вещественную матрицу, в случае двухполюсника вырождаются в уже известные вам условия, описывающие положительную вещественную функцию.

6-8. Докажите следующее утверждение: если существует безреактивная цепь, реализующая $[y]$, то существует другая схема реализации, имеющая не больше $2n$ узлов.

6-9. Покажите, что матрицы вычетов матрицы $\{y(s)\}$ многополюсника RC или RL должны быть положительными определенными; здесь термин «вычеты» обозначает коэффициенты в разложении $y_{RC}(s)/s$ или $y_{RL}(s)$ на простые дроби.

6-10. Изобразите области подобно тому, как показано на рис. 6-8, для реализуемости безреактивных цепей, в которых матрицы $[z]$ и $[y]$ являются;

- а) главенствующими;
- б) доминирующими;
- в) положительными вещественными;
- г) доминирующими с отрицательными внедиагональными элементами;
- д) областью, в которой реализуемость неизвестна;
- е) областью, в которой реализуемость известна.

Глава седьмая

АКТИВНЫЕ ЦЕПИ

7-1. АНАЛИЗ

Определения. Активность или пассивность многополюсника обычно определяется интегралом энергии

$$E(t) = \int_{-\infty}^t \sum_k^n v_k(\tau) i_k(\tau) d\tau, \quad (7-1)$$

который для пассивных цепей должен быть неотрицательным при всех τ и при всех сочетаниях источников тока или напряжения на его зажимах. Вопреки этому определению всякая цепь, содержащая какие-либо другие элементы, помимо $RLCM$, на простом языке называется активной цепью. Мы будем различать термины *активная цепь*, *активный многополюсник* и *активный элемент*. Первое есть наименование активного устройства в простом понимании активности, а в двух других активность понимается в том смысле, как определено уравнением (7-1). Во всех случаях подразумевается линей-

ная конечная стационарная цепь с сосредоточенными параметрами.

Вырожденные активные цепи. Под вырожденными цепями *RLCM* подразумеваются такие цепи, для которых не существует либо матрица $[Y]$ или $[Z]$, либо матрица $[y]$ или $[z]$, либо ни одна из них (например, для идеального трансформатора не существует ни одна из этих матриц). Вырожденность цепи обычно можно установить по внешнему виду цепи и она не зависит от величин элементов.

В активных цепях возможны не только другие виды вырожденности, но само существование вырожденности зависит от величин элементов. Так, можно построить активный двухполюсник, в котором входной ток и напряжение независимы (задача 7-1), но если изменить величину одного элемента, вырожденность исчезает:

ПАССИВНОСТЬ НЕОБРАТИМЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Эрмитовские формы. Как и в гл. 6, мы должны основываться на положениях теории матриц, с которыми читатель, возможно, незнаком. Нижеследующие определения представляют лишь распространения определений, приведенных в гл. 6.

Подобно квадратичной форме

$$q = \sum_{ij} a_i a_j x_{ij} \quad (a_i \text{ вещественные}) \quad (7-2)$$

определим класс функций

$$h = \sum_{ij} a_i a_j^* x_{ij} \quad (a_i \text{ вещественные или комплексные}). \quad (7-3)$$

Если величина h — вещественная при всех комплексных a_i , h называется эрмитовской формой. Для каждой эрмитовской формы существует единственная эрмитовская матрица $[x]$ такая, что

$$h = [a][x][a]^*{}^T. \quad (7-4)$$

Беря сопряженные и транспонированные матрицы для обеих частей уравнения (7-4) и замечая, что $h = h^{*T}$, так как величина h — вещественная, имеем:

$$h = [a][x]^*{}^T[a]^*{}^T. \quad (7-5)$$

Следовательно, если h — вещественная величина, $[x]=[x]^{\ast T}$ и $[x]$ есть эрмитовская матрица. Наоборот, если $[x]=[x]^{\ast T}$, h — вещественная величина, а $[x]$ — эрмитовская матрица.

При положительных h и любых комплексных a_i мы получаем положительные полуопределенные и определенные эрмитовские формы (и матрицы). Проверка этого положения такая же, как для квадратичных форм. Заметим, что при $[x]=[x]^{\ast T}$ любой главный минор p_i матрицы $[x]$ будет вещественным числом.

Пример 7-1.

$$[x] = \begin{bmatrix} 0,5 & \frac{1,5 - j0,5}{4} \\ \frac{1,5 + j0,5}{4} & 1,5 \end{bmatrix}. \quad (7-6)$$

Очевидно, $x_{kj} = x_{jk}^*$, следовательно, $[x]$ есть эрмитовская матрица. Далее

$$p_1 = |0,5| > 0; \quad (7-7)$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & \frac{1,5 - j0,5}{4} \\ \frac{1,5 + j0,5}{4} & 1,5 \end{vmatrix} > 0. \quad (7-8)$$

Следовательно, матрица является положительной определенной эрмитовской матрицей.

Пассивные многополюсники. Рассмотрим обычное определение пассивности. Определим пассивный многополюсник как многополюсник, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Полная энергия, поступающая в цепь, неотрицательна при любых возбуждениях цепи:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k^n i_k(t) v_k(t) dt \geq 0. \quad (7-9)$$

2. До того, как подведено возбуждение, на зажимах не появляется никакой реакции.

Пусть имеется многополюсник, который удовлетворяет условиям 1 и 2 и, следовательно, является пассив-

ным (но необязательно цепью $RLCM$). Если возбудить цепь источниками тока и если для нее существует матрица полных сопротивлений $[z]$, то, как будет показано, условия 1 и 2 налагают на матрицу $[z]$, симметричную или несимметричную, определенные ограничения. Кроме того, мы покажем, что эти условия достаточны, чтобы цепь была пассивной при любых возбуждениях. В заключение будет описан способ проверки пассивности цепи по матрице $[z]$ [Л. 2.101.]

Необходимые и достаточные условия пассивности.
Сперва напишем:

$$[V]=[z][I], \quad (7-10)$$

где $[V]$ и $[I]$ определяются как в гл. 6.

Так как цепь линейная и стационарная и до подведения к ней тока на ее выходах нет никакого напряжения, можно записать функцию времени по формуле свертки

$$[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [K(t-\tau)] [i(\tau)] d\tau, \quad (7-11)$$

где $K_{jk}(t) = L^{-1}[z_{jk}(s)]$ [$K_{jk}(t)$ — импульсная характеристика]. Тогда интеграл энергии (7-9) равен:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t)]^T [i(t)] dt. \quad (7-12)$$

Определим¹

$$e(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [i(t-u)]^T [v(t)] dt; \quad (7-13)$$

$$e(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [i(t-u)]^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [K(t-\tau)] [i(\tau)] d\tau \right\} dt; \quad (7-14)$$

$$e(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i(t-u)]^T [K(t-\tau)] [i(\tau)] d\tau dt. \quad (7-15)$$

¹ Необходимо принять допущения о равномерной сходимости, существовании преобразования Фурье и т. д. В задаче 7-4 и в [Л. 3.115, 3.129] показано, к каким следствиям приводят эти допущения.

Мы замечаем, что

$$E = e(0). \quad (7-16)$$

Уравнение (7-14) есть свертка функций вида $i_j(-t)$, $k_{j,k}(t)$ и $i_k(t)$ имеющих изображения Фурье

$$I_j^*(j\omega), z_{jk}(j\omega), I_k(j\omega). \quad (7-17)$$

Следовательно, изображение Фурье для уравнения (7-15) имеет вид:

$$F[e(u)] = [I(j\omega)]^{*T} [z(j\omega)] [I(j\omega)], \quad (7-18)$$

т. е.

$$e(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k}^n I_j^*(j\omega) I_k(j\omega) z_{jk}(j\omega) e^{j\omega u} d\omega; \quad (7-19)$$

$$E = e(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k}^n I_j^*(j\omega) I_k(j\omega) z_{jk}(j\omega) d\omega. \quad (7-20)$$

Допустим, что все токи¹ представляют функции такого вида:

$$i_k(t) = c'_k e^{-\sigma_0(t-\tau_k)} \cos[\omega_0(t - \tau_k) + c_0], \quad c_k, \tau_k, \omega_0 \geq 0, \sigma_0 > 0 \quad (7-21)$$

Заметим, что величины ω_0 и σ_0 одинаковы у всех токов, а c_k и τ_k различны; однако все константы произвольны, за исключением c_0 , которое надлежит еще определить.

Изображение Фурье для тока имеет вид:

$$I_k(j\omega) = c'_k \frac{(j\omega + a_0) e^{-j\omega\tau_k}}{[\sigma_0 + j(\omega - \omega_0)][\sigma_0 + j(\omega + \omega_0)]}, \quad (7-22)$$

где a_0 — функция от c_0 , и

$$\begin{aligned} I_j^*(j\omega) I_k(j\omega) &= (c'_j e^{-j\omega\tau_j})^* (c'_k e^{-j\omega\tau_k}) \times \\ &\times \frac{\omega^2 + a_0^2}{[\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2][\sigma_0^2 + (\omega + \omega_0)^2]}; \end{aligned} \quad (7-23)$$

¹ Токи можно выбрать произвольно и отсюда найти необходимые условия для матрицы $[z]$.

$$I_j^*(j\omega) I_k(j\omega) = (c_j e^{-j\omega\tau_j})^* (c_k e^{-j\omega\tau_k}) \times \\ \times \left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\}, \quad (7-24)$$

где

$$a_0^2 = \sigma_0^2 + \omega_0^2; \quad (7-25)$$

$$c_k = \sqrt{\sigma_0} c'_k. \quad (7-26)$$

Выбрав c_0 так, чтобы выполнялось уравнение (7-25), вернемся к уравнению (7-20):

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k}^n (c_j e^{-j\omega\tau_j})^* (c_k e^{-j\omega\tau_k}) z_{jk}(j\omega) \times \\ \times \left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right\} d\omega. \quad (7-27)$$

Чтобы доказать, что этот интеграл действительно положителен, запишем интеграл Пуассона для полуплоскости (где $G(\sigma + j\omega)$ — аналитическая функция при $\sigma > 0$):

$$G(\sigma_0 + j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) \sigma_0 d\omega}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2}, \quad \sigma_0 > 0, \quad (7-28)$$

и, следовательно,

$$G(\sigma_0 - j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) \sigma_0 d\omega}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2}. \quad (7-29)$$

Это уравнение описывает изменения функции $G(s)$ в правой полуплоскости и на оси $j\omega$. Складывая эти уравнения, получим при $G(\sigma + j\omega) = G^*(\sigma - j\omega)$:

$$\operatorname{Re} G(\sigma_0 + j\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \times \\ \times \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right] d\omega. \quad (7-30)$$

Определим:

$$G(j\omega) = \sum (i_i e^{-j\omega\tau_i})^* (c_k e^{-j\omega\tau_k}) z_{ik}(j\omega) \quad (7-31)$$

и, объединяя уравнения (7-27) и (7-30), получим:

$$E = \operatorname{Re} \sum_{j,k}^n (c_j e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)\tau_j})^* (c_k e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)\tau_k}) z_{jk}(\sigma_0 + j\omega_0); \quad (7-32)$$

$$E = \operatorname{Re} \sum_{j,k}^n (i_j e^{-\sigma_0\tau_j} e^{-j\omega_0\tau_j})^* (c_k e^{-\sigma_0\tau_k} e^{-j\omega_0\tau_k}) z_{jk}(\sigma_0 + j\omega_0); \quad (7-33)$$

$$E = \operatorname{Re} \sum_{j,k}^n a_j^*(\sigma_0 + j\omega_0) a_k(\sigma_0 + j\omega_0) z_{jk}(\sigma_0 + j\omega_0), \quad \sigma_0 > 0, \quad (7-34)$$

где a_j и a_k — произвольные комплексные числа, так как i_j и τ_j можно выбирать независимо от σ_0 и ω_0 . Очевидно, $(\sigma_0 + j\omega_0)$ вещественно при $\omega_0 = 0$.

Следовательно, полагая $s = \sigma_0 + j\omega_0$, получаем условие

$$E = \operatorname{Re} \sum_{j,k}^n a_j^*(s) a_k(s) z_{jk}(s); \quad \sigma > 0; \quad (7-35)$$

$$E \geq 0. \quad (7-36)$$

Ввиду непрерывности функции распространяем уравнение (7-36) на ось $j\omega$. Определим:

$$F(s) = \sum_{j,k}^n a_j^*(s) a_k(s) z_{jk}(s). \quad (7-37)$$

Очевидно, $F(s)$ должна быть положительной вещественной функцией. Это ограничение, налагаемое на $\{z(s)\}$, является, следовательно, необходимым условием пассивности цепи.

Чтобы показать, что положительность и вещественность $F(s)$ являются также достаточным условием, напишем на основании уравнения (7-20):

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega; \quad (7-38)$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(j\omega) + j \operatorname{Im} F(j\omega)] d\omega; \quad (7-39)$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} F(j\omega) d\omega, \quad (7-40)$$

так как $\operatorname{Im} F(j\omega)$ есть нечетная функция от ω . Но интеграл (7-40) неотрицателен, следовательно, интеграл энергии также неотрицателен. Ниже следует доказательство достаточности.

Полезно отметить следующее:

1. Определение энергии (7-9) по существу не отличается от обычного определения [уравнение (7-1)]:

$$E(t) = \int_{-\infty}^t \sum_k^n i_k(\tau) v_k(\tau) d\tau, \quad (7-41)$$

так как, если $E(t)$ отрицательно при любом t_1 , это условие можно привести в уравнении (7-41), положив

$$i_k(t) = 0; \quad t \geq t_1; \quad k = 1, \dots, n, \quad (7-42)$$

и E в (7-9) будет также отрицательно.

2. Необходимые и достаточные условия пассивности многополюсника с распределенными параметрами такие же, как для многополюсника с сосредоточенными параметрами, с той разницей, что функция $z_{jk}(s)$ может быть не рациональной.

Процедура проверки для $[z(s)]$. Чтобы упростить проверку пассивности N по $[z(s)]$, представим $\operatorname{Re} F(s)$ в бо-

лее наглядном виде. С этой целью развернем (7-35) следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(s) = & \operatorname{Re} \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_{kj} \left(\frac{z_{jk} + z_{kj}}{2} \right) + \\ & + \operatorname{Re} \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_{kj} \left(\frac{z_{jk} - z_{kj}}{2} \right); \end{aligned} \quad (7-43)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(s) = & \operatorname{Re} \left\{ |a_1|^2 \operatorname{Re} z_{11} + \dots + |a_n|^2 \operatorname{Re} z_{nn} + \right. \\ & + \frac{a_{12}^* a_{21} (z_{12} + z_{21}^*)}{2} + \frac{a_{21}^* a_{12} (z_{12}^* + z_{21})}{2} + \dots \left. \right\} + \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \frac{a_{12}^* a_{21} (z_{12} - z_{21}^*)}{2} - \frac{a_{21}^* a_{12} (z_{12}^* - z_{21})}{2} + \dots \right\}; \end{aligned} \quad (7-44)$$

$$\operatorname{Re} F(s) = \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_{kj} \frac{(z_{jk} + z_{kj})}{2}, \quad (7-45)$$

так как первый член в (7-44) вещественный, а второй — мнимый¹.

Уравнение (7-45) наряду с требованием, чтобы функция

$$F(s) = \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_{kj} z_{jk} \quad (7-46)$$

была положительной и вещественной, непосредственно подсказывает процедуру проверки.

1. Поскольку N — цепь с сосредоточенными параметрами, $z_{jk}(s)$ есть рациональная функция от s .

2. Функция $z_{jk}(s)$ не должна иметь полюсов в правой полуплоскости или кратных полюсов на оси $j\omega$, так как эти полюсы являются также полюсами $F(s)$.

3. Положим

$$[z(j\omega)] = [r(\omega)] + j[x(\omega)]. \quad (7-47)$$

¹ Матрица $[z]_H = ([z] + [z]^* T) / 2$ называется эрмитовской частью $[z]$, так как величина $[a] [z]_H [a]^* T$ всегда вещественна.

Тогда вместо (7-45) получаем:

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_k \frac{z_{jk}(\omega) + r_{kj}(\omega) + j[x_{jk}(\omega) - x_{kj}(\omega)]}{2}; \quad (7-48)$$

$$\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0. \quad (7-49)$$

Следовательно, матрица

$$[r(\omega)]' = [r(\omega)] + [r(\omega)]^T + j\{[x(\omega)][x(\omega)]^T\} \quad (7-50)$$

должна быть положительной полуопределенной эрмитовской матрицей.

4. Если $z_{jk}(s)$ имеет простой полюс на оси $j\omega$, можно выделить полюс вместе с его матрицей вычетов:

$$F(s) = \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_k z_{jk}; \quad (7-51)$$

$$F(s) = \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_k z'_{jk} + \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2} \sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_k k_{jk}. \quad (7-52)$$

Поскольку $F(s)$ — положительная вещественная функция, вычеты $F(s)$ в полюсах на оси $j\omega$ должны быть вещественными и неотрицательными. Следовательно,

$$\sum_{j, k}^n a_{jk}^* a_k k_{jk} = [a][k][a]^* \geq 0, \quad (7-53)$$

так что $[k]$ есть положительная полуопределенная эрмитовская матрица.

Выводы этого раздела сведены в табл. 7-1.

Пример 7-2.

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + s + 1}{(s^2 + 1)(s + 1)} & \frac{s - 0,5}{(s^2 + 1)(s + 1)} \\ \frac{0,5s - 1}{(s^2 + 1)(s + 1)} & \frac{4s^2 + 3s + 1}{(s^2 + 1)(s + 1)} \end{bmatrix}.$$

Проверяем матрицу $[z(s)]$, чтобы установить, может ли она быть матрицей сопротивлений холостого хода

**Сравнение свойств двухполюсника и общего
пассивного многополюсника**

Аналогичные величины	
Двухполюсник	Многополюсник
$Z(s)$	$F(s) = [a(s)][z(s)][a(s)]^{*T}$
$\operatorname{Re} Z(s)$	$[a(s)] \left\{ \frac{[z(s) + [z(s)]^{*T}]}{2} \right\} [a(s)]^{*T}$
$\operatorname{Re} Z(j\omega)$	$[a][r(\omega)]' [a]^{*T}$
k — вычет на оси $j\omega$	$[a][k][a]^{*T}$
Условия пассивности	
Функция $Z(s)$ положительная вещественная	Функция $F(s)$ положительная вещественная
Процедура проверки	
1. Функция $Z(s)$ вещественная и рациональная по s	1. Функция $z_{jk}(s)$ вещественная и рациональная по s
2. $Z(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости и имеет лишь простые полюсы на оси $j\omega$	2. $z_{jk}(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости и имеет лишь простые полюсы на оси $j\omega$
3. $k \geq 0$	3. $[k]$ — положительная полуопределенная эрмитовская матрица
4. $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$	4. $[r(\omega)]^T$ — положительная полуопределенная эрмитовская матрица

пассивного двухполюсника N с сосредоточенными параметрами.

1. $z_{jk}(s)$ есть вещественная рациональная функция от s .

2. $z_{jk}(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости и имеет лишь простые полюсы на оси $j\omega$.

3. Матрица вычетов в полюсе при $s=j1$ равна:

$$[k] = \begin{bmatrix} 0,5 & \frac{1,5 - j0,5}{4} \\ \frac{1,5 + j0,5}{4} & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Как показано в примере 7-1, это положительная определенная матрица.

4. Чтобы проверить $\operatorname{Re} F(j\omega)$, применяем упрощенный способ (см. задачу 7-2):

$$[r(\omega)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\omega^2} & \frac{\omega^2 - 0,5}{(1-\omega^2)(1+\omega^2)} \\ \frac{0,5\omega^2 - 1}{(1-\omega^2)(1+\omega^2)} & \frac{1}{1+\omega^2} \end{bmatrix};$$

$$x_{12} = \frac{1,5\omega}{(1-\omega^2)(1+\omega^2)} = x_{21}; \quad (7-54)$$

$$4r_{12}r_{22} - (r_{12} + r_{21})^2 - (x_{12} - x_{21})^2 = \frac{1,75}{(1+\omega^2)^2} > 0. \quad (7-55)$$

7-2. СИНТЕЗ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Задача реализации для активных цепей. Задача реализации для активных цепей такая же, как для синтеза цепей *RLC*: реализовать полностью или частично матрицу $[y]$ или $[z]$ (при этом мы избегаем указанной выше вырожденности, поскольку существует хотя бы одна из матриц). Процедура синтеза активных цепей может потребоваться по одной из следующих причин:

1. $[y]$ или $[z]$ не является положительной вещественной или является положительной вещественной, но симметричной.

2. Требуется реализовать $[y]$ или $[z]$ заземленной цепью, имеющей передаточные функции с положительными вещественными нулями.

3. Появляется возможность избежать применения большого числа пассивных элементов, как требуется, например, при реализации некоторых фазовых функций неминимальной фазы.

4. Самая важная причина: это дает возможность реализовать комплексные полюсы без индуктивных элементов, особенно на звуковых частотах и частотах, применяемых в цепях управления, где индуктивные элементы имеют большую величину и потери. Это так называемые методы синтеза активных цепей *RC*.

Определение новых элементов. Мы будем говорить о некоторых элементах, не относящихся к элементам *RLCM*, которые, возможно, читателю неизвестны. Они приведены в табл. 7-2. Там же указаны некоторые упро-

Таблица 7-2

Активное устройство	Схемное обозначение	Эквивалентная схема с регулируемым источником и определяющим уравнением	Приближенная физическая реализация
А		 $V_2 = kV_1$	 1
Б		 $I_2 = -kV_1$	 2
В		 $V_2 = kI_1$	 3
Г		 $I_2 = -kI_1$	 4
Д		 $V_1 = -RI_1$	 5
Е		 $V_1 = -kI_2$ $V_2 = kI_1$	 6
Ж		 $V_2 = -kV_1$ $I_2 = \frac{1}{k} I_1$	 7
З		 $V_2 = V_1$ $I_2 = k I_1$	 8

А — источник напряжения, регулируемый напряжением; Б — источник тока, регулируемый напряжением; В — источник напряжения, регулируемый током; Г — источник тока, регулируемый током; Д — отрицательное сопротивление; Е — гиратор; Ж — преобразователь положительного сопротивления в отрицательное с инверсией напряжения; З — преобразователь положительного сопротивления в отрицательное с инверсией тока; 1 — катодный повторитель; 2 — пентод; 3 — транзистор с общим коллектором; 4 — транзистор с общей базой; 5 — диод Есакки.

щенные приближенные физические реализации (некоторые из них основаны на идеализированной модели транзистора, указанной в задаче 7-6). В задаче 7-13 указаны причины выбора некоторых из этих элементов.

Основные наборы элементов. Очевидно, описание всех этих новых элементов не является необходимым, так как, например, преобразователь напряжения с отрицательным сопротивлением (ПНОС) можно представить регулируемыми источниками. Поэтому можно указать основные наборы элементов. Каждый элемент основного набора не может быть выражен через любой другой, а их совокупность позволяет реализовать самые различные матрицы $[z]$ или $[y]$.

Чтобы отыскать основные наборы, замечаем, что регулируемые источники, гираторы и преобразователи с отрицательным сопротивлением, как следует из матричного описания, представляют необратимые устройства, тогда как отрицательное сопротивление, как двухполюсник, по существу обратимо. С другой стороны, гиратор представляет пассивное устройство без потерь (мощности на входе и выходе одинаковы), а другие элементы являются вообще активными (см. задачу 7-6). Поэтому если ставится задача реализации произвольной матрицы $[y(s)]$, которая может быть (в лучшем случае):

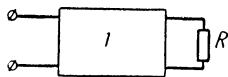


Рис. 7-1. Модель Дарлингтона для цепи без потерь, нагруженной сопротивлением.

1 — цепь без потерь.

а) несимметричной, но при этом она может удовлетворять условиям пассивности цепи и, следовательно, цепь должна состоять из необратимых элементов, или

б) симметричной, но не положительной вещественной, и, следовательно, цепь должна состоять из активных элементов, то основной набор должен содержать активные и необратимые элементы.

Поэтому следует выбирать в качестве основных наборов:

Набор 1. Регулируемые источники (активные и необратимые) + $RLCM$.

Набор 2. Преобразователи положительного сопротивления в отрицательное (активные и необратимые) + $RLCM$.

Набор 3. Отрицательные сопротивления (активные, обратимые) и гираторы (пассивные, необратимые) + $RLCM$.

Принципы синтеза. Подход к синтезу как активных, так и пассивных цепей состоит в том, что сначала находят модель, состоящую из соединенных между собой подцепей, записывают уравнения, описывающие модель, и затем разлагают любую данную матрицу $[y(s)]$ или часть $[y(s)]$ таким образом, чтобы подцепь было легко реализовать. Примером синтеза пассивной цепи может служить принадлежащая Дарлингтону модель цепи без потерь, нагруженной безреактивным резистором

(рис. 7-1), для реализации входной функции цепи. При этом $Z(s)$ представляют в виде

$$Z(s) = \frac{m_1}{n_2} \frac{(n_1/m_1) + k}{(m_2/n_2) + k}; \quad (7-56)$$

$$Z(s) = z_{11} \frac{(1/y_{22}) + R}{z_{22} + R}, \quad (7-57)$$

и, следовательно, приходят к задаче синтеза двух подцепей (одна из них — простой безреактивный резистор).

При синтезе активных цепей задачу следует разделить на синтез активной цепи и синтез пассивной цепи. Однако нужно учесть, что любая физическая реализация активного элемента будет содержать паразитные пассивные элементы; для простоты примем, что ими можно пренебречь.

Теоремы о синтезе активных многополюсников. Рассмотрим, какое число активных элементов необходимо для реализации произвольной матрицы $[y(s)]$ (т. е. матрицы короткого замыкания, элементы которой представляют произвольные рациональные функции от s) порядка n . Мы установим теоремы, указывающие, что для реализации произвольной матрицы $[y(s)]$ вообще нужно применять n активных элементов, и это число активных элементов всегда достаточно. Однако в некоторых случаях можно обойтись меньшим числом элементов (например, когда матрица $[y(s)]$ — положительная вещественная).

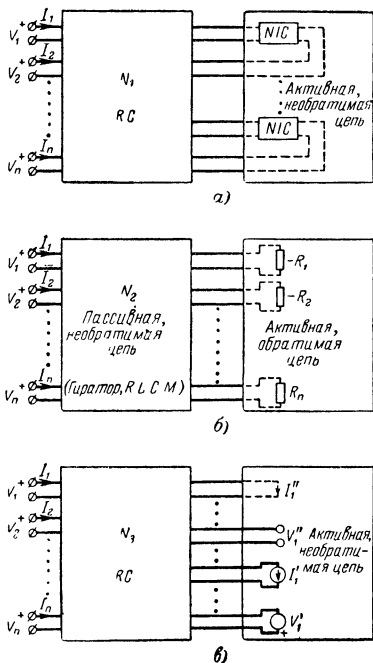


Рис. 7-2. Модели активных цепей, состоящие из пассивной части и активной части.

Теорема 7-1. Для реализации произвольной матрицы $[y(s)]$ цепи, изображенной на рис. 7-2,а, где N_1 есть цепь RC , необходимо и достаточно иметь n преобразователей положительного сопротивления в отрицательное.

Теорема 7-2. Для реализации произвольной матрицы $[y(s)]$ цепи, изображенной на рис. 7-2,б, необходимо и достаточно иметь n отрицательных сопротивлений.

Мы докажем необходимость условия для теоремы 7-1. Необходимость условия в теореме 7-2 будет тогда очевидна. Доказательства достаточности сложны, и их можно найти в литературе.

Необходимость условия теоремы 7-1 будет доказана, если мы докажем, что необходимо всего n регулируемых источников. Определим (см. рис. 7-2,в):

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}; [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}; [A] = \begin{bmatrix} I'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I'_j \\ V'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V'_m \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} I''_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I''_j \\ V''_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V''_k \end{bmatrix}; \quad (7-58)$$

$$[I] = [y][V], \quad (7-59)$$

где $[A]$ содержит регулируемые напряжения и токи, $[B]$ содержит управляющие величины, а $[y]$ — матрица, которую надлежит реализовать.

Определим теперь $[C]$:

$$[A] = [C][B], \quad (7-60)$$

где

$$[C] = [c_{ij}]_{l+m, j+k}; \quad (7-61)$$

c_j — вещественно¹ и выражает соотношение между j -м управляющим током или напряжением и j -м регулируемым напряжением или током. Покажем, что матрица $[C]$ должна иметь определенный минимальный порядок.

Пусть нам пока неизвестно, что источники, входящие в $[A]$, являются регулируемыми, и примем, что они яв-

¹ См. задачу 7-8.

ляются независимыми источниками. По принципу суперпозиции можем записать:

$$[I] = [y_0][V] + [D][A], \quad (7-62)$$

где $[y_0]$ — матрица проводимостей короткого замыкания многополюсника RC , когда все независимые источники $[A]$ равны нулю; $[D]$ — смешанная матрица $[y]$ и $[z]$, определенная при $[V] = 0$. Тем не менее d_{ik} должны иметь лишь отрицательные вещественные полюсы, так как они выражают связь токов и напряжений с напряжениями в цепи RC .

Управляющие компоненты матрицы $[B]$ также можно выразить через $[V]$ и $[A]$:

$$[B] = [F][V] + [G][A], \quad (7-63)$$

где $[F]$ и $[G]$ — матрицы, аналогичные матрицам $[D]$.

Учитывая, что $[A]$ можно выразить через $[B]$ (уравнение (7-6)), имеем:

$$[A] = [C][B]; \quad (7-64)$$

$$[A] = [C]\{[F][V] + [G][A]\}, \quad (7-65)$$

или

$$[A] - [C][G][A] = [C][F][V] \quad (7-66)$$

и

$$[A] = \{[U] - [C][G]\}^{-1}[C][F][V], \quad (7-67)$$

где мы пока приняли, что обратная матрица существует.

Из уравнений (7-5) и (7-8) находим:

$$[y - y_0][V] = [D][A]; \quad (7-68)$$

$$[y - y_0][V] = [D]\{[U] - [C][G]\}^{-1}[C][F][V] \quad (7-69)$$

или

$$[y - y_0] = [D]\{[U] - [C][G]\}^{-1}[C][F]. \quad (7-70)$$

Вообще y_{ik} может иметь простой комплексный полюс в левой полуплоскости при $-\alpha \pm j\beta$ ($\alpha > 0$), а для y_{0ik} это невозможно, поскольку это есть функция цепи RC . Поэтому можно представить (7-70) в виде

$$\begin{aligned} \{[y_1] + [k] \frac{1}{s + \alpha + j\beta} + [k]^* \frac{1}{s + \alpha - j\beta} - [y_0]\} = \\ = [D]\{[U] - [C][G]\}^{-1}[C][F], \end{aligned} \quad (7-71)$$

где $[k]$ — матрица вычетов. Поскольку $[C]$, $[F]$ и $[D]$ не содержат элементов с комплексными полюсами, они должны быть в обратной матрице. Умножая обе части на $s + \alpha + j\beta$ и полагая $s \rightarrow -\alpha - j\beta$, получаем:

$$\lim_{s \rightarrow -\alpha - j\beta} (s + \alpha + j\beta) \left\{ [y_1] + [k] \frac{1}{s + \alpha + j\beta} + \right. \\ \left. + [k]^* \frac{1}{s + \alpha - j\beta} - [y_0] \right\}; \quad (7-72)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\alpha - j\beta} (s + \alpha + j\beta) \left[[D] \left\{ [H] + [k_1] \frac{1}{s + \alpha + j\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + [k_1]^* \frac{1}{s + \alpha - j\beta} \right\} [C] [F] \right], \quad (7-73)$$

откуда

$$[k] = \left\{ \lim_{s \rightarrow -\alpha - j\beta} [D] \right\} [k_1] [C] \left\{ \lim_{s \rightarrow -\alpha - j\beta} [F] \right\}. \quad (7-74)$$

Но мы знаем, что ранг произведения матриц не может превосходить ранга составляющей матрицы, следовательно,

$$\text{ранг } [k] \leq \text{ранг } [C]; \quad (7-75)$$

$$\text{ранг } [k] \leq \min. (j + k, l + m). \quad (7-76)$$

Если матрица вычетов $[n]$ имеет полный ранг n , то

$$n \leq \min. [j + k, l + m], \quad (7-77)$$

так что необходимо иметь n регулируемых и управляющих источников. Следовательно, в этом случае справедливо допущение, что матрица $\{[U] - [C][G]\}$ — неособенная по s , так как обратная матрица должна иметь по меньшей мере один полюс, у которого матрица вычетов имеет полный ранг n , и, следовательно, не может быть бесконечной при любом s .

Необходимость условия теоремы 7-2 доказывается таким же путем на основании того, что могут существовать комплексные полюсы в правой полуплоскости, имеющие матрицу вычетов полного ранга. Число гираторов, используемых в сочетании с отрицательными сопротивлениями (см. рис. 7-2,б), вообще говоря, неизвестно.

Синтез входных и передаточных функций. Из теорем 7-1 и 7-2 заключаем, что для реализации вещественной рациональной функции от s как входного сопротивления цепи необходимо и достаточно иметь один преобразователь

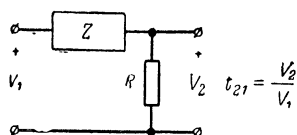


Рис. 7-3. Модель, представляющая связь между синтезом входной функции и синтезом передаточной функции.

положительного сопротивления в отрицательное (ПОС), одно отрицательное безреактивное сопротивление или один регулируемый источник. Поскольку единичную передаточную функцию можно всегда реализовать соответствующим входным сопротивлением [как показано, например, на рис. 7-3, где $Z = R(1 - t_{21})/t_{21}$], для реализации произвольной вещественной рациональной функции как передаточной функции также необходимо и достаточно иметь один ПОС, одно отрицательное безреактивное сопротивление или один регулируемый источник. Исследуем теперь более подробно условия достаточности синтеза передаточной функции.

СИНТЕЗ ЦЕПИ С ОДНИМ АКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Синтез цепи с преобразователем положительного сопротивления в отрицательное (ПОС). Рассмотрим матрицу проводимостей короткого замыкания активной цепи RC , изображенной на рис. 7-4. Эту цепь можно рассматривать как соединение трехполюсника и пятиполюсника (эта задача решена в гл. 6) с тем отличием, что теперь одна из цепей (ПОС) не имеет неопределенной матрицы проводимостей. Однако это затруднение можно обойти¹, если:

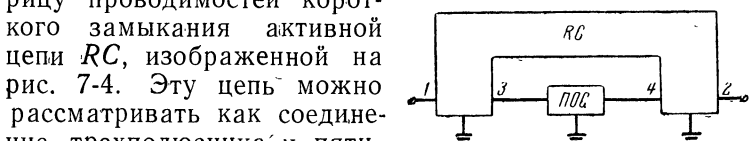


Рис. 7-4. Модель заземленной цепи RC с ПОС.

1) включить в ПОС искусственный элемент так, что он будет иметь $[y]_i$;

2) объединить две цепи и исключить зажимы 3 и 4;

3) исключить элемент из полученной матрицы $[y]_i$.

¹ Этот способ применяется из-за его общности, хотя он и не является простым.

Будем рассматривать лишь преобразователи положительного сопротивления в отрицательное с инверсией напряжения (ПНОС). Включив должным образом паразитный элемент G (рис. 7-5), получаем:

$$[y]_{i \text{ п.о.с.}} = \begin{bmatrix} -kG & -G & (1+k)G \\ kG & G & -(1+k)G \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7-78)$$

Общая неопределенная матрица объединенной цепи имеет вид:

$$[y]_i = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{12} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} & -kG & y_{34} - G & y_{35} + (1+k)G \\ y_{14} & y_{24} & y_{34} & +kG & y_{44} + G & y_{45} - (1+k)G \\ y_{15} & y_{25} & y_{35} & & y_{45} & y_{55} \end{bmatrix}. \quad (7-79)$$

Исключив узлы 3 и 4 как доступные и заземлив узел 5, получим:

$$y'_{11} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{13} & y_{14} \\ y_{13} & y_{33} - kG & y_{34} - G \\ y_{14} & y_{34} + kG & y_{44} - G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{33} - kG & y_{34} - G \\ y_{34} + kG & y_{44} + G \end{vmatrix}}; \quad (7-80)$$

$$y'_{11} = y_{11} + \{-y_{13}[(y_{13})(y_{44} + G)(y_{14})(y_{34} - G)] + \\ + y_{14}[y_{13}(y_{34} + kG) - y_{14}(y_{33} - kG)]\} \div [(y_{33} - kG)(y_{44} + G) - (y_{34} + kG)(y_{34} - G)]; \quad (7-81)$$

$$y'_{11} = y_{11} + \left\{ \frac{-y_{13}^2 + y_{13}y_{14}(k-1) + ky_{14}^2}{y_{33} - y_{34}^2 + G(y_{33} - ky_{44} + y_{34} - ky_{34})} \right\}; \quad (7-82)$$

$$\lim_{G \rightarrow \infty} y'_{11} = y_{11} + \frac{-y_{13}^2 + y_{13}y_{14}(k-1) + ky_{14}^2}{y_{33} - ky_{44} + (1-k)y_{34}}; \quad (7-83)$$

$$\lim_{G \rightarrow \infty} y'_{11} = y_{11} - \frac{(y_{13} + y_{14})(y_{13} - ky_{14})}{y_{33} - ky_{44} + (1-k)y_{34}}; \quad (7-84)$$

$$y'_{12} = y_{12} - \frac{(y_{23} + y_{24})(y_{13} - ky_{14})}{y_{33} - ky_{44} + (1-k)y_{34}}; \quad (7-85)$$

$$y'_{21} = y_{12} - \frac{(y_{13} + y_{14})(y_{23} - ky_{24})}{y_{33} - ky_{44} + (1-k)y_{34}}; \quad (7-86)$$

$$y'_{22} = y_{22} - \frac{(y_{23} + y_{24})(y_{23} - ky_{24})}{y_{33} - ky_{44} + (1-k)y_{34}}. \quad (7-87)$$

Пример 7-3. Рассмотрим реализацию функции

$$y_{21} = \frac{k}{s^2 + 2s + 2} \quad (7-88)$$

каскадной цепью, представленной на рис. 7-6 (модель Линвилла). Из уравнения (7-86) имеем:

$$y_{13} = y_{14} = y_{34} = y_{23} = 0; \quad y'_{21} = \frac{ky_{24}y_{13}}{y_{33} - ky_{44}}; \quad (7-89)$$

$$y'_{21} = \frac{ky_{12a}y_{12b}}{y_{22a} - ky_{44}}. \quad (7-90)$$

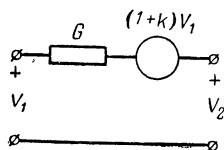


Рис. 7-5. Модель ПНОС с паразитным элементом.

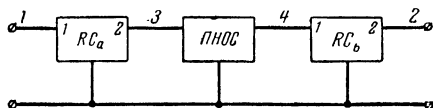


Рис. 7-6. Модель Линвилла.

Данную функцию y_{21} можно представить в форме уравнения (7-90), разделив числитель и знаменатель на одинаковую величину

$$y'_{21} = \frac{K}{\pi(s + \alpha_i)} : \frac{s^2 + 2s + 2}{\pi(s + \alpha_i)}; \quad (7-91)$$

$$y'_{21} = \left[\frac{K'}{\pi(s + \alpha'_i)} \right] \left[\frac{K''}{\pi(s + \alpha''_i)} \right] : \left[\sum \frac{k'_i s}{s + \alpha'_i} + k'_0 - \sum \frac{k''_i s}{s + \alpha''_i} - k''_0 \right], \quad (7-92)$$

где $k'_i > 0$, $k''_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$ вещественные. Ввиду тождественности уравнений (7-92) и (7-90), очевидно (при $k=1$), можно реализовать $y'_{21}(s)$ с точностью до постоянного усиления. Так, беря $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, имеем:

$$y'_{21} = \left[\frac{K}{(s+1)(s+2)} \right] : \left[\frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)} \right]; \quad (7-93)$$

$$y'_{21} = \left[\frac{K}{(s+1)(s+2)} \right] : \left[2 + \frac{s}{s+2} + \frac{-s}{s+1} - 1 \right], \quad (7-94)$$

где для обеспечения реализуемости подцепей было прибавлено и вычтено постоянное число. Тогда получаем:

$$y_{12a} = -\frac{K'}{s+2}; \quad y_{12b} = \frac{K''}{s+1}; \quad (7-95)$$

$$y_{22a} = \frac{3s+4}{s+2}; \quad y_{11b} = \frac{2s+1}{s+1}. \quad (7-96)$$

Реализация изображена на рис. 7-7. Мы замечаем, что описанная модель не может реализовать функцию

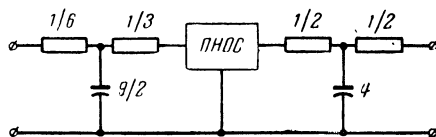


Рис. 7-7. Пример каскадной реализации.

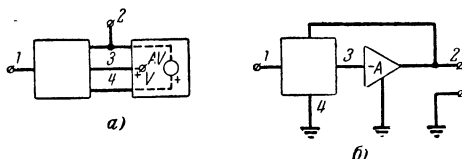


Рис. 7-8. Эквивалентные модели усилителя с регулируемым источником.

$y_{21}(s)$, имеющую нуль на положительной вещественной оси. Более общая модель приведена в задаче 7-10.

Реализация $t_{21}(s)$ моделью Линвилла указана в задаче 7-11.

Синтез цепи с регулируемыми источниками. Вводим в цепь регулируемый источник напряжения (или усилитель), как показано на рис. 7-8,а. В развернутом виде это сочетание подобно обычному усилителю с обратной связью. В активное устройство включаем паразитный элемент, как показано на рис. 7-9. Общая неопределенная матрица имеет вид:

$$[y]_i = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{12} & y_{22} + G & y_{23} + GA & y_{24} - G - GA \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} & y_{34} \\ y_{14} & y_{24} - G & y_{34} - GA & y_{44} + G + GA \end{bmatrix}. \quad (7-97)$$

Исключив зажим 3 и используя зажим 4 как землю, получаем:

$$[y]'_i = \frac{1}{y_{33}} \begin{bmatrix} y_{11}y_{33} - y_{13}^2 & y_{12}y_{33} - y_{13}y_{23} \\ y_{13}y_{33} - y_{13}y_{23} - GAy_{13} & y_{22}y_{33} + Gy_{33} - y_{23} - GAy_{23} \end{bmatrix}. \quad (7-98)$$

Передаточная функция напряжения при $G \rightarrow \infty$ равна:

$$t''_{21} = \frac{-y'_{21}}{y'_{22}} = \frac{Ay_{13}}{y_{33} - Ay_{23}}. \quad (7-99)$$

Ввиду того, что усилитель имеет нулевое выходное сопротивление, его можно использовать для возбуждения другого каскада. Следовательно, каскады, подобные

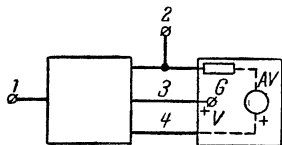


Рис. 7-9. Регулируемый источник с паразитным элементом.

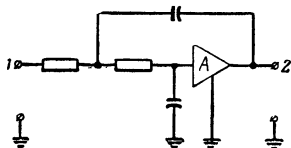


Рис. 7-10. Модель усилителя с обратной связью.

каскаду, изображенному на рис. 7-8,б, можно соединить последовательно. Таким образом, построив простые цепи, можно реализовать, например, пару комплексных полюсов на каскад. Так, можно показать, что цепь, изображенная на рис. 7-10, реализует [см. уравнение (7-99)] передаточную функцию [Л. 3.307]:

$$t''_{21} = \frac{a_0}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad (7-100)$$

где α и β — неотрицательные числа. Очевидно, посредством таких каскадных схем можно реализовать функции цепей неминимальной фазы. Подобно этому можно построить модели усилителей RC , реализующие передаточную функцию

$$t''_{21} = \frac{a_0 (s^2 + \alpha_1^2)}{(s + \alpha_2)^2 + \beta^2}. \quad (7-101)$$

Соединив их последовательно, можно получить эллиптическую амплитудную характеристику.

Активную цепь RC с усилителем, как было установлено, проще всего осуществить.

7-3. НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Вот некоторые существенные задачи в синтезе активных цепей:

1. Изучение влияния паразитных элементов, связанных с активными устройствами, когда последние вводятся в цепи RLC или вообще в пассивные цепи (см., например, [Л. 3.121, 3.127]).

2. Отыскание новых моделей активных элементов [Л. 3.122, 3.134].

3. Исследование методов синтеза активных элементов, свободных от трудностей, присущих методам, основанным на разбиении синтеза активных цепей на синтез отдельных чисто активных и чисто пассивных многополюсников.

Задачи

7-1. Покажите, что активные цепи, изображенные на рис. 7-11, являются вырожденными.

7-2. Четырехполюсник N имеет матрицу $[z]$ следующего вида:

$$[z(\sigma + j\omega)] = \operatorname{Re} [z(\sigma + j\omega)] + j \operatorname{Im} [z(\sigma + j\omega)], \quad \sigma \geq 0;$$

$$[z(\sigma + j\omega)] = [R] + j[X] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

Покажите, что требование реализуемости $[z(s)]$ пассивной цепью равносильно условиям [Л. 3.126, 3.131]:

$$R_{11} \geq 0;$$

$$4R_{11}R_{22} - [R_{12} + R_{21}]^2 - (X_{21} - X_{12})^2 \geq 0.$$

7-3. Доказано, что если четырехполюсник нагружен на обоих концах на произвольные положительные вещественные сопротивления, то необходимое и достаточное условие устойчивости цепи (выраженное в величинах, указанных в задаче 7-2) следующее [Л. 3.104]:

$$R_{11} \geq 0;$$

$$\begin{aligned} & [4R_{11}R_{22} - (R_{12} + R_{21})^2 - (X_{12} - X_{21})^2][4R_{11}R_{22} + \\ & + (X_{12} + X_{21})^2 + (X_{12} - X_{21})^2] + \\ & + [(R_{12}^2 - R_{21}^2) - (X_{12}^2 - X_{21}^2)]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

а) Покажите, что для необратимых четырехполюсников из условия пассивности вытекает условие устойчивости. Справедливо ли обратное утверждение [Л. 3.106, 3.110]?

б) Ответьте на те же вопросы для обратимых четырехполюсников.

7-4. Достаточное условие существования преобразования Фурье для функции $f(t)$ следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Покажите, что если подать одновременно на все входы многополюсника ступенчатые функции, не допускающие преобразование Фурье, и если энергия становится отрицательной при $t=t_1$, то цепь не является пассивной [указание: учтите соображения, высказанные по поводу уравнения (7-41)].

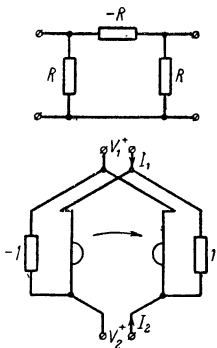


Рис. 7-11. Примеры вырожденности.

Рассмотрите возможность распространения этого подхода на другие функции времени, включая случайные сигналы.

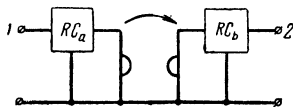


Рис. 7-12. Модель гириатора с RC.

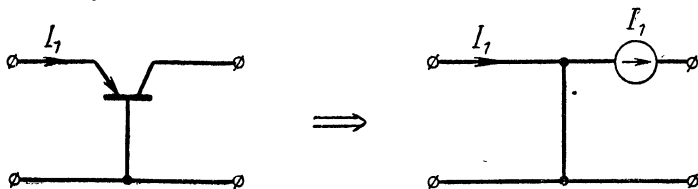


Рис. 7-13. Транзистор и упрощенная эквивалентная схема.

7-5. Выведите выражение для передаточной функции по напряжению цепи, изображенной на рис. 7-12 [Л. 3.329].

7-6. Используя упрощенную эквивалентную схему транзистора, изображенную на рис. 7-13, покажите, что приближенные практические схемы табл. 7-1 справедливы для [Л. 3.317]:

а) гириатора;

б) преобразователя положительного сопротивления в отрицательное с инверсией напряжения (ПНОС);

в) преобразователя положительного сопротивления в отрицательное с инверсией тока (ПТОС).

7-7. Покажите, что для реализации произвольной положительной рациональной матрицы $[y]$ необходимы n положительных сопротивлений.

7-8. Объясните, почему доказательство необходимости, приведенное в тексте, можно распространить также на регулируемые источники, представляющие известные функции от s . Решите задачу 7-7 с n емкостными и n индуктивными элементами.

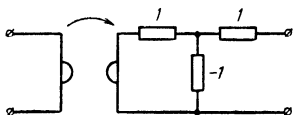


Рис. 7-14. Реализация ПОС посредством гиратора и отрицательного сопротивления.

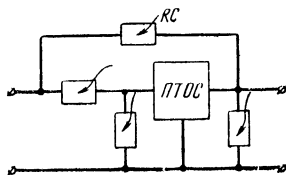


Рис. 7-15. Модель Янагисава с ПОС и RC .

7-9. Покажите, что цепь, изображенная на рис. 7-14, имеет такие же соотношения между величинами на зажимах, как ПОС. Какой элемент создает: 1) активность и 2) необратимость ПОС?

7-10. Найдите функцию t_{21} для модели активной цепи, изображенной на рис. 7-15 (Янагисава [Л. 3.311]), выразив ее через полные сопротивления RC , и синтезируйте передаточную функцию

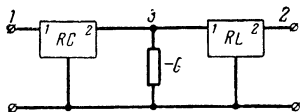


Рис. 7-16. Каскадная модель RC — отрицательное сопротивление RL .

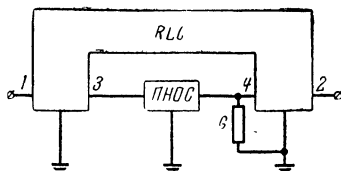


Рис. 7-17. Эквивалентная схема для рис. 7-16 с отрицательным сопротивлением и ПНОС.

$t_{21} = K/(s^2 + 2s + 2)$ в соответствии с моделью. Какое главное преимущество этой модели по сравнению с моделью Линвилла?

7-11. а) Покажите, что передаточная функция напряжения для модели, изображенной на рис. 7-6, равна:

$$t_{21}(s) = \frac{k - y_{21a} z_{12b}}{k - y_{22a} z_{11b}}.$$

б) Синтезируйте соответственно этому функцию $t_{21}(s)$, указанную в задаче 7-10.

7-12. а) Покажите, что модель, изображенная на рис. 7-16, имеет передаточную проводимость

$$y_{21} = \frac{-y_{12RC} y_{12RL}}{y_{22RC} + y_{11RL} - G}.$$

Рассматривайте эту схему как частный случай модели, изображенной на рис. 7-17.

б) Покажите, что этой моделью можно реализовать $y_{21}(s)$ с произвольным набором полюсов (указание: сравнить с моделью Линвилла).

в) Реализуйте этой моделью передаточную проводимость (7-88) (рис. 7-17).

7-13. а) Подключите к одной стороне ПОС полное сопротивление Z . Чему равно полное сопротивление на других зажимах?

б) Сделайте то же для гиратора.

Глава восьмая

ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ

Понятие волновой матрицы было порождено стремлением описать процессы в стыках передающих линий при помощи прямых и отраженных волн. Однако для наших целей достаточно упомянуть, что подобно тому, как матрицы $[z]$ и $[y]$ описывают поведение цепей при разомкнутых и замкнутых входах, волновая матрица $[S]$ описывает нагруженную цепь.

8-1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОЙ МАТРИЦЫ

Определим в соответствии с рис. 8-1:

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}. \quad (8-1)$$

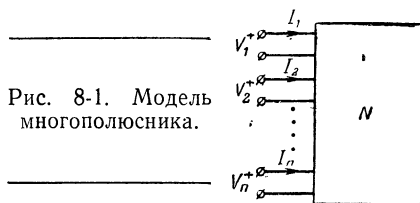


Рис. 8-1. Модель многополюсника.

С каждым входом мы связываем произвольное вещественное число r_i . Далее определим диагональную матрицу

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & r_2 & \\ 0 & & r_n \end{bmatrix}. \quad (8-2)$$

коэффициенты. Волновая матрица выражает таким образом связь между прямыми и отраженными напряжениями.

8-2. ВОЛНОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Свойства. Рассмотрим теперь элементы матрицы $[S]$. Сперва образуем из нормированной цепи N^n , изображенной на рис. 8-2, дополненную цепь N^a , изображенную

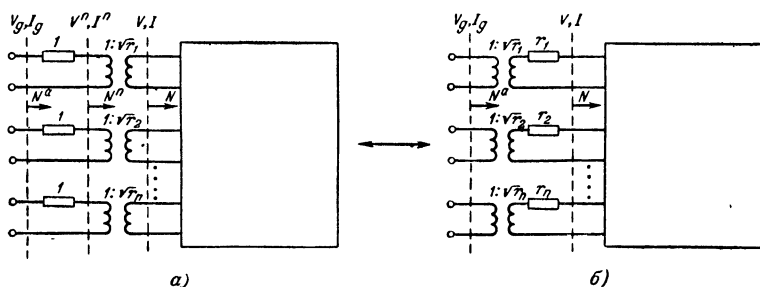


Рис. 8-3. Дополненная цепь N^a .

на рис. 8-3, а и б, включив последовательно со всеми входами сопротивления 1 ом.

Чтобы исследовать свойства диагональных членов s_{ii} матрицы $[S]$, положим:

$$[V_g] = \begin{bmatrix} V_{g1} \\ \vdots \\ V_{gn} \end{bmatrix}. \quad (8-10)$$

Следовательно, на основании уравнения (8-5):

$$[V_i]^n = \frac{1}{2} \{ [V]^n + [I]^n \}; \quad (8-11)$$

$$= \frac{1}{2} [V_g], \quad (8-12)$$

так как V_{gi} равно сумме напряжения V_i^n и напряжения на дополнительном сопротивлении 1 ом. Если положить, что все источники $V_{gi} = 0$, за исключением V_{g1} , то все $V_i^n = 0$, за исключением V_1^n . Из уравнения (8-9) следует, что

$$V_{r1}^n = s_{11} V_{11}^n, \quad (8-13)$$

или

$$s_{11} = \frac{V_{r1}^n}{V_{i1}^n}; \quad (8-14)$$

$$s_{11} = \frac{V_1^n - I_1^n}{V_1^n + I_1^n}; \quad (8-15)$$

$$s_{11} = \frac{\frac{V_1}{\sqrt{r_1}} - \sqrt{r_1} I_1}{\frac{V_1}{\sqrt{r_1}} + \sqrt{r_1} I_1}; \quad (8-16)$$

$$s_{11} = \frac{\frac{z_1}{\sqrt{r_1}} - 1}{\frac{z_1}{\sqrt{r_1}} + 1}, \quad (8-17)$$

где z_1 — входное сопротивление на входе 1 цепи N , когда все входы нагружены сопротивлениями $[R]^*$. Если $z_1 = r_1$ (т. е. цепь согласована на входе 1 для данного $[R]$), то $s_{11} = 0$ при этом наборе r_i . Следовательно, мы можем записать все диагональные члены волновой матрицы в виде нулей, как только мы установили, что N можно нагрузить согласованно на всех входах набором конечных сопротивлений. Последнее возможно, так как можно просто выбрать $[R]$ так, чтобы оно включало этот набор.

Теперь рассмотрим внедиагональные члены s_{ij} . Максимальная мощность, поступающая к N^n от V_{g1} (при $s = j\omega$), когда все другие $V_{gi} = 0$, равна:

$$P_A = \frac{|V_{gi}|^2}{4} = |V_{i1}^n|^2. \quad (8-18)$$

Мощность, отдаваемая нагрузочному сопротивлению 1 ом на j -м входе, на основании уравнения (8-12) равна:

$$P_j = |I_j^n|^2 = |V_{ij}^n|^2, \quad (8-19)$$

* В s_{11} читатель узнает «коэффициент отражения», как он обычно определяется в теории передающих линий.

так как $V_{ij}^n = V_{gi}$. Следовательно, вносимое затухание равно:

$$\frac{P_j}{P_A} = \frac{|V_{rj}^n|^2}{|V_{i1}^n|^2} = |s_{j1}|^2. \quad (8-20)$$

Мы замечаем, что вносимое затухание (потери) между входами i и j для M и N^n одно и то же (рис. 8-3,б). Следовательно, внедиагональные члены волновой матрицы представляют вносимые потери между входами цепи N , когда все входы нагружены на r_i .

Определение волновых коэффициентов. Существуют четыре основных способа определения нормированных волновых коэффициентов $[s_{ij}]$ данной цепи N , причем во всех случаях $[S]$ есть функция выбранного $[R]$:

1. Путем вычисления или физического измерения входных сопротивлений и вносимых затуханий, когда входы цепи нагружены сопротивлениями r_i .

2. По матрице $[z]$ или $[y]$ цепи N . Имеем:

$$[V] = [z][I]; \quad (8-21)$$

$$[V]^{1/2} [V]^n = [z] [R]^{1/2} [I]^n \quad (8-22)$$

или

$$[V]^n = [R]^{-1/2} [z] [R]^{1/2} [I]^n; \quad (8-23)$$

$$[V]^n = [z]^n [I]^n, \quad (8-24)$$

где $[z]^n$ — матрица $[z]$ нормализованной цепи N^n . Из уравнения (8-7) находим:

$$\{[V_r]^n + [V_i]^n\} = [z]^n \{[V_i]^n - [V_r]^n\}; \quad (8-25)$$

$$[V_r]^n = \{[U] + [z]^n\}^{-1} \{[z]^n - [U]\} [V_i]^n, \quad (8-26)$$

следовательно,

$$[S] = \{[U] + [z]^n\}^{-1} \{[z]^n - [U]\}. \quad (8-27)$$

Можно вывести подобную же формулу для $[S]$, выразив ее через $[y]$.

3. По матрице $[y]^a$ (матрице проводимостей короткого замыкания цепи N^a). Из рис. 8-3 имеем:

$$[I]^n = [y]^a [V_g]; \quad (8-28)$$

$$[I]^n = 2 [y]^a [V_i]^n; \quad (8-29)$$

$$[I]^n = [V_i]^n - [V_r]^n \text{ [из уравнения (8-7)]}, \quad (8-30)$$

следовательно,

$$[V_r]^n = \{[U] - 2 [y]^a\} [V_i]^n \quad (8-31)$$

или

$$[S] = [U] - 2 [y]^a. \quad (8-32)$$

4. Если цепь N^n можно описать соотношениями вида

$$[A] [V]^n = [B] [I]^n. \quad (8-33)$$

В этом случае имеем:

$$[A] \{[V_i]^n + [V_r]^n\} = [B] \{[V_i]^n - [V_r]^n\}; \quad (8-34)$$

$$\{[A] + [B]\} [V_r]^n = \{[B] - [A]\} [V_i]^n, \quad (8-35)$$

следовательно,

$$[S] = \{[A] + [B]\}^{-1} \{[B] - [A]\}. \quad (8-36)$$

Из этих четырех способов третий и четвертый самые простые. Второй способ часто оказывается неприменимым, так как цепи, которые обычно анализируют при

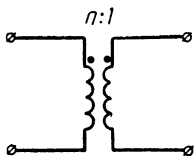


Рис. 8-4. Идеальный трансформатор.

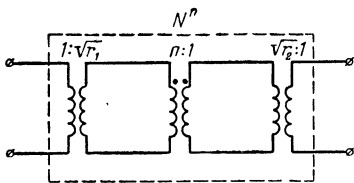


Рис. 8-5. Нормализованный идеальный трансформатор.

помощи волновых матриц, не имеют матриц $[y]$ или $[z]$ (например, цепи с трансформаторами). Заметим, однако, что всякая пассивная цепь должна иметь матрицу $[y]^a$, как описано в третьем способе, и, следовательно, способы первый, третий и четвертый являются наиболее общими.

Пример 8-1. Найти $[S]$ для идеального трансформатора, изображенного на рис. 8-4, при произвольных r_1 и r_2 .

Во-первых, составим цепь N^n (рис. 8-5), для которой можно записать:

$$\left(\frac{I_1^n}{\sqrt{r_1}} \right) n = - \frac{I_2^n}{\sqrt{r_2}}; \quad (8-37)$$

$$\left(\frac{V_1^n}{n} \right) \sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} V_2^n. \quad (8-38)$$

Очевидно, можно применить четвертый способ, составив матрицы:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{r_1}/n & -\sqrt{r_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^n \\ V_2^n \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n/\sqrt{r_1} & 1/\sqrt{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^n \\ I_2^n \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (8-39)$$

$$[B - A] = \begin{bmatrix} -\sqrt{r_1}/n & \sqrt{r_2} \\ n/\sqrt{r_1} & 1/\sqrt{r_2} \end{bmatrix}; \quad (8-40)$$

$$[B + A]^{-1} = \frac{n\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{r_1 + n^2 r_2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{r_2} & \sqrt{r_2} \\ -n/\sqrt{r_1} & \sqrt{r_1}/n \end{bmatrix}. \quad (8-41)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [S] &= [B + A]^{-1} [B - A] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{n^2 r_2 - r_1}{n^2 r_2 + r_1} & \frac{2n\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{n^2 r_2 + r_1} \\ \frac{2n\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{n^2 r_2 + r_1} & \frac{-n^2 r_2 + r_1}{n^2 r_2 + r_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8-42)$$

Заметим, что при $n^2 = r_1/r_2$ (т. е. когда входы трансформатора одновременно согласованно нагружены сопротивлениями r_1) $s_{11} = s_{22} = 0$.

8-3. ВОЛНОВАЯ МАТРИЦА

Свойства матрицы [S]. Средняя мощность, поглощаемая любым многополюсником, если к нему подведены синусоидальные возбуждения, равна:

$$P = \operatorname{Re} \{ I_1^* V_1 + I_2^* V_2 + \dots + I_n^* V_n \}, \quad (8-43)$$

где $I_1 = I_1(j\omega)$ и т. д. В матричных обозначениях:

$$P = \operatorname{Re} \{ [I]^{*T} [V] \}; \quad (8-44)$$

$$P = \operatorname{Re} \{ ([R]^{-1/2} [I]^n)^{*T} [R]^{1/2} [V]^n \}; \quad (8-45)$$

$$P = \operatorname{Re} \{ [I]^{n*T} [R]^{-1/2} [R]^{1/2} [V]^n \}; \quad (8-46)$$

$$P = \operatorname{Re} \{ [I]^{n*T} [V]^n \}. \quad (8-47)$$

Разлагая $[I]^n$ и $[V]^n$ на прямые и отраженные компоненты, получаем:

$$P = \operatorname{Re} \{ [V_i]^n - [V_r]^n \}^{*T} \{ [V_i]^n + [V_r]^n \}; \quad (8-48)$$

$$P = \operatorname{Re} \{ [V_i]^{n*T} [V_i]^n + [V_i]^{n*T} [V_r]^n - \\ - [V_r]^{n*T} [V_i]^n - [V_r]^{n*T} [V_r]^n \}, \quad (8-49)$$

но первый и последний члены представляют просто вещественные положительные матрицы первого порядка, а вещественные части второго и третьего члена одинаковы. Следовательно,

$$P = [V_i]^{n*T} [V_i]^n - [V_r]^{n*T} [V_r]^n \quad (8-50)$$

или

$$P = [V_i]^{n*T} [V_i]^n - \{ [S] [V_i]^n \}^{*T} \{ [S] [V_i]^n \}; \quad (8-51)$$

$$P = [V_i]^{n*T} \{ [U] - [S]^{*T} [S] \} [V_i]^n; \quad (8-52)$$

$$P = [V_i]^{n*T} [Q] [V_i]^n. \quad (8-53)$$

Поскольку величина P вещественна для всех $[V_i]^n$, выражение (8-53) — эрмитовская форма, а $[Q(j\omega)]$ — эрмитовская матрица.

Применение к пассивным многополюсникам. В пассивном многополюснике N , возбуждаемом, как описано

выше, средняя поглощаемая мощность должна быть положительна, в противном случае энергия будет отрицательна. Поэтому выражение (8-53) должно быть положительной полуопределенной эрмитовской формой, а $[Q]$ — положительной полуопределенной эрмитовской матрицей. Это есть необходимое условие. В приложении указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица была реализуема как волновая матрица пассивного многополюсника с сосредоточенными параметрами. Мы замечаем, что условия пассивности, выраженные через волновую матрицу, являются более простыми, чем в том случае, когда они выражены через матрицы $[z]$ или $[y]$. Почему это так?

Перечислим другие важные свойства матрицы $[S]$ для пассивных многополюсников, вытекающие из свойств матрицы $[Q]$:

1. Обратимый и необратимый многополюсник с потерями или без потерь

$$|S_{ii}(j\omega)| \leq 1. \quad (8-54)$$

2. Обратимый или необратимый многополюсник без потерь

$$[S]^{*T} [S] = [U]. \quad (8-55)$$

3. Обратимый или необратимый четырехполюсник без потерь

$$|s_{11}(j\omega)|^2 + |s_{21}(j\omega)|^2 = 1; \quad |s_{22}(j\omega)|^2 + |s_{12}(j\omega)|^2 = 1. \quad (8-56)$$

4. Обратимый четырехполюсник без потерь

$$|s_{11}(j\omega)| = |s_{22}(j\omega)|, \quad |s_{21}(j\omega)| = |s_{12}(j\omega)| \leq 1. \quad (8-57)$$

Мы замечаем, что матрица $[S]$, приведенная в примере 8-1, удовлетворяет всем четырем условиям.

Пример 8-2. Покажите, что к обратимому многополюснику без потерь нельзя подключить согласованные нагрузки на всех трех входах.

Поскольку цепь обратима и нагружена согласованными сопротивлениями r_i , $s_{ij} = s_{ji}$ и $s_{ii} = 0$.

Следовательно, при $s = j\omega$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [S]^{*T} [S] &= \begin{bmatrix} 0 & s_{12}^* & s_{13}^* \\ s_{12}^* & 0 & s_{23}^* \\ s_{13}^* & s_{23}^* & 0 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} s_{12}^2 + s_{13}^2 & s_{13}^* s_{23} & s_{13}^* s_{12} \\ s_{23}^* s_{13} & s_{12}^2 + s_{23}^2 & s_{12}^* s_{13} \\ s_{23}^* s_{12} & s_{12}^* s_{23} & s_{13}^2 + s_{23}^2 \end{bmatrix}. \quad (8-58)
 \end{aligned}$$

Поскольку N — цепь без потерь, имеем также

$$[S]^{*T} [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-59)$$

Чтобы получить такие внедиагональные элементы, по крайней мере два s_{ij} должны быть равны нулю, но тогда один диагональный элемент должен быть равен нулю, что нарушает уравнение (8-59). Следовательно, одновременное согласование невозможно (при любом значении ω). Более того, при нечетном n никакой обратимый многополюсник без потерь нельзя согласовать.

ПРИМЕНЕНИЕ К АКТИВНЫМ МНОГОПОЛЮСНИКАМ

Анализ. Волновые параметры полезны для описания цепей, не имеющих матрицы $[z]$ или $[y]$. Можно вывести соотношение между $[z]$, $[y]$ и $[S]$, если принять, что цепь можно описать при данной матрице $[R]$ уравнением [в нормализованных величинах, как в уравнении (8-36)]:

$$[A] [V]^n = [B] [I]^n, \quad (8-60)$$

тогда

$$[z]^n = [A]^{-1} [B]; \quad (8-61)$$

$$[y]^n = [B]^{-1} [A]; \quad (8-62)$$

$$[S] = \{[B] + [A]\}^{-1} \{[B] - [A]\}. \quad (8-63)$$

Следовательно, если даже $[A]$ и $[B]$ не имеют обратных матриц, их сумма может быть неособенной матрицей.

Кроме того, $[B]$ и $[A]$ сами являются функциями выбранной матрицы $[R]$, поэтому можно выбрать $[R]$, для которой $[S]$ существует (за исключением некоторых случаев весьма сильного вырождения, как в задаче 8-5).

Пример 8-3. Пусть

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [R]_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8-64)$$

Для цепи, указанной на рис. 8-6, $[S]$ не существует при $[R]=[R]_1$, но существует при $[R]=[R]_2$. Это положение легко проверить, вычислив $[S]$ третьим способом и затем исследовав существование $[y]^a$.

Синтез. Установлено (см. приложение), что любую матрицу $[S]$ с вещественными рациональными элементами можно реализовать элементами *LCM* в сочетании с основным набором, состоящим из гираторов и отрицательных сопротивлений.

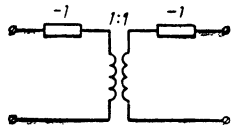


Рис. 8-6. Пример активной цепи.

Задачи

8-1. Выразить:

- $[S]$ через $[y]^n$;
- $[z]^n$ через $[S]$;
- $[y]^n$ через $[S]$.

8-2. Составить цепь, согласованную на всех входах с сопротивлениями 1 ом (рис. 8-7), так что:

а) абонент *A* может разговаривать с *B*, *C* или *D*, а они в свою очередь могут разговаривать с *A*;

б) абоненты *B*, *C* и *D* не могут разговаривать между собой.

1. Напишите волновую матрицу, описывающую *N*.

2. Можно ли ее реализовать пассивной цепью. Почему?

3. Реализуйте *N* одними безреактивными сопротивлениями.

8-3. Покажите, что на входе *r*

$$\frac{P_r}{P_A} = 1 - |s_{rr}(j\omega)|^2,$$

если все $V_{gi} (i \neq 2)$ равны нулю, где P_r — мощность, поступающая в цепь на *r*-м входе, когда все другие входы нагружены на r_i .

8-4. Рассмотрите матрицу $[S]$ четырехполюсника. Для данной $[R]$ найдите $[s]_{11}$ двухполюсника, образующегося, если на второй вход подключена произвольная нагрузка.

(указание: $V_{r_2}^n = V_{\text{нагрузки}}^n$; $V_{i_2}^n = V_{r_2}^n$).

8-5. Было показано [Л. 3.124], что если соотношения между токами и напряжениями на входах выражаются в виде

$$[A][V]=[B][I]$$

(матрицы $[A]$ и $[B]$ не обязательно квадратные), то цепь можно реализовать.

а) Постройте матрицу $[A]$ или $[B]$ двухполюсника такую, что:

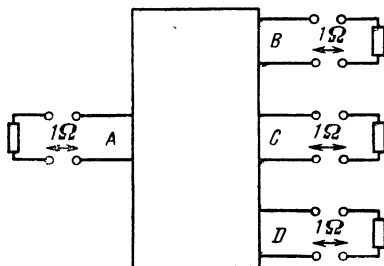


Рис. 8-7. Схема групповой связи.

1) $V_1=I_1=0$; 2) V_1 и I_1 произвольны. Покажите, что ни при каких нормализованных величинах r_i матрица $[S]$ не существует.

б) Прodelайте изложенное в п. «а» для четырехполюсника, имеющего какой-либо тип вырожденности по вашему выбору.

8-6. Покажите, что ПНОС, не имеющий матрицы $[z]$ или $[y]$, является активным элементом.

8-7. Покажите, что гиратор представляет необратимый элемент без потерь при любой матрице $[R]$.

Глава девятая

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Исследование чувствительности цепи к изменениям элементов вызывается практическими задачами двух основных видов:

1. Задача для «наихудшего случая» или детерминированная задача, когда можно предсказать изменение

элементов цепи в границах допусков с течением времени или в зависимости от внешних условий. Так, емкость конденсатора может меняться, как показано на рис. 9-1,а. В этом случае может потребоваться вычислить

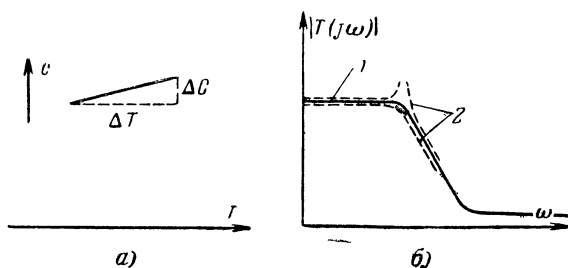


Рис. 9-1. Изменение величины элемента и границы амплитудной характеристики для «наихудшего случая».

1 — номинальная характеристика; 2 — пределы.

границы, в которых может меняться функция цепи (рис. 9-1,б) при изменении элемента.

2. Статистическая или недетерминированная задача, когда можно положить, что величины элементов близки к номинальной величине, причем отклонение описывается известными распределениями вероятностей (обычно принимают нормальное распределение¹, как показано на рис. 9-2); тогда может потребоваться определить распределение вероятностей для какой-либо функции цепи, чтобы: 1) либо получить представление об ожидаемом порядке величины дисперсии функции; 2) либо вычислить уровень достоверности того, что цепь будет выполнять свое назначение, например переключение в цифровой схеме (эта задача связана с задачей «надежности» [Л. 4.204]).

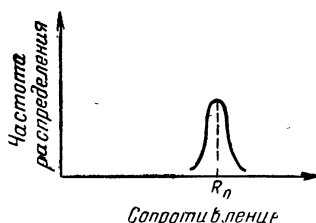


Рис. 9-2. Статистическое распределение величин элементов.

¹ См. другое распределение в задаче 9-13.

9-1. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ИЗМЕНЕНИЯМ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определения. Допустим, что требуется вычислить влияние одного элемента на функцию цепи. Мы определим несколько критериев чувствительности.

1. Классическая чувствительность (или чувствительность по Боде):

$$S_{e_i}^T(j\omega) = \frac{d \ln T(j\omega)}{d \ln e_i}; \quad (9-1)$$

$$S_{e_i}^T(j\omega) = \frac{dT(j\omega)}{de_i} \frac{e_i}{T(j\omega)}; \quad (9-2)$$

$$S_{e_i}^T(j\omega) = e_i \frac{d\alpha(\omega)}{de_i} + j e_i \frac{d\beta(\omega)}{de_i}, \quad (9-3)$$

где $T(s)$ — функция цепи;
 e_i — изменяющийся элемент;
 $\alpha(\omega) = \ln T(j\omega)$ — логарифмическое усиление;
 $\beta(\omega) = \arg T(j\omega)$ — фаза.

При малых изменениях e_i можно заменить дифференциалы разностями

$$S_{e_i}^T(j\omega) \approx \frac{\Delta T(j\omega)/T(j\omega)}{\Delta e_i/e_i}, \quad (9-4)$$

$$\text{т. е. } S_{e_i}^T(j\omega) = \frac{\text{относительное изменение } T(j\omega)}{\text{относительное изменение } e_i}. \quad (9-5)$$

2. Чувствительность в нуле [Л. 4. 102]:

$$S_{e_j}^{s_j} = \frac{ds_j}{de_j} e_j; \quad (9-6)$$

$$S_{e_i}^{s_j} \approx \frac{\Delta s_j}{\Delta e_i/e_i}, \quad (9-7)$$

$$\text{т. е. } S_{e_i}^{s_j} \approx \frac{\text{изменение в нуле}}{\text{относительное изменение элемента}}, \quad (9-8)$$

где s_j — нуль или полюс функции $T(s)$.

Классическую чувствительность следует применять:

а) при вычислении влияния изменения элементов на частотную характеристику [уравнение (9-3)];

б) при исследовании чисто безреактивных цепей.

Чувствительность в нуле следует применять:

а) когда нужна лишь качественная оценка чувстви-

тельности цепи, поскольку $S_{e_i}^{s_j}$ — число, а $S_{e_i}^T$ — функция от ω ;

б) когда рассматривают функции цепей, имеющие полюсы или нули вблизи оси $j\omega$; так, можно исследовать устойчивость и настройку активных полосовых фильтров (задача 9-10), глубину минимума нулевых схем RC (задача 9-1) и т. д.

Нужно отметить, что связь между этими величинами чувствительности выражается формулой [Л. 4.109] (задача 9-2):

$$S_{e_i}^T = \sum_j^n \frac{S_{e_i}^{p_j}}{j\omega - p_j} - \sum_m^i \frac{S_{e_i}^{z_j}}{j\omega - z_j} \frac{1}{K_0} S_{e_i} K_0, \quad (9-9)$$

где K_0 — постоянный множитель при $T(s)$.

Мы замечаем, что полюсы функции чувствительности состоят из нулей и полюсов функции $T(s)$.

ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Билинейная форма функции цепей. Допустим, что N — цепь RLC , содержащая переменную проводимость Y_i . Выберем один из узлов, соединенных с Y_i , в качестве земли и напомним узловую матрицу проводимостей.

Имеем:

$$[Y] = \begin{bmatrix} C_{11}s + \frac{\Gamma_{11}}{s} + G_{11} & \dots & \\ C_{21}s + \frac{\Gamma_{21}}{s} + G_{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & & C_{rr}s + \frac{\Gamma_{rr}}{s} + G_{rr} \dots \\ \vdots & & & \\ C_{n1}s + \frac{\Gamma_{n1}}{s} + G_{n1} & \dots & \\ C_{12}s + \frac{\Gamma_{12}}{s} + G_{12} & \dots & C_{1n}s + \frac{\Gamma_{1n}}{s} + G_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & C_{nn}s + \frac{\Gamma_{nn}}{s} + G_{nn} \end{bmatrix} \quad (9-10)$$

Передаточное сопротивление между входами 1 и 2 равно:

$$z_{21} = \frac{(\Delta_{ip} - \Delta_{kp}) - (\Delta_{iq} - \Delta_{kq})}{\Delta}. \quad (9-11)$$

Разлагая все определители и алгебраические дополнения по r -й строке, получаем:

$$z_{21} = [(\Delta_{ip} - \Delta_{kp} - \Delta_{iq} + \Delta_{kq})|_{Y_i=0} + \\ + Y_i(\Delta_{iprr} - \Delta_{kprr} - \Delta_{iqrr} + \Delta_{kqrr})] : \Delta|_{Y_i=0} + Y_i \Delta_{rr}. \quad (9-12)$$

Таким образом, z_{21} есть билинейная функция от Y_i (т. е. отношение линейных функций от Y_i):

$$z_{21} = \frac{N(s)}{D(s)}; \quad (9-13)$$

$$z_{21} = \frac{N_1(s) + Y_i N_2(s)}{D_1(s) + Y_i D_2(s)}. \quad (9-14)$$

Вообще функции цепей являются билинейными по отношению ко всякому двухполюсному элементу.

Если в цепи имеется переменный активный элемент, допустим, что изменение

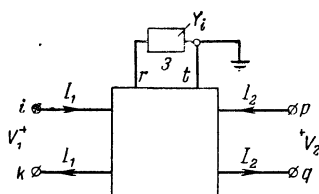


Рис. 9-3. Трехполюсная модель цепи с переменным элементом RLC.

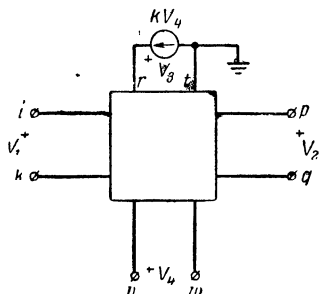


Рис. 9-4. Трехполюсная модель цепи с переменным активным элементом.

можно представить изменениями «усиления» регулируемого источника (например, величины k в ПОС). Тогда вся цепь изображается схемой, представленной на рис. 9-4 (для источника тока, регулируемого напряжением).

ем). Активный элемент входит в узловую матрицу проводимостей:

$$[Y] = \left[\dots C_{rr} s + \frac{\Gamma_{rr}}{s} + G_{rr} \dots C_{ro}^s c + \frac{\Gamma_{rv}}{s} + G_{rv} - k \dots \right. \\ \left. \dots C_{rw} s + \frac{\Gamma_{rw}}{s} + G_{rw} + k \dots \right]. \quad (9-15)$$

Следовательно,

$$z_{21} = \frac{(\Delta_{ip} - \Delta_{kp}) - (\Delta_{iq} - \Delta_{kq})}{\Delta}. \quad (9-16)$$

Разлагая все определители и алгебраические дополнения по r -й строке, получаем:

$$z_{21} = [(\Delta_{ip} - \Delta_{kp} - \Delta_{iq} + \Delta_{kq})|_{k=0} + \\ + k[(-\Delta_{iprv} + \Delta_{iprw}) - (-\Delta_{kprv} + \Delta_{kprw}) - \text{и т. д.}] : [\Delta|_{k=0} + \\ + k(-\Delta_{rv} + \Delta_{rw})], \quad (9-17)$$

т. е. z_{21} есть билинейная функция от k .

Ввиду того, что в активных цепях возможны вырожденности, нельзя сказать, какие виды функций цепей являются билинейными по отношению ко всем активным элементам.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Выведем теперь простые формулы для вычисления функций чувствительности.

Классическая чувствительность. Так как z_{k1} есть билинейная функция каждого элемента e_i^* , то

$$z_{k1} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s) + e_i N_2(s)}{D_1(s) + e_i D_2(s)} \quad (9-18)$$

и

$$S_{e_i}^{z_{k1}}(j\omega) = \frac{dz_{k1}(j\omega)}{de_i} \frac{e_i}{z_{k1}(j\omega)}; \quad (9-19)$$

$$S_{e_i}^{z_{k1}}(j\omega) = e_i \left[\frac{N_2(j\omega)}{N(j\omega)} - \frac{D_2(j\omega)}{D(j\omega)} \right]; \quad (9-20)$$

$$S_{e_i}^{z_{k1}}(j\omega) = \frac{D_1(j\omega)}{D(j\omega)} - \frac{N_1(j\omega)}{N(j\omega)}. \quad (9-21)$$

* Обратите внимание на разницу между e_i и V_i .

Последнее равенство следует из того что $e_i N_2(j\omega) = N(j\omega) - N_1(j\omega)$ и т. д. Из уравнения (9-3) следует что

$$\frac{d\alpha(\omega)}{de_i} = \operatorname{Re} \left(\frac{N_2}{N} - \frac{D_2}{D} \right); \quad \frac{d\beta(\omega)}{de_i} = \operatorname{Im} \left(\frac{N_2}{N} - \frac{D_2}{D} \right). \quad (9-22)$$

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ В НУЛЕ

$$z_{k1} = \frac{\prod_n (s - r_i)}{\prod_m (r - p_i)}. \quad (9-23)$$

Числитель можно записать в виде

$$\prod_n (s - z_i) = N_i(s) + e_i N_1(s). \quad (9-24)$$

Беря полную производную от обеих частей и рассматривая z_i как неявные функции e_i , получаем:

$$-\sum_i^n \left[\prod_n (s - z_i) dz_i \right] = (de_i) N_2(s). \quad (9-25)$$

Если положить $s \rightarrow z_r$, то левая часть (при условии, что $N(s)$ имеет простые нули)¹ будет равна:

$$\prod_{i \neq r}^n (z_r - z_i) dz_r = de_i N_2(z_r) \quad (9-26)$$

или

$$\frac{dz_r}{de_i} = \frac{-N_2(s)}{N(s)/(s - z_r)} \Big|_{s=z_r}. \quad (9-27)$$

Таким образом,

$$S_{e_i}^{z_j} = \frac{-e_i N_2(s)}{N(s)/(s - z_r)} \Big|_{s=z_r}. \quad (9-28)$$

Пример 9-1. Рассмотрим реализацию функцию y_{21} моделью Линвилла с RC и ПОС, описанной в примере 7-3:

$$y_{21} = \frac{k[-K'/(s+2)][-K''/(s+1)]}{[(3s+4)/(s+2)] - k[(2s+1)/(s+1)]}; \quad (9-29)$$

$$y_{21} = \frac{kK'K''}{(3s+4)(s+1) - k(2s+1)(s+2)}. \quad (9-30)$$

¹ Величина $S_{e_i}^{z_j}$ в кратных нулях бесконечна.

При $k=1$

$$y_{21} = \frac{K'K''}{s^2 + 2s + 2}. \quad (9-31)$$

Чувствительность в полюсе по отношению к k равна:

$$S_k^{-1-j1} = \left. \frac{+k(2s+1)(s+2)}{s+1-j1} \right|_{-1-j1}; \quad (9-32)$$

$$S_k^{-1-j1} = 1,585 | -71,50; \quad (9-33)$$

$$S_k^{-1-j1} = (S_k^{*1+j1})^*. \quad (9-34)$$

Измерение чувствительности. Хотя после того как величины N_1 , N_2 , D_1 и D_2 в уравнениях (9-20), (9-21) определены, чувствительность вычисляется непосредственно, на практике может быть более желательным найти $S_{ei}^T(j\omega)$ путем физического измерения функций цепей на доступных зажимах. Полагаем, что доступными для измерения зажимами являются лишь зажимы входов и зажимы переменного элемента. Если переменный элемент имеет два зажима, так что z_{21} выражается уравнением (9-12), можно найти производную от z_{21} :

$$\begin{aligned} \frac{dz_{21}}{dY_i} = & -\frac{1}{\Delta^2} \{ (\Delta) (\Delta_{iprr} - \Delta_{kpr} - \Delta_{iqrr} - \Delta_{kqrr}) - \\ & - (\Delta_{rr}) (\Delta_{ip} - \Delta_{kp} - \Delta_{iq} + \Delta_{kq}) \}; \end{aligned} \quad (9-35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_{21}}{dY_i} = & -\frac{1}{\Delta^2} \{ (\Delta_{ip} \Delta_{rr} - \Delta \Delta_{iprr}) + (\Delta_{kq} \Delta_{rr} - \Delta \Delta_{kqrr}) - \\ & - (\Delta_{kp} \Delta_{rr} - \Delta \Delta_{kpr}) - (\Delta_{iq} \Delta_{rr} - \Delta \Delta_{iqrr}) \}; \end{aligned} \quad (9-36)$$

$$\frac{dz_{21}}{dY_i} = -\frac{1}{\Delta^2} \{ (\Delta_{ir} \Delta_{rp} + \Delta_{kr} \Delta_{pq} - \Delta_{kr} \Delta_{rp} - \Delta_{ir} \Delta_{rq}) \}, \quad (9-37)$$

так как

$$\Delta_{ab} \Delta_{cd} - \Delta \Delta_{abcd} = \Delta_{ad} \Delta_{cb}. \quad (9-38)$$

Разлагая (9-37) на множители, получаем:

$$\frac{dz_{21}}{dY_i} = \frac{-(\Delta_{ir} - \Delta_{kr})(\Delta_{rp} - \Delta_{rq})}{\Delta^2}; \quad (9-39)$$

$$\frac{dz_{21}}{dY_i} = -Z_{31} Z_{23}, \quad (9-40)$$

где Z_{31} , Z_{23} включают Y_i . Тогда чувствительность равна:

$$S_{Y_i}^{z_{21}}(j\omega) = \frac{-Y_i(j\omega)Z_{31}(j\omega)Z_{23}(j\omega)}{z_{21}(j\omega)}. \quad (9-41)$$

Заметим, что, как видно из этой формулы, нулями функции чувствительности являются нули некоторых передаточных функций. Из уравнений (9-12) и (9-19) можно легко вывести другие выражения для $S_{Y_i}^{z_{21}}$:

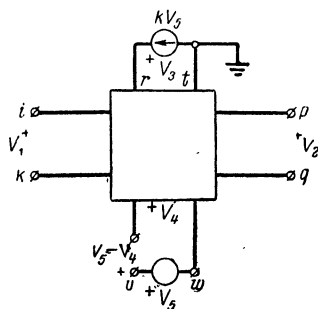


Рис. 9-5. Измерение обратной разности (общее).

$$1. Y_i Z_{rr} \left(\frac{z_{21}^{\infty}}{z_{21}} - 1 \right). \quad (9-42)$$

$$2. \frac{Z_{rr}}{Z_{rr}^0} \left(1 - \frac{z_{21}^0}{z_{21}} \right), \quad (9-43)$$

Z_{rr} — входное сопротивление на зажимах $r-t$ (рис. 9-3);
 Z_{rr}^0 — то же сопротивление $Y_i = 0$;

$$z_{21}^0 = z_{21}|_{Y_i=0};$$

$$z_{21}^{\infty} = z_{21}|_{Y_i=\infty}.$$

Для чувствительности по отношению к активному элементу (рис. 9-4) из уравнения (9-43) получаем:

$$S_k^{z_{21}} = \frac{1}{1 + k z_{43}^0} \left(1 - \frac{z_{21}^0}{z_{21}} \right), \quad (9-44)$$

где z_{43}^0 — передаточное сопротивление между входами 3 и 4, когда регулируемый источник выключен. Заметим, что $k z_{43}^0$ можно измерить, не удаляя в действительности регулируемый источник, но просто отключив зажим v (рис. 9-5) и подключив источник напряжения на зажимы $v-w$

вместо источника тока на зажимах $r-t$. Тогда, поскольку $I_3 = kV_5$, получаем:

$$-\frac{V_4}{V_5} = \frac{kV_4}{I_3} = kz_{43}^0 \quad (9-45)$$

и

$$\frac{1}{1 + kz_{43}^0} = \frac{V_5}{V_5 - V_4}. \quad (9-46)$$

Величину $1 + kz_{43}^0$ в уравнении (9-46) часто определяют как *возвратную разность* F [Л. 1.101, 1.102]. Таким

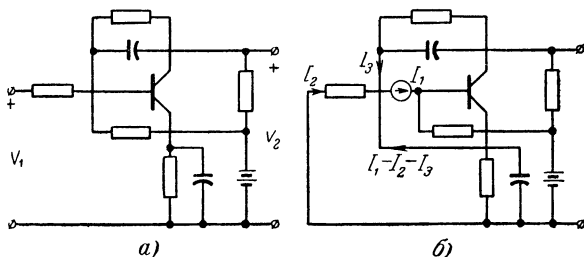


Рис. 9-6. Измерение возвратной разности (пример).

образом, при $z_{21}^0 = 0$ уравнение (9-44) сводится к выражению

$$S_k^{z_{21}}(j\omega) = \frac{1}{F(j\omega)}. \quad (9-47)$$

Пример 9-2. Для транзисторной схемы, представленной на рис. 9-6,а, требуется найти чувствительность передаточной функции напряжения $t_{21}(j\omega)$ к изменениям величины β транзистора.

По аналогии с уравнением (9-44) находим:

$$S_{\beta}^{t_{21}}(j\omega) = \frac{1}{\text{возвратная разность}} \left(1 - \frac{t_{21}^0}{t_{21}} \right). \quad (9-48)$$

Положим:

1. $t_{21}^0(0) \approx 0$.
2. Сопротивление база—эмиттер мало, так что I_1 можно считать током базы. Тогда возвратную разность можно измерять по схеме, изображенной на рис. 9,6,б.

Таким образом, имеем:

$$S_{\beta}^{t_{a1}}(j\omega) = \frac{I_1(j\omega)}{I_1(j\omega) - I_2(j\omega) - I_3(j\omega)} \quad (9.49)$$

Практическое измерение возвратной разности в транзисторных усилителях описано в [Л. 3.102].

9.2. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИЗМЕНЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определения. Теперь, когда мы научились исследовать чувствительность цепей, попытаемся расширить это понятие, исследовав влияние одновременного изменения нескольких элементов на реакцию цепи или чувствительность по отношению к многим элементам.

Определим вектор чувствительности по отношению к многим элементам [Л. 3.301]:

$$\hat{S}_e^{T(j\omega)} = \sum_i \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial \ln e_i} \hat{e}_i; \quad (9.50)$$

$$\hat{S}_e^{T(j\omega)} = \sum_i \frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial e_i} e_i \hat{e}_i + j \sum_i \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial e_i} e_i \hat{e}_i, \quad (9.51)$$

где \hat{e}_i — набор ортогональных единичных векторов. Как и при изменении одного элемента, обозначим:

$$\sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial e_i} e_i \hat{e}_i = \operatorname{Re} (\hat{S}_e^{T(j\omega)}); \quad (9.52)$$

$$\sum_i \frac{\partial \beta}{\partial e_i} e_i \hat{e}_i = \operatorname{Im} (\hat{S}_e^{T(j\omega)}). \quad (9.53)$$

Следовательно, модуль вектора $\operatorname{Re} (\hat{S}_e^{T(j\omega)})$, т. е.

$$|\operatorname{Re} (\hat{S}_e^{T(j\omega)})| = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial e_i} \right)^2}, \quad (9.54)$$

является показателем чувствительности амплитудной характеристики, так как скалярное произведение

$$(\operatorname{Re} \hat{S}_e^{T(j\omega)}, \Delta \hat{e}) = \sum \frac{\partial e_i}{\partial \alpha(\omega)} \Delta e_i; \quad (9-55)$$

$$(\operatorname{Re} \hat{S}_e^{T(j\omega)}, \Delta \hat{e}) \approx \Delta \alpha(\omega), \quad (9-56)$$

(где $\Delta \hat{e} = \sum_i \Delta e_i / e_i \hat{e}_i$) равно действительному изменению амплитудной характеристики при данных изменениях элементов.

Преимущество применения нормы как меры чувствительности состоит в том, что она является функцией частоты и для нее можно легко построить график, который покажет общую чувствительность.

Определив чувствительность по отношению к многим параметрам, рассмотрим задачу для «наихудшего случая» и статистическую задачу, упомянутые в начале главы.

Задача для «наихудшего случая». Все частные производные правой части уравнения (9-56) вещественны, следовательно, максимальные значения $\Delta \alpha$ и $\Delta \beta$ (если пренебречь вторыми разностями):

$$\text{макс. } \Delta \alpha(\omega) = \sum_i \left| \frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial e_i} \right| \Delta e_i; \quad (9-57)$$

$$\text{макс. } \Delta \beta(\omega) = \sum_i \left| \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial e_i} \right| \Delta e_i, \quad (9-58)$$

где Δe_i — наибольшие положительные изменения e_i , определяемые допусками элементов.

Статистическая задача. Напомним, что если каждая из величин q изменяется, независимо от других, соответственно распределению вероятностей и стандартное отклонение k -го распределения равно σ_k , то стандартное отклонение линейной комбинации

$$q_T = \sum_k \gamma_k q_k \quad (9-59)$$

равно:

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_k (\gamma_k \sigma_k)^2}. \quad (9-60)$$

Можно представить $\Delta \alpha(\omega)$ приближенно линейной суммой

$$\Delta \alpha(\omega) = \sum \frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial e_i} \Delta e_i. \quad (9-61)$$

Если стандартные отклонения $\alpha(\omega)$ и e_i^* равны соответственно σ_α и σ_i , получаем:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial e_i} \sigma_i \right)^2}. \quad (9-62)$$

Аналогичную формулу можно вывести для σ_β .

Таким образом, если справедливо уравнение (9-61), мы можем вычислить стандартное отклонение любой функции цепи при случайных колебаниях величин элементов около номинальных значений.

9-3. МИНИМИЗАЦИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Допустим, что требуется реализовать передаточную функцию $T(s)$ таким образом, чтобы свести к минимуму некий критерий чувствительности. По самому смыслу задачи для $T(s)$ должна существовать более чем одна реализация, и все реализации являются тогда в этом смысле эквивалентными. Эта свобода в выборе реализации обычно получается благодаря применению: а) активных элементов [Л. 4.114] и б) избыточных пассивных элементов, образующих неканоническую цепь.

Задача, очевидно, состоит в том, чтобы составить все возможные эквивалентные цепи и затем выбрать цепь с минимальной чувствительностью. Один из простых способов образования класса эквивалентных цепей сводится к разделению каждого элемента на два элемента [Л. 4.202]:

$$e'_r = \varepsilon e_r; \quad (9-63)$$

$$e''_r = (1 - \varepsilon) e_r. \quad (9-64)$$

* Стандартные отклонения e_i и Δe_i одинаковы.

Заметим, что на основании уравнения (9-20):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e_r} = \frac{\partial \alpha}{\partial e'_r} = \frac{\partial \alpha}{\partial e''_r}. \quad (9-65)$$

Если стандартное отклонение при изменении e_r равно σ_r , то

$$\sigma_\alpha = \left[\sum_{i \neq r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e_r} \sigma_i \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e_r} \right)^2 (\varepsilon^2 \sigma_r^2) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e_r} \right)^2 (1 - \varepsilon)^2 \sigma_r^2 \right]^{1/2}; \quad (9-66)$$

$$\sigma_\alpha = \left[\sum_{i \neq r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e_i} \sigma_i \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e_r} \right)^2 (\sigma_r)^2 (1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2) \right]^{1/2}. \quad (9-67)$$

Это выражение минимально при $\varepsilon = 1/2$. Таким образом, последовательно разделяя каждый элемент на два элемента, можно сделать статистическую чувствительность как угодно малой. То же самое справедливо для нормы [уравнение (9-35)] (см. задачу 9-3). Вместе с тем чувствительность для наихудшего случая остается без изменения.

Помимо этого простого случая, задача составления эквивалентных цепей с использованием избыточных элементов для уменьшения чувствительности мало исследована. В § 10-4 и в задаче 9-12 указан способ уменьшения чувствительности цепи с помощью вычислительной машины.

9-4. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим опять модель Линвилла (рис. 7-6), но теперь мы хотим реализовать t_{21} :

$$t_{21} = \frac{-kz_{12b}y_{12a}}{1 - kz_{11b}y_{22a}} \quad (9-68)$$

(см. задачу 7-11), где

$$t_{21}(s) = \frac{K}{D(s)} = Ks^2: [(s + 0,549 + j10,895)(s + 0,549 - j10,985)(s + 0,549 + j9,105)(s + j0,549 - j9,105)]. \quad (9-69)$$

На рис. 9-9 представлен график $|t_{21}(j\omega)|$, представляющий частотную характеристику полосового фильтра. Сперва попытаемся реализовать функцию посредством одного ПОС (рис. 9-7). Было показано [Л. 4.108, 4.111], что для минимизации чувствительности в нуле по отно-

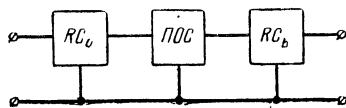


Рис. 9-7. Простая модель реализации Линвилла.

шению к ПОС (т. е. по отношению к k) следует представить знаменатель в виде

$$D(s) = (s + a_1)^2 (s + a_2)^2 - B_0 k s (s + b_1)^2, \quad (9-70)$$

где k равно нормально 1 и a и b попеременно отрицательны и положительны. Следовательно,

$$y_{22a} = \frac{B_0 s (s + b_1)}{(s + a_1)(s + a_2)}; \quad z_{11b} = \frac{(s + b_1)}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (9-71)$$

представляют проводимость и сопротивление цепи RC . В данном случае

$$a_1 = 2,741; \quad a_2 = 34,702; \quad B_0 = 71,72; \quad b_1 = 9,98. \quad (9-72)$$

Чувствительность в полюсе равна:

$$S_k^{s_j} = \left. \frac{+B_0 k s (s + b_1)}{D(s)/(s - s_j)} \right|_{s=s_j} \quad (9-73)$$

и

$$S_k^{-0,549-j10,895} = 204 \angle 79^\circ; \quad (9-74)$$

$$S_k^{-0,549-j9,105} = 172 \angle 88^\circ. \quad (9-75)$$

С другой стороны, если разбить $t_{21}(s)$ на две части:

$$t_{21a}(s) = \frac{K_a s}{(s + 0,549 + j10,895)(s + 0,549 - j10,895)}; \quad (9-76)$$

$$t_{21b}(s) = \frac{K_b s}{(s + 0,549 + j9,105)(s + 0,549 - j9,105)} \quad (9-77)$$

и использовать два ПОС и буферный усилитель (рис. 9-8), так что $t_{21} = t_{21a} t_{21b}$, то оптимальное разложение знаменателей будет иметь вид:

$$D(s) = (s + a'_1)^2 - B'_0 k s. \quad (9-78)$$

Тогда чувствительность равна:

$$S_{k_a}^{-0,549-j10,895} = 10,4 \angle 3^\circ; \quad (9-79)$$

$$S_{k_b}^{-0,549-j9,105} = 8,6 \angle -4^\circ, \quad (9-80)$$

т. е. значительно меньше, чем в предыдущей схеме.

Можно также сравнить реализацию $t_{21}(s)$ активной цепью с двумя ПОС и пассивной цепной схемой LC. Мы

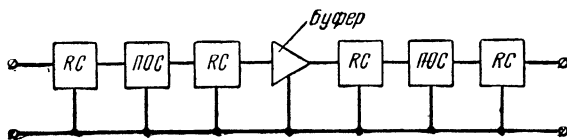


Рис. 9-8. Каскадная модель реализации Линвилла.

используем теперь чувствительность по отношению к многим элементам, так как для активного элемента нет соответствующего единичного элемента в пассивной цепи. При изменении пассивных и активных элементов на 0,1 % получаем наибольшие отклонения характеристики полосового фильтра (§ 9-3), изображенные на рис. 9-9.

На основании вышеизложенного можно прийти к следующим, справедливым в большинстве случаев заключениям о методах синтеза активных цепей:

1. Несмотря на то, что для реализации любой рациональной передаточной функции достаточно иметь один активный элемент, такая реализация будет иметь значительно большую чувствительность по отношению к активному элементу по сравнению с реализацией с несколькими соответственно расположенными активными элементами.

2. Пассивные цепи, реализующие заданную функцию, менее чувствительны к изменениям элементов, чем активные цепи. Это различие можно объяснить качественно

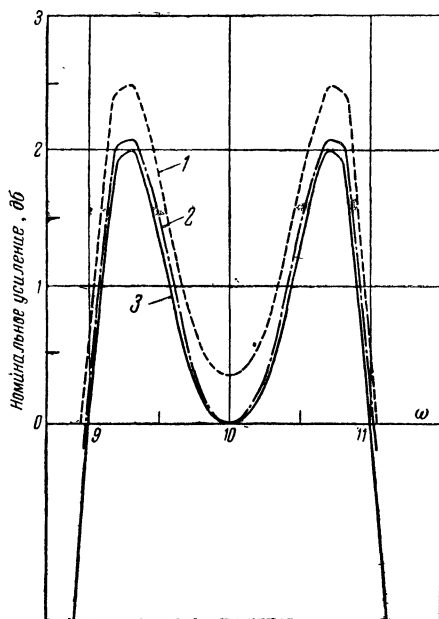


Рис. 9-9. Сравнение реализаций характеристик пропускания полосы частот моделью Линвилла и цепью RLC для «наихудшего случая».

1 — верхняя граница для активного фильтра;
2 — верхняя граница для пассивного фильтра;
3 — номинальное усиление обоих фильтров.

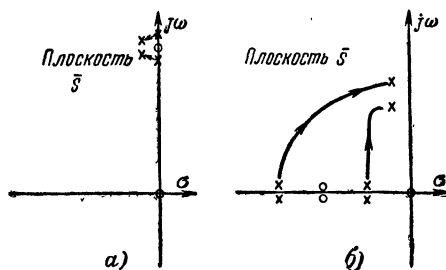


Рис. 9-10. Перемещение корней для пассивных и активных моделей.

а — пассивная модель; б — активная модель.

тем, каким образом разлагается $D(s)$ в одном и другом случае:

$$D(\bar{s}) = [\pi(s^2 + \omega_i^2) + kc_0 s \pi(s^2 + \omega_i^{12})] \Big|_{\bar{s} = \bar{s}/s} \quad (\text{пассивная цепь}); \quad (9-81)$$

$$D(\bar{s}) = \pi(\bar{s} + a_i)^2 - kb_0 \pi(\bar{s} + b_i)^2 \quad (\text{активная цепь}), \quad (9-82)$$

где \bar{s} — комплексная переменная, соответствующая полосе средних частот;

s — эквивалентная величина для нижних частот.

На рис. 9-10 представлены корневые годографы этих функций при изменении k , которое рассматривается как показатель изменений величины элементов. Мы замечаем, что у активной цепи при изменении k от 0 до ∞ корни проходят большее расстояние в плоскости s . Следовательно, среднее значение ds_i/dk больше. Кроме того, у активной цепи корни должны пройти большее расстояние от отрицательных вещественных полюсов до полюсов около оси $j\omega$, тогда как у пассивной цепи это расстояние мало. Таким образом, в этой области плоскости s корни мало меняют свое положение при изменении k .

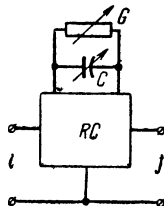
Задачи

9-1. Нулевая схема RC (имеющая целью дать нуль передачи на оси $j\omega$) содержит параллельное соединение RC (рис. 9-11). Покажите, что при

$$t_{ij}(s) = \frac{n_1(s) + (sC + G)n_2(s)}{d(s)}$$

поочередной регулировкой R и C можно добиться сколь угодно глубокого минимума.

Рис. 9-11. Нулевая схема RC с двумя переменными элементами.



9-2. Выведите уравнение (9-9) (указание: используйте формулу для вычисления остатков в разложении на простые дроби).

9-3. Покажите, что норма чувствительности к многим элементам [уравнение (9-35)] уменьшается, если каждый элемент разделить на

два элемента, как указано в уравнение (9-45). Какое разбиение оптимально?

9-5. Покажите, что для любой цепи RLC :

$$1. \sum_i^n S_{e_i}^{z_{k1}}(j\omega) = 1.$$

$$2. \sum_i^n S_{e_i}^{t_{k1}}(j\omega) = 0.$$

$$3. \sum_i^n S_{e_i}^{s_j}(j\omega) = 0.$$

$$4. \sum_i^n S_{e_i}^{p_j}(j\omega) = 0,$$

где n — число элементов; e_j — сопротивление (R), индуктивность (L) или обратная величина емкости ($1/C$), s_j и p_j — нули и полюсы z_{k1} или t_{k1} (указание: рассмотрите, в каких единицах измеряется полное сопротивление).

Для какого класса активных элементов это будет справедливо?

9-6. Покажите, что

$$S_{e_i}^Z = S_{Z_r(e_i)}^Z S_{e_i}^{Z_r(e_i)}.$$

Поясните это такой интерпретацией приведенного соотношения, когда, например, одна величина описывает все изменения в ПНОС.

9-7. Покажите на основании уравнения (9-18), что чувствительность фазовой функции цепи LC по отношению к L или C равна нулю.

9-8. Покажите, что если

$$P(s) = \prod_i^n (s - s_i) = \sum_i^n a_i s_i,$$

то

$$\sum_i^n S_{e_j}^{s_i} = \left(\frac{da_{n-1}}{de_j} \right) e_j.$$

9-9. Функции чувствительности для цепи RLC имеют некоторые любопытные свойства в случае, когда исключение переменного элемента приводит к тому, что функция цепи становится равной нулю, т. е.

$$z_{k1} = \frac{e_i N_2(s)}{D_1(s) + e_i D_2(s)}.$$

а) Покажите, что

$$S_{e_i}^{z_{k1}} = \frac{1}{1 + e_i z_{22}};$$

где z_{22} — сопротивление на зажимах элемента.

1. Является ли $S_{e_i}^{z_{k1}}$ положительной вещественной функцией, если e_i есть сопротивление?
2. Какой смысл имеет п. 1?
3. Ответьте на вопросы пп. 1 и 2, если e_i есть индуктивность или емкость.

б) Покажите, что $\frac{\Delta z_{k1}/z_{k1}}{\Delta e_i/e_{i0}} = S_{e_i}^{z_{k1}} \Big|_{e_i=e_{i0}+\Delta e_i}$

Рассмотрите смысл этого соотношения.

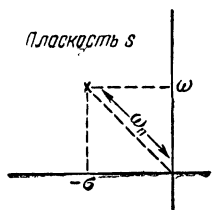


Рис. 9-12. Определение положения корня.

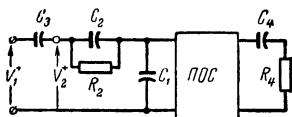


Рис. 9-13. Модель «Сай-пресса».

9-10. Минимальная чувствительность в нуле многочлена, представленного как разность двух входных функций цепи [как знаменатель в уравнении (9-49)], получается для многочлена второй степени при разложении многочлена в виде уравнения (9-59).

а) Для такого разложения:

1. Найдите $S_k^{(-\sigma-j\omega)/\sigma}$ — нормализованную чувствительность в нулях и полюсах.

2. Найдите $S_k^{(-\sigma-j\omega)/\sigma}$ для корней вблизи мнимой оси ($\omega_n/2\sigma = Q \gg 1$).

б) Для цепи, изображенной на рис. 9-13, посредством которой можно реализовать функцию [Л. 3.321]:

$$\frac{V_2}{V_1} = K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2},$$

в табл. 9-1 указаны приближенные выражения нормализованной чувствительности в нулях и полюсах.

1. Выразите передаточную функцию через величины элементов.

2. Вычислите чувствительность в нуле и полюсе по отношению к каждому элементу.

3. Покажите, что для этой модели при последовательном или параллельном включении R и C $S_R^{-\sigma-j\omega} \approx \pm jk S_C^{-\sigma-j\omega}$. Что из этого следует в отношении регулировки таких цепей?

4. Выберите типичное A для использования при проектировании эллиптического полосового фильтра. Какой элемент должен иметь наименьший допуск для обеспечения устойчивости цепи? Каким должен быть допуск?

Выражения для величин элементов и чувствительности цепи, изображенной на рис. 9-13

$$\frac{V_2}{V_1}(s) = K_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2}; \quad \omega_n < \omega_0.$$

Элемент	Величины элемента (точные)	$S_{e_i}^z$ — чувствительность в нуле (приближенная)	$S_e^{P/\sigma}$ — нормализованная чувствительность в полюсе (приближенная)
R_2	$\frac{2}{K_c}$	$\frac{\omega_0(1-j)}{2}$	$Q \left\{ -\frac{A(\sqrt{2}-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{A}} - j \right\}$
R_4	$\frac{1}{K_c}$	$\frac{\omega_0(-1-j)}{2}$	$Q \left\{ \frac{A(\sqrt{2}-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{A}} - j \right\}$
C_1	$\frac{2K_c/\omega_0 - 1 + A + B}{4}$	$\frac{\omega_0}{2 + \sqrt{2}}(1-j)$	$Q \left\{ \sqrt{A}(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{A}} + j \frac{A(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} - \right. \\ \left. - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2A}} \right\}$

Элемент	Величины элемента (точные)	$S_{e_i}^{z_i}$ — чувствительность в нуле (приближенная)	$S_e^{P_j/\sigma}$ — нормализованная чувствительность в полюсе (приближенная)
C_2	$\frac{1-A-B}{4}$	$\frac{\omega_0}{2(1+\sqrt{2})}(-1-j)$	$Q \left\{ -\sqrt{A}(\sqrt{2}-1) + j \left[\frac{A(3-2\sqrt{2})}{2} - \frac{1}{2} \right] \right\}$
C_3	$\frac{2K_c/\omega_0 + 1 + 3A - B}{4}$	0	$Q \left\{ Q + j \left[-\frac{A(2-\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{4A} \right] \right\}$
C_4	$\frac{K_c}{\omega_0}$	$\frac{\omega_0}{2}(1-j)$	$Q \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}} + j \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2A} \right\}$
ПОС	-1	ω_0	$Q \left\{ -\frac{\sqrt{A}(\sqrt{2}-1)}{2} + \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{A}} + j \left(1 - \frac{1}{A} \right) \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) \right\}$

$$K_c = \frac{\omega_0}{2} \left\{ 1 - A + B + \sqrt{2} [(1-A)^2 + B^2]^{1/2} \right\}; \quad Q \approx \frac{\omega_n}{2\sigma}; \quad A = \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2; \quad K_0 = \frac{2K_c/\omega_0 + 1 + 3A - B}{4}$$

9-11. Пусть для данной цепи N чувствительность функции цепи $T(s)$ по отношению к индуктивности L равна $S_L^{T(s)}$. Рассмотрим функцию $\bar{T}(s)$, получающуюся при преобразовании нижних частот в средние частоты:

$$s = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} \left[\frac{\bar{s}}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} + \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\bar{s}} \right],$$

которое осуществляется частично тем, что индуктивность L в цепи N заменяется последовательным соединением $\bar{L} - C$.

а) Выразите $\bar{S}_{\bar{L}}^{\bar{T}(\bar{s})}$ через $S_L^T(s)$.

б) Выразите $\bar{S}_{\bar{C}}^{\bar{T}(\bar{s})}$ через $S_L^T(s)$.

в) Выполните пп. а и б, когда C заменено параллельным соединением $L - C$.

г) Сравните ваши выводы с рис. 9-9.

9-12. Было предложено минимизировать чувствительность по отношению к многим элементам на вычислительной машине методом наискорейшего спуска (см. гл. 5).

Задана амплитудная характеристика

$$|T(j\omega_k)|_{k=1,2,\dots,n},$$

реализованная первоначально цепью N с чувствительностью по отношению к многим элементам

$$|\operatorname{Re} S_e^{T(j\omega_k)}|_{k=1,\dots,n}.$$

Как определить функцию ошибки, которую нужно минимизировать так, чтобы реализовать приближенно ту же амплитудную характеристику и в то же время уменьшить чувствительность?

9-13. Допустим, что нужно заказать 10 000 сопротивлений с допуском $\pm 10\%$. Начертите предполагаемое распределение величин элементов.

Глава десятая

НЕПРЕРЫВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЦЕПИ

По эквивалентным цепям имеется много теоретических исследований [Л. 5.0, 5.1] и недавно показано, что эта важная область может найти практическое применение. Хотя этот вопрос сейчас еще полностью не разработан, но ввиду важного значения, которое он, по-видимому, должен иметь в будущем, имеет смысл привести здесь некоторые основные понятия. Однако для более глубокого понимания читателю следует прочесть имеющуюся литературу.

10.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N — цепь RLC с $n+1$ узлами, описываемая своей узловой матрицей проводимостей $[Y]$; ее узловые токи и напряжения связаны соотношением

$$[I] = [Y][V], \quad (10-1)$$

где

$$[Y] = [G] + s[C] + \frac{[L^{-1}]}{s}. \quad (10-2)$$

Матрицы $[G]$, $[C]$ и $[L^{-1}]$ симметричны. Мы хотим изменять $[G]$, $[C]$ и $[L^{-1}]$ так, чтобы функция $z_{21}(s)$ цепи N не изменилась. Мы будем добиваться такой эквивалентности путем непрерывного изменения всех элементов этих матриц. Введя искусственную независимую переменную x , получим:

$$[Y] = [Y(x)] = [G(x)] + s[C(x)] + \frac{[L^{-1}(x)]}{s}. \quad (10-3)$$

Таким образом, мы создадим «непрерывно эквивалентные цепи».

Допустим сначала, что N возбуждается только через узел 1 источником тока I_1 . Имеем:

$$[I] = [Y(x)][V(x)]; \quad (10-4)$$

$$[I] = [Y(x + \Delta x)][V(x + \Delta x)], \quad (10-5)$$

где

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad (10-6)$$

и ток I_1 не зависит от x , поскольку он создается независимым источником.

Пусть вариация матрицы $[V(x)]$ выражается в виде

$$[V(x + \Delta x)] = \{[V] - \Delta x[a]\}[V(x)], \quad (10-7)$$

где

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (10-8)$$

Строка из нулей включена для того, чтобы обеспечить инвариантность $V_2(x)$. Покажем теперь, как может меняться $[Y(x)]$, чтобы выполнялось уравнение (10-5). Из уравнения (10-7) имеем:

$$[I] = [Y(x + \Delta x)] \{[U] - \Delta x [a]\} V(x). \quad (10-9)$$

Поскольку $[I]$ имеет лишь один ненулевой элемент, можно написать:

$$\{[U] - \Delta x [b]\} [I] = [I], \quad (10-10)$$

где

$$[b] = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}. \quad (10-11)$$

Умножая уравнение (10-9) спереди на $\{[U] - \Delta x [b]\}$, получаем:

$$[I] = \{[U] - \Delta x [b]\} [Y(x + \Delta x)] \{[U] - \Delta x [a]\} V(x), \quad (10-12)$$

и, следовательно,

$$[Y(x)] = \{[U] - \Delta x [b]\} [Y(x + \Delta x)] \{[U] - \Delta x [a]\}. \quad (10-13)$$

Переставив члены, находим:

$$\begin{aligned} \frac{[Y(x + \Delta x)] - [Y(x)]}{\Delta x} &= [b] [Y(x + \Delta x)] + \\ &+ [Y(x + \Delta x)] [a] + \Delta x [b] [Y(x + \Delta x)] [a]. \end{aligned} \quad (10-14)$$

Предел при $\Delta x \rightarrow 0$ равен:

$$\frac{d[Y(x)]}{dx} = [b] [Y(x)] + [Y(x)] [a]. \quad (10-15)$$

Но $[X] = [Y]^T$, так как N есть цепь RLC . Транспонируя обе части уравнения (10-15), имеем:

$$\frac{d[Y(x)]}{dx} = [Y(x)][b]^T + [a]^T[Y(x)]. \quad (10-16)$$

Уравнения (10-15) и (10-16) тождественны, если $[b] = [a]^T$, так что нам нужно решить лишь уравнение

$$\frac{d[Y(x)]}{dx} = [a]^T[Y(x)] + [Y(x)][a], \quad (10-17)$$

где

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (10-18)$$

поскольку $[a] = [b]^T$.

Вообще, чтобы сохранить инвариантность r_{jk} , берем $a_{ji} = a_{ki} = 0$ при всех i ; тогда входные сопротивления z_{jj} и z_{kk} остаются неизменными (почему?). Если $j = k$ (т. е. если должно быть неизменным лишь входное сопротивление), матрица должна содержать лишь одну строку нулей.

10-2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Теперь можем легко выразить уравнение (10-17) через величины элементов. Разлагая матрицу $[Y]$ на соответствующие матрицы, получаем:

$$\frac{d[G]}{dx} = [a]^T[G] + [G][a]; \quad (10-19)$$

$$\frac{d[C]}{dx} = [a]^T[C] + [C][a]; \quad (10-20)$$

$$\frac{d[L^{-1}]}{dx} = [a]^T[L^{-1}] + [L^{-1}][a]. \quad (10-21)$$

Уравнение (10-19), например, можно развернуть дальше, выразив его через величины элементов (g_{jk} — проводимость между узлами j и k):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n g'_{1k} - g'_{12} - g'_{13} \dots g'_{1n} \\ -g_{21} \sum_{k=1}^n g'_{2k} g'_{23} \dots g'_{2n} \\ \vdots \\ -g'_{n1} \sum_{k=1}^n g'_{nk} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{1n} & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n g_{1k} \dots g_{1n} \\ \vdots \\ -g_{n1} \sum_{k=1}^n g_{nk} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n g_{1k} \dots - g_{1n} \\ -g_{n1} \sum_{k=1}^n g_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (10-22)
 \end{aligned}$$

где $g_{jk} = g_{kj}$. Чтобы выполнить условия для элементов, расположенных выше диагонали, нужно иметь:

$$g'_{jk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ij} g_{ik} - a_{kj} \sum_{i=1}^n g_{ki}, \quad j \neq k, \quad (10-23)$$

а для диагональных элементов

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n g'_{ik} + g'_{kk} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} g_{ik} + a_{kk} \sum_{i=1}^n g_{ki}. \quad (10-24)$$

Решая (10-24) относительно g_{kk} и подставляя g'_{ik} из уравнения (10-23), окончательно получаем:

$$g'_{kk} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} g_{ik} + a_{kk} \sum_{i=1}^n g_{ki} - \\ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n a_{li} g_{lk} - a_{ki} \sum_{l=1}^n g_{kl} \right). \quad (10-25)$$

Из уравнений (10-23) и (10-25) следует важный вывод, что g_{jk} можно записать как линейную функцию величин g . Тогда

$$\frac{d[g]}{dx} = [M][g], \quad (10-26)$$

где

$$[g] = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}; \quad (10-27)$$

p — число величин g^* . Беря изображения Лапласа от обеих частей, получаем:

$$s[G(s)] - [g^0] = [M][G(s)]; \quad (10-28)$$

$$\{s[U] - [M]\}[G(s)] = [g^0], \quad (10-29)$$

где $[G] = L\{g\}$ и g^0 состоит из омических проводимостей данной цепи. Но определитель $|s[U] - [M]|$ не может быть нулем ни при каком значении s , так как s входит только в главную диагональ и, следовательно, определитель содержит член s^p . Таким образом,

$$[G(s)] = \{s[U] - [M]\}^{-1} [g^0]. \quad (10-30)$$

Из этого уравнения можно найти $g_i(x)$. Подобным же способом можно найти $c_i(x)$ и $e_i^{-1}(x)$.

* $p = (n+1)n/2$, так как по предположению элементы включены между всеми узлами.

10.3. ВЫБОР ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ $[a]$

Поскольку величины a_{jk} произвольны, за исключением тех, которые должны быть равны нулю в силу инвариантности, можно составить много различных эквивалентных цепей, включая цепи с отрицательными элементами. Однако путем тщательного подбора a_{jk} во многих случаях можно добиться следующего:

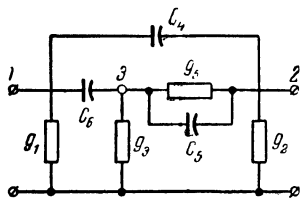


Рис. 10-1. Исходная цепь RC .

- 1) избегать отрицательных элементов;
- 2) выборочно уменьшить число элементов;
- 3) сохранять некоторые элементы неизменными при изменении других элементов;
- 4) по выбору «наращивать» положительные элементы между узлами.

При разборе примера мы составим ряд указаний, которые во многих случаях позволят достигнуть этих целей. Конечно, из этого не следует, что можно всегда изменить величины положительных элементов и сохранить при этом желаемую инвариантность (например, в канонической цепи); чтобы величины элементов можно было регулировать, цепь должна иметь некоторую «избыточность». Границы допустимых изменений при сохранении заданной эквивалентности в общем случае неизвестны.

Пример 10-1. В схеме, изображенной на рис. 10-1, мы хотим уменьшить число конденсаторов так, чтобы передаточная функция по напряжению $t_{21}(s)$ осталась без изменения.

Допустим, что между всеми узлами имеются безреактивные проводимости (некоторые из них равны нулю).

Уравнение (10-19) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} g'_1 + g'_4 + g'_6 & -g'_4 & -g'_6 \\ -g'_4 & g'_2 + g'_4 + g'_5 & -g'_5 \\ -g'_6 & -g'_5 & g'_3 + g'_5 + g'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{31} \\ 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} g_1 + g_4 + g_6 & -g_4 & -g_6 \\ -g_4 & g_2 + g_4 + g_5 & -g_5 \\ -g_6 & -g_5 & g_2 + g_5 + g_6 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} g_1 + g_5 + g_6 & -g_4 & -g_6 \\ -g_4 & g_2 + g_4 + g_5 & -g_5 \\ -g_6 & -g_5 & g_3 + g_5 + g_6 \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (10-31)
\end{aligned}$$

Частичное решение уравнения (10-31) следующее:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \\ g'_4 \\ g'_5 \\ g'_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{31} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2a_{33} + a_{31} + a_{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -a_{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -a_{31} & 0 & \dots \end{bmatrix} \\
&\dots 0 \quad -a_{31} - a_{32} - a_{33} \quad \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix} \\
&\dots -a_{31} - a_{32} - a_{33} \quad 0 \\
&\quad a_{33} + a_{32} + a_{31} \quad a_{33} + a_{32} + a_{31} \\
&\quad a_{31} \quad a_{32} \\
&\dots a_{33} - a_{32} \quad -a_{32} \\
&\dots -a_{31} \quad a_{33} - a_{31}
\end{aligned} \quad (10-32)$$

Такую же систему уравнений можно составить для c_i . Чтобы гарантировать, что мы не включаем конденсатор там, где его нет, мы ставим условие

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{dc(x)}{dx} = 0 \text{ при всех } x, \quad (10-33)$$

которое будет выполняться, если $a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0$ [см. уравнение (10-32)]. Заметим, что множители при элементах, по предположению равных нулю, необязательно равны нулю.

Далее, чтобы гарантировать, что существует $\Delta x > 0$, такое, что $g_4(\Delta x) \geq 0$ и $g_6(\Delta x) \geq 0$, т. е. чтобы не появились сразу же отрицательные элементы, мы ставим условие

$$\left. \frac{dg_4(x)}{dx} \right|_{x=0} \geq 0; \quad \left. \frac{dg_6(x)}{dx} \right|_{x=0} \geq 0, \quad (10-34)$$

из которого вытекает, что $a_{31}g_5^0 \geq 0$ и $-a_{31}(g_3^0 + g_5^0) \geq 0$ одновременно. Следовательно, $a_{31} = 0$ и $a_{32} = -a_{33}$. Наконец, чтобы $c_5(x)$ уменьшалось при $\Delta x > 0$, мы должны иметь:

$$\left. \frac{dc_5(x)}{dx} \right|_{x=0} < 0 \quad (10-35)$$

и

$$-a_{32}(g_3^0 + g_5^0) + a_{33}g_6^0 < 0 \quad (10-36)$$

или

$$a_{33}(g_3^0 + 2g_5^0) < 0; \quad (10-37)$$

$$a_{33} < 0. \quad (10-38)$$

Из уравнения (10-32) явствует, что при выборе численных значений a_{jh} выбор масштаба величин a эквивалентен выбору масштаба x , так как можно выбрать какой-либо из них произвольно. Беря $a_{33} = -1$ и, следовательно, $a_{32} = 1$, находим соответственно уравнению (10-30):

$$\begin{bmatrix} g_3^0 \\ g_5^0 \\ g_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 1 & s+2 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_3(s) \\ G_5(s) \\ G_6(s) \end{bmatrix}, \quad (10-39)$$

где g'_1 , g'_2 и g'_4 отсутствуют, так как g'_3 , g'_5 и g'_6 не зависят от них¹.

Решив уравнение (10-39), находим:

$$g_3(x) = g_3^0 e^{-x}; \quad (10-40)$$

$$g_5(x) = g_3^0 (e^{-2x} - e^{-x}) + g_5^0 e^{-2x}; \quad (10-41)$$

$$g_6(x) = g_6^0 e^{-x} = 0, \quad (10-42)$$

¹ Величины g' не могут быть функциями элементов между зажимами в инвариантной цепи [см. уравнение (10-32)].

так как $g_i^0 = 0$. Далее имеем:

$$c_3(x) = c_3^0 e^{-x} = 0; \quad (10-43)$$

$$c_5(x) = c_5^0 e^{-2x} + c_6^0 (e^{-2x} - e^{-x}); \quad (10-44)$$

$$c_8(x) = c_6^0 e^{-x}. \quad (10-45)$$

Подставляя эти значения в уравнение (10-32) и интегрируя, получаем:

$$g_1(x) = g_1^0; \quad (10-46)$$

$$g_2(x) = g_2^0 + g_3^0 (1 - e^{-x}); \quad (10-47)$$

$$g_4(x) = g_4^0 + g_6^0 (1 - e^{-x}) = 0; \quad (10-48)$$

$$c_1(x) = c_1^0 = 0; \quad (10-49)$$

$$c_2(x) = c_2^0 = 0; \quad (10-50)$$

$$c_4(x) = c_4^0 + c_6^0 (1 - e^{-x}). \quad (10-51)$$

Из этих решений видно, что лишь $g_5(x)$ и $c_5(x)$ могут стать отрицательными при $x \geq 0$, когда

$$x_g = \ln \frac{g_3^0 + g_5^0}{g_3^0}; \quad x_c = \ln \frac{c_5^0 + c_6^0}{c_6^0}. \quad (10-52)$$

Очевидно, могут быть следующие случаи:

- 1) $x_g > x_c$; c_5 можно сделать равным нулю (рис. 10-2, а);
- 2) $x_g < x_c$; g_5 можно сделать равным нулю (рис. 10-2, б);
- 3) $x_g = x_c$; c_5 и g_5 могут быть сделаны равными нулю (рис. 10-2, в).

Если $x_g < x_c$, так что c_5 не равно нулю, нужно провести еще одну итерацию при других a_{ih} , действуя так, чтобы c_4 , c_5 или c_6 стали равными нулю (но при $g_5^0 = 0$) (см. задачу 10-4).

Нужно иметь в виду, что инвариантность может быть нарушена при каком-либо дискретном значении x , при котором интересующие нас функции цепей превращают-

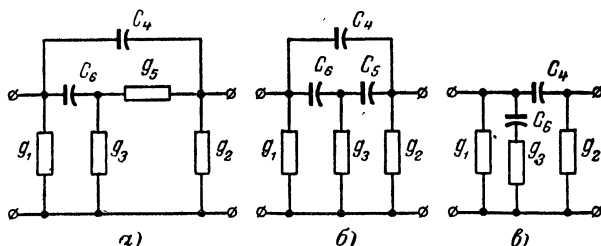


Рис. 10-2. Упрощенные эквивалентные и вырожденные цепи.

ся в неопределенные отношения¹. Так, при $x = \infty$ все элементы, кроме g_1 , g_2 и C_4 , становятся равными нулю

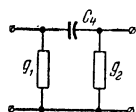


Рис. 10-3. Модель активной цепи.

(рис. 10-3); но эта цепь, очевидно, не эквивалентна первоначальной цепи. Однако возможность появления такой вырожденности не препятствует применению этого способа.

10-4. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

Критерии качества. При образовании эквивалентных цепей мы можем выбрать другой критерий качества, нежели простое уменьшение величины выбранного элемента до нуля. Например, если требуется установить заданные величины определенных элементов, можно ввести функцию

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p [g_i(x) - g_i^d]^2, \quad (10-53)$$

где g_i^d — требуемая проводимость.

¹ Это произойдет, например, тогда, когда все элементы между узлами равны одновременно нулю.

Соответственно уравнению (10-35) можно вычислить

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0} = 2 \sum_{i=1}^p (g_i^0 - g_i^d) g'_i(0). \quad (10-54)$$

Но g_i^0 известно, а $g'_i(0)$ можно выразить через величины g_0 и a . [из уравнения (10-32)]. Таким образом, находим:

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0} = \sum_{i=1}^p b_i g_i^0 < 0, \quad (10-55)$$

где b_i — линейная функция величин a . Это уравнение заменит уравнение (10-37). Можно взять другой критерий — уменьшить диапазон изменения элементов (задача 10-3).

Если существенное значение имеет чувствительность по отношению к элементам, можно составить более сложный критерий. Например, можно определить функцию чувствительности, имеющую производную, линейную по g_i (так же как $\varphi(x)$) [Л. 4.304].

Применение вычислительной машины. Применение вычислительной машины для определения эквивалентных цепей может быть вызвано тремя основными причинами:

1. Цепи, обладающие необходимой избыточностью для регулировки величин элементов, должны иметь много узлов; так как нужно решить $[(n+1)n]/2$ совместных дифференциальных уравнений первого порядка (для каждого рода элементов), то обычно это связано с довольно большими вычислениями.

2. Методы решения многих линейных дифференциальных уравнений первой степени с постоянными коэффициентами хорошо известны, и можно применять стандартные подпрограммы.

3. Численное решение этих дифференциальных уравнений производится дискретными шагами, так что, если уравнения, подобные уравнениям (10-33) — (10-35), выполняются, можно взять достаточно малый шаг, чтобы элементы оставались положительными.

10-5. РЕЗЮМЕ

Следует отметить, что в указанной области предстоит еще проделать много теоретических исследований. Большое значение имеют, например, такие вопросы: можно ли составить этим способом все цепи, эквивалентные данной цепи? Когда будет появляться вырожденность, указанная в § 10-3, и т. д.

Задачи

10-1. Разберите преимущества и недостатки применения:

а) контурной матрицы сопротивлений и б) матрицы проводимостей отсечений (вместо узловых матриц проводимостей) для образования эквивалентных цепей, в частности, незаземленных цепей. Чему соответствует процесс «наращивания» элементов цепей. Чему соответствует процесс «наращивания» элементов между узлами?

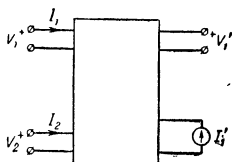


Рис. 10-4. Исходная цепь с тремя узлами.

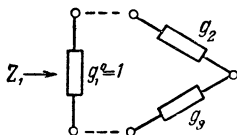


Рис. 10-5. К задаче 10-6.

10-2. Как изменится вывод уравнения (10-17), если узловая матрица проводимостей несимметрична и имеет, например, такую форму:

$$\begin{bmatrix} \Sigma g_{1k} & -g_{12} & -g_{13} + g_m g_{14} & \dots & -g_{1n} \\ -g_{12} & \Sigma g_{2k} & & & \\ -g_{13} & -g_m & & & \\ -g_{14} & & & & \\ -g_{1n} & \dots & \dots & \dots & \Sigma g_{nk} \end{bmatrix}.$$

10-3. На рис. 10-4 показан активный четырехполюсник. Предложите способ сохранения инвариантности $V_2(x)/V_1(x)$, отличный от указанного в задаче 10-2.

10-4. Пусть в примере 10-1 $x_g < x_c$, так что после итерации g_5 равно нулю, но c_5 не равно нулю. Попробуйте свести к нулю c_4 , взяв другой соответствующий набор величин a_i .

10-5. Выведите уравнение, подобное уравнению (10-17), для случая, когда можно допустить изменение величин полного сопротивления.

10-6. Разверните схему с двумя узлами, изображенную на рис. 10-5, в схему с тремя узлами, сохранив неизменное Z_1 (указание: g_2^0 может быть не равным нулю). Требуется установить ве-

личины всех элементов близкими 2 ом. Выполните лишь одну итерацию.

10-7. Если все элементы матрицы $[a]$ ограничены величиной $|a_{jk}| \leq 1$ (их масштаб можно всегда изменить) и между всеми узлами цепи включены положительные омические проводимости, емкости и индуктивности, то как нужно выбрать величины a , чтобы минимизировать производную

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0},$$

определенную в уравнении (10-54)?

10-8. Составьте критерий образования эквивалентных цепей с увеличенным диапазоном изменения элементов. Будет ли критерий линейный по величинам a ?

Условия реализуемости матрицы $[Y(s)]$ цепями RLC^*

Тип цепи	Необходимые условия	Достаточные условия
RLC	Матрица $[y(s)]$ симметричная и положительная вещественная. Матрица $[y(\sigma)]_{\sigma \geq 0}$ реализуема омическими цепями	
RL, RC, LC или их сочетания	Матрица $[y(s)]$ симметричная и положительная вещественная Матрица $[y(\sigma)]_{\sigma \geq 0}$ реализуема безреактивной цепью $[k_j]$ — матрицы вычетов — положительные полуопределенные	$[k_j]$ реализуемы уравновешенными безреактивными цепями Все матрицы $[k_j]$ реализуемы омическими цепями с $n + 1$ зажимами
R	Матрица $[g]$ — главенствующая**	Матрица $[g]$ — доминирующая с отрицательными внедиагональными элементами (получается $n + 1$ конечных цепей) Матрица $[g]$ — доминирующая (получается уравновешенная цепь)

Примечание. Здесь приведены лишь основные условия реализации, другие условия см. в [Л. 1. 206].

* Если для реализации матрицы $[y(s)]$ существует дуальная цепь, то дуальная цепь представляет реализацию соответствующей матрицы сопротивлений холостого хода $[z(s)]$.

** Это условие необходимо и достаточно для многополюсников при числе входов $n \leq 3$.

Продолжение табл. 2

Тип цепи	Матрица	Формальные необходимые и достаточные условия реализуемости	Ссылка на литературу
		4) матрица вычетов $[k]$ в любом полюсе на оси $j\omega$ является полуопределенной эрмитовской матрицей	[Л. 2.108, 2.102, 3.107]
	$[S]$	Матрица $[S]$ такая же, как для цепи $RLCM$, но может быть несимметричной	[Л. 3.119, 3.124]
$RLCM-G-OC$ (общая пассивная)	$[z], [y], [S]$	Матрица $[z], [y], [S]$ имеет вещественные рациональные элементы	[Л. 3.127]
RC-ПОС (общая пассивная)	$[y]$	Матрица $[y]$ имеет рациональные элементы	

 G — гиратор; OC — отрицательное сопротивление.

ЛИТЕРАТУРА К ПЕРВОЙ ЧАСТИ

(Звездочками обозначена литература, на которую имеются ссылки в тексте. Литература в каждом разделе приводится в хронологическом порядке.)

[Л. 1]. Общие вопросы

[Л. 1. 1]. Книги по синтезу цепей.

- * 1.101. Storer J. E., *Passive Network Synthesis*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.
- 1.102. Guillemin E. A., *Synthesis of Passive Networks*, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1957.
- 1.103. Balbiani N., *Network Synthesis*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1958.
- 1.104. Cauer W., *Synthesis of Linear Communication Networks*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- * 1.105. Tuttle S., *Network Synthesis*, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1958.
- 1.106. Kuh E. S. and Pederson D. O., *Principles of Circuit Synthesis*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- * 1.107. Van Valkenburg M. E., *Introduction to Modern Network Synthesis*, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1960.
- 1.108. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- 1.109. Kuo F. E., *Network Analysis and Synthesis*, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- 1.110. Hazony D., *Elements of Network Synthesis*, New York, N. Y., Reinhold Publishing Corp., 1963.

[Л. 1. 2.] Другие книги по теории цепей

- 1.201. Bode H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Princeton, N. J., D. Van Nostrand Company, Inc., 1945.
- * 1.202. Valley G. E. and Wallman H., *Vacuum Tube Amplifiers*, vol. 18, *Rad. Lab. Series*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949.
- 1.203. Truxal J. G., *Automatic Feedback Control System Synthesis*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.
- * 1.204. Mason S. J. and Zimmerman H. J., *Electronic Circuits, Signals and Systems*, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1960.

1.205. De Pian L., Linear Active Network Theory, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1962.

* 1.206. Kim W. H. and Chien R. T., Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, New York, N. Y., Columbia University Press, 1962.

1.207. Huelsman L. P., Circuits, Matrices and Linear Vector Spaces, New York, N. Y., McGraw-Hill Company, Inc., 1963.

{Л. 2}. *Аппроксимация*

{Л. 2. 1}. *Общие вопросы*

2.101. Padé H., Sur la Representation Approché d'une Fonction par des Fractions Rationnelles, Ann. de l'Ecole Normale (3), vol. 9, 1892, p. 1—93.

2.102. Cayley A., Elliptic Functions, 2nd ed. London, England, George Bell and Sons, 1895.

2.103. Bernstein S., Leçons sur les Propriétés Extremales et la Meilleure Approximation des Fonctions Analytiques d'une Variable Réelle, Paris, Verlag Gauthier-Villars, 1926.

2.104. Jackson D., The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc. Collog. Pub., vol. 11, 1930.

2.105. Van der Pol B. and Weijers T. J., Chebyshev Polynomials and Their Relation to Circular Functions, Bessel Functions and Lissajous Figures, Physica, vol. 1, December 1933, p. 78—96.

* 2.106. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, Am. Math. Soc. Collog. Pub., vol. 19, 1934, p. 16—17.

2.107. Shohat J., Theorie Generale des Polynomes Orthogonaux de Tchebichev, Mem. des Sci. Math., Paris, № 66, 1934.

2.108. Walsh J. L., On Approximation to an Analytic Function by Rational Functions of Best Approximation, Math. Zeit., vol. 38, 1931—1934, p. 163—176.

2.109. Bayard M., Relations Between the Real and Imaginary Parts of Impedances and Determination of the Function from One of Its Parts, Rev. Gen. Elec., Paris, vol. 37, May 1935, p. 659—664.

2.110. LeCorbeiller P., Methode d'Approximation de Chebyshev et Application aux Filtres de Frequences, Rev. Gen. Elect., Paris, vol. 40, November 1936, p. 651—657.

2.111. Leroy R., Relationship Between Attenuation and Phase of a Linear Transmission System, Annales des Postes, Telegraphes et Telephones, vol. 24, August, 1940, p. 733—740.

2.112. Spenceley G. W. and R. M., Smithsonian Elliptic Function Tables Washington, D C., Smithsonian Institute, 1947.

2.113. Murakami T. and Corrington M., Relation Between Amplitude and Phase in Electrical Networks, RCA Rev., vol. 9, December 1948, p. 602—631.

* 2.114. Milne-Thomson L. M., Jacobian Elliptic Function Tables, New York, N. Y., Dover Publication, Inc., 1950.

2.115. Klein W., Chebyshev Functions, Arch. Elektrotech., Bd 39, 1950, S. 647—657.

2.116. Darlington S., Network Synthesis Using Chebyshev Polynomial Series, BSTJ, vol. 31, July 1952, p. 613—665. Also Proc. Symposium on Modern Network Synthesis, April 1952, p. 128—139.

2.117. Clement P. R., The Chebyshev Approximation Method, Quart. Appl. Math., vol. 2, July 1953, p. 167—183.

2.118. Achieser N. I., Theory of Approximation, New York, N. Y., Frederick Ungar Publishing Co., Inc., 1956 (Translation of German).

2.119. Pokrovskii, On a Class of Polynomials with Extremal Properties, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 19, 1962, p. 199—220.

[Л. 2.2]. Применение вычислительных машин

(см. Trans. IRE, vol. CT-9, September 1961; IRE Conv. Record, vol. 10, part 2, 1962; Marconi Review, vol. 23, 1960)

2.201. Hastings C., Approximation for Digital Computers, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1955.

* 2.202. Aaron R. M., The Use of Least Squares in System Design, Trans. IRE, vol. CT-3, December 1956, p. 224—231.

2.203. Shenitzer A., Chebyshev Approximation of a Continuous Function by a Class of Functions, J. Assoc. Comp. Mach., vol. 4, January 1957, p. 30—35.

2.204. Bashkow T. R. and Desoer C. A., Digital Computers and Network Theory, IRE Wescon Conv. Record, part 2, 1957, p. 133—137.

2.205. Dennis J. B., Mathematical Programming and Electrical Networks, New York, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1959.

2.206. Hartl H., The Application of Electronic Digital Computers in Network Theory, Nachrichten-Technik, vol. 13, № 7, July 1960, p. 313—316.

2.207. Hull D. J., Insertion-Loss Equalization with a Digital Computer, Marconi Rev., vol. 23, 1960, p. 149—152.

2.208. Temes G. C., The Synthesis of General Parameter Insertion Loss Filters Using a Digital Computer, Trans. AIEE, part 1, Comm. and Electronics, vol. 80, May 1961, p. 181—186.

* 2.209. Hellerstein S., Synthesis of All-Pass Delay Equalizers, Trans. IRE, vol. CT-8, September 1961, p. 215—222.

* 2.210. Yamamoto K. K., Fugimoto K. and Watanabe H., Programming the Minimum Inductance Transformation, Trans. IRE, vol. CT-8, September 1961, p. 184—191.

* 2.211. Desoer C. A. and Mitra S. K., Design of Lossy Ladder Filters by Digital Computer, Trans. IRE, vol. CT-8, September 1961, p. 192—201.

2.212. Fall J. V., A Digital Computer Program for the Design of Phase Correctors, Trans. IRE, vol. CT-9, September 1961, p. 223—236.

* 2.213. Semmelman C. L., Experience with a Steepest Descent Computer Program for Designing Delay Networks, IRE Conv. Record, vol. 10, part 2, 1962.

2.214. Temes G. C., Filter Synthesis Using a Digital Computer, IRE Conv. Record., vol. 10, part 2, 1962.

* 2.215. Watanabe H. and others, A New Calculation Method for the Design of Filters by Digital Computer with the Special Con-

sideration of the Accuracy Problem, IEE Conv. Rec., Circuit Theory, 1963.

2.216. Fugisawa T., Optimization of Low-Pass Attenuation Characteristics by a Digital Computer, Proc. Sixth Midwest Symp., Wisconsin, May 1963.

[Л. 2.3]. *Аппроксимация модуля*

(см. также [Л. 2.318])

2.301. Butterworth S., On the Theory of Filter Amplifiers, Experimental Wireless, vol. 7, October 1930, p. 536—541.

2.302. Baum R. F., Design of Broadband I. F. Amplifiers, Jour. Appl. Phys., vol. 17, June 1946, p. 519—529 and September 1946, p. 721—730.

2.303. Baum R. F., A Contribution to the Approximation Problem, Proc. IRE, vol. 36, July 1948, p. 863—869.

2.304. Thomson W. E., Stagger-Tuned Low-Pass Amplifiers, Wireless Eng., vol. 26, November 1949, p. 357—359.

2.305. Fano R. M., A Note on the Solution of Certain Approximation Problems in Network Synthesis, J. Frank. Inst., vol. 249, March 1950, p. 189—205.

2.306. Linke J. M., A Graphical Approach to the Synthesis of General Insertion Attenuation Functions, Proc. IEE, vol. 97, part III, May 1950, p. 179—187.

2.307. Matthaei G. L., A General Method for Synthesis of Filter Transfer Functions As Applied to L—C and R—C Filter Examples, Tech. Rep. № 39, Electronic Res. Lab., Stanford Univ., August 31, 1951.

2.308. Matthaei G. L., Filter Transfer Function Synthesis, Proc. IRE, vol. 41, March 1953, p. 377—382. Also, Paper № 72, IRE National Convention, New York, N. Y., March 1952.

2.309. Trautman D. L., The Application of Conformal Mapping to the Synthesis of Bandpass Networks, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, April 1952, p. 179—192.

2.310. Linvill J. G., The Approximation with Rational Functions of Prescribed Magnitude and Phase Characteristics, Proc. IRE, vol. 40, June 1952, p. 711—721.

2.311. Saraga W., Approximations in Network Design, Wireless Eng., vol. 29, October 1952, p. 280—281.

2.312. Bresler A. D., On the Approximation Problem in Network Synthesis, Proc. IRE, vol. 40, December 1952, p. 1724—1728.

2.313. Matthaei G. L., Filter Transfer Function Synthesis, Proc. IRE, vol. 41, № 3, March 1953, p. 377.

2.314. Ariya F. S., Theory of Maximally Flat and Quasi-Chebyshev Filters, Arch. Elek. Übertragung, vol. 7, September 1953, p. 441, 450.

2.315. Matthaei G. L., Conformal Mappings for Filter Transfer Function Synthesis, Proc. IRE, vol. 41, November 1953, p. 1658—1664.

2.316. Sharpe C. B., A General Chebyshev Rational Function, Proc. IRE, vol. 42, February 1954, p. 454—457.

2.317. Matthaei G. L., Some Techniques for Network Synthesis, Paper № 39.1, IRE National Convention, New York, N. Y., March 1954.

2.318. Winkler S., Approximation Problems of Network Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-2, № 3, September 1954, p. 5—21.

* 2.319. Helman D., Chebyshev Approximations for Amplitude and Delay with Rational Functions, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. V, 1955, p. 385—402.

2.320. Papoulis A., On the Approximation Problem in Filter Design, IRE Conv. Record, vol. 5, part 2, 1957, p. 175—185.

* 2.321. Watanabe H., Synthesis of Band-Pass Ladder Network, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958, p. 256—264.

2.322. Dishal J., Gaussian-Response Filter Design, Electrical Communications, vol. 36, № 1, 1959, p. 3—26.

* 2.323. Watanabe H., Approximation Theory for Filter Networks, Trans. IRE, vol. CT-9, № 3, September 1961, p. 341—356.

2.324. Ku Y. H. and Drubin M., Network Synthesis Using Legendre and Hermite Polynomials, J. Franklin Inst., vol. 273, February 1962, p. 138—157.

[Л. 2.4]. *Аппроксимация фазы и запаздывания*
(см. также раздел [Л. 2.2])

2.401. Thomson W. E., Delay Networks Having Maximally Flat Frequency Characteristics, Proc. IEE, London, vol. 96, November 1949, p. 487—490.

2.402. Darlington S., Realization of a Constant Phase Difference, BSTJ, vol. 29, January 1950, p. 94—104.

2.403. Baumann E., Impedances with Prescribed Variation of Phase Angle, Z. Angew. Phys., vol. 1, January 15, 1950, p. 43—52.

2.404. Orchard H. J., Synthesis of Wideband Two-Phase Networks, Wireless Eng., vol. 27, March 1950, p. 72—81.

2.405. Brain A. E., The Compensation for Phase Errors in Wide-Band Video Amplifiers, Proc. IEE, part III, vol. 97, July 1950, p. 243—251.

2.406. Saraga W., The Design of Wide-Band Phase Splitting Networks, Proc. IRE, vol. 38, July 1950, p. 754—770.

2.407. Weaver D. K., Constant-Phase-Difference Networks and Their Application to Filters, Tech. Rep. N 11, Electronic Res. Lab. Stanford Univ., October 28, 1950.

2.408. Matthaei G. L., Maximally-Flat Phase-Difference Network Design, Tech. Rep. № 2, Electronic Res. Lab., Stanford Univ., October 31, 1950.

2.409. Saraga W., Wide-Band Two-Phase Networks, Wireless Eng., vol. 28, January 1951, p. 30—31.

2.410. Orchard H. J., Wide-Band Two-Phase Networks, Wireless Eng., vol. 28, January 1951, p. 30.

2.411. Thomson W. E., Networks with Maximally Flat Delay, Wireless Eng., vol. 29, October 1952, p. 256—263, Correction, vol. 29, November, 1952, p. 309.

* 2.412. Bennett B. J., Synthesis of Electric Filters with Arbitrary Phase Characteristics, IRE Conv. Record, part 5, Circuit Theory, March 1953, p. 19—26.

2.413. Covington M. S. and Sonnenfelot R. W., Synthesis
12—2349

sis of Constant Time-Delay Networks, Proc. NEC, vol. 9, September 1953, p. 50—63.

2.414. Golay M., The Direct Method of Filter and Delay Line Synthesis, Proc. IRE, vol. 42, March 1954, p. 585—588.

* 2.415. Weaver D. K., Design of RC Wide-Band 90 Degree Phase Difference Network, Proc. IRE, vol. 42, April 1954, p. 671—676.

2.416. Storch L., Synthesis of Constant-Time Delay Ladder Networks Using Bessel Polynomials, Proc. IRE, vol. 42, November 1954, p. 1666—1675.

2.417. Kuh E. S., Synthesis of Lumped Parameter Precision Delay Lines, IRE Conv. Record, part 2, 1957, p. 160—174.

2.418. Papoulis A., The Approximation Problem in Lumped Delay Lines, IRE Conv. Record, part 2, 1958, p. 102—108.

* 2.419. Kulmann C. A., An Iterative Approximation to Flat Delay in an Equi-Ripple Manner, ERL Report 89, Univ. of California (Berkeley), June 1959.

2.420. Szentirma G., The Problem of Phase Equalization, Trans. IRE, vol. CT-6, September 1959, p. 272—277.

2.421. O'Meara T. R., Delay Distortion Correction for Networks and Filters, IRE Wescon Conv. Record, part 2, 1960, p. 123—134.

2.422. Golay M., Polynomials of Transfer Functions with Poles Satisfying Conditions Only at the Origin, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 224—229.

* 2.423. Piloty H. and Ulbrich V., Über den Entwurf von Allpassen, Tiefpassen und Bandpassen mit nach im Tschebyscheffseiner approximierten konstanten Gruppenlaufzeit, Arch. Elek. Übertragung, Bd 14, Oktober 1960, S. 452—467.

2.424. O'Meara T. R., Linear-Slope Delay Filters for Compression, Proc. IRE, vol. 48, November 1960, p. 1916—1918.

2.425. Uhl K., A Filter System with Favorable Impulse Properties, Archiv der Elek. Übertragung, vol. 15, № 3, March 1961, p. 109—114.

2.426. Beletskiy A. F., Synthesis of Filters with Linear Phase Characteristics, Telecommunications, № 4, April 1961, p. 39—48.

2.427. Abele T. A., Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher Approximation Konstanter Gruppenlaufzeit, Arch. Elek. Übertragung, Januar 1962, S. 9—17.

* 2.428. Kirzrok R. M., A Technique for Equalizing Parabolic Group Delay, Proc. IRE, vol. 50, № 8, August 1962, p. 1840.

* 2.429. Geffe P. R., On the Approximation Problem for Band-Pass Delay Lines, Proc. IRE, vol. 50, № 9, September 1962, p. 1986—1987.

* 2.430. Humphreys D. S., Rational Function Approximation of Polynomials with Equi-Ripple Error, Report № R-159, Coordinated Science Lab., University of Ill., February 1963.

2.431. Macnee A. B., Cchebyshev Approximation of a Constant Group Delay, 6th Midwest Symposium on Circuit Theory, Wisconsin, May 1963.

[Л. 2.5]. Реализация цепных схем

(см. также [Л. 2.2])

2.501. Меерович Л. А., Синтез цепей по заданным переходным характеристикам, «Радиотехника», № 3, 1948, стр. 36—42.

2.502. Nadler M., The Synthesis of Electric Networks According to Prescribed Transient Conditions, Proc. IRE, vol. 37, June 1949, p. 627—630.

2.503. Kautz W. H., Application of the Integral Approximation Method of Transient Evaluation, Paper № 30, IRE National Convention, New York, N. Y., March 7, 1950.

2.504. Nadler M., A Note on the Synthesis of Electric Networks According to Prescribed Transient Response, Proc. IRE, vol. 38, April, 1950, p. 441.

2.505. Kautz W. H., Network Synthesis for Specified Transient Response, Tech. Rep. № 209, Res. Lab. for Elec., MIT, April 23, 1952, Also Paper № 134, IRE National Conv., New York, N. Y., March 1952.

2.506. Levy M., On the Redundant Information Supplied in Practical Applications in the Time and Frequency Phase Responses of a System, J. Appl. Phys., vol. 23, July 1952, p. 901—902.

2.507. Linvill W. K., Use of Sampled Functions for Time Domain Synthesis, Proc. NEC, vol. 9, 1953, p. 533—542.

2.508. Thomson W. E., The Synthesis of a Network to Have a Sine-Squared Impulse Response, Proc. IEE, vol. 99, part III, November 1952, p. 373—376, Discussion, vol. 100, 1953, p. 110.

2.509. Teasdale R. D., Time Domain Approximation by Use of Padé Approximants, Convention Record IRE, part 5, Circuit Theory, March 1953, p. 89—94.

2.510. Wait J. R., An Approximate Method of Obtaining the Transient Response from the Frequency Response, Can. J. Tech., vol. 31, June 1953, p. 127—131.

2.511. Guillemin E. A., Computational Techniques Which Simplify the Correlations Between Steady-State and Transient Response of Filters and Other Networks, Proc. NEC, vol. 9, 1953, p. 513—523.

2.512. Fetzner V., On the Relation Between Time and Frequency Functions with Practical Examples of the Calculation of Transient Response of Linear Transmission Systems, Arch. Elek. Übertragung, vol. 8, April 1954, p. 163—177.

2.513. Zemanian A. H., Bounds Existing on the Time and Frequency Responses of Various Types of Networks, Proc. IRE, vol. 42, May 1954, p. 835—839.

2.514. Covington M. S., Single Parameter Method for Relating Transient and Steady-State Response, RCA Review, vol. 15, September 1954, p. 389—444.

2.515. Bahli F., A General Method of Time Domain Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-1, September 1954.

2.516. Strieby M., A Fourier Method for Time Domain Synthesis, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. V, 1955.

2.517. Zemanian A. H., Further Effects of the Pole and Zero Location on the Step Responses of Fixed, Linear Systems, Trans. AIEE, Communications and Electronics, March 1955, p. 32—35.

2.518. Lang G. R., Time Domain Filter Operations, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. V, 1955, p. 267—282.

2.519. Rosenbrock H. H., An Approximate Method for Obtain-

ning Transient Response from Frequency Response, Proc. IRE, vol. 1102, November 1955, p. 744—752.

2.520. Dawson C. H., Approximation of Transient Response from Frequency Response Data, Trans. AIEE, Applications and Industry, Part 2, vol. 272, Nov. 1955, p. 289—291.

2.521. Armstrong H. L., On Finding an Orthonormal Basis for Representing Transients, Trans. IRE, vol. CT-4, September 1957, p. 286.

2.522. Brode J. D., Improving the Approximation to a Prescribed Time Response, Trans. IRE, vol. CT-6, December 1957, p. 353—361.

2.523. Henderson K. W. and Kautz W. H., Transient Response of Conventional Filters, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958.

2.524. Graham J. D., An Approximation of Transient Response from Frequency Response Data, Proc. IRE, April 1959, p. 591.

2.525. Levadi V. S., Simplified Method of Determining Transient Response from Frequency Response of Linear Networks and Systems, IRE Conv. Rec., part 4, 1959, p. 57.

2.526. Tang D. T., Chebyshev Approximation of a Prescribed Impulse Response with RC Network Realization, IRE Conv. Rev., part 4, 1961, p. 214—220.

2.527. Yengst W. C., Approximation to a Specified Time Response, Trans. IRE, vol. CT-9, № 2, June 1962, p. 152—162.

2.528. Liu B., A Time Domain Approximation Method and Its Application to Lumped Delay Lines, Trans. IRE, vol. CT-8, September 1962.

[Л. 2.6]. Потенциальная аналогия

2.601. Kenyon R. W., Network Design Using Electrolytic Tanks, Elec. Ind., vol. 5, March 1946, p. 58—60.

2.602. Huggins W. H., A Note on Frequency Transformation for Use with the Electrolytic Tank, Proc. IRE, vol. 36, March 1948, p. 421—424.

2.603. Makar R., Boothroyd A. R. and Cherry E. C., An Electrolytic Tank for Exploring Potential Field Distributions, Nature, vol. 161, May 29, 1948, p. 845—846.

2.604. Block A., Solution of Algebraic Equations by Means of an Electrolytic Tank, Paper № IV—28, VII International Congress App. Mech., London, 1948.

2.605. Boothroyd A. R., Cherry E. C. and Makar R., An Electrolytic Tank for the Measurement of Steady State Response, Transient Response and Allied Properties of Networks, Journal IEE, part 1, vol. 96, May 1949, p. 163—177.

2.606. Huggins W. H., The Potential Analogue in Network Synthesis and Analysis, Rep. 5066, Air Force Res. Labs., Cambridge, Mass., March 1951.

2.607. Darlington S., The Potential Analogue of Network Synthesis, BSTJ, vol. 30, April 1951, p. 315—365.

2.608. Boothroyd A. R., Design of Electric Wave Filters with the Aid of the Electrolytic Tank, Proc. IEE, part IV, vol. 98, October 1951, p. 65—93. Summary, part III, vol. 98, November 1951, p. 486—492.

2.609. Cherry E. C., Application of the Electrolytic Tank Techniques to Network Synthesis, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. III, April 1952, p. 140—159.

2.610. Scott R. E., Network Synthesis by the Use of Potential Analogs, Proc. IRE, vol. 40, № 8, August 1952.

2.611. Kuh E. S., Potential Analog-Network Synthesis for Arbitrary Loss Functions, Journal App. Phys., vol. 24, July 1953, p. 897—902.

[Л. 2.7]. *Родственные вопросы, связанные с цепными реализациями*

2.701. Darlington S., Synthesis of Reactance Four-Poles, Journ. Math. and Physics, vol. 18, 1939, p. 274—353.

2.702. Colombe P., Rational Calculation of Ladder-Type Filters, Bull. Soc. Franc. Elect., vol. 6, March 1946, p. 103—110.

2.703. Dishal M., Design of Dissipative Band-Pass Filters Producing Desired Exact Amplitude Frequency Characteristics, Proc. IRE, vol. 37, September 1949, p. 1050—1069.

2.704. Belevitch V., Chebyshev Filters and Amplifier Networks, Wireless Eng., vol. 29, April 1952, p. 106—110.

2.705. Fetzer V., Numerical Calculation of Filter Circuits with Chebyshev Characteristics after the Method of W. Cauer, Arch. Elek. Übertragung, vol. 6, October 1952, p. 419—431.

2.706. Orchard H. J., Formulae for Ladder Filters, Wireless Engng, vol. 30, January 1953, p. 3—5.

2.707. Fetzer V., Practical Calculation of Jacobi 'sn' Elliptic Function with Special Reference to the Determination of the Cauer Parameter for Filters with Operative Attenuation Characteristics, Arch. Elek. Übertragung, vol. 7, August 1953, p. 393—401.

2.708. Green E., Synthesis of Ladder Networks to Give Butterworth or Chebyshev Response in the Pass Band, IEE Monograph 88, January 1954.

* 2.709. Fugisawa T., Realizability Theorem for Mid-Series or Mid-Shunt Low-Pass Ladders Without Mutual Induction, Trans. IRE, vol. CT-2, № 4, December 1955, p. 320—325.

2.710. Peless Y. and Murakami T., Analysis and Synthesis of Transitional Butterworth-Thomson Filters and Bandpass Amplifiers, RCA Review, vol. 18, № 1, 1957, p. 60—94.

2.711. Grossman A., Synthesis of Chebyshev Parameter Symmetrical Filters, Proc. IRE, vol. 45, № 4, April 1957, p. 454.

2.712. Baum R. F., Design of Unsymmetrical Bandpass Filters, Trans. IRE, vol. CT-4, June 1957, p. 33—40.

* 2.713. Desoer C. A., Network Design by First Order Predistortion Technique, Trans. IRE, vol. CT-4, September 1957, p. 167—170.

* 2.714. Weinberg L., Exact Ladder Network Design Using Low Q Coils, Proc. IRE, April 1958, p. 739.

2.715. Orchard H. J., Computation of Elliptic Functions of Rational Fractions of a Quarterperiod, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958, p. 352—353.

2.716. Skivirzynski J. K. and Zdunck, Note on Calculation of Ladder Coefficients for Symmetrical and Inverse Impedance Filters on a Digital Computer, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958, p. 328, 333.

* 2.717. Saal R. and Ulbrich E., On the Design of Filters by Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958, p. 284—327.

2.718. Meinguet J. and Belevitch V., On the Realizability of Ladder Filters, Trans. IRE, vol. CT-5, № 4, December 1958, p. 253—255.

2.719. Henderson R. W. and Kantz W. H., Transient Responses of Conventional Filters, Trans. IRE, vol. CT-5, № 4, December 1958, p. 333—347.

* 2.720. Gaffe P. R., A Note on Predistortion, Trans. IRE, vol. CT-6, December 1959, p. 395.

2.721. Pawsey D. C., Element Coefficients for Symmetrical Two-Section Filters Having Tchebycheff Response in Both Pass and Stop Bands, Trans. IRE, vol. CT-7, № 1, March 1960, p. 19—31.

* 2.722. Orchard H. J., Predistortion of Singly-Loaded Reactance Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, № 2, June 1960, p. 181—182.

2.723. Weinberg L. and Stepan P., Takahasi's Results on Tchebycheff and Butterworth Ladder Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, № 2, June 1960, p. 88—101.

* 2.724. Saal V. R., Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Katalogs normierter Tiefpasse, 1961.

2.725. Bedrosian S. D., Elliptic Functions in Network Synthesis, J. Franklin Inst., vol. 271, № 1, January 1961, p. 12—30.

2.726. Levman G. I. and Vostryakov O. I., Synthesis of Polynomial Bandpass Filters with Chebyshev Selectivity Characteristic, Telecommunications, № 2, February 1961, p. 66—80.

* 2.727. Bosse G., The Calculation of the Numerical Values of Elliptic Functions for Chebyshev Filters, Frequency, vol. 15, № 8, August 1961, p. 249—253.

* 2.728. Tollefsrud V. C., A New Computational Method for Predistortion, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 92—93.

2.729. Szentirma G., On the Realizability of Ladder Filters, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 91—92.

* 2.730. Gaffe P. R. and Orchard H. J., A Further Note on Predistortion, Trans. IRE, vol. CT-9, № 3, September 1962, p. 291—292.

* 2.731. Temes G. C., First-Order Estimation and Precorrection of Parasitic Loss Effects in Ladder Filters, Trans. IRE, vol. CT-9, № 4, December 1962, p. 385—399.

* 2.732. Gaffe P. R., Simplified Modern Filter Design, New York, N. Y., John F. Rider Publisher, Inc., 1963.

ЛИТЕРАТУРА КЪ ВТОРОЙ ЧАСТИ

[Л. 1]. *Общие вопросы*

- 1.101. Bode H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Princeton, N. J., D. Van Nostrand Company, Inc., 1945.
- 1.102. Truxal J. G., Automatic Feedback Control System Synthesis, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.
- 1.103. Weinberg L., Network Analysis and Synthesis, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- 1.104. De Pian L., Linear Active Network Theory, Englewood Cliffs N. J., Prentice-Hall, Inc., 1962.
- 1.105. Hazony D., Elements of Network Synthesis, New York, N. Y., Reinhold Publishing Corp., 1963.
- 1.106. Huelsman L. P., Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

[Л. 2]. *Многополюсники RLCM*

- 2.101. Oono Y., Synthesis of a Finite $2n$ -Terminal Network as the Extension of Brune's Theory of Two-Terminal Network Synthesis, J. of Inst. Elec. Comm. Engrs of Japan, vol. 31, August 1948, p. 163—181 (In Japanese).
- * 2.102. Bayard M., Synthesis of N -Port Passive Networks from Prescribed Impedance and Admittance Matrices, Bul. Soc. Franc. El., vol. 9, September 1949, p. 497—502.
- 2.103. Oono Y., Synthesis of a Finite $2n$ -Terminal Network by a Group of Network Each of Which Contains Only One Ohmic Resistance, J. of Math. and Phys., vol. 29, April 1950, p. 13—26.
- * 2.104. Belevitch V., Synthesis of Passive Electric Networks with N -Terminal Pairs from a Prescribed Scattering Matrix, Annales de Telecommunication, vol. 6, August 1951, p. 302—312 (in French).
- 2.105. Bayard M., Synthesis of N -Terminal Pair Networks, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. 11, 1952.
- * 2.106. McMillan B., Introduction to Formal Realizability Theory, BSTJ, vol. 31, 1952, p. 217—299, 541—600.
- 2.107. Tellegen B. D. H., Synthesis of $2n$ -Poles by Networks Containing the Minimum Number of Elements, J. of Math. and Phys., vol. 32, 1953, p. 1—18.
- * 2.108. Oono Y. and Yasurra, Synthesis of Finite Passive $2n$ -Terminal Networks with Prescribed Scattering Matrices, Annales de Telecommunication, vol. 9, March, April, May 1954 (In French).
- * 2.109. Oono Y., Applications of Scattering Matrices to the Synthesis of N -Ports, Trans. IRE, vol. CT-3, July 1956, p. 111—121.

* 2.110. Slepian P. and Weinberg L., Synthesis Applications of Dominant and Paramount Matrices, Proc. NEC, vol. 14, 1958, p. 1—20.

* 2.111. Belevitch V., On the Brune Process for N-Ports, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 280—296.

2.112. Fialkow A., D. Hazony and others, Transfer Function Realizability of Multiport RLC Transformerless Grounded Networks, Proc. Sixth Mid-west Symposium on Circuit Theory, Wisconsin, May 1963.

[Л. 3]. Активные цепи

[Л. 3.1]. Общие вопросы (реализуемость и родственные вопросы)

3.101. Gewertz C. M., Synthesis of Finite, Four-Terminal Network from Its Prescribed Driving-Point Functions and Transfer Function, J. Math. Phys., vol. 112, January 1933, p. 1—257.

3.102. McMillan E. M., Violation of the Reciprocity Theorem in Linear Electromechanical Systems, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 18, October 1946, p. 344—347.

3.103. Tellegen B. D. H., The Synthesis of Passive, Resistanceless Four-Poles that May Violate the Reciprocity Relation, Philips Res. Rep., vol. 3, October 1946, p. 321—337.

* 3.104. Lewellyn F. B., Some Fundamental Properties of Transmission Systems, Proc. IRE, vol. 40, March 1952, p. 271—283.

3.105. Shkel J., Reciprocity Relations in Active 3-Terminal Elements, Proc. IRE, vol. 42, August 1954, p. 1268—1271.

* 3.106. Raisbeck G., A Definition of Passive Linear Networks in Terms of Time and Energy, J. Appl. Phys., vol. 25, December 1954, p. 1510—1514.

* 3.107. Carlin H. J., Synthesis of Non-Reciprocal Networks, Modern Network Synthesis, MRI Symposium Series, vol. V, 1955, p. 11—44.

3.108. Carlin H. J., On the Physical Realizability of Linear Non-Reciprocal Networks, Proc. IRE, vol. 43, № 5, May 1955, p. 608—616.

3.109. Piesch J., Analytic Representation of Active Four-Poles, Archiv Elek. Übertragung, Bd 10, October 1956, p. 429—437.

* 3.110. Bolinder E. F., Survey of Some Properties of Linear Networks, Trans. IRE, vol. CT-4, № 3, September 1957, p. 70—77.

3.111. Zadeh L. A., Multipole Analysis of Active Networks, Trans. IRE, vol. CT-4, № 3, September 1957, p. 97—105.

3.112. Thornton R. D., Active RC Networks, Trans. IRE, vol. CT-4, September 1957, p. 78—79.

3.113. Page D. F. and Boothroyd A. R., Instability in Two-Port Active Networks, Trans. IRE, vol. CT-2, № 2, June 1958, p. 133—139.

3.114. Kawakami M., Some Fundamental Considerations on Active 4-Terminal Linear Networks, Trans., IRE, vol. CT-5, June 1958, p. 115—121.

* 3.115. Youla D. L., Castriota L., and H. Carlin, Bounded Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory, Trans. IRE, vol. CT-6, March 1959, p. 102—124.

3.116. Spilker J. J., Theoretical Limitations on the Gain Bandwidth Product of Three-Terminal Networks, Trans. IRE, vol. CT-6, № 2, June 1959, p. 224—228.

3.117. Sharpe G. E., Smith J. L. and Smith J. R., A Power Theorem on Absolutely Stable Two-Ports, Trans. IRE, vol. CT-6, № 2, June 1959, p. 159—163.

3.118. Klausman E., The Transfer of Active Power Through a Linear Quadripole, Archiv Elek. Übertragung, vol. 13, October 1959, p. 935—942.

* 3.119. Carlin H. J. and Youla D. C., Network Synthesis with Negative Resistors, Active Networks and Feedback Systems, MRI Symposium Series, vol. X, 1960, p. 27.

3.120. Kuh E. S., Regenerative Modes in Active Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, March 1960, p. 62—63.

* 3.121. Desoer C. A. and Kuh E. S., Bounds on the Natural Frequencies of Linear Active Networks, Active Networks and Feedback Systems, MRI Symposium Series, vol. X, 1960.

* 3.122. Kinarawala B. K., Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of $\pm R$, C Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 330—335.

3.123. Bello P., Extension of Brune's Energy Function Approach to the Study of LNF Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 270—280.

* 3.124. Carlin H. J. and Youla D. C., Network Synthesis with Negative Resistors, Proc. IRE, vol. 49, № 5, May 1961, p. 907—920.

3.125. Calahan D. A., Restrictions on the Natural Frequencies of an RC-RL Network, J. Franklin Inst., vol. 272, № 2, August 1961, p. 112—123.

* 3.126. De Pian L., Passivity Conditions for Three-Terminal Networks, Trans. IRE, vol. CT-8, September 1961, p. 360—361.

* 3.127. Kinarawala D. K., The Esaki Diode as a Network Element, Trans. IRE, vol. CT-8, № 4, December 1961, p. 389—398.

3.128. Sipress J. M., Necessary and Sufficient Conditions for $+R$, $+L$, $+C$, $-C$ Networks, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 95—97.

* 3.129. Newcomb R. W., On Causality, Passivity and Single-Valuedness, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 87—89.

3.130. Sandberg I. W., The Realizability of Multiport Structures Obtained by Imbedding Tunnel Diodes in a Lossless Reciprocal Network, BSTJ, vol. 41, № 3, May 1962, p. 857—877.

* 3.131. Brodie J. H., Passivity Conditions for Three-Terminal Networks, Trans. IRE, vol. CT-9, September 1962.

3.132. Sandberg I. W., Tunnel Diodes as a Linear Network Element, BSTJ, vol. 41, № 5, September 1962, p. 1537—1556.

3.133. Sandberg I. W., Equivalent Structures for One-Node-Group Pair Networks Containing Two Types of n -Port Subnetworks, Trans. IRE, vol. CT-9, № 3, September 1962, p. 224—230.

* 3.134. Mitra S. K., The Realizability of Tunnel-Diode-RC Networks, J. Franklin Inst., vol. 275, № 3, March 1963, p. 205—216.

[Л. 3]. Активные цепи

3.201. Herald E. W., Negative Resistance and Devices for Obtaining It, Proc. IRE, vol. 23, October 1935, p. 1201—1223.

- 3.202. Tellegen B., The Gyrator, a New Electric Network Element, Philips Res. Repts., vol. 3, April 1948, p. 81—101.
- 3.203. Merrill J. L., Theory of the Negative Impedance Converter, BSTJ, vol. 30, January 1951, p. 88—109.
- 3.204. Hogan C., The Microwave Gyrator, BSTJ, vol. 31, 1952, p. 1—31.
- 3.205. Linvill J. G., Transistor Negative-Impedance Converters, Proc. IRE, vol. 41, June 1953, p. 725—729.
- 3.206. Shekel J., The Gyrator as a 3-Terminal Element, Proc. IRE, vol. 41, August 1953, p. 1014—1016.
- 3.207. Bangert J. T., The Transistor as a Network Element, BSTJ, vol. 33, March 1954, p. 329—352.
- 3.208. Bogert B. P., Some Gyrator and Impedance Inverting Circuits, Proc. IRE, vol. 45, July 1955, p. 793—796.
- 3.209. Sharpe G. E., Ideal Active Elements, J. Inst. Elect. Engrs, vol. 3; Jan. 1957, p. 33; July 1957, p. 430.
- 3.210. Larky A., Negative Impedance Converters, Trans. IRE, vol. CT-4, Sept. 1957, p. 124—131.
- 3.211. Lundy W. R., Negative Impedance Circuits—Some Basic Relations and Limitations, Trans. IRE, vol. CT-4, Sept. 1957, p. 132—140.
- 3.212. Sharpe B. E., The Pentode Gyrator, Trans. IRE, vol. CT-4, № 4, December 1957, p. 321—323.
- 3.213. Nair K. K. and Swamy M. N. S., On Gyrator Networks, J. Inst. Telecomm. Engrs (India), vol. 7, May 1961, p. 111—116.
- 3.214. Tsirel'son D. A., Ideal Active Elements for Electric Circuits, Telecommunications, № 8, August 1961, p. 49—61.
- 3.215. Horowitz I. M., Negative Impedance Converters, Trans. IRE, vol. CT-9, № 1, March 1962, p. 33—38.

[Л. 3.3]. *Синтез активных цепей*

- 3.301. Linvill J. G., A New RC Filter Employing Active Elements, Proc. NEC, vol. 9, 1953, p. 342.
- 3.302. Bradley W. E., Design of a Simple Band-Pass Amplifier with Approximate Ideal Frequency Characteristics, Trans. IRE, PGCT-2, December 1953, p. 30—38.
- 3.303. Linvill J. G., RC Active Filters, Proc. IRE, vol. 42, March 1954, p. 555—564.
- 3.304. Armstrong D. B. and Reza F. M., Synthesis of Transfer Functions by Active Networks, Trans. IRE, vol. CT-1, № 2, June 1954, p. 8—17.
- 3.305. Burrett J. R., A Synthesis Procedure for Linear Transistor Circuits, IRE Conv. Record, Part 2, 1954, p. 125—129.
- 3.306. Linvill J. G., The Synthesis of Active Filters, Modern Network Symposium, MRI Symposium Series, vol. V, 1955, p. 453—476.
- * 3.307. Sallen R. P. and Key E. L., A Practical Method of Designing RC Active Filters, Trans. IRE, vol. CT-2, March 1955, p. 74.
- 3.308. Horowitz I. M., RC-Transistor Network Synthesis, Proc. NEC, vol. 12, 1956, p. 818—829.
- 3.309. Horowitz I. M., Active Network Synthesis, IRE Conv. Record, Circuit Theory, Part 2, March 1956, p. 38—45.

3.310. Linvill J. G., Synthesis Techniques and Active Networks, IRE V. Conv. Record, Part 2, 1957, p. 90—95.

* 3.311. Yanagisawa T., RC Active Networks Using INIC, Trans. IRE, vol. CT-4, September 1957, p. 140—144.

3.312. Kuo F. F., Transfer Function Synthesis with Active Elements, Proc. NEC, October 1957, p. 1049—1056.

3.313. Bongioino J. J., Synthesis of Active RC Single-Tuned Bandpass Filters, IRE Conv. Record, Part 2, 1958, p. 30—41.

3.314. DeClaris N., Transformation of Active Networks, Proc. NEC, October 1959, p. 707—717.

3.315. DeClaris N., Synthesis of Active Networks-Driving Point Immittance Functions, IRE Conv. Record, vol. 7, part 2, 1959, p. 23—39.

3.316. Cruz J. B., A Synthesis Procedure Based on Linvill's RC Active Structure, Trans. IRE, vol. CT-6, № 1, March 1959, p. 524.

* 3.317. Myers B. R., Transistor RC Network Synthesis, Wescon Conv. Record, Part 2, 1959, p. 65—74.

3.318. Kinarawala B. K., Synthesis of Active RC Networks, BSTJ, vol. 38, September 1959, p. 1269.

3.319. Kawakami M., Yanagisawa and H. Shibayama, Highly Selective Bandpass Filters Using Negative Resistors, Active Networks and Feedback Systems, MRI Symposium Series, vol. X, 1960, p. 369.

3.320. Thomas R. E., The Use of the Active Lattice to Optimize Transfer Function Sensitivities, Active Network and Feedback Systems, MRI Symposium Series, vol. X, 1960, p. 179.

* 3.321. Sipress J., Synthesis of Active RC Networks, D. E. E. Thesis, Poly, Inst. of Brooklyn, June 1960.

3.322. Sandberg I. W., Synthesis of Driving Point Impedances with Active RC Networks, BSTJ, July 1960.

3.323. Kuh E. S., Transfer Function Synthesis of Active RC Networks, Trans. IRE, vol. CT-7, August 1960, p. 3—8.

3.324. Franks L. E. and Sandberg I. W., An Alternative Approach to the Realization of Network Transfer Functions, BSTJ, vol. 39, September 1960, p. 1321—1350.

3.325. Horowitz L. M., Exact Design of RC-Transistor Bandpass Filters with Prescribed Active Parameter Sensitivity, Trans. IRE, vol. CT-7, № 3, September 1960, p. 313.

3.326. Chien R. T., On the Synthesis of Active Networks with One NIC, Proc. NEC, vol. 16, 1960, p. 405—412.

* 3.327. Sandberg I. W., Synthesis of N-Port Active RC Networks, BSTJ, vol. XI, January 1961, p. 329—346.

3.328. Weinberg L., Synthesis Using Tunnel Diodes and Meters, Trans. IRE, vol. CT-8, № 1, March 1961, p. 66—75.

* 3.329. Horowitz L. M., Optimum Design of Single-Stage Gyrator-RC Filters with Prescribed Sensitivities, Trans. IRE, CT-8, June 1961, p. 88—94.

3.330. Thomas R. E., Polynomial Decomposition in Active Network Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-8, № 3, September 1961, p. 270—274.

3.331. Sipress J. M., Synthesis of Active RC Networks, Trans. IRE, vol. CT-8, № 3, September 1961, p. 260—270.

3.332. Huelsman L. P., Use of Two NIC's to Synthesize RC Transfer Functions, Trans. IRE, vol. CT-7, № 3, September 1961, p. 357.

3.333. Mahmoud A. A., Variable Pass-Band RC Filter with a Single Control, Electronic Technical, vol. 39, № 4, April 1962, p. 155—160.

3.334. Somerville M. J. and G. H. Tomlinson, Filter Synthesis Using Active RC Networks, J. Electronics and Control (GB), vol. 12, № 5, May 1962, p. 401—420.

3.335. McVey P. J. W., An Active RC Filter Using Cathode Followers, Electronic Engineering, vol. 34, July 1962, p. 458—463.

3.336. Mitra S. K., A Unique Synthesis Method of Transformerless Active RC Networks, J. Franklin Inst., vol. 274, № 2, August 1962, p. 115—129.

3.337. Mitra S. K., A New Approach to Active RC Network Synthesis, J. Franklin Inst., vol. 274, № 3, September 1962, p. 185—197.

3.338. Sheno B. A., A General Synthesis of Tunnel Diode Networks and Sensitivity Minimization, Proc. NEC, vol. 18, November 1962, p. 114—126.

3.339. Su K., Cascade Synthesis of RC Networks Using Negative Resistances, Trans. IRE, vol. CT-9, December 1962, p. 423—424.

3.340. Mitra S. K., Notes on Sandberg's Method of Active RC One-Port Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-9, December 1962, p. 422.

3.341. Jagoda N. H., An Active Realization of the Elliptic Function Approximation, Trans. IRE, vol. CT-9, № 4, December 1962, p. 423.

[Л. 4]. Чувствительность

[Л. 4. 1]. Классическое понятие чувствительности в нуле и в полюсе

4.101. Papoulis A., Displacement of the Zeros of the Impedance $Z(p)$ Due to Incremental Variations in the Network Elements, Proc. IRE, vol. 43, Jan. 1955, p. 79—82.

* 4.102. Truxal J. G. and Horowitz I. M., Sensitivity Consideration in Active Network Synthesis, Proc. Second Midwest Symp. on Circuit Theory, Michigan State Univ., December 1956.

* 4.103. Blecher F. H., Design Principles for Single-Loop Transistor Feedback Amplifiers, Trans. IRE, vol. CT-4, September 1957, p. 145—156.

4.104. Huang R. Y., The Sensitivity of the Poles of Linear Closed Loop Systems, Trans. AIEE, Applications and Industry, Sept. 1958, p. 182—187.

4.105. Kuo F. F., Pole-Zero Sensitivity in Network Function, Trans. IRE, vol. CT-5, December 1958, p. 372—373.

4.106. Kuo F. F., Sensitivity of Transmission Zeros in RC Network Synthesis, IRE Conv. Record, vol. 7, Part 2, 1959, p. 18.

* 4.107. Kuo F. F., A Sensitivity Theorem, Trans. IRE, vol. CT-6, № 1, March 1959, p. 131.

4.108. Horowitz I. M., Optimization of Negative Impedance Conversion Methods of Active RC Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-6, September, 1959, p. 296—303.

4.109. Ur H., Root Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems, Trans. IRE, vol. AC-5, January, 1960, p. 57.

4.110. Blecker F. H., Application of Synthesis Techniques to Electronic Circuit Design, Trans. IRE, vol. CT-7, August 1960, p. 79—91.

* 4.111. Calahan D. A., Notes on the Horowitz Optimization Procedure, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 352—354.

4.112. Huelsman L. P., Active RC Synthesis with Prescribed Sensitivity, Proc. NEC, vol. 16, October 1960, p. 412—426.

4.113. Nagornyy L. Y., Dependence of the Basic Network Parameters on Variation in One of Its Elements, Telecommunications, № 6, June, 1961, p. 43—54.

4.114. Calahan D. A., Sensitivity Minimization in Active-RC Synthesis, Trans. IRE, vol. CT-9, № 1, March 1962, p. 38—42.

4.115. Cartianu G. and Poenaru D., Variation of Transfer Functions with the Modification of Pole Location, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 98—99.

[Л. 4.2]. Статистическая чувствительность

4.201. Merritt P. E., Design of Systems to Tolerate Variable Parameters, SEL Report № 1503-2, Stanford University, Stanford, California, February 1960.

* 4.202. Broome P. W. and Young F. V., The Selection of Circuit Components for Optimum Circuit Reproducibility, Trans. IRE, vol. CT-9, March 1962, p. 18—23.

4.203. Clumoes-Ross C. and Husson S. S., Statistical Techniques in Circuit Optimization, Proc. NEC, vol. 18, 1962, p. 325—334.

* 4.204. Carroll J. M., Reliability, 1962, Electronics, vol. 35, № 48, November 30, 1962, p. 54—76.

[Л. 4.3]. Чувствительность при изменении нескольких параметров

4.301. Hakami S. L. and Cruz J. B., Measures of Sensitivity for Linear Systems with Large Multiple Parameter Variations, IRE Wescon Conv. Record, Circuit Theory, 1960.

4.302. Fu K. S., Sensitivity of a Linear System with Variations of One or Several Parameters, Trans. IRE, vol. CT-7, September 1960, p. 348.

* 4.303. Kuo F. F. and Goldstein A. J., Multiparameter Sensitivity, Trans. IRE, vol. X, June 1961, p. 177.

* 4.304. Schoeffler J. D. and Waren A. D., The Synthesis of Minimum Sensitivity Networks, Report № 6, Engineering Div., Case Inst. of Tech., January 1963.

Временная область чувствительности и родственные вопросы

4.401. Mulligan J. R., The Effect of Pole and Zero Locations on the Transient Response of Linear Dynamic Systems, Proc. IRE, vol. 37, May 1949, p. 516—529.

4.402. Hoffman R. and Walcher W., The Influence of the Coefficients of the Transfer Function of a Transmission System on the Output Characteristics as a Function of Time, Arch. Elek. Übertragung, vol. 11, August 1957, p. 321—324.

[Л. 5]. *Эквивалентные цепи*

5.01. Guillemin E. A., *Passive Network Synthesis*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.

5.02. Cauer W., *Synthesis of Linear Communication Networks*, New York, N. Y., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.

5.101. Cauer W., *Vierpole*, *Elek. Nache. Tech.*, vol. 6, № 7, 1929.

5.102. Howitt N., *Group Theory and the Electric Circuit*, *Phys. Rev.*, vol. 37, № 12, 1931, p. 1583—1595.

5.103. Schoeffler J. D., *Foundations of Equivalent Network Theory*, Report № 2, ONR Contract 11141 (10), December 7, 1961.

5.104. Schoeffler J. D., *Two and Three Element Kind Equivalent Networks*, Report № 3, ONR Contract 11141 (10) (Case Institute of Technology), January 30, 1962.

5.105. Waren A., *Equivalence of Non-Reciprocal Networks*, M. S. Thesis, Case Inst. of Tech., June 1962.

* 5.106. Schoeffler J. D., *Continuously Equivalent Networks and Their Applications*, Report № 5, ONR Contract 1141 (10) (Case Institute of Technology), December 1962.

5.107. Schoeffler J. D., *Foundations of Equivalent Network Theory*, To appear in J. Franklin Inst.

5.108. Guillemin E. A., *Transformation Theory Applied to Linear Active and/or Nonbilateral Networks*, *Trans. IRE*, vol. CT-4, № 3, September 1957.

5.109. Guillemin E. A., *An Approach to the Synthesis of Linear Networks Through the Use of Normal Coordinate Transformations Leading to More Generale Topological Configurations*, *IRE Con. Rec.*, vol. 8, pt 2, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	3
Предисловие	5

Часть первая

АППРОКСИМАЦИЯ

Глава первая. Введение в аппроксимацию . . .	7
1-1. Компоненты функций цепей	7
1-2. Реализуемость идеальных реакций	13
1-3. Аппроксимация посредством функций неминимальной фазы	17
Глава вторая. Равноволновые функции	19
2-1. Эллиптические функции	19
2-2. Приведение круговых и эллиптических функций к рациональным функциям	30
2-3. Равноволновые аппроксимирующие функции	39
Глава третья. Равноволновая аппроксимация функций цепей	50
3-1. Модульная функция	50
3-2. Фазовая функция	56
3-3. Функция запаздывания	59
3-4. Реализация эллиптической амплитудной характеристики	63
Глава четвертая. Частотные преобразования	69
4-1. Преобразование амплитудной характеристики	69
4-2. Преобразование запаздывания	71
Глава пятая. Применение вычислительной машины при аппроксимации	73
5-1. Задача выравнивания	73
5-2. Уточнение при помощи машины	74
5-3. Пример программы	76

Часть вторая

МНОГОПОЛЮСНИКИ, АКТИВНЫЕ ЦЕПИ И РОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Глава шестая. Многополусники	81
6-1. Анализ многополусников	81
6-2. Синтез	85
6-3. Резюме	95

Глава седьмая. Активные цепи	97
7-1. Анализ	97
7-2. Синтез активных цепей	108
7-3. Некоторые нерешенные задачи синтеза активных цепей	120
Глава восьмая. Волновые матрицы	123
8-1. Определение волновой матрицы	123
8-2. Волновые коэффициенты	125
8-3. Волновая матрица	129
Глава девятая. Чувствительность	134
9-1. Чувствительность к изменениям отдельных элементов	136
9-2. Чувствительность при совместном изменении нескольких элементов	144
9-3. Минимизация чувствительности	146
9-4. Чувствительность активных цепей	147
Глава десятая. Непрерывно эквивалентные цепи	156
10-1. Формулировка задачи	157
10-2. Решение уравнения	159
10-3. Выбор элементов матрицы $[a]$	162
10-4. Другие применения теории	166
10-5. Резюме	168
Приложение	170
Литература	173



Цена 82 коп.