МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 6

МЦНМО
Москва 2002

ББК 22.1
М34
УДК 51.009

Издание осуществлено при поддержке РФФИ

Адрес редакции:
121002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 202
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@mccme.ru Web-page: www.mccme.ru/free-books

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 6. — М.: МЦНМО, 2002. — 160 с.
ISBN 5–94057–018–6

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

В этом сборнике опубликованы воспоминания об И. Г. Петровском, рассказы о А. С. Кронроде, Л. В. Канторовиче, воспоминания Н. Н. Константинова об истории московских математических кружков. Сборник содержит ряд статей о разнообразных интересных математических сюжетах: от геометрии треугольника до теории характеристических классов.

В разделе «Олимпиады» опубликована статья о национальной американской олимпиаде и короткие заметки о наиболее интересных задачах математических олимпиад 2000 г., приведены решения многих задач, публиковавшихся в предыдущих сборниках серии.

ББК 22.1

ISBN 5–94057–018–6

МЦНМО выражает благодарность компании Демос за предоставление высокоскоростного и качественного доступа в Интернет

Содержание

Математический мир

Об Иване Георгиевиче Петровском

День своего пятидесятилетия Юрий Иванович Манин объявил «Днём открытых дверей». И я решил войти в эту «открытую дверь». И, конечно, оказался самым старшим среди молодых и совсем юных учеников Юрия Ивановича. Но завязался общий разговор, он какое-то время порхал от темы к теме, пока вдруг не задержался на имени Ивана Георгиевича Петровского. Для молодёжи это имя было почти незнакомо, впрочем, некоторые слышали о Петровском, но только как о математике. А меня и Юрия Ивановича очень многое связывало с нашим бывшим ректором. Мы предались воспоминаниям, и вдруг Юрий Иванович сказал, что где-то, то ли в «Природе», то ли «Знании–силе», были незадолго до того опубликованы «невыдуманные рассказы» известного советского астрофизика (в ту пору уже покойного) Иосифа Самойловича Шкловского. Один из этих рассказов был посвящен эпизоду с Петровским. Там, по словам Манина, содержалось утверждение о том, что — по оценкам Шкловского — Петровский совершил в жизни не менее ***десяти тысяч*** добрых дел. Сразу же посыпались вопросы — откуда взялась такая цифра? как она была получена? Юрий Иванович стал давать какие-то пояснения, но разговор довольно быстро сбился с темы.

…Как это было недавно, а кажется — только вчера. На самом деле прошло четырнадцать лет! И каких лет! В частности, Юрий Иванович, которому не дозволялось в ту пору пересекать границу любезного отечества, сменил Россию на Германию, Москву на Бонн, где стал одним из директоров Института Планка… Многое кануло в Лету, но мне до сих пор не дает покоя эта «оценка Шкловского»: *десять тысяч добрых дел.*

Я постепенно уверовал в её справедливость. Можно помечтать о том, что когда-нибудь будет опубликована книга «Десять тысяч добрых дел Ивана Георгиевича Петровского». Многие могут внести свой вклад в её написание. Здесь я хочу представить несколько рассказов о Петровском, как человеке, вершившем добро.

Назову некоторых из людей, высоко ценимых Иваном Георгиевичем, которым он старался делать добрые дела. Бегло пройдёмся по началу алфавита.

Владимир Михайлович Алексеев и Владимир Игоревич Арнольд были в немногочисленном ряду тех математиков моего поколения, которые пользовались особым доверием Ивана Георгиевича, кому он звонил для того, чтобы выслушать их совет при разрешении трудной проблемы. (Кроме них были ещё Юрий Иванович Манин, Владимир Андреевич Успенский; к числу людей, пользовавшихся высоким доверием Ивана Георгиевича, были такие замечательные люди чуть старшего поколения, как Сергей Васильевич Фомин, Георгий Евгеньевич Шилов, Иосиф Самойлович Шкловский.)

Высочайший вкус на людей — поразительная черта Ивана Георгиевича, с неё разумно начать. Владимир Игоревич Арнольд не раз писал о влиянии, оказанном на него Иваном Георгиевичем Петровским; о добрых делах Петровского мне много рассказывал и Владимир Михайлович Алексеев.

И Павел Сергеевич Александров принадлежал к числу тех профессоров, которым Иван Георгиевич оказывал особое покровительство. (К их числу относился и Андрей Николаевич Колмогоров, и вообще все те, кто царствовал на мехмате в годы моей юности, когда наш факультет переживал свою золотую пору.) Число добрых дел для факультета, для математики, для Математического Общества, совершённых Петровским через этих людей огромно, и может составить отдельный большой перечень.

Вспомним Феликса Александровича Березина... В начале пятидесятых годов, КПСС уделяла очень большое внимание математическому образованию, и потому лучшие выпускники нашего факультета, такие как Феликс Александрович Березин, Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро и многие, многие другие замечательные студенты мехмата, направлялись не в аспирантуру факультета, а на работу в школы рабочей молодёжи и в провинциальные школы в маленькие города... Березин работал в школе рабочей молодёжи в Москве, Илья Иосифович — в обычной школе в Орехово-Зуеве.

Иван Георгиевич же имел в качестве непременного жизненного принципа оставлять лучших выпускников в Московском Университете. Он зачислил Березина в 1956 году в штат научных сотрудников, минуя обычную процедуру подобных зачислений, и вызвав бурю возмущений тех, кто считал себя обязанным определять кадровую политику в нашем Университете. И Пятецкий-Шапиро сотрудничал на полставки в Московском университете благодаря Ивану Георгиевичу.

Марко Иосифович Вишик обязан плодотворнейшему периоду своей жизни, связанному с Московским университетом, Ивану Георгиевичу Петровскому.

Израиль Моисеевич Гельфанд и Петровский — это особая глава истории математики и Московского университета. Иван Георгиевич очень высоко ценил Израиля Моисеевича, много делал добрых дел для него и его учеников, постоянно советовался с ним в трудных вопросах математической и университетской жизни. В частности, создание кафедры Общих проблем управления, на которой мне довелось проработать свыше тридцати лет, было осуществлено Петровским по идее Гельфанда.

А вот случай из другого совсем ряда. Одна из самых привлекательных черт деятельности И. Г. на посту ректора — его доступность. Ирина Николаевна Глушнева — одна из трех моих сокурсниц, которые стали докторами физико-математических наук — вспоминает, что в 1954 году (будучи студенткой второго курса) она готовилась поехать в Невинномысск на солнечное затмение. Ей это было обещано, но в последний момент было в том отказано. И она пошла искать правды не по инстанциям (директор ГАИШа, декан мехмата и т. п.), а прямо к Петровскому. Тот принял её и решил вопрос в её пользу, хотя как легко было бы ему отослать её по тем же инстанциям!

Елена Николаевна Ефимова вспоминает эпизод с предоставлением квартиры семейству Николая Владимировича Ефимова. Петровский просматривал списки квартир и вдруг увидел, что Николаю Владимировичу предоставляют квартиру на девятом этаже. Он приказал сменить этаж с девятого на третий. Иван Георгиевич знал, что у дочери Н. В. не очень здоровое сердце, а лифты, бывает, портятся.

Не только в этом эпизоде, но и во множестве других, И. Г. проявлял редчайшие свойства человеческого характера — чуткость и заботливость. Это особый дар, неизвестно откуда достающийся человеку, а Петровский обладал им в высокой мере.

В первые послесталинские годы Петровский ещё не всегда мог преодолевать сопротивление своего окружения. Желая сохранить перспективного математика для нашей науки, он просил Николая Владимировича взять выпускника в Лесотехнический институт, где Ефимов работал. И это также свидетельствует об особой широте его личности. И многие математики не затерялись в Лесотехническом институте под чутким покровительством Николая Владимировича, а потом они оказались соединёнными с Московским университетом.

Владимир Антонович Зорич перед поступлением на мехмат воспитывался в детском доме в Иваново. И это всё — и тот детский дом, и Иваново в те годы, где долго работал Вадим Арсеньевич Ефремович и недолго Владимир Абрамович Рохлин, где начинал творческую жизнь Альберт

Соломонович Шварц, всё это тоже тема отдельного рассказа, и в нем не раз упоминался бы Иван Георгиевич (который покровительствовал и Ефремовичу, и Рохлину, и Шварцу).

У В. А. Зорича к моменту окончания аспирантуры возникли трудности с тем, где жить. Петровский платил штрафы в милицию (за незаконное пребывание Зорича в общежитии), он оформил его *обратно в аспирантуру после её окончания*, чтобы дать ему возможность жить в общежитии, словом, делал всё, чтобы Владимир Антонович смог остаться работать в Московском Университете.

Для иллюстрации того, как поступал Иван Георгиевич, такой рассказ.

* * * * * *

Моему сокурснику Павлу Борисовичу Якоби выпала трагическая судьба. Один наш общий друг называл его Иовом, которого Господь решил подвергнуть беспримерным испытаниям. Всех тягостных перипетий его жизни не перечесть, да здесь и не о них речь.

Но один (и при том счастливый) поворот судьбы П. Б. был связан с Петровским.

Суровое испытание довелось пережить в 1963 году. В итоге (не по своей вине) он оказался на Балхаше, без какой-либо перспективы вернуться в Москву. Жена от него ушла. Друзей рядом с ним не оказалось. Положение его было полно безысходности.

Тогда мы вместе с одним моим другом и одноклассником (бывшим в ту пору заместителем проректора по учебной работе) решились пойти на приём к Петровскому. Не сможет ли он как-то облегчить судьбу выпускника Московского университета.

Петровский принял нас. Мы начали сбивчиво излагать суть дела. «Майор Якоби... Специалист по моделированию на ЭВМ сложных систем... Балхаш... Нельзя ли...» Петровский резко прервал нас: «Будет ли он полезен на военной кафедре?» Эта идея была за пределами наших мечтаний. «Да, да, — вскричали мы, — конечно!» «Кому я должен позвонить?» — с тем же резким напором спросил Петровский. Мы смущённо молчали. А что мы могли сказать?

После секундной паузы Петровский произнёс: «Гречко?» (Гречко был военным министром.) С ума сойти! Мы никогда не мыслили такими категориями! Не дождавшись ответа, Петровский огорошил нас следующими вопросами: «Кто его непосредственный начальник? К какому роду войск он относится?» Мы не знали этого точно. «К ракетным... наверное...» Как-то в письме промелькнуло имя Байдукова, и мы назвали его.

Георгий Филиппович Байдуков... Он летал с Чкаловым через Северный Полюс. Кумир нашего детства. Герой Советского Союза. Генерал-полковник авиации.

Петровский задумался на мгновение, потом вызвал свою секретаршу. Когда она вошла, он попросил её принести справочник о депутатах Верховного Совета СССР. Получив справочник, Иван Георгиевич извлек оттуда, что Байдуков — командующий авиацией Среднеазиатского военного округа.

«Соедините меня с Байдуковым», — попросил он секретаршу, возвращая справочник. Наступило тягостное для нас молчание. Прошло несколько минут, и раздался звонок. На том конце провода был Байдуков. Состоялся такой разговор.

«С Вами говорит член Президиума Верховного Совета Петровский. Мне нужен майор Якоби, который служит в Вашем округе.» После короткой паузы: «Для модернизации военной кафедры.» Байдуков что-то кратко ответил. «Благодарю», — сказал Петровский и повесил трубку.

…Через несколько дней майор Якоби прибыл в Москву для прохождения службы на военной кафедре Московского государственного университета.

* * * * * *

Остановимся на этом и подведём некоторые итоги.

Способствовал поступлению студентов в Московский Университет… Скольким? Наверное нескольким сотням… Я знаю с десяток примеров.

Способствовал поступлению на работу в МГУ, что определило судьбу человека. Скольким? И здесь наверное, нескольким сотням…

Для скольких людей он был защитником в преодолении жизненных трудностей? Не счесть… Многие из нас и не подозревают, что разного рода счастливые обстоятельства их жизни произошли во многом благодаря тому, что существовал на белом свете Иван Георгиевич Петровский…

Он способствовал открытию более семидесяти кафедр и двухсот лабораторий… Он обустраивал Московский Университет… При нём МГУ переживал период своего расцвета.

Петровский участвовал во многих благих деяниях, как депутат, как Член Президиума Верховного Совета, как Академик-секретарь Отделения физико-математических наук Академии Наук СССР, как заведующий кафедрой, как декан (особенно в период Великой Отечественной войны), как председатель Международного математического Конгресса… Десять тысяч его добрых дел — это реальность!

В. М. Тихомиров

* * * * * *

К столетию со дня рождения И. Г. Петровского Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомиров отправили членам Московского математического общества письмо, в котором было написано, что в очередном выпуске альманаха «Математическое просвещение» предполагается статья о добрых делах И. Г. Петровского и предлагалось присылать в редакцию письма об И. Г. Петровском.

Ниже мы публикуем два полученных нами материала.

Письмо А. А. Кириллова

Я многим обязан этому замечательному человеку. Я познакомился с Иваном Георгиевичем еще будучи студентом. На третьем курсе я был заместителем председателя оргкомитета Московской математической олимпиады и по этому поводу пару раз был на приеме у ректора. На четвертом курсе меня и еще нескольких студентов и аспирантов Иван Георгиевич послал в командировки в провинциальные университеты в поисках хороших студентов. Я побывал в Перми, Екатеринбурге и Челябинске. Почувствовал разницу уровней и в то же время познакомился со многими интересными людьми.

В 1961 году мы с Арнольдом были на втором году аспирантуры. Как раз в этот момент были две вакансии на мехмате, и И. Г. предложил нам поступить на работу в МГУ. Разумеется, мы с радостью согласились. Нас не только взяли на работу, но обещали дать однокомнатные квартиры. Все помнят, как непросто было получить «жилплощадь» в то время. Мне пришлось несколько раз приходить к Ивану Георгиевичу по этому поводу. Он просил держать его в курсе и информировать о всех задержках. Конечно, сразу обнаружились препятствия, и я был свидетелем того, как Иван Георгиевич их преодолевал. Не буду пересказывать все детали, но в целом я получил очень сильное впечатление об И. Г. как администраторе.

Приведу здесь несколько его высказываний, которые, как мне кажется, достойны быть выбитыми на скрижалях:

— На административную работу можно назначать лишь того, кто ее ненавидит.

— Я не спрашиваю вас, кто занимается этим вопросом. Мне нужен тот, кто этот вопрос решает.

— Администратор не может принести пользы! Задача хорошего администратора — минимизировать вред, который он наносит.

— Вы совершенно правы… (пауза). Но и я прав! Давайте разберемся.

— Университет существует для студентов!

— Законы пишутся для умных людей... (пауза). И чем глупее человек, тем настойчивее нужно объяснять ему смысл закона.

К сожалению, мне не пришлось иметь с И. Г. научных контактов. Несколько раз, когда я заходил к нему, он жаловался, что административная деятельность поглощает все его время и на занятия наукой уже ничего не остается. Но всякий раз добавлял, что быть плохим ректором он не хочет.

Несколько раз он говорил, что у него свободно только обеденное время и приглашал пообедать вместе с ним. Обедал он, кстати, в профессорской столовой, как все другие преподаватели. Помню однажды он перед обедом достал из кармана пузырек и протер руки. А потом, взглянув на меня, сказал: вот, врачи запретили принимать внутрь, так хоть руки протереть. И он с удовольствием понюхал свои руки.

Один раз я получил от него нагоняй. В 1961 году я защитил докторскую диссертацию и меня стали «поднимать на щит». В частности, выдвинули делегатом от МГУ на XVI городскую конференцию ВЛКСМ. До этого я не поднимался выше должности группорга (минимальная «руководящая» должность в комсомоле) и то неудачно: оба раза (в школе и в университете) получил выговор «за развал работы». В качестве делегата я должен был выступить на конференции с краткой речью. Я не очень понимал, о чем говорить (да и человек, предложивший мне выступить, был довольно несимпатичным). Поэтому я отказался. И. Г. попенял мне за «чистоплюйство» и объяснил мне, что я своим отказом осложнил его отношения с общественными организациями. Я сначала оправдывался, как мог, но быстро понял, что я подвел И. Г., и признал, что был неправ.

Письмо Э. Э. Шноля

Я учился на мехмате МГУ с 1943 по 1948 год. Мое первое знакомство с И. Г. Петровским не имело личного характера и не оставило во мне заметного следа. Иван Георгиевич, которому было тогда лет сорок пять, читал нам лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Как и в написанном им учебнике, предмет на лекциях излагался продуманно и глубоко. Мы чувствовали эту глубину, но понимали лекции не очень хорошо. Сказывалось, вероятно, то, что наш курс был «избалован» блистательными лекциями А. Я. Хинчина (читавшего нам анализ) и И. М. Гельфанда (учившего нас линейной алгебре), а И. Г. прирожденным лектором не был.

С 3 курса я стал заниматься в семинаре И. М. Гельфанда (существовавшем в течение пяти десятилетий) и никаких контактов с Петровским более не имел. К моменту окончания университета я знал, что

Петровский — крупный математик, получивший за свои работы Сталинскую премию и избранный в Академию. Это, пожалуй, все, что было известно мне и большинству моих товарищей.

С 1949 по 1953 год я находился на военной службе в небольшой воинской части вблизи Свердловска. В последние два года у меня появилась возможность вернуться к математическим занятиям. Командование к моим ученым занятиям (в свободное время) относилось благожелательно. И. М. Гельфанд, в аспирантуру к которому я не попал, решил, что мне стоит попробовать сдать кандидатские экзамены в местном (Уральском) университете. Прием кандидатских экзаменов от сержанта срочной службы — мероприятие необычное. Чтобы оно могло быть реальным, И. Г., бывший тогда уже ректором Московского университета, по просьбе И. М. Гельфанда написал для меня краткое рекомендательное письмо (сохранившееся до сих пор).

После демобилизации летом 1953 года я приехал в Москву и вскоре состоялась моя первая личная встреча с И. Г. Я пришел на прием к кабинету ректора МГУ и был вскоре принят им. Он был один и сидел за большим столом. При моем появлении Иван Георгиевич вышел из-за стола и поздоровался со мной за руку. Было ясно, что он не забыл мою фамилию. Не помню, что именно я говорил ему. Наверное, просил ректора дать мне возможность защитить кандидатскую диссертацию в МГУ. И. Г. спросил, устроился ли я уже на работу. Услышав мой отрицательный ответ, он посоветовал устраиваться (не важно куда) и сказал: все, что нужно, он передаст мне через И. М. Гельфанда.

Среди громадного количества разномасштабных дел И. Г. не забыл обо мне, и летом 1955 года я защитил кандидатскую диссертацию в Совете мехмата МГУ.

Преподав мне своим поведением нравственный урок, он вскоре преподал мне (и, наверное, всем присутствовавшим при этом) урок другого рода. Произошло это так. Иван Георгиевич, даже будучи ректором, вел регулярно работавший математический семинар. Его помощником (или заместителем) по семинару был С. А. Гальперн. Как-то раз я пришел на заседание этого семинара. Ко времени начала семинара Ивана Георгиевича не было и все его ждали. Опоздав минут на 15, И. Г. извинился и доклад начался. Не помню, кто докладывал и о чем он рассказывал. Постоянные участники семинара, видимо, понимали все и вопросов почти никто не задавал. Исключением был руководитель семинара. Он то и дело перебивал докладчика таким фразами «Извините, пожалуйста. Я вот это место не понял. Не могли бы Вы немного разъяснить его?». И через несколько минут «А-а, ну вот теперь понимаю, спасибо».

Я недоумевал: Петровский задает вопросы в тех местах, где даже мне все понятно!

По окончании доклада Иван Георгиевич подвел итоги заседания. Вот эта короткая его речь и произвела на меня впечатление, которое не потускнело за все прошедшие годы. Он высказывал мысли, ничего близкого к которым мне в голову не приходило. Стало ясно, что во время доклада (или задолго до него?) он интенсивно размышлял над предметом и что он понял доклад несравненно глубже нас. Эта глубина проникновения особенно впечатляла по контрасту с отсутствием внешнего «блеска мысли»: мгновенного понимания всего, проявления широкой эрудиции и т. д.

Это мое впечатление дополнилось потом рассказами Е. М. Ландиса о том, как он сотрудничает с И. Г. Фактическое содержание этих рассказов я не помню. Сохранился лишь эмоциональный фон. Геня (как я звал Ландиса) говорил об И. Г. почтительно, с некоторым удивлением и восхищением по поводу того, как тот думал над математическими проблемами.

Вот это восхищение перед Петровским-математиком у меня и осталось.

О моих контактах с кафедрой дифференциальных уравнений МГУ

А. Д. Мышкис

В начале 1981 г. ко мне обратились с кафедры дифференциальных уравнений МГУ (по-моему, в связи с каким-то юбилеем) с просьбой написать о кафедре и, в первую очередь, о тех из работавших на ней, кого уже нет с нами. Я охотно взялся за это, написал (окончание датируется 02.04.81) некое сочинение и отослал его на кафедру. Насколько мне известно, никаких последствий у этой акции не было, к чему я, впрочем, не имел претензий, меня вполне удовлетворило радостное волнение, которое я испытал, вспоминая свою молодость. Позже я давал читать эти воспоминания моим друзьям, делавшим различные замечания. Наиболее существенными были замечания О. А. Ладыженской, напомнившей мне некоторые эпизоды, вылетевшие в свое время из моей памяти; ей я особенно благодарен.

Ниже приводится текст 1981 г., несколько уточнённый в связи со сделанными замечаниями, а также содержащий небольшое число дополнений.

Моё первое знакомство с кафедрой дифференциальных уравнений (ДУ) состоялось осенью 1938 г., когда я стал студентом 2-го курса мехмата. Иван Георгиевич Петровский (И. Г.) читал на нашем курсе лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а С. А. Гальперн (С. А.) в нашей группе вёл практические занятия. К тому времени я уже установил, что для меня лучшая манера занятий — не слушать лекции, а читать подряд соответствующий учебник, в каждый небольшой интервал времени (1 – 2 месяца) только один, от начала до конца, после чего сдать экзамен досрочно и переходить к следующей дисциплине. Поэтому я взял книгу Вячеслава Васильевича Степанова и довольно быстро прочитал её. Помню двойственное впечатление от неё: с одной стороны, общие красивые строго доказанные факты, остроумные приёмы, а с другой — отдельные рассуждения, справедливые «вообще говоря». А подобные рассуждения «критически мыслящая» личность, воспитанная на ТФДП, вообще отказывалась считать математикой...

Но тут подоспела отпечатанная на машинке рукопись И. Г., которая в дальнейшем легла в основу его известной книги; рукопись можно было взять в читальном зале. Все трудности, связанные с рассуждениями «вообще говоря», сразу отпали, теория ОДУ была в моих глазах полностью реабилитированной. В то же время, переход на естественный для математического анализа уровень строгости дал возможность обнаружить три неточных места, содержащихся в рукописи. Одно из них относилось к нелокальному рассмотрению уравнения в полных дифференциалах, другое — к необходимости сослаться на теорему о промежуточном значении производной дифференцируемой функции, а третье — к приведению системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду: один из случаев был пропущен. Я сообщил эти замечания И. Г., и он быстро согласился с ними. Это была моя первая беседа с И. Г., и я хорошо помню впечатление, которая произвела на меня его своеобразная «рубленая» манера говорить, его подчёркнутое внимание к собеседнику, обращение по имени и отчеству, неожиданные движения головы и плеч... Прошло несколько дней, и И. Г. показал мне, как он изменил указанные места; я был полностью удовлетворён. Вскоре я досрочно сдал И. Г. экзамен, а когда на следующее лето вышла его книга, я был приятно поражён тем, что в предисловии была выражена благодарность «В. В. Степанову, С. А. Гальперну и А. Д. Мышкис, которые просмотрели всю мою рукопись и сделали ряд ценных указаний»; от радости я даже не заметил, что был превращён в женщину. Тогда же И. Г. подарил мне эту книгу с надписью «от автора». На меня, начинающего студента, это уважительное отношение сильно подействовало.

С. А. по тому времени я плохо запомнил, потому что формальные упражнения я не очень любил, домашних заданий не выполнял, а после сдачи экзамена вообще перестал посещать занятия. Запомнил только его своеобразное произношение «штрихь» и «два штрихя».

Следующая моя встреча с кафедрой состоялась на 3-м курсе, когда Сергей Львович Соболев (С. Л.) начал читать нашему курсу лекции по уравнениям математической физики (УМФ), а И. Г. вёл в нашей группе практические занятия по этой дисциплине. (Впрочем, С. Л. встречался однажды с нашим курсом раньше в качестве своего рода «звезды», каковой он был в те годы, — он уже стал академиком — и рассказывал о математике, о себе, отвечал на вопросы.) Лекции С. Л. были очень содержательными, но порой слишком быстрыми; впрочем, как будто, и они были подкреплены машинописным текстом, который впоследствии лёг в основу известной книги. И. Г. вёл практические занятия своеобразно, в форме учебного семинара, поручая студентам делать доклады на отдельные небольшие темы. Например, я подготовил доклад о выводе стандартного уравнения колебаний струны и в течение часа проводил этот вывод: поскольку обычный вывод, основанный на физических отображениях, меня не устраивал (вообще, «критически мыслящая» личность не считала физику полноценной наукой), я придумал систему искусственных постулатов, из которой это уравнение вытекало на полностью дедуктивном уровне. И. Г. никак не ожидал таких последствий своего поручения.

Лекций В. В. Степанова (В. В.) мне тогда не довелось слышать. (По-моему, я вообще не присутствовал ни на одной лекции В. В., хотя позже не раз разговаривал с ним; помню его темпераментные выступления и реплики.) Но на нашем курсе его хорошо знали, так как он читал лекции по вариационному исчислению на потоке механиков, принимал активное участие в экзаменах, да и вообще, по-моему, на мехмате все студенты знали В. В. О нём ходили всякие рассказы (а иногда их и сочиняли): как он, придя по ошибке на 2-й курс (лектора почему-то не было), стал читать лекцию по вариационному исчислению, и студенты в течение часа стеснялись указать ему на ошибку (большинство её и не заметило) и добросовестно записывали лекцию; как он на каком-то банкете предложил тост за здоровье студента, весьма непочтительно ответившего одному из профессоров, которому В. В. не симпатизировал; как он в конце лекции назначил курсу консультацию «во вторницу», а в начале следующей лекции, вспомнив о своей ошибке, просунул голову в дверь и произнёс «к» и т. д.

В июне 1941 г., сразу после начала войны, мужскую часть нашего курса послали под Рославль на строительство противотанковых рвов. Через два месяца, когда немцы подошли совсем близко, нас вернули в Москву и объявили, что мы мобилизованы и через 2 – 3 дня нас повезут в Свердловск для обучения в эвакуированной туда Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского (ВВИА). За эти дни я сдал госэкзамен вместе со старшим курсом (в связи с военными обстоятельствами мне разрешили сделать это без прохождения 5-го курса) и получил диплом об окончании МГУ.

Несколько позже в Свердловск переехала большая часть преподавателей мехмата МГУ, в том числе и И. Г., который тогда был деканом. После некоторого периода естественного смятения я решил совместить учёбу в ВВИА с математической аспирантурой. А так как И. М. Гельфанда (И. М.), который шефствовал надо мной, когда я был студентом мехмата, в Свердловске не было, и мои интересы еще не вполне определились (как, увы, они не вполне определились и до сих пор), то я решил поступать к И. Г., поскольку я с ним всё же был знаком. И. М., которого я в этот период увидел проездом в Казани, полностью одобрил это намерение. (Кстати, отмечу, что И. М. был вообще очень высокого мнения об И. Г. Помню, как он, ещё не будучи академиком, при мне сказал: «Сейчас среди академиков есть только три математика: это Бернштейн, Колмогоров и Петровский».) И. Г. любезно согласился на это, и в начале 1943 г., кое-как сдав вступительные экзамены, я поступил в аспирантуру, сначала на заочное отделение, а позже, оставаясь слушателем ВВИА, был переведён на стационар. Хорошо помню комнатку в городке Уральского политехнического института, в которой жил И. Г. с Ольгой Афанасьевной и куда мне изредка удавалось попасть в нарушение строгих военных порядков.

Тогда до стационарных программ кандидатского минимума, слава Богу, ещё не додумались, и И. Г. составил мне в общих чертах эту программу. К сожалению, детали выветрились из моей памяти, но я хорошо помню, что И. Г. большое значение придавал широте математического образования, говоря, что более специальные вопросы, которые мне понадобятся для диссертации, я освою сам. Первый из кандидатских экзаменов был по ТФДП и включал теорию тригонометрических рядов (детально программу составил Д. Е. Меньшов на основе известной книги А. Зигмунда) и теорию интеграла Данжуа. В это время в Свердловск был эвакуирован и Кабинет математики и механики МГУ, и И. Г. дал мне записку, по которой я мог брать оттуда книги и журналы на дом — точнее, в казарму.

Летом 1943 г. ВВИА была реэвакуирована в Москву и, к счастью для меня, это совпало с реэвакуацией мехмата. Следующим был экзамен по топологии, основанный на книгах P. Alexandroff – H. Hopf и Г. Зейферта – В. Трельфалля. Затем был экзамен по алгебраической геометрии, но его объём я сейчас забыл.

По ДУ как будто был зачёт, хотя полной уверенности в этом у меня нет. ОДУ были представлены книгой В. В. Немыцкого и В. В. Степанова, рукопись которой, отпечатанная на машинке, хранилась в Кабинете математики и механики. Надо сказать, что главы, которые я читал, были написаны довольно небрежно. В некоторых местах имелись пробелы в формулировках и доказательствах, припоминаю даже утверждение, неверное по своей идее. Небрежность порой доходила до курьёза: так, при изложении работы И. Г. по особым точкам встречались утверждения типа «из уравнения (17) следует и т. д.», тогда как никакого уравнения (17) в рукописи не было; когда же я догадался посмотреть оригинальную работу И. Г., то уравнение (17) оказалось там! Я написал большой список замечаний и отдал его В. В. Степанову, который был несколько смущён, но сказал, что это не его главы. (Впоследствии я не раз убеждался в том, что у Виктора Владимировича Немыцкого соединялись глубокие познания и эрудиция с некоторой небрежностью в письменном изложении, начиная с органической неприязни к знакам препинания.)

Уравнения с частными производными (УрЧП) в зачёте были представлены VIII томом «Успехов математических наук» (1941) со статьями С. Н. Бернштейна, М. В. Келдыша, Л. А. Люстерника и И. Г. Петровского, главой о вариационных методах из 2-го тома книги Р. Куранта – Д. Гильберта и несколькими статьями, перечень которых я забыл.

Летом 1944 г. мой курс окончил ВВИА. Здесь важную поддержку мне оказал И. Г.: по собственной инициативе, без моего ведома он рекомендовал меня Владимиру Васильевичу Голубеву, который был тогда начальником кафедры высшей математики ВВИА, и меня оставили на этой кафедре младшим преподавателем. Естественно, что общение с И. Г. стало более частым. Я бывал у него в квартире на Тверской-Ямской, на даче в посёлке Железнодорожном. (Как объяснил мне И. Г., этот посёлок — та самая Обираловка, где бросилась под поезд Анна Каренина.) Разговоров по существу о математике было мало, мы больше говорили на «околоматематические темы», а также темы, далеко выходящие за пределы математики. При этом И. Г. порой поражал меня глубоким знанием гуманитарных и естественных дисциплин и своими оригинальными высказываниями; некоторые из них я приведу ниже. На даче И. Г. любил далёкие пешие прогулки по испытанным маршрутам и охотно совершал их с собеседниками.

Не знаю, как другими своими аспирантами, но мной И. Г. не руководил в обычном узком смысле: не давал заданий, не спрашивал, чем я в данный момент занимаюсь и т. п. Контакты состояли в упомянутых беседах, а также в следующем: когда И. Г. проводил консультации (а к нему в определённые часы приходили с вопросами представители разных специальностей), я сидел недалеко и слушал, как он пытается разобраться в вопросе и, когда это ему удавалось, давал краткий ответ. Кроме того, И. Г. иногда поручал мне разобраться по существу в получаемых им от различных авторов рукописях и дать краткую характеристику работы или даже подготовить проект ответа. Такая форма общения для меня была чрезвычайно полезной; думаю, что во многих случаях она для работы с аспирантами близка к оптимальной.

В 1945 г. вышла моя первая работа. Она возникла в связи с тем, что при ответе на один из вопросов И. Г. мне понадобилось разобраться в понятии гладкой функции в замкнутой области. На эту тему я и написал статью. И тут огромное дело для меня сделал В. В. Степанов. Он детально прочитал рукопись и сделал большое число разнообразных замечаний; никогда после этого мне не выпадала такая удача с подготовленной статьёй. Замечания были как серьёзные (например, я с тех пор хорошо понял роль организации текста с помощью продуманного расположения и расчленения материала, включения слов «Теорема доказана», «Замечание» и т. п., чтобы читатель в каждый момент чётко понимал ситуацию), так и мелкие, но существенные. Все они показывали, что В. В. разобрался в моей наивной работе самым тщательным образом.

Следующее направление моей работы — нелокальное изучение вопроса о единственности решения задачи Коши на нехарактеристике — также было инспирировано И. Г., который всегда поощрял общие рассмотрения. Для этого мне пришлось обобщить понятие решения ОДУ на случай уравнений с многозначной правой частью. Я сделал это в предположении лишь локальной ограниченности правой части и очень радовался этому, полагая, что ничего подобного ещё не было; кого я ни спрашивал, никто подобного обобщения не знал. Но когда я рассказал свою работу на заседании Московского математического общества (ММО), В. В. Степанов тут же огорчил меня, сказав, что описанная мной конструкция по существу содержится в работах Маршо и Зарембы 30-х гг. (Впрочем, он вполне компенсировал это огорчение, воскликнув «Но это сенсация!» по поводу соответствующего примера неединственности решения.) Это были первые работы в направлении, которое теперь называется теорией дифференциальных включений.

В связи с этим я хочу добавить, что, вообще, по-моему, весьма активная деятельность ММО в те годы в значительной степени определялась участием в его работе В. В. и немногих других энтузиастов, которые своим энтузиазмом заражали остальных. Насколько я помню, В. В. присутствовал на всех заседаниях ММО, разбирался во всех обсуждаемых темах, задавал вопросы, часто темпераментно выступал с различными соображениями по поводу этих тем и т. д. Кстати, от кого-то (не помню, кого) я слышал, будто бы сам В. В. считал себя по математической эрудиции третьим в Советском Союзе, после В. И. Смирнова и А. И. Плеснера.

Отмечу, что на упомянутой выше работе по единственности решения можно проиллюстрировать то общее положение, что бессознательное подражание ученика учителю может иметь и отрицательные стороны. Как известно, И. Г. применял только классические решения ДУ. Поэтому, рассматривая ОДУ с многозначной правой частью, и мне не пришло в голову воспользоваться идеей решения по Каратеодори, что было сделано позже другими авторами. Это преувеличенное тяготение к классическим решениям сказывалось на мне довольно долго. (В дальнейшем проявилось еще одно отрицательное последствие подражания — преувеличенное внимание к ДУ, разрешённым относительно главных членов; это, в частности, помешало мне, когда я занялся дифференциально-функциональными уравнениями, заметить важный класс уравнений нейтрального типа.)

Осенью 1945 г. меня приняли на 1/2 ставки на должность ассистента кафедры ДУ МГУ, где я оставался до лета 1947 г. Порядки тогда были простые, в частности, заседаний кафедры в нынешнем понимании не было, все вопросы решались на ходу; помню только заседания с защитой дипломных работ. Я вёл практические занятия на 3-м (или 4-м?) курсе по УМФ и на 2-м курсе по ОДУ, участвовал в проведении консультаций и экзаменов. Из-за послевоенной путаницы на курсах объединялись студенты разного возраста, со многими я был на «ты». В одной из моих групп на 3 курсе училась Ольга Александровна Ладыженская, с которой я был дружен, и я в трудных случаях обычно вызывал её, зная, что она не подведёт. Помню, как однажды на занятиях возник какой-то непростой вопрос и, к моему удивлению, отвечать вызвалась незнакомая мне студентка, которая дала уверенный исчерпывающий ответ. Ею оказалась Ольга Арсеньевна Олейник, с которой я позже тоже подружился; помню также, что я рецензировал её дипломную работу по регулярности граничных точек для эллиптических уравнений, впоследствии опубликованную в «Математическом сборнике».

Тут я хочу отметить мои «выдающиеся» заслуги в области УрЧП: именно я вовлёк в эту область О. А. Ладыженскую (всё-таки я был преподавателем, а она студенткой, и она была младше). А дух соревнования привел к тому, что её сокурсница О. А. Олейник также включилась в работу семинара по УрЧП (см. ниже) и нашла в этой области своё призвание.

В одной из групп 2-го курса, где я проводил практические занятия, учился Е. М. Ландис, уже известный мне со слов моего друга А. С. Кронрода, с которым он работал. Помню, как он предложил упрощение изложенного на лекциях доказательства Перрона теоремы Пеано, и на экзамене студентка предупредила меня, что она будет доказывать эту теорему «по Ландису». Впоследствии я и с ним сблизился. (Вспоминаю в качестве курьёза, как мы с О. А. Олейник принимали позже у него кандидатский экзамен по УрЧП. И. Г., его руководитель, не раз давал нам подобные поручения. Но так как Е. М. уже был нашим другом, то экзамен с самого начала принял неофициальный характер и превратился в довольно длительный безуспешный поиск — чего же всё-таки Е. М. не знает. Однако нападающих было двое, и в конце концов мы поймали его на одном мелком вопросе, чем и были полностью удовлетворены. Ещё позже я имел честь быть у Е. М. одним из оппонентов по его докторской диссертации.)

Весьма важную роль в моей жизни в этот период играли научные семинары, в особенности семинары по ДУ. Сперва это был общий семинар кафедры, проходивший под руководством В. В. Степанова. В нем активно участвовали И. Г. Петровский, В. В. Немыцкий, Андрей Николаевич Тихонов, Илья Несторович Векуа, Лазарь Аронович Люстерник и другие; посещала его и О. А. Ладыженская. Несколько позже появился «маленький» семинар по УрЧП. Он первоначально был создан (по-видимому, по инициативе О. А. Ладыженской) для изучения только что появившегося в русском переводе II тома фундаментальной монографии Р. Куранта–Д. Гильберта. Мы с О. А. пошли просить И. Г. быть руководителем этого семинара (как она вспоминает, я долго не решался на это), и он сразу ответил «Почему бы и нет?». «Маленький» семинар систематически посещали из преподавателей — И. Г., С. А. Гальперн, М. А. Крейнес и я, из аспирантов — М. И. Вишик и Р. А. Александрян, из студентов — О. А. Ладыженская и О. А. Олейник, другие участники появлялись эпизодически.

Этот семинар довольно быстро из учебного стал научным, перестал быть «маленьким», с годами приобретая всё больший авторитет. Возможно, что современный всемирно известный семинар имени И. Г. Петровского можно считать его прямым наследником.

Что касается общего семинара кафедры, то он в тот же период распался на семинар по ОДУ под руководством В. В. Степанова и В. В. Немыцкого и семинар по УрЧП под руководством С. Л. Соболева, И. Г. Петровского и А. Н. Тихонова (А. Н.) (СПТ, обычно руководителей перечисляли в таком порядке). Оба эти семинара собирали докладчиков со всего Союза и были чрезвычайно полезными как для них, так и для всех участников. Я более активно участвовал в семинаре СПТ, так как мои интересы в то время были ближе к УрЧП. Обычно на семинаре СПТ присутствовало человек 20; среди постоянных участников укажу С. А. Гальперна, В. И. Кондрашова, З. Я. Шапиро, Р. А. Александряна, М. И. Вишика, А. И. Гусейнова, несколько позже О. А. Олейник. Некоторые иногородние математики — такие как О. А. Ладыженская — также часто на нём присутствовали и регулярно выступали. Обычно докладывалось со всеми подробностями небольшое число результатов, после чего кратко сообщалось об их развитии. С. Л. мгновенно включался в любую тему, приводил глубокие соображения, как общие, так и конкретные. Тугодум И. Г. больше молчал, иногда задавал вопросы (вспоминаю, как кто-то излагал эпизод из старой работы И. Г. и её автор долго не мог согласиться с некоторыми своими рассуждениями); но когда он что-то понимал, то понимал очень глубоко. А. Н. время от времени отпускал неторопливые краткие замечания, которые становились особенно существенными, когда речь шла о возможной физической трактовке или каких-либо приложениях математики. Руководители семинара и сами не раз выступали на нём с докладами.

Постепенно проникали в семинар СПТ идеи и методы функционального анализа. Инициатором этого был, конечно, С. Л. Соболев, а главным пропагандистом среди молодёжи — Марко Иосифович Вишик. Позже значительный интерес участников семинара привлекла также общая теория разностных схем, связанная с решением краевых задач на ЭВМ. Первые доклады на эту тему в конце 40-х годов сделала О. А. Ладыженская.

Вспоминаю, что семинар обычно начинался с опозданием минут на 20. Это время использовалось на полезные беседы участников семинара друг с другом.

Молодые люди, группировавшиеся вокруг «маленького» семинара и семинара СПТ, много времени проводили в Кабинете математики и механики МГУ и его окрестностях. Мы много читали, занимались собственными задачами, делились результатами друг с другом, просто разговаривали на всевозможные темы. В частности, я хорошо помню многочисленные разговоры с М. И. Вишиком, в которых он подробно рассказывал мне содержание своих работ; видно было, как быстро развивается его талант, как результаты этих работ становятся всё более общими и законченными, а развиваемые методы находят новые и новые приложения.

Думаю, что этот период — один из самых ярких в моей жизни.

Большое влияние на всех нас оказала обзорная статья И. Г. Петровского «О некоторых проблемах теории УрЧП», появившаяся в 1946 г. в «Успехах математических наук». Кстати, эта статья, вместе с указанными выше статьями из VIII тома УМН и фрагментами II тома книги Куранта – Гильберта, многие годы в том или ином объёме обязательно входила в кандидатский экзамен по УрЧП.

Тему для кандидатской диссертации подсказал мне И. Г. в конце 1945 г., за полгода до срока окончания аспирантуры. Вообще, в те времена считалось, что в аспирантуре главное — учиться и заниматься наукой; получится диссертация — хорошо, не получится — тоже не большая беда. Поэтому и И. Г. сказал мне: «Вы собираетесь писать диссертацию? Что, если…». Он предложил посмотреть, нельзя ли провести рассмотрение 2-й краевой задачи для уравнения Лапласа в той же (или хотя бы в сравнимой) общности, что известна для задачи Дирихле. Больше никаких указаний он мне не давал. Как это непохоже на современное «вымучивание» диссертации!

Начав заниматься этим вопросом, я довольно быстро ушёл в сторону так называемой видоизменённой 1-й краевой задачи. Первые результаты я доложил на семинаре СПТ, причём помню, как А. Н. Тихонов тут же предложил на основе физической аналогии элементарное доказательство одного из центральных утверждений, которое я считал особенно трудным. За дальнейшими моими потугами в этой области уже никто не следил, и я нагораживал одну трансфинитную индукцию за другой, пока не родил сочинение страниц в 150. Одним из оппонентов был А. Н. В день защиты я за полчаса рассказал ему основные результаты диссертации, после чего он в моё отсутствие написал отзыв, удививший меня глубиной и указанием на связи (в частности, с так называемой задачей Робена), о которых я по своей необразованности даже не подозревал.

И. Г. с моей диссертацией не знакомился. Он только спросил, что всё-таки из неё вытекает для 2-й краевой задачи; пришлось мне сказать, что довольно мало. Это не помешало ему за небольшой срок до защиты предложить мне её как докторскую, защитив предварительно в качестве кандидатской работу по единственности решения задачи Коши. Но я сразу же отказался.

Я уже отклонился от строгой хронологии. Приведу ещё отдельные эпизоды того моего периода жизни, так или иначе связанные с кафедрой ДУ.

Большой шум наделала защита докторской диссертации Н. А. Леднева. Способный, но весьма самоуверенный и недостаточно культурный молодой человек объявил о создании им нового, самого общего метода решения УрЧП. На защите он держался вызывающе. Вывел из себя С. Л. Соболева, повторив несколько раз, что результаты С. Л. содержатся как весьма частный случай в его теории; в конце концов С. Л. спросил, почему он не говорит, что речь идёт о дипломной работе С. Л. С В. В. Степановым конфликт разгорелся так, что присутствующим на мгновение показалось, что дело дойдёт до физических действий: В. В. кричал «Мальчишка!» и т. д. Впрочем, голосование было положительным. Впоследствии оказалось, что основные результаты Н. А. Леднева, хотя и полученные им самостоятельно, содержались в более ранних работах французских авторов. В обзорной статье И. Г., о которой упоминалось выше, фамилия «Леднев» была в последний момент изменена на «Рикье», что хорошо видно по различию набора. И. Г., который также был оппонентом, чувствовал себя неловко; утешая себя, он повторял: «Н. А. Леднев всё-таки распространил теорему Коши – Ковалевской на случай функций, неаналитических по t, пусть он за это будет доктором.» (Впрочем, по-моему, ещё позже обнаружилось, что и этот результат содержался в работе одного японского автора. Н. А. Леднев после защиты почти не занимался математикой, а переключился на опровержение теории относительности, проблему Атлантиды, «обоснование» антисемитизма и т. д.)

Вспоминается ещё, как во время защиты одной из аспиранток И. Г. или С. Л. председатель Совета предупредил её, что время выступления истекает: на это докладчица заявила «Я могу говорить быстрее!», после чего ошеломила слушателей темпом своей речи.

Но довольно о пустяках.

Летом 1947 г. меня как военнослужащего перевели на работу в Ригу. Связи с мехматом МГУ и, в частности, с кафедрой ДУ, естественно, стали ослабевать. Впрочем, первое время я старался каждый месяц бывать в Москве и обязательно приходил на семинар СПТ. Несколько раз по старой памяти принимал участие в экзаменах — при простых порядках того времени это было возможно. И. Г. продолжал давать мне на просмотр некоторые из поступавших к нему рукописей. Кроме того, я много внимания уделял известным учебникам И. Г., о чем хочу сказать подробнее.

Больше всего я занимался его «Лекциями по теории ОДУ»: был издательским редактором II (1947) и IV (1952) изданий, а также готовил к печати III (1949), V (1964), VI (1970) и посмертное VII (1984) издания. С ростом объёма обязанностей, особенно после назначения его в 1951 г. ректором МГУ, И. Г. всё меньше внимания мог уделять своим книгам. Поэтому подготовка очередного переиздания проходила так. Когда

И. Г. сообщал о предстоящем переиздании, мы (чаще всего С. А. Гальперн, О. А. Олейник и я) вносили свои предложения, совместно обсуждали их, затем обсуждали вместе с И. Г., после чего я, а также О. А. Олейник составляли окончательный текст; я также держал за автора корректуру. Учебник, сохраняя общее направление и характер, постепенно расширялся и модернизировался. Помню, как мы долго уговаривали И. Г. перейти для линейных систем от скалярных к векторно-матричным обозначениям: И. Г. опасался, что последние приведут к более формальному усвоению этого раздела курса. Лишь убедившись, что такой переход осуществляется повсюду, И. Г. решился на него. Были и многие другие изменения и добавления, причем при обсуждениях И. Г. особенно старался сдерживать расширение основного текста и с облегчением вздыхал, когда мы договаривались о переносе предлагаемых добавлений в упражнения. Всё это в конце концов привело к тому, что когда я как-то, после 6-го издания, при разговоре с И. Г. сказал «Ваша книга», он заметил (как мне показалось, с некоторой досадой): «Она уже больше Ваша, чем моя». Конечно, это преувеличение.

Принимал я участие, — впрочем, гораздо меньшее, — и в подготовке двух других книг И. Г.: был редактором первого издания (1948) книги «Лекции по теории интегральных уравнений», написал раздел, посвящённый теории потенциала, для книги «Лекции по теории УрЧП» (1950) и т. п. В дальнейшем «шефство» над этими книгами взяла на себя О. А. Олейник. Полагаю, что все эти книги, переведенные на многие языки, и сейчас в значительной степени сохранили своё значение.

Когда я бывал в Москве, И. Г. обычно приглашал меня зайти к нему домой, а летом — на дачу. Часто к этим визитам присоединялись С. А. Гальперн и М. А. Крейнес. Вспоминаю, как однажды мы с С. А. шли к И. Г. (кто был ещё, не помню), и С. А. мне сказал: «Почему Вы говорите — гистеродифференциальные уравнения?» (А я этот термин взял из западных статей, мне он показался каким-то солидным, учёным, что ли.) «Назвали бы по-русски — ДУ с запаздывающим аргументом, например». Такое название прижилось, однако позже С. А. не мог припомнить этот эпизод. Впрочем, С. А. некоторое время с недоверием относился к этому новому направлению и не раз спрашивал у меня: «А что из Ваших результатов вытекает нового для обычных ДУ?»

Вспоминаю также, как во время одной из длительных прогулок на даче у И. Г., вместе с С. А. и М. А., состоялся ожесточённый спор о правомерности «нестрогого» изложения математики при её преподавании прикладникам. Я тогда постепенно приходил к идее об относительности понятия строгости и отстаивал законность одновременного сосуществования различных уровней строгости. На меня особенно активно нападал М. А., его поддерживал С. А. И. Г. больше слушал, иногда задавал вопросы, и его точку зрения на эту проблему я не смог уловить: думаю, что она была очень широкой, как и на многое другое. (Как часто бывает, серьёзному сопутствовало смешное: когда мы втроём, возвращаясь домой, подошли к платформе, у противоположной её стороны стояла электричка; мы с С. А. быстро залезли на платформу, но невысокий полный М. А. несколько раз попытался подпрыгнуть и в конце концов жалобно простонал: «А как же я?»; пришлось нам возвращаться и подсаживать его.) Вскоре И. Г. сказал мне, что Я. Б. Зельдович, исходя из аналогичных соображений, написал вводный курс высшей математики на физическом уровне строгости. И. Г. свёл меня с Я. Б., и этот контакт оказался в дальнейшем одним из самых существенных в моей жизни.

Весной 1953 года И. Г. предложил мне подать документы на конкурс в МГУ на должность профессора кафедры ДУ. Дело зашло довольно далеко, даже состоялся разговор о предоставляемой жилплощади. Однако в Латвийском государственном университете, где я тогда работал, мои отношения с администрацией были весьма напряжёнными и в порядке мелкой мести (так было тогда принято) мне дали официальную характеристику только тогда, когда срок конкурса уже истёк. И. Г. мне потом говорил, как всех удивили слова в этой характеристике, необычные для такого документа: «По характеру самолюбив и вспыльчив». Возможно, встревоженный этим, либо распространившимся слухом о происшедшем скандале, И. Г. при очередной встрече потребовал от меня полную информацию по этому поводу («Как на духу» — сказал он) — и успокоился, узнав, что в конфликте не было никакой политической подоплеки. Но срочно уезжать из Риги мне было необходимо, и поэтому я подал документы на замещение должности зав. кафедрой ДУ Белорусского госуниверситета и сразу же прошел конкурс. Через месяц после моего приезда в Минск я получил телеграмму от И. Г. с повторным предложением подать документы на конкурс в МГУ. Возможно, это был момент, когда от моего решения могла в корне измениться моя судьба. Не уверен, что я был прав, я долго колебался, но в конце концов счёл неэтичным сразу же после прохождения одного конкурса подать на другой. Больше такой возможности мне не представлялось; живешь, увы, всего один раз.

Вот еще несколько разрозненных воспоминаний, связанных с И. Г.

Пока у И. Г. не было постоянной автомашины, он, естественно, пользовался городским транспортом; однако поездок в метро избегал, говоря, что пребывание под землёй ему неприятно. Собственной машины у И. Г. никогда не было.

И. Г. старался не прикасаться голой ладонью к дверным ручкам в общественных зданиях; при необходимости он прикрывал ладонь чем-нибудь.

Во время беседы И. Г. вдруг принялся щипать себя за ресницы. Заметив мой взгляд, он сказал: «У меня короткие ресницы, и они подворачиваются».

И. Г. очень любил живопись, у него дома были картины и альбомы. Показывая мне одну картину и рассказывая о ней, И. Г. неожиданно назвал фиолетовый цвет синим. С удивлением я узнал, что И. Г. — дальтоник. Как он мне объяснил, для нормального зрения множество цветов двумерно (если не учитывать яркости), а у дальтоников — одномерно.

И. Г. всегда произносил «Холмогоров», говоря, что так правильнее.

Долгое время И. Г. не любил никуда ездить — ни по Советскому Союзу, ни за границу. Он говорил, что поездки выбивают его из рабочей колеи, и предпочитал любым поездкам свой дом и свою дачу. Позже он, по-видимому, в этом отношении изменился.

Как-то у меня с И. Г. зашла речь о том, что, став ректором, он существенно ослабил, а несколько позже и практически прекратил свою личную работу в области математики. Конечно, он переживал это обстоятельство; к тому же он знал, что кое-кто порицает его за «измену» математике. Я сказал, что считаю его деятельность как ректора важнее его возможных упущенных личных достижений в науке и что, вообще, честные квалифицированные люди, имеющие способности к важной организационной работе и возможности её проводить, не должны уклоняться от неё, передоверяя её людям неквалифицированным или нечестным. И. Г. полностью согласился с этим. Ему очень понравилось, когда я напомнил высказывание Л. Толстого о том, что для начальника главное не столько проявлять инициативу, как не запрещать ничего хорошего и не разрешать ничего дурного. И. Г. сказал, что он именно так и поступает. (Впрочем, мы знаем, что в ряде существенных случаев И. Г. проявлял и инициативу.) Его способность быстро и неформально решать организационные вопросы была несомненной. Думаю, что эта сторона деятельности И. Г. заслуживала бы серьёзного рассмотрения.

Разговор о доказательстве ослабленной гипотезы Гольдбаха. Я выразил сомнение в том, что подобного рода результат может оказаться для чего-либо полезным, кроме других утверждений того же характера. И. Г. не согласился: «Не может быть, чтобы такой красивый результат, с простой формулировкой и столь сложным доказательством, не нашёл в своё время приложений».

Чем, вообще, надо заниматься в математике? И. Г. говорил, что работами двоякого характера: либо тем, что непосредственно для чего-то нужно, либо же проблемами в наиболее общей постановке. (Впрочем, из сказанного перед этим видно, что он отдавал должное также эстетической и спортивной сторонам.) Он как-то сказал, что считает несправедливым по отношению к преподавателям университетов наличие академических математических институтов, в которых учёные проводит исследования в области «чистой» математики без педагогической нагрузки и непосредственных контактов с молодежью.

Оценивая значимость деятельности того или иного математика, И. Г. на первый план выдвигал те трудные теоремы, представляющие общий интерес, которые тот доказал. (Когда о ком-либо И. Г. говорили, что тот сильный математик, он часто так и спрашивал: «А что он доказал?».) Создание концепций, новых подходов И. Г. ценил меньше. Может быть, по этой причине он некоторое время испытывал определённое недоверие к применению в теории ДУ методов функционального анализа: возможно, ему казалось, что здесь порой речь идёт не о доказательстве трудных теорем, а о словесных спекуляциях. Позже он изменил эту точку зрения: в частности, это проявилось в полном признании значения работ С. Л. Соболева. Он стал соглашаться с тем, что кроме математиков «пробивного» типа (к которым он себя справедливо относил) существенную пользу могут принести и математики другого склада.

«Я могу ошибиться в доказательстве, но не в утверждении» — как-то сказал И. Г., имея в виду свою работу, восполняющую пробел в его статье, в которой доказывалась разрешимость задачи Коши для гиперболических систем уравнений. Правда, в последних работах, посвященных оценке числа предельных циклов для ОДУ с рациональной правой частью, интуиция подвела И. Г.; хотя его основная идея топологического анализа решений после перехода к комплексным значениям всех участвующих величин, несомненно, весьма глубока и перспективна.

Из-за перегруженности центральных математических журналов одно время стали в большом количестве появляться вузовские, региональные и т. п. сборники. И. Г. был решительным противником этого. Он говорил, что с хорошими работами центральные издания справятся, а плохие вообще нигде не нужно публиковать. (Думаю, что такой подход несколько прямолинеен.)

И. Г. не очень внимательно следил за новыми работами и журнальных статей не читал. Он был невысокого мнения о своей математической эрудиции. Так, известно, что его работа по особым точкам для систем ОДУ имела пересечение с более ранней работой О. Перрона. И. Г. объяснял это так: «Мне сказали, что надо решить эту задачу, я и решил её». Однако время от времени он читал математические книги, не относящиеся непосредственно к теме его научных работ. Он говорил в шутку, что любит болеть, так как может в это время спокойно предаваться такому чтению. Помню, например, как он читал «Математический анализ на многообразиях» М. Спивака.

Пожалуй, более внимательно И. Г. следил за развитием естественных наук — физики, биологии и т. д., более всего предпочитая популярную литературу высокого уровня типа «Учёные о своей науке»; не раз он мне рекомендовал такие книги. Он обдумывал математические модели общих явлений. Помню, как он говорил о необходимости изменения теории относительности: «Не может быть, чтобы скорость света имела такое фундаментальное значение». Он говорил, что мечтает написать книгу «История человеческих заблуждений».

Как-то я сказал И. Г., что чем бы я в математике ни занимался, меня всегда заносит в ТФДП и в классический анализ. И. Г. ответил, что последние годы его всё время «заносит» в алгебраическую геометрию.

Однажды об одной группе людей я сказал, что они мне напоминают собак в том смысле, что общее название может скрывать в себе совсем различное содержание. И. Г. сразу ответил: «А мне профессора напоминают собак» — и тут же назвал несколько профессоров, которых он считал весьма слабыми («аховыми»).

Когда в 1950 г. я перешёл на работу в Латвийский государственный университет, я решил для повышения педагогической квалификации посетить несколько учебных лекций и практических занятий на мехмате МГУ, поглядеть на них с позиции преподавателя. Быть может, мне особенно не повезло, но все эти занятия, хотя и проведённые известными учеными, оказались, за исключением лекций А. Г. Куроша, неудачными. Когда я, не называя фамилий, поделился своим недоумением с И. Г., тот сказал, что это его не удивляет, но что он считает главным достоинством МГУ не обязательные учебные занятия, а исследовательские семинары.

Разговор о преподавании математики в techинститутах. И. Г. считал главным укрепление не методического цикла (методику как науку он вообще невысоко ставил), а собственно математического. Он полагал, что преподаватель математики в школе должен в первую очередь знать саму математику, тогда и остальное приложится. По этому вопросу у него было много противников.

Как-то И. Г. вспоминал свои молодые годы. Я спросил, как получилось, что при окончании школы он получил 4 по математике, тогда как все остальные оценки (кажется, кроме еще одной четверки) были отличные. И. Г. ответил, что в школьном курсе математики были вопросы, которые ни он, ни учитель не понимали; но учитель это скрывал, а он — нет. Еще он рассказал, как в начале 20-х из-за материальных трудностей был дворником детского сада (по-моему, в течение года). Там он и познакомился с Ольгой Афанасьевной, которая заведовала этим садом.

В институте, где я работал, обсуждался вопрос об организации всесоюзной конференции по ОДУ. Я позвонил И. Г. и спросил, не согласится ли он быть председателем Оргкомитета, сказав, что организационная работа его совершенно касаться не будет, а его функции будут номинальные и представительские, что не должно отнять у него много времени. И. Г. сразу решительно отказался, сказав, что не хочет быть «свадебным генералом».

Когда И. Г., став ректором, приглашал зайти к нему домой, он иногда это делал так: просил прийти к концу рабочего дня к нему в приёмную и подождать, пока он освободится. Я хорошо видел, как любой человек, имеющий дело к И. Г., мог с ним встретиться. После каждого посетителя И. Г. выходил в приёмную, внимательно взглядывал на присутствующих, спрашивал «Вы ко мне?» и по какой-то своей системе приглашал кого-либо в кабинет. Когда все проходили, И. Г. приглашал меня, просил принести чаю и не спеша говорил о текущих делах, с огромной скоростью распределял вновь полученные бумаги, порой звонил в «высокие» инстанции («Да нам нужен пустяк, всего 10 миллионов рублей») и т. п. (Я как-то спросил у И. Г.: с кем из членов Политбюро он непосредственно общался; он ответил: с Хрущевым.) Потом мы уходили, причем И. Г. обязательно прощался с гардеробщицей и вахтёром. Раньше мы шли пешком от МГУ до дома И. Г., потом эти прогулки стали сокращаться (часть пути мы проезжали на машине) и, в конце концов, совсем отпали. Кстати, в последние годы И. Г. очень плохо засыпал и поэтому принимал на ночь снотворное, от влияния которого не сразу отходил по утрам.

Как-то, в начале 50-х годов, я оказался дома у И. Г. после такой прогулки довольно поздно. С удивлением я узнал, что к 12 часам ночи он должен ехать в Министерство высшего образования для беседы с министром. Такими были порядки в «высших сферах» того времени.

Однажды я пришел в приёмную к И. Г. с сыном, тогда студентом МГУ: И. Г. знал его ребёнком и захотел вновь увидеть. Дел у нас никаких к И. Г. не было и мы вскоре стали прощаться. И. Г. задержал нас, сказав, что он обычно видит у себя студентов — кандидатов на отчисление; надо же ему и с нормальными студентами иногда встречаться.

Анекдот: И. Г. со смехом рассказывал, что он как-то подписал приказ по МГУ, в котором был пункт об отчислении одного студента за пьянство. Приказ пошёл в типографию для размножения, откуда вернулся обратно, поскольку упомянутый пункт, как оказалось, был сформулирован так: «За нарушение установленных мной правил пьянки и хулиганства и т. д.».

Гораздо более серьёзный случай: группа студентов была отчислена из МГУ за создание «организации». Они написали устав, собирали взносы (уходившие, в основном, на чай), собирались на дому и обсуждали разные вопросы. При отчислении им собирались выдать характеристику, в которой кроме общих слов было сказано: «Отчислен из МГУ за участие в антисоветской организации». И. Г. говорил, что он с трудом добился изменения этой формулировки.

Когда кто-либо жаловался на чрезмерную занятость, И. Г. любил повторять восточную пословицу: «По милости Аллаха каждому человеку дано столько забот, сколько он сам того желает».

Рассказывая (с определённым порицанием) о весьма известном математике, беспартийном, который об одном своём сотруднике сказал, что тот плохой член партии, И. Г. вспомнил анекдот: прокурор сказал судьям: «Совесть подсудимого такая же чёрная, как его борода», на что подсудимый ответил: «А у Вас, гражданин прокурор, совсем бороды нет». И. Г. тоже был беспартийным, но по специальному решению ЦК КПСС он имел право посещать закрытые партийные собрания в университете.

И. Г. прямо-таки из себя выходил, говоря о случаях сознательного замалчивания недостатков перед «высокими» инстанциями, которое может затормозить развитие нашей науки. Он с возмущением говорил мне: «N обманывает правительство, говоря, что наша наука передовая... Никакая она не передовая!». О. А. рассказывала (уже после смерти И. Г.), что однажды, разговаривая с N на эту тему по телефону, он пришел в такое возбуждение, что она, серьезно боясь за его жизнь, на коленях умоляла его прекратить разговор.

В последние годы большого культа был в ходу термин «учение»: «учение Мичурина», «учение Павлова» и т. д. И. Г. весьма отрицательно относился к этому, небезосновательно усматривая в этом не только канцеляризм, но и стремление создать как бы маленькие культы, ведущие к омертвлению науки. Чуть позже всюду стали появляться «маяки». Когда мы с О. А. Олейник писали статью для УМН, посвященную 60-летию И. Г., я употребил этот термин по отношению к его узловым результатам в области УрЧП как вполне адекватную характеристику. Однако когда мы показали И. Г. проект статьи, он категорически отверг этот эпитет.

И. Г. решительно осуждал проявления антисемитизма. Помню, как он с возмущением рассказывал об одном математике, что тот, подав докторскую диссертацию, написал в заявлении, чтобы среди его оппонентов не было евреев. Когда я выразил сомнение в возможности столь откровенного поступка, И. Г. сказал: «А он и мне написал, — почему среди моих друзей и учеников так много евреев?».

«А женщины, вообще, лучше мужчин» — как-то сказал И. Г. По-моему, шла речь о том, что, как правило, у женщины из-за заботы о детях выше чувство ответственности, чем у мужчины.

Однажды в тяжёлые послевоенные годы И. Г. рассказывал с осуждением об одном из влиятельных митрополитов (кажется, Николае): того спросили, нужно ли в условиях длительного недоедания строго соблюдать пост, и он ответил, что нужно. И. Г. прекрасно знал историю христианства в России. Помню, в частности, как он мне с увлечением рассказывал о протопопе Аввакуме.

Вспоминаются ожесточённые споры по поводу периода «культа личности». И. Г. возмущался эксцессами, но, идя против распространённого мнения, считал необходимым отмечать и положительные стороны, связанные с дисциплинирующим началом. «При Сталине был порядок» — это его слова, которые надо понимать, конечно, не как одобрение Сталина, а как решительное осуждение расхлябанности, необязательности, с которыми он всё чаще сталкивался в последние годы. Характерная деталь: И. Г. очень нравился известный нестеровский портрет И. П. Павлова за то, что на нём прекрасно передан его волевой характер.

И. Г. как-то сообщил мне, что один из его учеников, оставшись на оккупированной территории, сменил русскую фамилию на немецкую, а теперь прислал письмо из ФРГ, спрашивая, нельзя ли ему вернуться. И. Г. ему не ответил. Рассказав об этом, он с досадой добавил: «Не повезло мне на учеников...». Он пояснил, что имел в виду также тех из них, кто после получения учёной степени практически перестал заниматься наукой. Тех же, кто не перестал, было не очень много. (Среди них укажу С. А. Гальперна, Е. М. Ландиса, В. П. Михайлова, О. А. Олейник, В. С. Рябенького, Л. А. Чудова. Заодно хочу отметить, что И. Г. никогда не создавал своим ученикам каких-то особо благоприятных условий, не «проталкивал» их и т. п., как это порой делают.)

Несколько слов о моих контактах с В. В. Немыцким. Хотя мои интересы уже давно лежат гораздо ближе к ОДУ, чем к УрЧП, мои постоянные контакты с В. В. установились после моего отъезда из Риги. (Впрочем, я не раз бывал на «большом» семинаре В. В., даже выступал на нём с докладами, да и оппонентом я был впервые у аспиранта В. В.) Помню, как примерно в 1956 г. я пригласил В. В. в Минск в качестве официального оппонента по диссертации, посвящённой «полувырожденным» автономным системам на плоскости. В. В. выступал экспромтом, как тогда было принято, и, оценивая работу, указал на такие глубокие связи, о которых я только догадывался.

В дальнейшем я не раз участвовал вместе с В. В. в разнообразных конференциях и совещаниях в различных городах. Бросалась в глаза объединяющая роль В. В. во всесоюзном масштабе в классических направлениях теории ОДУ. Думаю, что после его смерти у нас пока нет человека, играющего подобную роль.

По вопросу о стиле преподавания математики во втузах я имел с В. В. небольшое столкновение на пленарном заседании Научно-методического совета по математике при МВССО СССР. Речь шла об уровне строгости, и В. В. сказал примерно следующее: назовём условно строгие математические рассуждения «правильными», а другие — «неправильными»; так давайте обучим прикладников рассуждать правильно, а рассуждать неправильно они и без нас научаться (поддержано аплодисментами многих присутствующих). Я не мог с этим согласиться.

При поездках по различным городам я видел острый интерес В. В. к историческим, природным и архитектурным памятникам, его знания в этой области. Единственный раз я был дома у В. В.; он тогда готовился к докладу на заседании Географического общества об одном из своих походов в горы.

Как известно, к 50-летию Советской власти готовился сборник обзорных статей о развитии математики в СССР за 1957 – 1967 гг. Статью, посвящённую ОДУ, поручили готовить М. А. Красносельскому и мне. Мы разбили её на главы и для каждой подобрали автора с тем, чтобы за нами остались согласование и доделка, а вся статья шла бы под коллективным соавторством. В частности, мы попросили В. В. написать главу, посвящённую автономным системам в $\mathbb{R}^n$. Он охотно откликнулся и вскоре прислал рукопись. Однако работа по согласованию глав оказалась более значительной, чем предполагалось, и в главу В. В. пришлось внести существенные изменения и добавления. Проделав это, мы оставили фамилию В. В. как автора главы (возможно, в этом была наша ошибка) и послали рукопись ему на просмотр. Он довольно резко отказался от авторства, написав нам, что это уже не его статья, эту статью он не писал и т. п. Пришлось нам фамилию В. В. снять, оставив только выражение благодарности за присланные материалы. (Впрочем, как известно, этот сборник, хотя и был набран, в свет по решению некой комиссии не вышел.) Судя по дальнейшим контактам, на мои добрые отношения с В. В. этот эпизод не повлиял.

Мои заметки подходят к концу. Конечно, были и более поздние контакты с членами кафедры ДУ, особенно с О. А. Олейник и М. И. Вишиком. (Вероятно, здесь наиболее яркими были: совместная работа над двумя большими обзорными статьями по развитию теории УрЧП в СССР, из которых, впрочем, была опубликована только одна; работа над юбилейной статьёй к 60-летию И. Г.; совместное участие в различных конференциях и школах; участие в защитах диссертаций и т. д. Я надеюсь, что ещё может представиться случай вернуться к этому.) Но и эти контакты постепенно затухают, превращаясь в память о чём-то большом и светлом.

О Николае Николаевиче Константинове

С. Ландо

Воспоминания о Николае Николаевиче Константинове — тот редкий случай, когда их автор имеет полное право не считать себя стариком. Есть много людей младше меня десятью и двадцатью годами, у которых за плечами годы, проведенные рядом с ним, и которым тоже есть, что вспомнить.

Как ни удивительно, я совсем не помню, когда мы перешли на «ты». Этот переход, который в общении с другими людьми дается мне нелегко, произошел совершенно незаметно. Знаю только, что это было так давно, что Коля тогда был старше меня по меньшей мере вдвое. Зато свою первую встречу с ним помню совершенно отчетливо. Впрочем, это была не наша встреча: в зале Симферопольского университета вокруг меня сидело еще несколько сот участников Всесоюзной математической олимпиады, когда на сцену поднялся бодрый человек средних лет и начал подготавливать нас к просмотру мультфильма, нарисованного компьютером. Он тогда не показался мне старым, как не кажется им и сейчас. Да он, в сущности, и не изменился, не исчерпал присущий ему запас бодрости и энергии. Разве что голова побелела.

...Показанный в Симферополе мультфильм производит на меня теперь, пожалуй, даже большее впечатление, чем тогда. Назывался он «Кошечка» и продолжался минуту или две — в зависимости от того, с какой частотой кадров его показывали. Сюжет незатейлив — кошечка бежит и поворачивает голову. Тридцать лет назад «ЭВМ» (только так — и никак иначе) были для нас недоступной легендой, и сам факт того, что машина может *рисовать* представлялся чем-то из области фантастики. Сейчас же меня гораздо больше поражает *естественность* походки нарисованного животного. Тогдашнее объяснение Константинова: «мы просто составили дифференциальные уравнения, описывающие движение каждой части тела, задали начальные условия, а затем машина эти уравнения решала» — представляется основополагающим принципом и по сей день. Похоже, что он нигде по-настоящему не использован (я имею в виду анимацию, а не запуск ядерных боеголовок). Дерганья персонажей современных компьютерных мультфильмов смотрятся пародией на точные и элегантные — иначе не скажешь — движения той кошечки. На одном этом принципе можно было бы построить дешевую и эффективную технологию, которая — в другом обществе — могла бы принести миллионы своему изобретателю.

Но дело не только в обществе. Не в меньшей степени дело в само́м изобретателе. Технологии, в первую очередь организационные и педагогические, но не технологии зарабатывания денег, всегда были его коньком. По-видимому, технологический талант Константинова врожденный. Я не представляю, где этому можно было научиться в Советском Союзе: единственную последовательно проведенную технологию коммунистической пропаганды следует признать удручающе неэффективной. Организация массовых мероприятий требует мелкой нудной неблагодарной работы: развешивание объявлений и подготовка аудиторий, рассылка писем и проверка работ, поддержание порядка и ведение документации. По сравнению со всем этим составление вариантов задач для олимпиад — просто верх творческой деятельности. В Колиных же руках вся эта рутина становится совершенно естественной. Он умеет делать всё это сам и умеет научить других получать от этого удовольствие, как доставляет удовольствие ощущение разумности и осмысленности, исходящее от какого бы то ни было дела.

Но его технологические жемчужины — организация сети специализированных школ и заочных математических соревнований, а также система обучения с помощью «листков», — не имеют аналогов. Мы можем приходить преподавать в школу по щенячьему энтузиазму, по настроению, из-за того, что подросли свои дети и их нужно учить, и уходить, когда наши побудительные мотивы исчерпываются. Однако основы у системы таковы, что уход любого из нас не влияет на ее устойчивость и не ставит под вопрос самое ее существование. Любого — но не Коли. А константиновские «листочки» — просто принципиально новое слово в педагогике, которое еще заслуживает подробного профессионального анализа.

С 1972 года, с момента моего поступления в Московский университет я общался с Константиновым уже очень тесно. Может быть главным источником притяжения служило исходящее от него чувство свободы. Оно проявлялось не только и не столько в том, что в книжных завалах на креслах и столах его квартиры можно было отыскать «Один день Ивана Денисовича», сколько в независимости всей его деятельности от управляющих структур. Эта независимость была тем более удивительной, что деятельность происходила на весьма горячем для советской власти поле образования. Казалось бы ему — и всем нам вместе с ним — не так уж много надо было от власти: чтобы она не мешала. Как любит говорить мой друг Саша Звонкин, мы работали даже не за спасибо, а за пожалуйста; приходим и говорим: «Дайте, пожалуйста, поработать». (Если же говорить о деньгах, то вот характерные цифры: работая в одном из первых математических классов 57-й школы, это 73-й год, мы получали 16 рублей в месяц. На четверых.) Однако такая возможность предоставлялась далеко не всегда. Для чиновника дать разрешение означало уже совершить какое-то действие, а значит, — подставить себя под удар. Но Коле всегда и в любой среде удавалось найти и привлечь на свою сторону людей, для которых интересы дела, интересы детей, учителей, страны и ее культуры стоили собственной шкуры. Так выстроили и защитили 57-ю не имеющие никакого отношения к математике Нина Евгеньевна Лапушкина и Лев Нилыч Бухман.

С Колей всегда интересно, он глубоко образован, и исчерпать эту глубину мне, во всяком случае, не удавалось. В перенасыщенном растворе нашей жизни он выступает в роли точки кристаллизации, вокруг которой образуются и осознают себя как единое целое группы людей самых разных возрастов. Потом, по прошествии времени, эти вновь образовавшиеся кристаллы могут отпасть — и отпадают, но, развиваясь дальше уже независимо, они с неизбежностью несут на себе отпечаток его личности.

В тяжелые периоды независимость от власти сама по себе становилась грехом с точки зрения этой самой власти, и тут уж она в действиях не стеснялась. Разрушать — не строить, времени и усилий особых не требует, поэтому перечисление всех ударов, обрушившихся на Колю, — занятие бессмысленное. Да и не знаю я и никто другой всех этих ударов, только те из них, которые уж нельзя было не заметить. «Письмо 99»[1)] состоялось еще до моего прихода на мехмат, однако память о нем передавалась шепотом много лет и была жива, когда я мехмат закончил. Пройти мимо него было трудно: по общему мнению, которое кажется верным и мне, с реакции власти на это письмо началось разрушение мехмата. Для Коли поставленная под письмом подпись обернулась уходом с физфака и отрешением от официальной преподавательской деятельности. Созданные при его непосредственном участии и казалось бы процветающие математические школы — под давлением райотделов образования или по собственной инициативе директоров — рассыпа́лись, как произошло, например со 2-й и 7-й. В начале 80-х столь же жестко была прервана его многолетняя работа по становлению и развитию олимпиад — Московской и Всесоюзной, из жюри которых министерство образования безапелляционно выкинуло его и его последователей. Чистоту рядов оказалось легче блюсти и

[1)]Это письмо в ЦК КПСС было написано в 1969 году в защиту логика, математика, поэта и философа А. С. Есенина-Вольпина, диссидента, подвергнутого принудительному лечению в психиатрической больнице. Под ним стояли подписи 99 ученых, большинство из которых были математиками. Все они были «поражены в правах» — от «мягкого» запрета на выезд за границу, действовавшего потом в течение многих лет, до увольнения с работы.

оценивать, чем качество придуманных задач, организационные находки и эффективность проверки.

Отношение Константинова к этим — по-другому не скажешь — катастрофам сродни, на мой взгляд, отношению ученого к природным катаклизмам. Предупредить или подавить их нельзя, поэтому нужно изучать и по мере возможности пытаться использовать. У него даже есть соответствующее такому поведению звание, которое, как мне кажется, очень ему подходит — член Московского общества *испытателей природы*, старейшего из добровольных российских общественных объединений.

Отделение Константинова от олимпиад привело к несколько неожиданному результату — появлению Международного турнира городов. Вот кое-какие полезные, на мой взгляд, выводы из этой истории. Во-первых, строить эффективнее, чем бороться — результатом строительства могут быть дома и книги, люди и школы; итогом борьбы — развалины, кто бы ни одержал победу. Во-вторых, даже если построенное здание кем-то разрушено, фундамент никуда не денется, уж больно дорого, да и неэффективно его взрывать. Как показывает недавнее возрождение Московской и Всероссийской олимпиад, этот фундамент можно использовать для возведения нового здания с учетом прежних ошибок и нелепостей (и, разумеется, с нагромождением новых). В-третьих, — и это до сих пор не является общим местом — олимпиады нужны не для того, чтобы выявить лучших, а для того, чтобы вовлечь как можно больше людей в процесс мышления, заинтересовать их. Отправляясь от этого принципа, строит свою деятельность Турнир городов, в первую очередь в своих летних школах.

Мои воспоминания выглядят, как панегирик. Я к этому вовсе не стремился, но память работает именно так, и попытки сохранить объективность и выявить Колин характер всесторонне не приводят к успеху. Да, как и всякий хороший математик (а Коля — хороший математик), он суховат и равнодушен к личной жизни окружающих его людей. Но это равнодушие он с успехом компенсирует живым интересом к их мыслям и знаниям. Благодаря этому интересу нынешним школьникам так же легко рядом с ним, как и нам тридцать лет назад. Да, обыватель мог бы справедливо поставить ему в вину невнимание к собственной личной жизни — ни семьи, ни детей, и теперь уже и не предвидится. Но каждый идет своим путем, и идеальных людей, слава Богу, не встречается.

Несмотря на то, что к моменту нашего сближения я уже далеко вышел из мальчишеского возраста, Коля неразрывно связан со многим, что произошло в моей жизни впервые. Здесь и первый настоящий поход, и поездка на Беломорскую биостанцию, и знакомство с эстонским языком, и люди, с которыми он меня свел, — я живу среди них и сейчас, а кое-кто из них стал моими друзьями. И то, на чем сосредоточилась моя жизнь в последние десять лет, — Независимый московский университет, его Высший колледж математики. Неустанный многолетний труд Константинова привел к тому, что к началу 90-х в Москве имелась большая работоспособная единая, хоть и не объединенная никакими организационными рамками, группа людей, в первую очередь математиков, которая не могла не попытаться использовать предоставившиеся политические возможности для реализации своего видения высшего учебного заведения. Неудивительно, что Владимир Игоревич Арнольд согласился возглавить научную программу Колледжа математики при единственном условии — если ответственность за организационную работу возьмет на себя Константинов. Это имя послужило гарантией, с одной стороны, бескорыстия и соответствия методов поставленным целям, с другой — того, что эти цели будут достигнуты. И столь же неизбежно, что сейчас, десять лет спустя, Николай Николаевич Константинов занимает в Университете единственную подходящую для него должность — Николая Николаевича Константинова, не умещаясь ни в какие другие рамки.

Математические кружки раньше...

Н. Н. Константинов

Предлагаем вниманию читателей запись беседы В. Бугаенко, М. Вялого, С. Дориченко с Николаем Николаевичем Константиновым.

— На Вашей памяти прошла почти вся история московских математических кружков. Какими они были раньше?

— Кружки начинались ещё в довоенные годы. Вначале студентов мехмата направляли для ведения кружков в школы. Это было не очень удачное решение: в школьном кружке меньше сильных участников, к тому же привычная школьная обстановка сковывает участников кружка. Так что спустя некоторое время решено было собирать школьников в университете, и тогда уровень кружков резко поднялся. Конечно, многое определялось тем, кто именно вел кружки. Г. Е. Шилов[1)] рассказывал как-то, что он тоже вел кружок в одной из школ Краснопресненского района. Одним из трех его учеников был Додик Шклярский[2)]. Потом Шклярский поступил в университет, сам стал вести кружок и поднял это на качественно иной уровень.

Отвечал за работу с кружками комитет ВЛКСМ, и студенты, которые вели кружки, получали за это деньги. Была методкомиссия (точнее, это называлось методбюро), которая отвечала за качество кружков. Когда я поступил в 1949 году в университет, я стал членом методбюро физфака и тоже отвечал за качество кружков физфака.

Перед входом на мехмат висело огромное объявление (его делал комитет ВЛКСМ): «Кружки. Понедельник — кружок по геометрии, руководитель Ченцов[3)]. Вторник — кружок по теории чисел, руководитель такой-то; кружок по алгебре, руководитель такой-то; кружок по топологии, руководитель такой-то. Среда...» Т. е. каждый день как минимум

[1)] Г. Е. Шилов — профессор мехмата, автор известных учебников.

[2)] Д. О. Шклярский — руководитель самого яркого довоенного кружка на мехмате. И сам Шклярский, и бóльшая часть участников его кружка погибли во время войны.

[3)] Н. Н. Ченцов — многолетний руководитель кружков. Вместе с И. М. Ягломом подготовил хорошо известную серию книг «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», первым автором этих книг значится Шклярский — в память о его заслугах, хотя в подготовке самих книг он уже не мог принимать участия.

один кружок, а иногда — два-три. Кружок Локуциевского[4] обычно назывался «Математические этюды», там обсуждались красивые задачи. Все кружки имели названия. Но это не означает, что занимались только тем, что было обозначено в названии. На самом деле все определялось вкусами руководителя. Но считалось приличным, что кружки имеют направление, а ученики имеют возможность выбирать, что им больше нравится. Не было стандартизации. Был кружок, который вел Дынкин[5]. Я тогда был в 8-м классе и еще не ходил на кружки. А у него учились Минлос, Коган, Юшкевич, Сушкевич, Кулагина[6]. Когда мы были в 9-м классе, Дынкин оставил свой кружок. В его кружке занимались школьники из разных параллелей. 10-классники закончили школу, и Дынкин стал вести семинар для первокурсников. А кружок он передал на попечение своим бывшим ученикам (тем, которые стали первокурсниками). Кружок был для 9–10 класса. Первокурсниками этими были Успенский, Розенкноп и Балаш. Балаш и Успенский имели первую премию на Московской математической олимпиаде. На кружке Успенский был очень активен, Розенкноп тоже любил рассказывать, а Балаш почти все время молчал.

— Т. е. те, кто год назад учились в этом кружке, стали учить тех, с кем они сидели рядом?

— Совершенно верно. Опекуном кружка продолжал быть Дынкин. Не знаю, какова была его реальная роль. На кружке он не появлялся. А я ходил туда со своим товарищем Колей (Николай Николаевич Перцев — был у меня такой друг, мы сидели на одной парте и ходили на все кружки вместе, он потом стал геологом). Так вот, посмотрев на этих трех руководителей, Перцев сказал: «Этот будет профессором, этот — доцентом, а этот — учителем.» Всё так и вышло.

— Говорят, еще как-то уборщица сделала такое же точное предсказание про Аносова.

— Да-да, Аносов[7] был тогда в 9 классе. Он был маленький, толстенький и очень важный. Обращаясь к аудитории, он указкой показывал формулы и имел совершенно профессорский вид. А уборщица зашла в аудиторию за какой-то тряпкой. Когда она уже шла к двери, взглянула на Аносова у доски, и сказала: «Будет профессором».

---

[4] О. В. Локуциевский — известный тополог и прикладной математик, один из самых больших энтузиастов среди организаторов олимпиад и руководителей кружков того времени.

[5] Е. Б. Дынкин — известный математик, активно участвовавший в работе со школьниками. Вынужден был эмигрировать в Америку, сейчас — профессор Корнелльского университета.

[6] Р. А. Минлос — профессор мехмата, остальные тоже стали математиками, а О. С. Кулагина занималась математической лингвистикой.

[7] Д. В. Аносов — известный математик, академик РАН.

— Профессором или академиком?

— Нет, она сказала «профессором». Аносов, когда я ему это рассказал, меня поправил. Я думал, что это был 8-й класс, но Аносов сказал «Нет, это был 9-й». И добавил: «И притом, она ошиблась. Я стал академиком.»

Вернёмся к кружкам. Я стал ходить на кружок в 9-м классе. Там рассказывали, в основном, теорию сравнений, которую я так и не понял. Я решал какие-то отдельные задачи на квадратные сравнения, тосе... Потом в Чебышева куда-то полезли. Балаш обычно молчал, как я говорил. Но иногда случалась заминка: никто не может решить задачу. Вот тогда Балаш оживлялся и решал. Он действительно очень сильный человек. Но всю жизнь он проработал в вечерней школе и ничего больше ему не было нужно. Это про него сказал Коля, что он будет учителем. Розенкноп стал доцентом в пединституте им. Крупской. А Успенский стал профессором, заведующим кафедрой в университете.

Вот такие были кружки. Например, в кружке по теории чисел в течение всего года были два руководителя и всего один школьник.

— Откуда брались руководители кружков? Школьники — понятно: видели объявление и шли на тот кружок, который им больше нравился. А руководители?

— Скажу про себя. Когда я уже стал студентом, я очень долго не вел кружков сам. А приходил к друзьям и смотрел, как они ведут. А иногда, когда они уезжали на каникулы, я заменял их. Таким образом я постепенно в это втянулся. Откуда брались руководители? В основном руководили те, кому этого хотелось. И они записывали себе это как общественную работу в комитете ВЛКСМ.

— Это удивительно. В советские времена любая активность жёстко контролировалась, поэтому странно слышать: «кто хотел, тот и вел».

— Да. Это удивительное свойство мехмата. Совершенно потрясающее удивительное свойство мехмата. В те времена и спецкурсы разрешалось вести любому человеку. Приходит с улицы человек и начинает вести спецкурс. Формально, я думаю, что кафедра должна была утвердить этот спецкурс, какая-то процедура утверждения была. Но фактически любой, кто хотел вести спецкурс, мог вести. И я это воспринимал как должное: конечно, а зачем нужно разрешение? Вот когда я был на 5-м курсе (физфака), я объявил спецсеминар для 1-го курса мехмата. Мне и в голову не пришло, что я должен кого-то спрашивать. Я решил рассказать первокурсникам, что я знал. За полгода все рассказал, и семинар на этом закрылся. Туда ходил Женя Голод[8], он был самый сильный,

[8] Е. С. Голод — профессор мехмата.

Коля Розов[9)] туда ходил, Саша Венцель[10)], Ира Виноградова[11)], Леня Бокуть, который сейчас в Новосибирске.

Тогда занятия в университете начинались в 10 утра, а не в 9. А я назначил семинар на 8, и семинар успешно работал. Некоторые ребята из общежития прибегали, не завязав шнурков. Но ходили.

Те ребята, которые вели кружки, были не только сильные, но они это еще и всячески демонстрировали. Например, мы пришли на занятия кружка, а у руководителей кружка сессия. Один из руководителей встал и говорит «пойду, сдам экзамен». Пошел, сдал и вернулся.

Атмосфера на мехмате была феноменально демократичная. Не догадались, как его зажать.

— **Потом-то догадались...**

— Потом — да. Но интересно, с чего все начиналось. Во-первых, в первые годы советской власти среди студентов физмата (а тогда был физмат), не было ни одного члена партии и ни одного комсомольца. Кронрод[12)], который поступил на мехмат в 1939 году, говорил, что тогда появился первый комсомолец. На него показывали пальцем: «смотри, комсомолец идет».

Потом появилось уже несколько комсомольцев. И они подняли вопрос: нужно аспирантов включить в Ученый Совет. Вопрос был решен положительно, аспирантов включили в Ученый Совет. И первое же решение, принятое под давлением аспирантов – членов Ученого Совета было: отменить аспирантские экзамены.

Между тем профессора-то между собой грызлись. Изводили Лузина, Егорова[13)], друг друга изводили. Но это было как-то «между собой». А партийные верхи еще не нашли рычагов, чтобы заставить всех этих людей принимать нужные решения. Грызться-то они грызлись, но как им прикажешь?

В 1949 году, когда я поступал, впервые начали «резать» евреев. Но как? Был такой порядок, что золотые и серебряные медалисты поступали по собеседованию, а кто не сдал собеседования, мог сдавать экзамены. А если не было медали, то просто можно было сдавать экзамены (собеседование было в июле, а экзамены — в августе). Так они «зарезали» всех евреев на собеседовании, где всё решала приёмная комиссия, а на экзамене никого «зарезать» не могли. А как? Если человек решил все задачи, нельзя же ему не поставить хорошую оценку.

---

9) Н. Х. Розов — декан факультета педагогического мастерства МГУ.

10) А. Д. Венцель — стал профессором мехмата, сейчас живет в США.

11) И. Виноградова — преподаватель анализа на мехмате.

12) Об А. С. Кронроде см. статью В. М. Тихомирова в этом сборнике, с. 49–54.

13) Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин — известные математики, основатели московской математической школы.

Сейчас это кажется удивительным. Но тогда не применяли всей этой позднейшей техники. Вот решено 4 задачи, как не поставить хорошую оценку? Профессора не те были. Степанов, Немыцкий, Курош[14] — как им прикажешь не поставить.

— А собеседование кто принимал?

— Подонки абсолютные. Я поступал на физфак. У меня была золотая медаль, премия на физической олимпиаде и русская национальность. Так что вроде бы должны были принять, и я ничего не боялся. Принимал собеседование заместитель декана, абсолютный маразматик. Я это и сразу понял, а потом, когда учился, это подтвердилось. Задал какие-то формальные вопросы: кто премьер-министр Англии и т. п. Потом он спросил меня: «какая разница между газом и паром?» А я, когда был в 1-м классе, нашел у отца на столе книжку по теории теплоты. И там на первой странице было сказано, что если пар сжимать, не меняя температуры, то он превращается в жидкость. Если же он при этой температуре в жидкость так и не превращается, то мы называем это газом. Я был в 1-м классе, когда это прочел. И этого оказалось достаточно, чтобы поступить на физфак. Но было еще одно собеседование, комсомольское. Меня направили к первому секретарю комсомольской организации физфака. Он мне задал вопрос о том, как отклоняется электрон в магнитном поле. Я ему показал все, правило буравчика и так далее. Он говорит: «нет, неправильно». И показал все в другом направлении. Ну, я ему и говорю: «когда электрон двигается вот так, ток ведь идет в обратном направлении». Тот: «и правда», — говорит. И я сдал собеседование. Вот такой был уровень.

Самый сильный ученик нашего кружка не прошел всей этой процедуры. И пошел в Энергетический институт. А у моего друга, поступавшего на физфак, состоялся такой диалог с преподавательницей, принимавшей экзамен: «От чего зависит сила взаимодействия Земли и Солнца?» Он сказал: «Она зависит от расстояния между Землей и Солнцем». «Правильно, а еще от чего?» «От массы Земли, от массы Солнца...» «Правильно, правильно. А еще от чего?» Полное недоумение у моего друга. «От гравитационной постоянной!» — был правильный ответ.

— А как кружки соотносились с олимпиадой?

— Кружок был нацелен на олимпиаду, это все понимали. Перед олимпиадой объявлялись консультации для участников олимпиады. Они работали каждый день. Вот когда уже Кронрод был председателем, в 1966 году, то он постарался восстановить этот институт консультаций, что оказалось безуспешно, на них почти никто не пришел. А в те годы, когда он сам участвовал, в 30-е, это было очень успешное мероприятие. Когда я в 10-м классе участвовал в физических кружках, одним из руководителей

[14] В. В. Степанов, В. В. Немыцкий, А. Г. Курош — профессора мехмата.

был Мика Бонгард[15]. Он тоже организовал консультации перед олимпиадой по физике. Это было очень толково. Устный разбор задач, тщательный рассказ решений. Когда толковые люди ведут консультации — это прекрасно.

А еще был такой случай. В комитете ВЛКСМ университета сидели юристы, историки и все такие прочие. И вот они заподозрили, что кружки мехмата неправильные. Что они готовят элиту, что они не рассчитаны на рабочих и крестьян, что там все ведется так, чтобы рабочие и крестьяне ничего не понимали. (Вот мы — рабочие и крестьяне — и ничего не понимаем. Прямо так, конечно, сказано не было.) И они решили организовать комиссию для проверки кружков мехмата. Кому же поручить организовать такую комиссию? Физфаку. Кто же еще может разобраться в задачах? А на физфаке поручили мне. И вот я, как комиссия вузкома комсомола, обошел все кружки мехмата. Мне это было очень интересно. Познакомился с разными людьми — руководителями, школьниками, узнал много задач. Прекрасная была работа. И дал отчет, что там все в порядке. Может быть, это было и не то, чего они хотели, но что делать? Кого им еще туда посылать? Не самим же идти...

Так что над кружками бывали грозы и тучи. Но, в принципе, удивительная сверхдемократическая традиция существовала. Но эта традиция постепенно уменьшалась.

— А возникновение матшкол было связано с изменением этой традиции или это была параллельная деятельность?

— Был взрыв интереса к математике. Резко увеличилось количество желающих заниматься математикой. На порядок, на два. И тогда возникла идея организовать вечерние математические школы, которые вначале основывались на такой, довольно глупой, идее: нужно собрать всех интересующихся школьников и рассказывать им основные идеи современной математики. Во-первых, идеи современной математики для этого хорошо бы знать... Во-вторых, непонятно, чем идеи современной математики лучше идей несовременной, если дети их все равно не знают. И потом, рассказ идей — вообще пустое дело. Ну рассказывают идеи, и что? Все равно как ничего не знали, так и не узнали в результате. Поэтому возникла идея в противовес этой: организовать тщательное обучение. Это началось в кружках, а потом продолжилось в школах. Я тогда ходил на кружок Лемана и Леонтовича[16]. В то время я уже отработал ассистентом и пошел в аспирантуру. Возникло свободное время. А там было несколько

---

[15] М. М. Бонгард — ученик А. С. Кронрода, биофизик, занимался изучением механизмов зрения и распознавания образов. Его идеи в области распознавания образов намного опередили свое время. Погиб в конце 60-х годов, в горах.

[16] А. А. Леман, А. М. Леонтович — руководители кружков.

очень сильных людей: Иосиф Бернштейн[17], Волик Фишман (очень способный, он рано умер), Гриша Маргулис[18], Сеня Вишик (старший сын Марка Иосифовича Вишика). Кружок был очень большой: человек 70. Андрей Леман вел кружок очень небрежно. «Как?! Вы не знаете аналитической геометрии? Сейчас расскажу. Вот координаты точки, уравнение прямой,... О, вы не знаете, что такое вектор? Сейчас расскажу!» Эта традиция жива и до сих пор, во многом таков стиль Независимого Университета.

Я ничего на этом кружке не делал, только смотрел, как они ведут. Ко мне подошли сильные ребята, которых я уже упоминал, и говорят: «Мы хотим идти в вечернюю математическую школу, там рассказывают идеи современной математики. Что Вы нам посоветуете?» Я им ответил: «Думаю, что это пустое дело. Давайте, я лучше дам вам серию задач.» Они стали решать мои задачи. Получился кружок «Альфа». Так как они были очень сильные, то им можно было двигаться «большими шагами». И они довольно быстро прошли примерно 1-й курс мехмата и даже дальше. Кружок назывался «Альфа» потому, что меня просили написать в газете «За передовой факультет» статью про этот кружок, и я его там назвал «Альфа». И тут Митя Фукс[19] ужасно загорелся. Говорит, что он им хочет и современную математику рассказать. И организовал кружок «Алеф». И всех кружковцев «Альфы» пригласил в «Алеф». Там-то он их и доконал, т. е. они узнали какие-то современные вещи.

А я тогда организовал кружок «Бета». Это было весной, после закрытия олимпиады. Пришел на закрытие олимпиады, вышел на трибуну и объявил, что будет кружок такой-то. И при входе в старое здание университета, там, где всегда висели объявления про кружки, я повесил свое маленькое объявление. Недавно я встретил человека, который говорит, что он стал математиком благодаря этому объявлению. Оно было написано в очень необычном стиле, примерно так (детали я уже забыл, но Асик Хованский[20] сорвал его и сохранил): «Приглашаются 8-классники, а также наиболее смелые 7-классники.» В таком вот вольном стиле. «В кружке будет ЖУТКО интересно.» Школьникам очень понравилось объявление, и они стали его совершенствовать. Например, там было написано «наиболее смелые 7-классники», дописали: «но не забудьте застраховать жизнь». Объявление было обогащено идеями разных людей, это привело к тому, что все его с интересом читали. И поэтому все об этом кружке

[17] И. Н. Бернштейн — известный математик, сейчас живет в Израиле.

[18] Г. А. Маргулис — известный математик, филдсовский лауреат, сейчас живет в США.

[19] Д. Б. Фукс — известный математик, сейчас живет в США.

[20] А. Г. Хованский — профессор Независимого Московского университета, также работает в университете Торонто.

знали. На первое занятие пришло человек 200. Совершенно неожиданный эффект. Мы сидели в большой аудитории, там было две доски, на двух противоположных сторонах. На одной доске вел занятие Витя Пан[21], на другой — я. Те, кто сидели посередине, могли смотреть и туда, и сюда. Потом кружок стабилизировался и осталось 70 человек. Мы договорились со Славой Цуцковым[22], что проведем с ними курс анализа и дойдем до уравнений Максвелла и уравнения Шредингера. Но, чтобы реально пройти все это, нельзя, чтобы люди пропускали какие-то разделы. Поэтому я и объявил, что каждый, кто не выполнит задание, отстраняется от дальнейших занятий кружка. Это было очень жесткое требование. А привело оно к тому, что все 70 человек выполнили все задания. Но как только я отменил это жесткое требование, почти все перестали делать задания, а потом вообще перестали ходить на кружок. Они ходили, пока боялись, что их выгонят. Я часто привожу этот пример, чтобы показать как жесткость приводит к искажению целей. Сейчас я говорю своим ученикам: «Если вы надеетесь, что я заставлю вас заниматься, — не дождетесь!» Потому что, действительно, жесткостью можно добиться, что они что-то выучат. И что? Разве это высшая цель? Выучит, будет знать. И что? Все равно, от него не будет никакого толку, если не будет внутреннего стимула к деятельности.

Итак, это был кружок «Бета». В кружок «Альфа» уже ходили школьники, которые учились в 444-й школе (она тогда была 425-я, но это несущественно). Уровень школы был, конечно, повышен по сравнению с обычными школами, но моим сильным ученикам этого было недостаточно.

А Кронрод, когда затеял 7-ю школу, стал меня усиленно туда приглашать. Ему понравился кружок «Бета», он говорит, что так и надо, в таком духе. А я говорю, что хочу продолжать свой кружок и мне не хочется его бросать, а тянуть и то, и другое никак не получится. Но он продолжал меня уговаривать, а я все пытался найти аргументы против. И наконец сказал: «Хорошо. Я согласен так: набираем класс, и я смотрю — если класс получился хороший, я буду в нем работать, а если нет — то не буду.» Кронрод был поражен: «А что мы скажем ученикам? Мы их наберем, а потом скажем, что они нам не понравились?»

Тогда я нашел другой аргумент. «Вот если Гервер согласится вести класс, то я тоже соглашусь.» И Гервер[23] согласился. Так что и мне пришлось вести класс. Интересно, что Гервер независимо сказал Кронроду, когда тот ему позвонил, что он согласен, если согласен Константинов. Такая вот челночная дипломатия.

[21] В. Пан сейчас живет в Америке.

[22] В. Цуцков — очень способный студент, погибший в возрасте 20 лет.

[23] М. Л. Гервер неоднократно вел классы в математических школах.

Так образовалась 7-я школа. Во второй год некоторые сильные ученики из 444-й переметнулись в 7-ю. Но тут начали евреев «резать» в 7-й, поэтому возникла 2-я. Директор 7-й по разным пунктам нас зажимал, то ему не годятся школьники с французским языком, то еще что-нибудь не годится. Это все надоело. А тут звонит Богданова, методист Фрунзенского района, куда входила 57-я школа. Я 57-ю школу знал, потому что один ученик «Беты» был из 57-й школы (Коняев Сергей). Он мне про нее рассказал, про Джемса и все такое. И когда мне Богданова сказала, что 57-я школа будет математической, я сказал «Все, согласен».

— Это в каком году было?

— Примерно в 1966-м, точно не помню. Там был хороший директор, он был фронтовик, искалеченная рука. Строгий, представительный, но добрый. Когда я договаривался о том, что мы там будем вести математические классы, я задавал разные вопросы, чтобы сравнить его с директором 7-й школы. «У вас бывают случаи, когда школьники опаздывают?» «Да, конечно, бывают.» «И вы с этим боретесь?» «Да, конечно, боремся.» «И как вы боретесь?» «А я стою при входе в школу и вижу всех опоздавших. А они видят меня. И я им говорю, чтобы они не опаздывали.» Я подумал, что если здесь такие методы борьбы, то это меня устраивает.

Но его выгнали. Изменилось районирование города, и школа попала в Ленинский район. Назначили комиссию по обследованию школы. А школа не выполнила план по выпитому молоку... А самое главное, что пришла Кузнецова, зав. роно, и поставила лично три двойки выпускникам на выпускном экзамене. Это было уже совсем плохо, и директора сняли. Назначили новую директрису, Надежду Иосифовну. Школа пережила тяжелые моменты, чуть не закрылась. Но как-то обошлось.

Вот так возникла 57-я школа. Но матшколы — это другая тема. Мы же про кружки...

— Итак, когда возникали матшколы, не было идеи, что кружки не нужны? Матшколы возникли только из-за того, что стало очень много народу ходить на кружки?

— Да, кружки, конечно же, погибли. Когда сильные люди разошлись, в кружках не стало ядра. Ходят какие-то люди, но они уже не те. Кружки потеряли свою исключительность.

— Но были ведь и кружки для 7–8-х классов (по старой нумерации)?

— Это другое дело. Эти кружки имеют четкое назначение. Они помогают набрать школу.

— Может даже и не набрать, а заинтересовать новых людей...

— Правильно, но в любом случае есть прямые заинтересованные. Это те, кто набирают маткласс.

Так что кружки, действительно, в какой-то степени погибли.

— Это оказалось непредвиденным побочным следствием возникновения матшкол?

— Никакой специальной цели не было.

Я делал попытки вести кружок для тех, кто не учится в матшколе. И всегда такой кружок получался очень жиденький. Толковые ребята есть, но недостаточно много, нет лидеров.

— Против матшкол вроде бы были еще возражения, что там нужно заставлять делать то, что на кружке делается из чистого интереса?

— Это было. Были очень резкие возражения против матшкол. Дело в том, что кружки держались на идее противопоставления школе. И среди школьников, ходивших на кружок, культивировался лихой стиль отношения к двойкам.

— Но такое отношение во многом перешло и в матшколы?

— Частично перешло. Но в том-то и дело, что если мы пришли в школу, то уже не можем культивировать идею ненависти к школе. Мы все недостатки школы своим авторитетом облагораживаем. Вот это и было главное возражение против матшкол. И еще то, что ученики будут под давлением учить то, что они раньше учили добровольно. Это правильно. Но, с другой стороны, в математике нельзя обойтись только тем, что тебе сейчас приятно. Что-то нужно преодолевать. Нельзя ничего серьезного узнать, если нигде ничего не преодолевать. Все-таки верхоглядства в кружках было очень много. Что-то там слышали и «а, это диофантовы уравнения! Мы такие проходили, все знаем!» «Что знаете? Умеете его решать?» «А, нет, сейчас подумаю..., как-то оно решается.»

— Еще такой вопрос. В Москве есть давняя традиция начинать кружки скорее с 7-го класса (по старому счету, по новому с 8-го). В Питере раньше, на год или на два. Как это возникло?

— Я могу только ответить, почему мне не хочется заниматься с малышами. А почему другим — не знаю.

У меня про это же спрашивал в свое время Сергей Фомин[24]: «Почему Вы не занимаетесь с 5, с 6-м классом? Это такие благодарные ребята, они так все хорошо воспринимают.» Я ему так ответил: «Когда у меня ученики 10-го класса, то даже если они чего-то и не знают, это в любом случае люди, у которых есть своя собственная шкала ценностей в жизни. А когда я занимаюсь с 5-классником, я в лучшем случае увижу свою собственную отраженную шкалу ценностей. И поэтому он мне не очень интересен.»

Возьмем историческую аналогию. Когда Бетховен стал учиться у Гайдна, то последний никак не мог понять: что в интересного этом

[24] С. Фомин — один из самых активных организаторов ленинградских математических кружков и олимпиад в 70–80-е годы, впоследствии эмигрировал.

ученике? Повторяет в точности то, что делает Гайдн. А вот когда Бетховен показал что-то свое, вот тут Гайдн заинтересовался. И понял, что это очень интересно.

Вымуштровать маленьких можно. Но есть другая сторона: у человека должны развиваться широкие интересы. Если их нет, то что он будет делать? Приведу такой пример. Однажды меня уговорили взять одного 6-классника в Эстонию[25)]. Он там старался, был библиотекарем, и даже ходил на кружок по комбинаторике. Но было видно, что у него ум не созрел. Каких-то простых вещей не понимал. Потом стал понимать, поступил в 57-ю школу, успешно окончил ее, и, казалось бы, все в порядке. Но после школы он не стал никуда поступать, ему уже 30 лет, а он с тех пор так нигде не учится и не работает, причем такая жизнь его вполне устраивает. Ему ничего не надо. А родители изо всех сил старались, чтобы он развился побыстрее…

Мне кажется, что когда человека вынимают из естественной среды, то он может больше потерять, чем приобрести.

— Но кружки для 6-го класса — это совсем другое. Это не то же самое, что 6-классник идет на кружок 10-го класса.

— В. Л. Гутенмахер[26)], когда его дочь училась в 91-й школе, стал вести там кружок для маленьких по геометрии. Я спрашиваю: «Чем вы там занимаетесь?» И он отвечает: «Конечно, то, что мы там занимаемся геометрией, это условность. На первом занятии мы обсуждали вопрос: что общего между словом „циркуль“ и словом „цирк“.» Я думаю, что это как раз правильно. Чем меньше люди, тем у них интересы рассыпаннее. Ребенок будет писать формулу, а его заинтересует карандаш, которым он эту формулу пишет. Не надо пытаться вести для них сконцентрированный курс. А вот такие занятия, где обсуждается, что общего между циркулем и цирком, очень подходят для этого возраста.

— Можно назвать кружком занятия более вольного стиля, где обсуждается, что общего между циркулем и цирком, но это другое по сути. В Питере на кружках маленькие именно решают задачи. К 7-му классу это уже технически очень подготовленные дети, они знают все основные трюки при решении олимпиадных задач.

— Это отдельная тема, она скорее относится к особенностям питерской традиции. А я могу лишь сказать, почему мне неинтересны маленькие.

[25)] Эстонский математический лагерь (1973–1989) заслуживает отдельного рассказа. В основном туда приезжали ученики математических школ после 8 или 9 класса (по старой нумерации).

[26)] В. Л. Гутенмахер много занимался популяризацией математики, работал в журнале «Квант», сейчас живет в США.

А. С. Кронрод (1921–1986)

В. М. Тихомиров

22 октября 2001 года исполнилось бы 80 лет Александру Семёновичу Кронроду — человеку, оставившему большой след в математике, в становлении того, что ныне называется Computer Science, и в математическом просвещении.

В этот день на мехмате МГУ состоялось заседание, посвящённое его памяти. На нём присутствовало свыше ста двадцати человек, что очень необычно для собрания, которое происходило через пятнадцать лет после смерти человека (Кронрод скончался 6 октября 1986 года).

Там было сказано множество прекрасных слов о Кронроде, зачитывались письма и телеграммы его друзей, последователей и учеников, которых жизнь разбросала по разным странам.

Мне думается, многим важно знать о тех, кто прокладывал дорогу в жизнь их учителям и старшим коллегам. Среди тех кто очень много сделал для нас всех, для нашей общности, был Александр Семёнович Кронрод.

* * * * * *

К математике Саша Кронрод приобщился в школьном математическом кружке Давида Шклярского. Об этом замечательном человеке, преобразовавшем кружковско-олимпийское движение, было рассказано во втором выпуске «Математического просвещения». На четвёртой Московской математической олимпиаде 1938 года все первые призы были получены участниками кружка Шклярского, и одну из четырёх первых премий получил Саша Кронрод. В том же году он поступает на механико-математический факультет МГУ.

В это же время А. С. Кронрод выполнил свое первое самостоятельное исследование, решив задачу, поставленную Александром Осиповичем Гельфондом (см. о нём в четвёртом выпуске нашего альманаха). В этой своей работе Кронрод описал структуру множества точек разрыва функции, дифференцируемой в точках непрерывности. В 1939 году его статья была напечатана в «Известиях Академии Наук» среди работ, принадлежавших нескольким выдающимся математикам — А. О. Гельфонду, А. А. Ляпунову, П. Я. Полубариновой-Кочиной, А. Я. Хинчину и другим.

В начале войны Кронрод подал заявление в военкомат с просьбой отправить его на фронт, но получил отказ: студентам старших курсов полагалась броня. Вскоре студентов отправили на строительство оборонных сооружений. Обладавший огромной активностью и большими организаторскими способностями, Кронрод возглавил студенческую бригаду мехмата на этих работах. По возвращении с них Кронрод продолжает атаковать военкомат и добивается своего: он попадает в действующую армию.

Во время зимнего наступления нашей армии под Москвой за проявленную храбрость Кронрод был отмечен первым боевым орденом. Тогда же он был ранен в первый раз. А. Н. Колмогоров добился разрешения после завершения лечения в госпитале взять Кронрода в аспирантуру. Но Кронрод не воспользовался этим и возвратился на фронт. После второго тяжёлого ранения, последствия которого давали себя знать все последующие годы, он был демобилизован.

В госпитале Кронрод обратился к задаче, которую ещё перед войной поставил перед ним профессор мехмата М. А. Крейнес. Требовалось ответить на следующий вопрос. Пусть подстановка $i \to k_i$, заданная на натуральном ряде $\mathbb{N}$ меняет сумму какого-то бесконечного ряда ($\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \neq \neq \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{k_i}$). Существует ли тогда (условно) сходящийся ряд $\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i$, который эта же подстановка переводит в расходящийся? Кронрод далеко раздвинул рамки поставленной перед ним задачи. Он показал, что все подстановки натурального ряда делятся на несколько категорий. Существуют подстановки, переводящие некоторые сходящиеся ряды в расходящиеся (Кронрод назвал их «левыми»), подстановки, которые какой-то расходящийся ряд переводят в сходящийся, были названы им «правыми». Подстановки левые и правые одновременно были названы «двусторонними», подстановки, не являющихся ни левыми, ни правыми, Кронрод назвал «нейтральными» (эти подстановки, как оказалось, не могут менять сумму ни одного ряда, ибо, как показал Кронрод, подстановки, могущие менять сумму ряда, — их Кронрод назвал «существенными» — являются подмножеством двусторонних подстановок). Заключительная часть работы содержала эффективные критерии принадлежности подстановок к тому или иному классу и перенесение основных результатов работы на ряды с комплексными членами.

Эта красивая работа, опубликованная в 1945 году в «Математическом сборнике», стала дипломной работой Кронрода. За неё он был удостоен премии Московского математического общества для молодых учёных (это был уникальный случай присуждения премии Общества студенту; кроме того, Кронрод единственный дважды получивший эту премию).

Осенью 1944 года Кронрод возобновил занятия на четвёртом курсе механико-математического факультета.

В феврале 1945 года на факультете произошло незаурядное событие: после большого перерыва возобновил чтение лекций академик Николай Николаевич Лузин. Лузин был основателем Московской математической школы. Среди его учеников были такие всемирно известные учёные, как П. С. Александров, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, А. А. Ляпунов, Д. Е. Меньшов, П. С. Новиков, М. Я. Суслин, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин, Л. Г. Шнирельман... В середине тридцатых годов у Лузина возник трагический конфликт с некоторыми из его учеников, в результате которого он вынужден был покинуть Московский университет.

В сорок пятом году Лузин объявил специальный курс «Теория функций двух действительных переменных». Он начал также вести семинар, тесно связанный с этим курсом. На этом семинаре появились последние ученики Н. Н. Лузина. Ими, видимо, следует считать А. С. Кронрода и его друга Георгия Максимовича Адельсона-Вельского. Лузин был единственным учителем Кронрода, и тот всегда гордился этим своим ученичеством. В частности, он любил демонстрировать подаренный ему Лузиным и надписанный автором экземпляр французского оригинала знаменитой диссертации Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» и с удовольствием вспоминал, как Лузин представил Кронрода (в 1945 году, на собрании, посвящённом юбилею Академии Наук) знаменитому французскому математику Жаку Адамару как своего ученика.

Задача, поставленная Лузиным перед Адельсоном-Вельским и Кронродом, состояла в том, чтобы доказать методами теории функций действительного переменного без обращения к интегральному исчислению, что каждая функция $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана, разлагается в степенной ряд. Поставленная задача была решена и обобщена Адельсоном-Вельским и Кронродом: они рассмотрели произвольные уравнения

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = A(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -B(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

с положительными функциями $A(x,y)$ и $B(x,y)$ и установили связь между гладкостью решений и гладкостью коэффициентов A и B (тождественно равных единице в случае уравнений Коши – Римана). При этом существенную роль в их работе играло изучение линий уровня функций двух переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и установление принципа максимума для этих функций.

Эта работа послужила отправным пунктом для изучения линий уровня произвольных непрерывных функций двух переменных, чему был посвящён ряд последующих работ А. С. Кронрода и Г. М. Адельсона-Вельского, удостоенных премии Московского математического общества.

Но этим Кронрод не ограничился. На протяжении следующих четырёх лет он построил глубокую теорию, охватывающую свойства функций двух переменных, связанные с понятием вариации и наметил путь для построения теории функций многих переменных.

Основными для теории явились понятия вариации функций двух переменных и двумерных множеств. А. С. Кронрод показал, что свойства, которые в случае функций одной переменной зависят от её вариации, расщепляются: для функций двух переменных естественно ввести две вариации. Одну из них он назвал плоской, другую — линейной. Для гладкой функции плоская вариация оказывается равной интегралу от модуля её градиента, взятого по области задания.

Линейная вариация — принципиально новый объект. А. С. Кронрод вводит понятие монотонной функции двух переменных и доказывает, что ограниченность линейной вариации позволяет представить функцию в виде разности монотонных функций. Для самой линейной вариации он даёт ряд эквивалентных определений, из которых особенно интересно одно. Оказывается, непрерывной функции двух переменных можно сопоставить одномерное дерево, элементами которого являются компоненты множеств уровня функции. На этом дереве при помощи исходной функции задаётся функция и метрика. Линейная вариация тогда оказывается равной обычной вариации функции, заданной на одномерном дереве. Ограниченность одновременно плоской и линейной вариаций обеспечивает существование почти всюду обычного полного дифференциала.

Развитая А. С. Кронродом теория функций двух переменных составида содержание его диссертации, защищённой в МГУ в 1949 году. Официальными оппонентами были М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров и Д. Е. Меньшов. За эту работу А. С. Кронроду была присуждена степень доктора физико-математических наук, минуя кандидатскую степень.

Теория Кронрода была существенно развита А. Г. Витушкиным. Это нашло отражение в двух монографиях: «О многомерных вариациях» А. Г. Витушкина и «Вариация множеств» Л. Д. Иванова. Основной стержень теории заключается в понятии вариации множества. Подмножеству n-мерного пространства сопоставляются вариации порядков от 0 до n. k-я вариация — это интеграл по пространству всех плоскостей размерности $n-k$ от числа компонент пересечения плоскости с данным множеством. Это понятие играет существенную роль в вопросах теории сложности разного рода задач и алгоритмов.

В сороковые-пятидесятые годы вокруг Кронрода сконцентрировалась активная группа учеников, реализовавших многие из его идей. Выше уже было сказано, что А. Г. Витушкиным теория Кронрода была распространена на многие переменные. А. Я. Дубовицкий детально исследовал множества критических значений функций многих переменных. Результаты

Кронрода сыграли существенную роль при решении А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом тринадцатой проблемы Гильберта.

В 1949 году Кронрод объявил семинар для первокурсников. Он был человеком, прошедшим войну, доктором физико-математических наук, но на первом же заседании семинара он сказал, что его можно называть просто по имени — Саша.

…И до сих пор все, знавшие его, называют его именно так — Саша…

На семинаре было выполнено несколько интересных исследований. Первокурсник Роберт (Боб) Минлос получил результат, который был представлен Колмогоровым к опубликованию в «Докладах Академии наук», через год второкурсник Толя Витушкин сделал работу, которую докладывал на заседании Московского математического общества.

Но вскоре Кронрод решил порвать с чистой математикой. Сделал он это решительно, раз и навсегда. Сделал он это потому, что открыл для себя новую сферу деятельности — вычислительную математику, программирование и создание вычислительных средств. И на этом поприще он добился больших успехов.

Кронрод стал работать в Институте теоретической и прикладной физики. Он возглавил огромную лабораторию, основное назначение которой было решение физических задач, предназначавшихся для создания атомного оружия. Атомное противостояние нашей страны и остального мира должно найти своего объективного историка, и тогда, несомненно, будут написаны страницы, посвящённые А. С. Кронроду. Но это дело будущего. Здесь же нужно сказать, что Кронрод значительно расширил сферу предписанной ему деятельности. Он был одним из предтеч исследований по искусственному интеллекту, он внёс фундаментальный вклад в развитие программирования, вычислительной математики, устройства вычислительных машин. Его работы были удостоены Сталинской премии.

Главным достижением Кронрода на новом поприще было создание школы, школы Кронрода. Ныне представители этой школы разбросаны по всему свету. И как сказал на собрании один из учеников Кронрода Владимир Львович Арлазаров «несмотря ни на какие кризисы, ни один из учеников Кронрода ни разу и никогда работы не лишился«.

Кронрод верил в то, что машины превзойдут человека в творческой деятельности, и очень много сделал, чтобы приблизить это время. Он был инициатором многих игровых программ, в частности, шахматных. На первом чемпионате мира по компьютерным шахматам программа Кронрода заняла первое место.

В 1961 году Кронрод начал работать в седьмой школе, и деятельность его, как Учителя, сыграла огромную роль в развитии математического образования сначала в нашей стране, а потом и в других странах.

Вот что вспоминает один из выпускников седьмой школы М. А. Перегудов: «Я настолько был очарован Александром Семёновичем, что мне трудно было общаться с другими людьми: я всех мерил по кронродовской планке, но мало кто из тех, с кем после школы сводила меня жизнь, до этой планки дотягивал». А вот какое письмо прислала из Тель-Авива его бывшая ученица Ольга Кардаш (Горелик): «Дорогие друзья! Я думаю, что всем нам невероятно повезло, что мы учились у А. С. Кронрода. Мне кажется, что мир был бы для нас другим, да и сами мы были бы другими, если бы его не было в нашей жизни.

Когда я увидела его в первый раз, мне показалось, что на сцену вышел Бог в человеческом обличье. Он был личностью такого плана, которую не затушует никакое время, и мне хочется сказать от всех нас: Спасибо, что Вы были с нами, Александр Семёнович! Спасибо за всё!»

Л. В. Канторович (1912–1986)

В. М. Тихомиров

Леонид Витальевич Канторович принадлежит к числу выдающихся учёных XX века. Его вклад в математику и математическую экономику велик и фундаментален.

19 января 2002 года ему исполнилось бы девяносто лет. Л. В. Канторович родился в Петербурге в семье врача. Он принадлежал к числу немногих, кто достигает высокого интеллектуального развития очень рано. Мне довелось слышать семейное предание, согласно которому брат Леонида Витальевича — студент — как-то взял его на экзамен по химии. Он попросил экзаменатора, чтобы мальчик посидел во время экзамена в аудитории, якобы потому, что дома его не с кем оставить. Но причина была в другом: маленький мальчик, про которого вполне можно было думать, что он едва читает по складам, писал шпаргалки не только для своего брата, но и для его друзей.

В четырнадцатилетнем возрасте Л. В. поступает в Ленинградский государственный университет и вскоре начинает активно работать в семинарах В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, Б. Н. Делоне и других.

Как-то раз я спросил Леонида Витальевича, кого он считает своими учителями. При ответе Леонид Витальевич проявил свойственную ему широту и щедрость. Он назвал четверых: Г. М. Фихтенгольца, А. Н. Колмогорова, С. Н. Бернштейна и В. И. Смирнова.

Григорий Михайлович Фихтенгольц был первым наставником Леонида Витальевича. Когда четырнадцатилетний мальчик поступил в Ленинградский Университет и стал слушать лекции Фихтенгольца по математическому анализу, тот взял на себя научное руководство учебной и научной работой одарённого студента. Фихтенгольц привлёк внимание Леонида Витальевича к проблемам теории функций и связям этой теории с функциональным анализом (который лишь зарождался в ту пору).

Научная деятельность Леонида Витальевича началась уже на втором курсе и в течение первых четырёх лет он вошёл в тематику нескольких существенно разных научных направлений, в которых чувствовалось влияние всех тех математиков, которых Л. В. назвал своими учителями.

В 1929 году выходят из печати первые научные статьи Л. В. Канторовича. Начальный цикл его исследований был посвящён дескриптивной теории функций и множеств, в котором сказывалось воздействие Лузина, Суслина, Витали, Хаусдорфа и Колмогорова. Тогда же состоялось знакомство Канторовича с Колмогоровым, и тот предоставил юноше возможность прочитать свои исследования, написанные в 1920 году, но остававшиеся неопубликованными (вплоть до 1987 года — последнего года жизни Андрея Николаевича). Эти контакты и послужили тому, что Канторович назвал Колмогорова одним из своих учителей.

Почти одновременно с исследованиями по дескриптивной теории функций, Канторович начинает цикл работ по тематике, навеянной творчеством С. Н. Бернштейна. Но он идёт своим путём, сразу же проявляя большую самостоятельность. Канторович исследует сходимость полиномов Бернштейна в комплексной области, а также полиномов с целыми коэффициентами. По бернштейновской тематике Канторович публикует три работы в 1930 году и выступает на первом Всесоюзном съезде математиков в Харькове.

Вскоре (начальные публикации относятся к 1933 году) Леонид Витальевич начинает проявлять интерес к вопросам, постановка которых была связана с Владимиром Ивановичем Смирновым: вариационному исчислению, конформным преобразованиям, приближенным методам.

Но уже в 1935 году Леонид Витальевич начинает разрабатывать теорию упорядоченных векторных пространств. Здесь он шёл своим путём, хотя некоторые шаги в этом направлении чуть ранее сделал венгерский математик Ф. Рисс.

В тридцатые годы три математика формировали идеологию функционального анализа: Банах (своим трудом «Théorie des opération linéare»), Гельфанд (своей теорией нормированных колец) и Канторович, построивший теорию векторных решёток.

А в следующем году — 1936 году — выходит его книга с В. И. Крыловым «Методы приближенного решения уравнений в частных производных», с которой начался новый этап развития численного анализа.

В период с 1936 по 1938 год Канторович печатает около тридцати работ по функциональному анализу и численным методам.

Десятилетний период с 1929 по 1938 годы потрясает своей разносторонностью, насыщенностью и плодотворностью.

А затем случилось вот что. В начале 1939 года к Леониду Витальевичу обратились за консультацией сотрудники лаборатории фанерного треста, которые столкнулись с вопросом о наиболее выгодном распределении материала между станками. Задача сводилась к нахождению максимума линейной функции, заданной на многограннике. Максимум такой функции достигался в вершине, но число вершин было очень велико и прямой перебор был неосуществим.

Леонид Витальевич писал: «Оказалось, что эта задача не является случайной. Я обнаружил большое число разнообразных по содержанию задач, имеющих аналогичный математический характер: наилучшее использование посевных площадей, выбор загрузки оборудования, рациональный раскрой материала, использование сырья, распределение транспортных грузопотоков... Это настойчиво побудило меня к поиску эффективного метода их решения.» В том же — 1939 — году выходит из печати его книга «Математические методы организации и планирования производства», которая знаменует собой рождение нового направления в теории экстремума, получившего название линейного программирования, а также — современной математической экономики.

Творчество Леонида Витальевича было сразу очень высоко оценено. Андрей Николаевич Колмогоров ещё в тридцатые годы воспринимал его, как одного из самых замечательных математиков среди своих современников.

В одном из писем 1942 года к Павлу Сергеевичу Александрову Колмогоров так описывает эволюцию творчества многих своих коллег: «После первых 10 – 15 – 20 лет, когда молодой математик занимается стихийно тем, что попадает ему под руку, *большинство серьезных математиков* начинает стремиться к тому, чтобы очертить себе достаточно узкий круг интересов и сосредоточить свои усилия на такой области, где они чувствовали бы себя полными хозяевами в смысле полного владения всем, что в данной области известно, а по возможности и не имели бы равных по силе конкурентов.»

В числе таковых «серьезных математиков» в письме названы Александров, Курош, Хаусдорф и Каратеодори. Упоминая в своем списке П. С. Александрова и немецких математиков, оказавших большое влияние и на его собственное творчество, Колмогоров признает их позицию «вполне достойной».

Но его, Колмогорова, влечет к себе «другая позиция», а именно: «браться за все то, что *с чисто субъективной точки зрения* кажется наиболее существенным и интересным в *математике вообще.*» Среди своих современников и соотечественников в очень скромном перечне тех, кого влекла к себе «другая позиция», названа фамилия Канторовича.

Двадцатый век был воистину жестоким веком. Но по отношению к Леониду Витальевичу он был во многом милостив. Ему посчастливилось родиться в одном из самых прекрасных городов мира, в высококультурной и интеллигентной семье. Его выдающаяся одарённость была своевременно замечена и оценена, и он в самые ранние годы попал в атмосферу Ленинградского университета, в котором были живы великие традиции, исходившие от Чебышёва и его последователей, и где работали люди высокого нравственного ценза. Некоторые из них стали учителями Леонида

Витальевича. На протяжении первых лет своего творчества Леонид Витальевич ощущал всестороннюю поддержку и одобрение, причём не только среди коллег: мне довелось как-то видеть календарь на тридцать девятый или сороковой год, где среди портретов передовиков производства был портрет «комсомольца-профессора» Леонида Канторовича.

Но и ему не удалось избежать суровых испытаний. Они начались тогда, когда Леонид Витальевич осознал возможности математики в разрешении многих актуальных проблем экономики — в начале сороковых годов. Эти исследования не встретили понимания экономистов, строивших свои теории на базе философии марксизма. Они были объявлены ересью, как чуть позже теория Менделя. Канторовичу было предписано прекратить свои занятия экономикой под угрозой непредсказуемых последствий. Его активная работа во многом затормозилась, но, что поражает, не прекратилась вовсе: Леонид Витальевич продолжает писать математические работы, навеянные экономическими сюжетами и принимает участие во многих конкретных производственных разработках. Вот названия двух его работ того периода: «Методы рационального раскроя металлов» (1942 г.), «Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте» (1949 г.).

Среди замечательных математических достижений с экономической «подоплёкой» — обращение Канторовича к исследованию Монжа полуторавековой давности. Гаспар Монж — великий геометр XVIII века — выполнил работу о наиболее экономном способе перемещения масс для строительства военных укреплений — эта проблематика оказалась актуальной в эпоху революций и войн. Леонид Витальевич по-новому взглянул на эту проблему, как на особый тип транспортной задачи линейного программирования. Эта проблема получила название задачи Монжа – Канторовича. Для этой задачи выписывается двойственная задача, решение которой диктует оптимальную стратегию перевозок.

А тем временем концепции Леонида Витальевича были переоткрыты на Западе. Американский экономист Т. Купманс во время войны привлёк внимание математиков к ряду задач, подобных рассмотренных Канторовичем, но связанных с военной тематикой (в частности, с разработкой военных операций: расписанием полётов, распределением ресурсов и т. п.). И там получались задачи о нахождении экстремумов линейных функций на полиэдральных конечномерных множествах. По предложению Купманса этот раздел математики был назван линейным программированием. Американский математик Д. Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный метод численного решения задач линейного программирования. Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение во всём мире и имена Купманса и Данцига стали широко известны. К их чести надо сказать, что оба эти американских учёных, узнав о книге Канторовича, многое сделали для того, чтобы именно за ним закрепился титул первооткрывателя линейного программирования.

Труды Канторовича и Купманса были увенчаны Нобелевской премией по экономике за 1975 год.

В военные и последующие за ними годы Л. В. Канторович уделяет особое внимание созданию эффективных численных методов решения прикладных задач. Он принимает деятельное участие в осуществлении атомной программы. Л. В. Канторович внёс значительный вклад в развитие вычислительной техники.

Начиная с пятидесятых годов Леонид Витальевич сосредоточился на проблемах математической и конкретной экономики. Он создал выдающуюся школу экономистов, принимающих ныне активное участие в развитии экономики нашей страны.

Среди учеников Л. В. Канторовича в математике — Г. П. Акилов, Б. З. Вулих, М. К. Гавурин, А. Г. Пинскер, Г. Ш. Рубинштейн, в математической экономике — А. Г. Аганбегян, В. Л. Макаров. Его влияние испытали на себе огромное число математиков и экономистов.

Леонид Витальевич был человеком замечательных душевных качеств, и все люди, знавшие его, благодарят судьбу за то, что она дала им возможность общаться с ним.

Наш семинар: математические сюжеты

Характеристические классы для начинающих

Д. Реповш* А. Б. Скопенков†

‘You mean... ’ he would say, and then he would rephrase what I had said in some completely simple and concrete way, which sometimes illuminated it enormously, and sometimes made nonsense of it completely.

I. Murdoch, Under the Net.[1)]

§1. Введение

Теория препятствий является фундаментальной частью алгебраической топологии и имеет многочисленные применения за ее пределами. К сожалению, в существующих изложениях изучение теории препятствий начинается с длительного освоения немотивированных абстрактных понятий и теорий. Однако основные идеи этой теории можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний в топологии. Такому изложению и посвящена настоящая заметка, где идеи

*E-mail: dusan.repos@uni-lj.si

Работа частично поддержана исследовательским грантом Министерства образования, науки и спорта республики Словения №101–509.

†E-mail: skopenko@mccme.ru

Работа частично поддержана грантом РФФИ №99-01-00009.

1) «Вы хотите сказать...» — начинал он и пересказывал мои слова конкретно и просто, после чего моя мысль либо оказывалась много понятнее и глубже, либо оборачивалась полнейшей чепухой. (А. Мердок, «Под сетью», пер. с англ. М. Лорие)

теории препятствий продемонстрированы на простейших частных случаях. В ней существенно упрощен и доработан материал из [RS00, §3]. Основным преимуществом перед [RS00, §3] является возможность наглядно *изображать* препятствия.

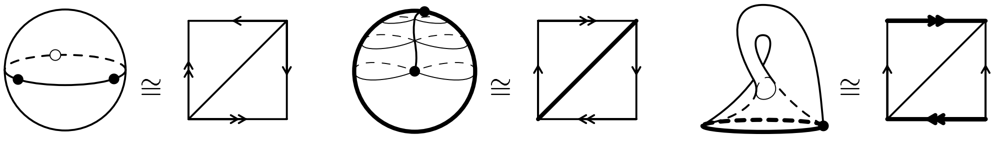
Теория препятствий основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности, олимпиадных) задач: *невозможность* некоторой конструкции можно доказать путем построения алгебраического *препятствия*, или *инварианта* (например, из соображений четности). Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии аналогичным образом естественно приводят к похожим друг на друга *препятствиям*. В настоящей заметке этот процесс продемонстрирован на примере наиболее наглядных топологических задач.

Настоящая заметка основана на цикле лекций, прочитанных вторым автором в летней школе «Современная математика», организованной Российской Академией Наук и Московским Центром Непрерывного Математического Образования под Дубной в июле 2001 г. Выражаем благодарность М. Н. Вялому за многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения, а также за подготовку рисунков.

§2. Советы читателю

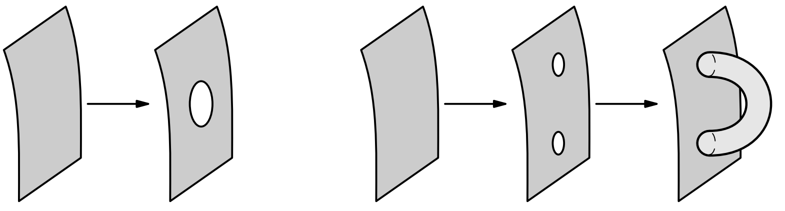
Настоящая заметка предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих топологией, но мы смеем надеяться, что она будет интересна и специалистам. В этом параграфе мы приведем несколько советов для читателей-нетопологов (читателю, уже знакомому с алгебраической топологией, достаточно прочитать два последних абзаца). Для понимания §3 – §6 достаточно обычной геометрической интуиции, а для понимания бóльшей части §7 достаточно интуитивного представления о трехмерных многообразиях. В частности, все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями «группы гомологий» и «характеристические классы») естественно возникают и строго *определяются* в процессе доказательства теорем. Мы не требуем от читателя знакомства с алгебраическим понятием группы, в тексте можно воспринимать это слово как синоним слова «множество».

Напомним понятие двумерного многообразия. Любое (компактное связное) двумерное многообразие (2-многообразие) N может быть получено из сферы, проективной плоскости или бутылки Клейна (рис. 1) приклеиванием g ручек и вырезанием h дырок (рис. 2). Здесь $g = g(N)$ (*род* многообразия N) и $h = h(N)$ — некоторые числа, однозначно



сфера S^2 проективная плоскость бутылка Клейна

Рис. 1.



вырезание дырки приклеивание ручки

Рис. 2.

определяемые по поверхности N. Двумерное (компактное) многообразие называется *замкнутым*, если в нем нет дырок.

Разбиением двумерного многообразия N называется такое его разбиение на многоугольники, что любые два из них могут пересекаться лишь по объединению их ребер и вершин. При этом внутренность каждого из многоугольников должна быть топологически эквивалентна двумерному диску, т. е. должна разбиваться на части любой замкнутой несамопересекающейся кривой. Например, представленная на рис. 3 ситуация не является разбиением. Примеры разбиений изображены на рис. 1.

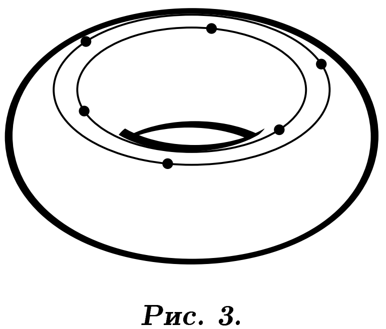


Рис. 3.

Количества вершин, ребер и граней выбранного разбиения обозначаются V, E и F, соответственно. *Эйлеровой характеристикой* разбиения называется число $\chi = V - E + F$. Это число не зависит от разбиения данного многообразия и равно $2 - 2g$, $1 - 2g$ и $-2g$ соответственно для сферы, проективной плоскости или бутылки Клейна с g ручками.

Нетрудно проверить, что любое двумерное многообразие имеет разбиение (при принятом нами определении двумерного многообразия). Одно и то же двумерное многообразие может иметь разные разбиения. Однако многие встречающиеся в тексте объекты (как, например, эйлерова характеристика) не зависят от выбора разбиения T данного многообразия N. В таких случаях мы молчаливо указываем в их обозначениях многообразие N вместо разбиения T (например, пишем $\chi(N)$ вместо $\chi(T)$), оставляя читателю либо доказать независимость от выбора разбиения, либо заменить всюду N на T.

Большая часть материала (например, о связи характеристических классов с формой пересечений) сформулирована в виде задач, обозначаемых жирными числами. Восполнение деталей приводимых в тексте *набросков доказательств* может также служить материалом для самостоятельной работы. Следует подчеркнуть, что задачи не используются в остальном тексте. Кружочком отмечены задачи, для понимания и решения которых достаточно знакомства с этой заметкой. В некоторых других задачах могут встретиться незнакомые вам термины; такие задачи следует просто игнорировать. Отметим также, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение требуется доказать. Материал из [RS00, §§1,2,3.D] и задачи из [RS00, §3.A,B,C] почти не повторяются здесь, но мы рекомендуем заинтересовавшемуся читателю обратиться к этому материалу и порешать указанные задачи. После этого читатель сможет разобрать более продвинутый материал из [FF89, §18, §19, MS74].

Для читателя, уже знакомого с алгебраической топологией, отметим, что мы не используем стандартную терминологию теории препятствий там, где мы считаем, что она неудобна для начинающего. Кроме того, в этой заметке препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных гомологиям ввиду двойственности Пуанкаре). Именно эта точка зрения (двойственная стандартной) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

§3. Ориентируемость

Ориентация двумерного плоского многоугольника задается лежащей в нем окружностью со стрелкой. Двумерное многообразие называется *ориентируемым*, если можно так ввести ориентации на всех гранях некоторого его разбиения, что они *согласованы* для соседних граней, т. е. задают на их общем ребре *противоположные* направления (рис. 4).

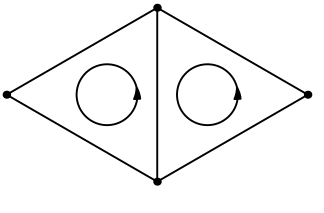
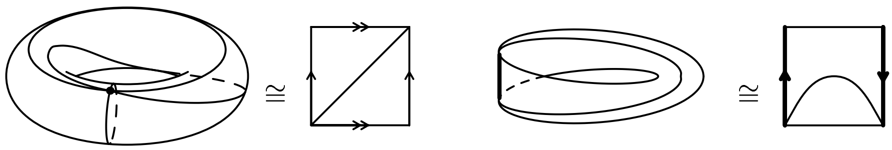


Рис. 4.

Такой набор ориентаций на гранях разбиения называется *ориентацией* многообразия.

В этих определениях вместо слов «некоторого разбиения» можно поставить «любого разбиения» (кто не хочет этого доказывать, может считать, что ниже везде рассматриваются 2-многообразия с фиксированным разбиением). Например, тор (рис. 5) ориентируем, а лист Мёбиуса (рис. 5) неориентируем (докажите!).



тор лист Мёбиуса

Рис. 5.

Теорема ориентируемости. *Каждое из следующих условий на замкнутое двумерное многообразие N равносильно его ориентируемости:*

(W) первый класс Штифеля – Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ *нулевой.*

(M) N *не содержит листа Мёбиуса.*

Критерий (W) является по сути лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраическом языке. Но он важен не только сам по себе, но и как иллюстрация метода теории препятствий (см., в частности, нижеследующую задачу 1). Кроме того, из него легко получается более простой критерий (M) (упражнение).

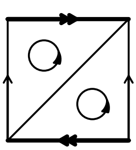


Рис. 6.

Определение $H_1(N)$, $w_1(N)$ и доказательство критерия (W). Рекомендуем читателю разобрать это доказательство сначала для случая, когда N — бутылка Клейна (рис. 6). Возьмем некоторое разбиение многообразия N и зададим набор o ориентаций на гранях разбиения. Ребро разбиения покрасим в красный цвет, если ориентации на примыкающих к нему гранях *рассогласованы* (т. е. задают на этом ребре *одинаковые* направления). Объединение красных ребер называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$. Данный набор o ориентаций граней определяет ориентацию многообразия тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \varnothing$. На рис. 1, 5 и 6 жирными линиями изображены некоторые представители ω первого класса Штифеля – Уитни (т. е. препятствующие циклы). Легко проверить, что в графе $\omega(o)$ из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Подграфы выбранного разбиения с таким условием называются *циклами*. Чтобы не путать их с циклами в смысле теории графов, их можно называть гомологическими циклами, но мы этого делать не будем.

Если $\omega(o) \neq \varnothing$, то o не определяет ориентации многообразия, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o, так чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o. При изменении ориентации одной грани к $w(o)$ прибавляется (по модулю 2) граница этой грани. При изменении ориентации нескольких граней к $w(o)$ прибавляется симметрическая разность (сумма по модулю 2) границ этих граней. Будем называть также *границей* сумму границ нескольких граней.

Рассмотрим операцию симметрической разности (иными словами, суммы по модулю 2) на множестве всех циклов. Назовем циклы ω_1 и ω_2 *гомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ есть граница. Нетрудно понять, что если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o', так чтобы получилось $\omega(o') = \varnothing$. Нетрудно также понять, что при изменении набора o ориентаций препятствующий цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл.

Ясно, что гомологичность является отношением эквивалентности на множестве циклов. Группа $H_1(N)$ классов эквивалентности (т.е. циклов с точностью до гомологичности) называется *одномерной группой гомологий поверхности N (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$)*. Можно доказать, что она зависит именно от N, а не от выбранного разбиения. Класс гомологичности препятствующего цикла $\omega(o)$ в $H_1(N)$ является *полным* препятствием к ориентируемости многообразия N. Он и называется первым классом Штифеля – Уитни. □

При рассуждениях с гомологическими классами обычно сначала работают с представляющими их циклами, а потом доказывают независимость от выбора цикла в данном классе гомологий.

В этих задачах через N обозначается 2-многообразие.

1^0. Многообразие $N - \omega$ ориентируемо для любого представителя ω класса $w_1(N)$.

2^0. Сформулируйте и докажите аналог теоремы ориентируемости для многообразий с краем (обозначение: $w_1(N) \in H_1(N, \partial N)$). Нарисуйте представитель первого класса Штифеля – Уитни (т. е. препятствующий цикл) на листе Мёбиуса.

3^0. a) $H_1(N) = \mathbb{Z}_2^{2-2\chi(N)}$.

b) Несамопересекающиеся циклы порождают $H_1(N)$.

4. *Пересечением* $a \cap b$ двух гомологических классов $a, b \in H_1(N)$ называется число точек пересечения по модулю 2 представляющих их циклов общего положения. Заметим, что даже если данные гомологические классы совпадают, представляющие их циклы могут быть различны.

a) Докажите корректность этого определения.

b) $w_1(N) \cap a = a \cap a$ для любого $a \in H_1(N)$. Для гомологического цикла a, представляемого замкнутой несамопересекающейся кривой, это выражение равно 1, если при обходе вдоль этой кривой меняется ориентация, и равно 0, если не меняется.

c) $w_1(N) \cap w_1(N) = \chi(N) \mod 2$.

d) Пересечение определяет билинейную форму $H_1(N) \times H_1(N) \to \mathbb{Z}_2$ ранга $2 - \chi(N)$.

e) По планете Тополога, имеющей форму тора, текут реки Меридиан и Параллель. Два маленьких принца прошли по планете и вернулись в исходную точку, причем один из них переходил Меридиан 10 раз, а Параллель 17 раз (трансверсально), а другой — 9 раз и 12 раз, соответственно. Докажите, что один маленький принц видел следы другого.

f)* Используйте форму пересечений для построения алгоритма нахождения рода графа.

5. Сформулируйте и докажите аналоги теорем и задач этого параграфа для многообразий произвольной размерности.

§4. Классификация расслоений

Используемые в этом параграфе основные понятия теории графов кратко напомнены в [RS00]. Пусть дан граф K. Раскрасим его ребра в разные цвета. Возьмем ленточки тех же цветов и поставим в соответствие концам каждой ленточки вершины, инцидентные соответствующему ребру. Склеим концы ленточек, соответствующие одной и той же вершине. Заметим, что для каждой k — валентность вершины (рис. 7). Полученный раскрашенный двумерный объект называется *расслоением со слоем отрезок* (*или I-расслоением*) *над графом K*. Примеры: цилиндр или лист Мёбиуса над окружностью (рис. 5).

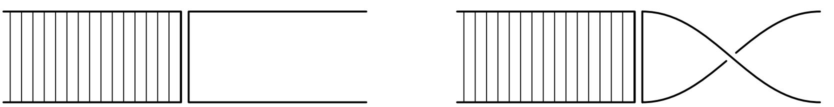


Рис. 7.

Если расставить стрелочки на отрезках склейки, то каждая ленточка либо *перекручена* (стрелки на ее концах противонаправлены), либо *не перекручена* (стрелки на концах сонаправлены). Два расслоения называются *эквивалентными*, если при подходящей расстановке стрелочек любые две ленточки одного цвета одновременно перекручены или одновременно не перекручены.

Заметим, что если рассматривать расслоения над некоторым деревом, то все они оказываются эквивалентными. Неэквивалентные расслоения появляются только при наличии циклических обходов в графе.

Теорема классификации расслоений над графом. *Множество классов эквивалентности I-расслоений над K находится во взаимно однозначном соответствии с $H_1(K)$.*

Набросок доказательства. Рассмотрим расслоение N над графом K. Выберем набор o стрелочек на отрезках склейки. Поставим на ребре графа K единицу, если соответствующая ленточка оказалась перекрученной, и ноль, если неперекрученной. Назовем полученную расстановку *препятствующей* и обозначим $\omega(o)$ (пояснение к названию, не используемое в дальнейшем: эта расстановка препятствует ориентируемости расслоения, определение которого читатель может дать сам). Группа циклов в графе K определяется аналогично §3, обозначается $H_1(K)$ и называется *одномерной группой гомологий* графа K. Для любого цикла g сумма $\omega(o)\cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от набора o стрелочек. Поэтому формула $w_1(N,K)[g]=\omega(o)\cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1(N)\colon H_1(K)\to\mathbb{Z}_2$. Она называется *первым классом Штифеля – Уитни* расслоения. Доказательство того, что соответствие $[N]\mapsto w_1(N)$ является биекцией, оставляем в качестве упражнения. $\square$

Пусть теперь дана триангуляция T поверхности N. Раскрасим ее грани, ребра и вершины в разные цвета. Возьмем призмочки тех же цветов, что и грани триангуляции T. Раскрасим боковые грани и боковые ребра каждой призмочки в те же цвета, что соответствующие им ребра и вершины соответствующей грани. Отождествим боковые грани призмочек, окрашенные в один и тот же цвет (при этом отождествляются боковые ребра, окрашенные в один и тот же цвет). Заметим, что для каждой боковой грани призмочки это можно сделать двумя способами (рис. 8). Полученный раскрашенный трехмерный объект называется *расслоением со слоем отрезок* (*или I-расслоением*) *над поверхностью* N. Например, регулярная окрестность (т. е. маленькая окрестность без «лишних» дыр) двумерного многообразия в трехмерном является пространством I-расслоения (т. е. является I-расслоением при некоторой раскраске).

Два расслоения называются *эквивалентными*, если на призмочках можно так расставить стрелочки, сонаправленные друг с другом и параллельные боковым ребрам, что стрелочки в одноцветных боковых гранях

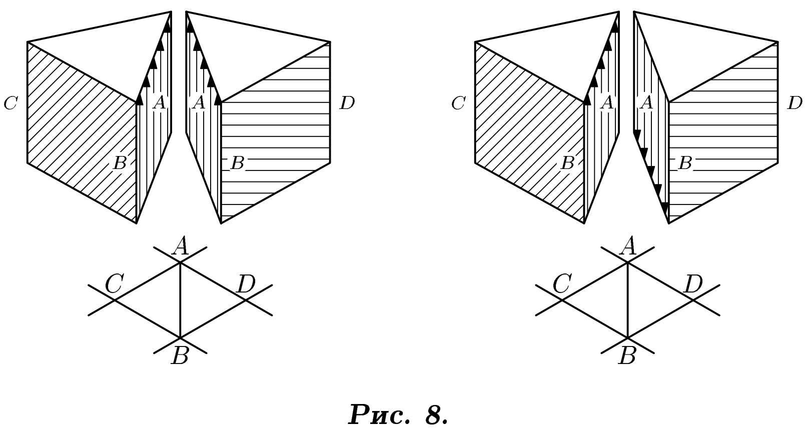


Рис. 8.

призмочек этих двух расслоений одновременно сонаправлены или одновременно противонаправлены.

Теорема классификации расслоений над поверхностью. *Множество I-расслоений над замкнутым 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $H_1(N)$.*

Доказательство теоремы и классификацию расслоений над незамкнутыми 2-многообразиями оставляем читателю в качестве упражнения. О близком понятии утолщений, их ориентируемости и классификации см. [RS00, задачи к §3].

§5. Построение ненулевых векторных полей

Напомним неформально понятие касательного векторного поля. Пусть двумерное многообразие N лежит в евклидовом пространстве (любой размерности) так, что в любой точке многообразия можно провести к нему касательную плоскость (такое вложение называется *гладким*). *Касательным векторным полем* на подмножестве $K \subset N$ называется семейство касательных к N векторов $v(x)$ в точках $x \in K$, непрерывно зависящих от точки $x \in K$. Если многообразие N задано абстрактно, а не как гладкое вложенное многообразие в евклидово пространство, то вместо семейства касательных векторов нужно брать семейство точек $y(x)$, $x \in K$, находящихся на малом расстоянии от точки x. Касательное векторное поле называется *ненулевым*, если все его векторы ненулевые (или, что то же самое, $y(x) \neq x$ для любого $x \in K$).

Исследование векторных полей было начато Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. В этом параграфе, следуя идеям Хайнца Хопфа, мы построим препятствие к существованию ненулевого касательного векторного поля на данном гладком многообразии. Аналогичные результаты для *нормальных* полей приведены в виде задач. Приводимое ниже рассуждение интересно тем, что оно дает явный способ *построения* векторного поля для случая, когда препятствие равно нулю.

1. Впрочем, полезно доказать независимо от общего рассуждения, что на торе и на любом связном двумерном многообразии с непустым краем (не обязательно ориентируемом) существует ненулевое касательное векторное поле.

Теорема Эйлера – Пуанкаре. *Каждое из следующих условий на сферу с ручками N равносильно существованию единичного касательного векторного поля на N:*

(E) число (класс) Эйлера $e(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ *равно нулю*;

(T) N *есть тор.*

Критерий (E) важен не только сам по себе, но и как иллюстрация метода теории препятствий (см., в частности, нижеследующую задачу 2). Кроме того, из него получается более простой критерий (T).

Роль теории препятствий состоит в *сведении* топологических задач на *произвольном* многообразии к похожим задачам для *простейших, модельных* многообразий. Например, теорему Эйлера – Пуанкаре мы сведем к задаче о продолжении векторного поля, заданного на границе диска, на весь диск. Важно, что для применения теории препятствий можно воспользоваться *результатом* решения этих простейших задач, не вникая в его доказательство. Указанные простейшие задачи могут решаться как специфическими методами, так и средствами теории препятствий. В этой заметке мы приводим простейшие задачи и их решения без доказательства.

Определение $H_0(N,\mathbb{Z})$, $e(N)$ и доказательство теоремы Эйлера – Пуанкаре. Рекомендуем читателю разобрать это доказательство сначала для случая, когда N — сфера (см. рис. 9). Слово «поле» будет означать «единичное касательное векторное поле». Возьмем некоторое разбиение многообразия N. Выберем в каждой грани точку и обозначим полученное множество точек через U_0. Очевидно, что можно построить поле на U_0 (рис. 10). Ясно, что это построение однозначно (с точностью до непрерывной деформации в классе единичных касательных векторных полей). Поэтому существование поля на N равносильно продолжимости построенного поля с U_0 на N.

Построим подмножество $U_1 \subset N$ добавлением к U_0 отрезков-перемычек между точками, пересекающих ребра (рис. 10). Малая окрестность каждой перемычки эквивалентна (мы не уточняем, в каком смысле) части плоскости. Если на плоскости лежит отрезок, и на его концах задано поле, то это поле можно продолжить на весь отрезок (рис. 11). Поэтому построенное на U_0 поле можно продолжить на U_1. Заметим, что такое продолжение неоднозначно. Обозначим полученное на U_1 поле через v.

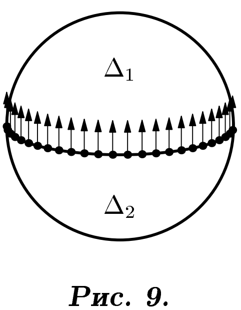


Рис. 9.

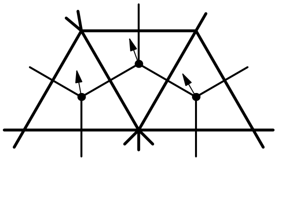


Рис. 10.

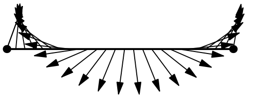


Рис. 11.

Попробуем теперь продолжить поле v, заданное на U_1, на все N. Фиксируем некоторую ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$ и многообразия N. Замыкание Δ любого из дисков в $N - U_1$ эквивалентно части плоскости. «Развернем» диск Δ (вместе с полем на нем) на плоскость согласованно с ориентациями. Ориентация диска Δ (который мы уже считаем лежащим на плоскости) порождает направление на его граничной окружности. При обходе этой окружности вдоль этого направления вектор нашего поля повернется на некоторое целое число оборотов. Поставим это число в вершину исходного разбиения, лежащую в диске Δ. Продолжение поля с $\partial\Delta$ на Δ возможно тогда и только тогда, когда это число равно нулю (докажите!). Полученная расстановка $\varepsilon(v)$ целых чисел в вершинах называется *препятствующей*. Расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Группу всех расстановок целых чисел в вершинах с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^V$, где V — число вершин выбранного разбиения.

Различие между полями v и v' на U_1, совпадающим на U_0, можно измерять (и задавать) так. На каждом ребре поставим число поворотов вектора при последовательном движении вектора первого поля от правой точки из U_0 относительно (ориентированного) ребра e вдоль перемычки к левой точке, и вектора второго поля обратно. Здесь мы вновь пользуемся тем, что малая окрестность каждой перемычки эквивалентна части плоскости. Полученную расстановку назовем *различающей* и обозначим $d(v, v')$: если $d(v, v') = 0$, то поле v на U_1 можно непрерывно продеформировать в поле v' (обратное также справедливо). Группу всех расстановок целых чисел на ребрах выбранного разбиения с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^E$, где E — количество ребер выбранного разбиения.

Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то v не продолжается на N, но еще не все потеряно: можно попытаться так изменить поле v на U_1, чтобы препятствующая расстановка стала равной нулю. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v. При изменении поля на одной перемычке, пересекающей ребро e, «на один оборот» к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ в начале ребра e и -1 в его конце (и 0 на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра* e и обозначается ∂e. Каждому ребру e отвечает «характеристическая» расстановка $e \in \mathbb{Z}^E$ единицы на ребре e и нуля на остальных ребрах.

Назовем расстановки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in Z^V$ *гомологичными*, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = n_1\partial a_1 + \dots + n_s\partial a_s$ для некоторых ребер $a_1, \dots, a_s$ и целых чисел $n_1, \dots, n_s$. Группа $H_0(N, \mathbb{Z})$ расстановок с точностью до гомологичности называется *нульмерной группой гомологий поверхности N с коэффициентами в $\mathbb{Z}$*. Если $d(v, v') = n_1a_1 + \dots + n_sa_s$, то $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = n_1\partial a_1 + \dots + n_s\partial a_s$, откуда следует, что *класс Эйлера* $e(N) = [\varepsilon(v)] \in H_0(N, \mathbb{Z})$ не зависит от v. Значит, $e(N)$ является препятствием к существованию поля на N.

Доказательство независимости группы гомологий и класса Эйлера от разбиения мы оставляем читателю в качестве задачи. Так как $d(v, v')$ может принимать *любое* значение вида $n_1 a_1 + \dots + n_s a_s$, то в случае $\varepsilon(v) = n_1 \partial a_1 + \dots + n_s \partial a_s$ можно изменить v на v', чтобы получилось $\varepsilon(v') = 0$. Значит, препятствие $e(N)$ является полным и критерий (E) доказан.

Равносильность условий (E) и (T) вытекает из задачи 2. □

2. На многообразии $N - \operatorname{supp} \varepsilon$ есть поле для любого представителя ε класса $e(N)$.

3. $H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $e(N) = \chi(N) = 2 - 2g(N)$ (указание: для поля v, изображенного на рис. 5, $e(v) = 1 + 1 = 2$; разберитесь, почему не $1 - 1 = 0$).

4. Определите класс Эйлера $e(N)$ как полное препятствие к построению ненулевого касательного векторного поля на замкнутом *неориентируемом* двумерном многообразии N. На каких замкнутых неориентируемых двумерных многообразиях существует единичное касательное векторное поле?

5. S^1-расслоения над двумерными многообразиями и их эквивалентность определяются аналогично I-расслоениям с заменой призмочек на полнотория, являющиеся прямыми произведениями окружности S^1 на грани разбиения. Например, граница регулярной окрестности двумерного многообразия в $\mathbb{R}^4$ является пространством S^1-расслоения. Докажите, что S^3 является пространством S^1-расслоения над S^2. Докажите, что множество S^1-расслоений над замкнутым ориентируемым связным 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}$ (указание: определите число или класс Эйлера I-расслоения). Как изменится ответ для произвольных 2-многообразий?

6. Любое 2-многообразие гладко вложимо в $\mathbb{R}^4$.

7. Пусть фиксировано гладкое вложение ориентируемого двумерного многообразия N в $\mathbb{R}^4$. *Нормальным векторным полем* на подмножестве $K \subset N \subset \mathbb{R}^4$ называется непрерывное семейство нормальных к N векторов $v(x)$ в точках $x \in K$, непрерывно зависящих от точки $x \in K$. Определение пересечения дано в задаче 4 §3; необходимый ниже аналог для целых коэффициентов читатель легко сформулирует сам.

a) Постройте препятствие $\bar{e}(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ (*нормальное число Эйлера*) к существованию ненулевого нормального векторного поля.

b) Нормальное число Эйлера равно $N \cap N$.

c) Нормальное число Эйлера равно нулю.

d) Существует пара ортогональных векторных полей, нормальных к многообразию N.

8. Для *неориентируемого* 2-многообразия N

a) Решите аналог задачи 5 (число Эйлера будет целым, а не вычетом по модулю 2!).

b) $\bar{e}(N) = e(N) \mod 2$.

9. a) (Теорема Хопфа) На замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда *класс Эйлера* $e(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ нулевой.

b) Если N связно, то $H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $e(N) = \chi(N)$. Далее, $e(N^{2k+1}) = 0$ и $e(S^{2k}) = 2$.

c) Если N связно и имеет непустой край, то класс Эйлера лежит в $H_0(N, \partial N, \mathbb{Z}) \cong 0$ и, значит, $e(N) = 0$.

d) Определите *класс Эйлера* $e(N)$ как полное препятствие к построению единичного касательного векторного поля на неориентируемом n-многообразии N.

10. $e(N) = \operatorname{diag} \cap \operatorname{diag}$, где $\operatorname{diag} \subset N \times N$ есть диагональ.

§6. Классификация ненулевых векторных полей

Пусть на двумерном многообразии N существует ненулевое касательное векторное поле. В некоторых приложениях встречается следующий вопрос: *сколько* существует таких полей (с точностью до эквивалентности) на этом многообразии? При этом два векторных поля называются *эквивалентными* (или *гомотопными*), если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается касательным и ненулевым.

Теорема Хопфа – Уитни. *Множество $V(N)$ ненулевых касательных векторных полей на торе N с точностью до гомотопности находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H_1(N,\mathbb{Z}) \cong \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ одномерных гомологий тора N с целыми коэффициентами. Более того, существует такое отображение $d: V(N)\times V(N) \to H_1(N,\mathbb{Z})$, что $d(u,\cdot)$ является биекцией и $d(u,v)+d(v,w) = d(u,w)$ для любых $u,v,w\in V(N)$.*

Часть «более того» (означающее, что соответствие $V(N) \to H_1(N,\mathbb{Z})$ в некотором смысле «естественное») делает теорему Хопфа – Уитни интересной. Ведь если бы этого свойства не было, теорема утверждала бы лишь то, что множество $V(N)$ счетно.

Определение $H_1(N,\mathbb{Z})$ и набросок доказательства. Рассмотрим некоторое разбиение многообразия N. Воспользуемся множествами U_0 и U_1, определенными в предыдущем параграфе. Фиксируем некоторое поле v на многообразии N. Построенное в дальнейшем соответствие между $V(N)$ и $H_1(N,\mathbb{Z})$ будет зависеть от выбора поля v. Любое другое поле u гомотопно такому, которое совпадает с v на U_0. Поэтому достаточно классифицировать векторные поля, совпадающие с v на U_0, с точностью до гомотопии (правда, эта гомотопия может менять поле даже на U_0). Итак, будем считать, что u совпадает с v на U_0.

Фиксируем произвольно направление на каждом ребре разбиения. Поскольку тор ориентируем, то тем самым для каждой ленточки из $U_1 - U_0$, соединяющей два диска из U_0, можно выбрать *начальный* и *конечный* из этих дисков. Пусть точка x движется по перемычке, пересекающей ребро e, от ее начальной точки к ее конечной точке, а потом обратно. При движении «туда» будем откладывать от точки x вектор $u(x)$, а при движении «обратно» — вектор $v(x)$. Поскольку перемычка топологически эквивалентна части плоскости, то корректно определено число оборотов откладываемого вектора. Поставим на ребре e это число. Полученную расстановку обозначим $\gamma(u)$.

Поскольку поле u продолжается на $N - U_1$, то из предыдущего параграфа вытекает, что для любой вершины триангуляции сумма чисел на входящих в нее ребрах равна сумме чисел на выходящих из нее ребрах. Такие расстановки называются *циклами* (придумайте, как их можно наглядно изображать!). Множество всех расстановок целых чисел на ребрах разбиения с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^E$. Если u совпадает с v на U_0 и $\gamma(u) = 0$, то поля u и v гомотопны. Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии. Для грани a разбиения изменим поле u так, чтобы вектор в a сделал один оборот против часовой стрелки, вектора в маленькой окрестности грани a «потянулись» за вектором в a, а вне этой маленькой окрестности поле осталось прежним. В результате получим поле v. Понятно, что $\gamma(u)$ есть расстановка ± 1 (в зависимости от ориентации) на ребрах, ограничивающих грань a, и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *границей грани* a и обозначается ∂a.

В окрестностях граней $a_1, \ldots, a_s$ сделаем описанную выше гомотопию поля u, поворачивая вектора в этих гранях на $n_1, \ldots, n_s$ оборотов, соответственно. Эту гомотопию можно задать расстановкой чисел $n_1, \ldots, n_s$ на гранях $a_1, \ldots, a_s$, соответственно (и нулей на остальных гранях). Обозначим полученную расстановку через Γ, а полученное поле через u_Γ. Тогда $\gamma(u) - \gamma(u_\Gamma) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$. Назовем циклы $\gamma_1, \gamma_2 \in Z_1$ *гомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$ для некоторых граней $a_1, \ldots, a_s$ и целых чисел $n_1, \ldots, n_s$. Группа $H_1(N, \mathbb{Z})$ циклов с точностью до гомологичности называется *одномерной группой когомологий графа* K *с коэффициентами в* $\mathbb{Z}$. Обозначим $d(u) = [\gamma(u)] \in H_1(N, \mathbb{Z})$.

Теперь рассмотрим гомотопию u_t между полями u_0 и u_1, совпадающими на U_0. Поставим на каждой грани a число оборотов при изменении t от 0 до 1 вектора $u_t(x)$, где x — некоторая точка в a (число оборотов не зависит от выбора точки $x \in a$). Полученную расстановку обозначим $\Gamma(\{u_t\})$. Легко проверить, что $\gamma(u_0) - \gamma(u_1) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$. Значит, $d(u_0) = d(u_1)$. Поэтому отображение $d\colon V(N) \to H_1(N, \mathbb{Z})$ корректно определено.

Если $d(u_0) = d(u_1)$ для некоторых полей u_0 и u_1, совпадающих на U_0, то $\gamma(u_0) - \gamma(u_1) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_V\partial a_V$ для некоторых чисел $n_1, \ldots, n_V \in \mathbb{Z}$. Обозначая через $\Gamma \in \mathbb{Z}^V$ расстановку чисел $n_1, \ldots, n_V$ в вершинах $a_1, \ldots, a_V$, имеем $u_0 \simeq u_{0,\Gamma} \simeq u_1$. Поэтому отображение d инъективно.

Чтобы доказать сюръективность отображения d, возьмем произвольный цикл γ. Возьмем поле u равным v на U_0. На ленточке, пересекающей ребро e, возьмем $\gamma(e)$-кратную подкрутку поля v (см. определение цикла $\gamma(u)$). Для построенного поля u имеем $\gamma(u) = \gamma$, поэтому $d(u) = [\gamma]$. Доказательство инъективности оставляем читателю в качестве упражнения. □

1. Классифицируйте ненулевые касательные векторные поля с точностью до гомотопности на других 2-многообразиях.

§7. Построение ортонормированных систем векторных полей

Другие характеристические классы можно «увидеть» только на многообразиях размерности три и выше. *Трехмерным многообразием* называется (хорошее) пространство, локально гомеоморфное трехмерному шару. Примерами 3-многообразий являются произведения 2-многообразий на отрезок или окружность (см. также §4 и задачу 5 к §5).

Ученик Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел задачу о построении *пары, тройки и т. д. ортонормированных* касательных векторных полей на данном многообразии (ввиду каноничности процесса Грама – Шмидта ортогонализации ортонормированность можно заменить на линейную независимость). Развивая идеи Хопфа, около 1934 г. он пришел к определению характеристических классов (окончательная формализация была завершена Норманом Стинродом). Любопытно, что Штифель начал с частного случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует пары ($\Leftrightarrow$ тройки) ортонормированных касательных векторных полей. Затем, используя свою теорию, он доказал, что такого многообразия нет. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия (например, несуществование алгебр с делением на $\mathbb{R}^n$ для $n \neq 2^k$). В этом параграфе мы приводим без доказательства результат *вычисления* препятствий, дающий указанные интересные следствия.

1. Если 3-многообразие N ориентируемо, то любую *пару* ортонормированных векторных полей можно дополнить до *тройки* ортонормированных векторных полей.

Теорема Штифеля (трехмерная). *На замкнутом 3-многообразии N существует пара ортонормированных касательных векторных полей тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля – Уитни $w_2(N) \in$ $\in H_1(N)$ нулевой.*

Вычисление. $w_2(N) = 0$ *для ориентируемого 3-многообразия N.*

Следствие. *Любое ориентируемое 3-многообразие имеет тройку ортонормированных касательных векторных полей.*

Набросок определения $H_1(N)$, $w_2(N)$ и доказательства. Будем называть пару ортонормированных касательных векторных полей просто парой полей. Возьмем некоторое разбиение многообразия N (определение разбиения трехмерного многообразия читатель может дать сам по аналогии с двумерным случаем). Выберем по точке в каждом трехмерном многограннике разбиения. Построим пару полей в этих точках (рис. 12). Продолжим пару полей на перемычку, соединяющую две такие точки и протыкающую двумерную грань триангуляции (рис. 12). Для этого заметим, что окрестность этой перемычки эквивалентна подмножеству пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда каждой паре векторов в точке x на этой перемычке

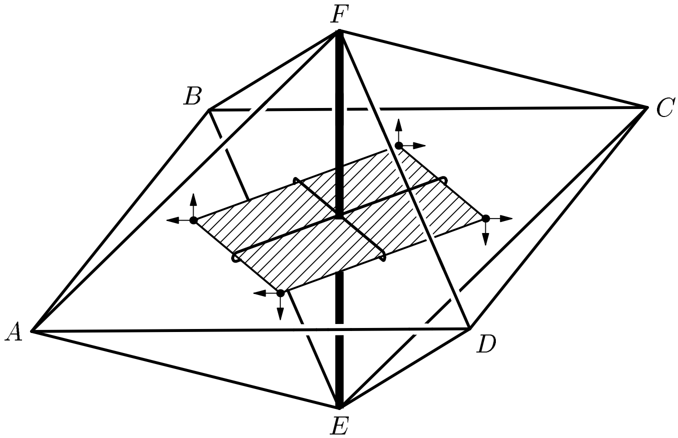


Рис. 12. *Многогранники разбиения: $ADEF$, $ABEF$, $BCEF$, $CDEF$*

сопоставится пара векторов в $\mathbb{R}^3$, а всей перемычке — отображение ее в пространство SO_3 ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^3$. Это пространство эквивалентно

пространству движений пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих начало координат неподвижным;

пространству вращений пространства $\mathbb{R}^3$ относительно прямых, проходящих через начало координат;

пространству прямых в $\mathbb{R}^4$, проходящих через фиксированную точку;

замкнутому трехмерному шару, на границе которого склеены диаметрально противоположные точки.

Все эти эквивалентности мы оставляем без доказательства (см. замечание после формулировки теоремы Эйлера – Пуанкаре), а в дальнейшем используем последнюю из перечисленных «моделей» пространства SO_3. Для этой модели очевидно, что пространство SO_3 связно. Отсюда следует, что построенная пара векторных полей продолжается на объединение перемычек.

Продолжим пару полей на пленку, натянутую на точки и перемычки и протыкаемую ребром триангуляции (рис. 12). Отображение граничной окружности пленки в SO_3 соответствует элементу из группы $\pi_1(SO_3)$ непрерывных отображений окружности в SO_3 с точностью до непрерывной деформации. Будем использовать без доказательства равенство $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$. Поясним лишь, что единица этой группы представляется диаметром трехмерного шара, из которого SO_3 получается склейкой. Если полученный элемент группы $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$ ненулевой, покрасим ребро, протыкающее пленку, в красный цвет. Таким образом, заданию пары

w ортонормированных векторных полей на объединении перемычек соответствует красный подграф $\varepsilon(w)$ данного разбиения. В нашем случае число красных ребер, выходящих из каждой вершины, четно (докажите!). Подграфы с таким условием называются (*одномерными*) *циклами*. Далее аналогично предыдущему определяется гомологичность циклов, группа $H_1(N)$ и *второй класс Штифеля – Уитни* $w_2(N) = [\varepsilon(w)] \in H_1(N)$. Аналогично предыдущему проверяется, что $w_2(N) = 0$ тогда и только тогда, когда w можно продолжить на объединение U_2 перемычек и пленок.

Пару w ортонормированных векторных полей на U_2 всегда можно продолжить на все многообразие N. Это доказывается аналогично проделанному построению с использованием того факта, что любое отображение двумерного диска, являющегося границей трехмерного шара, в SO_3 можно продолжить на весь шар. Этот факт мы не доказываем (для специалистов отметим, что он следует из равенств $\pi_2(SO_3) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$). Поэтому препятствие $w_2(N)$ является полным. $\square$

2. a) Нарисуйте какой-нибудь представитель второго класса Штифеля – Уитни для $\mathbb{R}P^3$ и для $\mathbb{R}P^2 \times S^1$ (и для других известных вам примеров 3-многообразий).

b) Для любой триангуляции произвольного трехмерного многообразия N объединение ребер ее барицентрического подразделения является циклом, представляющим класс $w_2(N)$.

3. (сравните с задачей 4 из §3). Пусть N — замкнутое связное ориентируемое четырехмерное многообразие.

a) Определите $H_2(N)$ и $w_2(N) \in H_2(N)$ как препятствие к существованию *тройки* ортонормированных векторных полей (это препятствие уже не будет полным).

b) То же как *полное* препятствие к существованию спинорной структуры на N (т. е. к возможности извлечь корень из любого тензора на N; авторы благодарят Ю. П. Соловьёва за указание на эту интерпретацию). Докажите, что вне любого цикла, представляющего $w_2(N)$, можно ввести спинорную структуру.

c) Определите форму пересечений $\cap : H_2(N) \times H_2(N) \to \mathbb{Z}_2$ и докажите, что $a \cap a = w_2(N) \cap a$ для любого $a \in H_2(N)$ (это выражение равно нулю тогда и только тогда, когда в окрестности любого цикла, представляющего a, можно ввести спинорную структуру).

d) $w_2(N) \cap w_2(N) = \chi(N) \mod 2$.

e) Сформулируйте и докажите аналоги задач (a)-(d) для неориентируемых или незамкнутых 4-многообразий.

f) Определите *число Понтрягина* $p_1(N) \in H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ как полное препятствие к существованию четверки векторных полей, имеющей ранг не менее 3 в каждой точке.

g)* Число Понтрягина равно утроенной сигнатуре формы пересечений многообразия N.

h)* Если N ориентируемо и гладко вложимо в $\mathbb{R}^6$, то $w_2(N) = 0$ и $p_1(N) = 0$. Например, $\mathbb{C}P^2$ невложимо в $\mathbb{R}^6$.

Теорема Штифеля (многомерная). *Если на замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует k ортонормированных касательных векторных полей ($1 < k < n$), то $(n-k+1)$-й класс Штифеля – Уитни $W_{n-k+1}(N) \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ нулевой. Через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначается группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i.*

Пример вычисления. *Обозначим через* $w_i(N) \in H_{n-i}(N, \mathbb{Z}_2)$ *приведение по модулю* 2 *препятствия* $W_i(N)$ *(оно легче вычисляется). В частности,* $w_i(\mathbb{R}P^{n-1}) = C_n^i \bmod 2$.

Следствие. *Если на* $\mathbb{R}^n$ *имеется структура алгебры с делением, то* n *есть степень двойки.*

Набросок определения $H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$, $W_{n-k+1}(N)$ и доказательства. Пусть $V_{n,k}$ — многообразие Штифеля ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$. Аналогично предыдущему, из соотношений $\pi_i(V_{n,k}) = 0$ для $i < n-k$, следует, что k полей беспрепятственно строятся на $(n-k)$-остове. Поскольку $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}_{(n-k)}$ для $1 < k < n$, то при продолжении поля на $(n-k+1)$-остов появляется препятствие $W_{n-k+1} \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$. Это препятствие уже не обязательно является полным. □

4. a) Если $C_n^i = 0 \mod 2$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то n есть степень двойки.

b) Выведите следствие из примера вычисления.

5. Описанное выше определение класса w_1 равносильно данному в §1.

6. Для любой триангуляции произвольного замкнутого n-мерного многообразия N объединение k-мерных симплексов ее барицентрического подразделения является циклом по модулю 2, представляющим класс $w_{n-k}(N)$.

Список литературы

[FF89] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* М.: Наука. 1989.

[MS74] Milnor J. W., Stasheff J. D. *Characteristic Classes.* Ann. of Math. St. Vol. 76, 1974. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (Русск. перевод: Милнор Дж., Сташефф Дж. *Характеристические классы.* М.: Мир, 1979.)

[RS00] Реповш Д., Скопенков А. *Теория препятствий для начинающих* // Математическое Просвещение, сер.3, №4, 2000. С. 151–176.

Семейство Фейербаха

Л. А. Емельянов Т. Л. Емельянова

Внутри любого разностороннего треугольника есть точка, через которую проходят две замечательные его окружности — вписанная и окружность девяти точек. (Для нашего исследования случай равнобедренного треугольника является вырожденным.) Они, как известно, касаются друг друга в этой точке. Этот факт, а также факт касания окружности девяти точек трех вневписанных окружностей треугольника, был доказан немецким математиком XIX века К. Фейербахом, именем которого довольно часто и называют окружность девяти точек.

Нами были обнаружены новые замечательные свойства этой точки (будем называть ее точкой Фейербаха), которые делают ее не менее значительной, чем те девять, давших название известной окружности. *Окружность десяти точек* — было бы более справедливо. В частности, через эту точку проходят еще и окружность, проходящая через основания биссектрис, а также окружность, проходящая через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника.

Рассмотрим каждую из упомянутых выше окружностей как окружность, порожденную некоторым «чевианным» треугольником, около которого она описана. «Чевианным» для краткости будем называть треугольник с вершинами в основаниях чевиан исходного треугольника. Так, окружность девяти точек будем считать порожденной, например, ортотреугольником, ну а вписанную окружность — ее точками касания. Будем называть треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольником Жергонна. (Точкой Жергонна называется точка пересечения соответствующих чевиан.) *Существуют ли еще «чевианные» треугольники, у которых описанная окружность проходит через точку Фейербаха?*

Задача 1. Окружность, проходящая через основания биссектрис, проходит через точку Фейербаха.

Решение. Обозначения: A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис $\triangle ABC$, F — точка Фейербаха, F_1, F_2, F_3 — точки касания вневписанных окружностей с окружностью девяти точек — внешние точки Фейербаха (рис. 1).

У вписанной и вневписанной окружностей есть два центра гомотетии. Например, для вписанной и вневписанной окружностей, расположенных

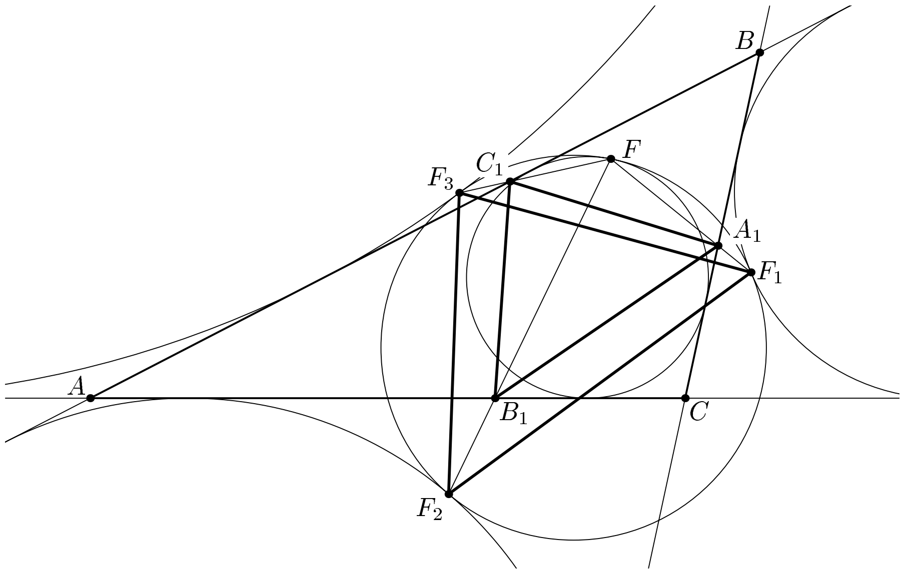


Рис. 1.

внутри угла ABC, внешним центром гомотетии, т. е. центром гомотетии с положительным коэффициентом, служит вершина угла B, а центром гомотетии с отрицательным коэффициентом служит основание биссектрисы B_1, которое является точкой пересечения их общих внутренних касательных. Точка касания F_2 вневписанной окружности и окружности девяти точек является, в свою очередь, их центром гомотетии с отрицательным коэффициентом. Точка F — центр гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек. По теореме о трех центрах гомотетии, точки F_2, B_1 и F лежат на одной прямой. Аналогично для троек F_3, C_1, F и F_1, A_1, F. Таким образом, треугольники $F_1F_2F_3$ и $A_1B_1C_1$ перспективны относительно точки Фейербаха. Кроме того, эти треугольники подобны (*Виктор Тебо*).[1] Поэтому, угол $C_1B_1A_1$, равный углу $F_1F_2F_3$, составляет в сумме с углом C_1FA_1 $180°$, т. е. точки A_1, B_1, C_1, F лежат на одной окружности, ч. т. д.

Итак, еще одна известная окружность в треугольнике проходит через точку Фейербаха, т. е. «семейство Фейербаха» состоит уже, по крайней мере, из трех членов.

Что общего у треугольников, породивших эти три окружности? Иными словами, что общего у ортотреугольника, треугольника Жергонна и треугольника с вершинами в основаниях биссектрис?

[1] И. Ф. Шарыгин. «Геометрия 9–11», задача №586.

Оказывается, их соответствующие стороны (как прямые) пересекаются в одной точке. (Соответствующими будем считать стороны «чевианных» треугольников, концы которых лежат на сторонах одного угла $\triangle ABC$.)

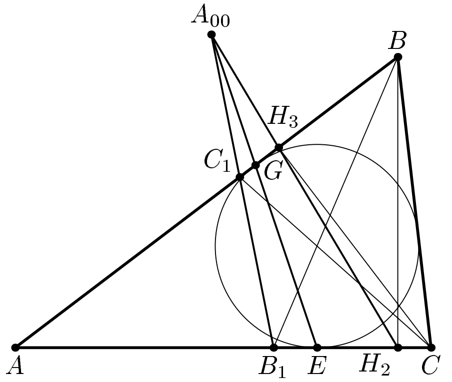


Рис. 2.

Задача 2. Пусть H_2 и H_3 — основания высот на сторонах AC и AB соответственно, B_1 и C_1 — основания биссектрис, E и G — точки касания вписанной окружности на тех же сторонах. Доказать, что прямые H_2H_3, B_1C_1 и EG пересекаются в одной точке (на рис. 2 точка A_{00}).

Предлагаем читателю решить эту задачу самостоятельно.

Точки пересечения соответствующих сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна, о которых идет речь в задаче 2, играют важную роль в дальнейшем изложении. Будем называть эти точки *полюсами* треугольника. Каждая пара сторон треугольника имеет свой полюс.

Если стороны некоторого «чевианного» треугольника проходят через соответствующие полюсы, то не пройдет ли его описанная окружность через точку Фейербаха? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема, в которой и будет построено все «семейство Фейербаха».[2)]

Теорема. *Дан $\triangle ABC$. Точки A_{00}, B_{00}, C_{00} — его полюсы. Будем говорить, что A_{00} соответствует вершине A или паре сторон AB и AC, B_{00} соответствует вершине B, C_{00} — вершине C. Возьмем на прямой AC произвольную точку Y и соединим ее с полюсами A_{00} и C_{00}. Прямые YA_{00} и YC_{00} пересекают прямые AB и BC соответственно в точках Z и X (рис. 3). Тогда*

а) *прямая XZ проходит через полюс B_{00};*

б) *точки X, Y, Z являются основаниями чевиан в $\triangle ABC$;*

в) *окружность, описанная около $\triangle XYZ$, проходит через точку Фейербаха.*

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться языком проективных и полярных преобразований. Поэтому введем некоторые понятия и перечислим их основные свойства.

[2)] Другой способ построения этого семейства сформулирован в виде задачи №15 в конце статьи.

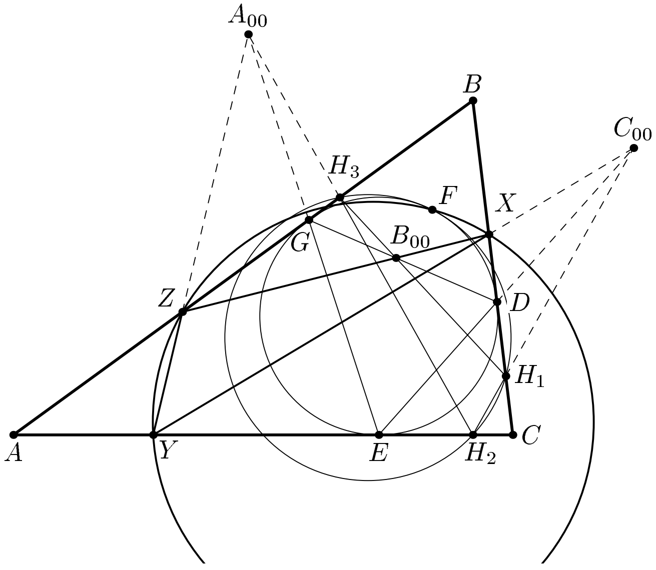
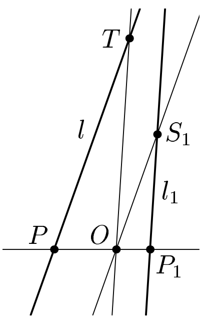


Рис. 3. *$H_1H_2H_3$ — ортотреугольник, DEG — треугольник Жергонна.*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА



1. Пусть l и l_1 — две различные прямые. Спроектируем прямую l на прямую l_1 из центра O, не лежащего ни на одной из этих прямых, т. е. сопоставим каждой точке P прямой l ту точку P_1 прямой l_1, в которой ее пересекает прямая OP. Точка T прямой l такая, что $OT \parallel l_1$, проектируется в бесконечно удаленную точку прямой l_1. Прообразом точки S_1 прямой l_1, для которой $OS_1 \parallel l$, будем считать бесконечно удаленную точку прямой l.

2. Пусть точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Выражение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ называется *двойным* или *сложным отношением*, в котором две точки C и D делят отрезок AB, или двойным отношением четырех точек A, B, C, D. Оно может быть положительным или отрицательным, так как простое отношение $\frac{AC}{BC}$ может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, лежит точка C внутри или вне отрезка AB.

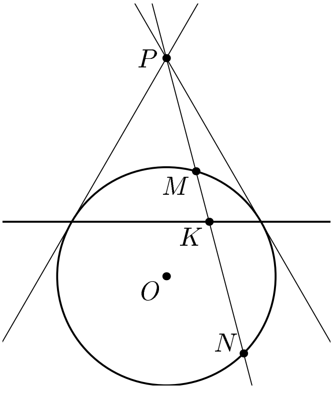
3. Точки A, B, C, D образуют *гармоническую четверку*, если их двойное отношение равно -1. В этом случае точки C и D делят отрезок AB в равных отношениях по абсолютной величине, но противоположных по знаку.

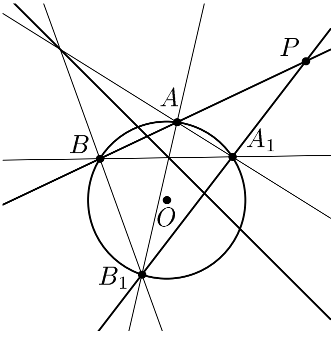
4. При центральном проектировании прямой сохраняется двойное отношение четырех точек.

5. Прямые a, b, c, d, проходящие через одну точку, образуют гармоническую четверку, если точки их пересечения с некоторой прямой образуют гармоническую четверку.

6. Чтобы четверка прямых была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы на какой-либо прямой, параллельной одной из этих четырех прямых, три других отсекали два равных отрезка.

7. Если через фиксированную точку P, не лежащую на окружности с центром O, провести произвольную прямую, пересекающую окружность в точках M и N, то геометрическое место точек K, которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая линия, называемая *полярой* точки P относительно этой окружности. Точка P называется *полюсом* этой прямой относительно окружности. Эта прямая перпендикулярна прямой OP. Если точка лежит вне окружности, то полярой этой точки является прямая, соединяющая точки касания этой окружности с двумя прямыми, проходящими через эту точку. Если точка лежит на окружности, то полярой считается касательная к окружности, проведенная в этой точке.





8. Если три прямые проходят через одну точку, то соответствующие им полюсы относительно окружности лежат на одной прямой, и наоборот.

9. Пусть две прямые, проходящие через точку P, пересекают некоторую окружность в точках A и B, A_1 и B_1. Тогда пары прямых AA_1 и BB_1, AB_1 и A_1B пересекаются на поляре точки P относительно окружности.

10. Если через фиксированную точку P провести произвольную прямую, пересекающую стороны данного угла в точках M и N, то геометрическое место точек K, которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая, называемая полярой точки P относительно угла. Эта прямая проходит через вершину угла.

Подробнее о проективных и полярных преобразованиях можно прочитать, например, в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» и книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия».

Задача 3. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания чевиан в $\triangle ABC$, K — точка пересечения прямых A_1C_1 и AC (рис. 4). Доказать, что точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четверку. Верно и обратное.

Решение. По теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прямой A_1C_1,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CK}{KA} = -1,$$

а по теореме Чевы $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$. Следовательно, $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{AK}{KC} = -1$, ч. т. д.

Ранее было введено понятие полюса $\triangle ABC$ как точки пересечения соответственных сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна. Некоторые факты, излагаемые ниже, доказываются в общем виде, т. е. для полюсов, порожденных двумя любыми «чевианными» треугольниками.

Задача 4. Пусть точки A_1, B_1, C_1, а также A_2, B_2, C_2 — основания чевиан в $\triangle ABC$. Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 (полюс, соответствующий вершине C), A' — точка пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2 (полюс, соответствующий вершине A), B' — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2 (полюс, соответствующий вершине B). Доказать, что прямые $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ проходят соответственно через точки C, A и B (рис. 5).

Решение. Пусть прямые $A'C'$ и AC пересекаются в точке R. Для доказательства того, что точка B лежит на прямой $A'C'$, достаточно показать, что двойные отношения точек A, C_2, B, C_1 и A, B_2, R, B_1

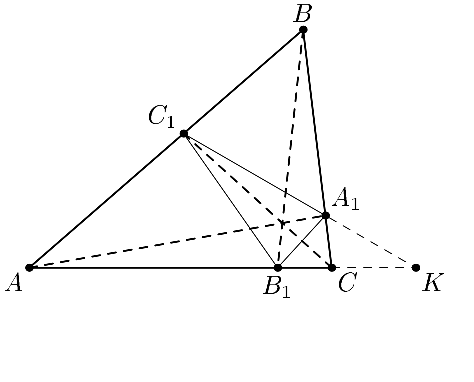


Рис. 4.

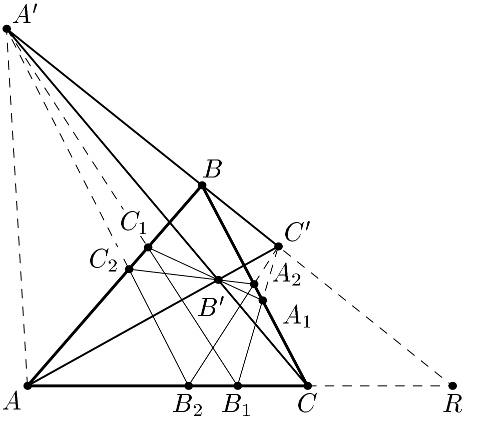


Рис. 5.

равны. По теореме Чевы

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B}, \qquad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, а также тем, что двойные отношения точек C, A_2, B, A_1 и C, B_2, R, B_1 равны (проектирование из точки C'), получим

$$\frac{AC_2}{C_2B} : \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2R} \cdot \frac{B_1R}{B_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2R} : \frac{AB_1}{B_1R}.$$

Требуемое равенство доказано.

Задача 5. Доказать, что определенная в условии задачи 4 прямая $B'C'$ является полярой точки A' относительно угла BAC.

Решение. Точки A, B_1, C, K — гармоническая четверка (рис. 6). Следовательно, прямые $B'A$, $B'B_1$, $B'C$, $B'K$ — гармоническая четверка. Эти прямые, в свою очередь, порождают гармоническую четверку точек M, B_1, A', C_1, где M — точка пересечения прямых $B'C'$ и B_1C_1. Следовательно, прямая $B'C'$ вместе с точкой A' делит отрезок B_1C_1 гармонически и, кроме того, проходит через вершину угла BAC. Значит, прямая $B'C'$ — поляра для точки A'.

Задача 6. Если одним из полюсообразующих треугольников, например $\triangle A_1B_1C_1$, является треугольник Жергонна, то прямая $B'C'$ является также полярой точки A' относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Решение. Прямые AB и AC касаются вписанной окружности в точках C_1 и B_1 (рис. 7), значит, являются полярами точек C_1 и B_1 относительно вписанной окружности, следовательно, пересекаются в одной

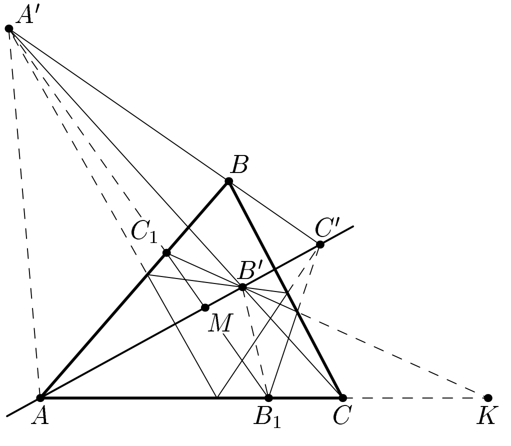


Рис. 6.

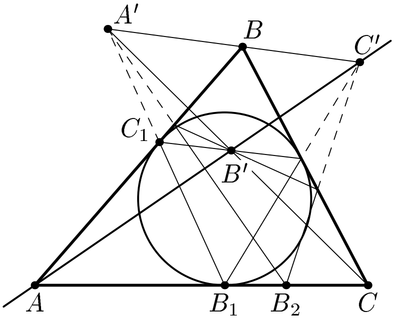


Рис. 7.

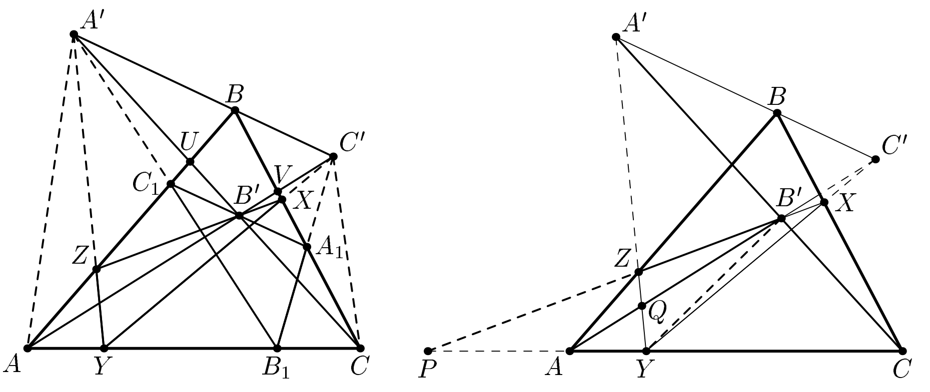
точке с полярой точки A'. Значит, точка A лежит на этой поляре. А поскольку прямая $B'C'$ проходит через точку A и, кроме того, вместе с точкой A' делит хорду B_1C_1 гармонически, она и является полярой точки A' относительно вписанной окружности.

Замечание. В $\triangle A'B'C'$ каждая вершина является полюсом противоположной стороны (относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности). Такой треугольник называется *автополярным.*

Доказательство пунктов а) и б) теоремы

Проведем доказательство пунктов а) и б) для общего случая, когда полюсообразующими треугольниками являются произвольные «чевианные» треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

а) Обозначим U и V точки пресечения прямых $A'B'$ с AB, $B'C'$ с BC соответственно (рис. 8а). Двойные отношения точек A, Z, C_1, U и V, X, A_1, C равны, поскольку эти четверки получаются из четверки A, Y, B_1, C центральным проектированием соответственно из точек A' и C'. Следовательно, прямая ZX проходит через точку B'.



а) б)

Рис. 8.

б) Пусть Q — точка пересечения прямых YA' и AB', P — точка пересечения прямых AC и ZX (рис. 8б). A', Z, Q, Y — гармоническая четверка, так как A' — полюс, а AB' — соответствующая ему поляра относительно угла BAC. Значит, прямые $B'A'$, $B'Z$, $B'A$, $B'Y$ образуют гармоническую четверку, а поскольку они пересекают прямую AC соответственно в точках C, P, A, Y, то и они тоже образуют гармоническую четверку. Следовательно, X, Y, Z — основания чевиан (задача 3), ч. т. д.

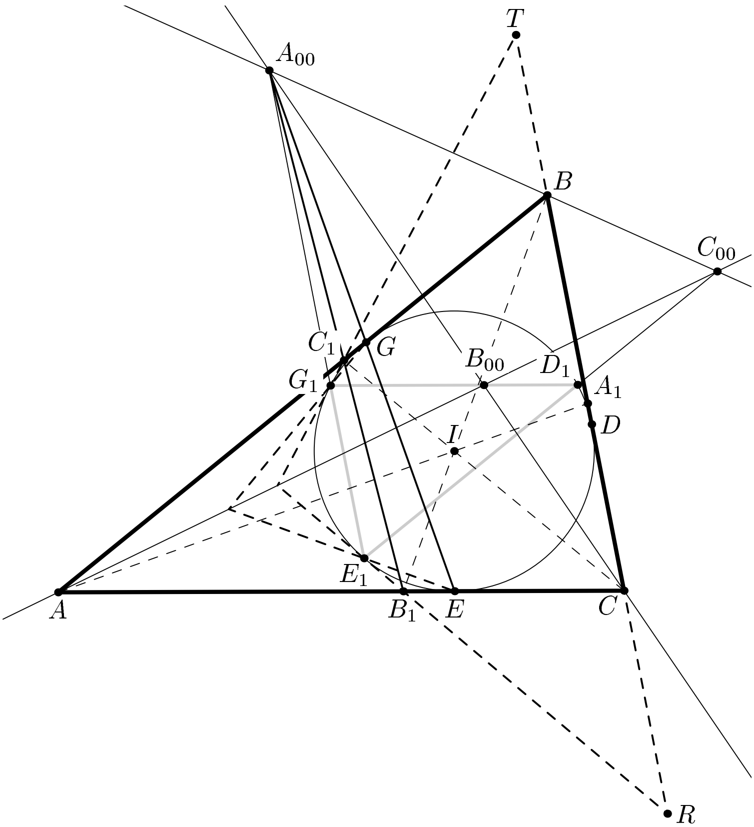


Рис. 9.

Задача 7. Точки B_1 и C_1 — основания биссектрис на сторонах AC и AB, E и G — точки касания вписанной окружности с этими сторонами. Точка E_1 симметрична точке E относительно биссектрисы BB_1, точка G_1 симметрична точке G относительно биссектрисы CC_1. Доказать, что прямая E_1G_1 проходит через полюс A_{00}. (Здесь и далее точки A_{00}, B_{00} и C_{00} — полюсы, порожденные треугольником Жергонна и ортотреугольником.)

Решение. Вторая касательная ко вписанной окружности из точки B_1 проходит через точку E_1 (рис. 9), следовательно, прямая EE_1 — поляра точки B_1 относительно вписанной окружности. Аналогично, прямая GG_1 — поляра точки C_1. Поскольку точки B_1, C_1 и A_{00} лежат на одной прямой (задача 2), то прямые EE_1 и GG_1 пересекаются на прямой $B_{00}C_{00}$. А так как прямая EG проходит через точку A_{00}, то и прямая E_1G_1 также проходит через точку A_{00}, ч. т. д.

Задача 8. Доказать, что треугольник с вершинами в точках, симметричных точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно соответствующих биссектрис (на рис. 9 $_\triangle D_1E_1G_1$), гомотетичен исходному $_\triangle ABC$.

Решение. Докажем, что, например, $E_1G_1 \parallel BC$. Пусть R и T — точки пересечения прямых E_1B_1 и G_1C_1 с прямой BC. Тогда $\angle BRB_1 = \angle BAB_1 = \angle CTC_1$ (рис. 9). Следовательно, $G_1T = TD = RD = RE_1$ как отрезки касательных, попарно образующих равные углы. Значит, E_1G_1TR — трапеция, и $E_1G_1 \parallel BC$, ч. т. д.

Задача 9. Точки A_0, B_0 и C_0 — середины сторон BC, AC и AB. Доказать, что прямые A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} проходят через точку Фейербаха (рис. 10).

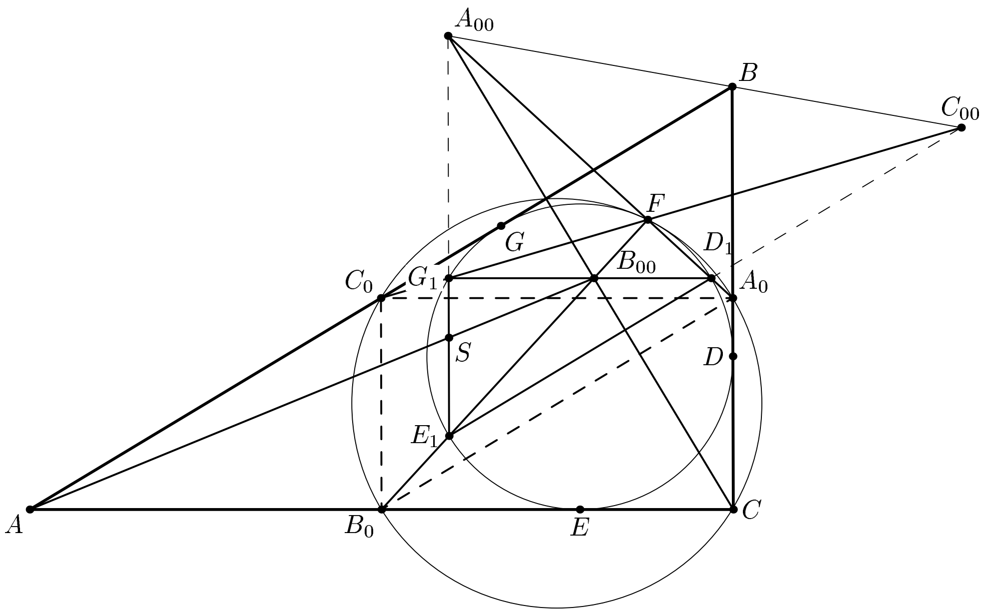


Рис. 10.

Решение. Прямая $A_{00}E_1$ пересекает вписанную окружность в точках G_1 и E_1, а прямую $B_{00}C_{00}$ в точке S. A_{00}, G_1, S, E_1 — гармоническая четверка точек. Следовательно, прямые $B_{00}A_{00}$, $B_{00}G_1$, $B_{00}S$ и $B_{00}E_1$ также образуют гармоническую четверку. Одна из этих прямых — $B_{00}G_1$ — параллельна стороне AC (задача 8), а, значит, три оставшиеся прямые высекают на прямой AC равные отрезки, т. е. прямая $B_{00}E_1$ проходит через середину отрезка AC — точку B_0. Аналогично, прямая $A_{00}D_1$

проходит через точку A_0, прямая $C_{00}G_1$ — через точку C_0. Треугольники $D_1E_1G_1$ и ABC гомотетичны с отрицательным коэффициентом (задача 8), серединный треугольник $A_0B_0C_0$ и треугольник ABC гомотетичны также с отрицательным коэффициентом. Следовательно, треугольники $D_1E_1G_1$ и $A_0B_0C_0$ гомотетичны с положительным коэффициентом, т. е. гомотетичны с центром в точке F касания соответствующих им описанных окружностей (вписанной окружности и окружности девяти точек $_\triangle ABC$). Следовательно, прямые $A_{00}D_1$, $B_{00}E_1$ и $C_{00}G_1$ проходят через точку Фейербаха, ч. т. д.

Чтобы доказать пункт в) теоремы, достаточно показать, что семейство окружностей, описанных около $_\triangle XYZ$, порожденного подвижной точкой Y указанным в теореме способом, имеет единственную общую точку. Это будет именно точка Фейербаха, так как в ней касаются две различные окружности этого семейства — вписанная и окружность девяти точек. Ближайшая наша цель — показать, что в это семейство входят еще и три прямые, т. е. подвижная окружность трижды «распрямляется», проходя все свои положения, и эти прямые заведомо проходят через точку Фейербаха.

Покажем, например, что прямая $A_{00}A_0$ — это «окружность» из нашего семейства. Действительно, если одно из оснований чевиан, например,

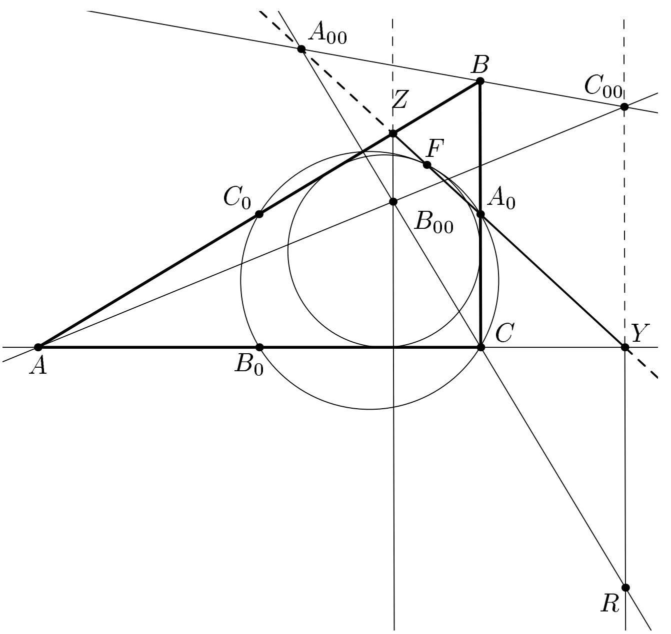


Рис. 11.

точка X становится бесконечно удаленной точкой прямой BC, то стороны ZX и YX превращаются в параллельные BC прямые (рис. 11). Пусть R — точка пересечения прямых XY и $A_{00}B_{00}$. Так как точки C_{00}, Y, R, X составляют гармоническую четверку, а X — бесконечно удаленная точка, то $C_{00}Y = YR$. Но отрезок $C_{00}R$ параллелен отрезку BC. Следовательно, прямая $A_{00}Y$ делит пополам и отрезок BC, а, значит, совпадает с прямой $A_{00}A_0$. Окружность же, проходящая через точки Y, Z и бесконечно удаленную точку X, имеет бесконечный радиус, т.е. вырождается в прямую YZ (в данном случае совпадающую с прямой $A_{00}A_0$).

Итак, «семейство Фейербаха» пополнилось тремя прямыми A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} (прямыми, соединяющими полюсы с серединами сторон).

Доказательство пункта в) теоремы

Эта часть доказательства сильно отличается от предыдущего изложения. Возможно, искушенный читатель придумает более изящное, более геометрическое доказательство этого факта. Приведем наше доказательство, избегая излишней детализации преобразований и опираясь на их геометрический смысл.

Введем на плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AC. Пусть точка Y имеет координаты $(t, 0)$. Тогда координаты точек Z и X имеют вид

$$\left(\frac{p_1t+q_1}{a_1t+b_1}, \frac{r_1t+s_1}{a_1t+b_1}\right) \text{ и } \left(\frac{p_2t+q_2}{a_2t+b_2}, \frac{r_2t+s_2}{a_2t+b_2}\right),$$

т.е. являются дробно-линейными функциями от t. (Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.)

Покажем, что семейство Фейербаха — однопараметрическое семейство, определяемое уравнением третьей степени.

Как известно, уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), задается с помощью определителя четвертого порядка следующим уравнением $\Delta(x, y) = 0$, где

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, преобразуем уравнение к виду

$$s\cdot(x^2+y^2)+a\cdot x+b\cdot y+c=0,$$

где коэффициент $s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, его геометрический смысл — удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Определим вид коэффициентов s, a, b, c при подстановке координат точек Y, Z и X. Так, например,

$$s = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ \dfrac{p_1 t + q_1}{a_1 t + b_1} & \dfrac{r_1 t + s_1}{a_1 t + b_1} & 1 \\ \dfrac{p_2 t + q_2}{a_2 t + b_2} & \dfrac{r_2 t + s_2}{a_2 t + b_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{P_3(t)}{(a_1 t + b_1)(a_2 t + b_2)},$$

где $P_3(t)$ — многочлен 3-й степени от t.

Корни знаменателя, а также $t = \infty$ обращают s в бесконечность. Это соответствует бесконечной площади $_\triangle XYZ$, когда одна из его вершин становится бесконечно удаленной. Корни числителя обращают s в ноль. Это происходит в тех случаях, когда две вершины $_\triangle XYZ$ сливаются с одной из вершин $_\triangle ABC$ (в определителе s две одинаковые строки).

Вычисляя таким же образом коэффициенты a, b и c, наше уравнение можно записать в виде

$$\frac{P_3(t)}{(a_1 t + b_1)(a_2 t + b_2)}(x^2 + y^2) + \frac{P_3(t)Q_3(t)}{(a_1 t + b_1)^2(a_2 t + b_2)^2}x + \\ + \frac{P_3(t)R_3(t)}{(a_1 t + b_1)^2(a_2 t + b_2)^2}y + \frac{P_3(t)S_3(t)}{(a_1 t + b_1)^2(a_2 t + b_2)^2} = 0,$$

где $Q_3(t)$, $R_3(t)$ и $S_3(t)$ — многочлены 3-й степени от t, а многочлен $P_3(t)$ — общий множитель у всех коэффициентов, так как все они обращаются в ноль, когда сливаются две из трех точек X, Y, Z (в определителе $\Delta(x, y)$ две одинаковые строки).

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{(a_1 t + b_1)^2(a_2 t + b_2)^2}{P_3(t)}$ и покажем, что полученное таким образом уравнение $(a_1 t + b_1)(a_2 t + b_2)(x^2 + y^2) + Q_3(t)x + R_3(t)y + S_3(t) = 0$ описывает все наше семейство окружностей, за исключением одной линии (прямой $B_{00}B_0$).

Посмотрим, как ведёт себя окружность, проходящая через точки X, Y, Z, когда, двигаясь по прямой AC, точка Y проходит через точку A, т. е. совпадает с точкой Z (рис. 12), и при этом многочлен $P_3(t)$ обращается в ноль. В этом случае окружность (по двум точкам), вообще говоря, определить нельзя. Но из соображений непрерывности коэффициентов последнего уравнения ясно, что при соответствующем значении t это тоже будет уравнение окружности, при этом секущая ZY превращается в касательную. Таким образом, это будет окружность, проходящая через точку

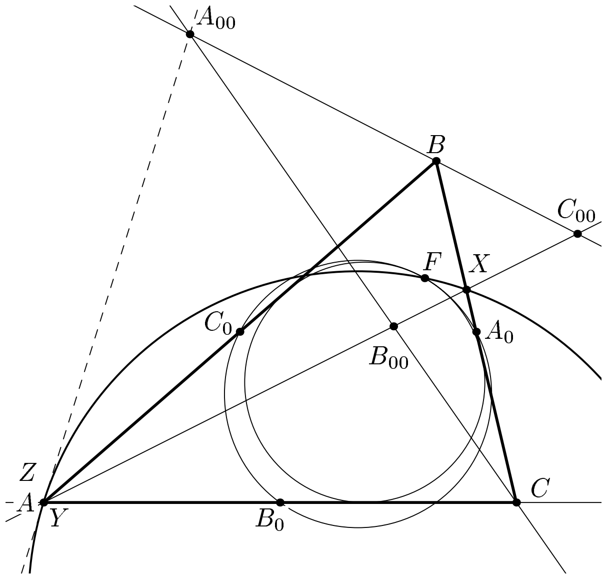


Рис. 12.

X и касающаяся прямой AA_{00}. Далее, при двух конечных значениях t, когда коэффициент при x^2+y^2 обращается в ноль, это уравнение определяет прямые $A_{00}A_0$ и $C_{00}C_0$. (Прямая $B_{00}B_0$ является предельной для нашего семейства при $t \to \infty$.) Эти прямые, а также вписанная окружность и окружность девяти точек — четыре линии, соответствующие различным значениям t — имеют общую точку — точку Фейербаха. Подставив координаты этой точки в наше уравнение, мы получим уравнение от t степени не выше 3, имеющее четыре различных корня. Отсюда следует, что точка Фейербаха является общей точкой этого семейства (и понятно, что единственной). На этом доказательство теоремы заканчивается.

Из теоремы следует: чтобы выяснить, проходит ли окружность, описанная около некоторого «чевианного» треугольника, через точку Фейербаха, достаточно проверить, проходит ли его сторона (как прямая) через соответствующий полюс.

Задача 10. Доказать, что окружность, описанная около треугольника с вершинами в точках касания вневписанных окружностей со сторонами $\triangle ABC$, проходит через точку Фейербаха.

Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу.

Вот еще несколько интересных фактов, над которыми мы предлагаем подумать читателю. (Обозначения те же, что и в теореме.)

Задача 11. Доказать, что треугольники XYZ и $A_{00}B_{00}C_{00}$ перспективны, т. е. прямые XA_{00}, YB_{00} и ZC_{00} пересекаются в одной точке.

Задача 12. Доказать, что три прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с одноименными полюсами, порожденными треугольником Жергонна и серединным треугольником, параллельны.

Задача 13. Доказать, что окружность, проходящая через точку касания вневписанной окружности со стороной $\triangle ABC$, точку касания этой же вневписанной окружности с окружностью девяти точек и точку касания вписанной окружности с этой стороной, проходит через точку Фейербаха.

Задача 14[3]. Отразим стороны ортотреугольника (прямые) относительно соответствующих сторон треугольника Жергонна. Доказать, что три полученные таким образом прямые образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.

Задача 15. (*Другое описание семейства Фейербаха*) Пусть $\triangle A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику Жергонна с центром гомотетии в центре вписанной окружности I. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим X, Y, Z точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC. Доказать, что семейство окружностей, описанных около треугольников XYZ, совпадает с семейством Фейербаха.

[3]Эта задача предлагалась на XLI Международной математической олимпиаде (Сеул, 2000 г.).

Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников

С. Б. Гашков

1. Алгоритм Евклида и квадрирование прямоугольников

Свой знаменитый алгоритм Евклид придумал для решения задачи о соизмеримости двух отрезков[1]. Общей мерой отрезков с длинами l_1 и l_2 называется такой отрезок длины l, который можно уложить без остатка как в первом отрезке (очевидно, ровно l_1/l раз), так и во втором (соответственно l_2/l раз).

Как известно, алгоритм заключается в следующем. Меньший отрезок (длины l_2) укладывается в большем (длины l_1) максимально возможное число, скажем a_1, раз, после чего остается отрезок длины $l_1 - a_1 l_2$, которую обозначим l_3 (на алгебраическом языке это называется делением с остатком). Отрезок l_3 укладывается, скажем, a_2 раз в отрезке l_2, и получается в остатке отрезок l_4. Потом отрезок l_4 укладывается a_3 раз в отрезке l_3, и получается в остатке отрезок l_5 и т. д.

Кстати, сам Евклид индукцию не проводил, а повторил шаг алгоритма три раза, и мы тоже последуем ему в этом. Работу алгоритм заканчивает на том шаге, скажем с номером k, когда полученный на предыдущем шаге отрезок l_{k+1} укладывается на отрезке l_k ровно $a_k = l_k/l_{k+1}$ раз. Тогда в качестве общей меры l отрезков l_1 и l_2 берется отрезок l_{k+1}.

В современной терминологии длину отрезка l_{k+1} — общей меры отрезков l_1 и l_2 — называют наибольшим общим делителем (НОД) l_1 и l_2 и обозначают (l_1, l_2).

Обозначим $e(m,n)$ число шагов алгоритма Евклида, примененного к натуральным числам m и n. Ясно,что введенная функция симметрична, т. е. не меняется при перестановке своих аргументов, и зависит только от отношения m/n.

[1] Сам он свой метод алгоритмом конечно не называл, термин этот стал популярен в нашем веке и происходит от искажения имени Аль Хорезми — жившего тысячу лет назад в Хорезме выдающегося математика, название одной из книг которого дало имя целому разделу математики — алгебре.

Алгоритм Евклида — один из наиболее часто употребляемых в математике и любая информация о функции $e(m,n)$, оценивающей скорость его работы, интересна. Однако, несмотря на простоту определения, функция $e(m,n)$ ведет себя очень нерегулярно и с трудом поддается исследованию. До сих пор наиболее известным результатом о ней остается найденная в первой половине 19-го века[2)] оценка

$$e(m,n) \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n)+1/2))\rfloor - 1,$$

где $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ — так называемое золотое сечение, а $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a. Другими словами, число делений в алгоритме Евклида нахождения (m,n) не превосходит

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n)+1/2))\rfloor - 1,$$

причем оценка точная, в чем мы скоро убедимся.

Работу алгоритма Евклида можно представить также следующим образом: в прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ укладываем a_1 квадратов размера $l_2 \times l_2$, в оставшийся прямоугольник размера $l_2 \times l_3$ укладываем a_2 квадратов размера $l_3 \times l_3$ и т. д., пока не покроем прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ квадратами k разных размеров в общем количестве $a_1 + \ldots + a_k$ штук.

Обозначим $E(m,n)$ наименьшее число квадратов в полученном с помощью алгоритма Евклида покрытии прямоугольника размера $m \times n$.

В дополнение к верхней оценке функции $e(m,n)$ далее будет доказана также двойственная к ней в некотором смысле нижняя оценка функции $E(m,n)$

$$E(m,n) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n)-1/2))\rfloor,$$

справедливая при любых взаимно простых m,n. Будет показано также, что указанная оценка точная, т. е. она достигается для бесконечно многих m,n.

Вопрос о ее достижимости хотя бы по порядку для произвольного значения $\max(m,n)$ не ясен. Близко к этому вопросу стоит поставленная Н. М. Коробовым[3)] проблема о существовании для любого n такой правильной дроби m/n, что в ее разложении в цепную дробь все элементы будут ограничены, и тогда

$$E(m,n) < C\log n, \quad e(m,n) < c\log n,$$

где c, C — некоторые константы.

[2)]Известным французским математиком Ламе.

[3)]В прошлом победителем первой Московской математической олимпиады, ныне известным специалистом по теории чисел и вычислительной математике.

Если считать целью алгоритма Евклида покрытие прямоугольника квадратами, то он действует как «жадный алгоритм»[4]: на каждом шаге помещает в прямоугольник на свободное место квадрат максимальных размеров. На первый взгляд кажется, что он строит минимальное по числу используемых квадратов покрытие. Однако это не так и в этом мы скоро убедимся. Поэтому имеет смысл обозначить $K(m,n)$ наименьшее число квадратов в покрытии прямоугольника размера $m \times n$ и рассмотреть задачу о вычислении этой величины. В общем случае она оказывается чрезвычайно трудной.

Задача 1. Докажите, что $K(5,6) = 5$, $E(5,6) = 6$.

Возникает вопрос: а почему мы предполагаем, что m, n — натуральные, может быть имеет смысл также рассмотреть задачу о разбиении на квадраты прямоугольников и с несоизмеримыми сторонами? Ответ на этот вопрос дает доказанная в начале 20-го века известным немецким математиком М. Деном теорема о том, что если прямоугольник разрезан произвольным образом на квадраты, то его стороны соизмеримы со сторонами всех этих квадратов и друг с другом.

Рассмотрим теперь следующий класс покрытий (в другой терминологии — разбиений или разрезаний) прямоугольника. Разрежем прямоугольник на два прямоугольника, потом какой-нибудь из них разрежем на два прямоугольника и так далее до тех пор, пока не получим разбиение исходного прямоугольника на квадраты. Такие разбиения назовем гильотинными разбиениями (покрытиями) и обозначим минимальное число квадратов в таком разбиении прямоугольника $m \times n$ через $H(m,n)$.

Легко проверить,что все введенные функции симметричны и зависят только от отношения m/n, поэтому далее мы будем предполагать, что m и n взаимно просты, т. е. не имеют общего делителя, отличного от 1. Далее будет показано, что возможны неравенства $K(m,n) < H(m,n)$ и $H(m,n) < E(m,n)$.

Мы вернемся к функциям $K(m,n)$ и $H(m,n)$ позднее, а сейчас покажем, как функции $E(m,n)$ и $e(m,n)$ связаны с важным понятием цепной дроби.

2. Алгоритм Евклида и цепные дроби.

Понятие цепной дроби одно из важнейших в математике, ему посвящены целые книги (например «Цепные дроби» А. Я. Хинчина) и многие статьи в журнале «Квант» (например Е. М. Никишина и Ю. В. Нестеренко

[4]Термин «жадный алгоритм» употребляется в серьёзном смысле для обозначения подобного типа алгоритмов.

в №№5,6 за 1983 г.). Далее мы расскажем о некоторых малоизвестных задачах, связанных с цепными дробями и числами Фибоначчи (о них тоже написаны книги, например Н. Н. Воробьевым, которая так и называется — «Числа Фибоначчи»).

Заметим, что если в процессе применения алгоритма Евклида к числам l_1 и l_2 в результате последовательных делений с остатком получается последовательность частных $a_1, \ldots, a_k$, то дробь l_1/l_2 равна так называемой цепной дроби

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Это легко доказать, проверяя последовательно, что

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = a_i + \cfrac{1}{a_{i+1} + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}, \quad i = k, \ldots, 1.$$

Поэтому ясно, что произвольную (как правильную, так и неправильную) положительную дробь можно представить в виде цепной дроби с натуральными элементами a_i

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}},$$

где возможно $a_1 = 0$. Запись числа в виде цепной дроби неоднозначна, так как

$$\frac{1}{a_k} = \cfrac{1}{(a_k - 1) + \cfrac{1}{1}}.$$

Чтобы сделать ее однозначной, далее используем только запись, в которой последний элемент $a_k \neq 1$. Будем использовать также сокращенную запись цепной дроби:

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\ldots\frac{1}{+a_k}.$$

С объявлением однозначности записи числа в виде цепной дроби мы поторопились, так как можно рассматривать цепные дроби с нецелыми элементами. Но для дробей с натуральными элементами это верно. Действительно, из равенства

$$\frac{l_1}{l_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

следует, что a_1 равно целой части дроби l_1/l_2, так как дробь

$$\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

очевидно меньше 1, и поэтому определяется однозначно, откуда следует, что и дробь

$$a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

определяется однозначно, значит аналогичным образом получаем, что элемент a_2 определяется однозначно, и т. д.

Поэтому для любой положительной дроби $r = m/n$ с натуральными числителем и знаменателем однозначно определена как высота (число этажей) $e(r)$ так и сумма элементов $E(r)$ изображающей ее цепной дроби с натуральными элементами. Ясно, что указанные величины совпадают с введенными ранее функциями $e(m,n)$, $E(m,n)$.

Разумеется, алгоритм Евклида заканчивает работу не всегда, а лишь когда отрезки l_1 и l_2 соизмеримы, то есть когда отношение l_1/l_2 — рациональное число и только в этом случае соответствующая цепная дробь будет конечной. Если же упомянутое отношение иррационально, например отношение боковой стороны равнобедренного треугольника с углом 72 градуса при основании к этому основанию, то алгоритм Евклида будет работать бесконечно и породит бесконечную цепную дробь, в рассматриваемом случае весьма замечательную

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}.$$

Задача 2. Найдите геометрически, чему равно отношение боковой стороны к основанию в упоминавшемся выше треугольнике и докажите его иррациональность, не пользуясь алгоритмом Евклида.

Мы не будем касаться здесь вопроса о сходимости бесконечных цепных дробей[5)], но все же заметим, что в рассматриваемом случае эта дробь равна пределу последовательности конечных цепных дробей

$$1, \quad 1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, \quad \dots, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \dots + \cfrac{1}{1}},$$

[5)] См. об этом, например, упоминавшуюся книжку А. Я. Хинчина.

также весьма замечательных. Если обозначить n-ю дробь в этой последовательности через ϕ_n и преобразовать ее от n-этажного вида к обыкновенному, то получим дробь $G_n/F_n = \phi_n$. Сравнивая соседние дроби, замечаем, что

$$\phi_n = 1 + \frac{1}{\phi_{n-1}}, \quad F_n = G_{n-1},\ G_n = F_{n-1} + G_{n-1}.$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, и заметить, что $\phi_n = F_{n+1}/F_n$.

3. Числа Фибоначчи

Последовательность $\{F_n\}$, определенная равенствами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, — это и есть знаменитая последовательность Фибоначчи[6].

Обозначая предел последовательности ϕ_n через ϕ и переходя к пределу в обоих частях равенства

$$\phi_n = 1 + \frac{1}{\phi_{n-1}}\,,$$

получаем уравнение

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}\,,$$

у которого на роль ϕ годится только положительный корень

$$\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$$

— золотое сечение.[7]

Среди огромного числа фактов о числах Фибоначчи нам понадобятся только три, которые мы сейчас и докажем.[8] Несколько утверждений, которые не будут использоваться далее, мы приведем без доказательства в виде задач, в том числе и обоснование проведенного выше предельного перехода.

Лемма 1. *Для чисел Фибоначчи справедливы тождество*

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

[6] Она появилась в 13 веке в книге Леонардо Пизанского, по прозвищу Фибоначчи, в задаче, в которой шла речь о размножении кроликов.

[7] О роли этого числа в математике и в искусстве см., например, замечательные книги Д. Пидо «Геометрия и искусство» и книгу Г. Коксетера «Введение в геометрию».

[8] Доказательства первых двух фактов, также как и решения большинства следующих далее задач, можно найти в упоминавшейся книге Н. Н. Воробьева, а третий факт — в вышедшей в серии «Библиотечка Кванта» книге Р. Хонсбергера «Задачи с изюминкой».

и неравенство

$$F_{n+m} \leqslant F_{n+1}F_{m+1} \leqslant F_{n+m+1},$$

в котором левое неравенство обращается в равенство при $m = 1$ или $n = 1$, а правое — при $m = 0$ или $n = 0$.

Доказательство тождества проведем индукцией по m. База индукции при $m = 1, 2$ очевидно справедлива, а для выполнения шага индукции достаточно проверить равенство

$$F_{n+m+1} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = (F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n) + (F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n) = \\ = (F_m + F_{m-1})F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2})F_n = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n.$$

Неравенство следует из тождества так как

$$F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n,$$
$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n \leqslant F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_{n+1} = F_{n+1}F_{m+1}.$$

Следующая лемма довольно удивительна: в ней целое число выражается через иррациональное.

Лемма 2. *Справедлива формула Бине*[9)]

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Доказательство также проведем по индукции. База индукции при $n = 0, 1$ очевидно справедлива, так как

$$\frac{\phi - (-\phi)^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1,$$

а для выполнения шага индукции достаточно проверить равенства

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad (-\phi)^{-2} = (-\phi)^{-1} + 1,$$

из них вывести почленным умножением равенства

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}, \quad (-\phi)^{-n-1} = (-\phi)^{-n} + (-\phi)^{-n+1},$$

и заметить, что тогда

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - (-\phi)^{-n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Лемма 3. *Неравенство $F_n \leqslant m$ справедливо тогда и только тогда, когда*

$$n \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor.$$

Неравенство $F_n \geqslant m$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$n \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m - 1/2)) \rfloor + 1.$$

9) Бине — французский математик 19 века.

Для доказательства перепишем неравенство $F_n \leqslant m$ с помощью формулы Бине в виде

$$\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \leqslant m,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \leqslant m + \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}\,,$$

так как если

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}\,,$$

то

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + 1,$$

и значит $F_n \leqslant m$. Неравенство

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}$$

равносильно

$$n < \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)),$$

а значит и неравенству

$$n \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor,$$

так как $\log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2))$ не может быть целым числом, ведь в противном случае

$$\frac{\phi^k}{\sqrt{5}} = m + \frac{1}{2}\,,$$

откуда

$$F_k = \frac{\phi^k - (-\phi)^{-k}}{\sqrt{5}} = m + \frac{1}{2} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = m + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

что невозможно, так как F_k — целое число.

Второе утверждение леммы очевидно равносильно первому.

Отметим, что из леммы 3 вытекает, что последовательность

$$\Phi(m) = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor$$

обратна к последовательности Фибоначчи F_n в том смысле, что

$$\Phi(F_n) = n.$$

Задача 3. Проверьте, что F_n — ближайшее целое к числу $\phi^n/\sqrt{5}$.

Задача 4. Докажите, что

$$F_{m+1}F_n - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}.$$

Лемма 4. *Справедливы тождества*

$$F_{n-1}/F_n + F_{n-1}/F_{n+1} = (F_nF_{n+1} + (-1)^n)/F_nF_{n+1},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_n/F_{n+1} = (F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+1},$$
$$F_{n-1}/F_n + F_n/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^n)/F_nF_{n+2},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_{n+1}/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+2}.$$

Для доказательства первого из них перепишем его в виде

$$F_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_nF_{n+1} + (-1)^n,$$

потом в виде

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (F_{n-1} - F_{n+1})F_n = (-1)^n,$$

и заметим, что тождество

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

является частным случаем тождества предыдущей задачи.

Для доказательства второго перепишем его в виде

$$F_{n-2}F_{n+1} + F_n^2 = F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

и преобразуем к уже знакомому виду

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Для доказательства третьего перепишем его в виде

$$F_{n+2}F_{n-1} + F_n^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n,$$

и преобразуем к виду

$$F_{n+2}F_{n-1} - F_nF_{n+1} = (-1)^n,$$

который является частным случаем предыдущей задачи.

Для доказательства последнего тождества перепишем его в виде

$$F_{n-2}F_{n+2} + F_nF_{n+1} = F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1},$$

и преобразуем к уже знакомому виду

$$F_nF_{n+1} - F_{n+2}F_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Задача 5. Выведите из предыдущей задачи тождества

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}, \quad \phi_{n+2} - \phi_n = \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}},$$

а из них — монотонность подпоследовательностей $\{\phi_{2n}\}$ и $\{\phi_{2n+1}\}$. Опираясь на доказанные утверждения, докажите сходимость последовательности $\{\phi_n\}$.

Задача 6. Докажите, что $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Задача 7. Если продолжить последовательность Фибоначчи в «отрицательную» сторону с сохранением равенства $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, то будут выполняться равенства $F_{-k-1} = (-1)^k F_k$ и сохранятся все формулы предыдущих задач.

Следующая задача обобщает обе предыдущие.

Задача 8. (*Люка.*) Докажите, что $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.

Задача 9. Докажите, что разложение числа F_{n-3}/F_n в цепную дробь имеет вид

$$\frac{1}{4+}\cdots\frac{1}{+4+a_k},$$

где $k = 1 + m$; $a_k = 0$, если $n = 3m$; $a_k = 1/3$, если $n = 3m + 1$; $a_k = 1/5$, если $n = 3m + 2$.

4. Цепные дроби и числа Фибоначчи

Цепную дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

можно рассматривать с произвольными, а не только натуральными элементами. Если выполнить все действия, указанные в ней, то ее можно преобразовать в обыкновенную; выражение ее числителя и знаменателя через $a_0, a_1, \ldots, a_n$ обозначим

$$[a_0, \ldots, a_n] \text{ и } [a_1, \ldots, a_n].$$

Ясно, что выражение $[a_0, \ldots, a_n]$ представляет из себя многочлен от переменных $a_0, \ldots, a_n$. Непосредственно проверяется, что

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0[a_1, \ldots, a_n] + [a_2, \ldots, a_n].$$

Можно считать, что это равенство справедливо и при $n = 1$, если последней скобке в этом случае приписать значение 1.

Применяя алгоритм Евклида к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{[a_0, \ldots, a_n]}{[a_1, \ldots, a_n]},$$

где числа a_i — натуральные, замечаем, что она несократима, так как в результате его работы получается как раз цепная дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

и

$$([a_0, \ldots, a_n], [a_1, \ldots, a_n]) = ([a_{n-1}, a_n], [a_n]) = ([a_n], 1) = 1.$$

Лемма 5. *Число одночленов в многочлене $[a_1, \ldots, a_n]$ равно F_{n+1} и при любых натуральных $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$F_{n+1} \leqslant [a_1, \ldots, a_n],$$

которое обращается в равенство лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$, и неравенство

$$[a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

которое обращается в равенство при $a_1 \leqslant 2$, $a_n \leqslant 2$, $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$, а также при $n = 1$, $a_1 = 3$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из второго, поэтому достаточно доказать индукцией по n, что

$$F_{n+1} \leqslant [a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

причем равенство

$$F_{n+1} = [a_1, \ldots, a_n]$$

справедливо лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$, а равенство

$$[a_1, \ldots, a_n] = F_{1+a_1+\ldots+a_n}$$

— лишь при $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$, $a_n \leqslant 2$, или $a_1 = 2$, $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$, $a_n \leqslant 2$ или $n = 1$, $a_1 = 3$.

Удобно начинать индукцию с $n = 0$, полагая формально как и раньше $[a_1, \ldots, a_n] = 1$, $F_{1+a_1+\ldots+a_n} = F_1 = 1$ при $n = 0$, тогда неравенства леммы очевидно обращаются в равенства. Заметим, что $F_k = k-1$ при $k = 2, 3, 4$, а потом $F_k > k - 1$, так как

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \geqslant k - 1 + k - 2 > k$$

(здесь в неявном виде тоже проводится индукция).

База индукции ($n = 0, 1$) теперь очевидна, так как

$$F_2 = 1 \leqslant a_1 \leqslant F_{1+a_1}.$$

Проведем индукционный переход. Согласно равенству

$$[a_1, \ldots, a_n] = a_1[a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n]$$

и предположению индукции справедливы неравенства

$$F_n \leqslant [a_2, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n}, \quad F_{n-1} \leqslant [a_3, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

следовательно,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leqslant [a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n] \leqslant [a_1, \ldots, a_n] =$$
$$= a_1[a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n] \leqslant a_1 F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{1+a_3+\ldots+a_n} \leqslant$$
$$\leqslant F_{a_1+1}F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{a_1}F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

и равенство $F_{n+1} = [a_1, \ldots, a_n]$ справедливо лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Согласно лемме 1 имеем

$$F_{u+v} = F_{u-1}F_v + F_u F_{v+1}.$$

Отсюда следует, что

$$[a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{a_1+1}F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{a_1}F_{a_2+\ldots+a_n} = F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

и неравенство доказано. Равенство возможно лишь когда

$$F_{a_1+1} = a_1, \quad F_{a_1} = 1, \quad F_{a_2+\ldots+a_n} = F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

и $[a_2, \ldots, a_n] = F_{1+a_2+\ldots+a_n}$, т.е. только в случае, когда

$$a_1 \leqslant 2, \quad a_2 = 1, \quad [a_2, \ldots, a_n] = F_{1+a_2+\ldots+a_n},\ n \geqslant 3$$

или когда $a_1 \leqslant 2$, $a_2 \leqslant 2$, $n = 2$ и, следовательно, согласно предположению индукции лишь когда

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, \quad a_n \leqslant 2,$$

или $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, a_n \leqslant 2$. Тем самым шаг индукции сделан и лемма доказана.

В заключение раздела предлагаем читателю несколько важных утверждений о цепных дробях в качестве задач. Эти утверждения далее нам, однако, не понадобятся.

Задача 10. (*Правило Эйлера*). Докажите индукцией по n, что многочлен

$$[a_0, \ldots, a_n]$$

можно получить следующим образом: берем произведение всех элементов, затем всевозможные произведения, которые можно получить, опустив какую-нибудь пару соседних элементов, затем из этих произведений получаем новые, выбрасывая произвольным образом пары соседних элементов и так далее, и наконец суммируем все различные из получившихся произведений (если $n+1$ четно, то на последнем шаге получается «пустое» произведение, не содержащее вообще сомножителей; как принято, его значение по определению полагаем равным 1).

Задача 11. Докажите, что

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_n, \ldots, a_0],$$

т. е. при изменении порядка элементов на противоположный числитель дроби не меняется.

Задача 12. Докажите, что

$$[a_0, \dots, , a_n] = a_n[a_0, \dots, a_{n-1}] + [a_0, \dots, a_{n-2}].$$

Дробь, образованная первыми k этажами, называется k-й подходящей дробью для исходной дроби. Ее величина изображается обыкновенной дробью

$$\frac{[a_0, \dots, a_k]}{[a_1, \dots, a_k]}\,,$$

которую для краткости далее обозначаем $\dfrac{p_k}{q_k}$.

Дробь

$$\frac{[a_{k+1}, \dots, a_n]}{[a_{k+2}, \dots, a_n]},$$

называется k-м остатком и обозначается r_k.

Задача 13. Проверьте, что

$$\frac{[a_0, \dots, a_n]}{[a_1, \dots, a_n]} = \frac{[a_0, \dots, a_{k-1}, r_k]}{[a_1, \dots, a_{k-1}, r_k]}\,.$$

Задача 14. Докажите, что при $k \geqslant 2$ справедливы равенства

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Докажем наконец, что справедлива

Теорема. *Для любых натуральных m и n*

$$e(m,n) \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n) + 1/2)) \rfloor - 1,$$

другими словами, высота цепной дроби для числа m/n не больше

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n) + 1/2)) \rfloor - 1,$$

и при $(m,n) = 1$

$$E(m,n) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n) - 1/2)) \rfloor,$$

другими словами, сумма элементов цепной дроби для числа m/n, не меньше

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n) - 1/2)) \rfloor.$$

Оба неравенства достижимы, а именно, справедливо следующее экстремальное свойство чисел Фибоначчи: среди всех несократимых правильных дробей вида s/F_k наименьшую сумму элементов соответствующей цепной дроби имеют только дроби F_{k-2}/F_k и F_{k-1}/F_k, а наибольшую по высоте цепную дробь имеет F_{k-1}/F_k.

Доказательство. Пусть m/n — несократимая правильная дробь и
$$\frac{m}{n}=\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_k}.$$
Тогда $n=[a_1,\ldots,a_k]$ и из доказанных в лемме 4 неравенств имеем
$$F_{k+1}\leqslant n\leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_k}\,,$$
откуда и из леммы 3 немедленно следует неравенство теоремы. Остальное вытекает из равенств
$$\underbrace{\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+2}}_{k-1}=\underbrace{\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+1}}_{k}=\frac{F_k}{F_{k+1}},$$
$$\underbrace{\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+2}}_{k-2}=\underbrace{\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+1}}_{k-1}=1+\frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}=\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}.$$
Теорема доказана.

5. Формулы и ветвящиеся цепные дроби

Далее рассмотрим некоторые классы арифметических формул, представляющих, или, как еще говорят, реализующих рациональные числа. Будем рассматривать следующие множества операций
$$B_1=\{x+y,x^{-1},1\},\ B_2=\{x+y,(x^{-1}+y^{-1})^{-1},1\},$$
которые назовем базисами. Определим индуктивно понятие формулы над базисом B_i и реализуемого ею числа следующим образом.

Константы 1 объявляем формулами. Если Φ_1 и Φ_2 — формулы в базисе B, и r_1,r_2 — реализуемые ими числа, а $\omega\in B$ — любая базисная операция, то $\Phi=\omega(\Phi_1,\Phi_2)$ по определению является формулой, реализующей число $\omega(r_1,r_2)$. Если операция $\omega(x)$ есть операция обращения x^{-1}, то $\omega(\Phi_1)$ является формулой, реализующей функцию $\omega(f_1)$.

Сложностью формулы назовем число символов констант 1 в формуле. Сложностью числа r назовем минимальную сложность реализующей его формулы и обозначим ее $L_B(r)$. Обозначим через $L(r)$ знаменатель обычной несократимой дроби, равной r.

Например,
$$((1+1)^{-1}+(1+1+1)^{-1})^{-1},\quad 1+(1^{-1}+1^{-1}+1^{-1}+1^{-1}+1^{-1})^{-1}$$
— формулы в базисе B_2, реализующие число $6/5$ со сложностью 5 и 6 соответственно. Отсюда видно, что
$$L_{B_2}\leqslant 5,$$

но равенство

$$L_{B_2} = 5$$

(на самом деле вытекающее из задачи 1) требует доказательства. Заметим, что, например, запись

$$((2)^{-1} + (3)^{-1})^{-1}$$

в смысле нашего определения формулой не является.

Понятие формулы в базисе B_1 по существу равносильно понятию ветвящейся цепной дроби. Определим последнее понятие по индукции. Обычные цепные дроби считаем частным случаем ветвящихся цепных дробей. Если R_i, $i = 1, \ldots, n$, — ветвящиеся цепные дроби, a — натуральное число, то дробь

$$\frac{1}{a + R_1 + \ldots + R_n}$$

тоже назовем ветвящейся, а все элементы дробей R_i и число a — ее элементами. Сумму ветвящихся цепных дробей и произвольного целого a тоже считаем ветвящейся цепной дробью, а ее элементами — все элементы слагаемых и число a.

Задача 15. Для любой дроби r число $L_{B_1}(r)$ равно наименьшей сумме элементов в ветвящихся цепных дробях, представляющих r.

Докажем, что для любой дроби r

$$L_{B_1}(r) = L_{B_2}(r).$$

Действительно, так как функция $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$ выражается в базисе B_1 в виде бесповторной суперпозиции, то любую формулу в базисе B_2 можно без изменения сложности преобразовать в формулу в базисе B_1, откуда $L_{B_2}(r) \geqslant L_{B_1}(r)$. Любая подформула вида Φ^{-1} формулы в базисе B представима в виде $(\Phi_1^{-1} + \ldots + \Phi_n^{-1})^{-1}$, где Φ_i — подформулы меньшей сложности или константы 1. Тогда формула Φ эквивалентна формуле той же сложности

$$((\ldots((\Phi_1^{-1} + \Phi_2^{-1})^{-1})^{-1} + \Phi_3^{-1})^{-1})^{-1} \ldots + \Phi_n^{-1})^{-1} =$$
$$= \gamma(\gamma(\ldots\gamma(\gamma(\Phi_1, \Phi_2), \Phi_3)\ldots), \Phi_n),$$

где $\gamma(x, y) = (x^{-1} + y^{-1})^{-1}$, построенной в базисе $B_1 \cup B_2$, и содержащей на один символ $^{-1}$ меньше. Повторяя это преобразование, получим для любой формулы в базисе B_1 эквивалентную ей формулу той же сложности в базисе B_2. Значит, $L_{B_2}(r) \leqslant L_{B_1}(r)$, откуда $L_{B_2}(r) = L_{B_1}(r)$.

Задача 16. Для любой дроби r

$$L_{B_i}(r) = L_{B_i}(1/r).$$

Определим теперь понятие последовательно-параллельной электрической цепи из единичных резисторов. Один единственный резистор считаем П-цепью с сопротивлением единица. Если R_1 и R_2 — П-цепи с сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно, то цепь, которая получается из цепей R_i параллельным соединением, имеет сопротивление $(r_1^{-1}+r_2^{-1})^{-1}$, а цепь, получающаяся из тех же цепей R_i последовательным соединением, имеет сопротивление $r_1 + r_2$. Наименьшее число единичных сопротивлений, из которых можно построить П-цепь с сопротивлением r обозначим $L_\Pi(r)$.

Задача 17. Докажите, что $L_\Pi(r) = L_{B_i}(r)$.

Задача 18. Установите взаимно однозначное соответствие между H-разбиениям прямоугольника $m \times n$ и П-цепями с сопротивлением m/n и выведите отсюда, что $H(n,m) = H(m,n) = L_\Pi(m/n) = L_{B_i}(n/m)$.

Отметим, что задача о вычислении функции $L_\Pi(r)$ фактически рассматривалась в книге «Четыреста избранных задач из журнала American Mathematical Monthly», но сделанные там утверждения неверны, в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Простейшие оценки введенных функций дают следующие утверждения. Если дробь $r = m/n$, то полагаем $E(r) = E(n,m)$.

Теорема 2. *Для любой дроби r*

$$L_{B_i}(r) \leqslant E(r) \leqslant \max\{L(r), L(1/r)\},$$

причем равенство достигается лишь для дробей вида $1/q$, и для дробей вида $1 - 1/q = 1/(1 + 1/(q-1))$.

Доказательство. Очевидно, что любую конечную цепную дробь с натуральными элементами можно преобразовать в формулу в базисе B_1 сложности равной сумме элементов цепной дроби (заменяя каждый элемент a на формулу $1 + \ldots + 1$). Поэтому $L_{B_1}(r) \leqslant E(r)$.

Неравенство $E(r) \leqslant L(r)$ доказывается индукцией по высоте цепной дроби для r, которую можно считать правильной. База ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Так как

$$r = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_1}}$$

где $r_1 = [a_2, \ldots, a_n]$, то согласно предположению индукции $E(r_1) \leqslant L(r_1)$, значит

$$E(r) = E(r_1) + a_1 \leqslant E(r_1) + a_1 + (E(r_1) - 1)(a_1 - 1) = E(r_1)a_1 + 1 \leqslant \\ \leqslant L(1/r_1)a_1 + 1 \leqslant L(r).$$

Равенство возможно, лишь когда $E(r_1) = 1$ или $a_1 = 1$ и одновременно

r_1 — натуральное, т. е. либо когда $r = 1/(a_1+1)$, либо когда

$$r = 1/(1+1/a_2) = a_2/(1+a_2).$$

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$H(p,q) = L_{B_i}(p/q) \geqslant \max(p,q)/\min(p,q).$$

Равенство достигается только на дробях вида $1/q$.

Докажем индукцией, что $1/L_{B_2}(r) \leqslant r$. Пусть Φ — формула сложности $L(r)$ в базисе B_2, реализующая r. Можно считать, что Φ не содержит подформул вида $((\Phi_1)^{-1})^{-1}$. Рассмотрим оба возможных случая. Пусть $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, Φ_i реализует r_i и имеет сложность $L_i = L(r_i)$. Тогда $L(r) = L_1 + L_2$, $r = r_1 + r_2$. Согласно предположению индукции $r_i \geqslant 1/L_i$, откуда

$$r = r_1 + r_2 \geqslant 1/L_1 + 1/L_2 > 1/L.$$

Если же $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)^{-1}$, то в силу предположения индукции

$$1/r_i \geqslant 1/L_i,$$

откуда

$$1/r = r_1 + r_2 \leqslant L_1 + L_2 = L,$$

причем равенство возможно лишь когда $r_i = L_i$, т. е. $r = 1/L$.

Следующая теорема показывает, в частности, что $H(n,m)$ может быть гораздо меньше $E(n,m)$ и устанавливает точное неравенство между ними.

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$E(m,n) \geqslant H(m,n) = L_{B_i}(m/n) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n) - 1/2)) \rfloor \geqslant$$
$$\geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(E(m,n) - 1/2)) \rfloor,$$

а для $q = F_n F_{n+1}$ *или* $F_n F_{n+2}$, $n \geqslant 2$,

$$H(q+1,q) = L_{B_i}(1+1/q) = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(E(q+1,q) - 1/2)) \rfloor =$$
$$= \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor.$$

Доказательство. Первое неравенство уже доказано в теореме 2. Второе неравенство будет доказано в следующем разделе в теореме 6. Последнее неравенство вытекает из предыдущего и второго неравенства теоремы 2.

Докажем последние утверждения. Пусть $q = F_n F_{n+1}$. Применяя в зависимости от четности n одно из равенств

$$F_{n-1}/F_n + F_{n-1}/F_{n+1} = (F_n F_{n+1} + (-1)^n)/F_n F_{n+1},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_n/F_{n+1} = (F_n F_{n+1} + (-1)^{n+1})/F_n F_{n+1},$$

и пользуясь доказанными в теореме 1 равенствами

$$E(F_{n-1}/F_n) = E(F_{n-2}/F_n) = n-1,$$

получаем, что

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant L_{B_i}(F_{n-1}/F_n) + L_{B_i}(F_{n-1}/F_{n+1}) \leqslant n-1+n = 2n-1$$

или

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant L_{B_i}(F_{n-2}/F_n) + L_{B_i}(F_n/F_{n+1}) \leqslant n-1+n = 2n-1.$$

Применяя неравенство леммы 1

$$F_{n+k} < F_{n+1}F_{k+1} < F_{n+k+1}, \quad n,k \geqslant 2,$$

замечаем, что при $n \leqslant 2$

$$F_{2n-1} < q = F_nF_{n+1} < F_{2n},$$

значит $q+1 \leqslant F_{2n}$, откуда согласно лемме 3

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n-1,$$

а согласно теореме 2

$$L_{B_i}(1+1/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n-1,$$

значит

$$L_{B_i}(1+1/q) = 2n-1 = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor.$$

Пусть теперь $q = F_nF_{n+2}$. Применяя в зависимости от четности n одно из равенств

$$F_{n-1}/F_n + F_n/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^n)/F_nF_{n+2},$$

$$F_{n-2}/F_n + F_{n+1}/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+2}$$

получаем аналогично предыдущему, что

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant 2n.$$

Опять применяя неравенство леммы 1 замечаем, что при $n \leqslant 2$

$$F_{2n} < q = F_nF_{n+2} < F_{2n+1},$$

откуда опять согласно лемме 3

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n,$$

и согласно теореме 2

$$L_{B_i}(1+1/q) = 2n = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor.$$

6. Второе доказательство

Неравенства, доказанные в последней теореме, показывают в частности, что любая нижняя оценка для $H(m,n) = L_{B_i}(m,n)$ автоматически будет и оценкой для $E(m,n)$, однако полученные в предыдущем разделе оценки не позволяют вывести оценку для $E(m,n)$. Нетривиальную нижнюю оценку для $H(m,n)$ получил О. М. Касим-Заде.

Далее приводится более простое доказательство несколько более слабого утверждения, из которого однако можно вывести такую же нижнюю оценку для $H(m,n)$, что и для $E(m,n)$, дав тем самым для последней второе доказательство. Для этого нам потребуются две леммы, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 6. *Если* $0 \leqslant y_i, p_i, q_i \leqslant x_i$ *и* $p_i + q_i \leqslant x_i + y_i$, $i = 1, 2$, *то* $p_1p_2 + q_1q_2 \leqslant x_1x_2 + y_1y_2$, *причем при* $0 < y_i < x_i$, $i = 1, 2$, *равенство возможно лишь когда* $p_i = x_i$, $q_i = y_i$ *или когда* $p_i = y_i$, $q_i = x_i$, $i = 1, 2$.

Для доказательства сначала заметим, что при условиях $p \leqslant x, 0 \leqslant b \leqslant \leqslant a$ и $p + q \leqslant x + y$ справедливо неравенство $pa + qb \leqslant xa + yb$. Действительно,

$$pa + qb - xa - yb = (x - p)(b - a) + b(p + q - x - y) \leqslant 0.$$

В силу симметричности условия, можно считать, что $p_1 \geqslant q_1$. Тогда, применяя два раза сформулированное выше неравенство, получаем, что

$$p_1p_2 + q_1q_2 \leqslant p_1x_2 + q_1y_2 \leqslant x_1x_2 + y_1y_2.$$

При $p_1 > q_1 > 0$ равенство возможно лишь когда $p_i = x_i$, $q_i = y_i$, $i = 1, 2$. При $q_1 = 0$ равенство невозможно, ибо тогда $p_1 + q_1 < x_1 + y_1$. При $p_1 = q_1 > 0$ равенство опять невозможно, ибо тогда равенства $p_1 + q_1 = = x_1 + y_1$, $p_1 = x_1$ несовместны.

Лемма 7. *В условиях предыдущей леммы справедливо неравенство*

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 \leqslant x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2.$$

При $0 < y_i < x_i$, $i = 1, 2$, *равенство возможно лишь когда* $p_i = y_i$, $q_i = x_i$, $i = 1, 2$.

Для доказательства заметим, что при $p_1 + q_1 \leqslant x_1$ справедливо неравенство

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 \leqslant (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \leqslant x_1(x_2 + y_2) < x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2,$$

и, аналогично, такое же строгое неравенство справедливо при $p_2+q_2 \leqslant x_2$.

Считая далее, что $p_i + q_i > x_i$, имеем:

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) - p_1p_2 =$$
$$= (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) - (p_1 + q_1 - q_2)(p_2 + q_2 - q_2) \leqslant$$

$$\leqslant (p_1+q_1)(p_2+q_2)-(p_1+q_1-x_1)(p_2+q_2-x_2)=$$
$$=(p_1+q_1)x_2+x_1(p_2+q_2)-x_1x_2\leqslant (x_1+y_1)x_2+(x_2+y_2)x_1-x_1x_2=$$
$$=x_1y_2+x_2y_1+x_1x_2.$$

Теорема 5. (*О. М. Касим-Заде*). *Пусть p/q — несократимая дробь, p, q — целые числа, $L_{B_i}(p/q)=L$. Тогда*

$$|p|, |q| \leqslant F_{L+1}, \quad |p|+|q|\leqslant F_{L+2}.$$

Оба неравенства докажем по индукции. База индукции ($L=1$) очевидна.

Шаг индукции. Пусть Φ — формула сложности L в базисе B_1. Тогда или $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, где Φ_i — формулы сложности L_i, $L_1+L_2=L$, или $\Phi=\Phi_1^{-1}$, где Φ_1 имеет сложность L. В последнем случае обоснование шага индукции очевидно.

Рассмотрим первый случай. Согласно предположению индукции формулы Φ_i реализуют дроби p_i/q_i, такие, что

$$|p_i|, |q_i| \leqslant F_{L_i+1}, \quad |p_i|+|q_i|\leqslant F_{L_i+2},$$

p_i, q_i — целые числа. Тогда формула Φ реализует дробь p/q, такую, что $q=q_1q_2$, и $p=p_1q_2+q_1p_2$. Применяя лемму 6 при $x_i=F_{L_i+1}$, $y_i=F_{L_i}$ и используя лемму 1, получаем неравенство

$$|p|\leqslant |p_1|\,|q_2|+|q_1|\,|p_2|\leqslant F_{L_1+1}F_{L_2+1}+F_{L_1}F_{L_2}=F_{L_1+L_2+1}.$$

Также доказывается неравенство для $|q|$.

Оценим теперь $|q|+|p|$. Применяя лемму 7 при $x_i=F_{L_i+1}$, $y_i=F_{L_i}$ и используя лемму 1 получаем неравенство

$$|q|+|p|\leqslant |p_1|\,|q_2|+|q_1|\,|p_2|+|q_1|\,|q_2|\leqslant$$
$$\leqslant F_{L_1+1}F_{L_2+1}+F_{L_1+1}F_{L_2}+F_{L_1}F_{L_2+1}=F_{L_1+1}F_{L_2+2}+F_{L_1}F_{L_2+1}=$$
$$=F_{L_1+L_2+2}.$$

Обещанная нижняя оценка дается следующей теоремой.

Теорема 6. *Для любой несократимой дроби p/q, где p, q — натуральные числа, справедливы неравенства*

$$H(p,q)=L_{B_i}(p/q)\geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(q,p)-1/2))\rfloor,$$
$$H(p,q)=L_{B_i}(p/q)\geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(p+q-1/2))\rfloor-1.$$

Докажем неравенство

$$L_B(p/q)\geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(p,q)-1/2))\rfloor.$$

Обозначив $L_B(p/q)$ через L и применив предыдущую теорему, получаем, что $\max(p,q) \leqslant F_{L+1}$. Отсюда и из леммы 3 получаем, что

$$L + 1 \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(p,q) - 1/2)) \rfloor + 1,$$

а значит и наше неравенство. Неравенство

$$L_{B_0}(p/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(p + q - 1/2)) \rfloor - 1$$

доказывается аналогично, только вместо первого неравенства предыдущей теоремы используем неравенство $p + q \leqslant F_{L+2}$.

7. Квадрирование прямоугольников и электрические цепи

Заменив в процессе построения произвольной П-цепи Ξ на каждом шаге параллельное соединение подцепей на последовательное, а последовательное соединение подцепей на параллельное, получаем новую цепь Ξ^*, которую назовем двойственной к цепи Ξ. Очевидно, что двойственная цепь для цепи Ξ^* совпадает с цепью Ξ.

Задача 19. Докажите, что двойственные друг другу цепи имеют взаимно обратные сопротивления и выведите отсюда последнее равенство предыдущей задачи.

Вернемся к произвольным разбиениям прямоугольника на квадраты. Им можно сопоставить плоские электрические цепи, состоящие из единичных сопротивлений.[10] Для этого выделим в прямоугольнике все горизонтальные отрезки, состоящие из сторон квадратов разбиения и не удлиняемые с сохранением этого свойства (в их число входят и обе горизонтальные стороны прямоугольника). В середине каждого из выделенных отрезков возьмем точку. Две точки соединяем отрезком, если некоторый квадрат разбиения касается обоих отрезков, на которых выбирались эти точки.

Если от первоначального чертежа оставить только выбранные точки и соединяющие их отрезки, то получится плоское изображение графа. Графом называется объект, состоящий из некоторого множества вершин и некоторого множества ребер, соединяющих эти вершины попарно. Если вершинам графа сопоставить точки на плоскости, а ребрам — отрезки, соединяющие соответствующие вершины, то получается изображение графа. Изображение называется плоским, если отрезки в нем пересекаются только в вершинах. Граф, имеющий плоское изображение, называется также плоским. Если ориентировать каждое ребро рассматриваемого графа в направлении от одной горизонтальной стороны прямоугольника

[10] Это было сделано четырьмя английскими математиками для решения задачи разбиения квадрата на попарно не равные квадраты. Интересная история поиска решения этой задачи описана в книжке И. М. Яглома «Как разрезать квадрат».

к другой и написать на каждом ребре длину стороны квадрата, изображаемого этим ребром, то получим ориентированный граф с нагруженными ребрами, называемый двухполюсной сетью (полюсами являются вершины, изображающие горизонтальные стороны прямоугольника).

Заметим, что сумма чисел, приписанных всем ребрам, выходящим из одного полюса, равна сумме чисел, приписанных всем ребрам, входящим в другой полюс, и обе они равны длине горизонтальной стороны прямоугольника. Если заменить каждое ребро графа на единичный резистор, то получим электрическую схему, соответствующую нашему разбиению. Если считать, что сила тока в каждом резисторе равна числу, приписанному соответствующему ребру, то для каждой вершины сумма втекающих в нее токов будет равна сумме вытекающих. Действительно, обе эти суммы равны длине горизонтального отрезка, в центре которого выбиралась рассматриваемая вершина.

Назовем гранью любую часть плоскости, ограниченную двумя ориентированными цепями ребер графа с общими началом и концом. Число вершин графа обозначим b, а число граней — r. Для каждой грани суммы чисел, приписанных ребрам обоих цепей, равны друг другу. Действительно, каждой грани можно сопоставить вертикальный отрезок внутри прямоугольника, состоящий из сторон квадратов разбиения и ограниченный сверху и снизу подобными же горизонтальными отрезками, тогда обе рассматриваемые суммы равны длине этого отрезка. Каждую из этих сумм можно интерпретировать как сумму падений напряжения на каждой из рассматриваемых цепей. В итоге получим $b + r$ уравнений Кирхгофа для рассматриваемой схемы. Падение напряжения между полюсами схемы равно длине вертикальной стороны прямоугольника, а ее сопротивление — отношению вертикальной и горизонтальной сторон.

Электрическую схему можно сопоставить нашему разбиению и другим способом, а именно, повернув прямоугольник на 90°. Эту схему назовем двойственной к первоначальной схеме.

Задача 20. Проверьте, что для П-цепей введенное понятие двойственности совпадает со старым.

В теории графов двойственным графом к данному плоскому графу называется граф, у которого вершинами являются грани исходного графа, а ребра, соединяющие вершины, соответствуют ребрам, принадлежащим одновременно обоим цепям, ограничивающим грани, соответствующие этим вершинам. Число вершин в двойственном графе равно числу граней в исходном и наоборот, а число ребер в обоих графах одинаково. Обозначим число ребер p.

Задача 21. Установите связь между понятием двойственности для плоских электрических цепей и двойственностью для плоских графов.

При решении следующей задачи полезно использовать знаменитую формулу Эйлера: для любого плоского графа $b - p + r = 1$.

Задача 22. Перечислите все графы не более чем с девятью ребрами, соответствующие не П-разбиениям.

Задача 23. (*Московская олимпиада 1940 года*). Докажите, что прямоугольник нельзя разбить не более чем на 6 разных квадратов.

Задача 24. Докажите, что имеются только два разных разбиения прямоугольника не более чем на девять разных квадратов и покажите, что $L(61, 69) = 9$.

Теперь мы можем убедиться, что $K(m, n)$ иногда бывает меньше $H(n, m)$. Действительно, из теоремы 5 следует, что $L_{\Pi}(61, 69) \geqslant 10$.

Можно даже доказать, что для некоторых последовательностей m_k и n_k

$$K(m_k, n_k)/H(m_k, n_k) < 0{,}89.$$

Для этого рассмотрите электрическую цепь с вершинами $1, 2, \ldots, 8$ и единичными резисторами, соединяющими пары вершин (1,2), (1,3), (2,3), (2,6), (3,4), (3,5), (4,5), (4,7), (5,6), (5,7), (6,8), (7,8). Проверьте, что при напряжении между полюсами 1 и 8, равном 377, по резисторам пойдет ток (в направлении от меньших номеров к большим) силы 123, 138, 10, 113, 68, 75, 7, 61, 28, 54, 141, 115 соответственно. Постройте по этой цепи разбиение прямоугольника 256×377 на 12 квадратов со сторонами 123, 138, 10, 113, 68, 75, 7, 61, 28, 54, 141, 115. Рассмотрите последовательность прямоугольников размера $p_n \times q_n$, определяемую рекуррентными формулами

$$p_{n+1} = p_n^2 + q_n^2, \quad q_{n+1} = p_n q_n, \quad p_0 = 377, q_0 = 256,$$

и докажите по индукции, что $(p_n, q_n) = 1$ и $L(p_n, q_n) \leqslant 2^n \cdot 12$ (в доказательстве неравенства шаг индукции обосновывается тем, что прямоугольник $p_n \times q_n$ разбивается на два прямоугольника, подобных прямоугольнику $p_{n-1} \times q_{n-1}$). Отсюда следует, что

$$L(p_n, q_n)/\log_\phi p_n < 12/\log_\phi 377 < 0{,}89.$$

Далее примените теорему 5.

Отметим в заключение без доказательства, что

$$K(m, n) > \log_2(m + n).$$

Об одном доказательстве теоремы Гильберта о нулях

В. Доценко

Теорема Гильберта о нулях (также известная как теорема Гильберта о корнях и Nullstellensatz[1]), доказанная в 1893 г. (см. [3]), играет фундаментальную роль в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии. Она утверждает, что если каждый общий корень системы $\{f_1, \ldots, f_k\}$ многочленов над алгебраически замкнутым полем является корнем многочлена F, то существует такое m, что F^m представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^k f_i g_i$, где g_i — некоторые многочлены.

Приводимое здесь доказательство этой теоремы для случая, когда основное поле есть поле комплексных чисел[2], является достоянием математического фольклора; хотя оно имеется в ряде русскоязычных источников (и, по-видимому, во множестве англоязычных), обычно о нём узнаю́т за непринуждённой беседой — или не узнаю́т вовсе. Сборник «Математическое Просвещение» идеально приспособлен для того, чтобы исправлять такие ситуации, делая красивые доказательства более доступными. Насколько мне известно[3], автором ключевого шага этого доказательства (лемма 2 в следующем далее тексте) является израильский математик А. Амицур [4]. Одно из первых упоминаний об этой идее на русском языке содержится в статье [1].

Я благодарен М. Финкельбергу за то, что он познакомил меня с этим доказательством, М. Вялому за предложение написать данный текст и моим знакомым, узнавшим это доказательство от меня, реакция которых убедила меня в полезности такого текста. Я также благодарен В. М. Тихомирову, предложившему снабдить вступление общедоступной[4] формули-

[1] М. Рид в книге «Алгебраическая геометрия для всех» пишет: «Советую вам придерживаться немецкого названия, если вы не желаете прослыть невеждами». Я всё же рискну предположить, что название «теорема Гильберта о нулях» несколько более привычно.

[2] Конечно, оно без изменений проходит для произвольного *несчётного* алгебраически замкнутого поля.

[3] Это и следующее утверждение не претендуют на окончательность; я буду признателен за любые уточнения.

[4] Гильберт говорил, что математический результат по-настоящему хорош, если его

ровкой теоремы и ссылкой на статью Гильберта, где эта теорема впервые была доказана в полной общности.

Итак, пусть $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных, $f_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2, \ldots, f_k \in R$, I — идеал, порождённый $f_1, \ldots, f_k$, т. е. множество сумм вида $f_1g_1 + \cdots + f_kg_k$, где $g_1, \ldots, g_k \in R$; иногда для него удобно обозначение $(f_1, \ldots, f_k)$.

Теорема Гильберта о нулях. *Для любого многочлена $F \in R$, для которого $\big(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant k\ f_i(y_1, \ldots, y_n) = 0\big) \Rightarrow (F(y_1, \ldots, y_n) = 0)$ существует такое m, что $F^m \in I$.*

Порядок изложения продиктован желанием доказывать в каждый момент то из ещё не доказанных утверждений, важность которого уже ясна (считая теорему о нулях утверждением, про которое это понятно a priori). Оказывается, теорему о нулях можно вывести из её частного случая. Эта часть доказательства является достаточно общепринятой, см. например, [2, с. 468–469]. (После выхода книги [2] многие стали использовать для приводимого рассуждения название «трюк Рабиновича».)

Лемма 1 (Случай $F = 1$). *Если в условиях теоремы $f_1, \ldots, f_k$ не имеют общих нулей, то $I = R$.*

Особенностью предлагаемого доказательства является как раз способ доказательства этой леммы. Для этого нам потребуется

Лемма 2. *Пусть поле K является не более чем счётномерным пространством над $\mathbb{C}$. Тогда $K \cong \mathbb{C}$.*

Вывод теоремы из леммы 1. Рассмотрим «бо́льшее» кольцо $R' = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, z]$. В этом кольце лежат многочлены $f_1, \ldots, f_k$ (многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ являются и многочленами от $x_1, \ldots, x_n, z$) и $1 - zF$. В условиях теоремы эти многочлены не имеют общих нулей, поэтому существуют многочлены $g_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n, z), g_2, \ldots, g_{n+1}$ такие, что

$$1 = f_1g_1 + \cdots + f_ng_n + (1 - zF)g_{n+1}.$$

Подстановка в это тождество $z = \dfrac{1}{F}$ и приведение к общему знаменателю (который, очевидно, есть степень F) дают то, что нужно.

Вывод леммы 1 *из леммы* 2. Предположим противное. Пусть $I \neq R$. Ясно, что существует максимальный (по включению) идеал $J \neq R$, содержащий I (это можно вывести из аксиомы выбора или же использовать принцип обрыва возрастающих цепочек идеалов, т. е. *нётеровость* кольца R — см. [2]). Будем теперь иметь дело с J.

суть можно разъяснить человеку «с улицы». Это утверждение достаточно спорно, но теорема о нулях явно подходит под этот критерий.

Факторкольцо R/J есть поле[5)], при этом это поле является (не более чем счётномерным — ведь таково кольцо многочленов!) векторным пространством над $\mathbb{C}$ (очевидно). Из леммы 2 следует, что $R/J \cong \mathbb{C}$. Теперь уже легко понять, как может быть устроен идеал J. Действительно, пусть при проекции $R \to R/J \cong \mathbb{C}$ образующие $x_1, \ldots, x_n$ кольца R переходят в (числа) $a_1, \ldots, a_n$ соответственно. Тогда многочлены $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ переходят в нуль и поэтому лежат в идеале J. Но факторкольцо $R/(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ уже есть $\mathbb{C}$ (причину этого мы только что обсудили: образующие кольца R после факторизации порождают $\mathbb{C}$), значит, $J = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Поэтому все многочлены из J (а значит, из любого идеала, содержащегося в J) имеют общий нуль: точку $(a_1, \ldots, a_n)$. Противоречие.

Доказательство леммы 2. Ясно, что $K \supset \mathbb{C}$. Предположим противное: пусть $z \in K \setminus \mathbb{C}$. Тогда множество $\{\frac{1}{z-\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ имеет мощность континуум (так как оно равномощно $\mathbb{C}$), поэтому это множество не может состоять из линейно независимых над $\mathbb{C}$ элементов. Значит, существуют комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c_1, \ldots, c_m$ такие, что

$$\frac{c_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{c_m}{z-\alpha_m} = 0.$$

Осталось привести эти дроби к общему знаменателю, чтобы получить (очевидно, нетривиальное) уравнение на z с комплексными коэффициентами. Поскольку поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, все корни этого уравнения — комплексные числа. Противоречие.

Список литературы

[1] Бернштейн И. Н., Зелевинский А. В. *Представления группы $GL(n, F)$, где F — локальное неархимедово поле* // УМН, 1976. Т. 31. Вып. 3. С. 5–70.

[2] Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра.* М.: Наука, 1976.

[3] Гильберт Д. *О полной системе инвариантов* // Гильберт Д. *Избранные труды.* Т. 1. М.: Факториал, 1998. С. 67–116.

[4] Amitsur A. S. *Algebras over infinite fields* // Proc. AMS, 1956. Vol. 7. P. 35–48.

[5)] Можно прочитать доказательство в [2], а можно продумать такую идею: наличие ненулевых идеалов в R/J (не совпадающих со всем кольцом R/J) противоречило бы максимальности J, а если таких (как говорят, «нетривиальных») идеалов нет, то R/J — поле, поскольку любой ненулевой элемент имеет обратный: ведь в идеале, порождённом этим элементом, есть 1.

Олимпиады

30-я Американская Математическая Олимпиада, год 2001

Г. А. Гальперин

I: Как проводилась олимпиада. USAMO — такова аббревиатура названия последнего тура математической олимпиады, проводившейся в США весной 2001-го года в тридцатый раз. На этот тур было приглашено 250 победителей предыдущего тура AIME, на котором давалось (как и на двух других турах, ему предшествующих, с аббревиатурами AHSME и AJHSME) два-три десятка тестовых задач: из 5 ответов, предлагаемых после каждой задачи, следовало выбрать правильный и обвести его кружочком. В отличие от AHSME, AJHSME и AIME, на USAMO никаких тестовых задач нет: участникам самим надо давать ответы, а в решениях следует проводить строгие доказательства и рассуждения.

Все туры олимпиады, предшествующие USAMO, проводятся по школам, а USAMO — в крупных университетах соответствующих штатов США. Задание, предлагаемое для USAMO, составляется специальным «большим» жюри, раскиданным по территории США. Задолго до начала олимпиады каждый член «большого» жюри посылает в ее «штаб» от одной до пяти свежих задач; затем весь полученный комплект («pool») примерно из 50–60 задач рассылается всем членам жюри, и они в письменном виде шлют в штаб свои комментарии о качестве, сложности и приемлемости каждой отдельно взятой задачи. В результате еще двух итераций такого рода возникает «ядро» из 10–15 лучших задач. Это ядро задач затем обсуждается «ядром» жюри из 6 человек («малым жюри»); такое обсуждение («conference») происходит обычно по телефону в специально назначенный воскресный день, и на нем производится отбор 6 лучших задач для USAMO. Окончательная шлифовка формулировок отобранных задач поручается председателю жюри и его заместителю, которые изготавливают также специальный буклет из задач USAMO и их решений для тех, кто проверяет работы школьников.

Примерно через неделю после проведения тура USAMO небольшая часть «большого» жюри съехалась на проверку работ школьников в город Линкольн (Lincoln), штат Небраска (Nebraska). После тщательной проверки и перепроверки работ участников все результаты (очки, заработанные школьниками по каждой задаче) были внесены в компьютер, и соответствующая программа проранжировала участников по их результатам в порядке убывания. В компьютер были внесены также и предложения по специальным наградам. Эти награды представляют собой приличные денежные премии, вручаемые позже не самому школьнику, а тому университету, в который он пойдет учиться после окончания школы (так называемые scholarships). На руки же награждаемый получает только специальную грамоту, медаль и какой-нибудь довольно дорогой подарок, например компьютер «lap-top» последней марки. Имена участников были закодированы числами и только после того, как вся проверка была полностью завершена и ее результаты зафиксированы в компьютере, председатель жюри нажал последний раз клавишу компьютера, и... возник ранжированный список имен всех 250 участников. Результаты олимпиады в распечатанном виде были вручены членам жюри на прощальном завтраке в день их отлета по домам; в этот же день участникам разослали по почте их результаты.

Двенадцать школьников с наилучшими результатами стали победителями USAMO и были приглашены на награждение в столицу США — г. Вашингтон. В этом году, в отличие от прошлых лет, в Вашингтон пригласили 13 школьников вместо двенадцати: тринадцатым был *не-победитель* Майкл Хамбург, которого наградили премией американского математического института Клэй (Clay) за самое короткое и изящное решение последней, наиболее трудной задачи олимпиады (о ней речь впереди). Единственного победителя Рэйда Бартона, решившего все шесть задач олимпиады, наградили почетной премией Грэйтцера – Кламкина; вручал эту премию сам Мюррей Кламкин (Murray Klamkin), известный канадский композитор задач, специально приехавший из Канады в США для этого награждения.

Победителей, приглашенных в Вашингтон, чествовали три раза. Первый раз неофициально, в штаб-квартире Математической Ассоциации Америки (MAA), куда кроме членов жюри и официальных лиц съехались разнообразные спонсоры для объявления своих наград (главным спонсором была фирма «The Akamai Foundation»). Второй раз официально, в Академии Наук США, где школьников вызывали по одному на сцену вместе со своими родителями, братьями и сестрами (если таковые имелись), вручали медаль и грамоту, и фотографировали всю семью (а перед этим профессор Принстонского университета Фрэнк Морган (Frank Morgan) прочитал замечательную лекцию о мыльных пузырях и «Теореме о сдвоенном мыльном пузыре» («The Double Soap Bubble Theorem»)). И, наконец, третий раз победителей награждали на официальном банкете в дипломатическом зале Министерства Иностранных дел США (Diplomatic Reception Rooms of the United States Department of State), где школьникам вручались специальные призы по разным поводам. В промежутках между описанными событиями делалось много фотографий, например у совершенно необычной бронзовой скульптуры Альберта Эйнштейна перед входом в Академию Наук США, которую школьники облепили со всех сторон.

II: О задачах. USAMO проводилась в 2001-м году 1 мая в два этапа: первый с 9 часов утра до полудня, второй с 1 часа дня до 4 часов дня. На каждом этапе предлагалось решить 3 трудные задачи, расположенные в порядке возрастания их сложности (так что самыми трудными были задачи #3 и #6). Как выше уже было сказано, в решениях задач USAMO надо предъявлять строгие доказательства, а не угадывать ответы. Характер USAMO во многом напоминает Международные олимпиады: те же 6 задач, $3+3$; задачи примерно такой же сложности; кроме изящных соображений, при решении нужно использовать математическую технику, порой достаточно глубокую — никакая задача не решается в «один ход» (чем знамениты Московские и Санкт-Петербургские олимпиады); как правило, каждая задача имеет больше одного решения.

Ниже мы приводим условия всех шести задач (см. часть III) и их решения (часть IV). Хочется также обратить особое внимание читателя на наиболее трудные, наиболее красивые, и, в то же время, наименее техничные задачи #3 и #6. Отметим, что геометрическая задача #6 оказалась самой «математической» и идейной: помимо того, что у нее есть большое количество элементарных решений, автору этой заметки удалось обобщить эту задачу на многомерный случай и на однородные (криволинейные) пространства, в частности на (многомерную) сферу и пространство Лобачевского. Читателю, знакомому с многомерными и однородными пространствами, предлагается найти обобщение приводимого ниже решения задачи #6 самостоятельно.

III: Условия задач.

Этап I (9:00–12:00)

1. В каждой из восьми шкатулок находится 6 цветных шариков. На раскраску всех шариков использовано n разных цветов, причем каждый шарик покрашен в один цвет. Известно, что все шарики в одной и той

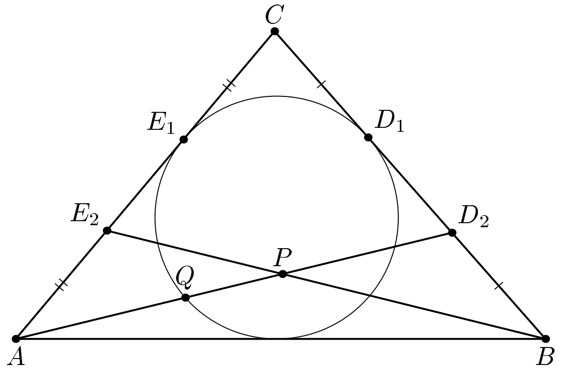


Рис. 1.

же шкатулке разноцветны и что никакая пара цветов не встречается одновременно более чем в одной шкатулке. Найти наименьшее возможное значение n, для которого такая раскраска шариков существует.

2. В треугольник ABC вписана окружность ω. Точки касания ω со сторонами BC и AC обозначены, соответственно, через D_1 и E_1. На сторонах BC и AC отмечены также точки D_2 и E_2, соответственно, для которых $CD_2 = BD_1$ и $CE_2 = AE_1$. Пусть P — точка пересечения отрезков AD_2 и BE_2, и Q — ближайшая к вершине A точка пересечения окружности ω и отрезка AD_2 (рис. 1). Доказать, что $AQ = D_2P$.

3. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Доказать, что $0 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant 2$.

Этап II (13:00–16:00)

4. На плоскости даны треугольник ABC и точка P такие, что треугольник Δ, составленный из отрезков PA, PB и PC, тупоугольный. Наибольшая сторона треугольника Δ конгруэнтна отрезку PA. Доказать, что $\angle BAC$ острый.

5. Множество S целых (необязательно положительных) чисел удовлетворяет следующим условиям: (A) существуют такие числа $a, b \in S$, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a-2, b-2) = 1$; (B) если x и y — элементы S (возможно, равные), то $x^2 - y \in S$. Доказать, что S совпадает с множеством всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

6. Каждой точке плоскости поставлено в соответствие некоторое вещественное число. Известно, что для произвольного треугольника число, стоящее в центре вписанной в него окружности, равно среднему арифметическому чисел, стоящих в его вершинах. Доказать, что всем точкам плоскости приписано одно и то же число.

IV: Решения задач.

Решение задачи 1. *Ответ*: $n_{\min} = 23$. Приведем *некомбинаторное* решение, основанное на выпуклости гиперболы $y = 1/x$.

◀ Пусть $1, 2, \ldots, n$ — цвета шариков. Расставим все цвета построчно («по-шкатулочно») в таблицу $\mathbf{A}$ размером 8×6 (так что получим 8 строк-шкатулок с индексом i и 6 столбцов-шариков с индексом j.) Пусть b_{ij} обозначает число шариков того же цвета, что и шарик с номером j в шкатулке с номером i; заполним этими числами новую таблицу $\mathbf{B}$ размером 8×6. Очевидное, но решающее замечание: *сумма обратных величин* $1/b_{ij}$ *по всей таблице* $\mathbf{B}$ *равна* n. (Докажите это самостоятельно!)

Поэтому рассмотрим две строчечные суммы: $S_i = \sum_{j=1}^{6} b_{ij}$ и $s_i = \sum_{j=1}^{6}(1/b_{ij})$. Так как в строке i все шесть цветов различны, остальные семь шкатулок добавят в S_i максимум 7 шариков, так что имеем ограничение $S_i \leqslant 6 + 7 = 13$. Поскольку функция $y = 1/x$ выпукла вверх, то значение s_i *минимально*, когда одно из b_{ij} равно 3, а остальные пять чисел равны 2. Итак, $s_i \geqslant 1/3 + 5/2 = 17/6$. Согласно замечанию, $n = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{6} 1/b_{ij} \geqslant 8 \cdot 17/6 = 68/3 > 22$, откуда $n \geqslant 23$.

Пример для $n = 23$ (по-шкатулочно):
$(1,3,4,5,6,7)$; $(1,8,9,10,11,12)$; $(1,13,14,15,16,17)$; $(2,3,8,13,18,19)$; $(2,4,9,14,20,21)$; $(2,5,10,15,22,23)$; $(6,11,16,18,20,22)$; $(7,12,19,21,23)$.▶

Решение задачи 2. Докажите самостоятельно, что: (1) *вневписанная окружность, касающаяся стороны* BC, *касается этой стороны именно в точке* D_2 (*где* $CD_2 = BD_1$); и, как (не очень простое) следствие из этого, что (2) D_1Q — *диаметр вписанной окружности* ω (так что $O \in D_1Q$ и $D_1O = OQ$, где O — центр ω, рис. 2).

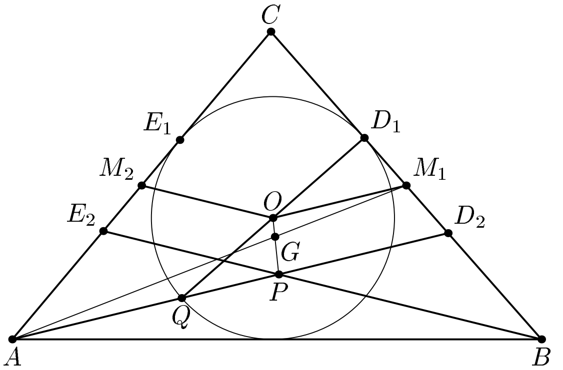


Рис. 2.

◀ Пусть теперь M_1 — середина стороны BC; тогда M_1 — середина отрезка D_1D_2 и OM_1 — средняя линия $_\triangle QD_1D_2$. Отсюда $M_1O \parallel QD_2$, $M_1O \parallel AD_2$, $QD_2 = 2M_1O$. Если M_2 — середина стороны AC, то, по аналогичным соображениям, $M_2O \parallel BE_2$. Пусть G — точка пересечения медиан $_\triangle ABC$ (т. е. $G = AM_1 \cap BM_2$).

Рассмотрим гомотетию δ с центром G и коэффициентом $k = -1/2$. По определению, $\delta(A) = M_1$ и $\delta(B) = M_2$. Параллельные прямые при гомотетии переходят в параллельные прямые и точки пересечения прямых переходят в точки пересечения их образов. Поэтому из $AD_2 \parallel M_1O$ следует $\delta(AD_2) = M_1O$; из $BE_2 \parallel M_2O$ следует $\delta(BE_2) = M_2O$; отсюда

$$\delta(AD_2 \cap BE_2) = \delta(AD_2) \cap \delta(BE_2) = M_1O \cap M_2O = O,$$

или короче $\delta(P) = O$. Из $\delta(A) = M_1$, $\delta(P) = O$ вытекает $AP = 2M_1O$. Но $QD_2 = 2M_1O$, значит $AP = QD_2$. Вычитая общий отрезок PQ, находим $AQ = PD_2$. ▶

Решение задачи 3. Эта задача имеет довольно громоздкое и техническое (но нетривиальное!) тригонометрическое решение, начинающееся словами: «Сделаем замену $a = 2\sin(A/2)$, $b = 2\sin(B/2)$, $c = 2\sin(C/2)$, где A, B и C — углы треугольника». Задачу можно решить также с помощью правила множителей Лагранжа, но и это (стандартное с точки зрения математика-профессионала) решение довольно громоздко, хотя и весьма надежно. Однако богатый опыт членов жюри подсказывал, что у изящно сформулированной задачи должно иметься изящное же решение. Оно в конце концов и было найдено.

◀ Заметим сначала, что по крайней мере одно из трех чисел a, b, c не превосходит 1, иначе $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$. Пусть, например, $a \leqslant 1$. Тогда сразу получается нижняя оценка: $ab + bc + ca - abc = a(b + c) + (1 - a)bc \geqslant 0$. Нетрудно показать, что равенство достигается только на следующих тройках чисел: $(2, 0, 0)$; $(0, 2, 0)$ и $(0, 0, 2)$.

Докажем теперь верхнюю оценку. Решающую роль будет играть следующий простой факт: среди любых трех чисел a, b, c либо какие-то два $\leqslant 1$, либо какие-то два $\geqslant 1$ (принцип Дирихле для трех точек и двух полупрямых с общим концом $x = 1$). Без ограничения общности будем считать, что этими числами являются b и c, так что $(1-b)(1-c) \geqslant 0$. Поскольку всегда $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, получаем $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geqslant a^2 + 2bc + abc$. Отсюда $4 - a^2 \geqslant bc\,(2 + a)$ и $2 - a \geqslant bc$. После этого верхняя оценка получается мгновенно:

$$\begin{aligned} ab + bc + ac - abc &\leqslant ab + (2 - a) + ac(1 - b) = \\ &= 2 - a\Big[(1 - b) - c(1 - b)\Big] = 2 - a(1 - b)(1 - c) \leqslant 2, \end{aligned}$$

поскольку $a(1 - b)(1 - c) \geqslant 0$. ▶

Равенство достигается только если одновременно $b^2 + c^2 = 2bc$ (т.е. при $b = c$) и $a(1 - b)(1 - c) = 0$. Тогда, если $a \neq 0$, то $b = c = 1$, откуда и $a = 1$; если $a = 0$, то из условия задачи $2b^2 = 4$ и $b = c = \sqrt{2}$. Циклические перестановки символов a, b, c дают все возможные ответы: $(1, 1, 1)$; $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

Решение задачи 4. Имеется несколько решений этой задачи (одно из них основано на обобщенной теореме Птолемея). Самое простое — векторное решение.

◀ Поместим начало координат в точку A и для произвольной точки Q будем обозначать через q вектор $\overrightarrow{AQ}$ и через $|q|$ длину вектора q. Дано: $|p - b|^2 + |p - c|^2 < |p|^2$. Это неравенство эквивалентно такому (точка означает скалярное произведение векторов): $p \cdot p + b \cdot b + c \cdot c - 2p \cdot b - 2p \cdot c < 0$. Добавляя $2b \cdot c$ к обеим частям, получаем $|p - b - c|^2 < 2b \cdot c$; следовательно, $b \cdot c > 0$. А тогда $\cos \angle BAC = \dfrac{b \cdot c}{|b||c|} > 0$, т.е. $\angle BAC$ острый. ▶

Решение задачи 5. ◀ Будем говорить, что множество S *устойчиво под действием преобразования* $x \mapsto f(x)$, если из $x \in S$ следует $f(x) \in S$. Если $c, d \in S$, то из условия (B) имеем, что S устойчиво под действием $x \mapsto c^2 - x$ и $x \mapsto d^2 - x$. Тогда S устойчиво и под действием $x \mapsto c^2 - (d^2 - x) = x + (c^2 - d^2)$; аналогично и под действием $x \mapsto x + (d^2 - c^2)$. Поэтому, если n есть целочисленная линейная комбинация чисел вида $c^2 - d^2$, где $c, d \in S$, то S устойчиво под действием $x \mapsto x + n$ и $x \mapsto x - n$. В частности, это верно для $n = m$, где $m = \text{НОД}\{c^2 - d^2 : c, d \in S\}$.

Из условия (A) следует, что $S \neq \varnothing$. Поэтому остается только доказать, что $m = 1$. Допустим противное: $m \neq 1$.

Возьмем простой делитель p числа m; тогда $c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod p$ при всех $c, d \in S$. Отсюда либо $d \equiv c \pmod p$, либо $d \equiv -c \pmod p$. По условию (B), если $c \in S$, то $c^2 - c \in S$, так что либо $c^2 - c \equiv c \pmod p$ (и тогда $c^2 \equiv 2c \pmod p$), либо $c^2 - c \equiv -c \pmod p$ (и тогда $c^2 \equiv 0 \pmod p$). Отсюда получаем следующее утверждение:

(C) для каждого $c \in S$ либо $c \equiv 0 \pmod p$, либо $c \equiv 2 \pmod p$.

По условию (A) найдутся такие числа $a, b \in S$, что $\text{НОД}(a, b) = 1$, значит по крайней мере одно из чисел a, b не кратно p; обозначим это не кратное p число через α. Итак, $\alpha \in S$ и $\alpha \not\equiv 0 \pmod p$. Точно так же, из $\text{НОД}(a - 2, b - 2) = 1$ следует, что p не может делить одновременно как $a - 2$, так и $b - 2$. Следовательно, имеется элемент в S, обозначим его β, для которого $\beta \not\equiv 2 \pmod p$. Из сказанного и из полученного выше условия (C) вытекает единственная возможность: $\alpha \equiv 2 \pmod p$ и $\beta \equiv 0 \pmod p$. Но по условию (B), $\beta^2 - \alpha \in S$. Положим $c = \beta^2 - \alpha$ и подставим его в условие (C). Из $\beta^2 - \alpha \equiv 0 - 2 = -2 \pmod p$ следует:

$$\text{либо } -2 \equiv 0 \pmod{p}), \quad \text{либо } -2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Каждое из этих равенств справедливо только при $p = 2$. А тогда условие (C) должно быть переформулировано так:

(C) все элементы множества S четны.

Но это утверждение противоречит условию (A)! Таким образом, допустив, что $m \neq 1$, мы получили противоречие. Значит, $m = 1$ и, следовательно, $S = \mathbb{Z}$. ▶

Решение задачи 6. Точки будем обозначать прописными буквами, а числа, приписанные точкам, будем обозначать теми же, но строчными, буквами. Для совпадающих точек или чисел мы будем использовать знак равенства «=», для несовпадающих – знак неравенства «≠».

Лемма 1. *Пусть A, B, C, D — такие четыре точки на прямой ℓ, что отрезок CD содержит отрезок AB, а середины этих отрезков совпадают. Тогда $c - d = 3(a - b)$.*

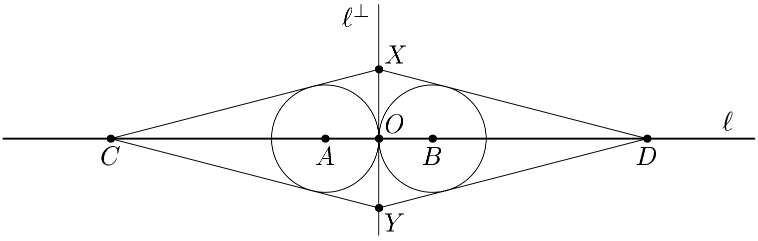


Рис. 3.

Доказательство. Пусть O — середина отрезка AB. Построим окружности $\mathbf{c}_A$ и $\mathbf{c}_B$ с центрами A и B и радиусом $AO = OB$. Проведем касательные CX, CY к окружности $\mathbf{c}_A$, и DX, DY к окружности $\mathbf{c}_B$; здесь X и Y — точки на перпендикуляре $\ell^\perp$, восставленном к ℓ в точке O (рис. 3). Из $\triangle CXY$ получаем: $c + x + y = 3a$; из $\triangle DXY$: $d + x + y = 3b$. Следовательно, $c - d = 3(a - b)$.

◀ Нам надо доказать, что произвольным точкам A и B плоскости приписаны одинаковые числа: $a = b$.

Рассмотрим три пары вложенных отрезков $EF \supset CD \supset AB$ с общей серединой. Применяя лемму, получаем:

$$e - f = 3(c - d) = 3(a - b) \quad \Longrightarrow \quad 9(a - b) = 3(a - b) \quad \Longrightarrow \quad a = b,$$

что и требовалось доказать. ▶

О попарно смежных многогранниках

А. А. Заславский

Среди задач, предложенных 11-классникам на 64-й Московской математической олимпиаде, была такая:

> *Докажите, что в пространстве существует расположение* 2001 *выпуклого многогранника, такое что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга* (*т. е. имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек*).

Вместо слова «касающиеся»[1)] мы будем далее использовать более точное слово «смежные». Понятно, что число 2001 в условии этой задачи несущественно.

Утверждение 1. Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых многогранников.

Насколько нам известно, утверждение 1 было впервые сформулировано и доказано Титце в 1905 г. [2].

Следует сказать, что решение этой задачи, приведенное в посвященной олимпиаде брошюре [1], очень длинное и сложное[2)]. Более изящное решение нашел участник олимпиады Илья Межиров[3)], но и его нельзя считать достаточно простым (см. «Квант» №4, 2001 г.). И вот через некоторое время в Интернете была обнаружена статья [3], содержащая новый и чрезвычайно красивый метод решения. Более того, этот метод дает следующее усиление утверждения 1.

Утверждение 2. Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых *конгруэнтных* многогранников.

---

1) При подготовке вариантов олимпиады в задачной комиссии бытовал еще более вольный термин «целующиеся».

2) Зато оно использует только лишь те скудные стереометрические факты, которые могут быть известны более-менее всем школьникам. В частности, используются только призмы.

3) За это решение он получил премию Делоне, присуждаемую на Московской математической олимпиаде за самое красивое решение геометрической задачи. Всего эту задачу решило 4 человека из 605 участников.

Мы будем строить искомые многогранники как части *областей Вороного* системы точек, лежащих на *винтовой линии*.

Пусть в пространстве даны точки $M_1, M_2, \ldots$ Для каждой точки пространства найдем ближайшую к ней из точек M_i. В результате все пространство будет разбито на области, которые называются *областями Вороного* точек $M_1, M_2, \ldots$ (Область Вороного точки M_i — это множество таких точек X, что $XM_i \leqslant XM_j$ для всех $j \neq i$). Из определения сразу вытекают следующие свойства областей Вороного.

1. Область Вороного точки M_i является выпуклым множеством, так как она есть пересечение полупространств, ограниченных серединными перпендикулярами к отрезкам M_iM_j.

2. Области Вороного двух точек не могут иметь общих внутренних точек, а общие граничные точки этих областей лежат в плоскости, являющейся серединным перпендикуляром к соединяющему эти точки отрезку.

3. Пересечением областей Вороного трех точек, не лежащих на одной прямой, является часть прямой, перпендикулярной плоскости, содержащей эти точки и проходящей через центр окружности, описанной около образованного ими треугольника.

4. Области Вороного четырех и более точек, не лежащих на одной окружности, имеют не более одной общей точки.

Винтовую линию можно задать уравнениями $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, где $t \in \mathbb{R}$. Точку винтовой линии с координатами $(t, \cos t, \sin t)$ будем обозначать через $H(t)$. Наиболее важным для нас свойством винтовой линии является ее *самоконгруэнтность*: для любых точек A и B винтовой линии существует движение пространства, переводящее винтовую линию в себя, а точку A в B. Отметим, что кроме винтовых линий самоконгруэнтными являются только прямые и окружности.

Ключевую роль в построении играет следующая лемма.

Лемма 1. Если $|t_1 - t_2| < 2\pi$, то существует сфера, касающаяся винтовой линии в точках $H(t_1)$ и $H(t_2)$. Эта сфера не имеет с винтовой линией других общих точек.

Доказательство. В силу самоконгруэнтности винтовой линии достаточно доказать лемму для $t_1 = t$, $t_2 = -t$ при $0 < t < \pi$. Так как точки $H(t)$ и $H(-t)$ симметричны относительно оси y, центр сферы лежит на этой оси, т.е. ее уравнение имеет вид $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = r^2$. Так как винтовая линия лежит на цилиндре $y^2 + z^2 = 1$, все точки ее пересечения со сферой принадлежат кривой γ пересечения сферы и цилиндра. Проекцией кривой γ на плоскость Oxy является парабола $y = y_1(x) = -(x^2 - r^2 + a^2 + 1)/2a$, а проекцией винтовой линии — кривая $y = y_2(x) = \cos x$, причем обе кривые касаются в точках $(t, \cos t)$ и $(-t, \cos t)$, т. е. уравнение $y_1 = y_2$ имеет на отрезке $(-\pi, \pi)$ по крайней мере 4 корня. Если бы у этого уравнения были другие корни, то уравнение $y_1''(x) = y_2''(x)$ имело бы на отрезке $(-\pi, \pi)$ более 2 корней, что невозможно, так как $y_1''(x) = 1/a$, $y_2''(x) = -\cos x$. Следовательно, на этом отрезке других корней нет. С другой стороны, при $|x| \geqslant \pi$ $y_1(x) \leqslant y_1(\pi) < \cos \pi = -1$, что и доказывает лемму.

Из леммы 1 следует, что если взять на винтовой линии произвольное множество точек, параметры которых отличаются меньше чем на 2π, то любая пара областей Вороного такой системы точек будет иметь общие граничные точки. Действительно, расстояния от центра сферы, касающейся винтовой линии в паре выбранных точек, равны между собой и меньше расстояния до любой другой точки винтовой линии.

Для решения задачи осталось преодолеть две трудности: во-первых, области Вороного неограничены, а во-вторых, не все тройные пересечения пусты. Первая трудность преодолевается без труда: нужно отсечь бесконечные части выбранных областей Вороного достаточно далекими плоскостями, параллельными оси x. Чтобы преодолеть вторую трудность, заметим, что пары многогранников пересекаются по граням, а тройки — по ребрам. Поэтому, «сточив» все ребра, получим искомую систему многогранников.

Замечание. Если взять точки $H_t = H(2\pi t/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, то области Вороного любых n последовательных точек будут попарно касаться. При этом они будут конгруэнтны в силу самоконгруэнтности винтовой линии. Отсюда можно получить доказательство утверждения 2.

Список литературы

[1] *LXIV Московская математическая олимпиада.* М.: МЦНМО, 2001. Эл. версия: `www.mccme.ru/olympiads/mmo/2001/mmo2001.htm`

[2] Titze H. *Über das Problem der Nachbargite im Raum* // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1905. Vol. 16. P. 211–216.

[3] Erickson J. *Arbitrary large neighborly families of congruent symmetric convex 3-polytopes.* `http://arxiv.org/abs/math/0106095`. 12.06.2001.

Нам пишут...

О длинах сторон правильного пятиугольника и правильного десятиугольника

Л. М. Коганов нашел в книгах [3, с. 52, формула (1)] и [2, с. 94, с. 201–202]) следующее соотношение между длинами a_5 и a_{10} сторон правильных пятиугольника и десятиугольника, вписанных в единичную окружность:

$$a_5^2 = a_{10}^2 + 1. \tag{1}$$

Другими словами этот факт можно выразить так: стороны правильных пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника, вписанных в единичную окружность, образуют прямоугольный треугольник (рис. 1).

Формулы для a_5 и a_{10}, из которых несложными аналитическими преобразованиями получается (1), содержатся во многих книгах по геометрии (см., например, [1]). Л. М. Коганов пишет, что ему не известно

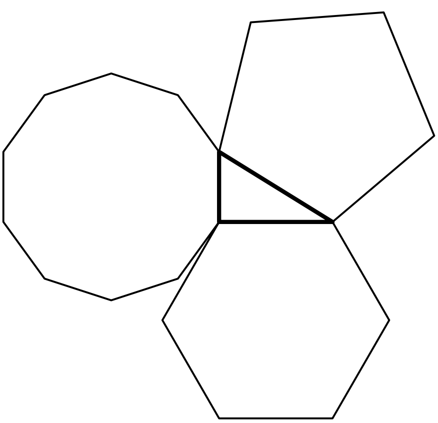


Рис. 1.

геометрическое доказательство этого соотношения. А. А. Заславский предоставил редакции такое доказательство, оно приводится ниже.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ — правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса r. Проведем диагональ A_1A_4 и отложим на ее продолжении отрезок $A_4B = A_1A_2$ (рис. 2). Прямая BA_3 касается описанной около десятиугольника окружности, а отрезок BA_3 равен диагонали A_4A_2, т. е. стороне вписанного в эту окружность правильного пятиугольника. Следовательно, по теореме о квадрате касательной

$$BA_3^2 = BA_4 \cdot BA_1 = A_1A_2(A_1A_2 + A_1A_4) = A_1A_2^2 + A_1A_2 \cdot A_1A_4,$$

и, значит, соотношение (1) равносильно соотношению $A_1A_2 \cdot A_1A_4 = r^2$.

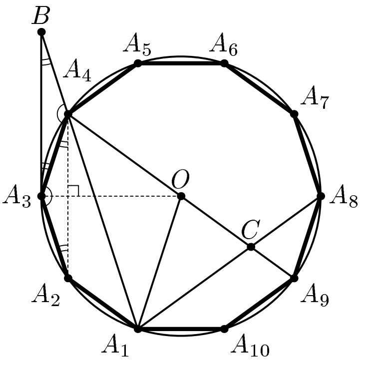


Рис. 2.

Пусть диагонали A_4A_9 и A_1A_8 пересекаются в точке C. Тогда

$$\angle A_4A_1C = \angle A_1CA_4 = 2\pi/5 = \angle A_1OC.$$

Поэтому $A_4C = A_1A_4$, $A_1C = A_1O = r$, и из подобия треугольников A_1A_4C и CA_1O следует требуемое равенство.

Список литературы

[1] Адамар Ж. *Элементарная геометрия.* Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948. С. 159–160.

[2] Адлер А. *Теория геометрических построений.* Пер. с нем. под ред. С. О. Шатуновского. Одесса: Mathesis, 1910.

[3] Граве Д. А. *Трактат по алгебраическому анализу.* Том второй. Исторический обзор. Киев: Изд-во АН УССР, 1939. Гл. III. Группа многогранников. С. 52–73.

Формула для объема тетраэдра

Любопытную формулу, выражающую объем тетраэдра через длины его ребер, прислал С. Маркелов.

Объем тетраэдра с ребрами U, V, W, u, v, w (первые 3 ребра образуют треугольник, ребро u противолежит ребру U и т. д.) можно посчитать следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (w - U + v)(U + v + w); \quad & x &= (U - v + w)(v - w + U); \\ Y &= (u - V + w)(V + w + u); \quad & y &= (V - w + u)(w - u + V); \\ Z &= (v - W + u)(W + u + v); \quad & z &= (W - u + v)(u - v + W); \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{xYZ};\ b = \sqrt{yZX};\ c = \sqrt{zXY};\ d = \sqrt{xyz};$$

$$\text{Объём} = \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}.$$

Эту формулу можно рассматривать как трехмерный аналог формулы Герона. С. Маркелов пишет, что геометрический смысл этой формулы ему неизвестен (ее правильность можно проверить, например, с помощью программы Maple).

Возможно, кому-то из читателей удастся прояснить смысл этого загадочного соотношения?

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдется один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдется цепочка из 12 вложенных людоедов. (*В. Сендеров*)

2. Дана матрица ортогонального преобразования (a_{ij}) размера 3×3, причем все $a_{ij} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) = (a_{ij}^{-1})$. Докажите, что $\det B = 0$. (*А. Джумадильдаев*)

3. Докажите, что система уравнений с n параметрами $a_1, \ldots, a_n$
$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0, \\ \ldots \\ a_1x_1^n + \cdots + a_nx_n^n = 0 \end{cases}$$
имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда сумма некоторых a_i равна 0. (*В. Доценко*)

4. а) Можно ли разбить пространство на окружности? А плоскость?

   б) Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы любая точка была покрыта ровно три раза? А два раза? (*А. Белов*)

5. Двое играют на клетчатой ленте в следующую игру. Первый куда угодно ставит два крестика, второй — один нолик. Цель первого — поставить 100 крестиков в ряд, цель второго — ему помешать.

а) Докажите, что первый может выиграть.

б) Может ли он выиграть, сделав 2^{45} ходов?

в)* 2^{90} ходов? (*А. Канель*)

6. t_k — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд $\sum(1+t_{k+1})/(kt_k)$ расходится. (*Фольклор*)

7. Пусть G — бесконечный ориентированный граф, $V(n)$ — число вершин, в которые можно попасть из фиксированной вершины O не более чем за n шагов. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} V(n)/n^2 = 0$, то найдется вершина графа, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит. (*Фольклор*)

8. Аналитическая функция (т. е. которая разлагается в каждой точке во всюду сходящийся ряд Тейлора) принимает в рациональных точках рациональные значения. Верно ли, что она — многочлен? (*Фольклор*)

9. Дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники

   а) не перекрывались;

   б) покрывали внутренность многоугольника. (*В. Произволов*)

10. Для тройки прямых можно определить окружность — окружность, описанную около соответствующего треугольника. Для четверки прямых общего положения можно определить точку — как пересечение всех окружностей троек прямых (исходная четверка без одной). Для пятерки прямых можно определить окружность — как окружность, проходящую через все точки четверок и т.д. Докажите, что вся эта цепочка определений корректна. (*Фольклор*)

11. Рассматриваются слова от букв русского алфавита. Слова вида sut и $suut$ имеют одинаковый смысл (здесь s, u, t — произвольные слова, возможно, пустые). Докажите, что количество различных смыслов конечно. (*Фольклор*)

12. Докажите, что $\inf\limits_{x_i>0} S_n(2) = 6$, где

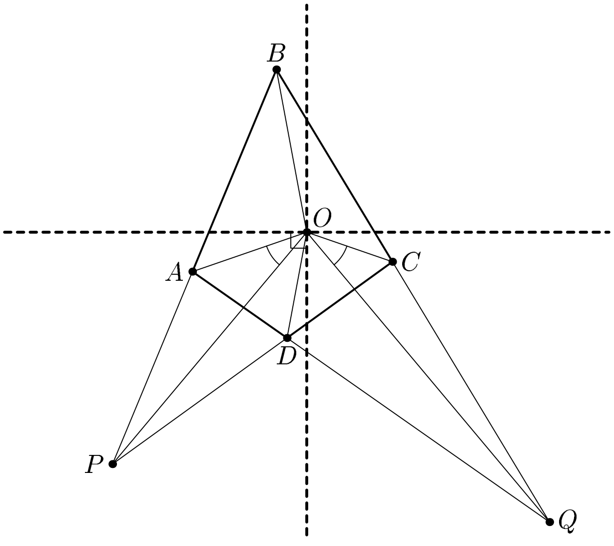
$$S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+3}};\ x_i > 0;\ x_{i+n} = x_i;\ n \geqslant 6.$$

(*С. Чимэдцэрэн*)

Исправления

В задачнике №2 «Математического Просвещения» условие задачи 2.10 (автор — С. Маркелов) было приведено неверно. Была также была допущена ошибка в №5 при формулировке задачи 5.2 (автор — А. Я. Белов). Приводим правильные условия этих задач и предлагаем читателям попробовать свои силы в их решении.

2.10. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка O, что $\angle AOP = \angle COQ$, где P и Q — точки пересечения лучей BA, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны друг другу.



5.2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг?

Задачи Гельфанда и Кириллова

А. Г. Кулаков любезно предоставил редакции «Математического Просвещения» большой архив собранных им задач, предлагавшихся студентам мехмата в 1970-е годы. Здесь мы приводим небольшую часть этого архива.

Задачи И. М. Гельфанда

1. Докажите, что существует единственная функция $x \mapsto \Gamma(x)$ для $x > 0$, такая что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и $\ln \Gamma(x)$ выпукла вниз.

2. Функция f задана на $\mathbb{R}$, причем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| = M_1.$$

Какие значения может принимать $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$?

3. Разложить в ряд по степеням $1/n$ выражение $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln n$.

4. $0 < x < \pi/2$, $x = x_0$, $\sin x_{n-1} = x_n$. Найти сильную асимптотику x_n.

5. Посчитать $\int_0^1 \sin 1000x \cdot e^{-x^2}\, dx$.

6. «Углом» между двумя плоскостями в $\mathbb{R}^n$ назовем полный набор инвариантов относительно движений $\mathbb{R}^n$. Описать «угол».

7. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ — самосопряженный оператор со спектром $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ — одномерный самосопряженный оператор (т. е. $\operatorname{rg} B = 1$). Пусть $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ — спектр оператора $A + B$. Доказать, что числа $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ перемежаются.

8. Для любого выпуклого центрально-симметричного множества на плоскости и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N и сечение N-мерного куба 2-мерной плоскостью такое, что в сечении получается множество, ε-близкое к заданному.

Задачи А. А. Кириллова

9. Функция $f \in C^n(\mathbb{R})$ называется «функцией класса n», если пространство, натянутое на $\{f(x+t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ n-мерно. Найти все функции класса $1, \ldots, n$.

10. Найти функции класса n

а) на окружности;

б) для вершин куба.

Решения задач из предыдущих выпусков

1.1. Условие. Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля?

Решение. Ответ: могут.

Задача напоминает шахматный этюд и ее решение распадается на несколько этапов.

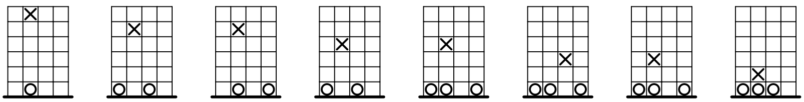
1. Понижение размерности. Ладьи, одна за другой, делают ходы в одном направлении на очень большое расстояние (превышающее общее число ходов в излагаемом алгоритме). Ясно, что по крайней мере половина ладей успеет сделать такой ход. Без ограничения общности считаем, что эти ходы делаются вдоль оси Oz и что z-координаты всех ладей после этого этапа различны. На следующих этапах можно игнорировать значения z-координат всех фигур, так что в дальнейшем идет по сути двумерная игра. Поэтому далее мы будем говорить о фигурах так, как если бы они находились в плоскости Oxy, имея в виду проекцию их положений в пространстве вдоль Oz.

Двумерная игра, к которой свелось матование короля в пространстве, состоит в следующем. По плоскости перемещается король и N_1 штук ладей ($N_1 \leqslant 500$). Король не имеет права стать на клетку, занятую ладьей. Цель ладей — добиться того, чтобы король не мог сделать хода. Эта игра напоминает известную игру «окружение десанта» не только внешне — для локализации используется основная идея построения выигрышной стратегии в «окружении десанта».

2. Локализация. На этапе локализации ладьи достигают более слабой цели, чем указанная выше, — король не может уйти «в бесконечность». Считаем, что король в начале второго этапа находится в клетке с координатами $(0;0)$. Ладьи размещаются и в дальнейшем ходят так, чтобы король в течение всей остальной игры гарантированно находился внутри квадрата размером $L \times L$ с центром в начале координат. Стратегия локализации будет обладать тем свойством, что, даже пропуская некоторые ходы (не реже чем один раз за L ходов), ладьи могут удерживать короля в указанной области.

Первыми ходами $13 \times 4 + 7 \times 4 = 80$ ладей размещаются так, чтобы занимать угловые клетки квадрата $L \times L$ и по 6 клеток вдоль сторон этого квадрата рядом с угловой, а также дополнительно по 7 клеток на каждой из сторон. Полагая $L = 332 \geqslant 2(2 \times 80 + 6)$, можно гарантировать, что король к концу этого размещения будет находиться на расстоянии 6 или больше от периметра квадрата.

Каждая семерка ладей на стороне квадрата не выпускает короля за эту сторону. Стратегия их действий (скажем, на нижней стороне квадрата) такова, что перед каждым ходом короля, когда он находится на расстоянии 5 или меньше от стороны, должна иметь место (с точностью до отражения относительно вертикали) одна из следующих позиций (король отмечен крестиком, ладьи — ноликами, отмеченные нолики обязательно присутствуют, но могут быть и другие). Расположение ладей в углах квадрата гарантирует, что на любой ход короля требуется ответ не более чем одной из семерок.



Заметим, что для реализации указанной стратегии достаточно 3 ладей на стороне; однако эта стратегия не гарантирует, что время от времени ладьи могут пропускать ход. Более детальный анализ приведенных позиций показывает, что, используя 7 ладей, можно время от времени пропускать ход, если только король не движется по самой нижней горизонтали в одну сторону. Но в этом последнем случае король через $\leqslant L$ ходов достигнет угла и вынужден будет повернуть или потратить лишний ход, чтобы угрожать следующей стороне. Это дает возможность пропуска хода не реже, чем раз за L ходов.

3. Деление пополам. Размер области, в которой находится король, последовательными итерациями уменьшается до прямоугольника размером $L \times L'$. Для этого, как и на последнем этапе, используется указанная выше возможность время от времени делать ходы, не относящиеся к стратегии локализации.

Используя $13 \times 2 + 7 = 33$ дополнительных ладьи, мы сужаем текущий прямоугольник путем построения новой стороны прямоугольника, параллельно оси Ox. Чтобы поставить ладьи на указанные позиции, нам потребуется 33 хода. (Не считая дополнительных 33 ходов в самом начале этапа, чтобы установить ладьи параллельно нужному размещению.) Значит, возможно сузить область локализации до прямоугольника $L \times L' = 332 \times 79$.

4. «Загонная охота». Прямоугольник из $2 \times L$ ладей («загонщики») движется из самого левого положения в прямоугольнике $L \times L'$ и до самого правого. Левый ряд ладей последовательно (сверху вниз) увеличивает значение своих x-координат на 2. Легко видеть, что x-координата короля должна быть больше x-координат загонщиков. Таким образом, после

$\leqslant L^2L'$ ходов область, в которой гарантированно находится король, станет пустым множеством. Это означает, что король к тому времени будет заматован.

Подсчитаем использованное число ладей. Оно равно

$$13 \times 4 + 7 \times 4 + \max(13 \times 2 + 7,79 \times 2) = 238.$$

(*А. Я. Белов*)

1.5. Условие. Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

Решение. Ответ: всегда.

Напомним, что два множества называются равными (или конгруэнтными), если существует движение (т. е. отображение, сохраняющее расстояния), при котором первое множество переходит во второе, а при обратном отображении второе переходит в первое.

Исследуем сперва одномерный случай. Пусть конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разбивает отрезок $[A, B]$ на два конгруэнтных множества — Φ_1 и Φ_2. Докажем, что одна из точек — центр отрезка.

Как известно, движение прямой — это либо сдвиг $T_a x = x + a$, либо отражение прямой относительно некоторой точки O (если O имеет координату c, то это отображение таково: $x \to 2c - x$). Раскрасим отрезки первого множества в чёрный, а второго — в белый цвет. Пусть сдвиг T_a, $a > 0$, переводит первое множество во второе. Поскольку первый отрезок $[A, A_1]$ при отображении T_{-a} оказывается вне $[A, B]$, он принадлежит Φ_1, а $T_a[A, A_1]$ принадлежит Φ_2. Если при этом отрезок $[A, B]$ исчерпан, то A_1 — центр отрезка, если же нет, то мы отбрасываем отрезок $[A, A_2]$ и повторяем рассуждение. Через несколько шагов всё закончится и окажется, что чёрные и белые отрезки равной длины a чередуются, и, значит, середина отрезка является общей границей двух множеств. Если же это движение — отражение, то оно не может быть отражением не центральной точки O (а если O центральная, она принадлежит обоим множествам), ибо иначе образ самого удалённого от O конца отрезка не принадлежал бы ни Φ_1, ни Φ_2. Для отрезка всё доказано.

Переходим к плоскому случаю. Известна теорема Шаля, согласно которой движение на плоскости это либо сдвиг T_a на вектор a, либо поворот $R_O(\varphi)$ с центром в точке O на угол φ, либо скользящая симметрия, т. е. композиция сдвига и симметрии относительно некоторой оси, инвариантной относительно сдвига. Если движение — это сдвиг или скользящая симметрия относительно оси, проходящей через центр Q квадрата K, то проведя прямую, инвариантную относительно сдвига, (или ось скользящей симметрии) через центр, получим в пересечении этой прямой с K отрезок, к которому применимо одномерное рассуждение. Если же движение есть скользящая симметрия с осью l, не проходящей через центр, то окажется, что вершина квадрата, наиболее удалённая от l и лежащая в полуплоскости, содержащей центр квадрата, не может принадлежать ни Φ_1, ни Φ_2.

Осталось рассмотреть случай, когда движение — это поворот $R_O(\varphi)$.

Если центр поворота O не принадлежит квадрату K, то ближайшая к O точка границы квадрата при повороте на угол $\pm\varphi$ переходит в точки, не принадлежащие квадрату. Значит, эта точка не может принадлежать ни Φ_1, ни Φ_2. Противоречие. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в том случае, когда O не лежит на серединном перпендикуляре к стороне квадрата и потому есть единственная вершина квадрата K на максимальном расстоянии от O.

Осталось рассмотреть случай, когда O лежит на серединном перпендикуляре к стороне квадрата, но не совпадает с его центром. Легко убедиться, что в этом случае угол поворота φ равен углу $\angle AOB$, где A и B — две самые далекие от точки O вершины квадрата. Но тогда, если C — отличная от A и B вершина квадрата, то $R_O(\varphi)^{\pm 1}(C) = R_O(\pm\varphi)(C) \notin K$. Получаем противоречие: $C \notin \Phi_1 \cup \Phi_2 = K$.

Задача решена.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно получить утвердительный ответ на вопрос задачи для произвольной выпуклой центрально-симметричной фигуры на плоскости, а также для сфер и кубов в n-мерном пространстве. Доказательство общего утверждения для n-мерного центрально-симметричного выпуклого тела мне неизвестно.

(*А. Я. Канель*)

2.7. Условие. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$?

Решение. Ответ: конечно.

Многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым, если он не разлагается в произведение многочленов с целыми коэффициентами, отличных от константы. Пусть P_0 — неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами, старшим коэффициентом единица, все корни которого вещественны и лежат на отрезке $[-2; 2]$. Докажем, что эти корни имеют вид $2\cos\dfrac{2p\pi}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть корни многочлена P_0 — это $\{e^{i\varphi_k} + e^{-i\varphi_k}\}_{k=1}^{n}$, т. е. $P_0(x) = \Pi_{k=1}^{n}(x - (e^{i\varphi_k} + e^{-i\varphi_k}))$. Рассмотрим многочлен P_1, имеющий корни $\{e^{2i\varphi_k}+e^{-2i\varphi_k}\}_{k=1}^{n}$ и старший коэффициент единица. Он имеет целочисленные коэффициенты, ибо, как легко видеть, $P_1(x)=Q(x+2)$, где $Q(x)=P_0(\sqrt{x})P_0(-\sqrt{x})$. Далее аналогично построим многочлены P_2, $P_3,\ldots$ Из теоремы Виета, согласно которой если

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

то

$$a_k=(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k},$$

следует, что все коэффициенты всех многочленов P_j ограничены, а значит, их конечное число. Таким образом, для некоторых m и l верно равенство $P_{m+l}=P_l$. Тогда получаем в силу конечности корней, что $\cos\varphi_j = \cos(2^{k_j}\varphi_j)$, т.е. $\varphi_j=\dfrac{2\pi p_j}{q}$, что и требовалось.

Теперь утверждение задачи вытекает из следующего факта:

Лемма. *Пусть P — неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $z=2\cos\dfrac{2\pi p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда множество $\mathcal{M}$ его корней таково:*

$$\mathcal{M}=\Big\{2\cos\frac{2m\pi}{q}\mid \text{НОД}(m,q)=1\Big\}.$$

При этом все коэффициенты многочлена со множеством корней $\mathcal{M}$ и старшим коэффициентом единица целые.

Если допустить, что многочленов, удовлетворяющих условию задачи, бесконечно много, то должны найтись неприводимые полиномы, имеющие корни вида $2\cos\dfrac{2\pi p}{q}$ со сколь угодно большими q. А это противоречит тому, что при больших q выполняется неравенство $2\cos\dfrac{2\pi}{q}>1{,}99$.

Осталось доказать лемму. Заметим, что корень z принадлежит полю деления круга, порожденному корнем q-й степени из единицы $\xi=e^{2\pi i/q}$, так как $2\cos\dfrac{2m\pi}{q}q=\xi^m+\xi^{-m}$. Теперь лемма вытекает из двух известных свойств полей деления круга (см., например, Б.Л. ван дер Варден «Алгебра», §42, §60). Во-первых, многочлен Φ_q, корнями которого являются в точности *примитивные корни* q-й степени из единицы (т.е. числа вида $e^{2\pi im/q}$, НОД$(m,q)=1$), имеет целые коэффициенты и неприводим. Во-вторых, отображение $\xi\mapsto\xi^m$, где НОД$(m,q)=1$, продолжается до автоморфизма поля деления круга. Поэтому $\mathcal{M}$ заведомо содержится среди корней P. Осталось показать, что многочлен $\tilde{P}$ с множеством корней $\mathcal{M}$ имеет целые коэффициенты. Заметим, что по теореме Виета коэффициенты $\tilde{P}$ выражаются как симметрические многочлены от корней из единицы с целыми коэффициентами. Тогда, в силу основной теоремы о симметрических многочленах (см. там же, §33), коэффициенты $\tilde{P}$ выражаются как многочлены с целыми коэффициентами от коэффициентов Φ_q.

Замечание 1. Как видно из приведенного решения, если вместо отрезка $[-1{,}99; +1{,}99]$ взять интервал $(-2; +2)$, то аналогичное множество многочленов будет бесконечным.

Замечание 2. Интересен вопрос: для каких отрезков вещественной оси справедливо утверждение данной задачи?

(А. Я. Канель)

2.8. Условие. Выяснить, равномерно ли сходится на отрезке $[0; 1]$ ряд

$$\sum \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$

Решение. Докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1+x^k)^k}, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

равномерно сходится.

Достаточно доказать равномерную сходимость на некотором полуинтервале $(r, 1]$, $r \in (0,1)$, ибо на каждом отрезке вида $[0, r]$, $0 < r < 1$, ряд (1) мажорируется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k$ и потому равномерно сходится. Введем функцию

$$f(x,t) = \frac{x^t}{(1+x^t)^t}, \quad x \in [0,1], \quad t \in [2, \infty)$$

($f(x,k)$ — это члены ряда (1)).

Лемма 1. *Справедливо неравенство* $f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{(t-1)}$, $x \in [0,1]$, $t \geqslant 2$.

Доказательство. Максимум функции вычисляется обычным способом; он равен $\dfrac{1}{t-1}(1-\dfrac{1}{t})^t < \dfrac{1}{t-1}$, что и требовалось.

Лемма 2. *Для любого* $x \in (0,1]$ *функция* $t \mapsto f(x,t)$ *имеет при* $t \in [2, \infty)$ *не более двух точек локального экстремума.*

Доказательство. Фиксируем $x \in (0,1]$ и положим $u(t) = \ln f(x,t)$. Имеем

$$u'(t) = \ln x - \ln(1+x^t) - tx^t(1+x^t)^{-1}\ln x,$$
$$u''(t) = x^t(1+x^t)^{-2}\ln(1/x)(2 + 2x^t + t\ln x).$$

На промежутке $[2,\infty)$ функция $t \mapsto 2 + 2x^t + t\ln x$ строго убывает, а потому имеет не более одного нуля. Следовательно, функция $u''(t)$ также имеет не более одного нуля. Но тогда функция $u'(t)$ имеет не более двух нулей (ибо между любыми двумя нулями функции $u'(t)$ лежит нуль функции $u''(t)$). Так как $f'_x(x,t) = f(x,t)u'(t)$, то и $f'_x(x,t)$ имеет не более двух нулей на $[2,\infty)$.

Лемма 3. *Равномерная сходимость ряда* (1) *равносильна равномерной сходимости интеграла*

$$\int_2^\infty f(x,t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Если функция $g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где a, b — целые числа, монотонна, то разность $\sum\limits_{k=a}^{b} g(k) - \int\limits_a^b g(t)\,dt$ заключена между величинами $g(a), g(b)$. Если функция $g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, имеет не более m интервалов монотонности, то применение этого факта к каждому из этих интервалов (с последующим сложением неравенств) приводит к неравенству

$$\Bigl|\sum_{k=a}^{b} g(k) - \int_a^b g(t)\,dt\Bigr| \leqslant m \max_{t\in[a,b]} |g(t)|.$$

В нашем случае (здесь используем леммы 1, 2) для целого $A \geqslant 2$ имеем

$$\Bigl|\sum_{k=A}^{\infty} f(x,k) - \int_A^\infty f(x,t)\,dt\Bigr| \leqslant \frac{3}{A-1}\,.$$

Отсюда следует, что хвосты ряда (1) и интеграла (2) бесконечно близки при $A \to \infty$. Это доказывает лемму.

Итак, осталось доказать равномерную сходимость интеграла (2). Дело сводится к оценке его хвоста, т. е. величины $r(x,A) = \frac{1}{2}\int\limits_{2A}^{\infty} f(x,t)\,dt$ (множитель $\frac{1}{2}$ и $2A$ вместо A удобны для дальнейшего). Пользуясь очевидным неравенством $1 + s \geqslant e^{s/2}$, $s \in [0,1]$ (оно следует из того, что функция $1 + s - e^{s/2}$ возрастает на $[0,1]$ и равна нулю при $s = 0$), получаем, что $r(x,A) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{2A}^{\infty} x^t e^{-tx^t/2}\,dt$. После замены $x^t = z$ и перехода от x к переменной $H = (2\ln(1/x))^{-1}$ перепишем правую часть неравенства в виде $R(H,A) = H\int\limits_0^{e^{-A/H}} z^{Hz}\,dz$.

Достаточно доказать, что функция $R(H,A)$ стремится к нулю при $A \to \infty$ равномерно относительно $H \in [2,\infty)$.

Функция $z \mapsto z^z$ принимает максимальное значение 1 при $z = 0$, $z = 1$. Поэтому резонно изучить интегралы от функции z^{Hz} по отрезкам, в которых играет роль одна из точек $0, 1$.

Лемма 4. 1) *Справедливо неравенство*

$$H\int\limits_0^b z^{Hz}dz \leqslant \frac{M(b)}{\ln H} \qquad \text{при } H \geqslant 2,\ 0 < b < 1 \tag{3}$$

(*здесь* $M(b)$, $b \in [0,1)$, — *некоторая функция*).

2) *Если* $0 < a < b < 1$, *то*

$$H\int\limits_a^b z^{Hz}dz \leqslant a^{-1}b^{Ha}. \tag{4}$$

Добавим к неравенствам (3), (4) очевидную оценку

$$H\int\limits_0^b z^{Hz}dz \leqslant Hb \tag{5}$$

(следует из того, что подынтегральная функция в (5) не превосходит единицы).

Доказательство. 1) Взяв любое $c \in (0, b)$ имеем

$$H\int\limits_0^b z^{Hz}\,dz \leqslant H\int\limits_0^c c^{Hz}\,dz + H\int\limits_c^b b^{Hz}\,dz <$$

$$< H\left(\int\limits_0^\infty c^{Hz}\,dz + \int\limits_c^\infty b^{Hz}\,dz\right) = \frac{1}{\ln(1/c)} + \frac{b^{Hc}}{\ln(1/b)}\,.$$

Взяв $c = bH^{-1/2}$, получаем оценку (3) (поясним лишь, что при таком выборе числа c величина b^{Hc}, входящая в правую часть последней оценки превращается в $b^{b\sqrt{H}}$, что меньше величины $\dfrac{L}{\ln H}$ с константой L, зависящей от b).

2) Имеем

$$H\int\limits_a^b z^{Hz}\,dz \leqslant H\int\limits_a^b z^{Ha}\,dz \leqslant H\int\limits_0^b z^{Ha}\,dz = H(Ha+1)^{-1}b^{Ha+1} < a^{-1}b^{Ha},$$

что и требуется.

Лемма 5. *Справедливо неравенство* $R(H,A) \leqslant M_0(\ln A)^{-1}$ *при* $A \geqslant 2$, $H \geqslant 2$, *здесь* M_0 — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. 1) Если $H \leqslant \sqrt{A}$, то

$$R(H,A) < He^{-A/H} \leqslant \sqrt{A}e^{-\sqrt{A}}.$$

2) Если $\sqrt{A} \leqslant H \leqslant A$, то $e^{-A/H} < e^{-1} < 1/2$. Применяя неравенство (3), получаем

$$R(H,A) \leqslant M(1/2)(\ln H)^{-1} \leqslant 2M(1/2)(\ln A)^{-1}.$$

3) Если $H > A$, то $e^{-A/H} \geqslant e^{-1} > 1/3$. Применяя (3), (4), получаем

$$R(H,A) = H\int\limits_0^{1/3} z^{Hz}\,dz + H\int\limits_{1/3}^{e^{-A/H}} z^{Hz}\,dz \leqslant \frac{M(1/3)}{\ln H} + 3e^{-A/3} < \frac{M}{\ln A}$$

(M — абсолютная постоянная).

Полученные неравенства для $R(H,A)$ доказывают лемму.

Из леммы следует равномерная сходимость интеграла (2) (и ряда (1)).

(*Р. С. Исмагилов*)

2.9. Условие. Даны матрицы $A_1,\ldots,A_k$ размера $n\times n$. Известно, что все произведения вида $A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_h}$, где $h \leqslant n$ нильпотентны. Докажите, что любое произведение вида $A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_{n^2}}$ равно нулю.

Решение. Пусть A обозначает алгебру, порожденную матрицами a_i, $|v|$ есть длина слова v, $u \sqsubset v$ означает, что u есть подслово v. $(u)_k$ есть начальный отрезок длины k слова u. Алгебра называется *ненильпотентной*, если в ней есть ненулевое произведение любой длины.

Каждому слову в алфавите $\{a_i\}$ соответствует матрица, являющаяся произведением образующих, составляющих это слово.

Сперва покажем, что если есть ненулевое произведение $a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{n^2}}$, то A ненильпотентна. В самом деле, пространство всех матриц порядка n имеет размерность n^2. Поэтому матрицы $v_0 = E$, $v_1 = a_{i_1}$, $v_2 = a_{i_1}a_{i_2}, \ldots$, $v_{n^2} = a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{n^2}}$ линейно зависимы. Но тогда одна из v_i есть линейная комбинация слов бо́льшей длины, и замена подслова $v_i \sqsubset v_{n^2}$ на некоторое слово бо́льшей длины дает ненулевую матрицу. Поэтому существует ненулевое слово (соответствующее ненулевой матрице) длины бо́льшей, чем n^2. С получившимся словом можно провести аналогичные рассуждения и т. д. Таким образом, возникают ненулевые слова любой длины.

Отметим, что константу n^2 можно заменить на n, если воспользоваться следующей (довольно трудной) теоремой из линейной алгебры:

Любая нильпотентная подалгебра алгебры матриц приводится к верхнетреугольному виду (на главной диагонали и под ней — нули).

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, и алгебра A ненильпотентна.

Под *сверхсловом в A* понимается бесконечное вправо произведение образующих алгебры A. Результат такого произведения не определен, но определено *равенство* или *неравенство нулю сверхслова* как существование или несуществование нулевого подслова.

Поскольку A есть подалгебра алгебры матриц порядка n, она действует на n-мерном векторном пространстве V и для любого вектора $\vec{v} \in V$ и сверхслова W в A определено понятие *равенства нулю* произведения $\vec{v}W$. Ясно, что если $W \neq 0$, то для некоторого $\vec{v} \in V$ выполняется неравенство $\vec{v}W \neq 0$.

Упорядочим образующие $a_1 \prec \cdots \prec a_s$. Этот порядок индуцирует *лексикографический порядок* на множестве слов (и сверхслов): $u \prec v$ если при некотором $k \geqslant 0$ начальные участки длины k слов u и v совпадают, а $(k+1)$-я буква u меньше $(k+1)$-й буквы v. Если u есть начало v или наоборот, то u и v *лексикографически несравнимы.*

Рассмотрим теперь лексикографически минимальное ненулевое сверхслово W.

Такое существует. В самом деле. Назовем слово u *неограниченно продолжаемым*, если оно служит началом сколь угодно длинного ненулевого слова. Ясно, что минимальное неограниченно продолжаемое слово длины m при любом m служит началом минимального неограниченно продолжаемого слова длины $m+1$, и объединение минимальных неограниченно продолжаемых слов дает минимальное сверхслово W.

Положим $W = (W)_i W^{(i)}$, где $(W)_i$ — начало W длины i. Если $i < j$, то $(W)_j = (W)_i \tau_{ij}$, $W^{(i)} = \tau_{ij} W^{(j)}$, где τ_{ij} — слово длины $j-i$.

Разберем два случая.

Случай 1. При некотором $j = i + s$, $s \leqslant n$, выполняется равенство $W^{(i)} = W^{(j)}$.

Тогда $W^{(i)} = \tau_{ij} W^{(j)} = W^{(j)}$; $|\tau_{ij}| = s \leqslant n$ и потому для любого $k \in \mathbb{N}$ $\tau_{ij}^k W^{(j)} = \tau_{ij}^{k+1} W^{(j)}$. В этом случае $W^{(j)}$ есть периодическая последовательность τ_{ij}^∞ с периодом, не превосходящим n, и сверхслово $W = 0$, что противоречит выбору W.

Случай 2. Все сверхслова $W^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, различны. Пусть $\vec{v}W \neq 0$. Поскольку $\dim V = n$, набор из $n+1$ вектора $\vec{v}_0 = \vec{v} = \vec{v}(W)_0$; $\vec{v}_1 = \vec{v}(W)_1$, $\ldots$, $\vec{v}_n = \vec{v}(W)_n$ линейно зависим, т. е. выполняется равенство

$$\sum_{k\colon\ \alpha_k \neq 0} \alpha_k \vec{v}_{i_k} = 0 \tag{1}$$

Рассмотрим такое m, что члену суммы (1) с индексом m отвечает максимальное сверхслово $W^{(i_m)}$ среди прочих ее членов. Равенство (1) можно переписать в виде:

$$\vec{v}(W)_{i_m} = \sum_{k\neq m;\ \alpha_k\neq 0} \frac{\alpha_k}{\alpha_m}\vec{v}(W)_{i_k} \tag{2}$$

Так как $\vec{v}(W)_{i_m}W^{(i_m)} = vW \neq 0$, одно из произведений $\vec{v}(W)_{i_k}W^{(i_m)} \neq$ $\neq 0$ и $k \neq m$. Но тогда $0 \neq U = (W)_{i_k}W^{(i_m)} \prec (W)_{i_k}W^{(i_m)} = W$.

Мы получили противоречие с минимальностью сверхслова W. Задача решена.

Замечание. Эта задача была поставлена известным израильским математиком С. Амицуром, а также И. П. Шестаковым и простояла около 10 лет. В конце концов, были получено несколько ее решений, базировавшихся на различных подходах. См. Уфнаровский В. А. *Теорема о независимости и ее следствия.* Мат. сб., 1985, т. 128, №1, с. 124–132. Чекану Г. П. *О локальной конечности алгебр.* Мат. исслед. (Кишинев), 1988, №105, с. 153–171. А также Белов А. Я. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n.* Мат. сб., 1988, т. 135, №31, с. 373–384.

Данное доказательство было впервые опубликовано в работе Belov A. *About height theorem.* Comm. in Algebra, 1995, vol 23, No 9, p. 3551–3553.

(*А. Я. Канель*)

3.7. Условие. Две кривые второго порядка проходят через точки A, B, C, D. Через точку O пересечения прямых AC и BD проведены хорды KM, LN одной кривой и $K'M'$, $L'N'$ другой. Прямые KL и $K'L'$ пересекаются в точке P, MN и $M'N'$ — в точке Q. Доказать, что точки P, Q, O лежат на одной прямой.

Решение. Пусть φ — такое проективное преобразование, что

$$\varphi(A) = C, \quad \varphi(C) = A, \quad \varphi(B) = D, \quad \varphi(D) = B.$$

Докажем, что преобразование φ переводит в себя прямые, проходящие через точку O, причём $\varphi(X)$ — вторая точка пересечения прямой OX с коникой, проходящей через точки A, B, C, D, X.

Обозначим через R точку пересечения прямых AB и CD, а через S — точку пересечения прямых AD и BC.

Преобразование φ сопряжено центральной симметрии с центром O (представьте, что RS — бесконечно удалённая прямая, тогда $ABCD$ — параллелограмм). Поэтому оно оставляет на месте точку O и каждую точку прямой RS. Значит, φ переводит в себя любую прямую, проходящую через O.

Пусть прямая XO пересекает прямую RS в точке I. Поскольку φ сопряжено центральной симметрии, то $[X, \varphi(X), O, I] = -1$. Но такое же условие выполняется для второй точки пересечения прямой OX с коникой, проходящей через A, B, C, D, так как RS — поляра O относительно этой коники.

Для решения задачи осталось заметить, что $\varphi(P) = Q$.

(*М. Н. Вялый*)

3.8. Условие. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному.

Решение. Нам понадобятся следующие факты из проективной геометрии:

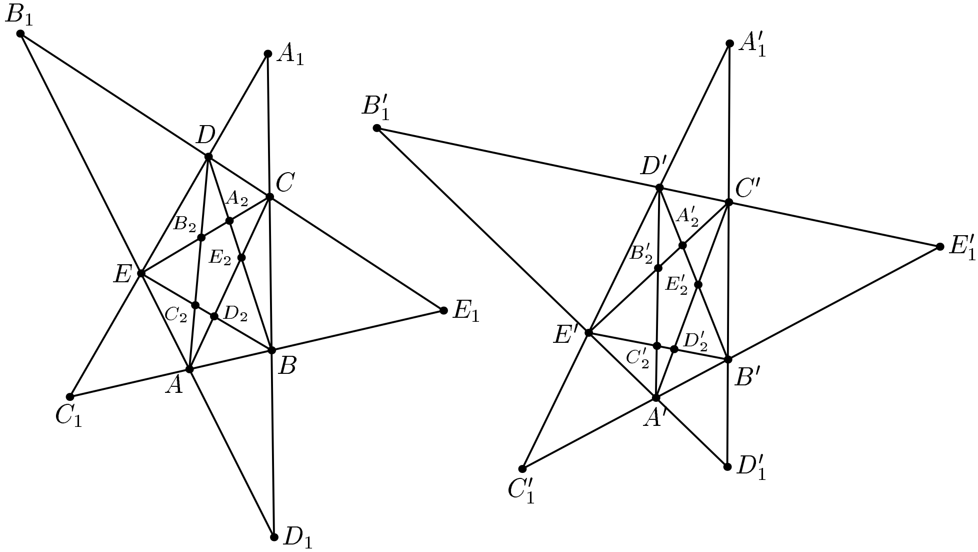
- ▷ Пусть A_1, B_1 и C_1 — три различные точки на прямой l_1, A_2, B_2 и C_2 — на прямой l_2. Тогда существует единственное проективное преобразование $f\colon l_1 \to l_2$, переводящее A_1 в A_2, B_1 в B_2, C_1 в C_2 соответственно. Если l_2 — координатная прямая, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$, $C_2 = \infty$ и $D_1 \in l_1$, то число $f(D_1)$ называется *двойным отношением* (упорядоченной) четверки точек (A_1, B_1, C_1, D_1). Одна четверка переводится в другую проективным преобразованием тогда и только тогда, когда соответствующие двойные отношения равны.
- ▷ Двойное отношение упорядоченной четверки точек, являющихся пересечениями упорядоченной четверки прямых с некоторой вспомогательной прямой не зависит от выбора вспомогательной прямой и называется *двойным отношением* четверки прямых.
- ▷ Двойные отношения различных четверок прямых, проходящих через общую четверку точек, совпадают.
- ▷ Существует и единственно проективное преобразование плоскости, переводящее упорядоченный набор вершин одного невырожденного четырехугольника в упорядоченный набор вершин другого невырожденного четырехугольника.

Из этих фактов непосредственно вытекает следующая

Лемма. *Пятиугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (вершины упорядочены) проективно эквивалентны друг другу тогда и только тогда, когда двойные отношения соответствующих четверок точек совпадают:* $(C_1ABE_1) = (C_1'A'B'E_1')$, $(C_1EDA_1) = (C_1'E'D'A_1')$.

В самом деле, переведем четырехугольник $ABDE$ в четырехугольник $A'B'D'E'$. Тогда C_1 перейдет в C_1', а, значит, и A_1 — в A_1', E_1 — в E_1'. Остается заметить, что $C = [A_1B] \cap [E_1D]$ и $C' = [A_1'B'] \cap [E_1'D']$. Лемма доказана.

Для решения задачи остается проверить совпадение двойных отношений, связанных с большим и маленьким пятиугольником. Но для каждой



пары соответствующих четверок точек можно указать четверку прямых, на которых они лежат.

Например, обе четверки точек C_1ABE_1 и EB_2A_2C лежат на четверке прямых, проходящих через точку D (см. рис). (*А. Я. Канель*)

4.1. Условие. Дано 109-значное число, в десятичной записи которого нет нулей. Докажите, что в его десятичной записи либо некоторая группа соседних цифр повторится 10 раз подряд, либо найдутся записи 10 различных 100-значных чисел.

Решение. Введем обозначения. Через AB обозначается результат приписывания к числу A числа B, соответственно, A^n обозначает результат n-кратного приписывания.

Обозначим через V исходное 109-значное число; через U_i (при $i = 0, \ldots, 9$) — 100-значное число, запись которого представляет собой участок записи V, начиная с $(i+1)$-ой по $(100+i)$-ю позицию включительно; через s_i — соответствующие начальные участки V ($s_iU_i\tau_i = V$); через t_{ij} (при $j > i$) — участок записи V с $(i+1)$-й по j-ю позицию. Длина t_{ij} равна $j - i$ и не превосходит 9.

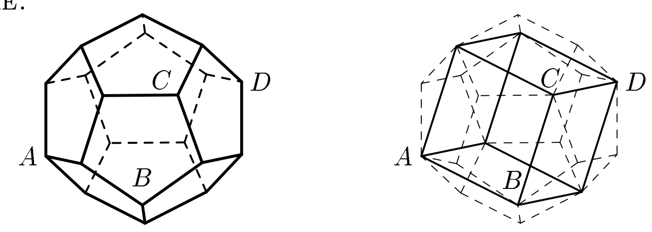
Если все числа U_i попарно различны, то утверждение задачи выполнено. Иначе при некоторых $j = i + k$, $0 < k \leqslant 9$, выполняется равенство $U_i = U_j$.

Но $V = s_iU_i\tau_i = s_it_{ij}U_j\tau_j$ и, следовательно, для некоторого h имеем $t_{ij}U_i = U_ih$. Если запись U_i есть начало записи $t_{ij}U_i$, то и при любом $k \in \mathbb{N}$ запись $t_{ij}^kU_i$ есть начало записи $t_{ij}^{k+1}U_i$. Поэтому запись числа U_i

есть начало бесконечной периодической последовательности с периодом t_{ij}, длина которого не превосходит 9. Поскольку число U_i — 100-значное, период успевает отложится 11 раз. Мы доказали несколько более сильное утверждение, чем требовалось в задаче. (*А. Я. Канель*)

4.5. Условие. Найдите угол между диагоналями AB и CD правильного додекаэдра.

Решение.



В додекаэдр можно вписать куб, сторона которого равна диагонали грани додекаэдра (правильного пятиугольника). Из рисунка видно, что угол между AB и CD равен $90°$. (*С. С. Анисов*)

4.6. Условие. а) Двое флатландцев спускаются к морю с высочайшей вершины Флатландии «Пик Кипа» — один по левому склону, другой по правому. Гора нигде не опускается ниже уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы «непрерывно» двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени — непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

Могут ли флатландцы достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря?

б) Верно ли аналогичное утверждение для нескольких гор равной высоты, с каждой из которых спускается пара флатландцев (все они должны все время находиться на одинаковой высоте)?

в) Пусть поверхность горы есть график дифференцируемой функции. Верно ли утверждение пункта а)?

Решение. Ответы: а)–б): могут, в) не всегда.

Будем использовать систему координат Oxy, в которой ось абсцисс проходит по уровню моря.

а) Пусть гора является графиком функции $y = h(x)$, причем $h(x) = 0$ при $x \leqslant -L$ и при $x \geqslant R$, а ее высочайшая вершина (глобальный максимум) имеет абсциссу 0.

Вначале рассмотрим случай $h(x)$, у графика которой нет горизонтальных участков.

На вспомогательной *фазовой плоскости* с координатами (l, r) рассмотрим прямоугольник $\Pi = \{(l,r)\colon 0 \leqslant l \leqslant L,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$, а в нем —

множество допустимых состояний пары альпинистов

$$A = \{(l, r)\colon h(-l) = h(r),\ (l, r) \in \Pi\}.$$

Легко понять, что множество A состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, так что множество V тех точек, окрестности которых в A не гомеоморфны интервалу прямой, конечно. Будем смотреть на множество A как на граф с вершинами V и ребрами — компонентами связности $A \setminus V$. (В этом графе могут быть ребра, у которых нет концов, — они соответствуют компонентам связности, гомеоморфным окружности.) Непосредственно из определений проверяется, что у этого графа есть две вершины степени 1 — $(0,0)$ и (L, R), а степени всех остальных вершин равны 4 (точка $(l_0; r_0)$ является вершиной степени 4, если у $h(x)$ есть локальные экстремумы одновременно в $-l_0$ и в r_0). Это означает, что вершины степени 1 принадлежат одной компоненте связности, что и означает возможность спуска, удовлетворяющего условию задачи.

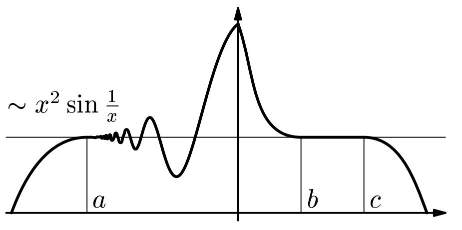
Общий случай сводится к рассмотренному выше: всякую непрерывную кусочно-линейную функцию $h(x)$ можно получить из некоторой непрерывной не постоянной на любом интервале кусочно-линейной функции $\tilde{h}(x)$, вставляя в конечное число точек $x_0, \ldots, x_N$ интервалы, на которых функция h постоянна. Спуск по графику $\tilde{h}(x)$ легко преобразуется в спуск по графику $h(x)$: каждый раз, когда одному из альпинистов нужно преодолеть горизонтальный участок, второй ждет его в точке, в которой он оказался.

б) Решение аналогичное, только нужно рассматривать $2n$-мерное фазовое пространство (n — количество гор).

в) Приведем контрпример.

Функция $h(x)$ в правой полуокрестности точки a имеет вид

$$h(x) = h_0 + (x-a)^2 \sin(x-a)^{-1},$$



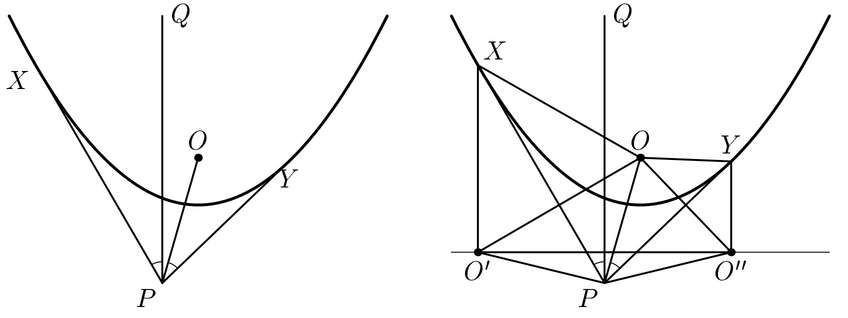
и на всем отрезке $[b, c]$ значение h равно h_0. Предположим, что спуск по такой горе возможен. Пусть абсцисса левого альпиниста в момент времени t равна $l(t)$ (непрерывная функция от t), абсцисса правого — $r(t)$, и они все время находятся на одной высоте. Обозначим $t_0 = \min\{t\colon l(t) \leqslant a\}$. Для любого полуинтервала $(t_0 - \varepsilon, t_0]$ область значений $r(t)$ содержит отрезок $[b, c]$, поэтому $r(t)$ разрывна в точке t_0.

(*Н. Н. Константинов*)

4.7. Условие. К данной параболе проведены три касательные. Докажите, что окружность, описанная около образованного ими треугольника, проходит через фокус параболы.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Пусть прямые PX и PY касаются параболы с фокусом O, PQ параллельна оси параболы. Тогда углы XPQ и OPY равны.



Рассмотрим случай, изображенный на рисунке слева (точка P лежит под директрисой параболы), из точки P остальные четыре видны в порядке Y, O, Q, X. Остальные три случая разбираются аналогично.

Построим точки O', O'', симметричные O относительно прямых PX и PY. Так как прямые XO', YO'' параллельны оси параболы, и $XO = XO'$, $YO = YO''$, точки O' и O'' лежат на директрисе параболы. При этом $PO = PO' = PO''$ и, значит, высота PQ равнобедренного треугольника $PO'O''$ является его биссектрисой, т.е. угол $O''PQ$ равен половине угла $O'PO''$. Но угол $O'PO''$ равен удвоенному углу XPY, а равенство углов XPY и $O''PQ$ равносильно доказываемому утверждению.

Обозначим точки пересечения касательных A, B, C. По лемме прямые AO, BO и CO симметричны относительно биссектрис углов A и B треугольника ABC некоторым параллельным прямым AA', BB' и CC'. Две из этих прямых, например AA' и BB', проходят вне треугольника. Но тогда $\angle AOB = \pi - \angle A'AC - \angle B'BC = \pi - (\angle A'AB + \angle B'BA - \angle CAB - - \angle CBA) = \pi - \angle ACB$, и, следовательно, точки A, B, C, O лежат на одной окружности. (*А. А. Заславский*)

5.1. Условие. В телесериале «Тайна Санты-Барбары» 15 действующих лиц. Серия называется *содержательной*, если в ней происходит одно из следующих событий. Либо кто-то узнает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то знает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то не знает тайну. Каково максимально возможное число содержательных серий? (тайна одна и первоначально ее не знает никто).

Решение. Расклассифицируем содержательные серии на три группы:

1. Когда кто-то узнает, что кто-то не знает тайну.

2. Когда кто-то узнает тайну.

3. Когда кто-то узнает, что кто-то знает тайну.

Легко убедиться, что максимальное количество серий в первой и в третьей группе не превосходит $15 \cdot 14/2$ (числа пар действующих лиц), а число серий во второй группе — 15 (числа действующих лиц). Поэтому общее число серий не превосходит $2 \cdot 15 \cdot 14/2 + 15 = 15^2 = 225$.

Соответствующий пример очевиден: сперва каждый узнает про каждого, что тот не знает тайну; затем все поочередно узнают тайну; и, наконец, каждый узнает про каждого, что тот знает тайну.

(*А. Я. Канель*)

5.3. Условие. $A_1, \ldots, A_n$ — ненулевые матрицы. Докажите, что найдется матрица B такая, что

$$BA_1BA_2 \cdot \ldots \cdot BA_nB \neq 0.$$

Решение. Будем рассматривать матрицы как операторы в k-мерном пространстве V. Пусть $\vec{v} \in V \setminus \bigcup \ker A_i$, и пусть U есть $(k-1)$-мерное подпространство V, не пересекающееся с $\bigcup\{A_i\vec{v}\}$. Легко видеть, что тогда в качестве B можно взять произвольный линейный оператор с ядром U и образом, равным одномерному пространству, порожденному $\vec{v}$.

Отметим, что если $r = \min_i \operatorname{rank} A_i$, то с помощью аналогичной конструкции можно добиться того, чтобы $\operatorname{rank} BA_1B \ldots A_nB = r$.

(*А. Я. Канель*)

5.7. Условие. G — группа без кручения, т. е. нет неединичных элементов конечного порядка. Известно, что $(ab)^n = a^n b^n$. Докажите, что группа абелева, т. е. для любых a, b выполнено $ab = ba$.

Решение. Сокращая равенство $a^n b^n = (ab)^n$ слева на a, справа на b, получаем тождество $(ba)^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1}$, из которого вместе с тождеством $a^n b^n = (ab)^n$ вытекает тождество

$$(ab)^{n(n-1)} = (a^n b^n)^{n-1} = (b^n)^{n-1} (a^n)^{n-1} = b^{n(n-1)} a^{n(n-1)}. \qquad (1)$$

Далее $(aba^{-1})^{n-1} = ab^{n-1}a^{-1}$, а с другой стороны, имеем $(aba^{-1})^{n-1} = a^{-(n-1)}b^{n-1}a^{n-1}$. Сравнивая правые части этих равенств, получаем тождество $a^{-n}b^{n-1}a^n b^{-(n-1)} = e$, где e — единичный элемент. Подставив $a = x^{-(n-1)}$, $b = y^n$ и дважды воспользовавшись (1) получаем тождество:

$$(y^{-1}x^{-1}yx)^{n(n-1)} = e \qquad (2)$$

Поскольку G — группа без кручения, отсюда следует, что $y^{-1}x^{-1}yx = e$, т. е. выполняется свойство коммутативности $xy = yx$.

(*А. Я. Канель*)

Новые издания

Книги издательства МЦНМО, выпущенные в 2001 г.

1. **Московские математические регаты.** Сост. А. Д. Блинков. — 2001. — 96 с. — Тираж 5000 экз.

Математическая регата — соревнование для школьных команд, проводящееся ежегодно. В данном сборнике представлены материалы одиннадцати состоявшихся регат: условия и решения задач, статистика и комментарии.

Книжка адресована учителям средней школы, методистам, школьникам и может быть интересна всем любителям математики.

2. В. В. Прасолов. **Задачи по планиметрии.** Изд. 4-е, доп. — 2001. — 584 с. — Тираж 5000 экз.

В книгу включены нестандартные геометрические задачи несколько повышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник содержит около 1500 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения.

Настоящее издание дополнено по сравнению с предыдущим (3-е изд. — 1995).

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов désинститутов.

3. С. Г. Гиндикин. **Рассказы о физиках и математиках.** — 2001. — 448 с. — Тираж 5000 экз.

В книге рассказано о жизни и творчестве двенадцати замечательных математиков и физиков (от XVI до XX века), работы которых в значительной мере определили лицо современной математической науки.

Это — книга для всех, от старшеклассников до взрослых: увлекательно изложенные биографии великих ученых заинтересуют самые широкие круги читателей, а те из них, кто интересуется математикой, получат удовольствие и пользу и от знакомства с конкретными научными достижениями героев книги.

Настоящее издание книги С. Г. Гиндикина более чем вдвое расширено по сравнению с предыдущим, вышедшим в 1985 году и успевшим стать библиографической редкостью.

4. Ж. Адамар. **Исследование психологии процесса изобретения в области математики.** Пер. с франц. М. А. Шаталова и О. П. Шаталовой под ред. И. Б. Погребысского. — 2001. — 128 с. — Тираж 1000 экз.

В настоящее время в результате развития психологии и смежных отраслей биологии возрос интерес к анализу творческого мышления человека. В книге известного французского математика детально рассмотрен процесс обработки информации, как в области сознательного, так и бессознательного. Значительное внимание уделено различным способам мышления, приводящим к изобретению (открытию). Книга будет интересна широкому кругу читателей.

5. В. Б. Алексеев. **Теорема Абеля в задачах и решениях.** — 2001. — 192 с. — Тираж 3000 экз.

Из этой книги читатель узнает, как решать алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени с одним неизвестным и почему для решения уравнений более высокой степени не существует общих формул (в радикалах). При этом он познакомится с двумя очень важными разделами современной математики — теорией групп и теорией функций комплексного переменного.

Книга написана на основе лекций, прочитанных в разные годы профессором Московского университета Владимиром Игоревичем Арнольдом и автором в Московской физико-математической школе-интернате №18 при МГУ.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся серьезной математикой (начиная со школьников старших классов), и не предполагает у читателя каких-либо специальных предварительных знаний. Книга может служить также пособием для работы математического кружка.

6. М. Л. Бланк. **Устойчивость и локализация в хаотической динамике.** — 2001. — 352 с. — Тираж 1000 экз.

Эргодическая теория динамических систем — область математики, интенсивно развивающаяся в последние десятилетия и находящая многочисленные приложения в различных разделах физики, техники, биологии и других наук. В монографии дается систематическое изложение операторного подхода в теории хаотических динамических систем, основанного на анализе спектральных свойств оператора Перрона–Фробениуса, описывающего динамику плотностей мер под действием динамической системы.

Для студентов, аспирантов и научных работников в области математики и математической физики.

7. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. **Как решают нестандартные задачи.** Изд. 2-е, перераб. Под редакцией В. О. Бугаенко. — 2001. — 96 с. — Тираж 5000 экз.

В книге описан ряд классических идей решения олимпиадных задач, которые для большинства школьников являются нестандартными. Каждая идея снабжена комментарием, примерами решения задач и задачами для самостоятельного решения. Приведены подборки задач олимпиадного и исследовательского типов (всего 200 задач), которые сгруппированы по классам.

Сборник адресован старшеклассникам, учителям, руководителям кружков и всем любителям математики.

8. Э. Б. Винберг. **Симметрия многочленов.** Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 11. — 2001. — 24 с. — Тираж 3000 экз.

Как и плоские фигуры или пространственные типы, многочлены могут обладать симметрией. Тип симметрии какого-либо объекта определяется набором (группой) преобразований, которые его сохраняют. Например, так называемые симметрические многочлены — это многочлены, не изменяющиеся при любой перестановке переменных.

В брошюре рассказывается о том, как описываются многочлены с данным типом симметрии, и объясняется, для чего это может понадобиться. В частности, многочлены, обладающие симметрией правильных многогранников, применяются к построению эффективных приближенных формул интегрирования на сфере.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной автором для школьников 9–11 классов 28 октября 2000 года на Малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

9. **Moscow Mathematical Journal (MMJ).** Volume 1. Number 1 – 4. — 2001.

The Moscow Mathematical Journal (MMJ) is an international quarterly published (paper and electronic) by the Independent University of Moscow and distributed worldwide by the American Mathematical Society. MMJ presents highest quality research and research-expository papers in mathematics from all over the world.

An important specific trait of the journal is that it especially encourages research-expository papers, which must contain new important results and include detailed introductions, placing the achievements in the context of other studies and explaining the motivation behind the research. The aim is to make the articles—at least the formulation of the main results and their significance—understandable to a wide mathematical audience rather than to a narrow class of specialists.

10. В. Г. Сурдин. **Динамика звездных систем.** Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 12. — 2001. — 32 с. — Тираж 5000 экз.

Из этой брошюры читатель узнает о многих фантастических достижениях астрономии, сделанных в последние десятилетия.

Текст брошюры представляет собой дополненную автором обработку записи лекции, прочитанной им для школьников 9-11 классов 11 ноября 2000 года на Малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. . .

11. О. А. Иванов. **Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы.** Учебное пособие.. — 2001. — 320 с. — Тираж 5000 экз.

Особенностью этой книги является разнообразие методов, применяемых при решении задач по школьному курсу алгебры и начал анализа, при сохранении единого подхода к их решению. Приводятся условия и решения задач контрольных и экзаменационных работ для учащихся специализированных математических классов и школ Санкт-Петербурга, в том числе варианты профильно-элитарного выпускного экзамена, а также задачи олимпиад, проводившихся математико-механическим факультетом СПбГУ, в 1990–2000 гг.

Книга предназначена для учителей специализированных школ, учащихся и их родителей, преподавателей и студентов высших, в том числе и педагогических, учебных заведений.

12. В. О. Бугаенко. **Уравнения Пелля.** Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 13. — 2001. — 32 с. — Тираж 3000 экз.

Уравнения Пелля представляют собой класс диофантовых уравнений второй степени. Ключевую роль в исследовании этих уравнений играет геометрическая лемма Минковского о выпуклом теле. Эта лемма является одним из ярких примеров связи алгебры и геометрии.

Основной результат, которому посвящена брошюра, — полное описание решений уравнений Пелля.

Текст брошюры представляет собой обработанную и расширенную запись двух лекций, прочитанных автором 19 февраля и 15 апреля 2000 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9–11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. . .

13. С. М. Гусейн-Заде. **Дифференциальная геометрия.** — Лекции для студентов III курса, осенний семестр 1999–2000 уч.г. — 2001. — 80 с. — Тираж 1000 экз.

Настоящий текст представляет собой записи лекций, читавшихся С. М. Гусейн–Заде в Независимом Московском Университете в 1994/95 и в 1995/96 учебных годах для студентов II курса (во II семестре) с минимальными изъятиями и дополнениями. Лекции являлись продолжением части курса, читавшейся в первом семестре С. П. Новиковым, и основывались на нем.

Текст публикуется в авторской редакции.

14. И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. **Функции и графики (основные приемы).** Метод. пособие ОЛ ВЗМШ. Изд. 6-е, доп. — 2000. — 300 с. — Тираж 1000 экз.

Книга представляет собой методическое пособие, созданное более тридцати лет назад для заочного обучения школьников старших классов.

В книге описывается построение графиков элементарных функций способами, традиционными для средней школы (без применения производной). Рассматриваются линейные, квадратичные и другие рациональные функции.

Книга предназначена для школьников 8–11 классов, учителей математики, руководителей кружков, студентов désинститутов.

15. Р. Курант, Г. Роббинс. **Что такое математика?** Изд. 3-е, испр. и доп.. — 2001. — 568 с. — Тираж 3000 экз.

Книга написана крупным математиком Рихардом Курантом в соавторстве с Гербертом Роббинсом. Она призвана сократить разрыв между математикой, которая преподается в школе, и наиболее живыми и важными для естествознания и техники разделами современной математической науки. Начиная с элементарных понятий, читатель движется к важным областям современной науки. Книга написана доступным языком и является классикой популярного жанра в математике.

Книга предназначена для школьников, студентов, преподавателей, а также для всех интересующихся развитием математики и ее структурой.

16. М. Деза, М. Лоран. **Геометрия разрезов и метрик.** — Пер. с англ. Е. Пантелеевой и П. Сергеева под редакцией В. Гришухина. — 2001. — 736 с. — Тираж 1000 экз.

Разрезы и метрики хорошо известны и являются очень важными объектами в теории графов, задачах комбинаторной оптимизации, и в целом в дискретной математике. Они появляются и в других областях математики и ее приложений, таких как метрическая геометрия, геометрия чисел, комбинаторная теория матриц, теория блок-схем, квантовая механика, статистическая физика, анализ и теория вероятностей.

Данная книга задумана как учебник и справочник для научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся дискретной математикой и ее взаимосвязями с другими областями математики или ее приложений.

17. В. А. Зорич. **Математический анализ. Часть I.** — 2001. — 664+XVI с. — Тираж 2000 экз.

Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. Может быть полезен студентам факультетов и вузов с расширенной математической подготовкой, а также специалистам в области математики и ее приложений.

18. В. В. Ткачук. **Математика — абитуриенту.** — Изд. 8-е, испр. и доп. 2001. — 892 с. — Тираж 10000 экз. Изд. 7-е, испр. и доп. 2000. — 892 с. — Тираж 6000 экз. Изд. 6-е, испр. и доп. 1999. — 888 с. — Тираж 5000 экз.

Книга представляет собой наиболее полный репетиторский курс элементарной математики для подготовки к вступительным экзаменам любого уровня сложности. Излагаются уникальные алгоритмы самоподготовки, успешно апробированные в широком диапазоне критериев ведущих вузов страны.

Книга позволяет самостоятельно, предельно эффективно и в сжатые сроки повторить школьный курс математики. Полезна также репетиторам, учителям математики, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

19. А. В. Гладкий. **Введение в современную логику.** — 2001. — 200 с. — Тираж 1500 экз.

Книга представляет собой учебное пособие, в котором начала логики впервые в отечественной учебной литературе излагаются на современном научном уровне и при этом в форме, доступной студентам гуманитарных факультетов высших учебных заведений. Наряду с формальной логикой излагаются элементы логики научного познания. Отдельно рассмотрены особенности рассуждений, используемых в гуманитарных областях знания.

Книга может служить также пособием для гимназий и лицеев.

21. **Олимпиады 2001–2002.** Составители: Арнольд В. Д., Кулыгин А. К., Сахарова О. П. — 2001. — 32 с. — Тираж 3000 экз.

В данной брошюре собрана информация об интеллектуальных соревнованиях, проводимых для школьников г. Москвы. Включена как информация о турах городских олимпиад, так и информация о межпредметных соревнованиях и отдельных олимпиадах, традиционно собирающих большое число участников.

Книга предназначена учителям, родителям и самим школьникам.

22. В. И. Арнольд. **Нужна ли в школе математика?** Стенограмма пленарного доклада (Дубна, 21 сентября 2000 г.). — 2001. — 32 с. — Тираж 1000 экз.

Брошюра представляет собой текст доклада, прочитанного академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом участникам Всероссийской конференции по математическому образованию (Дубна, сентябрь 2000 г.).

Книга представляет интерес для преподавателей математики как школ, так и высших учебных заведений, для всех, кто заинтересован в развитии математического образования.

23. А. А. Белавин, А. Г. Кулаков, Р. А. Усманов. **Лекции по теоретической физике.** — 2001. — 224 с. — Тираж 1000 экз.

Книга написана на основе курса лекций, в течении ряда лет читавшихся в НМУ выдающимся физиком-теоретиком Александром Белавиным. В книге ясно и увлекательно изложены тонкие и сложные методы как старых, так и новых, совсем недавно возникших областей теоретической физики: специальная и общая теории относительности, квантовая механика, теория точно решаемых моделей статистической физики.

Для физиков и математиков различных специальностей, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

24. Ю. М. Бурман. **О проективных пространствах и движениях, или геометрия без рисунков.** — 2001. — 14 с. — Тираж 1000 экз.

Брошюра написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 22–26 июля 2001 года.

Основное их содержание составляют два различных доказательства хорошо известного факта — существования гомеоморфизма между трехмерным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$ и специальной ортогональной группой $SO(3)$.

Брошюра адресована старшим школьникам и младшим студентам.

25. В. М. Тихомиров. **Выпуклый анализ и его приложения.** — 2001. — 24 с. — Тираж 1000 экз.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 19 июля 2001 года.

Описываются основные понятия и методы выпуклого анализа, рассказывается об истории развития этой науки.

Брошюра адресована студентам младших курсов, хотя доступна и подготовленным школьникам старших классов.

26. М. А. Шубин. **Лекции об уравнениях математической физики.** — 2001. — 303 с. — Тираж 1000 экз.

Книга основана на курсе лекций по уравнениям математической физики, прочитанных автором на экспериментальном потоке мехмата МГУ. По сравнению с имеющимися курсами акцент делается на связи с геометрией и физикой. Книга содержит элементы теории основных уравнений математической физики, изложенные на основе функционального анализа и теории обобщённых функций.

В конце каждого параграфа книги имеются задачи, помогающие усвоению материала и дополняющие основное содержание книги.

Для студентов, аспирантов, научных работников — математиков и физиков.

27. В. И. Арнольд. **Цепные дроби.** Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 14 — 2001. — 40 с. — Тираж 3000 экз.

Теория цепных дробей связана с теорией приближений вещественных чисел рациональными, с теорией динамических систем, а также со многими другими разделами математики. В брошюре рассказано о связи цепных дробей с геометрией выпуклых многоугольников. В заключительном разделе брошюры содержится обзор результатов, связанных с многомерными обобщениями классической теории цепных дробей.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной автором для школьников 9–11 классов 2 декабря 2000 года на Малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей, а отчасти она будет интересна и профессиональным математикам.

28. **Студенческие чтения НМУ. Вып. 2.** — Под общей редакцией В. В. Прасолова. — 2001. — 144 с. — Тираж 1000 экз.

В книге представлены лекции, прочитанные в Независимом московском университете в 1999–2000 г., предназначенные для широкой аудитории. Их цель — рассказать о некоторых областях математики и описать новые идеи.

Для студентов, аспирантов и преподавателей математических специальностей.

29. У. Тёрстон. **Трехмерная геометрия и топология.** — 2001. — 312 с. — Тираж 1000 экз.

Уникальная монография выдающегося американского тополога У. Тёрстона содержит детальное изложение его глубоких идей о «геометризации» маломерной топологии. Первый том, посвященный геометрии и геометрическим структурам на многообразиях, служит богатейшим источником информации, идей и …энтузиазма.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических специальностей.

Опечатки, замеченные в №5

Страница, Строка	Напечатано	Следует читать
48, 10 сверху	математики	Из истории математики
79, 16 снизу	Канoненко	Кононенко
137, 18 сверху	π	$1/\pi$
208, 5 сверху	остальнымии	остальными
209, 4 сверху	НМУ	НГУ

Издательство Московского Центра
непрерывного математического
образования

Редактор В. В. Ященко
Подготовка оригинал-макета: LaTeX2ε,
METAPOST, М. Н. Вялый

Лицензия ЛР №071150 от 11.04.95 г.
Подписано в печать 5.02.2002 г. Формат $70 \times 100/16$.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 10. Тираж 1000.

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11