ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

Л. В. КАНТОРОВИЧ

О ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Результаты исследований автора по теории полуупорядоченных пространств. Первая часть посвящена теории линейных полуупорядоченных пространств. Такое пространство представляет многообразие, во многом сходное с множеством вещественных чисел. Вторая часть посвящена применениям этой теории в функциональном анализе. В третьей части рассматриваются полуупорядоченные пространства общего вида и устанавливается связь их теории с некоторыми вопросами топологии и теории множеств.

ВВЕДЕНИЕ

Полуупорядоченным (или частично упорядоченным) множеством называется такое множество элементов $Y = \{y\}$, в котором для некоторых пар элементов определено отношение $y_1 < y_2$. Обычно предполагается, что в таком многообразии существует наименьший элемент из следующих за данными двумя $\sup(y_1, y_2)$ и наибольший из предшествующих обоим $\inf(y_1, y_2)$. Такого рода многообразия впервые рассматривались Дедекиндом и С. Шатуновским[2].

Приведем следующий простой пример, указанный еще Дедекиндом. Рассмотрим множество целых положительных чисел $\{n\}$. Будем писать $n_1 > n_2$, если n_1 делится на n_2 без остатка, и $n_1 < n_2$, если n_1 делит n_2 $(n_1 \neq n_2)$. В этом случае $\sup(n_1, n_2)$ есть наименьшее кратное этих чисел, а $\inf(n_1, n_2)$—их общий наибольший делитель.

За последние годы интерес к теории полуупорядоченных многообразий чрезвычайно возрос, и появилось большое число работ, в которых рассматриваются эти многообразия и их применения к вопросам абстрактной алгебры, топологии и аксиоматики геометрии. Достаточно назвать работы K. Menger, G. Birkhoff, А. Маркова, M. Stone, O. Ore, П. С. Александрова, A. Tuecker, F. Klein-Barmen и др.

В течение последнего года мною был получен ряд результатов в этой области, изложению которых и посвящена настоящая статья.

---

[1] Доложено на сессии Группы математики Академии Наук СССР 23 марта 1936 г.

[2] См. литературу в конце статьи.

Основными новыми моментами моих исследований являются следующие:

1) введение понятия предела в полуупорядоченных многообразиях;

2) рассмотрение линейных полуупорядоченных пространств, которые обладают многими свойствами множества вещественных чисел;

3) рассмотрение ряда частных пространств, элементами которых служат функции или последовательности;

4) применение полуупорядоченных пространств в теории линейных операций;

5) применение полуупорядоченных пространств к некоторым вопросам метрической теории функций;

6) изучение полуупорядоченных пространств как объектов топологии и дескриптивной теории функций.

I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Полуупорядоченные пространства. Аксиомы

Пусть $Y=\{y\}$ есть линейное многообразие, т. е. для элементов Y определена сумма y_1+y_2 и произведение элемента на вещественное число λy. Будем называть Y *линейным полуупорядоченным пространством* (S_5), если для некоторых элементов $y \in Y$ определено отношение $y_1>0$, причем выполнены следующие аксиомы I—V:

Аксиома I. Если $y>0$, то исключено, что $y=0$.

Аксиома II. Если $y_1>0$ и $y_2>0$, то $y_1+y_2>0$.

Аксиома III. Каково бы ни было y, существует y_1 такое, что $y_1>0$ и $y_1-y>0$.

Аксиома IV. Если $\lambda>0$ и $y>0$, то $\lambda y>0$.

Мы будем еще писать: $y<0$, если $-y>0$; $y_1>y_2$, если $y_1-y_2>0$; $y\geqslant 0$, если $y>0$ или $y=0$ и т. д.

Все правила действий над неравенствами будут соблюдены, за исключением того, конечно, что может не иметь места ни одно из соотношений:

$$y_1>y_2, \quad y_1<y_2, \quad y_1=y_2.$$

Множество $E\subset Y$ будем называть ограниченным сверху, если существует y_0 (верхняя граница E) такое, что $y\leqslant y_0$ для всех $y \in E$. Введем теперь аксиому V.

Аксиома V. Всякое множество E, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю границу, т. е. существует такой элемент $\sup E$, который есть верхняя граница E и такой, что всякий другой элемент, превосходящий все элементы множества E, превосходит также и $\sup E$.

Отсюда легко вывести, что если E ограничено снизу, то существует точная нижняя граница $\inf E$. Если множество не ограничено сверху (или снизу), то будем писать:

$$\sup E=+\infty \ (\inf E=-\infty).$$

Из аксиомы III следует, что всякое конечное множество ограничено, а потому всегда существует $\sup(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $\inf(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Полезно ввести в рассмотрение еще следующие элементы:

$$(y)_+ = \sup(0, y); \quad (y)_- = (-y)_+ = -\inf(0, y);$$
$$|y| = (y)_+ + (y)_- = \sup(y, -y),$$

здесь $(y)_+$—положительная часть y, $(y)_-$—отрицательная часть y, при этом $y = (y)_+ - (y)_-$; $|y|$—абсолютная величина y; $|y|$ обладает всеми свойствами абсолютной величины, например:

$$|y_1 + y_2| \leqslant |y_1| + |y_2|.$$

Введем теперь понятие о пределе.

Положим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \inf_n [\sup(y_n, y_{n+1}, \ldots)]; \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \sup_n [\inf(y_1, y_2, \ldots)].$$

В случае, если $\overline{\lim}\, y_n = \underline{\lim}\, y_n = y_0$, то будем говорить, что существует предел последовательности $\{y_n\}$, и записывать так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \quad \text{или} \quad y_n \to y_0.$$

Однако при этих аксиомах можно доказать лишь немногие свойства предела, например:

1) если $y_n \to y$, $y'_n \to y'$, то: $(y_n + y'_n) \to y + y'$, $\sup(y_n, y'_n) \to \sup(y, y')$; $|y_n| \to |y|$;

2) если $\lambda_n \to \lambda$, $y_n \to y$, то $\lambda_n y_n \to \lambda y$;

3) если $\lim\limits_{n,\, m\to\infty} |y_n - y_m| = 0$, то существует такое y, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Чтобы установить дальнейшие свойства предела, мы введем еще одну аксиому.

§ 2. Регулярные пространства

Пространство Y будем называть *регулярным* (S_0), если в нем выполнена еще следующая аксиома:

Аксиома VI. Пусть E_n—последовательность таких множеств, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} [\sup E_n] = y_0$, конечный или бесконечный. Тогда существуют всегда конечные подмножества $E'_n \subset E_n$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} [\sup E'_n] = y_0$; если же для всех n $\sup E_n = +\infty$, то существует такое E'_n, что $\sup\limits_n (\sup E_n) = +\infty$.

Из этой аксиомы имеется весьма большое число следствий, я укажу только некоторые из них:

4) если $y_n \to 0$, то существуют $\lambda_n \to \infty$ такие, что $\lambda_n y_n \to 0$;

5) если $y_n \to y$, то существует y_0 такое, что $|y_n - y| < \varepsilon y_0$ при $n > N\varepsilon$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$;

6) каково бы ни было множество E, существует такое исчислимое множество E', что $\sup E' = \sup E$, $\inf E' = \inf E$;

7) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и $\lim\limits_{k\to\infty} y_n^{(k)} = y_n$, то имеется такая последовательность k_n, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^{(k_n)} = y$;

8) если последовательность y_n такова, что при всяких $\lambda_n \to 0$ будет $\lambda_n y_n \to 0$, то она ограничена;

9) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$;

10) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, то можно указать множители $\lambda_n \to \infty$ и такие, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$.

§ 3. Топологическая сходимость

Наряду с рассмотренным в § 2 определением сходимости $y_n \to y$ введем другое, связанное с ним. Будем писать $y_n \to y\,(*)$ [«последовательность y_n $(*)$-сходится к y»], если из всякой частичной последовательности y_{n_k} можно выбрать такую подпоследовательность $y_{n_{k_i}}$, что $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y$. Для отличия прежде определенную сходимость будем называть иногда (o)-сходимостью и писать $y_n \to y$ (o).

К $(*)$-сходимости можно притти и иначе. Если мы для любого множества $E \subset Y$ определим замыкание его $\bar{E}$ как сумму множества E и его предельных точек, т. е. точек вида $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in E$, то множество Y сможем рассматривать как топологическое пространство. При этом $\overline{(\bar{E})} = \bar{E}$ благодаря следствию 7 аксиомы VI. В пространстве Y будут определены благодаря этому: замкнутые множества, открытые множества, окрестности. Раз в Y будут определены окрестности, то через них может быть определено новое понятие сходимости—топологическая сходимость: $y_n \to y\,(t)$. Можно показать, что эта сходимость совпадает с определенной выше $(*)$-сходимостью, т. е. что $y_n \to y\,(t)$ равносильно тому, что $y_n \to y\,(*)$.

§ 4. Нормируемые пространства

Линейное множество Y называется **нормированным пространством** (Banach), если каждому его элементу y отвечает не отрицательное вещественное число $\|y\|$, причем выполнены условия: 1) $\|y\| = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$, 2) $\|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\|$, 3) $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$.

Предположим теперь, что Y есть одновременно нормированное пространство и линейное полуупорядоченное пространство (S_5) и притом такое, что выполнены условия:

$$1)\ \|y_1\| < \|y_2\|,\quad \text{если } |y_1| < |y_2|,$$

2) $\|y_n\| \to 0$, если $y_n \to 0$ убывая,

3) $\|y_n\| \to \infty$, если $y_n \to +\infty$ возрастая.

Тогда можно показать, что в Y будет выполнена и аксиома VI и что Y есть полное пространство по отношению к сходимости по норме, т. е. пространство типа В. Наконец, топологическая сходимость в Y совпадает со сходимостью по норме, т. е. $y_n \to y(t)$ эквивалентно тому, что $\|y_n - y\| \to 0$. Такое пространство мы будем называть пространством типа B_2. Заметим, что если в таком пространстве ввести еще норму группы элементов [1], полагая

$$\|y_1, y_2, \dots, y_n\| = \|\sup(|y_1|, \dots, |y_n|)\|,$$

то условие (о)-сходимости последовательности элементов y_n к элементу y состоит в том, что

$$\lim_{n, m \to \infty} \|y_n - y, \dots, y_m - y\| = 0.$$

§ 5. Частные виды пространства

А. Конечно-мерное координатное пространство. Рассмотрим пространство $R^{(k)}$, элементы которого определены вещественными числами—координатами (или составляющими)

$$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}).$$

Сложение и умножение на вещественное число определяются обычным образом (как для векторов). Далее будем считать элемент положительным $y > 0$, если все координаты не отрицательны $y^{(i)} \geqslant 0$ и хотя бы одна из них не нуль. Тогда $R^{(k)}$ представляет полуупорядоченное пространство; как легко проверить, все аксиомы I—VI здесь соблюдены. В частности, в данном случае $\sup(y_1, y_2)$ обозначает элемент, все координаты которого равны максимумам соответственных координат элементов y_1 и y_2; $|y|$ будет элемент, координаты которого равны абсолютным величинам координат элемента y:

$$|y| = (|y^{(1)}|, \dots, |y^{(k)}|).$$

Сходимость последовательности элементов $y_n \to y$ совпадает здесь с $(*)$-сходимостью и состоит в том, что все координаты точки y_n стремятся к соответственным координатам точки y:

$$\lim_{n \to \infty} y_n^{(i)} = y^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Пространство это есть пространство типа B_2, достаточно принять за $\|y\|$ число: $\|y\| = [|y_1^{(1)}|^p + \dots + |y^{(k)}|^p]^{\frac{1}{p}}$ $(p \geqslant 1$ любое). При $k=1$ $R^{(1)}$ есть пространство действительных чисел.

[1] Пространства, в которых определена норма группы элементов, были изучены в последнее время молодым ленинградским математиком Б. З. Вулихом (см. литературу).

В. Бесконечно-мерное координатное пространство (пространство последовательностей). Рассмотрим пространство $l^p\,(p \geqslant 1)$, элементами которого служат бесконечные последовательности вещественных чисел

$$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots)$$

такого рода, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,y^{(i)}\,|^p$ сходится. Будем считать $y > 0$, если все $y^{(i)} \geqslant 0$ и хоть одно из них не нуль. $l^{(p)}$ представляет тогда регулярное полуупорядоченное пространство. Сходимость элементов в нем обозначает, что сходятся все их координаты и притом все они ограничены координатами некоторого одного элемента. Точнее говоря, $y_n \longrightarrow y$ означает, что $y_n^{(i)} \longrightarrow y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и существует такой элемент $y_0 = (y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots)$, что $|\,y_n^{(i)}\,| \leqslant y_0^{(i)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при всех i.

Если положим $\|y\| = \left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,y^{(i)}\,|^p\right]^{\frac{1}{p}}$, то $l^{(p)}$ будет представлять пространство типа B_2, $(*)$-сходимость в нем следовательно представляет сходимость по такой норме.

Укажем еще на пространство s всех последовательностей $(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots)$; оно также будет удовлетворять всем аксиомам I—VI, но уже не будет пространством типа B_2. В нем (o)-сходимость и $(*)$-сходимость совпадают и состоят в сходимости всех координат.

С. Пространства, составленные из измеримых функций. Рассмотрим произвольное множество $\Phi = \{\,\varphi\,\}$, составленное из измеримых функций $\varphi(t)$, определенных в промежутке (a, b), и такое, что удовлетворены условия:

1) если $\varphi_1 \in \Phi$, $\varphi_2 \in \Phi$, то $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$;

2) если $|\,\varphi(t)\,| \leqslant |\,\varphi_1(t)|$ и $\varphi_1 \in \Phi$, то $\varphi \in \Phi$.

Если считать $\varphi > 0$, когда $\varphi(t) \geqslant 0$ почти везде и $\varphi(t) > 0$ на совокупности положительной меры, то множество Φ представляет полуупорядоченное пространство, удовлетворяющее аксиомам I—V; аксиомы I—IV проверяются без труда; проверка того, что выполнена и аксиома V, требует специального рассуждения.

Сходимость в пространстве Φ состоит в следующем. Последовательность элементов φ_n сходится к φ: $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ означает, что функции $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ почти везде и притом все они ограничены одной функцией из семейства Φ. В частности, пространство S всех почти везде конечных измеримых функций представляет такое множество. В этом случае будет выполнена и аксиома VI. Сходимость в S есть сходимость почти везде; $(*)$-сходимость здесь—сходимость по мере. Множество всех ограниченных измеримых функций также может быть принято за семейство Y, но здесь аксиома VI не удовлетворена. Наконец, множество L^p всех функций, суммируемых со степенью $p\,(p \geqslant 1)$, также может быть принято за семейство Φ.

Это есть пространство типа B_2, если принять $\|\varphi\| = \left\{ \int\limits_a^b |\varphi(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$.

Сходимость в нем состоит в сходимости последовательности почти везде и ограниченности ее одной функцией, суммируемой в степени p. Топологическая сходимость здесь есть сходимость в среднем с показателем p.

Укажем один пример применения общей теории полуупорядоченных пространств. На основании следствия 5 из аксиомы VI заключаем, применяя его к пространству S, что если последовательность измеримых функций $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ почти везде, то имеется такая измеримая почти везде конечная функция $\varphi_0(t)$, что $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon\varphi_0(t)$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Если через E' обозначить совокупность точек, где $|\varphi_0(t)| \leqslant M$, то ясно, что на E' сходимость $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$ будет равномерной. Это дает сразу известную теорему Егорова о последовательности измеримых функций.

D. Пространство функций ограниченной вариации. Рассмотрим пространство $V = \{\psi\}$, составленное из функций ограниченной вариации $\psi(t)$, определенных в промежутке (a, b). Сложение и умножение на константу определяем как обычно. Будем считать $\psi > 0$, если $\psi(a) \geqslant 0$, функция $\psi(t)$ не убывает: $\Delta\psi(t) \geqslant 0$ и, наконец, $\psi(t)$ не равна нулю тождественно. Тогда V будет полуупорядоченным пространством. Проверим аксиому V.

Пусть $E \subset V$ есть некоторое множество, ограниченное сверху элементом ψ_0. Рассмотрим следующую функцию

$$\psi^*(t) = \sup_{\psi \in E} \psi(a) + \sup_{\substack{a = t_1 < \ldots < t_{n+1} = b \\ \psi_1, \ldots, \psi_n \in E}} \sum_{i=0}^{n} [\psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)],$$

где во втором случае supremum взят относительно всех способов разбиения промежутка (a, b) на части и всех способов выбора функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ из E. Функция $\psi^*(t)$ будет функция ограниченной вариации; далее легко видеть, что $\psi^* \geqslant \psi$ для $\psi \in E$ и $\psi^* \leqslant \psi_0$. Это и показывает, что $\sup E = \psi^*$. В данном случае, как легко убедиться, $|\psi|$ есть вариация $\psi(t)$, точнее это есть функция $|\psi(a)| + \operatorname*{Var}_a^t \psi(t)$; ψ_+ есть таким образом положительная вариация.

Если ввести $\|\psi\|$, положив $\|\psi\| = |\psi(a)| + \operatorname*{Var}_a^b \psi(t)$, то V можно рассматривать как пространство типа B_2.

Рассмотрим в частности подмножество A абсолютно непрерывных функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условию $\psi(a) = 0$. Это множество изоморфно пространству суммируемых функций. Действительно, если $\varphi \in L^1$, то ей можно соотнести $\psi(t) = \int\limits_a^t \varphi(t) \, dt$, тогда $\psi \in A$. Из этого изоморфизма следует, что для того, чтобы последовательность абсолютно непрерывных функций $\psi_n(t)$ сходилась к $\psi(t)$ так, чтобы производные их $\psi'_n(t)$ (o)-сходились к $\varphi'(t)$ в пространстве L^1, необходимо и достаточно, чтобы функции ψ_n (o)-сходились в пространстве A. Отсюда нетрудно получить, что даже если ψ_n — функции ограниченной вариации, но они (o)-сходятся в пространстве V, то $\psi'_n(t)$ будут (o)-сходиться к $\psi'(t)$ в пространстве L^1. Таким образом получаются весьма общие условия для возможности дифференцирования почти везде последовательности функций ограниченной вариации.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ

§ 6. Основные классы линейных операций

Пусть X и Y два регулярных линейных полуупорядоченных пространства. Будем рассматривать операции, переводящие одно пространство в другое $y = U(x)$. При этом мы будем всегда предполагать, что эти операции аддитивны и однородны, т. е. $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$ и $U(\lambda x) = \lambda U(x)$. Для того чтобы операция была линейной, нужно еще предположить, что она непрерывна. Однако, в виду существования различных возможных способов определения сходимости в пространствах X и Y, имеются три вида линейных операций:

I. Сильно-непрерывной будем называть операцию в том случае, если $x_n \to x$ (t) влечет за собой $U(x_n) \to U(x)$ (o). В таком случае будем говорить еще, что операция принадлежит классу H_t^o.

II. (B)-непрерывной операцией будем называть такую операцию, что $x_n \to x$ (t) влечет $U(x_n) \to U(x)$ (t). Класс таких операций обозначим H_t^t.

III. Регулярной операцией будем называть такую операцию, что при $x_n \to x$ (o) будет $U(x_n) \to U(x)$ (o). Класс этих операций обозначим H_0^o.

В некоторых случаях мы не имеем трех различных классов, например, если в пространстве Y (o)-сходимость и (t)-сходимость совпадают, то совпадают все классы $H_t^o = H_t^t = H_0^o$. Если пространства X и Y типа B_2 и в X выполнено условие: $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ при x_1 и $x_2 \geqslant 0$, то классы H_t^t и H_0^o совпадают. Вообще же будет: $H_t^o \subset H_0^o \subset H_t^t$.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых свойств этих операций. При этом будем предполагать, что X и Y пространства типа B_2[1].

I. Сильно-непрерывные операции. Легко установить, что значения такой операции на сфере $\|x\| = 1$ ограничены. Введем элемент пространства Y, равный supremum'у значений $U(x)$ на этой сфере, который уместно обозначить $\vert U \vert$:

$$\vert U \vert = \sup_{\|x\|=1} U(x).$$

[1] Это условие может быть заменено различными другими более слабыми.

Тогда для всякого x имеем неравенство $|U(x)| \leqslant |U| \cdot \|x\|$. Наоборот, конечность нормы $U(x)$ достаточна для того, чтобы операция U была сильно-непрерывной.

Для сильно-непрерывных операций можно установить весьма важную теорему о продолжимости операций. Именно, если такая операция определена на некотором линейном подмножестве пространства X, то она может быть распространена на все пространство с сохранением нормы. Эта теорема для случая функционалов была установлена раньше и принадлежит Hahn'у и Banach'у. Она играет чрезвычайно важную роль в теории линейных операций Banach'a. Благодаря тому что она справедлива для сильно-непрерывных операций, значительная часть теории Banach'a допускает широкое обобщение: всюду вместо функционалов можно ввести произвольные сильно-непрерывные операции.

II. (B)-непрерывные операции. Этот класс операций был подробно изучен в книге Banach'a [1]. Такая операция характеризуется тем, что она имеет конечную численную норму. Именно, если положить

$$\|U\|_t^t = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|,$$

то $\|U\|_t^t$ представляет всегда конечное число и при любом x будем иметь:

$$\|U(x)\| \leqslant \|U\|_t^t \|x\|.$$

III. Регулярные операции. Операцию $y = U(x)$ назовем положительной $U > 0$, если при $x \geqslant 0$ будет $U(x) \geqslant 0$, и притом $U(x) \not\equiv 0$. Если $U_2 - U_1 \geqslant 0$, будем писать, что $U_2 \geqslant U_1$. Можно доказать, что всякая положительная операция, а также всякая операция, которая не превосходит некоторой положительной, принадлежит классу H_0^0, т. е. регулярна. Наоборот, всякая регулярная операция будет положительной или ее превосходит некоторая положительная операция. Для установления этого достаточно рассмотреть операцию $U_1(x)$, определенную при $x \geqslant 0$ так:

$$U_1(x) = \sup_{|x'| \leqslant 1} |U(x')|.$$

На основании этих соображений можно установить, что регулярные операции, переводящие пространство X в Y, образуют сами линейное полуупорядоченное пространство, аксиомы I—V будут выполнены всегда, аксиома же VI—при известных условиях. Поэтому всякая регулярная операция минимальным образом представляется как разность двух положительных $U = (U)_+ - (U)_-$ и для нее существует операция $|U|$. Полезно иногда вводить норму операции $U : \|U\|_0^0$; в качестве нее мы возьмем норму прежнего вида для операции $|U|$, т. е. $\|U\|_0^0 = \||U|\|_t^t$. Для положительной операции обе нормы $\|U\|_0^0$ и $\|U\|_t^t$ совпадают.

---

[1] Два других класса операций H_t^0 и H_0^0 с другой точки зрения, чем в моих работах, рассматривались Б. З. Вулихом.

Класс регулярных операций, если его определять как класс операций мажорируемых положительными, является, в некотором смысле, наиболее простым и естественным для рассмотрения классов операций, переводящих пространство X в Y. Именно для определения этого класса операций не требуется даже существования понятия предела в множестве X: достаточно, чтобы в нем выполнялись аксиомы I—IV и аксиома V лишь для множества E, состоящего из конечного числа элементов.

В следующих параграфах мы рассмотрим частные виды линейных операций, именно операции, переводящие некоторые классические пространства в произвольное пространство типа B_2. Этим операциям удается дать аналитическое выражение в форме рядов или в интегральной форме. В последнем случае приходится вводить некоторые классы абстрактных функций и определять для них понятие интеграла. Заметим, что интегрирование функций с значениями в пространстве Banach'а рассматривалось Graves, Bochner, G. Birkhoff и др., а в диссертации И. М. Гельфанда оно было использовано для построения общих видов некоторых операций.

§ 7. Частные виды сильно-непрерывных операций. Некоторые классы абстрактных функций

Пусть $X = R^{(k)}$. Общий вид операции, переводящей пространство X в Y, будет:

$$y = U(x) = y_1 x^{(1)} + y_2 x^{(2)} + \ldots + y_k x^{(k)},$$

где $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ — координаты точки x, а $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — некоторые постоянные элементы Y. При этом норма операции, различная в зависимости от способа нормирования X, есть следующий элемент Y:

$$\| U \| = \sup_{\| x \| = 1} (y_1 x^{(1)} + y_2 x^{(2)} + \ldots + y_k x^{(k)}).$$

Здесь $\| x \| = (| x^{(1)} |^p + \ldots + | x^{(k)} |^p)^{\frac{1}{p}}$. В том случае, когда Y есть пространство вещественных чисел, то, как легко проверить, $\| U \| = [| y_1 |^q + \ldots + | y_k |^q]^{\frac{1}{q}}$, где q — сопряженный показатель; $q = \frac{p}{p-1}$. Поэтому мы этот элемент $\| U \|$ обозначим $m_q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, — он в дальнейшем будет играть важную роль, заменяя для элементов $y_1, y_2, \ldots, y_k$ среднее $(| y_1 |^q + \ldots + | y_k |^q)^{\frac{1}{q}}$, которое непосредственно, конечно, составлено быть не могло. Этим же обозначением $m_q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ мы будем пользоваться для краткости также при y_i вещественных.

Будем рассматривать бесконечные последовательности $y_1, y_2, \ldots$; относительно такой последовательности будем говорить, что она принадлежит классу l^q, если растущие с увеличением k элементы $m_q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ имеют конечный предел:

$$\lim_{k \to \infty} m_q(y_1, y_2, \ldots, y_k) = m_q(y_1, y_2, \ldots) < +\infty.$$

Тогда, если точка $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots)$ принадлежит пространству l^p $\left(\text{ряд } \sum_i |x^{(i)}|^p \text{ сходится}\right)$, а последовательность $y_1, y_2, \ldots$ принадлежит классу $l^q \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)} y_i$ сходится и представляет сильно-непрерывную операцию, переводящую l^p в Y. При различных $\{y_i\}$ это дает общий вид такой операции.

Будем рассматривать теперь абстрактные функции $y = F(t)$, определенные в промежутке (a, b), значения которых принадлежат пространству Y. Естественным образом можно определить классы: непрерывных, абсолютно-непрерывных функций (A), функций ограниченной вариации (V), функций, удовлетворяющих условию Липшица. Большинство свойств вещественных функций сохраняется; например, функция ограниченной вариации есть разность двух монотонных—она имеет исчислимое множество скачков.

Однако даже функция, удовлетворяющая условию Липшица, может быть нигде не дифференцируема.

Понятие суммируемой функции, хотя и может быть введено, но оказывается не вполне удобным, поэтому мы вместо них будем пользоваться абсолютно-непрерывными функциями. Также вместо функций, суммируемых в степени p, мы введем некоторый класс абсолютно-непрерывных функций. Здесь исходным будет служить установленный Riesz'ом факт, что функция $F(t)$ служит неопределенным интегралом некоторой функции класса L^p в том и только в том случае, когда при всех разбиениях остаются ограниченными суммы:

$$\sum_{v=1}^{v=n} \frac{|F(t_v) - F(t_{v-1})|^p}{(t_v - t_{v-1})^{p-1}}.$$

Исходя отсюда, введем следующее определение: будем говорить, что функция F принадлежит классу A_q, если конечен

$$\sup m_q \left(\frac{|F(t_1) - F(t_0)|}{(t_1 - t_0)^{\frac{q-1}{q}}}, \ldots, \frac{|F(t_n) - F(t_{n-1})|}{(t_n - t_{n-1})^{\frac{q-1}{q}}} \right) = M_q(F),$$

где supremum взят относительно всех способов разбиения промежутка на части.

Пусть теперь $g(t)$ есть некоторая вещественная функция, суммируемая со степенью p. Обозначим через $G(t)$ ее неопределенный интеграл. Тогда, если $y = F(t)$ принадлежит классу A_q, то можно показать, что существует интеграл типа Hellinger'а:

$$\int_a^b \frac{dG(t)\, dF(t)}{dt} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\Delta F(t_i) \cdot \Delta G(t_i)}{\Delta t_i}.$$

Мы будем иногда этот интеграл обозначать и так: $\int_a^b g(t)\, dF(t)$, разумея под этим то же самое. Тогда $\int\limits_a^b x(t)\,dF(t)$ представляет сильно-непрерывную операцию, переводящую пространство L^p в Y, и дает при различных $F \in A_q$ все такие операции. Нормой этой операции служит элемент $M_q(F)$.

Абсолютно-непрерывные функции класса A_2 в теории абстрактных функций играют ту же роль, что вещественные функции, суммируемые с квадратом [1].

Рассмотрим для них в частности вопрос о разложении по ортогональным функциям. Пусть $\{\varphi_0(t)\}$ полная ортогональная и нормированная система вещественных функций класса L^2 в промежутке (a, b). Пусть $F(t)$ абстрактная функция класса A_2. Коэффициентами Фурье ее назовем элементы $y_n = \int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dF(t)$.

Тогда можно доказать, что ряд

$$y_1\varphi_1(t) + y_2\varphi_2(t) + \ldots$$

сходится в среднем к $F(t)$, точнее говоря,

$$\lim_{n\to\infty} M_2[F(t) - \int\limits_a^t (y_1\varphi_1(t) + \ldots + y_n\varphi_n(t))\,dt] = 0.$$

При этом элементы $y_1, y_2, \ldots$ образуют последовательность класса l^2 и будет

$$m_2(y_1, y_2, \ldots) = M_2(F).$$

Далее, какова бы ни была последовательность элементов $y_1, y_2, \ldots$ класса l^2, можно указать функцию F класса A_2, для которой коэффициенты Фурье равны $y_1, y_2, \ldots$.

Наконец, если $g(t)$ вещественная функция класса L^2, а F A_2 и α_i — коэффициенты Фурье $g(t)$, а y_i — коэффициенты Фурье $F(t)$, то имеет место равенство Парсеваля:

$$\int\limits_a^b g(t)\,dF(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n.$$

Таким образом все основные теоремы теории ортогональных функций остаются верными и для абстрактных функций. Таким же образом могут быть распространены, повидимому, теория почти-периодических функций Бора и Безиковича и теория интегральных уравнений Шмидта.

[1] Правильнее было бы сказать, что эту роль играют «идеальные» функции $F'(t)$ — производные функций класса A_2, не определенные в отдельных точках и для которых может быть указано лишь их среднее значение в любом интервале (α, β), равное $\frac{1}{(\beta-\alpha)}[F(\beta) - F(\alpha)]$.

§ 8. Частные виды (B)-непрерывных операций

Для этих операций можно повторить с соответственными изменениями большую часть того, что было сказано о сильно-непрерывных операциях в § 7. Операция (B)-непрерывная, переводящая пространство $R^{(k)}$ в Y, может быть дана также в форме $y = U(x) = x^{(1)}y_1 + \ldots + x^{(k)}y_k$, только норма операции в данном случае будет:

$$\|U\|_t^t = \rho_q(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \sup_{\|x\|=1} \|x^{(1)}y_1 + \ldots + x^{(k)}y_k\|.$$

Далее можно рассматривать бесконечные последовательности y_1, y_2, ... , для которых $\rho_q(y_1 y_2, \ldots) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ конечно. Тогда, если $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots)$ точка из l^q, а $y_1, y_2, \ldots$ последовательность указанного вида, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{(i)}y_i$ будет (t)-сходиться. Такой ряд дает (B)-непрерывную операцию, и при различных последовательностях y_1, y_2, ... мы можем получить таким образом все (B)-непрерывные операции, переводящие l^p в Y.

Основные классы функций здесь вводятся также с помощью нормы, например функция удовлетворяет условию Липшица, если $\|F(t_2) - F(t_1)\| \leqslant k \cdot |t_2 - t_1|$, где k — постоянная. Опять будем говорить, что функция принадлежит классу $\mathrm{A}_q^{(B)}$, если для нее числа

$$\rho_q\left(\frac{F(t_1) - F(t_0)}{(t_1 - t_0)^{\frac{1}{p}}}, \ \ldots, \ \frac{F(t_n) - F(t_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})^{\frac{1}{p}}}\right)$$

ограничены в совокупности. Обозначим их верхнюю границу через $M_q^{(B)}$. Попрежнему, если $g(t)$—функция, суммируемая с степенью p, может быть определен интеграл $\int\limits_a^b g(t)\,dF(t)$. При различных $F \in A_q$ этот интеграл дает общую форму (B)-непрерывной операции, переводящей пространство L^p в Y.

Сказанное в § 7 об ортогональных разложениях справедливо и здесь. Например, если последовательность y_1, y_2, ... такова, что $\rho_2(y_1, y_2, \ldots$ конечно, то существует функция F класса $\mathrm{A}_2^{(B)}$, для которой $y_1, y_2, \ldots$ коэффициенты Фурье.

Укажем некоторые возможные приложения рассмотренных здесь абстрактных интегралов. Пусть U есть B-непрерывная операция, переводящая пространство Y в другое пространство Z: $z = U(y)$. Тогда, если $F(t)$—функция класса $\mathrm{A}_q^{(B)}$, то нетрудно показать, что функция $U[F(t)]$ будет функцией того же класса с значениями в Z. Нетрудно показать далее, что если $g(t)$ функция класса L^p, то операцию U можно применить под знаком интеграла:

$$U \int\limits_a^b g(t)\,dF(t) = \int\limits_a^b g(t)\,dU(F(t)).$$

В частности, пусть Y есть пространство, элементы которого суть функции. Тогда переход от данной функции к ее неопределенному интегралу, к определенному интегралу, к производной, к трансформированной по Лапласу и т. д. представляет B-непрерывные (более того, регулярные) операции; поэтому ясно, что из последней общей теоремы могут быть получены многочисленные теоремы о возможности дифференцирования и интегрирования по параметру и многие другие полезные следствия.

Мы не будем говорить подробно об аналогичных построениях для регулярных операций. Скажем только, что здесь может быть повторено дословно все сказанное о (B)-непрерывных. Нужно только вместо y поставить где следует $|y|$. Например общий вид регулярной операции, переводящей l^p в Y, дается и здесь рядом $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)} y_i$; только последовательность $y_1, y_2, \ldots$ должна быть такой, что $\rho_q(|y_1|, |y_2|, \ldots)$ конечно.

§ 9. Об одном классе функциональных уравнений

Теория полуупорядоченных пространств может быть многообразно использована в теории функциональных уравнений. Здесь я рассмотрю лишь один весьма простой класс функциональных уравнений, именно уравнения, для которых применим метод последовательных приближений.

Пусть Y полуупорядоченное пространство и $f(y)$ регулярная операция, переводящая Y в себя. Рассмотрим уравнение $y = f(y) + y_0$. Мажорантным для него назовем такое уравнение $y = f^*(y) + y_0^*$, что $|f| \leqslant f^*$ и $|y_0| \leqslant y_0^*$. Тогда можем утверждать, что если мажорантное уравнение имеет положительное решение $y^* \geqslant 0$, то данное уравнение имеет решение, и притом такое, что $|y| \leqslant y^*$. Действительно, определим рекурентно y_n^* и y_n, полагая $y_n^* = f^*(y_{n-1}^*) + y_0^*$; $y_n = f(y_{n-1}) + y_0$.

Легко видеть, что y_n^* возрастают и $y_n^* \leqslant y^*$. Далее ясно, что $|y_n| \leqslant y_n^*$. Поэтому ряд $y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots = y$ сходится. Легко видеть, что y и есть решение уравнения $y = f(y) + y_0$. Далее, если положить $\bar{y}^* = \lim\limits_{n \to \infty} y_n^*$, то будет $|y| \leqslant \bar{y}^*$, и можно утверждать, что y есть единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее этому условию. Наконец, заметим, что такого же рода теорема может быть высказана и также просто доказана для случая, когда f нелинейная операция.

Применение этих простых теорем дает сразу требуемый результат в ряде вопросов анализа, в которых применяется обычно метод последовательных приближений. Укажем только: уравнения Вольтерра, альтернирующий метод Шварца, некоторые теоремы о нелинейных интегральных уравнениях, теорему существования в аналитической теории дифференциальных уравнений, ряд теорем о бесконечных системах уравнений.

По поводу бесконечных систем заметим, что тут могут быть получены теоремы Pellet, Б. М. Кояловича, Р. О. Кузьмина и автора. Эти общие теоремы дают иногда более полный результат, чем непосредственное применение метода.

III. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

§ 10. Полуупорядоченные пространства общего вида. Верхний и нижний предел

Мы рассмотрим здесь случай, когда пространство Y не является линейным. Будем предполагать, что для некоторых пар различных элементов пространства $Y=\{y\}$ определено отношение $y_1<y_2$. Предполагаем следующие аксиомы:

1° если $y_1<y_2$ и $y_2<y_3$, то $y_1<y_3$;

2° для всяких y_1, y_2 найдутся y_3 и y_4 такие, что $y_3\leqslant y_1$, $y_2\leqslant y_4$;

3° для всякого ограниченного сверху множества существует $\sup E$, для ограниченного снизу $\inf E$;

4° аксиома регулярности, в том же виде, как аксиома VI в § 2.

Последняя аксиома нужна не всегда. В ряде случаев, наоборот, нужны и некоторые дополнительные аксиомы.

Понятие предела может быть определено, как в § 1. Можно ввести понятие о (*)-сходимости, которая совпадает здесь с топологической сходимостью. Далее, если пространство одновременно метрическое, то при некоторых простых условиях сходимость по расстоянию будет совпадать с (*)-сходимостью.

В пространстве Y можно ввести понятие предела еще двумя другими способами. Именно, если совпадают для всех последовательностей $n_1, n_2, \ldots$ пределы $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} y_{n_k}$, то их общее значение назовем верхним пределом и будем обозначать $(h)\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Если при любых последовательностях совпадают наименьшие пределы $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} y_{n_k}$, то их общее значение назовем нижним пределом $(b)\lim\limits_{h\to\infty} y_n$. Введение таких пределов может превратить данное множество, вообще говоря, в другое топологическое пространство. Можно установить некоторые общие теоремы о таким образом топологизированных полуупорядоченных пространствах, на чем я здесь не останавливаюсь. Укажу только два интересных примера таких пространств.

Рассмотрим, во-первых, множество замкнутых подмножеств промежутка (a, b). Если ввести полуупорядочение, полагая $F_1<F_2$ (если множество $F_1\subset F_2$ в узком смысле), то $\mathfrak{F}=\{F\}$ представляет множество, удовлетворяющее аксиомам 1°—3°. Если в множестве F ввести верхний

предел $(h)\lim\limits_{h\to\infty} F_n$, то, как легко установить, он совпадает с топологическим пределом последовательности замкнутых множеств, который был изучен Hausdorff'ом.

В качестве второго примера рассмотрим множество полунепрерывных сверху функций, определенных в промежутке (a, b). Если ввести полуупорядочение, считая $\varphi_1 > \varphi_2$, при условии, что функция $\varphi_1(t) \geqslant \varphi_2(t)$ при всех t и хотя бы при одном t $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$, то $\Phi = \{\varphi\}$ будет представлять пространство, удовлетворяющее аксиомам 1°—3°. Если в Φ ввести верхний предел $(h)\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, то получим пространство, по своим свойствам весьма похожее на пространство замкнутых множеств Hausdorff'a.

Заметим, наконец, еще, что в виду того что положительные элементы линейного полуупорядоченного пространства аналогичны положительным числам, они могут быть употреблены вместо последних при нормировании или метризации пространств, т. е. можно рассматривать, например, метрические пространства, в которых расстояние $\rho(x_1, x_2)$ есть элемент некоторого полуупорядоченного линейного пространства Y. Такое рассмотрение может оказаться полезным благодаря тому, что некоторые сходимости, которые не могут быть представлены с помощью известных в функциональном анализе сходимостей, даже основанных на привлечении полуупорядоченных пространств, могут быть иногда получены как сходимости по такому обобщенному расстоянию.

В качестве примера рассмотрим множество непрерывных функций $x(t)$. Для сходимости последовательности потребуем сходимость везде, при дополнительном условии, что функции равномерно непрерывны. Если за $\|x\|$ принять элемент пространства V монотонных функций $\omega(\delta) = \sup\limits_{t'-t\leqslant\delta} |x(t') - x(t)|$, то сходимость по такой норме, т. е. то, что $\|x_n - x\| \to 0$ в V, и будет интересующая нас сходимость. Аналогичного рода пространство можно построить для абсолютно-непрерывных функций.

§ 11. Дополнение полуупорядоченного пространства. Декартово произведение

Мы предполагали в предыдущем параграфе, что для пространства выполнены три аксиомы. Однако, если известно, что выполнены лишь аксиомы 1° и 2°, то выполнения аксиомы 3° можно добиться путем дополнения множества Y новыми элементами. Для установления этого достаточно в Y рассмотреть пары классов (A, B) типа Дедекиндовых (A состоит из всех элементов меньших, чем все элементы из B, и наоборот, B состоит из всех элементов больших, чем все элементы из A). Тогда если пара классов не определяется никаким элементом из Y, то можно считать, что ей соответствует новый элемент. Такое дополнение является в некотором смысле минимальным, т. е. пространство, полученное таким способом, будет по отношению ко всякому иному дополненному пространству представлять своеобразную фактор-группу. Можно, далее, установить, что пространство может быть дополнено таким образом, что оно превратится в линейное и будут соблюдены аксиомы I — V (§ 1). Можно при этом добиться того, что для пары элементов y_1 и y_2, для которой $\inf(y_1, y_2) = 0$, будет $y_1 + y_2 = \sup(y_1, y_2)$ (предполагаем, что $y > 0$ для всех $y \in Y$, т. е. 0 наименьший элемент).

Если имеется некоторое множество полуупорядоченных пространств (линейных или нет) $\{Y_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, то можно построить их Декартово произведение $Y = \mathfrak{P}_{\xi \in \Xi} Y_\xi$, составляя его из точек $y = \{y^\xi\}$ $(y^\xi \in Y_\xi)$. При этом считаем $y_1 > y_2$, если $y_1^\xi \geqslant y_2^\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и при некотором $\xi: y_1^\xi > y_2^\xi$. Легко установить, что если Y_ξ удовлетворяют аксиомам 1° — 3° § 10 (или I—V § 1), то и Y удовлетворяет тем же аксиомам. То же самое можно утверждать, если брать Декартово произведение с точностью до нуль-множеств. Именно некоторые подмножества Ξ считаются нуль-множествами. Две точки $y_1 = \{y_1^\xi\}$ и $y_2 = \{y_2^\xi\}$ будем считать за одну, если $y_1^\xi = y_2^\xi$, кроме нуль-множества значений ξ.

В таком случае опять можно доказать (при известных предположениях), что пространство удовлетворяет аксиомам 1° — 3° (или I — V). Из этих теорем можно получить, что множество всех функций, множество измеримых функций, множество функций, удовлетворяющих условию Бэра, если считать разнящиеся на совокупности первой категории за одинаковые,—представляют собой полуупорядоченные линейные пространства.

Все пространства, составленные из функций, будут полуупорядоченными. Естественно поставить обратный вопрос: не может ли быть любое линейное полуупорядоченное пространство координизировано, т. е. не будет ли оно изоморфно множеству функций, определенных на некоторой совокупности? В такой форме этот вопрос был мне предложен А. Н. Колмогоровым. Этот вопрос решается так. Пусть дано линейное полуупорядоченное множество $Y = \{ y \}$ (аксиомы I — IV и V для конечного множества). Рассмотрим множество $T = \{ f \}$ положительных линейных функционалов, определенных на Y. Тогда каждому элементу $y \in Y$ будет отвечать следующая функция, определенная в T: $\varphi_y(f) = f(y)$. Множество Y будет изоморфно с множеством функций $\{\varphi_y\} = \Phi$. Точнее говоря, изоморфизм будет по отношению к линейным операциям и знаку $>$, однако для операций supremum и infimum изоморфизма уже не будет, т. е. элементу $\sup(y_1, y_2)$ не будет отвечать функция, равная $\sup(\varphi_{y_1}(f), \varphi_{y_2}(f))$. При этом в некоторых случаях изоморфизма в отношении этих операций невозможно добиться ни при каком другом построении множества функций Φ.

§ 12. Применения к дескриптивной теории функций

Теория непрерывных функций и функций классификации Бэра может быть построена для случая, когда область значений есть любое топологическое пространство (Kuratowski). Теорию полунепрерывных функций и классов Young'а нельзя, конечно, провести в таких общих предположениях. Однако теорию полунепрерывных функций можно построить в случае, когда область значений есть полуупорядоченное пространство (аксиомы 1° — 4° § 10). Тогда при некоторых дополнительных условиях могут быть установлены все основные факты теории полунепрерывных функций, вплоть до теоремы Бэра о том, что всякая полунепрерывная функция есть предел монотонной последовательности непрерывных.

Более интересным представляется другой путь использования полуупорядоченных пространств. Именно с помощью этих пространств можно дать некоторое абстрактное построение дескриптивной теории, включающее в себя основные факты классификации функций, классификации множеств, а также возможных других аналогичных построений.

Пусть Y есть некоторое полуупорядоченное пространство (аксиомы 1° — 3° § 10). Пусть $K \subset Y$ есть некоторое исходное подмножество Y. Его удобно предположить инвариантным относительно операций $\sup(y_1, y_2)$ и $\inf(y_1, y_2)$. Рассмотрим элементы из Y вида $y = \lim y_n$; $y_n \in K$. Это будет первый класс над K, т. е. K_1. Таким же образом могут быть построены классы K_α — «классы Бэра». Далее, если N есть любое множество последовательностей, можно рассмотреть класс элементов, которые можно представить в форме:

$$y = \sup_{(n_1,\, n_2,\, \ldots) \in N} [\inf(y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots)].$$

Обозначим этот класс $H_N(K)$. Это будет класс, аналогичный классу множеств, которые строятся с помощью δs операции Hausdorff'а. В частности, тут могут быть получены абстрактные классы Young'а, аналитические множества, проективные множества — над K.

Научно-исслед. институт математики и механики
Ленинградского гос. университета
им. А. С. Бубнова.

ЛИТЕРАТУРА[1]

[1] Alexandroff P., Sur les espaces discrets, C. R. **200**, pp. 1649, 1708 (Введ.).
[2] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Varsovie 1932 (§ 5, 6).
[3] Birkhoff G., On the combination of subalgebras, Proc. Camb. Math. Soc. **29**, 441—464 (1933); **30**, 115—122 (1934); **31**, 453 (1935) (Введ.).
[4] Birkhoff G., Integration of functions with values in a Banach space, Trans. A. M. S. **38**, 357—378 (1935) (§ 6—8).
[5] Bochner S., Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorrames sind, Fund. Math. **20**, 262—276 (1933); F. M. **21**, 211—213 (§ 6—8).
[6] Вулих Б. З., Об одном типе метрических пространств, ДАН, **IV**, 295—298 (1935).
[7] Vulich B., On a generalised notions of convergence in a Banach space, Annals of Math. **38** (печатается).

[1] В скобках указано, в каких параграфах настоящей статьи упоминается данная работа или с содержанием каких параграфов она связана.

[8] Вулих Б. З., Статья в Матем. сборнике (печатается) (§§ 4, 6, 7, 8).
[9] Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Math. Ann. **53**, 371—403 (1900) (Введ.).
[10] Graves L. M., Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, Trans. A. M. S. **29**, 163—177 (1927) (§ 6).
[11] Гельфанд И. М., Абстрактные функции и общие виды линейных операций, Дисс., Москва 1935 (рукопись) (§ 6—8).
[12] Hausdorff F., Mengenlehre, 1927 (§ 10).
[13] Канторович Л. В., Линейные полуупорядоченные пространства и их применение к теории линейных операций, ДАН **IV**, 11—14 (1935) (§ 1, 2, 5, 6).
[14] Канторович Л. В., К общей теории линейных операций в полуупорядоченных пространствах, ДАН **I**, 271—274 (1936) (§ 6).
[15] Канторович Л. В., Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида, ДАН **II**, № 1 (1936) (§ 3, 4, 10, 12).
[16] Kantorovitch L., Sur un espace des fonctions à variation bornée, C. R. **201**, 1457 (1935) (§ 3, 5).
[17] Kantorovitch L., Sur les proprietés des espaces semiordonnés linéaires, C. R. **202**, 813 (1936) (§ 1, 2).
[18] Kantorovitch L., Sur les formes générales des operations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semiordonné linéaire arbitraire, C. R. **202**, 1251 (§ 7).
[19] Канторович Л. В., Основы теории функций вещественного переменного, значения которых принадлежат линейному полуупорядоченному пространству, ДАН (печатается) (§ 7).
[20] Канторович Л. В., О некоторых классах линейных операций, ДАН (печатается) (§ 6).
[21] Канторович Л. В., Общие формы некоторых классов линейных операций, ДАН (печатается) (§ 7, 8).
[22] Kantorovitch L., Lineare halbgeordnete Räume I, Матем. сборник 2(44) (печатается) (§ 1—5).
[23] Klein-Barmen Fr., Zur Theorie der abstrakte Verknüpfungen, Math. Ann. **105**, 308—323 (1931); **111**, 596—621 (1935) (Введ.).
[24] Кузьмин Р. О., Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений, Известия Академии Наук СССР, **4** (1934) (§ 9).
[25] Kuratovski, Topologie I, Varsovie, 1933 (§ 3, 12).
[26] Markoff A., Über die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der «Früher als» Beziehung, Phis. Ztschr. d. Sowjetunion, **I**, 387—406 (1932) (Введ.).
[27] Menger K., Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen, Jahrb. d. Deutsch. Math. Ver. **37**, 309—325 (1928) (Введ.).
[28] Ore O., On the foundations of abstrakt algebra. I, Annals of Math. **36**, 406—437 (1935) (Введ.).
[29] Pellet, Bull. Soc. Math. de France, **41**, 119—126 (1913) (§ 9).
[30] Riesz Fr., Über die Systeme der integralbaren Funktionen, Math. Ann. **69** (1910) (§ 7).
[31] Stone M. H., Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras, Amer. Journ. of Math. **57**, 703—732 (1935) (Введ.).
[32] Tuecker A. W., Cell spaces, Annals of Math. **37**, 92—101 (1936) (Введ.).
[33] Шатуновский С., Введение в анализ, Одесса 1923, литограф. изд., Одесса 1907 (Введ.).

L. KANTOROVITCH. SUR LES ESPACES SEMIORDONNÉS

RÉSUMÉ

Le présent article contient les résultats d'une série de recherches de l'auteur sur la théorie des espaces semiordonnés. La pluspart de ces résultats a été énoncée dans les notes de l'auteur [14—21].

On appelle espace semiordonné linéaire une multiplicaté linéaire $Y=\zeta$ telle que pour certains couples de ses éléments la relation «plus grand $>$» est définie et vérifie les conditions habituelles. On suppose d'ailleurs que chaque ensemble $E \subset Y$ borné superieurement admet une borne supérieure exacte sup E. Dans un espace pareil on introduit la notion de limite au moyen des notions de limite supérieure et inférieure. Si l'on introduit encore une condition complémentaire du «régularité» de l'espace, on voit que presque tous les théorèmes sur les limites ayant lieu pour les nombres réels subsistent dans le cas considéré. La différence essentielle consiste en ce que pour ces espaces on a non seulement la convergence ordinaire, mais encore une notion plus générale de convergence $(*)$—la convergence topologique.

On peut extraire de chaque suite convergente $(*)$ une suite partielle qui converge au sens ordinaire. D'ailleurs si l'espace est normé et quelques conditions complémentaires sont vérifiées, la convergence $(*)$ coïncide avec la convergence en norme. Comme exemples d'espaces de cette nature on peut indiquer celui de l'espace des fonctions mesurables, l'espace des suites infinies, l'espace des fonctions à variation bornée. Dans le premier cas la convergence ordinaire est la convergence presque partout, la convergence $(*)$ est la convergence en mesure.

La seconde partie de l'article est consacrée à la théorie des opérations dans les espaces semiordonnés. On considère les opérations linéaires $y=U(x)$ qui transforment l'espace semiordonné X en un autre espace de même nature Y. La continuité de l'opération peut être définie de différentes manières. Si la relation $x_n \rightarrowtail x\,(t)$ entraîne toujours $u(x_n) \rightarrowtail u(x)$ (o) nous dirons que l'opération U appartient à la classe H_t^0. On définit d'une manière analogue les autres classes, d'ailleurs $H_0^t = H_t^t \supset H_0^0 \supset H_t^0$.

On peut considérer ensuite des fonctions abstraites d'une variable réelle $y(t)$, dont les valeurs appartiennent à un espace semicontinu. Pour ces fonctions plusieurs théorèmes sur les fonctions à valeurs réelles restent valables. En particulier, on peut à l'aide de ces fonctions obtenir sous forme d'intégrales abstraites les formes générales des opérations de classes différentes transformant des espaces fonctionnels déterminés en un espace semiordonné arbitraire.

Dans la troisième partie on considère des espaces semiordonnés qu'on ne suppose plus linéaires. On considère les diverses définitions possibles de limite dans un pareil espace, la possibilité de compléter l'espace, d'y introduire des coordonnées. On établit les relations entre la théorie des espaces pareils et certaines questions de la théorie des fonctions descriptive.