

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

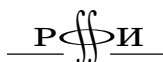
Третья серия

ВЫПУСК 9

Москва  
Издательство МЦНМО  
2005

УДК 51.009  
ББК 22.1  
М34

Издание осуществлено при поддержке РФФИ  
(издательский проект № 05-01-14083).



## Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Винберг Э. Б.	Вялый М. Н.
Гальперин Г. А.	Глейзер Г. Д.	Гусейн-Заде С. М.
Дориченко С. А.	Егоров А. А.	Ильяшенко Ю. С.
Канель-Белов А. Я.	Константинов Н. Н.	Прасолов В. В.
Розов Н. Х.	Сосинский А. Б.	Тихомиров В. М.
Ященко И. В.		

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В. М. Тихомиров

ОТВ. СЕКРЕТАРЬ: М. Н. Вялый

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 301

(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: [matpros@mccme.ru](mailto:matpros@mccme.ru)

WEB-PAGE: [www.mccme.ru/free-books](http://www.mccme.ru/free-books)

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 9. — М.: МЦНМО, 2005.  
— 240 с.

ISBN 5-94057-184-0

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009

ББК 22.1

ISBN 5-94057-184-0

© МЦНМО, 2005.

## СОДЕРЖАНИЕ

*Игорь Фёдорович Шарыгин (1937–2004)* . . . . . 5

### **Памяти Беллы Абрамовны Субботовской**

А. А. Разборов  
*О научном вкладе Б. А. Субботовской* . . . . . 12

*Вспоминая Беллу Абрамовну* . . . . . 16

А. Белов-Канель, А. Резников  
*Об истории Народного Университета* . . . . . 30

### **Неравенства и экстремальные задачи**

Я. Бринкхаус, В. Ю. Протасов  
*Теория экстремума в простых примерах* . . . . . 32

С. Б. Гашков  
*О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, с фиксированным средним коэффициентом* . . . . . 56

С. Б. Гашков  
*Неравенство Фейера – Эггервари – Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов* . . . . . 69

В. М. Тихомиров  
*Комментарий к статье С. Б. Гашкова «Неравенство Фейера – Эггервари – Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов»* . . . . . 76

Б. Р. Френкин  
*Теорема Неймана о минимаксе — общеизвестная и неизвестная* . . . . . 78

Л. Д. Пустыльников  
*Геометрическая задача, связанная с обобщенными бильярдами* . . . . . 86

### **Наш семинар: математические сюжеты**

В. И. Арнольд  
*Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости* . . . . . 93

А. Конн  
*Новое доказательство теоремы Морли* . . . . . 100

В. В. Прасолов  
*Тождества Рамануджана* . . . . . 104

В. В. Прасолов, М. Б. Скопенков  
*Рамсеевская теория узлов и зацеплений* . . . . . 108

А. Б. Скопенков	
<i>Вокруг критерия Куратовского планарности графов</i> . . . . .	116
М. Н. Вялый	
<i>Пфаффианы или искусство расставлять знаки</i> . . . . .	129
К. П. Кохась	
<i>Разбиения на домино</i> . . . . .	143
Е. Д. Куланин	
<i>Об описанных окружностях чевианых и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником</i> . . . . .	164
В. А. Юдин	
<i>О матрицах Грама</i> . . . . .	183

### **Задачи и олимпиады**

Р. М. Травкин	
<i>О повторяющихся подсловах</i> . . . . .	189
Влад Викола, Апостол Апостолов	
<i>Функциональные корни</i> . . . . .	194
М. Н. Вялый	
<i>Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда</i> . . . . .	203
П. В. Сергеев, И. В. Ященко	
<i>Problems.Ru и проблемы классификации</i> . . . . .	207

### **По мотивам задачника «Математического просвещения»**

А. А. Заславский, А. В. Спивак	
<i>Теорема о блохе и кузнечике</i> . . . . .	215

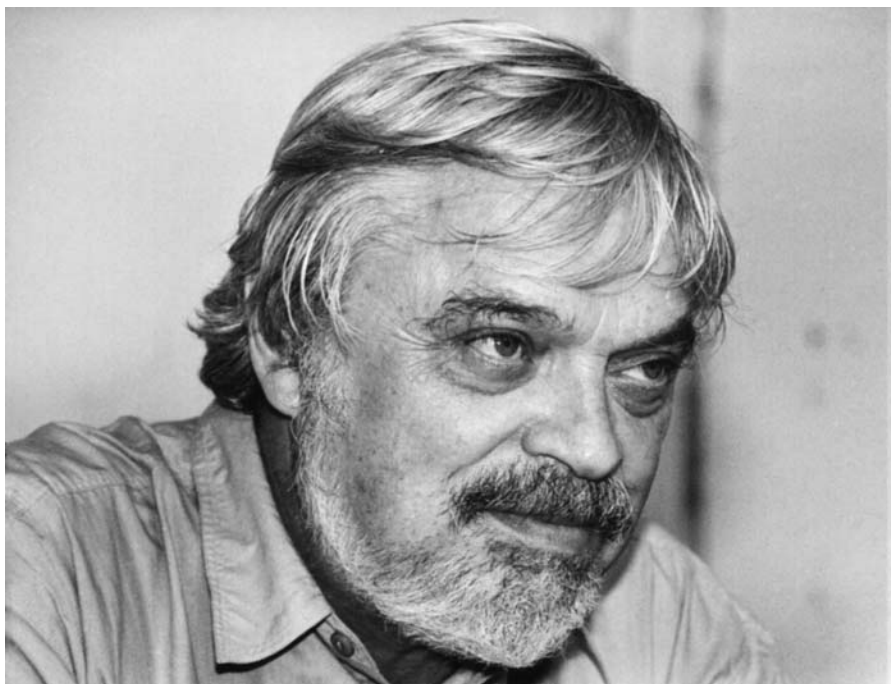
### **Нам пишут**

С. В. Маркелов	
<i>О тождествах Рамануджана</i> . . . . .	218
В. И. Арнольд	
<i>Специалисты против простоты</i> . . . . .	220

### **Задачный раздел**

<i>Условия задач</i> . . . . .	223
<i>Решения задач из предыдущих выпусков</i> . . . . .	225

Игорь Фёдорович Шарыгин  
(1937–2004)



В предыдущем номере «Математического просвещения» была помещена статья И. Ф. Шарыгина «Нужна ли в школе 21-го века геометрия?» Это — одна из последних его работ, которую ему довелось увидеть: 12 марта 2004 года в расцвете своего ярчайшего таланта ушел из жизни один из замечательнейших творцов Геометрии и борцов за расцвет математического Просвещения. Эта утрата невосполнима.

Статья Шарыгина в нашем журнале обращена ко всему человечеству, и оно само выступает в нём, как действующее лицо. Приведу особо поразивший меня отрывок: «История человечества пишется в трех книгах. Это История Вражды, история войн, революций, мятежей и бунтов. Из них большей частью складывается История Государства. Это История Любви. Ее пишет Искусство. И это История мысли человеческой. История Геометрии не только отражает историю

развития человеческой мысли. Геометрия издавна является одним из самых мощных моторов,двигающих эту мысль.»

... Я долго уговаривал Игоря Фёдоровича написать работу для журнала, а он всё отказывался, ссылаясь на невероятную занятость. И всё же он написал ее. Когда он ее принес, все мы поняли, что не должны менять в ней ни одного слова, оставив ее неприкосновенной. Я предполагал обсуждать с автором этого страстного текста многие и многие проблемы и нашей науки, и самой нашей жизни, и стал готовить письменный текст как заготовку для бурной дискуссии с ним по всем этим проблемам. Но обсудить всё это так и не удалось. Здесь неуместно вступать в споры, скажу только об одном, и думается, здесь я мог бы найти согласие с автором, который всегда горячо отстаивал свою точку зрения: я предлагал в своем письме расширить рамки «первой Истории Человечества», заменив слова «История Вражды» словами «История Борьбы».

Такая замена позволяет назвать самого Игоря Фёдоровича тем человеком, который вписал незабываемые страницы в летописи каждой из «Историй Человечества».

Он был страстным Борцом, и тому можно приводить неисчислимые подтверждения. Вот один только пример. В сентябре 1997 года Шарыгин пишет яростное письмо «Президенту России Ельцину Б. Н.», где он делает попытку обратить Ельцина в свою веру. Письмо сохранилось в моем архиве. Оно начинается словами: «Проблема, о которой говорится в моем письме, может показаться Вам незначительной, но я глубоко убежден, что без ее решения невозможно дальнейшее развитие России. Речь идет о роли математического образования, математической культуры [...] в современной России.» В письме множество высказываний, написанных на крайней стадии эмоционального напряжения: «снижение уровня математического образования — прямая угроза национальной безопасности, экономической, военной и прочей; сегодня в России продолжается, начавшаяся еще в конце 70-х годов деградация математического образования, причем на всех этапах и во всех направлениях; некоторые из известных мне учебников для начальной школы достаточно точно характеризуются словом „бред“; в средней школе под лозунгами гуманизации и гуманитаризации идет настоящее наступление на точные науки; идет разрушение традиций российского математического образования.» Игорь Фёдорович старался выступать защитником математического просвещения всеми доступными ему средствами.

В Историю Любви Шарыгиным вписаны его поразительные книги, где главной героиней, предметом восхищения и восторга является Геометрия. Вот строки, прославляющие его любимый предмет: «Геометрия есть феномен общечеловеческой культуры; некоторые теоремы геометрии старше, чем Библия, они являются одними из древнейших памятников мировой культуры; человек не может по-настоящему развиваться культурно и духовно, если он не изучал в школе геометрию; геометрия [...] представляет собой действенное средство для нравственного воспитания человека» — такими восторженными словами наполнены тексты шарыгинских статей и книг.

Отдельная тема, о которой много будет написано, — Шарыгин — творец Геометрии, несравненный Композитор, создатель замечательных задач.

Мы были друзьями на протяжении пятидесяти лет, и я очень многим обязан ему. В частности, от него я впервые услышал прекрасное высказывание Бродского о смысле самой жизни: «Не в том суть жизни, что в ней есть, а в вере в то, что в ней должно быть.» Этой верой была наполнена жизнь Игоря Фёдоровича Шарыгина.

*В. М. Тихомиров*

## НЕСКОЛЬКО СЛОВ ОБ И. Ф. ШАРЫГИНЕ

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите свою душу.» Этими словами Игорь Федорович Шарыгин начал свой курс элементарной геометрии для школы, последний до конца завершенный крупный проект в своей жизни. Потом по секрету говорил, смеясь: «Долго искал эпитафию, и не нашел ничего подходящего. Пришлось записывать себя в мудрецы.» Самоирония, за которой на самом деле скрывалось понимание своей роли и своего истинного масштаба. Ныне жизнь всё расставила по местам и слова «один мудрец сказал» можно писать без кавычек. Увы. . .

Иногда казалось, что он пришел в нашу жизнь даже не из XIX века, а из времен европейского Ренессанса, из итальянского Кватраченто, из прекрасного времени энциклопедистов и ученых-универсалов. Казалось, что вот сейчас он разговаривает с тобой, а минуту назад так же запросто обсуждал какую-нибудь проблему со Спинозой или с Декартом. Геометрию он воспринимал не иначе, как составную часть мировой культуры, как главный стержень и фундамент древней и современной науки. «В. И. Арнольд говорит, что математика — это часть физики. А я дополняю: физика — часть геометрии!» Это его идеям о связи геометрии и человеческой культуры аплодировал недавно копенгагенский конгресс по математическому образованию: «Геометрия — неотъемлемая часть мировой сокровищницы человеческой мысли. Некоторые теоремы геометрии старше, чем Библия. Если человек не слышал о Моне Лизе, или не знает, где находится Парфенон, может ли он считаться культурным человеком? А если он не знает теоремы Пифагора, или проблемы квадратуры круга?» Свои книжки и статьи о таком «сухом» и академичном школьном предмете, как геометрия, Игорь Федорович неизменно наполнял мыслями великих философов прошлого, цитатами из высокой поэзии, репродукциями картин итальянских и голландских живописцев. И это, поверьте, не было ни саморекламой, ни выпячиванием своей эрудиции (в этом его многие обвиняли (за глаза, естественно)). Скажем: рабочая тетрадь по геометрии для 6 класса — при чем тут стихи Северянина, Бродского и картины Карамболя?!). Но он просто был убежден, что именно так нужно писать о геометрии, и по-другому нельзя. Потому что она — Геометрия — те же стихи и картины, только выраженные средствами чертежей и логических рассуждений.

Этот текст я переписывал трижды. И всё равно получается сумбур, набор отрывочных воспоминаний. Наверное, это неизбежно. Если бы вас попросили на одной странице изложить свои воспоминания о большой и самобытной стране, где вы провели многие годы, то, видимо, тоже получился бы «сумбур вместо музыки». Поэтому я заранее прошу прощения у читателя и начну вспоминать.

1997 год. Дискуссия среди учителей и методистов об учебниках геометрии. Обсуждается вопрос, как определять, что такое геометрическая фигура. Шарыгин: «Есть вещи, которые лучше не определять вообще. Потому что, как ни определишь, всё равно получится не то. Если фигура — это часть плоскости,

ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой, то что такое кривая, и почему она ограничивает только одну часть плоскости, а не две? Все это уведет слишком далеко в науку о жордановых кривых. А если фигура — это множество точек, то получается, что канторово множество — это тоже фигура? И ковер Серпинского? Предлагаю лучше такое определение: фигура — это то, что имеет фигуру!»

1996 год, конец мая, мы стоим на балконе его квартиры, обсуждаем какую-то геометрическую задачку. Пятнадцатый этаж, под нами бушует раннее лето. Игорь Федорович просит меня съездить в издательство, посмотреть гранки книги. Работа займет целый день. Пытаюсь отказаться, сославшись на то, что «неожиданно» началась сессия, и у меня послезавтра экзамен. «Да,» — сказал Игорь Федорович печально: «всё в нашей жизни приходит неожиданно. Сессия. . . Лето. . . Старость, пенсия, болезни. . .» От этих слов у меня — мороз по коже.

1996 год. Подготовка вариантов Соросовской олимпиады. Шарыгин — главный координатор и ответственный за составление варианта. Нужны задачи. Отбор у Игоря Федоровича был жесточайший. Предлагаешь 10 задач, он берет из них в лучшем случае 2–3. Требования: задача должна быть интересна математически, литературно оформлена, а самое главное — должна быть на новую свежую идею, которая до этого ни в каких олимпиадах не встречалась. Задачи, решаемые стандартными олимпиадными приемами, отменялись сразу. «Ты же ученый! Поройся в своей науке! Лучшие задачи всегда приходят из науки, а не придумываются искусственно.» Порылся, нашел. Несу. «По кругу растут 199 деревьев, все — разного возраста. Можно ли выяснить возраст 12 деревьев так, чтобы наверняка найти дерево, старшее обоих своих соседей (слева и справа)». Шарыгин долго изучал задачу и решение. Идея оказалась новой и свежей. «Замечательно! Но литературная подача никуда не годится! Надо бы придумать текст поинтереснее.» После целого дня мучений у нас родилась версия про короля, живущего в одном слаборазвитом царстве-государстве, который начал борьбу с коррупцией и для этого вздумал наказать одного из своих 199 министров. Главного коррупционера решили искать так: посадить всех министров за круглый стол, и выяснить, у кого сколько денег на счетах в банке. Того, кто богаче обоих своих соседей по столу объявляют главным взяточником-«оборотнем». Намеки на известных политиков были настолько прозрачны, что Игорь Федорович шутил, дескать, посадят — не посадят. Но это, кажется, только его раззадоривало. Потом он рассказывал, как в день олимпиады ему звонили из провинции, кто — с восхищением («Молодцы! Смелые люди, так держать!»), кто — с негодованием («Вы что там в Москве, с ума посходили? Других тем для задач не было? Если губернатор узнает, нам олимпиаду прикроют!»). Надо сказать, это было не первое озорство Шарыгина на олимпиадах. За год до того я принес ему задачу о мальчике, поступающем в институт. Игорь Федорович предложил: «Давай сделаем поинтереснее. Назовем мальчика Игорь, дадим фамилию, скажем, Иванов. И пусть он поступает в Дипломатическую Академию.» Задача так и начиналась «Выпускник школы Игорь Иванов мечтал стать дипломатом. . .» Дети от души смеялись, причины этого были мне не вполне ясны. Только потом до меня дошло, что Игорь Иванов — министр иностранных дел РФ. В следующем

туре Игорь Федорович придумывает задачу о выборах в дворовый парламент, где было 4 фракции: «Наш дом», «Наша улица», «Наш двор» и «Наш подъезд». Всегда восхищала способность Шарыгина сделать задачу из любой жизненной ситуации. Как тут не вспомнить его задачу про радиоактивные шары, про три шкатулки в программе «Поле чудес», или про миллионера Тараса Артёмова, который при обмене денег принес в сберкассу 1991 купюру. По его задачам можно изучать новейшую историю России.

2000 год. Частная беседа. «Знаешь, в чем главное отличие планиметрии от стереометрии? Не в методах и не в объектах исследования. А в духе! Дух планиметрии — эстетический. Главное в ней — искусство и красота. А дух стереометрии — инженерный. В ней главное — конструкция!»

2001 год. Частная беседа. «Хороший учитель — это не тот, кто всё знает, а тот, кто не стесняется своего незнания. Поэтому у хороших учителей ученики их перерастают.»

2001 год. Частная беседа. «Я понимаю, что ты хочешь заниматься серьезной наукой, и эта школьная ерунда тебе неинтересна. Но ведь наука — вещь опасная и жестокая, можно всю жизнь прожить зря. Поэтому надо заниматься еще чем-то, про запас. Чтобы после тебя что-то осталось, если не великие теоремы, то хоть книжки для школьников.»

*В. Ю. Протасов*

---

**Памяти Беллы Абрамовны  
Субботовской**

---



(1938–1982)

# О научном вкладе Б. А. Субботовской

А. А. Разборов

Если смотреть на число публикаций, их суммарный объём и т. д., научное наследие Беллы Абрамовны покажется сравнительно небольшим. Оно включает две краткие заметки в «Докладах АН СССР» [1, 2] (составившие, насколько мне известно, основу ее кандидатской диссертации) и пару статей, опубликованных в конце 1960-х уже под фамилией Мучник. Однако, как это часто бывает в математике, ценность работ Субботовской определяется далеко не их количеством.

Моя задача весьма облегчается тем обстоятельством, что о теории вычислительной сложности (к которой и относятся работы Беллы Абрамовны) журнал уже подробно писал в недавнем прошлом [3–5, 9]. Более того, [4, с. 80] содержит краткое изложение главного результата Субботовской, и даже с наброском доказательства. Поэтому я просто постараюсь дать некоторое представление о месте, занимаемом ее научными достижениями в общей картине.

Прежде всего следует напомнить, о чём вообще идет речь. Ввиду наличия вышеупомянутых статей [3–5, 9] я буду предельно краток: почти весь материал, приводимый здесь в сжатой форме, можно найти в этих статьях.

Теория вычислительной сложности занимается изучением алгоритмов для решения алгоритмических задач с точки зрения их эффективности. Большинство этих задач можно без ограничения общности представить как задачу вычисления некоторого отображения  $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$  из множества конечных двоичных слов в  $\{0, 1\}$ . Всякое такое отображение  $f$  можно альтернативным образом рассматривать как последовательность  $\{f_n: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\} \mid n = 1, 2, \dots\}$  булевых функций. Вычислительные модели бывают *однородными* (машины Тьюринга, машины с произвольным доступом к памяти (RAM) и т. д.) и *неоднородными*. В однородных моделях одно и то же (конечное) устройство  $M$  должно вычислять  $f(x)$  для всех слов  $x$  вообще, а в неоднородных — для каждого  $n$  имеется свое отдельное устройство  $M_n$ , вычисляющее булеву функцию  $f_n$ . Алгоритмы в однородных и неоднородных моделях настолько хорошо и естественно транслируются друг в друга с сохранением их эффективности, что в большом числе случаев эти два класса моделей можно вообще не различать между собой. С точки зрения такого соответствия наиболее важными неоднородными моделями являются *схемы из функциональных элементов* и *логические формулы*, а наиболее важной мерой эффективности — *размер*, определяемый как число использованных элементов. Схемы отличаются от формул тем, что в них результаты промежуточных вычислений разрешается использовать более одного раза. Важной составной частью определения как схем так и формул является конечное

множество  $B$  допустимых в них элементов, называемое *базисом*; базис  $B$  полон, если любая булева функция в принципе представима в виде суперпозиции его элементов. *Стандартный базис* — это базис  $B_0 = \{\vee, \&, -\}$ . От замены одного полного базиса другим минимальный размер  $\text{size}_B(f)$  схемы из функциональных элементов в базисе  $B$ , вычисляющей булеву функцию  $f$  может измениться не более, чем на постоянный множитель [4, теорема 7]. Почти очевидное доказательство этого факта, однако, не проходит для случая логических формул, и для них инвариантность минимального размера представляющей формулы от выбора базиса удается установить лишь с точностью до полинома [4, задача 17], причем доказательство уже далеко не настолько тривиально.

Центральный результат Субботовской [1] как раз и состоит в том, что такое различие в поведении между схемами и формулами неслучайно и с точки зрения представимости формулами одни полные базисы могут быть существенно лучше других (т. е. размер минимального представления одной и той же булевой функции может отличаться более, чем на постоянный множитель). Именно, если добавить к  $B_0$  функцию  $x \oplus y$  сложения в поле  $\mathbb{F}_2$  (т. е. «по модулю 2»), то тогда, конечно, линейную форму  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  от  $n$  переменных можно вычислить формулой размера  $O(n)$ . Субботовская доказала, что без расширения базиса ситуация меняется принципиально, и всякая формула в стандартном базисе  $B_0$ , вычисляющая  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ , обязана иметь размер  $\epsilon n^{3/2}$ , где  $\epsilon > 0$  — некоторая константа. Развивая эти идеи, в [2] ею был установлен гораздо более общий факт. Именно, Лупанов ранее доказал, что в контексте представимости булевых функций формулами базис  $B_0$  вообще является самым плохим и всякий другой полный базис  $B$  либо эквивалентен  $B_0$  либо (как, например,  $B \cup \{\oplus\}$ ) является строго более сильным. Белле Абрамовной удалось получить полную, элегантную и чисто комбинаторную характеристику тех полных базисов, которые эквивалентны  $B_0$ .

Всё, что написано выше про теорию вычислительной сложности, относится к жанру «Взгляд из 21 века». В начале 1960-х годов картина выглядела совсем по-другому. Хотя однородные модели (в основном машины Тьюринга) были известны уже довольно давно, концепция *сложности* алгоритмов только начинала зарождаться, и до работ, в которых были заложены математические основы теории вычислительной сложности, оставалось еще добрых пять лет (а до формулировки ключевой в этой области «проблемы  $P \stackrel{?}{=} NP$ » — и все десять). Теоретическое значение неоднородных моделей (таких, как схемы, формулы и весьма популярные в то время «контактные схемы») еще не было осознано, и даже сам термин «неоднородные» (non-uniform) появился намного позднее. Схемы и формулы рассматривались в основном с инженерной точки зрения, как прототип реальных устройств, используемых в электронной промышленности.

Тем удивительнее появление на этом фоне в начале и середине 1960-х годов ярких результатов в *теории* сложности булевых функций, по существу заложивших основы для ее бурного развития в 1980-е годы. Работы Субботовской занимают весьма достойное место в ряду этих результатов, и по значимости они вполне сравнимы с классическими результатами Маркова [6] и Нечипорука [7].

В какой-то степени работам Субботовской «повезло» меньше, чем работам Маркова и Нечипорука — ее основной результат был впоследствии усилен Храпченко [8], и сейчас нижняя оценка формульной сложности для функции  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  ассоциируется в основном с последней работой. Есть, однако, два важных характерных момента, касающихся именно работ Беллы Абрамовны, которыми мне бы и хотелось закончить свою заметку.

Во-первых, следует особо отметить использованный ею способ доказательства, получивший впоследствии название «метод случайных подстановок». Сегодня этот метод является одним из наиболее важных, мощных и широко распространенных в теории сложности булевых функций (а в последние годы — и в родственной теории сложности доказательств). Насколько мне известно, впервые этот метод встретился именно в [1].

Второе и последнее замечание касается всей программы классификации полных базисов с точки зрения их эффективности, начатой Лупановым и сравнительно недавно продолженной Стеценко, Черухиным и Перязевым. Эта программа в какой-то степени предугадала современную тенденцию, когда вместо исследования сложности изолированных алгоритмических задач изучают так называемые *классы сложности* (см., например, [3, 5]) и особое внимание уделяют *структурным* вопросам об этих классах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Субботовская Б. А. *О реализации линейных функций формулами в базисе  $\vee, \&, -$*  // ДАН СССР, 1961. Т. 136, №3. С. 553–555.
- [2] Субботовская Б. А. *О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами* // ДАН СССР, 1963. Т. 149, №4. С. 784–787.
- [3] Разборов А. А. *О сложности вычислений* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 3. 1999. С. 127–141.
- [4] Верещагин Н. К., Шень А. *Логические формулы и схемы* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 4. 2000. С. 53–80.
- [5] Вялый М. Н. *Сложность вычислительных задач* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 4. 2000. С. 81–114.
- [6] Марков А. А. *О минимальных контактно-вентильных двухполюсниках для монотонных симметрических функций* // Проблемы кибернетики. Наука, 1962. Т. 8, С. 117–121.  
(Eng. transl.: A. A. Markov, On minimal switching-and-rectifier networks for monotone symmetric functions, *Problems of Cybernetics*, vol. 8, 117–121 (1962).)
- [7] Нечипорук Э. И. *Об одной булевской функции* // ДАН СССР, 1966. Т. 169, №4. С. 765–766.  
(Eng. transl.: E. I. Nečiporuk, On a Boolean function, *Soviet Mathematics Doklady* 7:4, pages 999–1000.)

- [8] Храпченко В. М. *О сложности реализации линейной функции в классе  $\pi$ -схем* // Математические заметки, 1971. Т. 9, №1. С. 35–40.  
(Eng. transl.: V.M. Khrapchenko, Complexity of the realization of a linear function in the class of  $\pi$ -circuits, *Math. Notes Acad. Sciences USSR* 9(1971), 21–23.)
- [9] Smale S. *О проблемах вычислительной сложности* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 4. 2000. С. 115–119.

## Вспоминая Беллу Абрамовну

Д. Б. Фукс

Летом 1980-го года я принимал дома двух гостей, с которыми не был до того знаком. Валера Сендеров и Боря Каневский, тогда еще оба на свободе, пришли ко мне договориться о моем участии в предприятии, которое весьма успешно существовало уже два года: параллельные лекции по программе мехмата для молодых людей, несправедливо отвергнутых университетской приемной комиссией. Названия «Народный Университет», «Еврейский Народный Университет» появились позже<sup>1)</sup>, хотя что правда, то правда: большинство жертв экзаменационной и приемной комиссий МГУ согрешили именно в пятом пункте. (Собственно, студенты набора 80-го года, которым я преподавал, были жертвами только косвенно: это был год Олимпиады, и льготные июльские экзамены в Университет и прочие Физтехи и МИФИ были отменены, в результате чего потенциальные жертвы были лишены возможности поступления в запасные институты после провала на мехмате; и они, обходя Университет, шли поступать в Нефтяной институт («Керосинку») или МИИТ (куда «брали») — никто не хотел рисковать отправкой в Афганистан.)

«Профессорский» состав был быстро укомплектован. Команда подобралась стоящая: Алёша Сосинский преподавал алгебру (его сменил впоследствии Боря Фейгин), Андрей Зелевинский вел уроки анализа, а мне досталась аналитическая геометрия и линейная алгебра. Помню первую лекцию Андрея: он написал на доске формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

и сказал, что в этой формуле сосредоточена вся математическая премудрость: интеграл, дифференциал, радикал,  $e$ ,  $\pi$  и бесконечность. Вообще Андрей, не имея опыта ни преподавания анализа, ни занятия оным, прочел блестящий курс; запомнились асимптотические ряды с секторами сходимости, о которых я прежде не имел никакого понятия. Мой курс был более стандартным, хотя функторы я ввел, помню, на третьем или четвертом занятии (я пытался объяснить то, чего не понимаю до сих пор, хотя это и написано во всех учебниках: изоморфизм между конечномерным векторным пространством и его сопряженным зависит

---

<sup>1)</sup> «Официальное» название существовало: «Курсы повышения квалификации преподавателей ВМШ», но, конечно, не использовалось участниками. — *Ред.*

от базиса, а изоморфизм с вторым сопряженным ни от чего не зависит). Всему этому предшествовало организационное собрание на квартире у Беллы Субботовской.

О Белле особо. Мы учились с ней на мехмате в одной группе, знали друг друга с 1955 года. Особенно не дружили: дружить с Беллой было нелегко. Нервная, шумная, необыкновенно требовательная ко всем, она не вписывалась ни в какие компании. Наш курс был очень сильным (Серёжа Новиков, Витя Паламонов, Галя Тюрина, Саша Олевский, Володя Зорич, Саша Виноградов — все с нашего курса), мы выпендривались друг перед другом и не подозревали, что угловатая, суетливая Белла была среди лучших математиков курса. Вспоминаются всякие смешные истории. Лето 1957 года. В товарных вагонах несколько сотен университетских студентов отправляются работать на целину. Проводы, все возбуждены, и вдруг — кто это?! — так это же Белла, верите или нет, остриженная наголо. С ней мама, Ребекка Евсеевна (отец Беллы погиб на войне). Ну, многих провожали мамы, и меня тоже, но Ребекка Евсеевна не провожала Беллу, она ехала с нами на целину! На каком-то полустанке к нашему вагону подошел сумрачный комсомольский работник: «А почему мама едет?» На это Ребекка Евсеевна достает из сумочки комсомольскую путевку, всё прописано: едет на целину по зову сердца. Работник отвязался. На целине мы оказались в разных местах, я только раз встретился с Беллой и получил от нее выговор за устроенную нами забастовку. Ребята же, которые были с матерью и дочерью Субботовскими в одной бригаде, с упоением рассказывали о приготовленных Ребеккой Евсеевной обедах.

Мы кончили Университет, и наши с Беллой пути разошлись. Позже я узнал, что она была аспиранткой у Лупанова, вышла замуж, родила дочку, опубликовала (под фамилией Мучник) несколько выдающихся работ, защитила диссертацию. Потом — какой-то слом, я не знаю подробностей. Развод с обратной сменой фамилии, болезнь, возвращение к жизни в качестве учителя начальных классов в обыкновенной московской школе. Единственное, что осталось от прежней жизни — это камерный оркестр МГУ, в котором Белла играла на альте до последних дней жизни. В нашем университете Белла никогда не преподавала, ее функции были чисто организационные, таков был ее выбор.

Мы занимались с нашими студентами самоотверженно, писали конспекты своих лекций (их где-то размножали на ксероксе<sup>2)</sup>), устраивали консультации на дому. Ребятам было трудно: черчение, технические дисциплины, всякие сопроматы днем — и математическая заумь вечером. Из наших учеников (а их число порой зашкаливало за 70)<sup>3)</sup> единицы стали математиками: Витя Гинзбург, Алёша Канель, Федя Маликов, Саша Одесский, Андрей Резников, Боря и Миша Шапиро, — кто еще? Но пользу занятия принесли многим, я уверен. Мы меняли место встреч, собирались в школе у Беллы, в Нефтяном институте («Керосинке»), в гуманитарном корпусе и потом на химфаке МГУ. В большинстве случаев

---

<sup>2)</sup> Копирование, совершенно невозможное по тем временам, удалось организовать Б. И. Каневскому. — Ред.

<sup>3)</sup> А на первое занятие пришло 120 студентов! — Ред.

наш «семинар» был более или менее легализован (на химфаке я сам ходил за разрешением к замдекана, а в «Керосинке», не могу поручиться, но слышал, кто-то из студентов получил нагоняй от комсомольского бюро за то, что пропускал наши лекции). Белла собирала пятерки и приносила горы бутербродов (потом эти пятерки ей пытались поставить в вину бдящие органы). Да, на одно из первых занятий пришли Боря с Валерой, допросили ребят, кто из них и их одноклассников куда поступал и поступил (они собирали данные для неопровержимого доказательства того, что все и так знали, но многие делали вид, что не знают: антиеврейской дискриминации при приеме в МГУ). Прошел год, и мы перешли на второй курс, а Боря с Валерой взялись тянуть следующий набор. (Валера — преподаватель высочайшего класса, между прочим.) Я переключился на дифференциальную геометрию, Боря Фейгин рассказывал что-то об алгебрах Ли и  $D$ -модулях, у нас работал семинар. В марте 1982 года в Москву приехали, как теперь говорят, с частным визитом, Джек Милнор, Андре Хефлигер, Боб Макферсон и Дуза Макдуф. Милнор, великий математик и великий лектор, прочел лекцию специально для наших студентов, Алёша Сосинский переводил. Много пришло народа и «нашего», и не нашего, мы были рады всем.

Закончился учебный год — и тут грянул настоящий гром. Постараюсь восстановить последовательность драматических событий.

В июне 1982 года в Лабораторный корпус МГУ, где я работал, зашел Серёжа Львовский (мне тогда не знакомый). Вывел меня на улицу. Новость: арестованы Сендеров и Каневский (и еще студент из их параллели)<sup>4</sup>). Объясняет причину ареста: в апреле распространяли листовки с агитацией против субботников (вообразите себе — субботников!). Оставшиеся листовки не выбросили, а оставили для будущего года (о, Боже!). Их и накрыли при обыске (доносчиков хватало всегда), заодно забрали список их класса в «Народном Университете». Информации о нас, как будто бы, нет, хотя, кто знает. . .

Встретились с Андреем, условились, что говорить, если вызовут на допрос (не вызвали). Созвонились с Беллой. Решили осенью занятия не возобновлять (мы мечтали о третьем курсе)<sup>5</sup>). Шли тревожные месяцы. И вот, уже в августе (Брежневу оставалось несколько месяцев жизни), Беллу вызвали в КГБ. После посещения ею КГБ мы встретились (это была наша последняя встреча, мы потом еще раз говорили по телефону). Привожу ее рассказ, как помню.

Утром того дня у нее в квартире звонит телефон, мужской голос: «Белла Абрамовна, я — такой-то (неразборчиво), хочу с Вами встретиться.» Белла его за кого-то другого приняла, ей кто-то должен был позвонить. Я, говорит, очень занята сегодня, буду ездить по разным местам, давайте в метро встретимся, станция «Коломенская», первый вагон к центру. В назначенный час Белла — там. Смотрит — никого. То есть, стоит какой-то широкоплечий человек с бычьей шеей — «явно герой не моего романа», сказала мне Белла. Проходит поезд, другой, Белла ждет, и вдруг — этот человек подходит к ней: «Белла Абрамовна?» Белла — с улыбкой — «так это Вы меня ждете? Мне сей час нужно на

<sup>4</sup>) Сендеров и Гельцер были арестованы 17 июня, Каневский — 21-го. — *Ред.*

<sup>5</sup>) Занятия, хотя и в другой форме, просуществовали до весны 1983-го. — *Ред.*

Кузнецкий Мост, поехали вместе.» «Нет, — отвечает,— мы поедem по другому адресу.» И берет Беллу под руку. Поднимаются наверх, там ждет машина. Едут — не на Лубянку, куда-то еще, мне Белла называла адрес, да я не помню. Проводят в кабинет к какому-то молодому человеку в погонах — старший лейтенант или капитан. В Москве, говорит, орудует банда «репетиторов», которые грабят людей под видом подготовки к экзаменам. И бац — сендеровский список на стол. Белла, конечно же, начала с ним кокетничать (неистребимая женская суть!). Ну что Вы, говорит, эти люди уже студенты, мы с ними занимаемся математикой бесплатно (а пятерки? — и бац — еще список, кто пятерки сдал, тоже в сендеровском классе — ну, пятерки для перекуса). Вот и Вы приходите — ведь Вам, наверное, нравится математика. Было ясно, что гэбэшник ей понравился. Поговорили о том, о сем; о математике. Ну, до свидания, вот Вам пропуск (на выход, без него не выпустят), а вот — протокол, подпишите. Белла читает протокол — нет, я этого не говорила, не подпишу. Тот начинает упрасивать, это же формальность, с него спросят; нет, заартачилась (всегда была упрямая). Ну хорошо, не подписывайте, но подумайте еще, и если передумаете, приходите к нам опять, дал имя, телефон внутренний — всё.

Рассказывает мне всё это Белла и вдруг говорит: я решила опять к нему пойти, он же звал. Я: «ни в коем случае не ходи!» Ну, говорит, я с ним еще побеседую, он, вроде бы, всё понимает, это может ребятам (арестованным) на пользу пойти. Попробуй ее отговори!

На другой день — последний звонок от Беллы. Ну что, ходила? Да, но она меня не принял. Сухо так сказал: больше ничего от Вас не надо.

Еще через пару дней<sup>6)</sup> Белла погибла под колесами грузовика в тихом, безлюдном переулке, где и велосипед-то не каждый час проедет. Рассказ очевидца: грузовик вихрем пронесся по переулку, сшиб Беллу, которая была на тротуаре или рядом с тротуаром, и исчез из вида. Беллу доставили прямо в морг. В гробу ее трудно было узнать: изуродованную голову кое-как залепили в морге пластилином. На похоронах была масса народа, но разговоры об обстоятельствах ее гибели пресекались: не время. Я не знаю, пришло ли время, нашли ли грузовик и его водителя, восстановили ли цепочку событий с той, гэбэшной стороны. «Народный Университет» перестал существовать, а с перестройкой, массовым отъездом и снятием еврейских ограничений при приеме в МГУ перестала существовать и сама проблема. Здесь кончается и мой рассказ.

---

<sup>6)</sup> Ночью 23 сентября 1982 года в возрасте 44 лет. — *Ред.*

## А. М. Виноградов

С Беллой Абрамовной Субботовской мы были «согруппниками» на 1 и 2-м курсах мехмата. Поэтому и знакомы. Много позже наши дети оказались «соклассниками» в матклассе Б. П. Гейдмана в 19-й школе и мы в связи с этим иногда встречались. Однажды Белла Абрамовна с характерной для нее настойчивостью пригласила меня в гости, обещая «очень интересный сюрприз». Когда я пришел, то обнаружил у нее полную квартиру отверженных приемными комиссиями еврейских детей, Сендерова и второкурсника физтеха Книжника. Что делать в такой напасти? Поначалу решили устроить для них матлекторий, что я и сделал на следующей встрече, рассказав по просьбе Сендерова теорему о сжатых отображениях. Не успев, однако, их как следует дожать до конца, я понял, что всё это полный абсурд, тем более, что ясного плана действий ни у кого не было. По некоторому размышлению, я предложил организовать систематический курс математики мехматского уровня для этой группы. Я поговорил с Алексеем Брониславовичем Сосинским, моими учениками Валентином Васильевичем Лычагиным, Иосифом Семеновичем Красильщиком, Алексеем Васильевичем Самохиным и моими тогдашними аспирантами Сергеем Васильевичем Дужиным и Алексеем Вадимовичем Бочаровым. И мы решили попробовать. Независимо от нас физику взялся вести Михаил Самуилович Маринов.

Надо признаться, что в этом деле у меня помимо гуманистического был и чисто «шкурный» интерес, разделяемый и остальными вышеуказанными лицами. Он состоял в том, чтобы прочитать для продвинутой аудитории концептуально элегантный, «единый» курс основ математики, т. е. то, что вряд ли было возможно сделать на мехмате в обозримом будущем. При этом я поставил одно условие: за этим не должно было быть никакой политики. Я считал тогда и тем более считаю теперь, что не мог подвергать риску тех, кого вовлек в это предприятие.

Сие было обещано, и мы начали. В порядке автоиронии я предложил называть содеянное «Народным Университетом Культуры». Так в то время назывались особые учебные заведения, основной целью которых была выдача дипломов о высшем образовании комсомольским и партийным выдвиженцам и другим публичным фигурам той эпохи. И сейчас среди известных политиков можно найти владельцев такого диплома. Это название прижилось, но в сокращенной форме: из него исчезло всякое упоминание о культуре.

Если я правильно помню, то, кроме меня, курсы читали А. Б. Сосинский, И. С. Красильщик и В. В. Лычагин, а остальные вели упражнения. Занятия поначалу происходили на квартире у Беллы Абрамовны, а позже удалось перебраться в Нефтяной институт, который все звали «Керосинкой». Подготовка и чтение лекций отнимало у всех нас порядочно времени, поскольку мы всё делали по новой собственной программе. Нас, однако, хорошо поддерживал горячий чай с бутербродами из «Отдельной» колбасы и чувство, что мы не сидим сложа руки перед лицом творящегося безобразия. И то, и другое было совершенно бесplatно. По-видимому, программы и краткие записки тех наших лекций теперь потерялись окончательно.

Я сейчас точно не помню, но всё это продолжалось тихо и мирно год или полтора. Белла Абрамовна запомнилась своей невероятной активностью и вездесущностью, взяв на себя устройство всех организационных проблем. Как мне кажется, и студенты, и преподаватели получали удовольствие друг от друга. К сожалению, ситуацию вокруг Народного Университета не удалось удержать в рамках разумной внешней аполитичности. Например, когда один из «вражеских голосов» упомянул о «Народном Университете», ко мне стали обращаться обеспокоенные родители наших студентов. Я старался их успокоить, полностью полагаясь на данное мне слово, но, тем не менее, некоторые студенты нас покинули. Впоследствии политические страсти вокруг Народного Университета накалились еще более и наш пакт о нейтралитете рассыпался сам собой. При таких обстоятельствах я счел слишком рискованным как для себя, так и для моих учеников и друзей, которых привлек, дальнейшее в нём участие и почти вся первая профессорско-преподавательская бригада «Народного Университета», «уволилась по собственному желанию». Лишь более отважные Сосинский и Маринов решили остаться.

Мы не рассматривали участие в «Народном Университете», как средство заработать политический капитал и образ борцов с советской властью. Наша цель была совершенно в ином — дать достойное образование достойным того молодым людям, и у меня нет никаких оснований сомневаться в том, что эта же цель была и у Беллы Абрамовны Субботовской.

## А. В. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

С Беллой Абрамовной Субботовской меня познакомил Дмитрий Борисович Фукс. Произошло это, по-видимому, летом или ранней осенью 1980-го года. Она предложила мне участвовать в работе созданного ею «Народного Университета», и я помню, что согласился, долго не раздумывая. Рискованность этого предприятия была очевидна (даже мне, при моей тогдашней молодости и легкомыслии), так что столь быстрое согласие было не совсем тривиальным. Причин было две: ощущение «правильности» всей затеи, и чувство абсолютного доверия, которое сразу же вызвала у меня Белла Абрамовна, и которое никогда не покидало меня в течение нашего (к сожалению, недолгого) знакомства и общения.

Несколько слов о подоплеке. В те годы, обстановка глубокого маразма, царившего в советском обществе, была настолько очевидна людям моего круга общения, что и в обсуждениях не нуждалась. Самые людоедские времена советского режима остались позади, официальную идеологию мало кто принимал всерьез, но открытое инакомыслие по-прежнему каралось. Официальный антисемитизм процветал и накладывался на насаждавшиеся на всех уровнях подозрительность и недоверие к интеллигенции и культуре. Поскольку большинство населения сформировалось уже при советской власти, режим казался незыблемым и вечным, а активные диссиденты — донкихотствующими идеалистами (как показало дальнейшее развитие событий, на самом деле, они оказались прозорливее меня и моих друзей).

Однако ближе к делу. В начале восьмидесятых годов малейшего подозрения на еврейское происхождение было достаточно, чтобы человек практически лишился шансов на поступление на мехмат. А заодно, для пущего абсурда, многим сильным выпускникам ведущих математических школ, зачастую даже отличившимся на математических олимпиадах разных уровней, также ставились палки в колёса, независимо от национальности. При этом, хотя в результате основанной на тех же принципах кадровой политики, уровень преподавателей мехмата к тому времени сильно снизился, от прежних времен там всё еще оставалось достаточно много математиков и педагогов высокого класса. Одним из самых важных достоинств мехмата оставалась традиционная система фундаментального математического образования на младших курсах. Не получив доступа к этой системе, для многих из самых способных и всерьез увлеченных математикой ребят дорога к профессии математика была если не полностью перекрыта, то, по крайней мере, сильно усложнена.

Идея Беллы Абрамовны и ее единомышленников была благородна и проста: попытаться хотя бы частично восстановить справедливость, предоставив ребятам, серьезно интересующимся математикой, возможность получить то фундаментальное математическое образование, в котором им было отказано. У меня эта идея не могла не вызвать отклика, не только из очевидных моральных соображений, но и потому, что, будучи евреем и выпускником известной в те годы своим вольнодумством московской математической школы №2, мне было легко отождествить себя с моими будущими студентами (хотя мне повезло, и на моем пути к математике было намного меньше препятствий).

Из организаторов Народного Университета (общепринятого имени, мне кажется, у него не было; из других бытовавших имен, помню Открытый Университет и Еврейский Университет), кроме Беллы Абрамовны, я встречал еще Бориса Каневского и Валерия Сендерова. У меня не вызывало сомнений, что все они, помимо организации наших занятий, занимались и другими «крамольными» вещами. По неписаному соглашению, я никогда не разговаривал с ними на эти темы, полагая (по всей видимости, наивно), что это может послужить защитой в случае интереса к моей особе со стороны КГБ (Комитета Государственной Безопасности; поясняя для тех счастливых, которым этот злоеший акроним уже ничего не говорит): мол, знать ничего не знаю, попросили прочесть пару лекций по математике интересующимся молодым людям, а зачем и почему, понятия не имею. Подозреваю, что подобную «страусиную» позицию разделяли и многие мои коллеги по преподаванию в Народном Университете. Соглашение это соблюдалось с большим тактом со стороны Беллы Абрамовны и Бориса Каневского, с которыми я в основном имел дело (Сендеров, насколько я помню, появлялся на наших занятиях нечасто и особого участия в их организации не принимал; может быть, это относилось только к нашему потоку). Единственным исключением, которое я сейчас могу припомнить, был вечер барда-диссидента Петра Старчика на квартире Беллы Абрамовны, на который она пригласила мою жену и меня вместе с некоторыми студентами и преподавателями Народного Университета. Вечер, кстати, был замечательный; с биографией и творчеством Старчика можно ознакомиться, например, на страничке <http://www.bard.ru/>.

Несколько слов об организации занятий в те два года (1980–81 и 1981–82), когда я преподавал в Народном Университете. Занятия проходили раз в неделю по субботам, в разных местах: чаще всего, в Губкинском нефтяном институте (знаменитой «керосинке»), где обучалось немало наших студентов. Борис Каневский, помимо проведения семинаров по моему курсу анализа, ксерокопировал и раздавал студентам мои конспекты лекций и листочки с задачами (сейчас почти невозможно представить себе, насколько серьезным преступлением советская власть считала несанкционированное использование копировальных устройств; в соответствии с упомянутым выше соглашением, я никогда не спрашивал его, как он получил доступ к копировальной машине, и какие еще печатные материалы он на ней изготовлял). Вся остальная практическая организация работы лежала на плечах Беллы Абрамовны, которая в моих глазах всегда была душой всего предприятия. Она составляла список студентов, вела учет посещаемости, договаривалась о местах занятий, оповещала всех о возможных изменениях в расписании, следила за тем, чтобы занятия начинались и заканчивались вовремя, приносила всё необходимое для занятий (например, мел), и даже делала очень вкусные бутерброды, которые мы все вместе поедали на переменах. Всю эту немалую работу она делала с улыбкой и без видимых усилий; вообще, мне всегда казалось, что одно ее присутствие на занятиях и переменах создавало удивительно приятную, теплую и домашнюю обстановку. Преподаватели были ею освобождены от всех практических забот; при этом, само собой разумеется, что денег за работу никто никаких не получал (точно не знаю, может быть, со студентов собирались небольшие взносы на ксерокопии и тому подобные расходы).

За мои два года работы в Народном Университете, я прочел курс лекций по математическому анализу с элементами функционального анализа. Одновременно геометрию вел Фукс, а алгебру — сначала Алексей Брониславович Сосинский, а затем — мой старый друг и однокашник по школе и университету Борис Фейгин.

Над выбором программы моего курса пришлось призадуматься. С одной стороны, общий замысел состоял в том, чтобы изложить основы математического анализа, не вдаваясь особенно в более продвинутые темы. С другой стороны, большинство наших студентов в основное время обучалось на факультетах прикладной математики в добротных технических вузах, и некоторыми сведениями по анализу уже обладало, особенно на «технологическом» уровне. Поэтому строить курс на основе стандартного мехматского курса для первокурсников мне не хотелось: я боялся, что студенты быстро утратят интерес, решив, что я не сообщаю им ничего нового. Мой выход из этой дилеммы состоял в том, чтобы попытаться подать традиционные идеи в новой упаковке. В качестве такой упаковки, я использовал идеи из нескольких, в основном, французских источников: «Основы современного анализа» Ж. Дьедонне, «Дифференциальное исчисление и дифференциальные формы» А. Картана, и даже «Функции действительного переменного» Н. Бурбаки (да простит меня В. И. Арнольд). При таком подходе, элементы топологии и функционального анализа появляются довольно рано, что дает возможность изложить основы дифференциального и интегрального исчисления, работая с функциями со значениями в банаховых пространствах. Тем самым, даже знакомые стандартные факты получают неожиданное освещение, что дает студентам возможность лучше оценить и прочувствовать логику доказательств. Не мне судить об успехе этой попытки. Во всяком случае, мне казалось, что студенты воспринимали мой курс с интересом и пониманием.

Я горжусь тем, что ряд слушателей моего курса преодолели все препятствия и стали успешными математиками-профессионалами: Алексей Белов-Канель, Аркадий Беренштейн, Виктор Гинзбург (тот, что в Санта Круз), Фёдор Маликов, Андрей Резников, Михаил Шапиро. . . (прошу прощения, если кого-то не упомянул). Надеюсь, что в их успехах есть и мой небольшой вклад; но несравненно бóльшим они обязаны Белле Абрамовне.

Занятия Народного Университета продолжались бесперебойно в течение нескольких лет, пока не наступила безжалостная расправа. Несколько человек, связанных с Народным Университетом, включая Каневского и Сендерова, были арестованы в июне 1982 года. А 23 сентября того же года трагически погибла Белла Абрамовна. Насколько мне известно, обстоятельства ее гибели (убийства?) не выяснены до сих пор. Могу только сказать, что с кем бы я это ни обсуждал, никто из моих друзей и коллег никогда не подвергал ни малейшему сомнению, что ее убийство было организовано КГБ. Зачем? Если власти хотели как можно быстрее и без лишнего шума прикрыть Народный Университет, то избавиться от Беллы Абрамовны, выдав ее смерть за несчастный случай, было простейшим средством этого добиться. Как я уже говорил, на ней всё держалось.

К сожалению, я почти ничего о ней не знал (и мало что узнал в течение нашего недолгого знакомства), кроме того, что она кончала мехмат и была

однокурсницей Фукса. Ее теплота, сердечность и оптимизм сразу же располагали к ней и заставляли чувствовать себя с ней легко и просто. К студентам Народного Университета она относилась по-матерински и, насколько я могу судить, вызывала столь же теплое ответное отношение. Организация Народного Университета потребовала от нее большого мужества и решимости, а поддержание его на плаву требовало постоянных серьезных усилий; однако в ее поведении не было ни следа важности, позы или рисовки. На фоне всеобщей халтуры, воцарившейся в те годы в советском обществе, сам факт четкой и бесперебойной работы Народного Университета, обеспеченной усилиями Беллы Абрамовны, давал студентам (да и преподавателям тоже) важный урок профессионализма и ответственности.

Я благодарен судьбе за знакомство и сотрудничество с этой замечательной женщиной. Для меня она навсегда останется нравственным компасом, а моя работа в Народном Университете — предметом гордости и славных воспоминаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (1 КУРС, 1 СЕМЕСТР, 1980–1981 уч. г.)

1. Язык теории множеств. Множества, функции, отношения.
2. Мощностные множества. Теоремы Кантора – Бернштейна и Кантора. Счетные и несчетные множества.
3. Вещественные числа. Аксиомы и следствия из них. Принцип Архимеда. Теорема о вложенных отрезках.
4. Комплексные числа. Теорема единственности. Геометрическая реализация.
5. Метрические пространства. Примеры и основные конструкции. Расширенная вещественная прямая.
6. Основные понятия теории метрических пространств. Шары, сферы, диаметр, ограниченность. Открытые и замкнутые множества, окрестности, замыкание и внутренность. Точки прикосновения и предельные точки.
7. Непрерывные отображения. Различные определения. Теорема о композиции. Равномерная непрерывность. Гомеоморфизм. Эквивалентные расстояния.
8. Предел отображения по подпространству. Предел последовательности. Предельные точки последовательности.
9. Последовательности Коши. Полные пространства. Геометрическое определение полноты. Примеры.
10. Полнота пространства ограниченных функций. Теорема о пополнении.
11. Предкомпактные пространства. Геометрическое определение. Основные свойства.
12. Компактные пространства. Основные свойства. Эквивалентность трех определений.
13. Последовательность точек на компакте сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственную предельную точку. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Их свойства. Критерий сходимости числовой последовательности (совпадение верхнего и нижнего пределов).

14. Теорема о непрерывном образе компакта. Следствия. Теорема Вейерштрасса. Применения: неравенство Коши; основная теорема алгебры.
15. Непрерывность алгебраических операций.
16. Связные пространства. Связные подпространства  $\mathbb{R}$ . Теорема о непрерывном образе связного пространства. Теорема Больцано. Следствия.
17. Критерий связности. Линейно связные пространства. Связность произведения двух связных пространств. Негомеоморфность отрезка и квадрата. Связные компоненты. Открытые подмножества  $\mathbb{R}$ .
18. Монотонные функции. Основные свойства. Корень  $n$ -й степени.
19. Логарифмическая, степенная и показательная функции. Основные свойства.
20. Число  $e$ . Производная логарифма. Иррациональность  $e$ .

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(1 КУРС, 2 СЕМЕСТР, 1980–1981 уч. г.)

- I. Нормированные и банаховы пространства
  1. Определение нормированных и банаховых пространств. Примеры конечномерных нормированных пространств. Неравенства Минковского, Гёльдера, Юнга.
  2. Примеры бесконечномерных банаховых пространств: пространства последовательностей  $(\ell_p, \ell_\infty, c_0)$ , ограниченных функций, ограниченных непрерывных отображений (доказательство его банаховости).
  3. Критерий непрерывности линейного оператора. Пространство непрерывных линейных операторов. Сопряженное пространство.
  4. Изоморфизм нормированных пространств. Описание конечномерных нормированных пространств. Теорема Ф. Рисса: шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен.
  5. Прямая сумма нормированных пространств. Теорема Банаха об обратном отображении (без доказательства). Пространство непрерывных полилинейных отображений.
- II. Ряды
  6. Ряды в нормированном пространстве. Критерий Коши. Коммутативная сходимость. Абсолютная сходимость. Критерий абсолютной сходимости. Абсолютно суммируемые семейства. Свойства коммутативности и ассоциативности. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов.
  7. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, эталонные ряды  $\sum 1/n^\alpha$ . Признаки Коши и Д'Аламбера, их сравнение, вычисление  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}/n$ .
  8. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Нормальная сходимость функционального ряда. Аналитические функции в круге, их непрерывность.
  9. Комплексная экспонента, ее простейшие свойства. Синус и косинус, формула Эйлера.
  10. Условно сходящиеся ряды. Суммирование по частям. Признаки сходимости Дирихле и Лейбница. Теорема Абеля. Следствия из нее.

## III. Дифференциальное исчисление

11. Дифференциальное исчисление для вектор-функций числового аргумента (вещественного или комплексного). Правая и левая производная. Формальные правила дифференцирования: линейность, производная произведения, производная сложной и обратной функции.
12. Теорема о конечных приращениях для всюду дифференцируемых вещественнозначных функций. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши и их следствия. Правило Лопиталя. Применения дифференциального исчисления к доказательству неравенств: неравенство о взвешенном среднем.
13. Теорема о конечных приращениях для вектор-функций. Следствия. Случай функции комплексного аргумента.
14. Теорема о дифференцируемости предела последовательности. Производная аналитической функции.
15. Сюръективность комплексной экспоненты. Число  $\pi$ . Корни  $n$ -й степени из комплексных чисел.

## IV. Примитивные и интегралы

16. Свойство «непрерывности» производной. Определение примитивной. Теорема о примитивной предела последовательности и ее следствия.
17. Ступенчатые и правильные функции. Характеризация правильных функций. Следствия: операции над правильными функциями, свойства их примитивных.
18. Определение интеграла от правильной функции на отрезке в  $\mathbb{R}$ . Связь с интегралом Римана. Теорема Ньютона – Лейбница. Свойства интегралов: линейность, интегрирование по частям, замена переменной, теорема о среднем.
19. Длина кривой. Натуральный параметр. Натуральный параметр на окружности.
20. Примитивная аналитической функции. Элементарные функции и табличные интегралы. Интегрирование функций  $e^{ax} \cdot (\sin bx)^p \cdot (\cos cx)^q$ . Вычисление  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ . Формула Валлиса.
21. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Комплексный логарифм. Интегрирование рациональных функций.

## V. Высшие производные

22. Высшие производные. Линейность, формула Лейбница, формула интегрирования по частям  $n$ -го порядка. Приложения: примитивная функции  $e^{ax} \cdot x^n$ , многочлены Лежандра.
23. Выпуклые функции: определение и простейшие свойства. Критерий выпуклости. Геометрический смысл второй производной. Выпуклость  $e^x$  и еще одно доказательство неравенства о взвешенных средних.
24. Формула Тейлора: локальная форма, интегральная форма остаточного члена, оценки остаточного члена. Формула Тейлора для функций комплексного аргумента. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в степенной ряд.
25. Разложение функций  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  в ряд Тейлора с оценкой остаточного члена. Биномиальная формула. Разложения  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg x$  и  $\arcsin x$ .

## VI. Эйлеровы разложения

26. Эйлерово разложение  $\operatorname{ctg} z$ . Применение к вычислению сумм  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ .
27. Бесконечные произведения. Критерий коммутативной сходимости. Критерии сходимости произведения  $\prod_{n=1}^{\infty} R(n)$ , где  $R(x)$  — рациональная функция.
28. Эйлерово разложение  $\sin z$ . Еще одно доказательство формулы Валлиса.
29. Г-функция: формула Эйлера. Исследование  $\Gamma(x)$  при  $x > 0$ : производные  $\ln \Gamma(x)$ . Константа Эйлера. Вычисление

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \left(1 + \frac{a_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \left(1 + \frac{b_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)}.$$

Формула дополнения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
(2 КУРС, 1 СЕМЕСТР, 1981–1982 уч. г.)

- I. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.
1. Определения и простейшие свойства несобственных интегралов (замена переменной, интегрирование по частям).
  2. Признаки сходимости несобственных интегралов (абсолютная сходимость, принцип сравнения, эталонные функции).
  3. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
  4. Равномерная и нормальная сходимость несобственных интегралов по параметру. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра.
  5. Вычисление интеграла Дирихле  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
  6. Эйлеров интеграл для Г-функции. Интеграл Гаусса.
  7. Бета-функция Эйлера. Различные интегральные представления, выражение через Г-функцию.
- II. Локальное исследование функций. Асимптотические разложения.
8. Локальные свойства функций. Слабые отношения сравнения.
  9. Сильные отношения сравнения.
  10. Отношения сравнения между положительными функциями. Порядок функции относительно положительной функции.  $O$ - и  $o$ -символика.
  11. Шкалы сравнения, главные части и асимптотические разложения. Определения, примеры и простейшие свойства.
  12. Сумма, произведение и композиция асимптотических разложений.
  13. Интегрирование сильных и слабых отношений сравнения.
  14. Дифференцирование отношений сравнения.
  15. Главная часть в асимптотическом разложении примитивной. Примеры.

16. Отношения сравнения для рядов с положительными членами.
  17. Числа Бернулли. Формула суммирования Эйлера – Маклорена.
  18. Свойства чисел и многочленов Бернулли.
  19. Оценка остатка в формуле Эйлера – Маклорена. Асимптотика частичной суммы гармонического ряда.
  20. Формула Стирлинга.
- III. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента
21. Дифференцируемость и производная для отображений банаховых пространств. Определение, простейшие свойства, примеры, производная сложной функции.
  22. Функции со значениями в произведении банаховых пространств. Частные производные, матрица Якоби.
  23. Сравнение вещественной и комплексной дифференцируемости. Условия Коши – Римана.
  24. Теорема о конечных приращениях. Дифференцируемость предела последовательности. Непрерывная дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные.
  25. Дифференцирование по параметру интеграла с переменными пределами.
  26. Теорема об обратной функции. Принцип сжимающих отображений.
  27. Теорема о неявной функции. Конечномерный случай, теорема о ранге.
  28. Вторая производная. Свойство симметричности, координатное описание.
  29. Высшие производные. Свойства и примеры.
  30. Формула Тейлора.

## Об истории Народного Университета

А. Белов-Канель

А. Резников

Здесь мы публикуем материалы, относящиеся к математической жизни поколения, родившегося в шестидесятые годы, и некоторым специфическим трудностям, несвойственным нашему времени.

Под названием «Народный Университет» (или «Еврейский Народный Университет») были известны неофициальные математические курсы, существовавшие в Москве в начале 1980-х годов. Курсы были основаны в 1978 году Борисом Ильичом Каневским, Валерием Анатольевичем Сендеровым и Беллой Абрамовной Субботовской. Занятия в Народном Университете были бесплатными и открытыми для всех желающих (в том числе и для студентов мехмата).

Идея создания Народного Университета появилась у Б. А. Субботовской и В. А. Сендерова при опросе абитуриентов — жертв приемной комиссии мехмата. В 1978 году, прямо на ступенях Московского Университета, из них же был набран первый поток, который составил 14 человек. Занятия проходили в маленькой двухкомнатной квартире Беллы Абрамовны. Лекции по анализу начал читать В. А. Сендеров, а затем был приглашен А. М. Виноградов, который в основном и вел этот набор. Кроме того на этом потоке читали лекции А. Б. Сосинский, И. С. Красильщик и В. В. Лычагин, а А. В. Бочаров, С. В. Дужин и А. В. Самохин вели семинарские занятия.

Наборы 1979–1981 годов были намного более многочисленными и составляли более 100 человек каждый. Лекции, как правило, проходили в различных институтах и школах Москвы один или два раза в неделю. Для заказа аудиторий использовалось название «Курсы повышения квалификации преподавателей вечерних математических школ». Расписание на один день занятий состояло из нескольких лекций и семинарских занятий.

На потоке 1979 года набора курс математического анализа читал А. Шень (он был фактически куратором всего курса), алгебру читал В. А. Гинзбург. Позже присоединились В. Б. Шехтман и Е. С. Божич. Отдельные лекции читались С. Г. Смирновым, И. Н. Бернштейном и В. Г. Кановеем.

Набор 1980 года был самым многочисленным и составлял в начале более 120 человек, из которых после первого года осталось около 60-ти. Лекции по линейной алгебре и геометрии читал Д. Б. Фукс, математический анализ А. В. Зелевинский, а алгебру — сначала А. Б. Сосинский, а затем Б. Л. Фейгин. Семинарские занятия по анализу велись Б. И. Каневским, а Е. М. Кузницким была проведена серия занятий по теории Галуа.

В разное время отдельные лекции на этом потоке были прочитаны И. Н. Бернштейном, А. Б. Сосинским, Д. Лейтесом и посетившим Москву Д. Милнором. На

старших курсах был организован (Д. Б. Фуксом, А. В. Зелевинским и Б. Л. Фейгиным) рабочий семинар, который просуществовал до весны 1983 года.

Поток 1981 года был несколько менее многочисленным и составил около 100 человек. На этом курсе лекции по линейной алгебре читал А. Л. Онищик, по общей алгебре А. Г. Кулаков, а по анализу А. Шень.

Кроме того, на квартире Беллы Абрамовны некоторые студенты старших курсов с разных потоков слушали лекции Ю. Н. Тюрина по теории вероятностей и М. С. Маринова по физике.

После ареста В. А. Сендерова и Б. И. Каневского и трагической гибели Беллы Абрамовны осенью 1982 года занятия в Народном Университете почти прекратились. Занятия с оставшимися слушателями велись Е. М. Кузницким до весны 1983 года, ему помогали В. М. Гальперин и М. Р. Соловейчик.

Согласно информации, которую нам удалось собрать, в разное время в Народном Университете преподавали Е. С. Божич, А. В. Бочаров, А. М. Виноградов, В. М. Гальперин, В. А. Гинзбург, С. В. Дужин, А. В. Зелевинский, Б. И. Каневский, И. С. Красильщик, Е. М. Кузницкий, А. Г. Кулаков, В. В. Лычагин, М. С. Маринов, А. Л. Онищик, А. В. Самохин, В. А. Сендеров, М. Р. Соловейчик, А. Б. Сосинский, Ю. Н. Тюрин, Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, А. Шень и В. Б. Шехтман. Организация занятий лежала в основном на Белле Абрамовне Субботовской, Н. Е. Сохор и Б. И. Каневском. Мы приносим извинения если имена некоторых участникам мы не смогли восстановить. Мы будем признательны за замечания, воспоминания (даже отрывочные) и любые другие материалы, имеющие отношение к Народному Университету. Просьба присылать их для возможной последующей публикации по адресу: Москва, 119002, Большой Власьевский переулок, дом 11, «Математическое Просвещение» или электронной почтой на адреса: [kanel@mcsme.ru](mailto:kanel@mcsme.ru), [reznikov@math.biu.ac.il](mailto:reznikov@math.biu.ac.il).

Мы пользуемся предоставившейся возможностью выразить глубокую благодарность лекторам и организаторам за их самоотверженный поступок, который оставил глубокий след в памяти всех участников Народного Университета.

---

# Неравенства и экстремальные задачи

---

## Теория экстремума в простых примерах

Я. Бринкхаус

В. Ю. Протасов

С задачами на минимум и максимум каждый из нас впервые сталкивается в школе, а затем на олимпиадах и вступительных экзаменах, где они, подчас, помимо очень хорошей математической подготовки и сообразительности, требуют поиска нестандартных путей решения. Здесь мы встречаем множество красивых задач, и для каждой приходится изобретать свой метод. Затем, в институте, студентов знакомят с элементами теории экстремума на занятиях по математическому анализу. А тут ситуация обратная: есть методы стандартного решения, но очень мало красивых примеров. Большинство задач, как правило, рутинные. Каждый преподаватель знает, как трудно бывает убедить студента (особенно — увлеченного предметом) переключиться на новые методы решения, и не пытаться решать новые задачи «по-школьному».

В этой статье мы предлагаем экскурс в теорию конечномерных экстремальных задач (именно с них начинаются все стандартные курсы оптимизации в университетах), целиком построенный на примерах и задачах, с минимумом теоретических объяснений. Примеры и задачи собирались авторами в течение многих лет, при подготовке курсов для студентов математических и экономических специальностей в университетах Москвы (МГУ и НМУ) и Нидерландов (университеты Роттердама, Дельфта и Утрехта). По нашему убеждению, каждый университетский курс должен выполнять три основные функции: научить, убедить и заинтересовать. Поэтому примеры и задачи должны быть, во-первых, интересными, во-вторых (и это труднее всего!) — убедительными. Каждый пример должен подчеркивать силу того или иного метода. А кроме того — показывать, что даже олимпиадные задачи, которые имеют красивые элементарные решения, могут решаться в рамках стандартных методов проще, красивее и естественнее. Более того, начала теории экстремальных задач позволяют находить новые доказательства старых классических теорем.

Начнем с задач, которые решаются «школьными» методами: принцип Ферма (производная в точке минимума равна нулю) плюс теорема существования (теорема Вейерштрасса о достижимости минимума непрерывной функции на

компактном множестве) — это тема параграфа 1. Во втором параграфе обратимся к выпуклым задачам. В третьем — к задачам с ограничениями, решаемым с помощью правила множителей Лагранжа. Среди предложенных примеров — как классические теоремы из различных областей математики (основная теорема алгебры, приведение квадратичной формы к главным осям, теорема Биркгофа и т. д., некоторые классические неравенства, закон Снеллиуса о преломлении света, задачи Дидоны, Фаньяно, Торичелли, сети Штейнера и т. д.), так и относительно новые задачи геометрии, алгебры и анализа, а также задачи, предлагавшиеся на различных студенческих и школьных олимпиадах. Несколько примеров из математической экономики собраны в отдельный параграф. Каждый параграф мы начинаем с короткого теоретического введения.

В статье предлагается 50 задач для самостоятельного решения, около трети из них — довольно трудные. Надеемся, что статья будет интересна преподавателям математики, студентам младших курсов и ученикам математических школ.

## 1. ПРИНЦИП ФЕРМА

**Функции одной переменной.** Метод, называемый принципом Ферма, общеизвестен: если функция  $f$  дифференцируема, то каждая точка ее локального минимума (максимума) является стационарной точкой, т. е. является решением уравнения  $f'(x) = 0$ . Об этом еще до Ферма было сказано:

«По обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно» (Иоганн Кеплер).

Обратное неверно: стационарная точка может не быть точкой локального экстремума, как показывает простейший пример: функция  $x^3$  в точке  $x = 0$ . Чтобы найти экстремальные значения функции  $f$ , решаем уравнение  $f'(x) = 0$ , находим все стационарные точки, которые будут «подозрительными» на экстремум. Остается воспользоваться теоремой существования: непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$  достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Будем считать этот факт геометрически очевидным, и примем его без доказательства. Таким образом, точки максимума и минимума существуют, а значит, находятся среди «подозрительных» — либо стационарных, либо конечных. Тогда простым перебором находим точки минимума и максимума.

**Задача с двумя или более переменными.** Принцип Ферма распространяется на этот случай без существенных изменений. Чтобы найти экстремальные значения функции  $f(x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , находим стационарные точки из уравнения

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{x_j}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Уравнений здесь столько же, сколько неизвестных. Далее пользуемся теоремой Вейерштрасса (теоремой существования), заменив в ней «отрезок  $[a, b]$ » на «компакт  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ » — ограниченное замкнутое множество. «Замкнутое» означает, что множество содержит все свои предельные точки.

Естественный вопрос: что делать, если минимум ищется на неограниченном множестве? Например, на всем  $\mathbb{R}^n$ ? А если — на незамкнутом множестве, например, на открытом интервале  $(a, b)$ ? В этом случае какие-нибудь дополнительные свойства функции  $f$  могут помочь. Часто используют два утверждения, доказательства которых будут простыми упражнениями для читателя.

**ЛЕММА 1.** *Если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, и при этом  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \rightarrow \infty$ , то она достигает своего минимума на  $\mathbb{R}^n$ .*

**ЛЕММА 2.** *Если функция  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow a$  и при  $x \rightarrow b$ , то она достигает своего минимума на интервале  $(a, b)$ .*

Так же формулируются соответствующие утверждения на максимум. Начнем с одного известного примера.

**ПРИМЕР 1. ЗАКОН ШНЕЛЛИУСА.** Луч света пересекает прямую границу двух сред, входя под углом  $\alpha$ , и выходя под углом  $\beta$  (оба угла отсчитываются от нормали к границе). Тогда  $\frac{\sin \alpha}{v_a} = \frac{\sin \beta}{v_b}$ , где  $v_a$  и  $v_b$  — скорости света в этих средах.

**РЕШЕНИЕ.** Считаем известным, что луч света при своем движении от одной точки к другой выбирает такой путь, для прохождения которого требуется минимальное время по сравнению с любым другим возможным путем. (Этот принцип в оптике также установил Ферма.) Если взять на луче точки  $A$  и  $B$  по разные стороны от границы, а саму границу обозначить через  $l$ , получим задачу на минимум:

$$\begin{cases} f(M) = \frac{AM}{v_a} + \frac{BM}{v_b} \rightarrow \min, \\ M \in l. \end{cases} \quad (1)$$

Точка минимума существует, это гарантирует лемма 1. Обозначим ее через  $M_0$ . Теперь нужно вычислить производную функции  $f$ . Как это сделать? Можно выразить саму функцию  $f$  по теореме Пифагора, или по теореме косинусов, затем найти ее производную. Удобнее, однако, (и это может показаться парадоксальным), рассмотреть  $f$  не как функцию на прямой линии, а как функцию на всей плоскости. Производная  $f'$  (градиент) длины отрезка  $AM$  в точке  $M$  является вектором  $u_a$  единичной длины, сонаправленным с вектором  $\overrightarrow{AM}$ . Аналогично определяем вектор  $u_b$  — производную длины  $BM$ . Итак,  $f' = u_a/v_a + u_b/v_b$ . Производная функции  $f$  вдоль прямой  $l$  — это проекция вектора  $f'$  на эту прямую. Таким образом,

$$f'(M) = \frac{\sin \alpha}{v_a} |u_a| - \frac{\sin \beta}{v_b} |u_b|.$$

Но если  $M_0$  — точка минимума, то  $f'(M_0) = 0$ . А поскольку  $|u_a| = |u_b| = 1$ , получаем окончательно  $\frac{\sin \alpha}{v_a} = \frac{\sin \beta}{v_b}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Аналогично, и даже несколько проще, можно вывести известный закон отражения света: угол падения равен углу отражения. Нужно взять

две произвольные точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от прямой  $l$  и решить экстремальную задачу (1) при  $v_a = v_b$ . Конечно же, эту задачу можно решить без всяких производных, чисто геометрически, используя симметрию относительно прямой  $l$ . Однако, у нашего способа есть, как минимум, два преимущества. Во-первых, он без изменения распространяется на случай  $v_a \neq v_b$  (а геометрически это сделать непросто!). Во-вторых, и это самое главное, он находит не только точки минимума, но и все стационарные точки функции  $f$ . Так, мы доказали, что задача (1) всегда имеет единственную стационарную точку, и эта точка характеризуется свойством  $\sin \alpha / v_a = \sin \beta / v_b$ . Воспользуемся этим в следующем примере из эргодической теории.

**ПРИМЕР 2. ТЕОРЕМА БИРКГОФА.** Для произвольной гладкой замкнутой кривой на плоскости, ограничивающей выпуклую фигуру, существует бильярд с  $n$  вершинами (бильярдом называется многоугольник с вершинами на данной кривой, любые две соседние стороны которого образуют с кривой равные углы).

**РЕШЕНИЕ.** Рассмотрим множество всех  $n$ -угольников с вершинами на данной кривой. Очевидно, это множество будет компактным, если только мы позволим соседним вершинам совпадать. Следовательно, среди этих многоугольников найдется тот, который имеет максимальный периметр. Он и является бильярдом. Для доказательства заметим сначала, что он имеет ровно  $n$  различных вершин (в противном случае добавим несколько недостающих вершин, периметр от этого увеличится). Возьмем теперь три соседние вершины  $A_1, A_2, A_3$  и обозначим через  $l$  касательную к кривой в точке  $A_2$ . Таким образом,  $l = \{A_2 + tu, t \in \mathbb{R}\}$ , где  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $|u| = 1$  — направляющий вектор прямой. Предположим, отрезки  $A_2A_1$  и  $A_2A_3$  образуют с  $l$  не равные углы. Тогда производная функции  $f(t) = f(M) = A_1M + A_2M$ , где  $M = A_2 + tu$ , не равна нулю в точке  $t = 0$  (замечание 1). При  $t \rightarrow 0$  имеем  $f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t)$ , где  $o(t)$ , как обычно, обозначает величину, бесконечно малую по сравнению с  $t$ . С другой стороны,  $l$  — касательная, поэтому для произвольной точки  $N$  кривой, близкой к  $A_2$ , имеем  $f(N) = f(t) + o(t)$ , где  $M = A_2 + tu$  — ближайшая к  $N$  точка прямой  $l$ . Итак,  $f(N) = f(0) + f'(0)t + o(t)$ . Но поскольку  $f'(0) \neq 0$ , мы видим, что на кривой существуют точки  $N$ , для которых  $f(N) > f(0) = f(A_2)$ , а это противоречит максимальной периметра нашего многоугольника.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В теореме Биркгофа гладкость кривой существенна! Кривая должна быть, как минимум, дифференцируемой в каждой точке, иначе бильярда может не существовать. Например, кривая, ограничивающая тупоугольный треугольник, не имеет треугольного бильярда. Почему? Если треугольник имеет бильярд из трех вершин, то эти вершины лежат в основаниях высот (пример 8), а для тупоугольного треугольника два основания из трех лежат вне треугольника.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Бильярды изучаются в эргодической теории, теории динамических систем, механике (см., например, [11]). Они представляют собой замкнутые траектории движения механических систем в фазовой плоскости. Мы

видели, что вписанный  $n$ -угольник максимального периметра является бильярдом. Однако для остроугольных треугольников бильярд (треугольный) соответствует не максимальному, а минимальному периметру (задача Фаньяно, пример 8). Это может показаться противоречием. Но дело в том, что как в минимальном, так и в максимальном случае бильярд соответствует стационарному положению вершин, когда все частные производные периметра по вершинам равны нулю. Это отражает один из основных принципов классической механики (принцип Гамильтона): движение механической системы происходит вдоль стационарных траекторий, где производные действия равны нулю. При этом само действие не обязано быть минимальным, как предполагалось математиками XVIII века. Подробнее об этом см., например, [10].

УПРАЖНЕНИЕ 1. Фокальное свойство эллипса. Луч света, выходящий из фокуса эллипса, отразившись от его поверхности, попадает во второй фокус.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите, что стороны любого  $n$ -угольного бильярда данного эллипса касаются некоторого фиксированного эллипса. Как связан этот эллипс с исходным?

УПРАЖНЕНИЕ 3. Сформулируйте и докажите фокальные свойства гиперболы и параболы.

ПРИМЕР 3. Через данную точку внутри угла проведите отрезок наименьшей длины с вершинами на сторонах угла.

РЕШЕНИЕ. Лемма 1 гарантирует существование наименьшего отрезка. Обозначим его через  $AB$ , а данную фиксированную точку внутри угла — через  $M$ . Проведем через  $M$  другой отрезок  $A'B'$  с вершинами на сторонах угла. Пусть  $\delta$  — ориентированный угол между  $A'B'$  и  $AB$ . Функция  $f(\delta) = A'B'$  достигает своего минимума в точке  $\delta = 0$ , поэтому  $f'(0) = 0$ . Пусть  $\alpha = \angle KAB$ ,  $\beta = \angle KBA$ , где  $K$  — вершина угла, применив теорему синусов к треугольникам  $MVB'$  и  $MAA'$ , получим

$$MB' = MB \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \delta)}; \quad MA' = MA \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \delta)},$$

следовательно

$$\begin{aligned} \Delta f &= A'B' - AB = MB' + MA' - MB - MA = \\ &= MB \left( \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \delta)} - 1 \right) + MA \left( \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \delta)} - 1 \right) = \\ &= -MB \frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta + \delta)} + MA \frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha - \delta)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\Delta f}{\Delta \delta} = -\frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\delta} \left( MB \frac{\cos\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta + \delta)} - MA \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha - \delta)} \right).$$

Поскольку  $\frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\delta} \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и при этом

$$\frac{\cos\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta + \delta)} \rightarrow \operatorname{ctg} \beta, \quad \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha - \delta)} \rightarrow \operatorname{ctg} \alpha,$$

получаем окончательно

$$f'(0) = -MB \operatorname{ctg} \beta + MA \operatorname{ctg} \alpha.$$

Но так как  $f'(0) = 0$ , то для кратчайшего отрезка  $AB$  получаем

$$MB \operatorname{ctg} \beta = MA \operatorname{ctg} \alpha.$$

Как геометрически охарактеризовать это свойство? Опустим перпендикуляр  $KH$  на  $AB$ . Нетрудно проверить, что  $HВ/HА = \operatorname{ctg} \beta / \operatorname{ctg} \alpha$ . С другой стороны,  $MA/MB = \operatorname{ctg} \beta / \operatorname{ctg} \alpha$ , поэтому  $MA = HB$ ,  $MB = HA$ . Итак,

*кратчайший отрезок  $AB$  характеризуется следующим свойством: проекция вершины угла на  $AB$  симметрична точке  $M$  относительно середины отрезка  $AB$ .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Почему мы ограничились лишь тем, что охарактеризовали положение отрезка  $AB$ , а не дали способа его построения? Дело в том, что для произвольного угла этот отрезок не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Именно поэтому эта «простая» геометрическая задача имеет столь громоздкое решение. Приведенное решения является самым коротким из всех, известных авторам (см. также [15]).

Если бы существовало такое построение, которое находило бы кратчайший отрезок для любого угла, то оно годилось бы и для прямого угла. Если угол  $K$  прямой, то  $MA/MB = \operatorname{ctg} \beta / \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) / \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha$ . С другой стороны,  $MA/MB = \operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\gamma$  — угол между  $KM$  и  $KA$ . Итак,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \gamma}$ . Построить отрезок  $AB$  означает найти кубический корень из числа  $\operatorname{tg} \gamma$ . Последнее, как известно, не выполнимо с помощью циркуля и линейки.

В экстремальных задачах такое случается довольно часто, когда возможно только охарактеризовать положение точки минимума (максимума), а не найти ее конструктивно (задачи 15–17 и 38–40).

УПРАЖНЕНИЕ 4. Прямой, проходящей через данную точку внутри угла, отрезать от этого угла треугольник наименьшей площади. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную. Какое из них проще?

УПРАЖНЕНИЕ 5. То же, но для треугольника наименьшего периметра. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Касательной к данной окружности, лежащей внутри угла, отрезать от этого угла треугольник а) минимальной площади; б) минимального периметра.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы сумма  $KA + KB$  была наименьшей ( $K$  — вершина угла,  $A$  и  $B$  — точка пересечения прямой со сторонами угла.)

Рассмотрим теперь несколько примеров из алгебры и анализа.

**ПРИМЕР 4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ.** Многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от тождественной константы, имеет комплексный корень.

**РЕШЕНИЕ.** Возьмем произвольный многочлен  $p(z)$ , и рассмотрим величину  $|p(z)|$  как функцию двух действительных переменных  $x$  и  $y$ , где  $z = x + yi$ . По лемме 1 эта функция достигает своего минимума в некоторой точке  $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Не ограничивая общности, с возможным сдвигом аргумента, полагаем  $\tilde{z} = 0$ . Предположим, что в этой точке многочлен  $p(z)$  не обращается в ноль. Пусть  $k$  — наименьшее положительное число, для которого коэффициент при  $z^k$  в многочлене  $p(z)$  ненулевой. Тогда  $p(z) = a_0 + a_k z^k + \dots + a_n z^n$ ,  $k \geq 1$  и  $a_k \neq 0$ . Более того,  $a_0 \neq 0$ , поскольку  $a_0 = p(0) = p(\tilde{z}) \neq 0$ . Теперь возьмем одно из решений  $u \in \mathbb{C}$  уравнения  $a_0 + a_k z^k = 0$ , т.е. один из комплексных корней  $k$ -той степени из числа  $-a_0 a_k^{-1}$ . Получаем

$$|p(tu)| = |a_0 + a_k (tu)^k + o(t^k)| = |(1 - t^k)a_0 + o(t^k)| < |a_0| = |p(0)|,$$

для достаточно малых  $t > 0$ . Получили противоречие: по предположению  $\tilde{z} = 0$  — точка минимума для  $|p(z)|$ . Теорема доказана.

**УПРАЖНЕНИЕ 8.** Принцип максимума для аналитической функции. Докажите, что максимум модуля аналитической функции (функции комплексной переменной  $z$ , являющейся суммой абсолютно сходящегося степенного ряда  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ) в некотором круге на комплексной плоскости достигается на границе этого круга.

Рассмотрим теперь несколько примеров из теории приближений.

**УПРАЖНЕНИЕ 9.** Принцип наименьших квадратов. Предположим, нами получены 5 пар чисел  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq 5$ : (1, 2), (2, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 14). Мы хотим подобрать линейную функцию  $y = ax + b$ , которая бы выражала связь между переменными в этих парах наилучшим образом. Один из способов — выбрать функцию, для которой сумма квадратов  $f(a, b) = \sum_{i=1}^5 (y_i - ax_i - b)^2$  была бы наименьшей. Найдите эту функцию.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Принцип наименьших квадратов имеет множество приложений. Например «решить систему линейных уравнений, которая не имеет решения». Более точно: найти точку минимума функции  $f(x) = |Ax - b|$  на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Здесь  $A$  — заданная  $m \times n$ -матрица, а  $b \in \mathbb{R}^m$  — данный вектор; норма евклидова  $|x| = \sum_{i=1}^m x_i^2$ . Эта задача всегда имеет решение (лемма 1), причем единственное.

**ПРИМЕР 5. МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.** Принцип наименьших квадратов приближает функцию, заданную в нескольких точках, многочленом первой степени. А что, если приближать функцию многочленами более высоких степеней? И не на конечном числе точек, а на целом отрезке? Какой многочлен будет наилучшим? Напомним, что многочлен Тейлора приближает функцию лишь в малой окрестности точки, нам же нужно приблизить ее на отрезке. К сожалению, коэффициенты многочленов наилучшего приближения в такой задаче могут быть очень велики. Это обстоятельство делает задачу чувствительной по отношению к малым изменениям функции. Поэтому обычно делают так: для

каждого целого  $k \geq 0$  решаем экстремальную задачу  $\int_a^b |p_k(x)|^2 dx \rightarrow \min$ , где  $p_k$  — неизвестный многочлен степени  $k$  со старшим коэффициентом 1. Таким образом, для каждого  $k \geq 0$  мы приближаем функцию «тождественный ноль» многочленом степени  $k$ . Наилучшие многочлены  $p_k$  называются *многочленами Лежандра*. Затем мы находим для данной функции  $f$  многочлен наилучшего приближения в виде линейной комбинации многочленов  $p_k$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10. Найдите многочлен Лежандра  $p_2(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ , т. е. решите экстремальную задачу  $\int_{-1}^1 (t^2 + x_2 t + x_1)^2 dt$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11. Найдите многочлен Лежандра  $p_3(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

УПРАЖНЕНИЕ 12. ФОРМУЛА РОДРИГЕСА. Докажите, что многочлен Лежандра  $p_k(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$  вычисляется по формуле

$$p_k(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{(dt)^n} (t^2 - 1)^n. \quad (2)$$

*Подсказка.* Рассмотрите соответствующую экстремальную задачу и докажите, что ее решение единственно и характеризуется следующим свойством: многочлен  $p_k$  ортогонален всем многочленам меньших степеней, то есть

$$\int_{-1}^1 t^r p_k(t) dt = 0, \quad 0 \leq r \leq k - 1.$$

Далее по индукции покажите, что многочлены (2) этим свойством обладают.

## 2. ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. Непрерывная функция  $f$  называется выпуклой, если для любых  $x_1, x_2$  выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2).$$

Если это неравенство строгое для любых  $x_1 \neq x_2$ , то функция называется строго выпуклой. Если функция одной переменной дважды дифференцируема на отрезке, то удобным критерием ее выпуклости является неотрицательность второй производной на этом отрезке:  $f''(x) \geq 0$ . Если же вторая производная везде строго положительна (или, более точно, не обращается в тождественный ноль ни на каком интервале), то функция строго выпукла. Для экстремальных задач выпуклые функции чрезвычайно удобны, благодаря двум своим свойствам:

- ▷ Любой локальный минимум выпуклой функции является ее глобальным минимумом на всем отрезке.
- ▷ Если функция  $f$  выпукла, то условие стационарности  $f'(\hat{x}) = 0$  является не только необходимым для минимальности функции в точке  $\hat{x}$ , но и достаточным.

Для строго выпуклых функций добавляется еще одно замечательное свойство:

▷ Строго выпуклая функция имеет не более одной точки минимума.

Более того, для строго выпуклых функций выполняется принцип максимума: точка максимума на компактном множестве всегда лежит на границе этого множества.

**ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.** Определения и свойства те же, что и в случае одной переменной. Два отличия: везде отрезок заменяется на выпуклое тело (выпуклый компакт), а также критерий выпуклости  $f'' \geq 0$  заменяется на условие неотрицательной определенности квадратичной формы, заданной матрицей из вторых производных. Ввиду практической сложности этого критерия, мы не будем его использовать, а будем проверять выпуклость функции многих переменных просто по определению (что в большинстве случаев гораздо проще). Подробнее о свойствах выпуклых функций и о выпуклых экстремальных задачах см. [2, 3].

**ПРИМЕР 6.** Дан выпуклый четырехугольник. Доказать, что среди всех отрезков, проходящих через точку пересечения диагоналей и имеющих концы на границе четырехугольника, наибольшую длину имеет одна из диагоналей.

Несмотря на такой «школьный» вид и на геометрическую очевидность этого факта, доказать его непросто. Доказательства, которые можно встретить в литературе, используют довольно громоздкие вычисления. Наиболее простое из известных нам рассуждений использует выпуклость. Начнем с того, что установим следующий полезный факт, который пригодится и в других задачах:

**ЛЕММА 3.** *Дана прямая  $a$  и точка  $P$ , не лежащая на ней. Для произвольной точки  $M \in a$  обозначим через  $\alpha$  ориентированный угол между  $a$  и отрезком  $PM$ . Тогда длина отрезка  $PM$  является строго выпуклой функцией угла  $\alpha$ .*

Для доказательства опустим перпендикуляр из  $P$  на прямую  $a$  (пусть  $h$  — его длина) и выразим  $MP = f(\alpha) = \frac{h}{\sin \alpha}$ . Читатель без труда проверит, что  $f''(\alpha) > 0$ .

Отметим, что мы могли бы обозначить через  $\alpha$  угол, образуемый отрезком  $MP$  с любым фиксированным направлением, и утверждение леммы 3 осталось бы верным (поскольку сдвиг аргумента не влияет на строгую выпуклость функции).

Вернемся к примеру 6.

**РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 6.** Пусть  $P$  — точка пересечения диагоналей,  $M$  и  $N$  — точки на границе четырехугольника, причем отрезок  $MN$  проходит через  $P$ . Пусть также  $\alpha$  — угол между отрезком  $MP$  и некоторым фиксированным направлением. Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответствуют диагоналям четырехугольника, таким образом  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ . Согласно лемме 3 обе функции  $f_1(\alpha) = MP$  и  $f_2(\alpha) = NP$  строго выпуклы на отрезке  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , значит и их сумма  $f_1 + f_2 = MN$  также строго выпукла. Следовательно, ее максимум достигается на конце отрезка, т. е., на одной из диагоналей четырехугольника.

Из леммы 3 можно «задаром» получить ряд интересных следствий. Например, такое:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Биссектриса треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.*

Для доказательства достаточно применить определение строгой выпуклости

$$f\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(\alpha_1) + f(\alpha_2))$$

к функции  $f(\alpha) = MP$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Полезно также следующее усиление леммы 3: функция  $f(\alpha) = \ln MP$  также строго выпукла. В самом деле,

$$\left(\ln MP\right)'' = \left(\ln \frac{h}{\sin \alpha}\right)'' = (-\operatorname{ctg} \alpha)' = 1/\sin^2 \alpha > 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 13. Докажите, что биссектриса треугольника меньше среднего геометрического двух сторон, между которыми она заключена.

Всем известна задача о точке на прямой, для которой сумма расстояний до двух фиксированных точек минимальна. Ответ легко получается после симметрии относительно прямой. А каков будет ответ, если точек не две, а три? А если рассмотреть трехмерный аналог: для какой точки плоскости сумма расстояний до фиксированных точек пространства минимальна? Наконец, часто возникает такая задача: Найти точку на плоскости (или, более общо, в  $\mathbb{R}^n$ ), сумма расстояний от которой до  $m$  данных точек минимальна. Сколько точек минимума существует в таких задачах, и как их охарактеризовать? Решения этих и многих других задач опираются на ключевую лемму:

ЛЕММА 4. а) Пусть данные точки  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 3$ , не все лежат на одной прямой. Тогда сумма расстояний

$$f(M) = A_1M + \dots + A_mM$$

является строго выпуклой функцией точки  $M \in \mathbb{R}^n$ .

б) Пусть  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 2$  — данные точки, и  $H$  — аффинная плоскость в  $\mathbb{R}^n$ , не содержащая ни одной из этих точек. Тогда функция  $f(M) = A_1M + \dots + A_mM$ ,  $M \in H$ , строго выпукла на  $H$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только пункт а), доказательство б) полностью аналогично. Нужно показать, что для любой пары различных точек  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $f(M) < \frac{1}{2}(f(M_1) + f(M_2))$ , где  $M$  — середина отрезка  $M_1M_2$ . Поскольку  $A_jM$  — медиана треугольника  $M_1A_jM_2$ , ее длина не превосходит  $\frac{1}{2}(A_jM_1 + A_jM_2)$ , причем неравенство строгое, если  $A_j$  не лежит на прямой  $M_1M_2$ . Сложив все неравенства от  $j = 1$  до  $m$  и замечая, что хотя бы одно из них строгое (так как не все точки  $A_j$  лежат на одной прямой), получаем требуемое.

ПРИМЕР 7. Точка ФЕРМА – ГОРИЧЕЛЛИ. Если углы треугольника меньше  $2\pi/3$ , то сумма расстояний от точки до вершин треугольника достигает своего минимума в единственной точке, из которой все стороны треугольника видны под углом  $2\pi/3$ .

РЕШЕНИЕ. Оставим читателю доказательство существования такой точки  $T$  и докажем, что в ней достигается минимум суммы расстояний. Так как все углы  $ABC$  меньше  $2\pi/3$ , то  $T$  не совпадает ни с одной из вершин треугольника. Поэтому функция  $f(M) = MA + MB + MC$  дифференцируема в точке  $M = T$ ; ее производная равна сумме трех единичных векторов, сонаправленных векторам  $AT, BT$  и  $CT$ . Так как углы между этими векторами равны  $2\pi/3$ , то их сумма равна нулю. Итак,  $f'(T) = 0$ . Используя строгую выпуклость функции  $f$ , заключаем, что  $T$  — единственная точка минимума функции  $f$ .

ПРИМЕР 8. ЗАДАЧА ФАНЬЯНО. Вписать в данный остроугольный треугольник  $ABC$  треугольник наименьшего периметра (на каждой стороне  $ABC$  должна лежать одна вершина треугольника).

РЕШЕНИЕ. Покажем, что единственным решением задачи является ортотреугольник (с вершинами в основаниях высот треугольника  $ABC$ ). Пусть  $A', B', C'$  — три точки, лежащие на соответствующих сторонах треугольника  $ABC$ . Зафиксируем две из них  $A', B'$  и рассмотрим функцию одной переменной  $g(C') = A'C' + B'C'$ . Ее производная равна нулю, если отрезки  $A'C', B'C'$  образуют равные углы с прямой  $AB$  (замечание 1). Аналогично с двумя другими суммами. Итак, производная функции  $f(A', B', C') = A'B' + B'C' + C'A'$  равна нулю если отрезки  $A'B', B'C', C'A'$  образуют попарно равные углы со сторонами треугольника  $ABC$ . Стороны ортотреугольника этим свойством обладают. Тогда из строгой выпуклости функции  $f$  (лемма 4) следует, что ортотреугольник является единственным треугольником минимального периметра.

УПРАЖНЕНИЕ 14. Исследуйте задачу Фаньяно для четырехугольника. Для каких четырехугольников минимальный вписанный четырехугольник существует, и будет ли он единственным?

УПРАЖНЕНИЕ 15. В трехмерном пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует единственная тройка точек  $A, B, C$  (по одной на каждой прямой), обладающая таким свойством: каждая из трех прямых образует равные углы с двумя соответствующими сторонами треугольника  $ABC$  ( $AB$  и  $AC$  образуют равные углы с прямой, проходящей через точку  $A$  и т. д.)

УПРАЖНЕНИЕ 16. На плоскости даны  $n$  точек. При каких условиях на эти точки найдется точка  $M$ , для которой сумма  $n$  единичных векторов с общим началом в  $M$ , направленных к этим точкам, равна нулю? Сколько таких точек  $M$  может быть?

УПРАЖНЕНИЕ 17. Пусть  $M$  — точка внутри тетраэдра  $ABCD$ , для которой сумма расстояний до вершин минимальна. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра видны из точки  $M$  под равными углами. Покажите также, что биссектрисы двух этих углов лежат на одной прямой. Сформулируйте условия на тетраэдр, при которых такая точка существует (по условию, она не совпадает с вершинами.)

УПРАЖНЕНИЕ 18. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4 км. Жители хотят соединить их системой дорог так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую. Они собрали деньги на 11 км дороги. Хватит ли этого?

УПРАЖНЕНИЕ 19. Аналогичная задача для правильного тетраэдра. Паук связал все вершины правильного тетраэдра. Какова при этом наименьшая длина паутины? Дадут

ли ответ четыре отрезка, соединяющие вершины с центром, или паук сможет обойтись меньшей длиной?

УПРАЖНЕНИЕ 20. Сетью Штейнера для данных точек  $A_1, \dots, A_n$  называется система отрезков (граф), соединяющая эти точки и имеющая наименьшую суммарную длину.

Примем без доказательства, что сеть Штейнера существует для любого набора точек. Точки  $A_1, \dots, A_n$  будем называть *действительными вершинами* этого графа, а остальные его вершины — *ложными*.

а) докажите, что сеть Штейнера является односвязным графом, т. е. она связывает все вершины и не содержит замкнутых путей, или, что то же самое, для любой пары вершин существует единственный путь, их соединяющий;

б) докажите, что из каждой ложной вершины сети Штейнера выходит ровно 3 отрезка, причем углы между ними равны  $2\pi/3$ ;

с) докажите, что из каждой действительной вершины выходят 1, 2 или 3 отрезка. В случае двух отрезков угол между ними не меньше  $2\pi/3$ , в случае трех отрезков углы между ними равны  $2\pi/3$ ;

д) постройте сеть Штейнера для треугольника. Для квадрата (сравните с упражнением 18). Для равнобедренной трапеции. Для правильного пятиугольника. Для правильного тетраэдра (сравните с упражнением 19). Для куба.

Мы завершаем этот параграф несколькими примерами из линейной алгебры. Напомним, что произведением Адамара  $x * y$  точек  $x, y \in \mathbb{R}^n$  называется точка с координатами  $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \in \mathbb{R}^n$ , где  $x_i, y_i$  — координаты  $x$  и  $y$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21. Пусть аффинные плоскости  $P$  и  $D$  являются ортогональными дополнениями друг к другу в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что каждая из них содержит положительную точку (точку с положительными координатами). Докажите, что тогда каждая положительная точка пространства  $\mathbb{R}^n$  единственным образом представляется в виде произведения Адамара точки из  $P$  и точки из  $D$ .

*Подсказка.* Для каждой положительной точки  $x \in \mathbb{R}^n$  рассмотрите экстремальную задачу

$$f_x(p, d) = p^T \cdot d - x^T \cdot \ln(p * d) \rightarrow \min, \quad p \in P, d \in D, p > 0_n, d > 0_n.$$

Здесь логарифм берется покоординатно:  $\ln v = (\ln v_1, \dots, \ln v_n)^T$  для положительных точек  $v$ . Сравнение также покоординатное:  $x > 0_n$  означает, что  $x_i > 0$  для всех  $i$  от 1 до  $n$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из этой задачи, в частности, можно вывести условия дополняющей нежесткости в задачах линейного программирования: существуют неотрицательные точки  $p \in P$  и  $d \in D$ , для которых  $p_i d_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  (см. также [9]).

### 3. ПРАВИЛО МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Каждый локальный минимум/максимум функции  $f_0(x_1, \dots, x_n)$ , ограниченной несколькими условиями типа равенств  $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , является решением системы уравнений

$$\mathcal{L}_{x_j}(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \lambda)$  обозначает функцию Лагранжа  $\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$  для подходящих множителей  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ , хотя бы один из которых не равен нулю (правило множителей Лагранжа). Предполагается, что все функции  $f_i$  непрерывно дифференцируемы. Заметим, что в этой системе неизвестных на одно больше, чем уравнений. Тем не менее, мы всегда можем избавиться от этой неопределенности, предполагая, что  $\lambda_0$  равно либо 0, либо 1, и рассмотрев только эти два случая. Это не нарушает общности, поскольку функция Лагранжа однородна относительно множителей  $\lambda_i$ . Из соображений экономии мы всегда будем предполагать  $\lambda_0 = 1$  и будем опускать доказательства того, что случай  $\lambda_0 = 0$  невозможен. На самом деле, случай  $\lambda_0 = 0$  также может давать точки экстремума, однако происходит это крайне редко, в основном, в вырожденных примерах. Смысл правила множителей Лагранжа состоит в том, что оно позволяет избежать необходимости явно выражать  $m$  переменных из числа  $x_1, \dots, x_n$  через остальные переменные, используя равенства  $f_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Обычно правило Лагранжа проще в использовании, чем метод исключения неизвестных, кроме того оно часто позволяет понять смысл и природу решения.

Проиллюстрируем силу этого метода на нескольких примерах.

ПРИМЕР 9. Найдите минимальное значение функции

$$f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$\text{при условии } g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Используя уравнение  $g(x, y) = 0$ , мы можем выразить  $y$  через  $x$  (или  $x$  через  $y$ ). Однако прямая подстановка этого выражения в уравнение  $f'(x, y(x)) = 0$  приводит к уравнению шестой степени. На самом деле — даже к двум уравнениям, из-за знака  $\pm$  перед дискриминантом в выражении для  $y(x)$ . Чтобы этого избежать, поступаем по-другому: сохраняем обе переменные  $x, y$  и составляем лагранжиан:  $\mathcal{L} = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ . Дифференцируя по  $x$  и по  $y$ , получаем систему

$$\begin{cases} 10x + 2y + \lambda(14x + 2y) = 0, \\ 6y + 2x + \lambda(8y + 2x) = 0. \end{cases}$$

Выражая  $\lambda$  из обеих уравнений и приравнявая, получаем  $\frac{10x + 2y}{14x + 2y} = \frac{6y + 2x}{8y + 2x}$ . Решая это однородное уравнение, имеем  $\frac{y}{x} = -1$  или 2. Теперь подставляя в уравнение  $g(x, y) = 0$ , получаем несколько «подозрительных» на экстремум точек  $(x, y)$ . Вычисляя значение функции  $f$  в каждой из них, убеждаемся, что минимум достигается в точках  $(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  и  $(x, y) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ . Далее остается сослаться на существование точки минимума (уравнение  $g(x, y) = 0$  определяет эллипс, а значит — компактное множество).

УПРАЖНЕНИЕ 22. Задача о максимальной энтропии. Для  $n$  положительных чисел  $x_1, \dots, x_n$  таких, что  $\sum_{k=1}^n x_k = 1$  найти наименьшее возможное значение величины  $\sum_{k=1}^n x_k \ln x_k$  (эта величина, взятая со знаком минус, называется энтропией).

УПРАЖНЕНИЕ 23. Каковы наибольшее и наименьшее значение суммы квадратов  $n$  чисел, если сумма их четвертых степеней равна 1?

УПРАЖНЕНИЕ 24. Если сумма пяти чисел (не обязательно положительных) равна 1, а сумма их квадратов равна 13, то каково наименьшее возможное значение суммы их кубов?

УПРАЖНЕНИЕ 25. Если сумма пяти чисел равна 1, а сумма их квадратов равна 11, то каково наибольшее возможное значение суммы их кубов?

УПРАЖНЕНИЕ 26.  $\sum_{i=1}^5 x_i^4 \rightarrow \text{extr}, \sum_{i=1}^5 x_i = \sum_{i=1}^5 x_i^3 = 0, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 4.$

*Подсказка к последним четырем задачам:* обычно нет необходимости вычислять множители Лагранжа  $\lambda_j$ . Из уравнений на лагранжиан следует, что все числа  $x_i$  должны удовлетворять одному и тому же уравнению, следовательно, каждое из них может принимать одно из нескольких значений — корней этого уравнения. Далее останется рассмотреть случаи.

ПРИМЕР 10. ШАРНИРНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДИ. Стороны четырехугольника имеют фиксированные длины и соединены шарнирами в вершинах так, что четырехугольник может менять свою форму. В каком положении площадь четырехугольника максимальна?

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Эта задача была известна еще древним грекам, однако решена она была только в XIX веке выдающимся швейцарским геометром Якобом Штейнером (1796–1863). Оказывается, что наибольшая площадь шарнирного четырехугольника выражается через длины его сторон по формуле, похожей на формулу Герона (следствие 2).

РЕШЕНИЕ. Пусть  $a, b, c, d$  — длины сторон четырехугольника. Обозначим через  $\alpha$  угол между  $a$  и  $b$ , и через  $\beta$  — угол между  $c$  и  $d$ . Пусть также  $e$  — диагональ, соединяющая два других угла. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников  $abe$  и  $cde$ :

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta.$$

Как связаны переменные  $\alpha$  и  $\beta$ ? Применив теорему косинусов к треугольникам  $abe$  и  $cde$ , получим  $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$  и  $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta$ . Таким образом,

$$\begin{cases} S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(ab \sin \alpha + cd \sin \beta) & \rightarrow \max, \\ a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta. \end{cases} \quad (3)$$

Выписываем лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{2}(ab \sin \alpha + cd \sin \beta) + \lambda(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha - c^2 - d^2 + 2cd \cos \beta).$$

Дифференцируем по  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha = 0 & \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab \cos \alpha + 2\lambda ab \sin \alpha = 0, \\ \mathcal{L}_\beta = 0 & \Leftrightarrow \frac{1}{2}cd \cos \beta - 2\lambda cd \sin \beta = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из первого уравнения получаем  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4\lambda}$ , из второго  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4\lambda}$ . Итак,  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$ , следовательно  $\alpha = \pi - \beta$ . Это означает, что четырехугольник  $abcd$  вписан в окружность. Таким образом,

*среди всех четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.*

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Мы не стали решать систему (4) полностью, например, мы не стали искать  $\lambda$ . В этом не было необходимости, мы использовали множитель  $\lambda$  только для, чтобы вывести равенство  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$ . В большинстве случаев при использовании правила множителей Лагранжа не нужно находить множители.

Интуитивно ясно, что существует единственное положение шарнирного четырехугольника, при котором он вписан в окружность. Если немного увеличить угол  $\alpha$ , длина диагонали  $e$  увеличится, поэтому угол  $\beta$  также увеличится. Таким образом, сумма углов  $\alpha + \beta$  является непрерывной возрастающей функцией аргумента  $\alpha$ . Поэтому для единственного значения  $\alpha$  выполнено равенство  $\alpha + \beta = \pi$ . Нетрудно также найти это значение  $\alpha$ . Заменяя  $\beta$  на  $\pi - \alpha$  во втором уравнении системы (3), получаем  $\cos \alpha = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)/(2ab + 2cd)$ . Заменяя  $\sin \alpha$  на  $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  и подставляя в первое уравнение (3), получим после преобразований:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}. \quad (5)$$

Это известная формула Брахмагупты (VII век н. э.), выражающая площадь вписанного четырехугольника через длины его сторон. Она применима к любым значениям длин  $a, b, c, d$  при условии, что каждая из них не превосходит суммы трех других. Если одна из сторон обращается в ноль, то получаем формулу Герона.

Для данных сторон  $a, b, c, d$  величина (5) выражает наибольшую возможную площадь четырехугольника, откуда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если стороны четырехугольника равны  $a, b, c, d$ , а его площадь равна  $S$ , то*

$$S \leq \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

*Равенство достигается для вписанного четырехугольника.*

Так как точка локального максимума функции  $S(\alpha)$  единственна, то

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если  $\alpha + \beta < \pi$ , то  $S(\alpha)$  возрастает по переменной  $\alpha$ , а если  $\alpha + \beta \geq \pi$ , то  $S(\alpha)$  убывает.*

Теперь мы можем перейти от четырехугольников к произвольным многоугольникам.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Среди всех многоугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный многоугольник.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многоугольник имеет  $n$  сторон. Для  $n = 3$  доказывать нечего, для  $n = 4$  всё уже доказано. Таким образом,  $n \geq 5$ . Рассмотрим

множество всех несамопересекающихся многоугольников с данными длинами сторон. При этом можно считать, что они находятся внутри фиксированного круга достаточно большого радиуса. Если мы позволим углам многоугольника принимать значения от 0 до  $2\pi$  включительно, а вершинам — лежать на других сторонах, то множество таких многоугольников будет компактно. Следовательно, существует многоугольник наибольшей площади. Этот многоугольник выпуклый (иначе можно симметрично отразить часть многоугольника относительно подходящей диагонали, отчего площадь увеличится. Подробности доказательства оставляем читателю). Итак, многоугольник выпуклый, при этом несколько соседних сторон могут лежать на одной прямой. Среди всех четырехугольников с вершинами в вершинах нашего многоугольника выберем тот, у которого сумма двух противоположных углов наименьшая. Обозначим эти вершины последовательно  $A, B, C, D$ , при этом  $A$  и  $C$  — противоположные углы с наименьшей суммой. Если многоугольник не является вписанным, то сумма углов  $BAD$  и  $BCD$  меньше  $\pi$ . Увеличим немного угол  $BAD$ , сохраняя длины сторон четырехугольника  $ABCD$ , и сохраняя неизменными куски многоугольника, примыкающие к этим сторонам. Площадь  $ABCD$  при этом увеличится (следствие 3), и следовательно, увеличится и площадь всего многоугольника. При этом, так как исходный многоугольник выпуклый, то при достаточно малом увеличении угла  $BAD$  многоугольник останется несамопересекающимся (хотя, может потерять выпуклость). Это противоречит тому, что многоугольник имеет максимальную площадь, что завершает доказательство.

УПРАЖНЕНИЕ 27. Отгородить от прямолинейного берега реки забором данной длины прямоугольный участок земли наибольшей площади.

УПРАЖНЕНИЕ 28. То же упражнение, но теперь забор состоит из трех секций фиксированной (не обязательно равной) длины.

УПРАЖНЕНИЕ 29. Докажите изопериметрическую теорему: среди всех плоских несамопересекающихся кривых данной длины наибольшую площадь ограничивает окружность.

Подсказка: *предположим, что найдется кривая, ограничивающая большую площадь, нежели соответствующий круг. Приблизим эту кривую многоугольником с вершинами на кривой. При этом периметр многоугольника будет меньше длины кривой, а площадь (при хорошем приближении) — по-прежнему больше площади соответствующего круга. Далее применяем следствие 4.*

Об изопериметрических неравенствах можно прочитать, например в [16], [8].

УПРАЖНЕНИЕ 30. Задача Дидоны. Веревкой данной длины отгородить от прямолинейного берега моря участок земли наибольшей площади.

УПРАЖНЕНИЕ 31. Веревкой данной длины отгородить от прямого угла фигуру наибольшей площади.

УПРАЖНЕНИЕ 32. То же упражнение для угла  $\frac{\pi}{4}$ , и для угла  $\frac{\pi}{3}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 33. Кривой наименьшей возможной длины разделить равносторонний треугольник на две части равной площади.

УПРАЖНЕНИЕ 34. То же упражнение для квадрата (следует быть осторожным с кажущимся сходством этой задачи с предыдущей!)

ПРИМЕР 11. Найти точку  $P$  внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от  $P$  до этих сторон минимальна.

РЕШЕНИЕ. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника, а  $x, y, z$  — расстояния от  $P$  до этих сторон. Нужно найти минимум величины  $f(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ . При этом величины  $x, y$  и  $z$  связаны через площади треугольников. Соединив точку  $P$  с вершинами треугольника, мы разбиваем его на три треугольника, сумма площадей которых равна  $S$ . Таким образом,  $\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S$ . Итак,

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \rightarrow \min, \\ ax + by + cz = 2S. \end{cases} \quad (6)$$

Дифференцируя лагранжиан

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \lambda(ax + by + cz - 2S),$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -\frac{a}{x^2} + \lambda a = 0, \\ -\frac{b}{y^2} + \lambda b = 0, \\ -\frac{c}{z^2} + \lambda c = 0, \end{cases}$$

из которой немедленно заключаем, что  $x = y = z$ . Значит точка  $P$  равноудалена от сторон треугольника. Таким образом,  $P$  — центр вписанной окружности треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Эта задача была предложена на Международной математической Олимпиаде 1980 г. в Вашингтоне. Как видим, правило множителей Лагранжа приводит к короткому и вполне стандартному решению. Мы предлагаем читателю попробовать другие способы решения задачи (6) (например, выражая одни переменные через другие). Нетрудно будет убедиться, что решения будут более сложными и менее естественными.

УПРАЖНЕНИЕ 35. Через данную точку  $M$ , лежащую внутри угла с вершиной  $K$ , провести отрезок  $AB$  с вершинами на сторонах угла так, чтобы величина  $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$  была наибольшей. (Американская математическая олимпиада, 1979 г.)

Подсказка: в качестве переменных удобно взять углы  $\alpha = MKA$  и  $\beta = MKB$ .

УПРАЖНЕНИЕ 36. При тех же условиях найти минимум величины

$$\sqrt{KA} + \sqrt{KB}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 37. Точка удалена от вершин прямоугольного треугольника на 2, 5 и 10 см. (2 — расстояние до вершины прямого угла). Какова может быть наибольшая площадь этого треугольника?

(Соросовская олимпиада по математике, Россия, 1997 г.)

ПРИМЕР 12. СНОВА ПРО ЗАКОН СНЕЛЛИУСА. Правило множителей Лагранжа предлагает следующее элегантное доказательство законов преломления и отражения света. Теперь при решении экстремальной задачи (1) мы не будем параметризовать прямую  $l$  и сводить всё к задаче с одной переменной, а в духе Лагранжа сохраняем обе переменные и рассматриваем функцию  $f(M)$  на всей плоскости. Соотношение  $M \in l$  теперь запишется в виде уравнения связи  $\langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = c$ , где  $n$  — вектор, перпендикулярный прямой  $l$ , а  $c$  — некоторая константа. Дифференцируя лагранжиан  $\mathcal{L}(M, \lambda) = f(M) + \lambda(\langle \overrightarrow{AM}, n \rangle - c)$ , получаем  $f'(M) + \lambda n = 0$ . Заметим, что

$$f'(M) = \frac{1}{v_a} |AM|' + \frac{1}{v_b} |BM|' = \frac{1}{v_a} u_a + \frac{1}{v_b} u_b,$$

где единичные векторы  $u_a, u_b$  были определены в примере 1. Итак,

$$\frac{1}{v_a} u_a + \frac{1}{v_b} u_b = -\lambda n,$$

а это означает, что вектор  $\frac{1}{v_a} u_a + \frac{1}{v_b} u_b$  перпендикулярен  $l$ . Иначе говоря, сумма проекций векторов  $\frac{1}{v_a} u_a$  и  $\frac{1}{v_b} u_b$  на  $l$  равна нулю, что означает

$$\frac{\sin \alpha}{v_a} = \frac{\sin \beta}{v_b}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 38. На плоскости дана прямая и три точки, не лежащие на ней. Найти (или охарактеризовать) положение точки на прямой, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна. Сколько может быть таких точек?

УПРАЖНЕНИЕ 39. В пространстве дана плоскость и три точки, не лежащие на ней. Найти (или охарактеризовать) положение точки на плоскости, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна.

УПРАЖНЕНИЕ 40. Решить задачи 38 и 39 для произвольного числа точек.

ПРИМЕР 13. НЕРАВЕНСТВО КОШИ (НЕРАВЕНСТВО МЕЖДУ СРЕДНИМИ). Для любых неотрицательных чисел  $x_1, \dots, x_n$  выполнено неравенство

$$x_1^n + \dots + x_n^n \geq n x_1 \dots x_n.$$

(произведение  $x_1 \dots x_n$  является средним геометрическим величин  $x_1^n, \dots, x_n^n$ ).

РЕШЕНИЕ. Положим  $x_1^n + \dots + x_n^n = a$  и рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\begin{cases} n x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow \max, \\ x_1^n + \dots + x_n^n = a, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

По теореме Вейерштрасса существует точка максимума  $(x_1, \dots, x_n)$ . Ясно, что

все  $x_i$  положительны, иначе  $nx_1x_2 \cdots x_n = 0$ , а это, очевидно, не максимум. Дифференцируя лагранжиан, получим

$$nx_1 \cdots x_n + \lambda nx_i^n = x_i \mathcal{L}'_{x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда  $x_1 = \cdots = x_n$ . Итак, в точках максимума  $x_1 = \cdots = x_n$ , следовательно  $nx_1x_2 \cdots x_n = x_1^n + \dots + x_n^n = a$ . Значит, во всех остальных точках  $nx_1x_2 \cdots x_n < a$ , что завершает доказательство.

Доказательство любого неравенства можно свести к соответствующей экстремальной задаче. В большинстве случаев этот метод доказательства неравенств работает безотказно. Большинство неравенств из классической монографии [5] могут быть просто установлены сведением их к экстремальным задачам.

УПРАЖНЕНИЕ 41. НЕРАВЕНСТВО ГЁЛЬДЕРА. Доказать, что для любого  $p > 1$  и произвольных положительных чисел  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  выполнено

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q},$$

где  $q = p/(p-1)$ . Для каких  $x_k$  и  $y_k$  это неравенство обращается в равенство?

УПРАЖНЕНИЕ 42. НЕРАВЕНСТВО АДАМАРА. Пусть  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  — квадратная матрица порядка  $n$ . Докажите, что

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Мы завершаем этот раздел примером из линейной алгебры.

ПРИМЕР 14. Действительная симметричная  $(n \times n)$ -матрица всегда имеет действительный собственный вектор.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\begin{cases} f(x) = \langle Ax, x \rangle \rightarrow \max, \\ \langle x, x \rangle = 1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\langle, \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, мы ищем максимум функции  $f$  на единичной сфере. В силу компактности сферы, существует точка максимума  $x \in \mathbb{R}^n$ . Дифференцируя лагранжиан в точке максимума, получаем

$$\mathcal{L}'_x = 2Ax + 2\lambda x = 0.$$

Следовательно,  $x$  является действительным собственным вектором с собственным значением  $-\lambda$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Обычно существование действительного собственного вектора у самосопряженного оператора в  $\mathbb{R}^n$  доказывается с помощью характеристического многочлена. Доказательство с использованием правила Лагранжа имеет одно преимущество: оно почти без изменений обобщается на бесконечномерные операторы. Именно так доказывается, что компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет действительное собственное

значение. Этот факт является ключевым для доказательства теоремы Гильберта–Шмидта о спектральном разложении компактного самосопряженного оператора (см., например, [12]). Этот же прием применяется для доказательства существования решений у некоторых дифференциальных уравнений.

#### 4. ПРИЛОЖЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

В математической экономике теория экстремума является одним из главных инструментов. Множество примеров можно найти, в книгах [1, 2, 4]. Математически эти примеры не столь интересны, по крайней мере, по сравнению с теми, которые рассматривались в предыдущих разделах. Как говорил выдающийся американский экономист Альфред Маршалл (1842–1924): «Красивая математическая теорема, примененная к экономике, вряд ли приведет к хорошим результатам». В этом, видимо, заключается специфика всех приложений математики к реальной жизни. На первом месте здесь стоит не столько красота, сколько эффективность. Мы решили включить несколько подобных примеров в статью, поскольку они достаточно наглядно описывают специфику предмета, а кроме того, знакомят с наукой формализации практических задач.

**УПРАЖНЕНИЕ 43. ОПТИМАЛЬНАЯ ЦЕНА.** Вы хотите продать машину, которая стоила Вам 9 000 евро. Вам неизвестно, сколько покупатель способен заплатить, но максимум, на что Вы надеетесь, это 15 000 евро. Считаем, что цена, которую покупатель готов заплатить, распределена равномерно (с одинаковой вероятностью) между двумя этими величинами. Если Вы запросите большую цену, то сделка сорвется. Если меньше, то Вы проиграете в выручке. Какую оптимальную цену Вы должны запросить, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль?

В следующих примерах дело осложняется тем, что экстремум ищется на множестве целых чисел.

**УПРАЖНЕНИЕ 44. НЕБОСКРЕБЫ.** Стоимость постройки здания в  $x$  этажей исчисляется по следующим правилам:

- (1) 10 миллионов долларов за землю,
- (2)  $\frac{1}{4}$  миллиона за каждый этаж,
- (3) надбавка в  $10\,000x$  долларов за этаж (чем выше, тем дороже).

Сколько этажей должно быть в здании, чтобы средняя цена за этаж была минимальной?

**УПРАЖНЕНИЕ 45. ОПТИМАЛЬНЫЙ ГОНОРАР.** Певец собирается записать свой DVD. В отделе маркетинга ему сказали, что если отпускная цена его DVD будет 26 долларов за диск, то ожидается продать 5 000 дисков.

Самой компании каждый диск обойдется в 5 долларов.

(1) Какая отпускная цена за диск максимизирует прибыль фирмы? Какова эта максимальная прибыль?

(2) Какой авторский гонорар с каждого диска певец должен потребовать с фирмы, чтобы максимизировать свою прибыль?

**УПРАЖНЕНИЕ 46. ФРУКТЫ НА РЫНКЕ.** Некто пришел на рынок, где продается неограниченное число различных видов фруктов. Все виды — по одной цене в 1 доллар

за фунт. Удовольствие, которое получит покупатель, купив  $m_1$  фунтов первого вида фруктов,  $m_2$  — второго и т. д. (все числа — целые) пропорционально произведению  $\prod_{i=1}^n m_i$ . У него есть 100 долларов. Как он должен их распределить, чтобы получить максимальное удовольствие?

Один из основополагающих законов экономики — равенство между спросом и предложением. С увеличением цены за услугу или продукт уменьшается число потенциальных клиентов. Уменьшение цены привлечет больше клиентов, но снизит прибыль, полученную с каждого из них. Поиск «точки равновесия» — наиболее выгодной цены, максимизирующей общую прибыль, является одной из основных проблем. Способы поиска оптимальной цены, конечно же, зависят от конкретной задачи. В следующем примере мы рассмотрим ситуацию, когда существует цена, оптимальная как для продавца, так и для клиента, т. е. цена, максимизирующая «удовольствие» обоих.

Более точно, предположим, что на рынке есть продавцы и покупатели некоторого товара. У каждого продавца есть минимальная цена, за которую он готов продать товар. Соответственно, у каждого покупателя есть максимальная цена, которую он готов за этот товар заплатить. Предположим, что мы можем установить некоторую цену на рынке. Тогда каждый продавец подсчитает свою выгоду: разность между тем, что он продаст по установленной цене, и тем, что он смог бы выручить по своей минимальной цене. То же для покупателя: его выгода — это разность между тем, сколько он потратил бы, покупая по максимальной для себя цене, и тем, что потратит по установленной цене. Сумма выгод всех покупателей и всех продавцов называется общим благосостоянием (total social welfare). Оно может быть интерпретировано, как сумма всех «удовольствий» участников рынка. В следующей задаче мы покажем, что

*общее благосостояние максимально в точности тогда, когда установленная на рынке цена равна оптимальной «точке равновесия».*

Пусть рынок некоторого товара описывается функцией предложения  $S(P)$  и функцией спроса  $D(P)$ . Это означает, что если цена равна  $P$ , то количество продукта, предложенного всеми продавцами, для которых  $P$  не меньше их минимальной цены, равно  $S(P)$ ; функция спроса определяется аналогично. Для простоты предположим пока, что обе функции — аффинные (графики — прямые линии).

УПРАЖНЕНИЕ 47. (1) Функции  $S$  и  $D$  даны. Выразите общую выгоду продавцов и покупателей через  $P$ .

(2) Выразите положение точки равновесия, и докажите, что при этом значении цены общее благосостояние максимально.

До сих пор мы не использовали стационарные точки, не являющиеся точками локального максимума или минимума. Однако в задачах теории игр, где два оппонента пытаются увеличить свою прибыль, оптимальные состояния характеризуются именно такими точками. Со введением в теорию игр и ее применениями можно познакомиться, например, в [7].

Рассмотрим ситуацию, когда есть две фирмы, производящие одинаковую продукцию, и при этом спрос на рынке линейный:  $p = 1 - q_1 - q_2$ . Цена

производства единицы продукции у обеих фирм одинакова и равна  $c$ . Фирма 1 максимизирует свою выгоду, т. е. выбирает цену  $q_1$ , чтобы получить прибыль

$$\max_{q_1} (1 - q_1 - q_2 - c)q_1.$$

Фирма 2 максимизирует свою выгоду, т. е. выбирает цену  $q_2$ . Однако менеджеры фирмы 2 также учитывают объём своих продаж с некоторым весом  $\alpha$ :

$$\max_{q_2} (1 - q_1 - q_2 - c)q_2 + \alpha(1 - q_1 - q_2)q_2.$$

Таким образом, фирма 2 максимизирует свою прибыль в предположении, что ее выгода не упадет ниже некоторого уровня  $\pi_2$ .

**ПРИМЕР 15.** ВКЛАДЧИКИ И АКЦИОНЕРЫ В СИТУАЦИИ ДИПОЛЯ. Какая из двух фирм получит большую выгоду в точке равновесия при  $\alpha > 0$ ?

**РЕШЕНИЕ.** Для ответа проанализируем точку равновесия Нэша (Nash equilibrium), где каждая фирма выбирает свой уровень цены, предполагая, что знает уровень цены ее оппонента (другой фирмы). Уравнение стационарности дает

$$1 - c - 2q_1 - q_2 = 0,$$

$$1 - c - q_1 - 2q_2 + \alpha - \alpha q_1 - 2\alpha q_2 = 0.$$

Положив  $\varphi = \frac{1 - c + \alpha}{1 + \alpha}$ , получаем

$$q_1 = \frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi,$$

$$q_2 = \frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}(1 - c),$$

$$p = 1 - \frac{1}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi.$$

Следовательно, размер общей выгоды равен

$$\pi_1 = \left(\frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi\right)^2,$$

$$\pi_2 = \left(\frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi\right)\left(\frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}(1 - c)\right).$$

Поскольку  $\varphi$  возрастает по  $\alpha$ , несложно проверить, что прибыль фирмы 1 убывает по  $\alpha$ , в то время как прибыль фирмы 2 возрастает по  $\alpha$  (если  $\varphi < \frac{5}{4}(1 - c)$ ).

Приходим к парадоксальному выводу: фирма, которая не максимизирует свою выгоду, на самом деле получает (в точке равновесия) большую выгоду, чем та, которая максимизирует! Какое может быть интуитивное объяснение этому феномену?

**УПРАЖНЕНИЕ 48.** Предположим, некоторая фирма производит 90 единиц продукции, используя при этом 9 единиц компонента  $X$  и 9 единиц компонента  $Y$ . Количество единиц произведенной продукции вычисляется по формуле  $Q = 10X^{1/2}Y^{1/2}$ .

(1) если цена  $X$  — 8 долларов, а цена  $Y$  — 16 долларов, то дадут ли 9 единиц  $X$  и 9 единиц  $Y$  наиболее выгодный способ произвести 90 единиц продукции?

(2) Каково наиболее выгодное соотношение между  $X$  и  $Y$ ?

(3) Каков наиболее дешевый способ произвести 400 единиц продукции, если цена  $X$  равна 1 доллар, а цена  $Y$  — 2 доллара?

УПРАЖНЕНИЕ 49. Минимизация риска. Вкладчик решил разделить свои деньги между тремя инвестиционными фондами. Ожидаемая прибыль этих фондов — 10%, 10% и 15% соответственно. Его цель — получить общую прибыль не менее 12%, и при этом минимизировать свой риск. Функция риска описывается формулой

$$200x_1^2 + 400x_2^2 + 100x_1x_2 + 899x_3^2 + 200x_2x_3,$$

где  $x_i$  пропорционально сумме, вложенной в фонд  $i$ . Определить, в какой пропорции он должен вложить свои деньги в эти фонды. Поможет ли такое ослабление условий: величины  $x_i$  могут принимать отрицательные значения (не будем останавливаться на экономическом смысле отрицательных вкладов)?

УПРАЖНЕНИЕ 50. Фирма производит продукцию  $y$ , используя компоненты  $x_1$  и  $x_2$ , при этом  $y = \sqrt{x_1x_2}$ . Договорное соглашение обязывает фирму использовать хотя бы одну единицу каждого компонента. Цены компонентов  $x_1$  и  $x_2$  — соответственно  $w_1$  и  $w_2$ . Как фирме минимизировать стоимость производства  $\bar{y}$  единиц продукции?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mankiw N. G. *Principles of Economics*. Fort Worth, 1997.
- [2] Fryer M. J., Greenman J. V. *Optimisation Theory*. London, 1987.
- [3] Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г. *Выпуклый анализ и его приложения*. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [4] Sydsaeter K., Hammond P. *Essential Mathematics for Economic Analysis*, 1995.
- [5] Hardy G., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.
- [6] Hildebrandt S., Tromba A. *Mathematics and Optimal Form*. New York, 1985.
- [7] Binmore K. *Fun and Games, A Text on Game Theory*. Lexington, 1992.
- [8] Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах*. М.: Наука, 1986.
- [9] Vaserstein L.N. *Introduction to Linear Programming*. London, 2003.
- [10] Бунимович Л. А., Дани С. Г., Добрушин С. Г., Якобсон М. В., Корнфельд И. П., Маслова Н. Б., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Смилле Дж., Сухов Ю. М., Вершик А. М. *Динамические системы, эргодическая теория и приложения* // Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 100. Mathematical Physics, I. Springer-Verlag, Berlin, 2000. xii+459 pp.
- [11] Синай Я. Г. *Введение в эргодическую теорию*. М.: Фазис. 1996.
- [12] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Физматлит, 2004. 570 с.
- [13] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. *Новые встречи с геометрией*. М.: Наука, 1978. 223 с.

- [14] Boltyanski V. G., Martini H., Soltan V. *Geometric methods and optimization problems*. Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. 429 pp.
- [15] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум*. М.: Наука, 1970. 335 с.
- [16] Бляшке В. *Круг и шар*. М.: Наука, 1967. 232 с.
- [17] Bottema O., Djordjevic R. Z., Janic R. R., Mitrinovic D. S., Vasic P. M. *Geometric inequalities*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. 151 pp.

---

Я. Бринкхаус, Эразмус Университет, Роттердам, Нидерланды  
e-mail: [brinkhuis@few.eur.nl](mailto:brinkhuis@few.eur.nl)

В. Ю. Протасов, Московский Государственный Университет,  
e-mail: [vladimir.protassov@yahoo.com](mailto:vladimir.protassov@yahoo.com)

# О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, с фиксированным средним коэффициентом

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени  $n$  называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где  $a_k, b_k$  — действительные числа, называемые его коэффициентами,  $a_n^2 + b_n^2 > 0$ . Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде  $a_0/2$ . Так как согласно формулам Эйлера  $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$ , и  $a_k \sin kx + b_k \cos kx = \operatorname{Re}((b_k - ia_k) \exp ikx)$ , где  $\operatorname{Re}$  означает действительную часть комплексного числа, а  $i$  — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx, \quad c_k = b_k - ia_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

(см. [1]). Рассмотрим следующую задачу: среди всех таких тригонометрических многочленов с фиксированным комплексным коэффициентом  $c_h$ , или, что равносильно, с фиксированными действительными коэффициентами  $a_h, b_h$ , найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Другими словами, надо найти такой тригонометрический многочлен  $t_n(x)$ , у которого величина  $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |t_n(x)|$  минимальна. Эту величину называют равномерной или чебышёвской нормой и обозначают  $\|t_n\|$ . Кроме этой нормы, часто используют семейство норм<sup>1)</sup>

$$\|t_n\|_p = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

а норму  $\|t_n\|$  обозначают  $\|t_n\|_\infty$  (см. [2]). Эти нормы связаны неравенствами

$$\|t_n\|_1 \leq 2^{1-1/p} \|t_n\|_p \leq 2 \|t_n\|,$$

которые, впрочем, нам далее не понадобятся. Очевидно, что для любого действительного  $c$  и любого  $p \geq 1$ , в том числе и  $p = \infty$ , справедливо равенство  $\|ct_n\| = |c| \|t_n\|$ . Решение задачи дает

<sup>1)</sup> Можно считать, что интеграл в их определении — это обычный интеграл Римана.

ТЕОРЕМА. Для любого действительного тригонометрического многочлена  $t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx$  и  $h \geq 1$  справедливо неравенство

$$\|t_n\|_p \geq \mu(n, h, p) |c_h| \|\cos\|_p,$$

$$\mu(n, h, p) = \mu(2m + 1, 1, p) = \frac{m + 2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m + 4}, \quad m = \left[ \frac{n - h}{2h} \right],$$

где символ  $[a]$  означает целую часть числа  $a$ . При  $p = \infty$  это неравенство обращается в равенство для многочлена

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{(2k+1)h} \exp i(2k + 1)hx = |c_h| g_{2m+1}(hx + \gamma), \quad (*)$$

где  $\gamma = \operatorname{arg} c_h$ ,

$$g_{2m+1}(x) = C \sum_{k=1}^{m+1} g_{m,k}(x) = \cos x + \sum_{k=1}^m b_k \cos(2k + 1)x,$$

$$C = \frac{2^{2m+1}}{m + 2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m + 4},$$

$$g_{m,k}(x) = h_{m,k}(x) f_{m,k}(x), \quad h_{m,k}(x) = \left( \frac{w_m(x) \sin k\alpha}{\cos(x - k\alpha)} \right)^2,$$

$$w_m(x) = \prod_{k=1}^{m+1} \cos(x - k\alpha),$$

$$f_{m,k}(x) = 2 \operatorname{ctg} k\alpha \cos(x - k\alpha) - \sin(x - k\alpha), \quad k = 1, \dots, m + 1.$$

Следовательно, среди всех многочленов  $t_n(x)$  с фиксированным  $c_h$  многочлен (\*) имеет минимальную норму

$$\|t_n\|_\infty = \frac{m + 2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m + 4} |c_h|.$$

Этот минимальный многочлен при нечетном  $[n/h]$  определен однозначно, а при четном  $[n/h]$  — неоднозначно.

При  $h = n$  (и вообще при  $h > n/3$ ), очевидно,  $m = 0$ , и из теоремы следует неравенство  $\|t_n\|_\infty \geq |c_h|$ . Экстремальный многочлен тогда равен  $a_h \sin hx + b_h \cos hx$ . Это утверждение равносильно известному экстремальному свойству многочленов Чебышёва (см. [1]).

В книге С. Н. Бернштейна [3] доказано неравенство  $\|t_n\|_\infty \geq \frac{\pi}{4} |c_h|$ , и показано, что оно является асимптотически точным.

В [4] в случае  $p = \infty$ , опираясь на метод, развитый в [5], было получено точное неравенство.

Далее приводится элементарное доказательство этой теоремы, использующее только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [6]).

Сначала сведем общий случай к случаю  $h = 1$ , рассматривая вместо многочлена  $t_n(x)$  многочлен

$$\frac{1}{2h} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n \left( x + \frac{\pi l}{h} \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{h(2k+1)} \exp i(2k+1)hx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n \left( x + \frac{\pi l}{h} \right) &= \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp \left( ikx + \frac{ikl\pi}{h} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l c_k \exp \left( ikx + \frac{ikl\pi}{h} \right). \end{aligned}$$

Теперь при  $k$ , кратном  $h$ , в силу равенства  $\exp(\pi k l i/h) = (-1)^{kl/h}$  имеем

$$\sum_{l=1}^{2h} (-1)^l c_k \exp \left( ikx + \frac{ikl\pi}{h} \right) = c_k \exp ikx \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l \exp \left( \frac{\pi k l i}{h} \right) = 2h c_k \exp ikx,$$

если  $k/h$  нечетно, и

$$\sum_{l=1}^{2h} (-1)^l c_k \exp \left( ikx + \frac{ikl\pi}{h} \right) = 0,$$

если  $k/h$  четно, а при  $k$ , не кратном  $h$ , применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^{2h} (-1)^l \exp \left( \frac{\pi k l i}{h} \right) = \sum_{l=0}^{2h-1} (-1)^l \exp \left( \frac{\pi k l i}{h} \right) = \frac{\exp 2\pi k i - 1}{-\exp(\pi k i/h) - 1} = 0.$$

Воспользовавшись выпуклостью нормы, т. е. неравенством<sup>2)</sup>

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \cdot \|f\|_p + |\beta| \cdot \|g\|_p,$$

и свойствами  $\|f(x+a)\|_p = \|f(x)\|_p$ ,  $\|f(rx)\|_p = \|f(x)\|_p$  (инвариантности нормы относительно сдвига<sup>3)</sup> на произвольное число  $a$  и растяжения<sup>4)</sup> с целым коэффициентом  $r$ ), имеем при  $m = \left\lfloor \frac{n-h}{2h} \right\rfloor$

$$\begin{aligned} \|t_n\|_p &= \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{2h} \left\| t_n \left( x + \frac{\pi k}{h} \right) \right\|_p \geq \left\| \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{2h} t_n \left( x + \frac{\pi k}{h} \right) \right\|_p = \\ &= \left\| \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{h(2k+1)} \exp i(2k+1)hx \right\|_p = \left\| \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{h(2k+1)} \exp i(2k+1)x \right\|_p. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Это свойство при  $p = \infty$  и  $p = 1$  вытекает из неравенства  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , а при конечных  $p > 1$  — из неравенства Минковского (см. [2]).

<sup>3)</sup> Для  $2\pi$ -периодических функций это очевидно при  $p = \infty$ , а при конечных  $p$  вытекает из периодичности и свойства аддитивности интеграла.

<sup>4)</sup> Это очевидно при  $p = \infty$ , а при конечных  $p$  доказывается линейной заменой переменных с учетом периодичности и свойства аддитивности интеграла.

Из этого неравенства следует, что неравенство теоремы достаточно доказать при  $h = 1$  для многочленов вида  $t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{2k+1} \exp i(2k+1)x$ ,  $n = 2m+1$ . Хотя это не приводит к каким либо упрощениям, заметим, что взяв вместо  $t_n(x)$  многочлен  $t_n(x + \gamma)$ , где  $\operatorname{Re} c_1 \exp i\gamma = |c_1|$ , легко свести задачу к случаю, когда многочлен имеет вид  $t_n(x) = |c_1| \cos x + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^m c_{2k+1} \exp i(2k+1)x$ , а взяв вместо  $t_n(x)$  многочлен  $(t_n(x) + t_n(-x))/2$ , можно далее считать, что  $t_n(x) = \sum_{k=0}^m b_{2k+1} \cos(2k+1)x$ . Тогда для таких многочленов достаточно доказать неравенство

$$\|t_n\|_p \geq |b_1| \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \|\cos\|_p.$$

Положим для краткости  $\alpha = \pi/(m+2)$ . Доказательство теперь уместается в две строчки

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_p &= \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \left\| t_n \left( x + k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right\|_\infty \geq \\ &\geq \left\| \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha t_n \left( x + k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right\|_p = |b_1| \frac{m+2}{2} \|\cos\|_p, \end{aligned}$$

если воспользоваться указанными выше свойствами нормы и тождествами

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} |\sin k\alpha| &= \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4}, \\ \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha t_n \left( x + k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= b_1 \frac{m+2}{2} \cos x. \end{aligned}$$

Первое из них, очевидно, следует из известного тождества<sup>5)</sup> (см., например, [7, зад. 225] или [1])

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

при подстановке  $n = m+1$ ,  $x = \pi/(m+1)$ . Для доказательства второго заменим  $t_n \left( x + l\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$  на

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^m b_{2k+1} \exp i(2k+1) \left( x + l\alpha - \frac{\pi}{2} \right),$$

---

<sup>5)</sup>Для его доказательства достаточно умножить обе его части на  $\sin(x/2)$  и применить к каждому слагаемому формулу  $\sin kx \sin(x/2) = \cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x$ .

изменим в полученной двойной сумме порядок суммирования

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{m+1} \sin l\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m b_{2k+1} \exp i(2k+1) \left( x + l\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \\ & = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m b_{2k+1} \sum_{l=1}^{m+1} \sin l\alpha \exp i(2k+1) \left( x + l\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \\ & = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m b_{2k+1} \exp i(2k+1) \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \sum_{l=1}^{m+1} \sin l\alpha \exp i(2k+1)l\alpha, \end{aligned}$$

и применим тождества  $\operatorname{Re}(i \exp i(x - \pi/2)) = -\sin(x - \pi/2) = \cos x$ ,

$$\sum_{l=0}^{m+1} \sin l\alpha \exp i(2k+1)l\alpha = \begin{cases} 0, & m \geq k \geq 1, \\ \frac{m+2}{2}i, & k = 0. \end{cases}$$

Для доказательства второго из них  $\sin l\alpha$  заменяем на  $\frac{\exp il\alpha - \exp(-il\alpha)}{2i}$ , левую часть тождества преобразуем к виду

$$\frac{1}{2i} \left( \sum_{l=0}^{m+1} \exp i(2k+2)l\alpha - \sum_{l=0}^{m+1} \exp i2kl\alpha \right),$$

и применяем в очередной раз формулу суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{l=0}^{m+1} \exp i2kl\alpha = \begin{cases} 0, & m+1 \geq k \geq 1, \\ m+2, & k = 0. \end{cases}$$

Доказательство равенства  $\|g_{2m+1}\|_{\infty} = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}$  более громоздко.

Сначала проверим тождество  $g_{2m+1}(x + \pi) = -g_{2m+1}(x)$ . Так как в силу формул  $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ,  $\cos(x + \pi) = -\cos x$ , очевидно

$$f_{m,k}(x + \pi) = -f_{m,k}(x), w_m(x + \pi) = (-1)^{m+1} w_m(x),$$

то

$$h_{m,k}(x + \pi) = \left( \frac{w_m(x + \pi) \sin k\alpha}{\cos(x + \pi - k\alpha)} \right)^2 = h_{m,k}(x),$$

откуда  $g_{m,k}k(x + \pi) = h_{m,k}(x + \pi)f_{m,k}(x + \pi) = -g_{m,k}k(x)$ , и, следовательно,  $g_{2m+1}(x + \pi) = -g_{2m+1}(x)$ .

Проверим, что  $g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Так как  $h_{m,k}$  вместе с  $w_m$  очевидно имеет двукратные корни  $l\alpha - \pi/2$ ,  $1 \leq l \leq m+1$ ,  $l \neq k$ , то и  $g_{m,k}$  тоже имеет те же двукратные корни<sup>6)</sup>. Поэтому  $g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) =$

<sup>6)</sup> Корень функции двукратен, если он является также корнем ее производной. Все корни функции  $f(x)$  будут двукратными корнями функции  $f^2(x)g(x)$ , так как  $(f^2(x)g(x))' = 2f(x)f'(x)g(x) + f^2(x)g'(x) = f(x)(2f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$ .

$= C g_{m,k}(k\alpha - \pi/2)$ . Так как  $f_{m,k}(k\alpha - \pi/2) = 1$ ,  $\sin l\alpha = \sin(m+2-l)\alpha$ , то

$$\begin{aligned} g_{m,k}(k\alpha - \pi/2) &= h_{m,k}(k\alpha - \pi/2) = \\ &= \sin^2 k\alpha \prod_{l=1, l \neq k}^{m+1} \cos^2(k\alpha - \pi/2 - l\alpha) = \sin^2 k\alpha \prod_{l=1, l \neq k}^{m+1} \sin^2(l-k)\alpha = \\ &= \prod_{l=1}^k \sin^2 l\alpha \prod_{l=k+1}^{m+1} \sin^2(l-k)\alpha = \prod_{l=1}^k \sin^2 l\alpha \prod_{l=1}^{m+1-k} \sin^2 l\alpha, \end{aligned}$$

откуда, переставляя порядок сомножителей в последнем произведении, имеем

$$g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = \prod_{l=1}^{m+1} \sin^2 l\alpha, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

Из известного тождества

$$\prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{n} = n2^{-n+1}$$

(см., например, [7, зад. 232]) следует, что

$$g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = (m+2)^2 2^{-2m-2} C = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

Проверим, что  $g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Так как  $g_{m,k}$  имеет двукратные корни  $l\alpha - \pi/2$ ,  $1 \leq l \leq m+1$ ,  $l \neq k$ , то  $g'_{m,k}(l\alpha - \pi/2) = 0$ ,  $1 \leq l \leq m+1$ ,  $l \neq k$ , поэтому  $g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = C g'_{m,k}(k\alpha - \pi/2)$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Так как

$$\begin{aligned} f_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= 1, f'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -2 \operatorname{ctg} k\alpha \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 2 \operatorname{ctg} k\alpha, \\ h_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= g_{2m+1} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sin^2 k\alpha \left( \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \right)^2 \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} = \\ &= (m+2)^2 2^{-2m-2}, \quad k = 1, \dots, m+1, \\ h'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= 2 \sin^2 k\alpha \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} \left( \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \right)' \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}, \end{aligned}$$

то, согласно формуле Лейбница<sup>7)</sup> и тождеству  $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x - \pi/2)$ , имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \right)' \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} &= \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \left( \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} -\operatorname{tg}(x-l\alpha) \right) \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} = \\ &= \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)} \Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} \left( \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} -\operatorname{tg} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} - l\alpha \right) \right) = \end{aligned}$$

<sup>7)</sup>Имеется в виду следующая ее форма  $(f_1 \dots f_n)' = f_1 \dots f_n (f'_1/f_1 + \dots + f'_n/f_n)$ , пригодная, если  $f_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$= \frac{w_m}{\cos(x - k\alpha)} \Big|_{x=k\alpha - \pi/2} \left( \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha \right),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} h'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= 2 \sin^2 k\alpha \left( \frac{w_m}{\cos(x - k\alpha)} \right)^2 \Big|_{x=k\alpha - \pi/2} \left( \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha \right) = \\ &= (m+2)^2 2^{-2m-1} \left( \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha \right), \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} g'_{m,k}(k\alpha - \pi/2) &= \\ &= h'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) f_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + h_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) f'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= h'_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + 2h_{m,k} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{ctg} k\alpha = \\ &= (m+2)^2 2^{-2m-1} \left( \operatorname{ctg} k\alpha + \sum_{l=1, l \neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha \right). \end{aligned}$$

Сумму в скобках можно, сокращая равные слагаемые, записать в виде

$$\sum_{l=1}^k \operatorname{ctg} l\alpha - \sum_{l=1}^{m-k+1} \operatorname{ctg} l\alpha = \pm \sum_{l=s+1}^{m+1-s} \operatorname{ctg} l\alpha, \quad s = \min(k, m+1-k).$$

Заметив, что  $\operatorname{ctg} l\alpha = -\operatorname{ctg}(m+2-l)\alpha$ ,  $\operatorname{ctg}(m+2)\alpha/2 = 0$ , отсюда имеем  $g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = Cg'_{m,k}(k\alpha - \pi/2) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ .

Проверим, что многочлен  $g_{2m+1}(x)$  имеет локальные экстремумы в точках  $k\alpha + \sigma\pi/2$ ,  $\sigma = \pm 1$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Сначала оценим число корней у производной  $g'_{2m+1}(x)$  на интервале  $[-\pi/2, 3\pi/2)$ . Из равенства  $g_{2m+1}(x + \pi) = -g_{2m+1}(x)$  следует, что  $g'_{2m+1}(k\alpha + \pi/2) = -g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ , т. е. производная имеет еще  $m+1$  корней на интервале  $[\pi/2, 3\pi/2)$ . Так как  $g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = -g_{2m+1}(k\alpha + \pi/2) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ , то функция  $g_{2m+1}(x)$  на концах каждого из отрезков  $[k\alpha + \sigma\pi/2, (k+1)\alpha + \sigma\pi/2]$ ,  $\sigma = \pm 1$ ,  $k = 1, \dots, m$  принимает равные значения, поэтому согласно теореме Ролля<sup>8)</sup> ее производная имеет хотя бы один корень на каждом из этих  $2m$  отрезков, поэтому общее число ее корней на интервале  $[-\pi/2, 3\pi/2)$  не меньше  $4m+2$ . Поэтому, согласно известной теореме об оценке числа корней тригонометрического многочлена<sup>9)</sup> (см., например, [1]) многочлен  $g'_{2m+1}$  имеет на интервале  $[-\pi/2, 3\pi/2)$  ровно  $4m+2$  простых (однократных) корней, перечисленных выше, следовательно  $g'_{2m+1}$  не

<sup>8)</sup> Если функция дифференцируема на отрезке и принимает равные значения на его концах, то ее производная обращается в нуль в одной из его внутренних точек.

<sup>9)</sup> Ненулевой тригонометрический многочлен порядка  $n$  имеет на любом интервале  $[a, a+2\pi)$  не более  $2n$  корней с учетом кратности.

имеет кратных корней. В частности, на интервале  $((m+1)\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2)$  производная корней не имеет, значит, она сохраняет постоянный знак, а так как  $g_{2m+1}((m+1)\alpha - \pi/2) > 0 > g_{2m+1}(\alpha + \pi/2)$ , то она отрицательна и функция  $g_{2m+1}$  на этом интервале убывает. Так как производная не имеет кратных корней, то ее знаки между корнями чередуются<sup>10)</sup>, поэтому слева от корня  $(m+1)\alpha - \pi/2$  производная положительна, поэтому согласно известному признаку локального максимума функция  $g_{2m+1}(x)$  имеет в точке  $(m+1)\alpha - \pi/2$  локальный максимум. Аналогично проверяется, что во всех точках  $k\alpha - \pi/2, k = 1, \dots, m+1$  многочлен  $g_{2m+1}(x)$  имеет локальный максимум, а во всех точках  $k\alpha + \pi/2, k = 1, \dots, m+1$  — локальный минимум.

Проверим, что  $g_{2m+1}(x) \geq 0$  на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Так как  $C > 0$ , то достаточно проверить, что  $g_{m,k}(x) + g_{m,m+2-k}(x) \geq 0, 1 \leq k \leq (m+2)/2$ , откуда следует неравенство

$$g_{2m+1}(x) = C((g_{m,1}(x) + g_{m,m+1}(x)) + (g_{m,2}(x) + g_{m,m}(x)) + \dots) \geq 0.$$

Так как  $\cos(x - (m+2-k)\alpha) = -\cos(x + k\alpha)$ , то

$$\begin{aligned} g_{m,k}(x) + g_{m,m+2-k}(x) &= \\ &= \left( \frac{w_m(x) \sin k\alpha}{\cos(x - k\alpha) \cos(x + k\alpha)} \right)^2 (\cos^2(x + k\alpha) f_{m,k}(x) + \cos^2(x - k\alpha) f_{m,m+2-k}(x)). \end{aligned}$$

Для проверки неотрицательности второго сомножителя, в силу тождеств  $\sin(x - (m+2-k)\alpha) = -\sin(x + k\alpha)$ ,  $\operatorname{ctg}(m+2-k)\alpha = -\operatorname{ctg} k\alpha$ , равного, очевидно,

$$\begin{aligned} \cos^2(x + k\alpha) (2 \operatorname{ctg} k\alpha \cos(x - k\alpha) - \sin(x - k\alpha)) + \\ + \cos^2(x - k\alpha) (2 \operatorname{ctg} k\alpha \cos(x + k\alpha) + \sin(x + k\alpha)), \end{aligned}$$

пользуясь тригонометрическими теоремами сложения, преобразуем его к виду<sup>11)</sup>

$$2 \cos x \sin k\alpha (\cos^2 x (2 \operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1) + \sin^2 k\alpha).$$

Так как  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , а линейная функция достигает экстремумов на концах отрезка, то при  $k = 1, \dots, m+1$

$$\cos^2 x (2 \operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1) + \sin^2 k\alpha \geq \min(\sin^2 k\alpha, 2 \operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1 + \sin^2 k\alpha).$$

Остается заметить, что в силу тождества

$$\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x (1 - \sin^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x$$

при  $k = 1, \dots, m+1$ , очевидно,

$$2 \operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1 + \sin^2 k\alpha = 2 \operatorname{ctg}^2 k\alpha - \cos^2 k\alpha = \operatorname{ctg}^2 k\alpha (1 + \cos^2 k\alpha) \geq 0.$$

Так как  $\sin k\alpha > 0, k = 1, \dots, m+1$ , то тем самым доказано, что знак функции  $g_{2m+1}(x)$  совпадает со знаком  $\cos x$ .

<sup>10)</sup> Если бы она сохраняла знак на интервале, содержащем три соседних корня, то в среднем из них производная была бы равна нулю, т. е. он был бы двукратным корнем, что невозможно.

<sup>11)</sup> Проверка предоставляется читателю. Для удобства можно обозначить  $\cos k\alpha$  через  $c$ , а  $\sin k\alpha$  через  $s$ .

Докажем теперь, что найденные ее экстремумы — глобальные. Между соседними локальными максимумами расположены локальные минимумы, а так как  $g_{2m+1}(x) \geq 0$  на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$ , то на этом отрезке локальные максимумы будут очевидно и глобальными максимумами. В силу равенства  $g_{2m+1}(x + \pi) = -g_{2m+1}(x)$  на отрезке  $[\pi/2, 3\pi/2]$  функция  $g_{2m+1}$  неположительна, поэтому в точках  $k\alpha + \pi/2, k = 1, \dots, m+1$  она имеет глобальные минимумы. Следовательно, равенство

$$\|g_{2m+1}\|_{\infty} = g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}, \quad k = 1, \dots, m+1,$$

доказано.

Докажем теперь, что  $g_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^m b_k \cos(2k+1)x$ . Так как в силу ее периодичности

$$\begin{aligned} g_{2m+1}\left(-k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= g_{2m+1}\left((m+2-k)\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(k\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \\ g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= g_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2} - k\alpha\right), \quad 1 \leq k \leq \frac{m+2}{2}, \end{aligned}$$

то функции  $g_{2m+1}(x)$  и  $g_{2m+1}(-x)$  имеют  $2m+2$  общих максимума и минимума на интервале  $[-\pi, \pi)$ , значит их разность имеет в точках  $\pm k\alpha + \pm\pi/2, 1 \leq k \leq (m+2)/2$  двукратные корни<sup>12)</sup>, суммарная кратность которых равна  $4m+4$ , т. е. больше  $4m+2$ , поэтому согласно теореме о числе корней тригонометрического многочлена разность  $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$  равна нулю. Следовательно, многочлен  $g_{2m+1}(x)$  четен, поэтому состоит из одних косинусов<sup>13)</sup> (см., например, [1]). Отсутствие в нем косинусов с четными дугами<sup>14)</sup> можно вывести из тождества<sup>15)</sup>  $g_{2m+1}(x + \pi) = -g_{2m+1}(x)$ , но можно проверить и непосредственно из определения<sup>16)</sup>  $g_{2m+1}(x)$ .

<sup>12)</sup> Производная разности  $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$  в этих точках тоже равна нулю, так как производные функций  $g_{2m+1}(\pm x)$  в них равны нулю.

<sup>13)</sup> Нечетная часть тригонометрического многочлена  $t_n(x)$  выражается формулой

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin kx = (t_n(x) - t_n(-x))/2,$$

поэтому у четного многочлена она тождественно равна нулю, и поэтому ее коэффициенты  $a_k$  равны нулю, согласно теореме о числе корней многочлена.

<sup>14)</sup> Слагаемых вида  $b \cos 2kx$ , где  $k$  — целое. — Прим. ред.

<sup>15)</sup> Представляя четный многочлен  $t_n$  в виде  $t_{0,n} + t_{1,n}$ , где  $t_{0,n} = \sum_{k=1}^{[n/2]} b_{2k} \cos 2kx, t_{1,n} = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} b_{2k+1} \cos(2k+1)x$ , замечаем, что  $t_{0,n} = (t_n(x) + t_n(x + \pi))/2$ , поэтому из тождества  $t_n(x) = -t_n(x + \pi)$  следует, что  $t_{0,n}(x) = 0$ , и согласно теореме о числе корней многочлена четные коэффициенты  $b_{2k} = 0$ . Аналогично, если  $t_n(x) = t_n(x + \pi)$ , то  $t_{1,n}(x) = (t_n(x) - t_n(x + \pi))/2 = 0$ , следовательно  $t_n = t_{0,n}$ , т. е. нечетные коэффициенты  $b_{2k+1} = 0$ .

<sup>16)</sup> Доказав с помощью формул преобразования произведения синусов-косинусов в сумму, что множество многочленов, содержащих только четные дуги, замкнуто относительно умножения, а умножение таких многочленов на многочлены, содержащие только нечетные дуги, дает в результате тоже многочлены, содержащие только нечетные дуги.

Из доказанного для любого многочлена  $t_n(x) = \sum_{k=0}^m b_k \cos(2k+1)x$ ,  $n = 2m+1$ , тождества

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha t_n \left( x + k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{m+2}{2} b_1 \cos x$$

и соотношений  $\|t_n\|_\infty \geq t_n(k\alpha - \pi/2)$ ,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_\infty = \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \left\| t_n \left( x + k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right\|_\infty$$

следует неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_\infty \geq \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha t_n \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = b_1 \frac{m+2}{2},$$

которое, очевидно, обращается в равенство, если и только если

$$t_n \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \|t_n\|_\infty, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

Так как эти соотношения выполнены для  $t_n = g_{2m+1}$ , то

$$\|g_{2m+1}\|_\infty = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} b_1,$$

откуда, в силу доказанного равенства  $\|g_{2m+1}\|_\infty = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}$ , следует, что  $b_1 = 1$ .

Докажем единственность экстремального многочлена  $t_n$  при нечетном  $\lfloor n/h \rfloor$ . Можно считать, что  $c_h = 1$ ,  $\|t_n\|_\infty = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}$ ,  $m = \lfloor (n-h)/2h \rfloor$ . Положим

$$f_{2m+1}(x) = \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n \left( \frac{x+\pi l}{h} \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m c_{2k+1} \exp i(2k+1)x.$$

Так как

$$\|t_n\|_\infty \geq t_n \left( \frac{x+\pi l}{h} \right), \quad \|f_{2m+1}\|_\infty \geq f_{2m+1} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right), \quad \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4},$$

то из доказанных выше неравенств следует, что при некотором  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} &= \|t_n\|_\infty \geq \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n \left( \frac{\gamma+\pi l}{h} \right) = f_{2m+1}(\gamma) \\ &= \|f_{2m+1}\|_\infty \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha f_{2m+1} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}. \end{aligned}$$

Очевидно, эти неравенства обращаются в равенства, поэтому

$$\|f_{2m+1}\|_\infty = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \|f_{2m+1}\|_\infty =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha f_{2m+1} \left( k\alpha - \frac{\pi}{2} \right),$$

значит в качестве  $\gamma$  можно взять любое  $k\alpha - \pi/2$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ , откуда

$$t_n \left( \frac{k\alpha + \pi l - \pi/2}{h} \right) = (-1)^l \|t_n\|_\infty, \quad k = 1, \dots, m+1, \quad l = 1, \dots, 2h.$$

Следовательно, многочлен  $t_n$  имеет на интервале  $[\pi/2h, 2\pi + \pi/2h)$  локальные экстремумы в точках  $(k\alpha + \pi l - \pi/2)/h$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ ,  $l = 1, \dots, 2h$ , и общее их количество равно  $2(m+1)h > n$ . Докажем его единственность рассуждением от противного. Так как производная многочлена  $t_n$  в точках локальных экстремумов равна нулю, то если бы существовал другой многочлен с теми же локальными экстремумами, то разность этих многочленов имела бы на интервале  $[\pi/2h, 2\pi + \pi/2h)$  не менее  $2(m+1)h > n$  двукратных корней, что противоречит теореме о числе корней на периоде у тригонометрического многочлена.

Рассмотрим случай четного  $\lfloor n/h \rfloor$ . Тогда  $n \geq (2m+2)h$ ,  $m = \lfloor \frac{n-h}{2h} \rfloor$ . Полагаем, как и выше, что  $c_h = 1$ . Покажем, что тогда экстремальными будут многочлены  $g_{2m+1}(hx) + cU_{m+1}^2(\sin hx)$  при любом достаточно малом  $|c|$ , где  $U_k(x)$  — многочлен Чебышёва второго рода, определяемый равенством  $U_k(\cos x) = \sin(k+1)x/\sin x$  (см. [1]). Так как в силу тождества  $\sin(k+2)x + \sin kx = 2\sin(k+1)x \cos x$  очевидно  $U_{k+1}(\cos x) + U_{k-1}(\cos x) = 2\cos x U_k(\cos x)$ , то по индукции легко проверяется, что  $U_k(x)$  есть алгебраический многочлен степени  $k$ . Так как

$$\begin{aligned} U_k(-\cos x) &= U_k(\cos(x+\pi)) = \frac{\sin(k+1)(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \\ &= (-1)^k \frac{\sin(k+1)x}{\sin x} = (-1)^k U_k(\cos x), \end{aligned}$$

то  $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$ , значит  $U_k^2(x)$  — четный алгебраический многочлен степени  $2k$ , значит  $U_{m+1}^2(\sin h(x+\pi)) = U_{m+1}^2(\pm \sin hx) = U_{m+1}^2(\sin hx)$ , следовательно  $U_{m+1}^2(\sin hx) = \sum_{k=0}^{m+1} d_{2k} \cos 2k hx$  есть четный тригонометрический многочлен порядка  $2(m+1)h \leq n$ . Так как корни многочлена  $U_k(x)$  есть, очевидно,  $\cos l\pi/(k+1)$ ,  $l = 1, \dots, k$  то в силу равенств

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{m+2}, \sin \left( h \frac{k\alpha + \pi l - \pi/2}{h} \right) = \sin \left( k\alpha + \pi l - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= (-1)^{l+1} \cos k\alpha = (-1)^l \cos(m+2-k)\alpha \end{aligned}$$

тригонометрический многочлен  $U_{m+1}(\sin hx)$  имеет корни  $(k\alpha + \pi l - \pi/2)/h$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . В силу формулы дифференцирования  $(f^2)' = 2ff'$  у многочлена  $U_{m+1}^2(\sin hx)$  те же корни будут двукратными (но не троекратными, так как суммарная кратность корней на периоде не может быть больше  $4(m+1)h$ ), и они совпадают с точками локальных экстремумов многочлена  $g_{2m+1}(hx)$ , так как подобные точки многочлена  $g_{2m+1}(x)$  есть  $k\alpha + \pi l - \pi/2$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Поэтому локальные экстремумы многочлена  $g_{2m+1}(hx) + cU_{m+1}^2(\sin hx)$

совпадают с локальными экстремумами многочлена  $g_{2m+1}(hx)$ . Осталось доказать, что при малом  $|c|$  локальные экстремумы будут также глобальными. Заметим, что, в силу отсутствия кратных корней у производной  $g_{2m+1}(x)$  и известного признака локального экстремума, в точках локальных максимумов вторая производная  $g_{2m+1}(x)$  отрицательна, а в точках локальных минимумов — положительна, и то же самое, очевидно, верно для многочлена  $g_{2m+1}(hx)$ . Аналогично, во всех указанных точках вторая производная многочлена  $U_{m+1}^2(\sin hx)$  положительна. Поэтому глобальность локальных экстремумов у многочлена  $g_{2m+1}(hx) + cU_{m+1}^2(\sin hx)$  при любом достаточно малом  $|c|$  вытекает из следующей интуитивно очевидной леммы:

Пусть функции  $f, g$  дважды дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ . Если они имеют двукратные нули в точках  $a, b$ , вторая производная  $g$  в этих точках отрицательна, вторая производная  $f$  в них положительна, и  $g(x) < 0 < f(x)$  при  $a < x < b$ , то при малом  $|c|$   $g(x) + cf(x) < 0$  при  $a < x < b$ . Если же  $g$  убывает на этом отрезке и  $g'(a) = g'(b) = 0, g''(a) < 0, g''(b) > 0$ , то  $g(a) \geq g(x) + cf(x) \geq g(b)$  при малом  $|c|$ .

Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что при малом  $|c|$  и  $a < x < b$  справедливо неравенство  $g(x)/f(x) < -c$ . Так как  $g(x)/f(x) < 0$ , и согласно правилу Бернулли–Лопиталья<sup>17)</sup>

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g''(a)}{f''(a)} < 0,$$

и аналогично  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)/f(x) < 0$ , значит функция  $g(x)/f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , поэтому согласно теореме<sup>18)</sup> о существовании экстремума

$$\max_{a \leq x \leq b} g(x)/f(x) = M < 0$$

и достаточно выбрать  $|c| < |M|$ . Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что при  $a < x < b$

$$(g(a) - g(x))/f(x) > c > (g(b) - g(x))/f(x).$$

Применяя правило Лопиталья к обеим дробям имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{f(x)} = -\frac{g''(a)}{f''(a)} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(b) - g(x)}{f(x)} = -\frac{g''(b)}{f''(b)} < 0,$$

значит функции  $(g(a) - g(x))/f(x), (g(b) - g(x))/f(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , поэтому согласно теореме о существовании экстремума

$$\min_{a \leq x \leq b} \frac{g(a) - g(x)}{f(x)} = M_1 > 0, \quad \max_{a \leq x \leq b} \frac{g(b) - g(x)}{f(x)} = M_2 < 0,$$

и достаточно выбрать  $|c| < \min(M_1, -M_2)$ .

<sup>17)</sup>Если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ . Можно, конечно, обойтись без правила Лопиталья, используя вместо него теорему о среднем.

<sup>18)</sup>Непрерывная на отрезке функция имеет на нём максимум и минимум.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Полия Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*. М.: Мир, 1978.
- [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Физматлит, 2004.
- [3] Бернштейн С. Н. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной*. М.: ОНТИ, 1937.
- [4] Рыжаков И. Ю. *Об одной задаче С. Н. Бернштейна* // ДАН СССР, 1963, 153, №2, С. 282–285.
- [5] Вороновская Е. В. *Метод функционалов и его приложения*. Л., 1963.
- [6] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике  $L_p$*  // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.
- [7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы арифметики и алгебры*. М.: Физматлит, 2001.

# Неравенство Фейера – Эгервари – Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени  $n$  называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где  $a_k, b_k$  — действительные числа, называемые его коэффициентами,  $a_n^2 + b_n^2 > 0$ . Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде  $a_0/2$ . Так как согласно формулам Эйлера  $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$ , и  $a_k \sin kx + b_k \cos kx = \operatorname{Re}((b_k - ia_k) \exp ikx)$ , где  $\operatorname{Re}$  означает действительную часть комплексного числа,  $i$  — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx, \quad c_k = b_k - ia_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Действительный тригонометрический многочлен  $t_n(x)$  называется неотрицательным, если для любого действительного  $x$  значение  $t_n(x) \geq 0$ . Для его коэффициентов справедливо неравенство Фейера – Эгервари – Сасса (см. [1–3])

$$|c_h| \leq 2|c_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2} = |a_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2}, \quad h = 1, \dots, n,$$

где символ  $\lfloor a \rfloor$  означает целую часть числа  $a$ . Это неравенство имеет применения в теории приближений (см. [4]). Доказывается оно в [2–4] применением представления неотрицательного тригонометрического многочлена  $t_n(x)$  в форме Фейера [1]

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2$$

и последующим решением полученной экстремальной задачи, либо с помощью одной матричной задачи о собственных значениях ([2, 3]), либо применением метода множителей Лагранжа ([4]).

Далее мы приведем два простых и элементарных доказательства этого неравенства, использующие только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [5]).

Сначала сведем общий случай к случаю  $h = 1$ , рассматривая вместо многочлена  $t_n(x)$  его усреднение, а именно многочлен

$$\frac{1}{h} \sum_{l=1}^h t_n \left( \frac{x + 2\pi l}{h} \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\lfloor n/h \rfloor} c_{hk} \exp ikx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^h t_n \left( \frac{x + 2\pi l}{h} \right) &= \sum_{l=1}^h \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp \left( \frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^h c_k \exp \left( \frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right), \end{aligned}$$

где при  $k$ , кратном  $h$ , в силу равенства  $\exp(2\pi k l i/h) = \exp 2\pi m i = 1$  имеем

$$\sum_{l=1}^h c_k \exp \left( \frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right) = c_k \exp \left( \frac{ikx}{h} \right) \sum_{l=1}^h \exp \left( \frac{2\pi k l i}{h} \right) = c_k h \exp \left( \frac{ikx}{h} \right),$$

а при  $k$  не кратном  $h$ , применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^h \exp \left( \frac{2\pi k l i}{h} \right) = \sum_{l=0}^{h-1} \exp \left( \frac{2\pi k l i}{h} \right) = \frac{\exp 2\pi k i - 1}{\exp(2\pi k i/h) - 1} = 0.$$

Так как усредненный многочлен очевидно неотрицателен, применяя к нему частный случай  $h = 1$  доказываемого неравенства, получаем общий случай этого неравенства. Поэтому далее остается доказать для неотрицательного тригонометрического многочлена  $t_n(x)$  неравенство

$$|c_1| \leq |a_0| \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Применяя к  $t_n(x)$  указанное выше усреднение при  $h = n+1$ , замечаем, что

$$\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} t_n \left( \frac{x + 2\pi l}{n+1} \right) = c_0 = \frac{a_0}{2} \geq 0,$$

причем равенство возможно лишь когда  $t_n(x)$  тождественно равно нулю, т. е. когда  $c_k = 0, k = 0, \dots, n$ , поэтому указанное неравенство можно переписать в виде

$$|c_1| \leq a_0 \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Выберем  $x_0$  так, чтобы  $c_1 \exp ix_0 = |c_1|$  и вместо  $t_n(x)$  возьмем неотрицательный тригонометрический многочлен  $(t_n(x_0 + x) + t_n(x_0 - x))/(2a_0)$ , тогда из равенства

$$\frac{t_n(x_0 + x) + t_n(x_0 - x)}{2a_0} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2a_0} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n c_k \exp(ik(x_0 + x)) + \sum_{k=0}^n c_k \exp(ik(x_0 - x)) \right) = \\
 &= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k (\exp(ik(x + x_0)) + \exp(ik(x_0 - x)))) = \\
 &= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k \exp(ikx_0) (\exp ikx + \exp(-ikx))) = \\
 &= \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k \exp(ikx_0)) \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{|c_1|}{a_0} \cos x + \sum_{k=2}^n d_k \cos kx
 \end{aligned}$$

следует, что  $t_n(x)$  становится четным действительным тригонометрическим многочленом, и для доказательства общего неравенства Фейера – Эгервари – Сасса достаточно доказать для неотрицательного четного многочлена  $t_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^n b_k \cos kx$  неравенство  $|b_1| \leq \cos \pi/(n + 2)$ . Согласно теореме Фейера [1] (см. также [3])

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2,$$

где  $y_k, k = 0, \dots, n$  — действительные числа. Так как комплексно-сопряженное число к  $\sum_{k=0}^n y_k \exp ikx$  есть  $\sum_{k=0}^n y_k \exp(-ikx)$ , то

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2 &= \left( \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right) \left( \sum_{k=0}^n y_k \exp(-ikx) \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^n (\exp ikx + \exp(-ikx)) \sum_{l=k}^n y_l y_{l-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^n (2 \cos kx) \sum_{l=k}^n y_l y_{l-k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k \cos kx,
 \end{aligned}$$

откуда, приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства, имеем

$$\sum_{k=0}^n y_k^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2}.$$

Положим для краткости

$$\alpha = \frac{\pi}{n+2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

тогда

$$\sigma_k^2 + \sigma_{k-1}^2 = \frac{\sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} = 2 \cos \alpha = \sigma_1^2,$$

поэтому справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^n y_k^2 - \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \sum_{k=1}^n \left( \sigma_k y_{k-1} - \frac{y_k}{\sigma_k} \right)^2,$$

в котором легко убедиться раскрытием скобок. Из тождества, очевидно, следует нужное нам неравенство

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^n y_k^2 \geq \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2 \cos \alpha}.$$

В равенство оно обращается лишь когда  $\sigma_k y_{k-1} = y_k / \sigma_k$ , т. е. когда

$$\frac{y_k}{y_{k-1}} = \sigma_k^2 = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha},$$

другими словами, при условии коллинеарности векторов

$$(y_0, \dots, y_n), (\sin \alpha, \dots, \sin(n+1)\alpha).$$

Можно проверить, что тригонометрический многочлен

$$\frac{1}{n+2} \left| \sum_{k=0}^n \sin((k+1)\alpha) \exp(ikx) \right|^2 = \sum_{k=0}^n b_k \cos kx, \quad b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \cos \alpha,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 k\alpha = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2k\alpha}{2} = \frac{n+2}{2}$$

в силу тождества

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos 2k\alpha = \sum_{k=0}^{n+1} \cos 2k\alpha = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n+1} \exp 2k\alpha = \operatorname{Re} \frac{\exp(2(n+2)\alpha) - 1}{\exp(2\alpha) - 1} = 0.$$

Заметим еще, что доказанное неравенство

$$\left( \cos \frac{\pi}{n+2} \right) \sum_{k=0}^n y_k^2 \geq \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1}$$

равносильно неравенству Фана–Таусски–Тодда

$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k^2 \leq \frac{1}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} (y_k - y_{k-1})^2,$$

где  $y_0 = y_{n+1} = 0$ , которое является дискретным аналогом неравенства Виргингера (см. [6]).

Покажем теперь, как можно доказать неравенство, не пользуясь теоремой Фейера. Для этого достаточно подобрать положительные коэффициенты  $\beta_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , так, чтобы для любого комплексного тригонометрического многочлена  $t_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \exp ikx$  выполнялось при  $\alpha = \pi/(n+2)$  и некотором

действительном  $\gamma$  тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{c_1 \exp(i(x + \gamma))}{\cos \alpha}.$$

Тогда для действительного тригонометрического многочлена будет выполняться тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{\operatorname{Re}(c_1 \exp i\gamma \exp ix)}{\cos \alpha}.$$

Если применить его к неотрицательному тригонометрическому многочлену, то двучлен  $1 + \operatorname{Re}(c_1 \exp i(x + \gamma))/\cos \alpha$  также будет неотрицательным. Выберем действительное  $x^*$  так, чтобы  $\operatorname{Re}(c_1 \exp i(x^* + \gamma)) = -|c_1|$ . Тогда

$$1 + \frac{\operatorname{Re} c_1 \exp(i(x^* + \gamma))}{\cos \alpha} = 1 - \frac{|c_1|}{\cos \alpha} \geq 0,$$

откуда и следует нужное нам неравенство  $|c_1| \leq \cos \alpha$ .

Остается выбрать коэффициенты и доказать тождество. Рассмотрим числовую последовательность  $\gamma_k$ , определяемую начальными условиями  $\gamma_{-1} = 0$ ,  $\gamma_0 = 1$  и рекуррентными соотношениями  $\gamma_{k-1} + \gamma_{k+1} - 2\gamma_k \cos 2\alpha = 1$ ,  $\alpha = \pi/(n+2)$ . Очевидно  $\gamma_1 = 1 + 2 \cos 2\alpha \geq 0$ . Решая рекуррентное соотношение, можно найти, что

$$\begin{aligned} \gamma_k &= A \sin 2k\alpha + B \cos 2k\alpha + C, \\ A &= \frac{1 + 2 \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha}, \quad C = \frac{1}{2 - 2 \cos 2\alpha}, \quad B = 1 - 2C. \end{aligned}$$

Но проще непосредственно проверить, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sin 2(k-1)\alpha + \sin 2(k+1)\alpha &= 2 \sin 2k\alpha \cos 2\alpha, \\ \cos 2(k-1)\alpha + \cos 2(k+1)\alpha &= 2 \cos 2k\alpha \cos 2\alpha, \\ \gamma_0 &= B + C = 1, \end{aligned}$$

$$\gamma_{-1} = -\frac{1}{2} - \cos 2\alpha + (1 - C) \cos 2\alpha + C = -\frac{1}{2} + C(1 - \cos 2\alpha) = 0,$$

что так определенная последовательность удовлетворяет указанным выше начальным условиям и рекуррентным соотношениям. Очевидно в силу периодичности, что  $\gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = 0$ ,  $\gamma_{n+2} = \gamma_0 = 1$ , откуда с помощью рекуррентной формулы находим, что  $\gamma_n = 0$ ,  $\gamma_{n-1} = 1$ , поэтому в силу равенств  $\gamma_{-1} = \gamma_n$ ,  $\gamma_0 = \gamma_{n-1}$  и симметричности рекуррентного соотношения относительно замены  $k$  на  $n-1-k$  имеем равенство  $\gamma_k = \gamma_{n-1-k}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Так как  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 \geq 0$ , то при  $n \leq 3$  очевидно  $\gamma_k \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Проверим это при  $n \geq 4$ . Так как при  $0 \leq k \leq (n-1)/2$  очевидно  $0 \leq 2k\alpha < \pi$ ,  $0 \leq 2\alpha \leq \pi/3$ ,  $\sin 2k\alpha > 0$ ,  $\cos 2\alpha \geq 1/2$ , поэтому  $A \geq 0$ ,  $C \geq 1$ ,  $B \leq 0$ , следовательно  $A \sin 2k\alpha \geq 0$ , и в силу монотонности  $C + B \cos 2k\alpha \geq C + B = 1$ , откуда имеем  $\gamma_k \geq 1$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  при  $n \geq 4$ . Рассмотрим многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k z^k.$$

Непосредственно из рекуррентных соотношений следует, что

$$(z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1)p(z) = z^{n+1} + \dots + z + 1,$$

так как  $\gamma_n = \gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = \gamma_{-2} = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{z^{n+1} + \dots + z + 1}{z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1} = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1)} = \\ &= \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))}, \end{aligned}$$

а так как

$$z^{n+2} - 1 = \prod_{k=0}^{n+1} (z - \exp 2k\alpha i),$$

то

$$p(z) = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))} = \prod_{k=2}^n (z - \exp 2k\alpha i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k &= p(1) = \frac{n+2}{2-2\cos 2\alpha} = \frac{n+2}{4\sin^2 \alpha}, \\ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i \right| &= |p(\exp 2\alpha i)| = \\ &= \left| \prod_{k=2}^n (\exp 2\alpha i - \exp 2k\alpha i) \right| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i) \right|, \end{aligned}$$

а так как

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \exp 2k\alpha i) &= \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp 2(n+1)\alpha i)} = \\ &= \frac{z^{n+1} + \dots + z + 1}{(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp 2(n+1)\alpha i)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i \right| &= \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i) \right| = \\ &= \left| \frac{n+2}{(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)} \right| = \frac{n+2}{8\sin^2 \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

в силу равенств

$$\begin{aligned} |(\exp 2xi - 1)| &= \sqrt{(\cos 2x - 1)^2 + \sin^2 2x} = \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 2|\sin x|, \\ |(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)| &= |(\exp 4\alpha i - 1)(\exp 2\alpha i - 1)| = \end{aligned}$$

$$= 4 \sin 2\alpha \sin \alpha = 8 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

откуда следует, что при некотором действительном  $\gamma$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i = \frac{(n+2) \exp i\gamma}{8 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Далее, при  $l = 2, \dots, n$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2lk\alpha i &= p(\exp 2l\alpha i) = \\ &= \frac{(\exp 2l\alpha i)^{n+2} - 1}{(\exp 2l\alpha i - 1)(\exp 2l\alpha i - \exp 2\alpha i)(\exp 2l\alpha i - \exp(-2\alpha i))} = 0, \end{aligned}$$

и поэтому для комплексного тригонометрического многочлена  $t_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l t_n(x + 2l\alpha) &= \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \sum_{k=0}^n c_k \exp ik(x + 2l\alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \exp 2kl\alpha i = \frac{n+2}{4 \sin^2 \alpha} \left( c_0 + \frac{c_1 \exp i(x + \gamma)}{2 \cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Полагая  $\beta_k = 8\gamma_k \sin^2 \alpha / (n+2)$ , получаем обещанное тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k t_n(x + 2k\alpha) = 2c_0 + \frac{c_1 \exp(i\gamma) \exp(ix)}{\cos \alpha}, \quad \beta_k > 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fejer L. *Ueber trigonometrische Polynome* // J. fuer die reine und angew. Math., 1915. Bd. 146. S. 53–82.
- [2] Egervary E., Szasz O. *Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome* // Math. Zeitschr., 1928. Bd. 27. S. 641–652.
- [3] Поля Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*. М.: Наука, 1978.
- [4] Тихомиров В. М. *Некоторые вопросы теории приближений*. М.: Изд. МГУ, 1976.
- [5] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике  $L_p$*  // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. М.: Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.
- [6] Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства*. М.: Мир, 1965.

Комментарий к статье С. Б. Гашкова  
«Неравенство Фейера – Эгервари – Сасса для  
неотрицательных тригонометрических  
многочленов»

В. М. Тихомиров

В статье С. Б. Гашкова элементарными средствами доказано важное и интересное неравенство. Оно заключается в том, что неотрицательный четный тригонометрический полином в среднем равный единице, не может иметь слишком большие по модулю коэффициенты. Это обстоятельство имеет то же происхождение, что и принцип неопределенности в квантовой механике. Оно и его разнообразные обобщения имеют многочисленные приложения.

В статье имеется ссылка на мою книгу (см. [4] в списке литературы), где это неравенство доказывается методом множителей Лагранжа. Это доказательство с одной стороны настолько просто, а с другой — дает такие богатые возможности для обобщений, что мне представилось разумным привести его здесь. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА. *Если тригонометрический полином*

$$x(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_k \cos kt$$

*(с вещественными коэффициентами) неотрицателен, то выполнено точное неравенство:*

$$|\rho_1| \leq \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

(Общий результат легко редуцируется к этой теореме — это показано в начале комментируемой статьи.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что полином  $x(\cdot)$  представим в виде квадрата многочлена:  $x(t) = |\sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}|^2$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$ . Таким образом,

$$x(t) = \left( \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt} \right) \left( \sum_{k=0}^n x_k e^{-ikt} \right) = \sum_{k=0}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} \cos t + \dots,$$

и дело свелось к точному решению экстремальной задачи:

$$- \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} \rightarrow \min, \quad \sum_{k=0}^n x_k^2 = 1.$$

Решение этой задачи из-за компактности сферы  $\sum_{k=0}^n x_k^2 = 1$  существует. Применяем правило множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:  $\mathcal{L}(x, \lambda) = -\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^n x_k^2$ . Согласно правилу множителей Лагранжа, если  $x$  — решение задачи, то найдется множитель Лагранжа  $\lambda$  такой, что  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Это приводит к системе уравнений:

$$x_1 = 2\lambda x_0, \quad x_{k-1} + x_{k+1} = 2\lambda x_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad x_{n-1} = 2\lambda x_n. \quad (1)$$

Значит,  $x_k = p_k(\lambda)x_0$ , где  $p_k(\cdot)$  — многочлен от  $\lambda$ , удовлетворяющий рекуррентным соотношениям:

$$p_k(\lambda) = 2\lambda p_{k-1}(\lambda) - p_{k-2}(\lambda), \quad k \geq 2, \quad p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = 2\lambda. \quad (2)$$

Для математика, знакомого с теориями квадратичных форм и ортогональных полиномов, на этом всё кончается: выписанными соотношениями определяются *полиномы Чебышёва второго рода*, представимые формулами:  $p_k(\lambda) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ , где  $\lambda = \cos\theta$ . При этом, ввиду того, что  $p_{n-1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda)$  (такое последнее рекуррентное соотношение), получаем, что  $p_{n+1}(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(n+2)\theta = 0$ . Максимум в задаче совпадает с наибольшим корнем этого уравнения. Откуда, значение задачи равно  $\cos \frac{\pi}{n+2}$ . В этом и состоит теорема.

Для тех же, кто сталкивается со всем этим впервые, надо кое-что пояснить.

1. Умножая уравнения (1) соответственно на  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , складывая и учитывая, что  $\sum_{k=0}^n x_k^2 = 1$ , приходим к тому, что  $\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} = \lambda$ , т. е. значение задачи — максимальное число среди множителей Лагранжа, удовлетворяющих уравнениям (1).

2. Решают уравнения в конечных разностях так. Частное решение ищется в виде  $p_k(\lambda) = a^k$ . Тогда  $a$  должно удовлетворять уравнению  $a^2 - 2\lambda a + 1 = 0$ , т. е.  $a = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$ , откуда  $a = e^{i\theta}$ , где  $\lambda = \cos\theta$ . Общее решение ищем в виде  $p_k(\lambda) = C_1 e^{ik\theta} + C_2 e^{-ik\theta}$ . Учитывая граничные условия, получаем, что  $p_k(\lambda) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ . Максимальный корень уравнения  $p_{n-1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda)$  (такое последнее рекуррентное соотношение) — это корень уравнения  $\sin(n+2)\theta = 0$ , т. е.  $\theta = \frac{\pi}{n+2}$ , откуда значение задачи равно  $\cos \frac{\pi}{n+2}$ , что и требовалось.

# Теорема Неймана о минимаксе — общеизвестная и неизвестная

Б. Р. Френкин

Теорема Неймана о минимаксе по праву считается ключевым результатом теории игр, но распространено мнение, что Нейман доказал ее лишь для билинейного случая, причем сложным способом. В действительности Нейман доказал эту теорему для широкого класса функций, с чем и связан его метод — прозрачный по идее, родственные доказательствам целого ряда последующих обобщений и по сути своей топологической. По той же принципиальной схеме доказывается и теорема Хана–Банаха. Как известно, другой подход к теореме о минимаксе связан с теоремой Какутани, первоначально также полученной (в других терминах) Нейманом; в заметке приводится наиболее простое ее доказательство, принадлежащее Какутани.

## 1.

28 декабря 2003 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Джона (Яноша, Иоганна) фон Неймана — одного из величайших математиков XX века. Ему принадлежат основополагающие результаты во многих областях, и одним из первых стала теорема о минимаксе, доказанная в его статье „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele“, *Mathematische Annalen*, 100 (1928), 295–320 (русский перевод [3]). Появление этой работы считается моментом рождения теории игр как самостоятельной математической дисциплины. Нейман сформулировал основные понятия теории игр и постановку ее задач, доказал ее ключевую теорему, которая затем получила разнообразные применения и обобщения. Однако именно принципиальная новизна этого результата привела к тому, что нередко он не воспринимался в полном объеме — это относится и к общности формулировки, и к методу доказательства.

Можно встретить утверждения, что первоначальное доказательство Неймана излишне усложнено. Источником такой оценки служит не что иное, как книга Неймана и Моргенштерна [4], где на с. 178 говорится следующее: «Доказательство нашей теоремы, приведённое в первой статье [т. е. статье 1928 г.], довольно запутанным образом использует аппарат топологии и теории функций». Иногда полагают также, что результат Неймана относится только к билинейным функциям. (Однако необходимо отметить, что, например, Какутани [9] формулирует — и доказывает своим методом — теорему Неймана в полной общности.) Для билинейного случая впоследствии появились более элементарные доказательства, чем в действительности и вызвано цитированное замечание.

На самом деле Нейман доказал теорему о минимаксе в гораздо большей общности: для функций, которые непрерывны на прямом произведении симплексов, квазивогнуты на одном из них и квазивыпуклы на другом, причем симплексы в этом доказательстве можно заменить произвольными выпуклыми компактными в конечномерном вещественном пространстве (см. п. 3)<sup>1)</sup>. Теоремой Неймана охватывается, в частности, популярный впоследствии случай непрерывных вогнуто-выпуклых функций.

Именно с общностью результата и связан метод Неймана, прозрачный по идее и родственные доказательства ряда позднейших обобщений (см. пп. 3, 4). С другой стороны, более элементарные доказательства для билинейного случая (см., например, [4, с. 163–167, 178–179]) опираются на теорему о разделяющей (или опорной) гиперплоскости, тесно связанную с теоремой Хана–Банаха. Однако анализ доказательства теоремы Хана–Банаха показывает, что оно само строится по той же принципиальной схеме, что и доказательство Неймана (см. пп. 4, 5). Интересно отметить, что обе теоремы были получены практически одновременно (работа Хана появилась в 1927, Неймана в 1928 и Банаха в 1929), но в совершенно разном контексте, и их связь вначале не осознавалась.

## 2.

Что же в действительности доказал Нейман и в чем состоит его метод?

В статье [1] формулируется следующая

**ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ.** Пусть  $h(\xi, \eta)$  — вещественная билинейная функция от векторов  $\xi$  и  $\eta$  в конечномерных вещественных пространствах, причем эти векторы пробегают симплексы, натянутые на нулевой вектор и координатные орты. Тогда

$$\max_{\xi} \min_{\eta} h(\xi, \eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} h(\xi, \eta). \quad (*)$$

Различные теоремы о минимаксе отличаются от вышеприведенной, во-первых, классом рассматриваемых функций, а во-вторых, характером их области определения. Заключение теоремы обычно имеет вид «максмин равен минимаксу». (В равенстве (\*) максмин или максимин — это левая часть, а минимакс — правая. Разумеется, в доказательстве нуждается лишь то, что максмин не меньше минимакса. Обратное неравенство всегда справедливо: «самый длинный среди самых коротких по шеренгам не длиннее, чем самый короткий среди самых длинных по колоннам».)

В дальнейшем появились варианты теоремы, где речь идет о супремумах и инфимумах. Если же минимакс и максмин действительно достигаются, то, как легко проверить, их равенство эквивалентно существованию *седловой точки*, где одновременно достигается максимум по  $\xi$  и минимум по  $\eta$ . Действительно,

<sup>1)</sup> Отметим, что по этому поводу в заметке [8] допущена неточность: доказательство Неймана требует именно непрерывности на произведении компактов, а не только полунепрерывности с соответствующей стороны на каждом из них. Обобщение на случай полунепрерывности (для квазивогнуто-квазивыпуклых функций, при возможной некомпактности одного из двух множеств определения) принадлежит М. Сайону (см. [1, с. 259–260]).

пусть минимакс достигается в точке  $(x, y_0)$ , а максмин — в точке  $(x_0, y)$ . Тогда  $f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) \geq f(x_0, y)$ . Если минимакс равен максмину, то двойное неравенство обращается в равенство и точка  $(x_0, y_0)$  — седловая. Обратное, если седловая точка существует, то значение функции в ней не меньше минимакса и не больше максмина. Так как минимакс не может быть меньше максмина, то они равны.

Нейман формулирует свое утверждение для билинейной функции, но пишет, что при доказательстве требуются лишь некоторые из ее свойств (видимо, с этой формулировкой и связана иллюзия, что его теорема доказана только для билинейного случая). Роль билинейных функций определяется тем, что в игре двух участников с конечным числом вариантов ходов (*чистых стратегий*) игроки могут выбирать их с некоторыми вероятностями — использовать *смешанные стратегии*; тогда выигрыш игрока (и проигрыш его противника) является билинейной функцией от этих вероятностей. Для такой ситуации теорема о минимаксе означает, что существует *решение игры* — такая пара смешанных стратегий, когда каждый игрок получает результат, наилучший при данных действиях противника.

Развитие теории игр заставило рассматривать и другие функции выигрыша. Начало этому положил Нейман в статье [10], где применяется теорема Брауэра о неподвижной точке и доказано ее обобщение, которое позже получил другим способом Какутани (см. п. 6). Затем был доказан ряд вариантов теоремы о минимаксе, ориентированных на максимальную общность либо, наоборот, на конкретные приложения (см. [1, с. 238–267, 362]). В 1959 У Вэнь-цзюнь (см. [1, с. 258–259]) впервые опубликовал чисто топологический вариант теоремы — непростой по формулировке и (как следствие) по доказательству, но зато охвативший множество известных вариантов. Эту теорему обобщил Хоанг Туй (см. [1, с. 253–258]), а позднее и другие авторы.

### 3.

Вернемся к статье Неймана. Он отмечает, что в доказательстве требуется не билинейность функции, а (в современной терминологии) ее квазивогнутость по  $\xi$ , квазिवыпуклость по  $\eta$  и непрерывность по совокупности переменных. Квазивогнутость (соответственно квазिवыпуклость) означает, что если функция на обоих концах отрезка не меньше (соответственно не больше) некоторого значения, то это верно на всём отрезке. Таким свойством обладает любая вогнутая (соответственно выпуклая) функция. Но классы квазивогнутых и квазिवыпуклых функций гораздо шире; например, им принадлежит любая монотонная функция.

Как отмечено в п. 1, симплексы, служащие областью изменения переменных  $\xi$  и  $\eta$ , можно заменить любыми выпуклыми компактами в конечномерных вещественных пространствах. Что же касается «запутанного» доказательства теоремы Неймана, то оно состоит в следующем (некоторые обозначения отличаются от авторских).

Доказательство теоремы Неймана для квазивогнуто-квазिवыпуклых непрерывных функций. Выберем в пространствах переменных  $\xi$  и  $\eta$

по одной координате  $\xi_r$  и  $\eta_s$  и рассмотрим функции (от остальных координат)  $\max_{\xi_r} \min_{\eta_s} f(\xi, \eta)$  и  $\min_{\eta_s} \max_{\xi_r} f(\xi, \eta)$ , где переменные меняются в пределах области определения функции  $f(\xi, \eta)$ . Непосредственно проверяется, что введённые функции обладают перечисленными выше свойствами (непрерывностью, квазивогнутостью и квазивыпуклостью по соответствующим группам переменных). Если мы докажем, что эти две функции тождественно совпадают, то теорема будет следовать из очевидной индукции.

Зафиксируем значения всех переменных, кроме  $\xi_r$  и  $\eta_s$ , и будем считать  $f$  функцией от двух последних. Далее, зафиксируем некоторое значение  $x$  переменного  $\xi_r$  и рассмотрим множество тех значений  $\eta_s$ , при которых  $f(x, \eta_s)$  достигает минимума. Из непрерывности функции  $f$  вытекает, что это множество непусто и замкнуто, а из ее квазивыпуклости по  $\eta_s$  — что оно выпукло. Кроме того, оно ограничено, так как ограничена область определения функции. Значит, это некоторый отрезок (возможно, сводящийся к точке)  $[K'(x), K''(x)]$ .

Зафиксируем значение  $y$  переменного  $\eta_s$  и рассмотрим множество тех значений переменного  $\xi_r$ , при которых  $f(\xi_r, y)$  достигает максимума. Аналогично предыдущему получаем, что это некоторый отрезок  $[L'(y), L''(y)]$ . Из непрерывности функции  $f$  вытекает, что функции  $K'(\xi_r), L'(\eta_s)$  полунепрерывны снизу, а  $K''(\xi_r), L''(\eta_s)$  полунепрерывны сверху<sup>2)</sup>. Действительно, пусть  $\xi_r \rightarrow x, K'(\xi_r) \rightarrow y$ . Тогда  $f(\xi_r, K'(\xi_r)) \rightarrow f(x, y)$ , поскольку функция  $f$  непрерывна. Но вместе с ней непрерывна и  $f(\xi_r, K'(\xi_r)) = \min_{\eta_s} f(\xi_r, \eta_s)$ ; значит,  $f(x, y) = f(x, K'(x))$ , откуда  $y \geq K'(x)$ , т. е. функция  $K'$  полунепрерывна снизу. Полунепрерывность  $K'', L', L''$  доказывается аналогично.

Рассмотрим объединение всех отрезков  $[L'(\eta_s), L''(\eta_s)]$ , где  $\eta_s$  пробегает  $[K'(x), K''(x)]$ . На этом отрезке полунепрерывная снизу функция  $L'(\eta_s)$  достигает минимума  $H'(x)$ , а полунепрерывная сверху функция  $L''(\eta_s)$  — максимума  $H''(x)$ . Предположим, что некоторое число  $x'$ , промежуточное между  $H'(x)$  и  $H''(x)$ , не принадлежит указанному объединению. Тогда каждый отрезок  $[L'(\eta_s), L''(\eta_s)]$  целиком расположен либо слева, либо справа от  $x'$ , причем существуют отрезки обоих видов (например, те, которые содержат  $H'(x)$  и  $H''(x)$  соответственно). На отрезке  $[K'(x), K''(x)]$  найдется значение  $\eta_s = y$ , в любой окрестности которого встречаются оба случая. Так как функция  $L'(\eta_s)$  (соответственно  $L''(\eta_s)$ ) полунепрерывна снизу (соответственно сверху), то  $L'(y) \leq x', L''(y) \geq x'$ , т. е.  $x'$  принадлежит отрезку  $[L'(y), L''(y)]$ , в противоречии с предположением. Значит, в действительности объединение отрезков  $[L'(\eta_s), L''(\eta_s)]$  заполняет весь отрезок  $[H'(x), H''(x)]$ .

Из полунепрерывности с соответствующей стороны функций  $K', K'', L', L''$  нетрудно получить, что функция  $H'(\xi_r)$  полунепрерывна снизу, а  $H''(\xi_r)$  — сверху. Рассуждая как в предыдущем абзаце, убеждаемся в существовании такого  $x$ , что  $H'(x) \leq x \leq H''(x)$ . Это означает существование такого  $y$ , что  $(x, y)$  является точкой минимума по  $\eta_s$  и точкой максимума по  $\xi_r$ , т. е. седловой точкой для  $f$ . Как отмечено выше, отсюда вытекает равенство минимакса и максмина.  $\square$

<sup>2)</sup>Функция  $f(x)$  полунепрерывна снизу в точке  $x_0$ , если из  $x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow y$  следует  $y \geq f(x_0)$ . Полунепрерывность сверху определяется аналогично.

## 4.

Принципиальную схему, лежащую в основе изложенного доказательства, можно сформулировать следующим образом (см. [8], где по этой схеме доказано одно топологическое обобщение теоремы Неймана). Пусть топологическое пространство  $S$  (в данном случае это отрезок с выколотой точкой  $x'$ ) состоит из двух открытых непересекающихся множеств  $S^+$  и  $S^-$ . Имеется семейство  $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$  связных подмножеств пространства  $S$ ; в данном случае это отрезки  $[L'(\eta_s), L''(\eta_s)]$  — в предположении, что  $x'$  не принадлежит их объединению. При этом множество индексов  $I$  является связным топологическим пространством (в данном случае — отрезком). Пусть  $I^+$  и  $I^-$  — множества тех индексов  $\alpha \in I$ , для которых  $M_\alpha$  не пересекается соответственно с  $S^+$  и с  $S^-$ . Будучи связными,  $M_\alpha$  не могут пересекаться одновременно с  $S^+$  и  $S^-$ . Поэтому объединение множеств  $I^+$  и  $I^-$  совпадает с  $I$ . Для конкретной ситуации доказывается, что оба множества замкнуты. Ввиду связности пространства  $I$  отсюда вытекает, что либо одно из них пусто, либо они пересекаются, и тогда должно быть пустым хотя бы одно из  $M_\alpha$ . (В данном случае получаем противоречие, которое показывает, что точки  $x'$  не существует. Затем эта схема применяется еще раз — к отрезкам  $[H'(x), H''(x)]$ .)

Описанное рассуждение лежит в основе доказательств У Вэнь-цзюня, Хоанг Туя, а также всех доказательств теорем о минимаксе, которые опираются на теорему о разделяющей гиперплоскости. Дело в том, что она является модификацией теоремы Хана–Банаха, а в доказательстве последней мы находим ту же схему! Так что по существу теорема Неймана — не следствие (в билинейном случае), а аналог теоремы Хана–Банаха.

## 5.

Читателю, знакомому со стандартным доказательством теоремы Хана–Банаха, последнее утверждение может показаться странным. В этом доказательстве речь идет о функционалах в линейном нормированном пространстве, над которыми выполняются алгебраические операции. На самом деле, как мы сейчас увидим, это доказательство допускает прозрачное изложение на основе описанной выше топологической схемы. Мы следуем заметке [8].

Будем доказывать теорему в следующей формулировке.

**ТЕОРЕМА ХАНА–БАНАХА.** Пусть на вещественном линейном пространстве  $N$  задан выпуклый функционал  $P(x)$ , а на некотором его подпространстве  $M$  — линейный функционал  $F(x)$ , подчиненный условию

$$F(x) \leq P(x) \quad (**)$$

(оба функционала — вещественные). Тогда  $F(x)$  продолжается до линейного функционала на всём пространстве, удовлетворяющего условию (\*\*).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно рассмотреть случай, когда  $M$  — гиперплоскость: далее проводится (трансфинитная) индукция по размерности. Выберем точку  $a \in N$ , не принадлежащую  $M$ . Продолжение функционала  $F(x)$  с  $M$  на

$N$  может принимать любое значение в точке  $a$  и определяется им однозначно. Точки, в которых данное продолжение нарушает (\*\*), назовем *недопустимыми*. Вследствие выпуклости  $P(x)$  множество таких точек выпукло. Поэтому оно лежит по одну сторону от  $M$  либо пусто. С каждой стороны от  $M$  какое-то продолжение имеет недопустимые точки (и потому не имеет их с другой стороны): достаточно положить в одном случае  $F(a) > P(a)$ , в другом  $F(a) < -P(-a)$ .

Пусть теперь  $I^+$  и  $I^-$  — множества значений в точке  $a$  тех продолжений функционала  $F(x)$ , у которых нет недопустимых точек соответственно по одну и по другую сторону от  $M$ . В силу сказанного эти множества непусты и их объединением служит вещественная прямая. Нетрудно видеть, что  $I^+$  и  $I^-$  замкнуты. Поэтому они пересекаются; точки пересечения соответствуют искомым продолжениям функционала  $F(x)$ .  $\square$

Мы видим, что в связи с теоремой о минимаксе Нейман сделал существенно больше, чем нередко считается. Он доказал эту теорему для широкого класса ситуаций и создал метод, важнейший в подобных вопросах. (Тут уместно вспомнить слова, сказанные С. Б. Стечкиным по поводу теоретико-числовых проблем в 1970 г. на заседании Московского математического общества: «У классиков всегда написано несколько больше, чем у тех, кто их переписывал».) Создавая теорию для описания нового класса ситуаций, Нейман не стремился достичь максимальной «привязки к местности», к наличным примерам. Наоборот, он хотел вывить принципиальную суть явлений, их логическую схему. И при этом обнаружилось родство с существенными фактами из различных разделов математики. Наглядно подтвердились слова Пуанкаре [7, с.388]: «... Математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам.»

## 6.

После сказанного будет нелишне подчеркнуть, что различные методы доказательства теорем о минимаксе имеют свои преимущества. В частности, теорема Неймана легко следует из теоремы Какутани о неподвижной точке. Последний результат имеет большое значение и в других вопросах — например, в связи с проблемами экономического равновесия. Однако на русском языке в течение долгого времени доказательство теоремы Какутани (не самое прозрачное) имелось лишь в одном общедоступном источнике, а именно [5, с. 97–99]. Лишь совсем недавно первоначальное, более простое доказательство Какутани было изложено в книге [6, с. 96–97]. Поэтому представляется полезным дополнить эту заметку доказательством теоремы Какутани, включив вывод из нее теоремы Неймана. Как и [6], мы в основном следуем первоисточнику [9].

**ТЕОРЕМА КАКУТАНИ.** Пусть в  $r$ -мерном вещественном пространстве дан выпуклый компакт  $S$  и каждой его точке  $x$  поставлено в соответствие выпуклое подмножество  $\Phi(x) \subset S$ , причем отображение  $\Phi$  замкнуто (в иной терминологии *полу непрерывно сверху*): если  $x_i \rightarrow x$ ,  $y_i \rightarrow y$  и  $y_i \in \Phi(x_i)$  при всех  $i$ , то  $y \in \Phi(x)$  («предел образов содержится в образе предела»). Тогда у отображения  $\Phi$  имеется *неподвижная точка* — такая точка  $x$ , что  $x \in \Phi(x)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поместим  $S$  внутрь  $r$ -мерного симплекса  $S'$ . Как известно, существует непрерывное отображение  $\psi : S' \rightarrow S$ , при котором  $\psi(x) = x$  для всех  $x \in S$  (ретракция симплекса  $S'$  на  $S$ ). Положив  $\Phi(x) = \Phi(\psi(x))$  для всех  $x \in S'$ , мы продолжим отображение  $\Phi$  на весь симплекс, причем замкнутость отображения и выпуклость образов сохранится. Теперь достаточно найти неподвижную точку на  $S'$ : она будет принадлежать  $S$ , поскольку  $\Phi(S') \subseteq S$ .

Разобьем  $S'$  на маленькие симплексы. Если  $v$  — вершина одного из них, то выберем точку  $v' \in \Phi(v)$  и положим  $\varphi_1(v) = v'$ . Сделаем так для всех вершин разбиения и продолжим отображение  $\varphi_1$  на остальные точки каждого маленького симплекса по линейности. Мы получим непрерывное отображение симплекса  $S'$  в себя. Согласно теореме Брауэра (см., например, [2, с. 502–507]) оно имеет неподвижную точку  $x_1 = \lambda_{1,0}x_{1,0} + \dots + \lambda_{1,r}x_{1,r}$ , где  $x_{1,0}, \dots, x_{1,r}$  — вершины одного из симплексов разбиения,  $\lambda_{1,0} + \dots + \lambda_{1,r} = 1$ ,  $\lambda_{1,0} \geq 0, \dots, \lambda_{1,r} \geq 0$ . При этом  $x_1 = \varphi_1(x_1) = \lambda_{1,0}\varphi_1(x_{1,0}) + \dots + \lambda_{1,r}\varphi_1(x_{1,r})$ .

Взяв более мелкое разбиение симплекса, построим аналогичное отображение  $\varphi_2$  с неподвижной точкой  $x_2 = \lambda_{2,0}x_{2,0} + \dots + \lambda_{2,r}x_{2,r}$ . Продолжим процесс, устремив диаметр разбиения к нулю. Можно выбрать такую подпоследовательность номеров  $i$ , для которой:  $x_i$  сходятся к некоторой точке  $x$  (как следствие,  $x_{i,0}, \dots, x_{i,r}$  сходятся к той же точке);  $\lambda_{i,0}, \dots, \lambda_{i,r}$  сходятся соответственно к некоторым  $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ , где  $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1$ ,  $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0$ ;  $\varphi_i(x_{i,0}), \dots, \varphi_i(x_{i,r})$  сходятся к некоторым  $y_0, \dots, y_r$ . Тогда  $x = \lambda_0y_0 + \dots + \lambda_ry_r$ . Из замкнутости отображения  $\Phi$  следует, что  $y_0, \dots, y_r$  принадлежат  $\Phi(x)$ . Так как это множество выпукло, то  $x$  также ему принадлежит, т.е. является неподвижной точкой отображения  $\Phi$ .  $\square$

Вывод теоремы Неймана из теоремы Какутани. Пусть на прямом произведении выпуклых компактов  $K$  и  $L$  в конечномерном вещественном пространстве задана непрерывная функция  $f(x, y)$ , квазивогнутая на  $K$  при каждом  $y$  и квазивыпуклая на  $L$  при каждом  $x$ . Для всех  $x \in K$  положим

$$L_x = \{y' \in L \mid f(x, y') = \min_{y'' \in L} f(x, y'')\};$$

$$K_y = \{x' \in K \mid f(x', y) = \max_{x'' \in K} f(x'', y)\};$$

$$\Phi(x, y) = K_y \times L_x.$$

Легко проверить, что точечно-множественное отображение  $\Phi$  удовлетворяет условиям теоремы Какутани и, значит, имеет неподвижную точку. Она является седловой точкой функции  $f(x, y)$ , откуда (см. п. 2) вытекает равенство минимакса и максимина.  $\square$

Автор благодарен В. М. Тихомирову за внимание к работе и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воробьёв Н. Н. *Основы теории игр. бескоалиционные игры*. М.: Наука, 1984.

- [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа*. М.: Наука, 1965.
- [3] Нейман Дж. фон. *К теории стратегических игр* // Матричные игры. М.: Физматлит, 1961. С. 173–204.
- [4] Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970.
- [5] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. М.: Мир, 1972.
- [6] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
- [7] Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1990.
- [8] Френкин Б. Р. *Некоторые топологические теоремы о минимаксе* // Матем. заметки, 2000. Т. 67, №1. С. 141–149.
- [9] Kakutani S. *A generalization of Brouwer's fixed point theorem* // Duke Math. Journ., 1941. Vol. 8, no 3. P. 457–459.
- [10] Neumann J. von. *A Model of General Economic Equilibrium* // The Review of Economic Studies, 1946. Vol. 13(1), No 33. P. 1–9.

# Геометрическая задача, связанная с обобщенными бильярдами

Л. Д. Пустыльников\*

В работе решается простая геометрическая задача (обобщающая задачу Герона) и даются приложения ее решения к обобщенным бильярдам.

## 1. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ГЕРОНА

Рассмотрим двумерную плоскость с прямоугольными координатами  $(x, y)$  и следующую задачу минимизации выпуклой функции одной переменной на полуоси:

$$f(z) = \sqrt{(x_1 - z)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - z)^2 + y_2^2} + kz \rightarrow \min, \quad z \geq 0, \quad (k \geq 0). \quad (1)$$

Предполагается, что  $y_i > 0$ . Задача (1) на всей прямой при  $k = 0$  известна, как задача Герона.

Решение  $\hat{z}$  задачи (1) очевидным образом существует (ибо  $f(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ ) и единственно (в силу строгой выпуклости  $f$ ). Из необходимых условий минимума для функций одного переменного, получаем, что если  $\hat{z} = 0$ , то  $f'(0) \geq 0$ , а если  $\hat{z} > 0$ , то  $f'(\hat{z}) = 0$ . В силу выпуклости, эти условия и достаточны. Таким образом, если

$$k \geq \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \quad (2)$$

то  $\hat{z} = 0$ , если же

$$k < \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \quad (3)$$

то  $\hat{z} > 0$ , и это число является единственным решением уравнения

$$k = \frac{x_1 - z}{\sqrt{(z - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x_2 - z}{\sqrt{(z - x_2)^2 + y_2^2}} = \cos \psi_2(z) - \cos \psi_1(z). \quad (4)$$

В (2) и (3)  $\varphi_i$  обозначает полярный угол точки  $(x_i, y_i)$  на плоскости с декартовыми координатами  $x_i, y_i$ ; углы  $\psi_i$  изображены на рис. 4, с. 90.

\*Работа частично поддержана РФФИ, проект 02-01-01067.

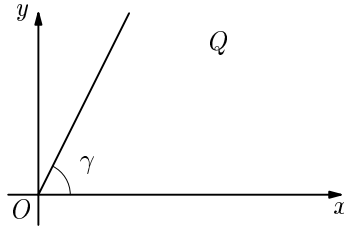


Рис. 1.

Если  $k \geq 2$ , то выполняется неравенство (2) и решением задачи всегда является  $\hat{z} = 0$ .

Пусть  $0 < k < 2$ . Рассмотрим бесконечный сектор  $Q$  с вершиной в точке  $O$ , имеющий угол  $\gamma$ ,  $\cos \gamma = k/2$ , одна сторона которого есть координатная полуось  $x \geq 0, y = 0$ , а другая сторона лежит внутри квадранта  $x \geq 0, y \geq 0$  (рис. 1).

Возможны следующие случаи расположения точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  относительно сектора  $Q$ .

1. Точки расположены внутри или на границе сектора  $Q$ , причем хотя бы одна лежит внутри сектора. Тогда выполняется неравенство (3), так как  $\cos \varphi_i \geq k/2$ , причем хотя бы одно неравенство — строгое.
2. Точки расположены вне или на границе сектора  $Q$ . Тогда выполняется неравенство (2) по аналогичным причинам.
3. Если одна точка лежит внутри сектора, а другая — вне сектора, то может выполняться любое из неравенств (2), (3).

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ГЕРОНА

Напомним известную задачу о переходе через реку. Нужно построить мост через реку с параллельными берегами так, чтобы путь между точками  $A$  и  $B$ , расположенными по разные стороны реки, был кратчайшим. Мост нужно расположить перпендикулярно берегам. Решение задачи о переходе через реку получается с помощью параллельного переноса, как показано на рис. 2.

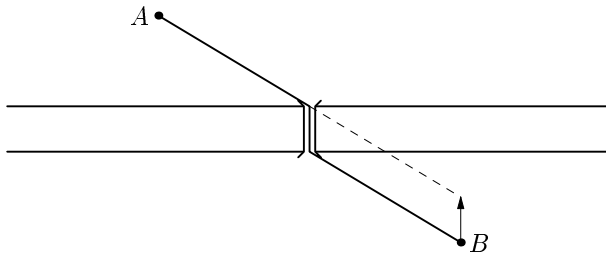


Рис. 2.

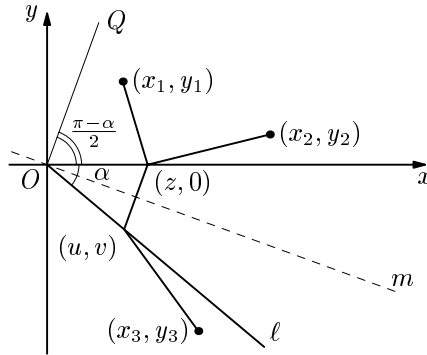


Рис. 3.

При решении задачи о переходе через реку с *непараллельными* берегами появляется обобщенная задача Герона.

Пусть река представляет собой плоский угол величиной  $\alpha$ , а мост нужно строить перпендикулярно биссектрисе  $m$  этого угла (рис. 3). Введем координаты, как показано на рис. 3: ось абсцисс направим вдоль одного берега реки, река при этом лежит в полуплоскости  $y \leq 0$ . Точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_3, y_3)$ , которые нужно соединить путем, лежат по разные стороны от реки. Точка  $(x_2, y_2)$  симметрична точке  $(x_3, y_3)$  относительно биссектрисы угла  $\alpha$ .

Если конец моста на берегу, проходящем по оси абсцисс, имеет координаты  $(z, 0)$ , то длина моста равна  $2z \sin(\alpha/2)$ . Обозначим  $k = 2 \sin(\alpha/2)$ . Получаем, что ответ в задаче о переходе через реку из точки  $(x_1, y_1)$  в точку  $(x_3, y_3)$  получается из ответа в обобщенной задаче Герона для точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (легко видеть, что первые два слагаемых в (1) — это расстояния между  $(x_1, y_1)$  и  $(z, 0)$  и  $(x_3, y_3)$  соответственно, а третье равно длине моста с концом  $(z, 0)$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Построить кратчайшую ломаную циркулем и линейкой в общем случае невозможно ни для обобщенной задачи Герона, ни для задачи о переходе через реку с непараллельными берегами. Однако, для счетного множества пар точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  внутри сектора  $Q$  можно с помощью циркуля и линейки найти такую точку  $(z, 0)$  на положительной полуоси абсцисс, что  $z$  есть минимум в обобщенной задаче Герона. Здесь положение такое же, как в знаменитой задаче о трисекции угла: разделить данный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки. Для произвольного угла это сделать невозможно, но для счетного множества углов такое построение осуществимо.

### 3. ОБОБЩЕННЫЕ БИЛЛИАРДЫ

Классический бильярд — это динамическая система, в которой массивная точка движется с постоянной скоростью внутри замкнутой области  $B$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , а в результате ее отражения от границы нормальная

компонента скорости точки меняет знак, сохраняя абсолютную величину, а тангенциальная компонента скорости точки не меняется [6].

Обобщенные бильярды, рассматриваемые в этой работе, были введены в общем случае в [1], а в случае, когда область есть параллелепипед — в [2]. С физической точки зрения обобщенный бильярд, состоящий из многих частиц, описывает газ в сосуде, который может нагреваться или охлаждаться от стенок сосуда. Поэтому стенки обобщенного бильярда «дрожат», что описывается функцией  $g(\gamma, t)$ , определенной на прямом произведении  $\Gamma \times \mathbb{R}^1$ , ( $\mathbb{R}^1$  — прямая линия,  $\gamma \in \Gamma$  — точка границы  $\Gamma$ , а величина  $t \in \mathbb{R}^1$  обозначает время). Отражение от такой дрожащей стенки происходит согласно следующему закону. Предположим, что траектория точки, которая движется со скоростью  $v$ , пересекает  $\Gamma$  в точке  $\gamma \in \Gamma$  в момент времени  $t^*$ . Тогда в этот момент времени  $t^*$  точка приобретает такую скорость  $v^*$ , как если бы она подверглась упругому удару с бесконечно тяжелой плоскостью  $\Gamma^*$ , касающейся  $\Gamma$  в точке  $\gamma$ , которая двигается в момент времени  $t^*$  вдоль нормали к  $\Gamma$  в точке  $\gamma$  со скоростью  $(\partial g / \partial t)(\gamma, t^*)$ . Здесь в качестве положительного направления движения плоскости  $\Gamma^*$  выбирается направление внутрь области  $B$ .

Если скорость  $v^*$ , которую точка приобрела в результате указанного закона отражения, направлена внутрь области  $B$ , то после момента времени  $t^*$  точка оставит  $\Gamma$  и будет двигаться внутри  $B$  до ближайшей точки пересечения с  $\Gamma$ . Если же скорость  $v^*$  направлена во вне области  $B$ , то после момента времени  $t^*$  точка остается неподвижной на  $\Gamma$  до тех пор, пока в некоторый момент времени  $\tilde{t} > t^*$  взаимодействие с плоскостью  $\Gamma^*$  не заставит точку изменить направление нормальной составляющей ее скорости. Последний случай возможен, если функция  $(\partial g / \partial t)(\gamma, t)$  при  $t = \tilde{t}$  увеличивается скачком:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t}(\gamma, t) \right|_{\tilde{t}+0} - \left. \frac{\partial g}{\partial t}(\gamma, t) \right|_{\tilde{t}-0} > 0.$$

В частном случае, когда скорость  $(\partial g / \partial t)(\gamma, t^*)$  движения плоскости  $\Gamma^*$  равна 0, обобщенный бильярд сводится к классическому бильярду, в котором нормальная составляющая скорости точки в момент времени  $t = t^*$  только меняет свое направление, но ее абсолютная величина до удара такая же, как и после удара.

В определении обобщенных бильярдов упругий удар точки и плоскости  $\Gamma^*$  может рассматриваться как в рамках классической (ньютоновской) механики, так и в рамках релятивистской механики (теории относительности). В первом случае мы будем называть обобщенные бильярды — ньютоновскими, а во втором случае — релятивистскими. Для классических бильярдов Биркгофа нет никакой разницы между этими двумя случаями: это одна и та же динамическая система. Для обобщенных же бильярдов существует огромная и принципиальная разница между этими случаями: обобщенный ньютоновский бильярд — это консервативная динамическая система, то есть существует мера, эквивалентная фазовому объему, которая инвариантна относительно динамики бильярда (см. [2]), в то время, как обобщенный релятивистский бильярд — это диссипативная система, то есть такой инвариантной меры не существует.

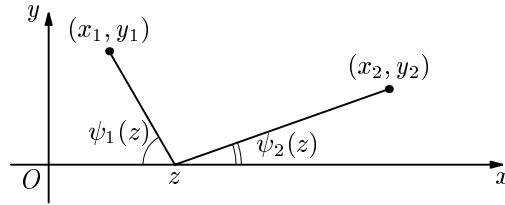


Рис. 4.

Эта принципиальная разница приводит в частности к тому, что в ньютоновском случае энтропия Гиббса — постоянная, тогда как в релятивистском случае энтропия Гиббса и термодинамическая энтропия (то есть энтропия, построенная относительно фазового объема) при общих естественных условиях начинает возрастать ([2]). Обобщенные релятивистские билиарды были изучены в работах [1]–[5], а обобщенные ньютоновские билиарды — в работах [1] и [2].

#### 4. ОСНОВНОЙ ЗАКОН И ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОБОБЩЕННЫХ НЬЮТОНОВСКИХ БИЛЛИАРДОВ

Покажем связь обобщенной задачи Герона с обобщенными ньютоновскими билиардами.

Предположим, что область  $B$ , в которой движется материальная точка, есть полуплоскость  $y \geq 0$  плоскости с прямоугольными координатами  $x, y$ , и, поэтому граница  $\Gamma$  области  $B$  есть ось  $y = 0$ . Предположим также, что действие границы  $\Gamma$  задается функцией  $g(z, t)$ , где  $z$  — координата точки  $(z, 0) \in \Gamma$ ,  $t$  — время (см. п. 3).

Билиардные траектории классического билиарда обладают экстремальным свойством: кусок билиардной траектории, соединяющий точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  и проходящий через границу, является кратчайшей двузвенной ломаной, соединяющей точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  и проходящей через границу.

Аналогичное экстремальное свойство можно сформулировать и для обобщенных билиардов.

Рассмотрим кусок билиардной траектории, проходящей через точку  $(c, 0)$ , начало которой есть точка  $(x_1, y_1)$ , а конец — точка  $(x_2, y_2)$  (рис. 4). Предположим также, что  $x_1 < x_2$ ,  $(c, 0)$  — единственная точка границы, расположенная на траектории между точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , вектор скорости в точке  $(x_1, y_1)$  есть  $(u_1, v_1)$ , а вектор скорости в точке  $(x_2, y_2)$  есть  $(u_2, v_2)$ . Тогда согласно законам классической механики предположения об упругости удара точки с бесконечно тяжелой стенкой, заданной уравнением  $y = 0$ , и о том, что действие этой стенки на точку направлено вдоль нормали к самой стенке, приводят к следующим равенствам:

$$u_1 = u_2, \quad v_2 = -v_1 + 2 \frac{\partial g}{\partial t}(c, t), \quad (5)$$

где  $t$  — момент времени, в котором точка находится в положении  $(c, 0)$ .

В частном случае, когда  $u_1 = u_2 = 1$ , второе равенство в (5) приводит к следующему равенству:

$$\operatorname{tg} \psi_2(c) - \operatorname{tg} \psi_1(c) = H(c, t), \quad (6)$$

где

$$H(c, t) = 2 \frac{\partial g}{\partial t}(c, t), \quad (7)$$

а  $\psi_1(c)$ ,  $\psi_2(c)$  — абсолютные величины углов, показанных на рис. 4.

Введем функцию  $G(z)$ , удовлетворяющую следующему условию:

$$\frac{dG}{dz}(z) = \cos \psi_2(z) - \cos \psi_1(z). \quad (8)$$

Из (6) получаем уравнение на  $G(z)$ :

$$\frac{dG}{dz}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{z - x_1} + H(z, z - x_1)\right)^2}} - \frac{z - x_1}{\sqrt{(x_1 - z)^2 + y_1^2}}, \quad (9)$$

где  $H(z, t)$  — функция, введенная в (7).

Обозначим через  $\rho\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$  евклидово расстояние между точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Как известно, необходимым условием экстремума функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является равенство нулю производной  $f'$ . Отсюда получаем искомое экстремальное свойство обобщенного бильярда: кусок бильiardной траектории, проходящий через границу, пересекает границу в точке, в которой обращается в 0 производная функции

$$F(z) = \rho\{(x_1, y_1), (z, 0)\} + \rho\{(x_2, y_2), (z, 0)\} + G(z). \quad (10)$$

Рассмотрим теперь в качестве функций  $G(z)$  и  $F(z)$  в (10) соответственно функции  $G(z) = kz$  и  $F(z) = f(z)$ , где  $f(z)$  — функция, введенная в (1). Предположим также, что  $0 \leq k < 2$ , а точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  расположены внутри или на границе сектора  $Q$ , изображенного на рис. 1. Тогда можно утверждать, что (10) достигает минимума в точке  $c$ , такой что ломаная, соединяющая точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(c, 0)$ ,  $(x_2, y_2)$ , является куском обобщенной бильiardной траектории.

Функции  $G$  и  $H$  связаны сложным соотношением (9). Предлагаем читателю подумать над следующими задачами.

**ЗАДАЧА 1.** Пусть  $G(z) = kz$ . Существует ли такая функция  $H(z, t)$ , что уравнение (9) выполняется для всех точек  $(x_1, y_1)$  верхней полуплоскости?

**ЗАДАЧА 2.** Для обобщенного бильiardа функция  $H(z, t)$  пропорциональна скорости дрожания стенки. Поэтому естественно наложить на  $H(z, t)$  дополнительное условие — функция  $g(z, t)$ , определенная как

$$g(z, t) = \int_0^t H(z, t) dt,$$

ограничена как функция от двух аргументов. Существует ли  $H(z, t)$ , удовлетворяющая условию предыдущей задачи и этому дополнительному условию?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пустыльников Л. Д. *Закон возрастания энтропии и обобщенные бильярды* // УМН, 1999. Т. 54, №3. С. 180–181.
- [2] Пустыльников Л. Д. *Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми* // УМН, 1995. Т. 50, №3ю С. 143–186.
- [3] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *On Generalized Relativistic Billiards in External Force Fields* // Letters in Math. Physics, 2003. Vol. 63. P. 195–207.
- [4] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *Generalized Relativistic Billiards* // Regular and Chaotic Dynamics, 2003. Vol. 8, no 3. P. 283–296.
- [5] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *Exponential Attractors in Generalized Relativistic Billiards* // Communications in Math. Physics, 2004. Vol. 248, no.3. P. 527–552.
- [6] Birkhoff G. *Dynamical Systems*. Amer. Math. Soc., New York, 1927.
- [7] Радемахер Г., Теплиц О. *Числа и фигуры*. М. 1962.
- [8] Пустыльников Л. Д. *Об одной геометрической задаче, связанной с обобщенными бильярдами* // Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, №12. 2004. 23 с.

Результаты этой работы содержатся в [8].

Выражаю благодарность М. В. Дерябину и М. Н. Вялому за очень ценные полезные обсуждения.

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

## Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости

В. И. Арнольд\*

Теорема о пересечении высот треугольника в одной точке в геометриях Лобачевского и де Ситтера доказывается с помощью изоморфизма между этими геометриями, с одной стороны, и симплектической геометрией и алгеброй Ли бинарных квадратичных форм — с другой.

Плоскость Лобачевского может рассматриваться как проективизация пространства положительно определенных бинарных квадратичных форм [1], если использовать ее модель Клейна в виде круга в пространстве  $\mathbb{R}P^2$ . Лента Мёбиуса, служащая его дополнением, образует «мир де Ситтера» гиперболических бинарных форм, заданных на той же плоскости (с точностью до умножения на ненулевую константу, как и в предыдущем случае). Метрика в этих пространствах вводится как вторая дифференциальная форма определителя на гиперблоиде форм с определителем соответственно 1 и  $-1$ .

Введенная риманова метрика на плоскости Лобачевского и лоренцева псевдориманова метрика в мире де Ситтера инвариантны относительно группы  $SL(2, \mathbb{R})$  симплектических линейных отображений плоскости  $\{(p, q)\}$ . Квадратичные формы  $ap^2 + 2bpq + cq^2$  на этой симплектической плоскости образуют трехмерное вещественное пространство относительно координат  $a, b, c$ .

---

\*Работа частично поддержана грантом РФФИ 02-01-00655

Действие группы сохраняет определитель квадратичной формы  $\Delta = ac - b^2$ . Плоскость Лобачевского оказывается проективизацией внутренности конуса  $\Delta > 0$ , а мир де Ситтера — проективизацией дополнения  $\Delta < 0$ . Сам конус  $\Delta = 0$  является проективной версией абсолюта — окружности, ограничивающей круг в модели Клейна.

Поэтому мы будем рассматривать точки плоскости Лобачевского и мира де Ситтера как «формы» («форма»  $[a : b : c]$  — это квадратичная форма  $ap^2 + 2bpq + cq^2$ , взятая с точностью до постоянного ненулевого множителя).

С другой стороны, точки мира де Ситтера можно интерпретировать как прямые на плоскости Лобачевского (и обратно): две касательные, проведенные из данной де-ситтеровской точки пространства  $\mathbb{R}P^2$  к окружности абсолюта, определяют на ней две точки касания; соединяющая их прямая на плоскости Лобачевского ставится в соответствие исходной точке (это проективная двойственность относительно абсолюта).

Точно так же прямые Лобачевского, проходящие через общую точку в круге, могут рассматриваться как точки мира де Ситтера, в каждой из которых пересекаются две касательные к абсолюту в двух точках одной из этих прямых.

Таким образом, совокупности прямых Лобачевского, проходящих через данную точку круга, отвечает кривая в мире де Ситтера. На самом деле это прямая (а именно, проективная прямая в  $\mathbb{R}P^2$ , не пересекающая круг модели Клейна). Эта прямая проективно двойственна исходной точке круга относительно абсолюта.

Цель настоящей статьи — выразить в этой геометрии квадратичных форм тот факт, что высоты треугольника Лобачевского пересекаются в одной точке<sup>1</sup>).

Пространство квадратичных форм на симплектической плоскости  $\mathbb{R}^2$  (с симплектической структурой  $\omega = dp \wedge dq$  в координатах Дарбу  $p, q$ ) является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона (поскольку скобка Пуассона двух квадратичных форм является квадратичной формой). Группа  $SL(2, \mathbb{R})$  действует линейно на пространстве  $\mathbb{R}^3$  квадратичных форм, определенных в  $\mathbb{R}^2$ .

Начнем с интерпретации скобок Пуассона в терминах геометрии плоскости Лобачевского (состоящей из положительно определенных квадратичных «форм») и плоскости де Ситтера (состоящей из гиперболических «форм»). Операция скобки Пуассона  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  инвариантна относительно упомянутого действия группы  $SL(2, \mathbb{R})$  на  $\mathbb{R}^3$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Скобка Пуассона двух положительно определенных форм является гиперболической формой, которая отвечает прямой, соединяющей точки плоскости Лобачевского, отвечающие исходным формам.*

Таким образом, в данном случае скобка Пуассона — гиперболическая форма.

---

<sup>1</sup>Уже много лет назад автор выразил аналогичное свойство высот евклидова треугольника в терминах тождества Якоби в алгебре Ли  $SO(3)$  (векторных произведений в ориентированном евклидовом трехмерном пространстве); в этом рассуждении уже содержалась теорема 4 настоящей статьи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется явное выражение (1) для скалярного произведения квадратичных форм, полярного относительно уравнения абсолюта  $\Delta = 0$ , где  $\Delta(\xi = ap^2 + 2bpq + cq^2) = ac - b^2$ .

Полярное скалярное произведение — это симметричная билинейная форма на пространстве бинарных квадратичных форм, совпадающая с  $\Delta$  на диагонали:

$$2\tilde{\Delta}(\xi', \xi'') = a'c'' + c'a'' - 2b'b'' \quad (1)$$

Скобка Пуассона эллиптических квадратичных форм  $A = \alpha p^2 + \beta q^2$ ,  $B = \gamma p^2 + \delta q^2$  равна гиперболической форме

$$\{A, B\} = 4(\alpha\delta - \beta\gamma)pq \quad (2)$$

Соответствующая проективная прямая проходит через точки  $A$  и  $B$ , поскольку из формул (1) и (2) вытекает, что

$$\tilde{\Delta}(A, \{A, B\}) = \tilde{\Delta}(B, \{A, B\}) = 0 \quad (3)$$

Этого достаточно для доказательства теоремы 1, поскольку любые две эллиптические формы можно одновременно диагонализировать в некоторой системе симплектических координат.  $\square$

**ТЕОРЕМА 2.** Скобка Пуассона положительно определенной формы и гиперболической формы представляется в модели Клейна прямой линией, которая ортогональна прямой, отвечающей исходной гиперболической форме, и проходит через точку, отвечающую исходной положительно определенной форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова рассмотрим тождество (2); если форма  $A$  — положительно определенная, а форма  $B$  — гиперболическая, то нужно взять  $\alpha\beta > 0$  и  $\gamma\delta < 0$ . Этот пример универсален, поскольку из теории собственных векторов мы знаем, что если форма  $A$  — положительно определенная, то можно одновременно диагонализировать  $A$  и  $B$  в некоторой системе симплектических координат.

В данном случае уравнения (3) показывают, что прямая, отвечающая форме  $\{A, B\}$ , содержит точку  $A$  (первое уравнение) и ортогональна прямой  $B$  (второе уравнение). Ортогональность легко следует из второго уравнения (3), но она вытекает уже из явного вида скобки Пуассона (2). Это условие ортогональности двух прямых в модели Клейна имеет следующий проективный смысл: каждая из прямых проходит через точку, двойственную второй прямой относительно абсолюта.  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.** Скобка Пуассона двух гиперболических форм отвечает точке пересечения двух проективных прямых, которые им соответствуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теории собственных значений пары гиперболических форм вытекает<sup>2)</sup>, что эти формы либо одновременно диагонализуются в некотором симплектическом базисе, либо приводятся к следующему виду:

$$A = p^2 - q^2, \quad B = \lambda pq.$$

<sup>2)</sup>Этот факт можно доказать и в геометрии Лобачевского: он означает, что пара пересекающихся прямых определяется углом между ними с точностью до движения плоскости Лобачевского.

В первом случае скобка Пуассона является гиперболической формой, и согласно тождеству (3) соответствующая точка проективной плоскости принадлежит обоим двойственным прямым.

Во втором случае вычисление скобки Пуассона дает

$$\{A, B\} = 2\lambda(p^2 + q^2); \quad (4)$$

это эллиптическая форма и потому она отвечает некоторой точке плоскости Лобачевского в модели Клейна. Эта точка принадлежит прямым, которые двойственны формам  $A$  и  $B$ , что следует из тождеств (1) и (4):

$$2\tilde{\Delta}(A, \{A, B\}) = 2\lambda - 2\lambda = 0,$$

$$2\tilde{\Delta}(B, \{A, B\}) = -2\left(\frac{\lambda}{2} \cdot 0\right) = 0. \quad \square$$

**ТЕОРЕМА 4.** *Если три ненулевых вектора в пространстве  $\mathbb{R}^3$  удовлетворяют равенству  $f + g + h = 0$ , то соответствующие им точки проективной плоскости лежат на одной проективной прямой, а соответствующие проективные прямые (в двойственной проективной плоскости) имеют общую точку.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если три вектора, представляющие три точки проективной плоскости, удовлетворяют соотношению  $f + g + h = 0$ , то между любыми тремя векторами, представляющими эти точки, имеется линейная зависимость. Этим доказано первое утверждение теоремы. Второе утверждение из него следует, поскольку трем точкам проективной прямой соответствуют при проективной двойственности три прямые, проходящие через точку, двойственную этой прямой.  $\square$

**ЗАДАЧА.** Пусть даны две формы, одна из которых — эллиптическая, а другая — гиперболическая. Найдите геометрическое условие в терминах этих форм, равносильное тому, что точка, отвечающая эллиптической форме, принадлежит прямой, которая отвечает гиперболической форме.

**ОТВЕТ.** Нулевые направления гиперболической формы должны быть взаимно ортогональны в метрике, которая определяется эллиптической формой.

**ТЕОРЕМА 5.** *Три высоты треугольника в плоскости Лобачевского принадлежат одному пучку (проективные прямые, на которых лежат высоты в модели Клейна, пересекаются в одной точке).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A, B, C$  — прямые, на которых лежат стороны треугольника. Точно так же обозначим соответствующие (гиперболические) квадратичные формы. Их скобки Пуассона

$$\{A, B\} = c, \quad \{B, C\} = a, \quad \{C, A\} = b$$

— это эллиптические формы, отвечающие вершинам исходного треугольника (в силу теоремы 3).

Вершины треугольника обозначим  $a, b, c$ , причем вершина  $a$  лежит против стороны  $A$  и т. д.

Рассмотрим высоты этого треугольника. Прямая, проходящая через  $a$  и ортогональная стороне  $bc = A$ , согласно теореме 2 представляет «форму», отвечающую скобке Пуассона от  $a$  и  $A$ :

$$(\text{высота из } a \text{ в } A) \sim (\{B, C\}, A).$$

Таким образом, три высоты треугольника  $(a, b, c)$  геометрически представляют три квадратичные формы:

$$(f, g, h) = (\{B, C\}, A), \{C, A\}, B, \{A, B\}, C).$$

Согласно тождеству Якоби (для скобок Пуассона в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости с координатами Дарбу  $(p, q)$ ), сумма этих трех квадратичных форм равна нулевой форме:  $f + g + h = 0$ . Применяв к этим формам теорему 4, мы заключаем, что три прямые, на которых лежат высоты, имеют общую точку в  $\mathbb{R}P^2$ , что доказывает теорему 5.  $\square$

Если углы треугольника  $(a, b, c)$  меньше чем  $\pi/2$ , то точка пересечения лежит внутри треугольника и, следовательно, принадлежит плоскости Лобачевского как части проективной плоскости<sup>3)</sup>.

Легко построить пример треугольника (с углом, превосходящим  $2\pi/3$ ), никакие две высоты которого не пересекаются в плоскости Лобачевского. В этом случае из теоремы 5 вытекает, что существует общая точка пересечения всех трех проективных прямых, содержащих высоты, в мире де Ситтера (или на абсолюте).

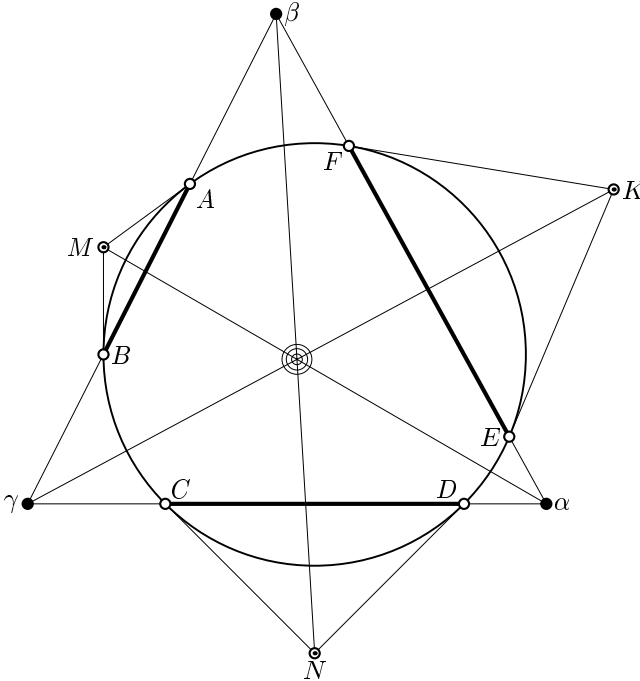
**ЗАМЕЧАНИЕ.** Из нашей теоремы 5 следует также, что пересекаются в одной точке высоты *треугольников де Ситтера и смешанных треугольников*, у которых часть вершин (и сторон) принадлежит плоскости Лобачевского, а часть — миру де Ситтера (в пограничном случае вершины принадлежат абсолюту, а стороны касаются его).

Чтобы избавиться от упоминания углов в определении высот, можно называть две проективные прямые в модели Клейна ортогональными, если одна (а тогда и каждая) из них содержит точку, двойственную другой. Это совпадает с определением ортогональности на плоскости Лобачевского (если же точка пересечения принадлежит де-ситтеровской части модели Клейна, то получаем определение ортогональности в лоренцевой метрике мира де Ситтера).

Формулируя теорему о пересечении высот для де-ситтеровских или смешанных треугольников, можно устранить упоминание о геометрии Лобачевского, представив наши результаты в виде нескольких фактов элементарной проективной геометрии. С помощью тождества Якоби и других теорем из

<sup>3)</sup>Здесь можно заменить  $\pi/2$  на  $2\pi/3$  (если все углы меньше чем  $2\pi/3$ , то высоты треугольника пересекаются внутри круга, представляющего плоскость Лобачевского; если же угол превосходит  $2\pi/3$ , то существует треугольник с таким углом, высоты которого не имеют общих точек в плоскости Лобачевского).

На границе между этими случаями находятся треугольники с ортоцентром на абсолюте, изометричные треугольникам в модели Клейна с вершинами  $\{x, -y, z = ixy/(1 + xy)\}$ , где  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  и как следствие  $|z| \leq 1/2$ .



**Рис. 1.** Теорема о вписанном шестиугольнике как теорема о пересечении высот в мире де Ситтера

симплектической алгебры квадратичных форм можно получать новые результаты в проективной геометрии.

**ПРИМЕР.** Рассмотрим три непересекающиеся прямые в плоскости Лобачевского  $((AB), (CD), (EF))$ . В модели Клейна им отвечают три хорды, концы которых расположены на абсолюте в следующем порядке:  $(ABCDEF)$ , см. рис. 1.

Построим точки пересечения этих прямых:

$$(CD \cap (EF) = \alpha, \quad (EF) \cap (AB) = \beta, \quad (AB) \cap (CD) = \gamma$$

(эти точки лежат внутри де-ситтеровской части проективной плоскости модели Клейна). Рассмотрим также двойственные им точки

$$M = (AB)^\vee, \quad N = (CD)^\vee, \quad K = (EF)^\vee$$

(в точке  $M$  пересекаются две прямые, которые касаются абсолюта в концах хорды  $(AB)$ ; аналогично для  $N$  и  $K$ ).

**ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ ШЕСТИУГОЛЬНИКЕ.** *Три прямые  $(\alpha M)$ ,  $(\beta N)$  и  $(\gamma K)$  пересекаются в одной точке.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проективная прямая  $(\alpha M)$  содержит высоту де-ситтеровского треугольника  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , опущенную из точки  $\alpha$ , поскольку точка  $M$

двойственна стороне  $(AB) = (\beta\gamma)$ . Аналогично,  $(\beta N)$  содержит высоту, опущенную из  $\beta$ , а  $(\gamma K)$  — из  $\gamma$ . Поэтому их пересечение в одной точке вытекает из соответствующего свойства высот де-ситтеровского треугольника  $(\alpha\beta\gamma)$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Три точки  $(\alpha M)^\vee$ ,  $(\beta N)^\vee$  и  $(\gamma K)^\vee$  лежат на одной проективной прямой в  $\mathbb{R}P^2$ .

Эти точки являются пересечением трех пар прямых:  $(KN) \cap (AB)$ ,  $(MK) \cap (CD)$  и  $(NM) \cap (EF)$ .

Мы видим, что теорема о вписанном шестиугольнике — еще одно геометрическое воплощение симплектического тождества Якоби, принадлежащего математической физике.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arnold V.I. *Arithmetics of binary quadratic forms, symmetry of their continued fractions and geometry of their de Sitter world* // Bull. of Braz. Math. Soc., New Series, Vol. 34, No 1 (2003), 1-42.

# Новое доказательство теоремы Морли

А. Конн

Уже 22 года я пользуюсь гостеприимством IHES (Институт Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем). Здесь я узнал большую часть того, что я знаю о математике, главным образом благодаря непринужденным беседам за ланчем с гостями и постоянными сотрудниками.

Впервые оказавшись в IHES, я был слишком поглощен своими собственными исследованиями и стеснялся того, что очень мало понимаю в этих беседах. Деннис Салливан позаботился обо мне и преподавал мне экспресс-курс геометрии, который навсегда изменил стиль моего мышления.

Здесь же, благодаря физикам, я осознал справедливость высказывания Ж. Адамара о глубине математических концепций, пришедших из физики:

«Бесконечно плодотворно лишь то, что проистекает из природы вещей, а не то, что проистекает из собственных размышлений (хотя так часто именно это оказывает на математика наивысшее влияние).»

\* \* \* \* \*

Чтобы передать хотя бы отчасти характерный для IHES дух дружеского соревнования, я выбрал один пример застольного разговора, который случился этой весной и привел меня к забавному новому результату.

Примерно в 1899 г. Ф. Морли доказал замечательную теорему из евклидовой геометрии треугольника:

«В треугольнике  $ABC$  попарные пересечения  $\alpha, \beta, \gamma$  трисектрис его углов являются вершинами правильного треугольника.»

(См. рис. 1.)

(Кто-то упомянул эту теорему за ланчем и ошибочно приписал ее Наполеону. Бонапарт и в самом деле изучал в молодости математику, и к тому же, наряду с изучением английского языка, он учил математике сына Лас-Каза во время ссылки на о. Св. Елены.)

Я тогда услышал про теорему Морли в первый раз. Вернувшись домой, я стал над ней размышлять, следуя одному из советов Литтлвуда — искать доказательства не в книгах, а в собственной голове. Помимо чистой любознательности, мною двигал очевидный честолюбивый мотив: эта теорема — одно из тех немногих достижений Бонапарта, в которых я способен с ним сравниться. После нескольких безуспешных попыток я внезапно понял, что пересечения последовательных трисектрис являются неподвижными точками вращений  $g_i$  вокруг

---

*A New Proof of Morley's Theorem.* Publ. I.H.E.S., 1998. P. 43–46. (Volume for the 40th birthday). Публикуется с любезного разрешения автора. Перевод М. Н. Вялого.

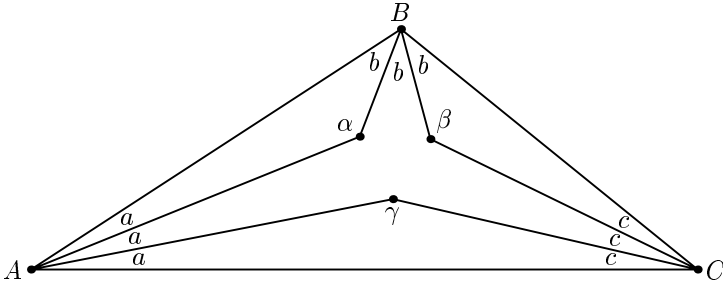


Рис. 1.

вершин треугольника (на две трети величин соответствующих углов треугольника). Далее естественно было попытаться выразить поворотную симметрию  $g$  правильного треугольника как элемент группы  $\Gamma$ , порожденной тремя вращениями  $g_i$ . Поскольку легко построить пример (в сферической геометрии), который показывает, что теорема Морли не выполняется в неевклидовой геометрии, конструкция должна использовать какие-то специфические свойства группы евклидовых движений.

Так что я потратил некоторое время, пытаюсь найти формулу, выражающую  $g$  через  $g_i$ , благо в группе  $\Gamma$  легко построить множество элементов порядка 3, например  $g_1 g_2 g_3$  (любой поворот на угол  $2\pi/n$ ,  $n \geq 2$ , является элементом порядка  $n$ ). И лишь после долгих усилий я осознал, что все они напрасны (см. ниже замечание 2), а правильная группа — аффинная группа прямой, а не группа движений плоскости.

Итак, содержанием данной заметки является концептуальное доказательство теоремы Морли как теоретико-группового свойства действия аффинной группы прямой. Оно справедливо для любого (коммутативного) поля  $k$  произвольной характеристики (хотя в характеристике 3 условию теоремы невозможно удовлетворить).

Пусть  $k$  — поле, а  $G$  — аффинная группа над  $k$ , другими словами, это группа матриц размера  $2 \times 2$  и вида  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , где  $a \in k$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \in k$ . Построим морфизм  $\delta$  из  $G$  в мультипликативную группу  $k^*$  ненулевых элементов  $k$  по правилу

$$\delta(g) = a \in k^*. \tag{1}$$

Подгруппа  $T = \text{Ker } \delta$  — это группа сдвигов, т. е. аддитивная группа  $k$ . Каждый элемент  $g \in G$  определяет отображение

$$g(x) = ax + b, \quad x \in k, \tag{2}$$

которое при  $a \neq 1$  имеет ровно одну неподвижную точку

$$\text{fix}(g) = \frac{b}{1 - a}. \tag{3}$$

Докажем следующий простой факт.

ТЕОРЕМА. Пусть  $g_1, g_2, g_3 \in G$  таковы, что  $g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1$  и  $g_1g_2g_3$  не являются сдвигами. Обозначим  $j = \delta(g_1g_2g_3)$ . Следующие два условия эквивалентны:

$$(a) \quad g_1^3g_2^3g_3^3 = 1.$$

$$(b) \quad j^3 = 1 \text{ и } \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0, \text{ где } \alpha = \text{fix}(g_1g_2), \beta = \text{fix}(g_2g_3), \gamma = \text{fix}(g_3g_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим  $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Равенство  $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$  равносильно тому, что  $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$  и  $b = 0$ , где  $b$  — компонента, отвечающая сдвигу в  $g_1^3g_2^3g_3^3$ . Первое условие — то же самое, что  $j^3 = 1$ . Заметим, что  $j \neq 1$  по условию теоремы. Для второго получаем

$$b = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3, \quad (4)$$

а после простых преобразований с учетом  $a_1a_2a_3 = j$

$$b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma), \quad (5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — неподвижные точки

$$\alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}, \quad \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, \quad \gamma = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}. \quad (6)$$

Осталось заметить, что  $a_k - j \neq 0$ , так как по условию теоремы попарные произведения элементов  $g_i$  не являются сдвигами.

Итак, в любой характеристике условия (a) и (b) эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ. Теорема Морли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $k = \mathbb{C}$ , а  $g_1$  — поворот с центром в  $A$  на угол  $2\alpha$ , где  $\angle BAC = 3\alpha$ , и аналогично определим  $g_2, g_3$ . Каждый  $g_i^3$  можно представить как композицию симметрий относительно пары последовательных сторон треугольника. Поэтому  $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ . По аналогичной причине точки  $\alpha = \text{fix}(g_1g_2)$ ,  $\beta = \text{fix}(g_2g_3)$ ,  $\gamma = \text{fix}(g_3g_1)$  являются пересечениями трисектрис. Из доказанной выше теоремы получаем  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ ,  $j^3 = 1$ , что является одной из классических характеристик правильного треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Не изменяя значений кубов  $g_1^3, g_2^3, g_3^3$ , можно умножить каждое  $g_i$  на кубический корень из единицы. Это дает 18 вариантов теоремы Морли с невырожденными правильными треугольниками.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Покажем, что в общем случае поворот  $g$ , переставляющий циклически точки  $\alpha, \beta, \gamma$ , не принадлежит порожденной элементами  $g_1, g_2, g_3$  подгруппе  $\Gamma$  группы  $G$ . При условиях теоремы можно считать, что в поле  $k$  есть нетривиальный кубический корень из единицы,  $j^3 = 1$ , так что характеристика поля не равна 3. Таким образом, поворот  $g$  выражается как

$$g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3b = (1 - j)(\alpha + \beta + \gamma). \quad (7)$$

Для каждого элемента  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  группы  $\Gamma$ , порожденной  $g_1, g_2, g_3$ , можно

найти такие полиномы Лорана  $P_i$  от переменных  $a_j$ , что

$$b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3. \quad (8)$$

Выражая  $b_i$  через введенные выше  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{aligned} b_1 &= (1+j)^{-1}(a_3^{-1}(a_3-j)\alpha - (a_1-j)\beta + a_1(a_2-j)\gamma), \\ b_2 &= (1+j)^{-1}(a_2(a_3-j)\alpha + a_1^{-1}(a_1-j)\beta - (a_2-j)\gamma), \\ b_3 &= (1+j)^{-1}(-(a_3-j)\alpha + a_3(a_1-j)\beta + a_2^{-1}(a_2-j)\gamma), \end{aligned} \quad (9)$$

получаем такие полиномы Лорана  $Q_i$ , что

$$b = (a_3-j)\alpha Q_1 + (a_1-j)\beta Q_2 + (a_2-j)\gamma Q_3. \quad (10)$$

Поэтому можно считать, что мы нашли такие полиномы Лорана  $Q_i$ , что для всех  $a_1, a_2, a_3 \in k^*$ , для которых  $a_1 a_2 a_3 = j$ , и для всех  $\alpha, \beta, \gamma \in k$ , для которых  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ , выполняется следующее тождество

$$(1-j)(\alpha + \beta + \gamma) = 3((a_3-j)\alpha Q_1 + (a_1-j)\beta Q_2 + (a_2-j)\gamma Q_3). \quad (11)$$

Выберем теперь  $a_1 = j, a_2 = j, a_3 = j^2, \alpha = 0, \beta = -j, \gamma = 1$  и придем к противоречию. Отсюда следует, что в общем случае  $g \notin \Gamma$ .

# Тождества Рамануджана

В. В. Прасолов

В этой статье мы расскажем о двух замечательных тождествах Рамануджана (1887–1920)

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}.$$

При их доказательстве мы в основном следуем статье [1]. Ключевой момент в этом доказательстве — тот факт, что участвующие в тождествах Рамануджана косинусы являются корнями некоторых кубических многочленов. Этот факт тесно связан с многочленами Чебышёва.

Многочлены Чебышёва определяются следующим образом. Легко проверить, что  $\cos n\varphi$  полиномиально выражается через  $\cos \varphi$ , т. е. существует такой многочлен  $T_n(x)$ , что  $T_n(x) = \cos n\varphi$  при  $x = \cos \varphi$ . Действительно, формула

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi$$

показывает, что

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены  $T_n(x)$ , определенные этим рекуррентным соотношением и начальными условиями  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$ , обладают нужным свойством. Эти многочлены  $T_n(x)$  называют *многочленами Чебышёва*.

Нам понадобятся многочлены Чебышёва  $T_n(x)$  при  $n \leq 5$ . Несложные вычисления показывают, что  $T_1(x) = x$ ,  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ,  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ ,  $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ,  $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ . Наш интерес к ним вызван следующим утверждением.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** а) Пусть  $n = 2k + 1$ . Тогда число  $\cos(2l\pi/n)$  для любого целого  $l$  является корнем многочлена  $T_{k+1}(x) - T_k(x)$ .

б) Пусть  $n = 2k$ . Тогда число  $\cos(2l\pi/n)$  для любого целого  $l$  является корнем многочлена  $T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** а) Пусть  $n = 2k + 1$  и  $\varphi = 2l\pi/n$ . Тогда

$$T_{k+1}(\cos \varphi) - T_k(\cos \varphi) = \cos(k+1)\varphi - \cos k\varphi.$$

При этом  $(k+1)\varphi + k\varphi = (2k+1)\varphi = 2l\pi$ . Значит,  $\cos(k+1)\varphi = \cos k\varphi$ .

б) Пусть  $n = 2k$  и  $\varphi = 2l\pi/n$ . Тогда

$$T_{k+1}(\cos \varphi) - T_{k-1}(\cos \varphi) = \cos(k+1)\varphi - \cos(k-1)\varphi.$$

При этом  $(k+1)\varphi + (k-1)\varphi = 2k\varphi = 2l\pi$ . Значит,  $\cos(k+1)\varphi = \cos(k-1)\varphi$ .

Вычислим многочлены  $T_{k+1}(x) - T_k(x)$  при  $k \leq 4$ . В результате получим  $T_2 - T_1 = 2x^2 - x - 1$ ,  $T_3 - T_2 = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ ,  $T_4 - T_3 = 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1$ ,  $T_5 - T_4 = 16x^5 - 8x^4 - 20x^3 + 8x^2 + 5x - 1$ . Основываясь на этих вычислениях, несложно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. а) Числа  $\cos \frac{2\pi}{5}$  и  $\cos \frac{4\pi}{5}$  являются корнями многочлена  $4x^2 + 2x - 1$ .

б) Числа  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  и  $\cos \frac{6\pi}{7}$  являются корнями многочлена  $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ .

в) Числа  $\cos \frac{2\pi}{9}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{9}$  и  $\cos \frac{8\pi}{9}$  являются корнями многочлена  $8x^3 - 6x + 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Согласно утверждению 1 числа  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \frac{2\pi}{5}$  и  $\cos \frac{4\pi}{5}$  являются корнями многочлена  $T_3 - T_2$ . Поделив этот многочлен на  $x - 1$ , получим требуемый многочлен.

б) Числа  $1$ ,  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  и  $\cos \frac{6\pi}{7}$  являются корнями многочлена  $T_4 - T_3$ . Поделив этот многочлен на  $x - 1$ , получим требуемый многочлен.

в) Числа  $1$ ,  $\cos \frac{2\pi}{9}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{9}$ ,  $\cos \frac{6\pi}{9} = -\frac{1}{2}$  и  $\cos \frac{8\pi}{9}$  являются корнями многочлена  $T_5 - T_4$ . Поделив этот многочлен на  $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$ , получим требуемый многочлен.

Теперь нам нужны некоторые свойства кубических многочленов, относящиеся к сумме кубических корней из нулей кубического многочлена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — корни многочлена  $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ . Тогда уравнение для  $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$  имеет вид

$$y^3 + 3(a_1 + 6\sqrt[3]{a_3})y^2 + 3(a_1^2 + 3a_1\sqrt[3]{a_3} + 9\sqrt[3]{a_3^2} - 9a_2)y + (a_1 - 3\sqrt[3]{a_3})^3 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что фиксированы значения кубических корней  $\sqrt[3]{x_1}$ ,  $\sqrt[3]{x_2}$ ,  $\sqrt[3]{x_3}$  и, например,  $\sqrt[3]{x_1x_2} = \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_2}$  для этих фиксированных значений. Рассмотрим наряду с  $y$  вспомогательную переменную  $z = \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_1x_3} + \sqrt[3]{x_2x_3}$ . Воспользуемся тождеством

$$(b_1 + b_2 + b_3)^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 3(b_1 + b_2 + b_3)(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) - 3b_1b_2b_3,$$

чтобы вычислить  $y$  и  $z$ :

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt[3]{yz} - 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = -a_1 + 3\sqrt[3]{yz} - 3\sqrt[3]{a_3},$$

$$\begin{aligned} z &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 3\sqrt[3]{yz}\sqrt[3]{x_1x_2x_3} - 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} = \\ &= a_2 - 3\sqrt[3]{yz}\sqrt[3]{a_3} - 3\sqrt[3]{a_3^2}. \end{aligned}$$

Домножим первое равенство на  $\sqrt[3]{a_3}$  и сложим его со вторым равенством. В результате получим  $z = a_2 - (y + a_1)\sqrt[3]{a_3}$ . Подставив это выражение в первое равенство, получим

$$y + a_1 - 3\sqrt[3]{a_3} = 3\sqrt[3]{y(a_2 - (y + a_1)\sqrt[3]{a_3})}.$$

Возводя это равенство в куб, получаем требуемое.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В действительности мы получаем три уравнения для трех различных значений  $\sqrt[3]{a_3}$ . Таким образом, получаем 9 значений для  $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$ , что соответствует различным наборам значений для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** Если  $a_1^2 = a_2$ , то корни кубического уравнения

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

вычисляются по формуле  $x = \sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сделаем замену  $x = y - a_1$ . В результате исходное уравнение переписется в виде

$$y^3 + 3(a_2 - a_1^2)y + 2a_1^2 - 3a_1a_2 + a_3 = 0.$$

При условии  $a_1^2 = a_2$  получаем  $y^3 = a_3 - a_1^3$ , т. е.  $y = \sqrt[3]{a_3 - a_1^3}$ . Таким образом,  $x = \sqrt[3]{a_3 - a_1^3} - a_1$ . Здесь подразумевается, что кубический корень принимает три значения, которые получаются друг из друга умножением на кубический корень из единицы.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 5.** а) Пусть  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — корни многочлена  $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ . Тогда коэффициенты уравнения для  $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$  удовлетворяют соотношению из утверждения 4.

б) Аналогичное утверждение справедливо для корней многочлена  $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — корни многочлена  $x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$ , то для  $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$  получаем уравнение  $y^3 + 3a_1y^2 + 3a_2y + a_3 = 0$ , где  $a_1 = A_1 + 6\sqrt[3]{A_3}$ ,  $a_2 = A_1^2 + 3A_1\sqrt[3]{A_3} + 9\sqrt[3]{A_3^2} - 9A_2$  и  $a_3 = (A_1 - 3\sqrt[3]{A_3})^3$  (утверждение 3). Соотношение из утверждения 4 имеет вид  $a_1^2 = a_2$ , т. е.  $3\sqrt[3]{A_3^2} + A_1\sqrt[3]{A_3} + A_2 = 0$ . Для данных уравнений это соотношение легко проверяется.

Теперь уже легко доказать тождества Рамануджана

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} &= \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}, \\ \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} &= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}. \end{aligned}$$

Напомним, что  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  и  $\cos \frac{8\pi}{7}$  — корни многочлена  $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ , а  $\cos \frac{2\pi}{9}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{9}$  и  $\cos \frac{8\pi}{9}$  — корни многочлена  $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$  (утверждение 2). Поэтому рассматриваемые суммы трех кубических корней равны кубическим

корням из  $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1$ . Для первого уравнения получаем  $a_1 = A_1 + 6\sqrt[3]{A_3} = \frac{1}{2} + 6\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{5}{2}$  и  $a_3 = (A_1 - 3\sqrt[3]{A_3})^3 = \left(\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^3 = 8$ , поэтому  $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1 = \frac{-\sqrt[3]{189} + 5}{2} = \frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}$ . Для второго уравнения  $a_1 = 3$  и  $a_3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$ , поэтому  $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1 = \sqrt[3]{27 + \frac{27}{8}} - 3 = \frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шевелев В. С. *Три формулы Рамануджана* // Квант, 1988. №6. С. 52–55.

# Рамсеевская теория узлов и зацеплений

В. В. Прасолов

М. Б. Скопенков

Теорема Рамсея [8] заключается в следующем. Пусть  $r$ -элементные подмножества некоторого  $N$ -элементного множества  $S$  разбиты на два подмножества  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда для любых данных чисел  $p \geq r$  и  $q \geq r$  найдется число  $n(p, q, r)$  (зависящее только от  $p, q$  и  $r$ ), которое обладает следующим свойством: если  $N \geq n(p, q, r)$ , то либо существует  $p$ -элементное подмножество  $A$  в  $S$ , у которого все  $r$ -элементные подмножества лежат в  $\alpha$ , либо существует  $q$ -элементное подмножество  $B$  в  $S$ , у которого все  $r$ -элементные подмножества лежат в  $\beta$ .

Например, известная задача о том, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых, показывает, что в качестве  $n(3, 3, 2)$  можно взять число 6. Действительно, мы разбиваем 2-элементные подмножества следующим образом: к  $\alpha$  относим пары знакомых, а к  $\beta$  относим пары незнакомых, и получаем требуемое.

Различные обобщения теоремы Рамсея составляют так называемую теорию Рамсея; этой теории посвящена книга [4].

Примером теоремы рамсеевского типа является следующее утверждение. «Для каждого натурального числа  $n$  можно выбрать число  $N$  (зависящее только от  $n$ ) так, что среди любых  $N$  точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать  $n$  точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника.» (Это — задача 22.7 из книги [1]; по ходу решения этой задачи доказывается теорема Рамсея.)

В последние годы стали появляться теоремы рамсеевского типа в теории узлов и зацеплений. (Узлы и зацепления были темой номера 3-го выпуска «Математического просвещения»; к нему можно обратиться за необходимыми определениями.) Первая теорема такого типа, доказанная независимо Заком [9] и Конвеем и Гордоном [3], обсуждалась в предыдущем выпуске «Математического просвещения» в статье [2]. Напомним ее формулировку: «Для любого вложения графа  $K_6$  в трехмерное пространство в нём найдется пара зацепленных циклов.» Конвей и Гордон доказали также, что для любого вложения графа  $K_7$  в трехмерное пространство в нём найдется нетривиальный узел. (Здесь и далее используются следующие стандартные обозначения:  $K_n$  — граф с  $n$  вершинами, любые две из которых соединены ребром, так называемый *полный* граф с  $n$  вершинами;  $K_{m,n}$  — граф с  $n$  вершинами одного цвета и  $m$  вершинами другого цвета, причем любые две вершины разного цвета соединены ребром.) Пример применения этих теорем приведён в статье [10].

В нашей статье обсуждаются следующие две более общие теоремы рамсеевского типа о возможности вписать данный узел (зацепление) в произвольный

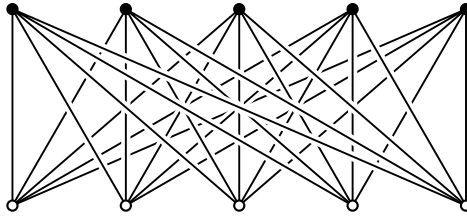


Рис. 1. Положительный набор точек

набор точек в пространстве, который содержит достаточно много точек в общем положении (это означает, что никакие 4 точки не лежат в одной плоскости). Будем говорить, что данный узел *вписан* в данное множество точек в трехмерном пространстве, если существует замкнутая ломаная с вершинами в данных точках, представляющая данный узел. Для зацеплений определение аналогично.

**ТЕОРЕМА 1.** (Негами [6, 7]) *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число  $N$  так, что в любое множество из  $N$  точек в общем положении в пространстве  $\mathbb{R}^3$  можно вписать данный узел (зацепление).*

Можно также рассматривать множества точек, раскрашенных в два цвета, и при этом рассматривать только ломаные, все звенья которых имеют разноцветные вершины. В такой ситуации верно следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 2.** (Миёчи [5]) *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число  $N$  так, что в любое множество  $N$  красных и  $N$  синих точек в общем положении можно вписать данный узел (зацепление).*

Теорема Негами очевидным образом следует из теоремы Миёчи. Но, как это часто бывает, удобнее доказывать именно теорему Миёчи. В этом доказательстве важную роль играет понятие *положительного* набора точек. Чтобы определить это понятие, мы фиксируем плоскость, на которую все проекции данного набора точек различны и при этом все точки набора лежат выше этой плоскости, и будем рассматривать проекции отрезков, соединяющих данные точки, а для пересекающихся отрезков будем отмечать, какой из них проходит выше. Набор из  $n$  красных точек и  $n$  синих точек (в общем положении) называют *положительным*, если для любых двух синих точек  $B_1, B_2$  и любых двух красных точек  $R_1, R_2$  проекции отрезков  $B_1R_1$  и  $B_2R_2$  или проекции отрезков  $B_1R_2$  и  $B_2R_1$  пересекаются во внутренней точке, причем при движении от синего конца к красному по отрезку, который проходит выше, синий конец нижнего отрезка остается слева (рис. 1).

Схема доказательства следующая. Сначала доказываем, что для любого  $n$  можно выбрать  $N = R(n)$  так, что из любого набора  $N$  синих и  $N$  красных точек можно выбрать  $n$  синих и  $n$  красных точек, образующих положительный (или отрицательный) набор. Затем доказываем, что положительный набор точек можно перевести (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках) в стандартное положение, для

которого есть две скрещивающиеся прямые, синяя и красная, и все синие точки лежат на синей прямой, а все красные точки — на красной. Наконец, доказываем *лемму о двух спицах*<sup>1)</sup>: для любого узла (зацепления) можно выбрать число  $n$  так, что данный узел (зацепление) можно вписать в множество из  $n$  красных точек на красной прямой и  $n$  синих точек на синей прямой.

## 1. ВЫБОР ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОДМНОЖЕСТВА ТОЧЕК

Назовем набор  $n$  красных и  $n$  синих точек в пространстве в общем положении *нейтральным*, если проекции на выделенную плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках).

Легко видеть, что если  $n \geq 3$ , то набор точек не может быть нейтральным. Действительно, предположим, что на плоскости заданы синие точки  $B_1, B_2, B_3$  и красные точки  $R_1, R_2, R_3$  (в общем положении) так, что отрезки с разноцветными концами не пересекаются во внутренних точках. Тогда  $R_1B_1R_2B_2R_3B_3$  — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Легко видеть, что по крайней мере две из диагоналей  $R_1B_2, R_2B_3$  и  $R_3B_1$  лежат внутри этой ломаной. Действительно, пусть, например, диагональ  $R_1B_2$  внешняя. Тогда все данные точки лежат по одну сторону от прямой  $R_1B_2$ , а в таком случае диагонали  $R_2B_3$  и  $R_3B_1$  внутренние. Эти внутренние диагонали пересекаются, поскольку точки  $R_2$  и  $B_3$  лежат по разные стороны от прямой  $R_3B_1$ . Приходим к противоречию.

Таким образом, достаточно доказать, что для любого  $n$  можно выбрать число  $R(n)$  так, что любой набор  $R(n)$  синих и  $R(n)$  красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор  $n$  синих и  $n$  красных точек. Для этого нам нужен небольшой экскурс в рамсеевскую теорию графов.

**ТЕОРЕМА 3.** Для любых  $t_1, t_2, t_3$  и  $n_1, n_2, n_3$  можно выбрать число  $R = R(t_1, n_1, t_2, n_2, t_3, n_3)$  так, что для любой раскраски треугольников с вершинами в  $R - 1$  синих и  $R$  красных точках цветами 1, 2, 3 для некоторого цвета  $i$  можно выделить  $t_i$  красных точек и  $n_i$  синих точек так, что все треугольники с вершинами в выделенных точках имеют цвет  $i$ .

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся более простые утверждения о раскрасках графов, которые мы сейчас докажем.

**ТЕОРЕМА 4.** а) Для любых  $t$  и  $n$  можно выбрать число  $R = R(t, n)$  так, что для любой раскраски ребер полного графа  $K_R$  в два цвета можно выделить либо подграф  $K_t$  с ребрами первого цвета, либо подграф  $K_n$  с ребрами второго цвета.

б) Для любых  $l, t$  и  $n$  можно выбрать число  $R = R(l, t, n)$  так, что для любой раскраски ребер полного графа  $K_R$  в три цвета можно выделить либо подграф  $K_l$  с ребрами первого цвета, либо подграф  $K_t$  с вершинами второго цвета, либо подграф  $K_n$  с вершинами третьего цвета.

<sup>1)</sup>Об этой лемме мы узнали от И. Дынникова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Ясно, что в качестве  $R(m, 2)$  можно взять  $m$ , поскольку либо все рёбра первого цвета, либо есть хотя бы одно ребро второго цвета. Аналогично в качестве  $R(2, n)$  можно взять  $n$ . Если же  $m, n > 2$ , то

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1) + 1.$$

Действительно, рассмотрим полный граф с  $R(m - 1, n) + R(m, n - 1) + 1$  вершинами и выделим в нём вершину  $A$ . Из нее выходит  $R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$  ребер, поэтому из нее выходит либо  $R(m - 1, n)$  ребер первого цвета, либо  $R(m, n - 1)$  ребер второго цвета. Пусть для определенности из вершины  $A$  выходит  $R(m - 1, n)$  ребер первого цвета. Тогда в полном графе с вершинами в концах этих ребер (отличных от  $A$ ) можно выделить либо полный подграф с  $m - 1$  вершинами, все рёбра которого имеют первый цвет, либо полный подграф с  $n$  вершинами, все рёбра которого имеют второй цвет. Во втором случае мы уже получили требуемое, а в первом случае к выделенным  $m - 1$  вершинам нужно добавить вершину  $A$ .

б) Прежде всего заметим, что  $R(2, m, n) = R(m, n)$ , поскольку либо есть ребро первого цвета, либо все рёбра имеют второй или третий цвет. Далее, если  $l, m, n > 2$ , то

$$R(l, m, n) \leq R(l - 1, m, n) + R(l, m - 1, n) + R(l, m, n - 1).$$

Это доказывается точно так же, как и утверждение а).

Теперь мы готовы к доказательству теоремы 3. Применим индукцию по  $\sum n_i + \sum m_i$ . Если  $m_i = 1$  или  $n_i = 0$ , то доказывать нечего, поскольку  $i$ -е множество рассматриваемых треугольников пусто. Докажем теперь, что

$$R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3) \leq R(l, m, n) + 1,$$

где  $R(l, m, n)$  — число из теоремы 4б) для  $l = R(m_1, n_1 - 1, m_2, n_2, m_3, n_3)$ ,  $m = R(m_1, n_1, m_2, n_2 - 1, m_3, n_3)$  и  $n = R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3 - 1)$ . Действительно, рассмотрим полный граф с вершинами в красных точках и окрасим каждое его ребро  $R_i R_j$  одним из трех цветов в соответствии с цветом треугольника  $B_1 R_i R_j$ , где  $B_1$  — фиксированная синяя вершина. К этому графу можно применить теорему 4б). В результате получим, например, что можно выделить  $R(m_1, n_1 - 1, m_2, n_2, m_3, n_3)$  красных вершин так, что все соединяющие их рёбра окрашены первым цветом. Выберем произвольно еще столько же синих точек, отличных от  $B_1$ . По предположению индукции возможны три варианта:

- 1) можно выбрать  $m_1$  красных точек и  $n_1 - 1$  синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют первый цвет;
- 2) можно выбрать  $m_2$  красных точек и  $n_2$  синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют второй цвет;
- 3) можно выбрать  $m_3$  красных точек и  $n_3$  синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют третий цвет.

В первом случае к выбранным точкам добавляем точку  $B_1$ , а в двух остальных сразу же получаем требуемое.

Теперь мы уже можем доказать сформулированное на с. 110 утверждение: для любого  $n$  можно выбрать число  $R(n)$  так, что любой набор  $R(n)$  синих и

$R(n)$  красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор  $n$  синих и  $n$  красных точек. Для этого покрасим каждый тетраэдр вида  $B_1B_2R_1R_2$  в один из трех цветов в соответствии с тем, положительна, отрицательна или нейтральна четверка  $B_1, B_2, R_1, R_2$ . Нужно доказать, что для каждого  $n$  можно выбрать число  $R(n)$  так, что при любой такой раскраске можно выделить  $n$  синих и  $n$  красных точек так, что все тетраэдры с вершинами в выделенных точках окрашены одним цветом. Это доказывается аналогично теореме 3.

## 2. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО НАБОРА ТОЧЕК

Докажем, что любой положительный набор  $n$  красных и  $n$  синих точек можно перевести в стандартное положение (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках). Для этого мы сначала последовательно докажем некоторые свойства положительных наборов точек.

1) Все проекции синих точек лежат по одну сторону от проекции любой прямой, соединяющей пару красных точек.

Предположим, что проекции синих точек  $B_1$  и  $B_2$  лежат по разные стороны от проекции прямой, соединяющей красные точки  $R_1$  и  $R_2$ . Тогда проекции отрезков  $B_1R_1$  и  $B_2R_2$  не пересекаются и проекции отрезков  $B_1R_2$  и  $B_2R_1$  тоже не пересекаются. Это противоречит определению положительного набора точек.

Будем говорить, что  $R_1 > R_2$ , если при движении от  $R_1$  к  $R_2$  проекции всех синих точек остаются справа.

2) Если  $R_1 > R_2$  и  $R_2 > R_3$ , то  $R_1 > R_3$ .

Предположим, что  $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$ , и придем к противоречию. По предположению при обходе проекции треугольника  $R_1R_2R_3$  все синие точки остаются справа. Легко проверить, что это возможно лишь в том случае, когда обход происходит по часовой стрелке и при этом проекции всех синих точек расположены внутри треугольника  $R_1R_2R_3$ . Синих точек у нас столько же, сколько красных, поэтому есть по крайней мере две синие точки. Проведем через их проекции прямую. Проекция двух из красных точек  $R_1, R_2, R_3$  лежат по разные стороны от этой прямой, и мы получаем противоречие, как и при доказательстве свойства 1.

3) Пусть проекции отрезков  $R_1B_1$  и  $R_2B_2$  пересекаются, причем отрезок  $R_1B_1$  лежит выше (ниже) отрезка  $R_2B_2$ . Тогда  $R_1 > R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

Пусть отрезок  $R_1B_1$  лежит выше отрезка  $R_2B_2$ . Рассматриваемый набор точек положителен, поэтому при движении от  $B_1$  к  $R_1$  проекция точки  $B_2$  остается слева. Значит, при движении от  $R_1$  к  $R_2$  точка  $B_2$  остается справа, т. е.  $R_1 > R_2$ . Случай, когда отрезок  $R_1B_1$  лежит ниже отрезка  $R_2B_2$ , рассматривается аналогично.

4) Красные и синие отрезки можно занумеровать так, что если  $i < j$  и  $k \neq l$ , то либо проекции отрезков  $R_iB_k$  и  $R_jB_l$  не пересекаются, либо отрезок  $R_iB_k$  лежит выше отрезка  $R_jB_l$ .

Согласно свойству 2 красные точки можно занумеровать так, что  $R_1 > R_2 > \dots > R_n$ . Свойство 3 показывает, что эта нумерация — искомая.

Воспользовавшись свойством 4, положительный набор точек легко привести к стандартному виду. Занумеруем красные точки так, как указано в этом свойстве. Отрезки с концом  $R_1$  лежат выше всех других отрезков, поэтому точку  $R_1$  можно поднять сколь угодно высоко (над плоскостью проекции). Затем точку  $R_2$  можно поднять намного выше всех точек, кроме первой, и т. д. При этом можно позаботиться о том, чтобы точки  $R_3, \dots, R_n$  попали на прямую  $R_1 R_2$  (эту прямую можно выбрать заранее, направив ее почти вертикально).

Красные точки теперь расположены так, как нужно. После этого остается повторить то же самое для синих точек.

### 3. ЛЕММА О ДВУХ СПИЦАХ

Доказательство леммы о двух спицах начнем с того, что выберем для данного узла диаграмму, которая представляет собой ломаную со звеньями двух направлений — горизонтального и вертикального. Этого легко добиться, аппроксимируя гладкую кривую ломаной с горизонтальными и вертикальными звеньями.

Затем каждый перекресток, на котором горизонтальное звено проходит ниже вертикального, преобразуем так, как показано на рис. 2. После этого мы получим диаграмму с вертикальными и горизонтальными звеньями, у которой на всех перекрестках горизонтальные звенья проходят над вертикальными.

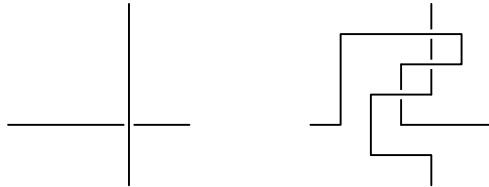
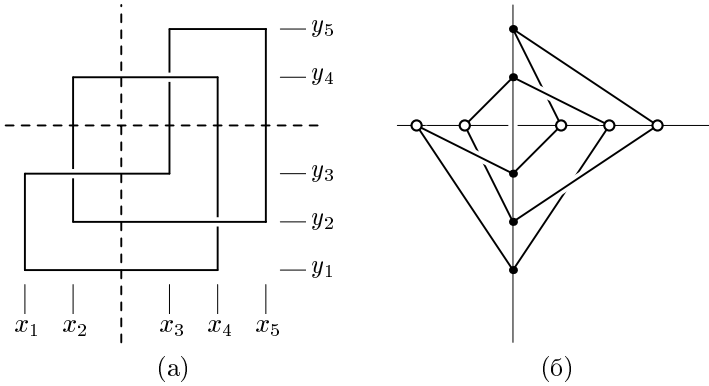


Рис. 2. Преобразование перекрестка

Малым шевелением диаграммы можно добиться, чтобы никакие два горизонтальных звена диаграммы не лежали на одной прямой и никакие два вертикальных звена тоже не лежали на одной прямой.

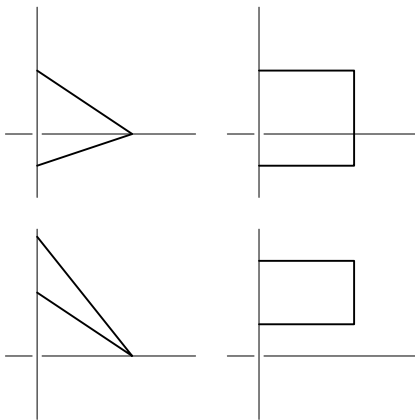
Полученному «прямоугольному» представлению узла сопоставим узел на двух спицах следующим образом. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — координаты вертикальных звеньев, а  $y_1, \dots, y_n$  — координаты горизонтальных звеньев (рис. 3а). (Количество горизонтальных звеньев, как и количество вертикальных звеньев, в два раза меньше количества вершин.) Проведем горизонтальную прямую и вертикальную прямую так, чтобы вертикальная прямая проходила выше (рис. 3б). На горизонтальной прямой отметим точки с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , а на вертикальной прямой — точки с координатами  $y_1, \dots, y_n$ . Пару точек на разных



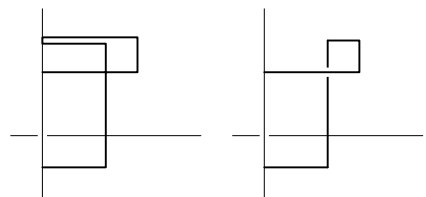
**Рис. 3.** Узел на двух спицах

прямыми мы соединяем отрезком, если существует вершина диаграммы с координатами  $(x_i, y_j)$ . Всего получаем  $2n$  отрезков: из каждой отмеченной точки выходят два отрезка.

Остается показать, что полученный в результате узел, натянутый на две спицы, — это исходный узел. Это легко сделать, если рассмотреть полуплоскости, проходящие через вертикальную прямую и отмеченные точки на горизонтальной прямой (вместе эти полуплоскости похожи на страницы раскрытой книги). Мы можем свободно деформировать отрезки в каждой полуплоскости, и это позволяет получить прямоугольное представление узла. Действительно, сначала в каждой рассматриваемой полуплоскости продеформируем соответствующую пару звеньев так, как показано на рис. 4. Затем уберем отрезки, которые проходятся дважды (рис. 5).



**Рис. 4.** Деформация пары звеньев



**Рис. 5.** Лишние отрезки

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. М.: МЦНМО, 2001.
- [2] Прасолов В. В. *Прямоугольники на прямой и вложения листа Мёбиуса* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 127–131.
- [3] Conway J. H., Gordon C. McA. *Knots and links in spatial graphs* // J. Graph Theory, 1983. Vol. 7. P. 445–453.
- [4] Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. *Ramsey theory*. Wiley, 1980.
- [5] Miyauchi M. S. *Topological Ramsey theorem for complete bipartite graphs* // J. Comb. Theory, Ser. B, 1994. Vol. 62. P. 164–179.
- [6] Negami S. *Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs* // Trans. Amer. Math. Soc., 1991. Vol. 324. P. 527–541.
- [7] Negami S. *Ramsey-type theorem for spatial graphs* // J. Comb. Theory, Ser. B, 1998. Vol. 72. P. 53–62.
- [8] Ramsey F. P. *On a problem of formal logic* // Proc. London Math. Soc., 2nd series, 1930. Vol. 30. P. 264–286.
- [9] Sachs H. *On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem* // Lecture Notes Math., vol. 1018. Springer, 1982. P. 231–240.
- [10] Skopenkov M. *Embedding products of graphs into Euclidean spaces* // Fund. Math., 2003. Vol. 179. P. 191–198.

---

Прасолов Виктор Васильевич. Независимый московский университет.

E-mail: [prasolov@mccme.ru](mailto:prasolov@mccme.ru)

Номерpage: [www.mccme.ru/prasolov](http://www.mccme.ru/prasolov)

Скопенков Михаил Борисович, студент 5 курса мехмата МГУ.

E-mail: [stepank@mccme.ru](mailto:stepank@mccme.ru)

# Вокруг критерия Куратовского планарности графов

А. Б. Скопенков \*

*Повторяя слова,  
Лишенные всякого смысла,  
Но без напряженья...*

Б. Гребенщиков, «Плоскость»

Формулировка критерия Куратовского планарности графов хорошо известна (все необходимые понятия и эта формулировка напоминаются в начале заметки). Доказательства этого критерия, приводимые в большинстве книг, либо длинные, либо трудны. В этой заметке мы приведем простое доказательство критерия Куратовского. Оно принадлежит Юрию Макарычеву [14] (который придумал это доказательство, еще будучи школьником!) и использует некоторые идеи из [20, §5]. На русском языке это доказательство (с некоторыми модификациями) приведено в [5, §1.1]. В настоящей заметке приведено немного более ясное изложение доказательства [5], в котором также устранены мелкие неточности. В приложении «запрещенные подсистемы» приводятся формулировки близких к критерию Куратовского результатов.

Выражаю благодарность М. Н. Вялому, А. А. Заславскому и В. В. Прасолову за полезные замечания и обсуждения, а также Б. Мохару и С. В. Матвееву за предоставленные ссылки.

## НАПОМИНАНИЕ: ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

*Графом* (точнее, неориентированным графом без петель и кратных ребер) называется конечное множество  $V$ , некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары) которого выделены. Элементы множества  $V$  называются *вершинами* графа и обычно изображаются точками (например, на плоскости). Выделенные пары вершин называются *ребрами* графа и обычно изображаются ломаными (или кривыми), соединяющими соответствующие точки. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами.

---

\* Частично поддержан Стипендией Московского Государственного Университета для молодых преподавателей и ученых, Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грантами №02-01-00014 и №01-01-00583, Грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-1988.2003.1 и программой РАН «Современные проблемы теоретической математики».

Графы  $G_1$  и  $G_2$  называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение  $f$  множества  $V_1$  вершин графа  $G_1$  на множество  $V_2$  вершин графа  $G_2$ , удовлетворяющее условию: вершины  $A, B \in V_1$  соединены ребром в том и только в том случае, если вершины  $f(A), f(B) \in V_2$  соединены ребром.

*Степенью* вершины графа называется число выходящих из нее ребер.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф  $G$  называется *подграфом* графа  $H$ , если множество вершин графа  $G$  содержится в множестве вершин графа  $H$  и каждое ребро графа  $G$  является ребром графа  $H$ . При этом две вершины графа  $G$ , соединенные ребром в графе  $H$ , не обязательно соединены ребром в графе  $G$ .

*Путем* в графе называется конечная последовательность вершин, в которой ни одна вершина не повторяется и любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины соединены ребром. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связан и не содержит циклов.

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 1. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Или, эквивалентно, если существует граф  $G$ , полученный из обоих данных графов операциями подразделения ребра.



Рис. 1.

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (т. е. ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались.

Например, любое дерево и любой граф, образованный вершинами и ребрами некоторого многогранника — планарные.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен. Ясно также, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Еще в XVIII веке Леонард Эйлер доказал, что графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  (рис. 2) не являются планарными. Это можно доказать путем небольшого перебора с использованием следующей теоремы [5, §1, Теорема 1.3].

**ТЕОРЕМА ЖОРДАНА.** *Замкнутая несамопересекающаяся кривая (т. е. цикл) делит плоскость ровно на две части. (При этом одна часть ограничена, другая неограничена, причем две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой).*

Обсуждение и доказательство этой теоремы см., например, в [1].

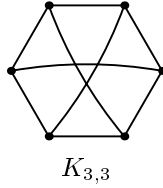
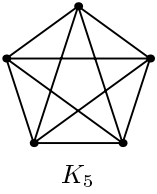


Рис. 2.

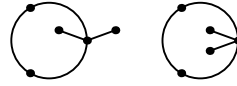


Рис. 3.

Из теоремы Жордана следует, что *любой нарисованный на плоскости без самопересечений граф разбивает плоскость на конечное число связанных частей*. Эти части называются *гранями* изображения графа на плоскости. Часто такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же планарный граф можно нарисовать на плоскости разными способами (рис. 3). Более точный термин — *плоский граф*.

**ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА.** Для (изображения на плоскости) связного планарного графа с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $F$  гранями имеем  $V - E + F = 2$ .

Доказательство и применения этой теоремы см., например, в [5].

Приведем более изящное (но по сути, аналогичное вышеуказанному) доказательство непланарности графа  $K_5$ , основанное на формуле Эйлера. Пусть граф  $K_5$  нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера  $5 - 10 + F = 2$ . Значит,  $F = 7$ . Построим около каждого ребра графа  $K_5$ , нарисованного на плоскости, стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно  $2E = 20$ . Но поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то число стрелок не меньше  $3F = 21 > 20$ . Противоречие. Основываясь на этой идее, можно доказать непланарность графа  $K_{3,3}$  (упражнение).

Доказательство непланарности графа  $K_5$ , основанное на понятии коэффициента пересечения, можно найти в [2], [5, §1].

**ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО.** *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу  $K_5$  или  $K_{3,3}$  (рис. 2).*

Эта теорема была объявлена также замечательным советским математиком Львом Семеновичем Понтрягиным (доказательство не опубликовано), а также Фринком и Смитом. Поэтому иногда ее называют теоремой Понтрягина–Куратовского. В 1920-е годы Карл Менгер объявил, что *граф, степень каждой вершины которого равна 3, является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу  $K_{3,3}$* . Читатель может попытаться самостоятельно доказать этот факт (вытекающий из теоремы Куратовского), не опираясь на теорему Куратовского. Кроме теоремы Куратовского, существует много других критериев планарности графов [20]. Огромный интерес к поиску критерия планарности графов объясняется, в частности, наличием одной из величайших математических гипотез — гипотезы четырех красок [5, §1].

### 1. ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ КУРАТОВСКОГО

Необходимость в теореме Куратовского уже доказана. Приведем доказательство достаточности. Предположим, напротив, что существует непланарный граф, не содержащий подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Среди всех таких графов выберем граф  $G$  с минимальным числом ребер.

Доказательство теоремы Куратовского состоит из следующих трех шагов. Для их формулировки напомним следующие определения.  $\theta$ -графом называется граф, гомеоморфный букве  $\theta$  (т. е. графу  $K_{3,2}$ ). Утверждение «граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный графу  $H$ » будем сокращенно записывать в виде « $G \supset H$ ». Операции удаления ребра  $G \rightarrow G - e$ , стягивания ребра  $G \rightarrow G/e$  и удаления вершины  $G \rightarrow G - x$  определены на рис. 4.

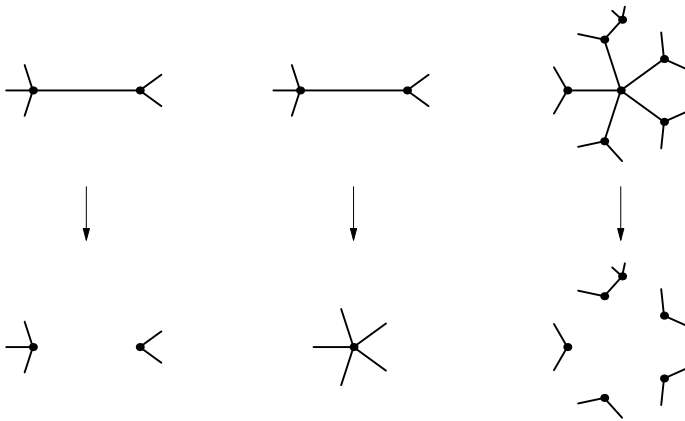


Рис. 4.

ШАГ 1 (САМЫЙ ПРОСТОЙ). Из каждой вершины графа  $G - x - y$  выходит не менее двух ребер.

ШАГ 2 (САМЫЙ ВАЖНЫЙ). Для любого ребра  $xy$  графа  $G$  выполнено

$$G - x - y \not\supset \theta.$$

ШАГ 3 (САМЫЙ КРАСИВЫЙ). Граф  $G$  изоморфен  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Из шага 3 получается противоречие, завершающее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 1. В графе  $G - x - y$  нет изолированных вершин, поскольку от изолированной вершины графа  $G - x - y$  в графе  $G$  отходит не более двух ребер, что невозможно.

В графе  $G - x - y$  нет и висячих вершин. Действительно, если  $p$  — висячая вершина, то она соединена и с  $x$ , и с  $y$ , поскольку в графе  $G$  из каждой вершины выходит не менее трех ребер. Граф  $G - (xy)$  планарен по минимальности графа  $G$ . Нарисуем граф  $G - (xy)$  на плоскости без самопересечений и «подрисуем» ребро  $xy$  вдоль ребер  $px$  и  $py$ . Получим изображение графа  $G$  на плоскости без самопересечений. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2. Несложно убедиться, что граф  $G/xy$  планарен. Действительно, если  $G/xy \supset K_{3,3}$ , то  $G \supset K_{3,3}$ , а если  $G/xy \supset K_5$ , то  $G \supset K_5$  или  $G \supset K_{3,3}$  (рис. 5). Поэтому планарность графа  $G/xy$  следует из минимальности графа  $G$ .

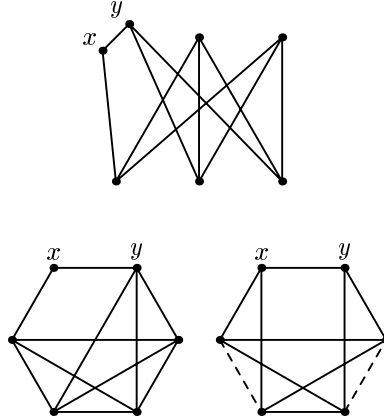


Рис. 5.

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф  $G/xy$  (рис. 6). Покрасим в белый цвет ребра графа  $G/xy$ , выходящие из вершины  $xy$ . Изображение графа  $G - x - y = G/xy - xy$  на плоскости получается стиранием белых ребер. Покрасим в черный цвет границу  $B$  той грани (изображения) графа  $G/xy - xy$ , которая содержит вершину  $xy$  графа  $G/xy$ . Заметим, что

*граница грани не может содержать  $\theta$ -подграфа.*

(Это утверждение можно вывести из теоремы Жордана. Другое доказательство получается от противного: если граница грани содержит  $\theta$ -подграф, то можно взять точку внутри этой грани и соединить ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах»  $\theta$ -подграфа. Получится изображение графа  $K_{3,3}$  на плоскости без самопересечений. Противоречие.)

Поэтому достаточно доказать, что в графе  $G/xy$  все ребра либо белые, либо черные. Пусть это не так. Тогда неокрашенные ребра находятся в грани графа  $G/xy - xy$ , не содержащей вершины  $xy$ . Значит, граф  $B$  из черных ребер разбивает плоскость не менее чем на две на части. Поэтому найдется цикл  $C$  из черных ребер, относительно которого вершина  $xy$  лежит (не уменьшая общности) внутри, а некоторое еще не покрашенное ребро — вне.

Покрасим в красный цвет все ребра графа  $G/xy$ , лежащие вне цикла  $C$ . Оставшиеся ребра графа  $G/xy$  покрасим в оранжевый цвет. Заметим, что красные ребра обязательно присутствуют, а оранжевых может не быть.

Построенная раскраска графа  $G/xy$  порождает раскраску графа  $G$  (ребро  $xy$  красится в белый цвет). Граф  $G - R$ , полученный из графа  $G$  удалением красных ребер, можно нарисовать на плоскости без самопересечений (рис. 7), так как  $G$  — минимальный непланарный. Можно считать, что на этом рисунке

- оранжевые
- красные
- ⋯ белые
- черные

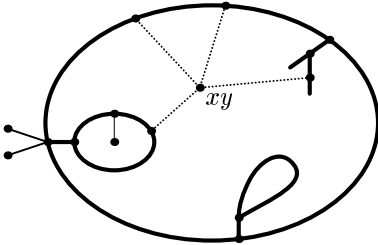


Рис. 6.

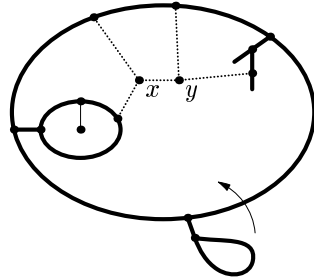


Рис. 7.

белые ребра лежат внутри черного цикла  $C$ . Поскольку объединение  $B$  черных ребер — граница грани, то оно не содержит  $\theta$ -подграфа. Значит, каждая компонента связности графа  $B - C$  пересекается с  $C$  не более чем по одной точке. Поэтому можно перекинуть каждую компоненту связности графа  $B - C$  (вместе с оранжевыми ребрами) внутрь цикла  $C$ . Будем считать далее, что  $B - C$  и все оранжевые ребра лежат внутри цикла  $C$ . Нарисовав красные ребра вне  $C$ , как для изображения графа  $G/xy$  (рис. 6), получим вложение графа  $G$  в плоскость. Полученное противоречие доказывает, что  $G - x - y$  есть граница грани и поэтому не содержит  $\theta$ -подграфа.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 3.** Из шагов 1 и 2 следует, что граф  $G - x - y$  представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы; при этом из каждой вершины выходит не менее двух ребер (рис. 8). Поэтому в графе  $G - x - y$  существует «висячий» цикл, т. е. цикл  $C$ , имеющий с остальным графом только одну общую вершину  $v$ . В этом цикле  $C$  есть еще по крайней мере две вершины  $p$  и  $q$ . Так как в графе  $G$  нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, то каждая из этих вершин  $p$  и  $q$  соединена либо с  $x$ , либо с  $y$ . Поэтому в объединении цикла  $C$  и ребер, соединяющих вершины  $x, y, p, q$ , можно выделить  $\theta$ -подграф. Значит, по шагу 2 каждое ребро графа  $G - x - y$  имеет конец на цикле  $C$ . Поскольку граф  $G - x - y$  не содержит висячих вершин, то он совпадает с циклом  $C$ .

Поскольку в графе  $G$  из каждой вершины выходит не менее трех ребер, то любая вершина цикла  $G - x - y$  соединена либо с  $x$ , либо с  $y$ .

Если вершина  $u$  цикла  $G - x - y$  соединена с  $x$  и не соединена с  $y$ , то соседняя с  $u$  вершина  $v$  цикла не соединена с  $x$  (поскольку в противном случае граф  $G - vx$  планарен по минимальности графа  $G$ , значит, мы можем добавить ребро  $vx$  к вложенному в плоскость графу  $G - vx$  и получить вложение в плоскость графа  $G$ ). Поэтому либо

— любая вершина цикла  $G - x - y$  соединена в  $G$  и с  $x$ , и с  $y$ , либо

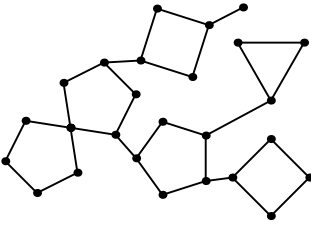


Рис. 8.

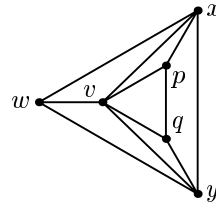


Рис. 9.

– вершины цикла  $G - x - y$ , соединенные с  $x$  и соединенные с  $y$ , чередуются вдоль этого цикла.

В первом случае  $G = K_5$ , во втором  $G = K_{3,3}$ . □

Заметим, что в доказательстве из [5, 1.1] имеются следующие неточности. На с. 23 не доказано, что «граф  $F$  разбивает плоскость не более чем на две части» — ведь граница грани может разбивать плоскость более чем на две части (рис. 8). На с. 24 не доказано, что «любая вершина цикла  $C_1$  соединена ребром с вершиной  $x$  или с вершиной  $y$ » — ведь эта вершина цикла  $C_1$  может соединяться с другими вершинами графа  $G - x - y$ . На с. 25 не доказано, что «тогда граф  $G$  имеет такой вид, как на рис. 11» — ведь вершины цикла  $C$  могут соединяться ребрами и с  $x$ , и с  $y$ . В конце доказательства леммы 3 из [14] не объяснено, почему  $G$  является 3-призмой, а не подграфом графа на рис. 9. Все указанные неточности несущественны и легко устраняются (см. доказательство в настоящей заметке).

**ЗАДАЧА.** Придумайте алгоритм распознавания планарности графа, основанный на приведённом доказательстве, и оцените его сложность. Для этого может пригодиться следующее изменение приведённого доказательства, не содержащее предположения о противном и поэтому не включающее работы с несуществующими объектами. Граф, полученный из графа  $G$  произвольной последовательностью операций удаления ребра или вершины или стягивания ребра, называется *минором* графа  $G$ . Ясно, что минор планарного графа планарен. Можно доказывать теорему Куратовского в эквивалентной формулировке, полученной из следующего факта: *граф не содержит подграфа, гомеоморфного  $K_5$  или  $K_{3,3}$   $\Leftrightarrow$  граф не имеет минора, изоморфного  $K_5$  или  $K_{3,3}$* . Пусть  $G$  — *непланарный граф, любой минор которого планарен*. Достаточно доказать, что  $G$  изоморфен  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , что делается аналогично приведённым выше рассуждениям.

## ПРИЛОЖЕНИЕ: ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПОДСИСТЕМЫ

Если некоторая подсистема системы  $N$  не реализуема в другой системе  $M$ , то и  $N$  не реализуема в  $M$ . Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем  $N_1, \dots, N_k$ , не реализуемых в  $M$ , со следующим свойством:

*для того, чтобы система  $N$  была реализуема в  $M$  необходимо и достаточно, чтобы  $N$  не содержала ни одной из этих «запрещенных» подсистем.*

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. В терминах запрещенных подсистем можно также описать много других классов графов (или более общих объектов).

Например, так можно описать графы, вложимые в данное 2-многообразие [17]. Однако список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мёбиуса содержит целых 103 графа [11]. Даже существование такого конечного списка для произвольного 2-многообразия имеет очень длинное доказательство [7, 17]. Поэтому интересны и другие способы проверки вложимости графов в плоскость и другие 2-многообразия.

Так же можно описать графы и даже пёановские континуумы, *базисно* вложимые в  $\mathbb{R}^2$  [13, 19].

Приведем формулировки некоторых других результатов (доказательства оставляем читателю в качестве задач). Те формулировки, в которых встречаются неизвестные читателю объекты, он может игнорировать.

**ТЕОРЕМА ШАРТРАНА – ХАРАРИ.** *Граф  $G$  можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой одной грани, тогда и только тогда, когда  $G$  не содержит  $\theta$ -подграфа.*

Назовем *несамопересекающийся цикл  $C$*  в связном графе  $G$  *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа  $G$  на плоскости, при котором цикл  $C$  изображается границей некоторой грани. Следующий результат можно вывести из теоремы Куратовского.

**ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ КУРАТОВСКОГО.** *Цикл  $C$  является граничным тогда и только тогда, когда граф  $G$  планарен и цикл  $C$  не содержится в подграфе графа  $G$ , как на рис. 10 или 11.*

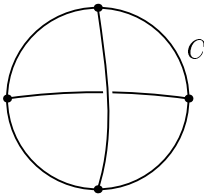


Рис. 10.

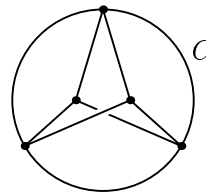


Рис. 11.

А вот следующий результат проще доказывать, не используя теорему Куратовского.

**ТЕОРЕМА О  $\theta$  И  $\theta$ .** *Пусть в графе  $G$  для каждой вершины указан циклический порядок выходящих из нее ребер. Граф  $G$  с указанными циклическими порядками можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее ребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным циклическим порядком, тогда и только тогда, когда  $G$  не содержит «восьмерки» или «буквы  $\theta$ », циклические порядки на которых заданы рис. 12.*

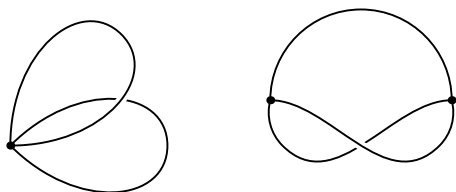


Рис. 12.

Два вложения (т. е. изображения без самопересечений)  $f, g$  одного и того же графа в плоскость называются *изотопными*, если одно можно так непрерывно продеформировать в другое, чтобы в процессе деформации мы всё время имели бы вложение (формальное определение см., например, в [4, 5]).

**ТЕОРЕМА МАКЛЕЙНА–ЭДКИССОНА.** *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой несамопересекающийся цикл и на любой триод изотопны (т. е. не таковы, как на рис. 13) [16].*

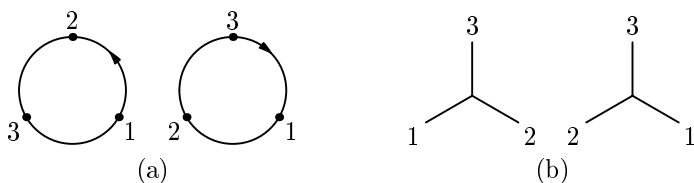


Рис. 13.

Эту теорему удобно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к случаю деревьев путем выделения максимального дерева. Теорема Маклейна–Эддисона справедлива также для полиэдра или даже пёановского континуума  $G$ .

Теорема Маклейна–Эддисона (без утверждения в скобках) справедлива для вложений в сферу, тор и другие *ориентируемые* 2-многообразия (доказательство аналогично). Заметим, что любая изотопия графа на 2-многообразии объемлема [С. В. Матвеев, частное сообщение].

**ТЕОРЕМА БАЭРА–ЭПШТЕЙНА.** *Две замкнутые несамопересекающиеся кривые на 2-многообразии гомотопны тогда и только тогда, когда они изотопны [10].*

Теорема Баэра–Эпштейна сводит вопрос о классификации вложений окружности в 2-многообразие  $N$  (и, тем самым, произвольного графа в ориентируемое 2-многообразие) к вопросу о реализуемости элементов  $\pi_1(N)$  вложенными окружностями. Но последний вопрос очень сложен.

**ЗАДАЧА.** (а) Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для вложений в сферу.

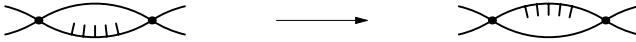


Рис. 14.

(b) Приведем другое описание вложений графов в плоскость с точностью до изотопии. Граф называется (вершинно)  $k$ -связным, если он остается связным после удаления любой  $k - 1$  вершины и распадается после удаления некоторых  $k$  вершин. Докажите следующие теоремы Уитни [21].

Любое вложение произвольного трехсвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и осевых симметрий.

Любое вложение двусвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и «переворачиваний блоков» (рис. 14).

Определите операции, при помощи которых можно получить любое вложение 1-связного ( $\Leftrightarrow$  связного) графа в сферу из любого другого. Сделайте то же и для 0-связного ( $\Leftrightarrow$  произвольного) графа. Таким образом получится описание всех вложений графа в сферу (с точностью до изотопности).

Полиэдр (синоним: тело симплициального комплекса) — это многомерный аналог графа. Формальное определение см., например, в [5, §8]. Уже двумерные полиэдры — интересные и сложные объекты, про которые имеется несколько знаменитых и очень трудных нерешенных проблем [4]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

ТЕОРЕМА ХАЛИНА – ЮНГА. *Полиэдр вложим в сферу  $S^2$  тогда и только тогда, когда он не содержит графов  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  или «зонтика»  $U^2$  (рис. 2 и 15) [12, 15].*

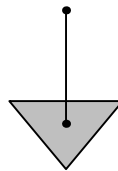


Рис. 15.

В этом результате интересна лишь часть «тогда» и лишь для двумерных полиэдров. Она может быть несложно доказана по следующему плану. Пусть связный 2-полиэдр  $N \not\cong S^2$  не содержит  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  или  $U^2$ . Рассмотрим объединение  $\tilde{N}$  двумерных граней 2-полиэдра  $N$ . Поскольку каждый из графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  вложим и в тор, и в лист Мёбиуса, то  $\tilde{N}$  есть несвязное объединение дисков. Заменим каждый диск на «колесо». Полученный граф планарен. По вложению этого графа в плоскость легко построить вложение полиэдра  $N$  в плоскость. Это доказательство (видимо, являющееся фольклорным) проще представленного в [12] и тем более в [15].

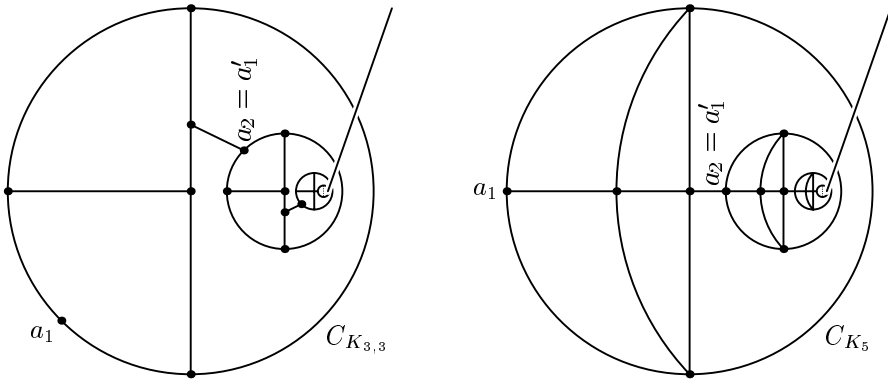


Рис. 16.

В терминах запрещенных подсистем можно также описать «компактно бесконечные графы» (т. е. локально связанные континуумы), вложимые в плоскость. *Континуум* — компактное связное метрическое пространство. Континуумы естественно появляются при изучении динамических систем (даже гладких!). Континуум называется *локально связным* (или континуумом Пеано), если для любых его точки  $x$  и ее окрестности  $U$  существует такая меньшая окрестность  $V$  точки  $x$ , что любые две точки из  $V$  соединяются некоторым путем, целиком лежащим в  $U$  (или, эквивалентно, если он является непрерывным образом дуги). Локально связные континуумы могут быть очень сложно устроены [3]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

**ТЕОРЕМА КЛЭЙТОРА.** *Локально связный континуум вложим в сферу  $S^2$  тогда и только тогда, когда он не содержит континуумов  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $C_{K_5}$  и  $C_{K_{3,3}}$  (рис. 16) [8, 9].*

**ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ КОНТИНУУМОВ  $C_{K_5}$  И  $C_{K_{3,3}}$ .** Возьмем ребро  $ab$  графа  $K_5$  и отметим на нём новую вершину  $a'$ . Пусть  $P = K_5 - (aa')$ . Пусть  $P_n$  копия графа  $P$ . Обозначим через  $a_n$  и  $a'_n$  вершины графа  $P_n$ , соответствующие  $a$  и  $a'$ . Тогда

$$C_{K_5} = (P_1 \bigcup_{a'_1=a_2} P_2 \bigcup_{a'_2=a_3} P_3 \dots) \bigcup_{x=0} I,$$

где  $\{P_n\}$  — последовательность графов на плоскости со стремящимися к нулю диаметрами, сходящаяся к точке  $x \notin \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$ . Точно так же можно определить континуум  $C_{K_{3,3}}$ , взяв вначале  $K_{3,3}$  вместо  $K_5$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕВЛОЖИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ КЛЭЙТОРА.** Докажем невложимость континуума  $C_{K_5}$  (доказательство невложимости континуума  $C_{K_{3,3}}$  аналогично). Пусть, напротив,  $f : C_{K_5} \rightarrow \mathbb{R}^2$  — вложение. Для окружности  $C \subset C_{K_5}$  и подмножества  $X \subset C_{K_5} - C$  обозначим через  $C * X$  утверждение

« $fX$  лежит вне  $fC$ ».

Пусть  $S_n$  — окружность в  $P_n$ , составленная из ребер, не содержащих вершин  $a_n$  и  $a'_n$ . Так как  $S_n$  сходится к  $x = 0$ , то  $S_n * 1$  для достаточно большого  $n$ . Так как  $fI$  — путь между  $f0$  и  $f1$ , лежащий вне  $fS_n$ , то  $S_n * 0$ . Так как  $S_n$  сходится к  $x = 0$ , то  $S_n * S_m$  и  $S_m * S_l$  для достаточно больших  $m < l$ . Но тогда  $S_m * \{a_m, a'_m\}$ , а это противоречит тому факту, что для любого вложения  $g : P \rightarrow \mathbb{R}^2$  точки  $ga$  и  $ga'$  лежат по разные стороны от образа  $gS$ .  $\square$

Отметим, что в теореме Куратовского можно заменить  $\mathbb{R}^2$  на  $S^2$ , а в теореме Маклейна–Эддисона — нет.

Заметим, что не существует конечного списка запрещенных полиэдров для вложимости 2-мерного полиэдра в  $\mathbb{R}^3$  или  $n$ -мерного полиэдра в  $\mathbb{R}^{2n}$ , где  $n \geq 2$  [18]. Поэтому приходится рассматривать другие препятствия к вложимости. Интересно, что одно из самых полезных препятствий строится с помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аносов Д. В. *Отображения окружности, векторные поля и их применения*. М.: МЦНМО, 2003.
- [2] Болтянский В. Г., Ефремович В. А. *Наглядная топология*. М.: Наука, 1982.
- [3] Куратовский К. *Топология*. М.: Мир, 1969. Т. 1, 2.
- [4] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*. М.: Наука, 1990.
- [5] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
- [6] Реповш Д., Скопенков А. *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства* // УМН, 1999. Т. 54, №6. С. 61–109.
- [7] Archdeacon D., Huneke P. *A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces* // J. Comb. Th., Ser. B, 1989. Vol. 46. P. 173–231.
- [8] Claytor S. *Topological immersions of peanian continua in a spherical surface* // Ann. of Math., 1934. Vol. 35. P. 809–835.
- [9] Claytor S. *Peanian continua not embeddable in a spherical surface* // Ann. of Math., 1937. Vol. 38. P. 631–646.
- [10] Epstein D. B. A. *Curves on 2-manifolds and isotopies* // Acta Math., 1966. Vol. 38. P. 83–107.
- [11] Glover H. H., Huneke J. P., Wang C. S. *103 graphs that are irreducible for the projective plane* // J. Comb. Th., 1979. Vol. 27, no 3. P. 332–370.
- [12] Halin R., Jung H. A. *Karakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre* // Arch. Math., 1964. Vol. 15. P. 466–469.

- [13] Kurlin V. A. *Basic embeddings into products of graphs* // Topol. Appl., 2000. Vol 102. P. 113–137.
- [14] Makarychev Yu. *A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion* // J. of Graph Theory, 1997. Vol. 25. P. 129–131.
- [15] Mardešić S., Segal J.  *$\varepsilon$ -mappings and generalized manifolds* // Michigan Math. J., 1967. Vol. 14. P. 171–182.
- [16] McLane S., Adkisson V. W. *Extensions of homeomorphisms on the spheres* // Michig. Lect. Topol. Ann Arbor, 1941. P. 223–230.
- [17] Robertson N., Seymour P. D. *Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces* // J. Comb. Theory, ser. B, 1990. Vol 48. P. 255–288.
- [18] Sarkaria K. S. *Kuratowski complexes* // Topology, 1991. Vol. 30. P. 67–76.
- [19] Skopenkov A. *A description of continua basically embeddable in  $\mathbb{R}^2$*  // Topol. Appl., 1995. Vol. 65. P. 29–48.
- [20] Thomassen C. *Kuratowski's theorem* // J. Graph. Theory, 1981. Vol. 5. P. 225–242.
- [21] Whitney H. *Planar graphs* // Fund. Math., 1933. Vol. 21. P. 73–84.

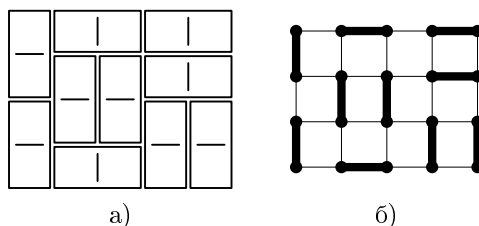
# Пфаффианы или искусство расставлять знаки. . .

М. Н. Вялый\*

В упражнении 7.51 из книги Грэхема, Кнута и Паташника «Конкретная математика» [2] приводится замечательная формула для числа разбиений прямоугольной доски на домино:

$$D_{mn}(v, h) = 2^{mn/2} \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \left( \left( \cos^2 \frac{j\pi}{m+1} \right) v^2 + \left( \cos^2 \frac{k\pi}{n+1} \right) h^2 \right)^{1/4}. \quad (1)$$

Если разложить правую часть этого равенства по степеням  $v, h$ , то коэффициент при  $v^r h^s$  будет равен количеству способов разбиения прямоугольной доски размера  $m \times n$  на домино при условии, что используется  $r$  вертикальных домино и  $s$  горизонтальных. Например, разбиение на рис. 1а вносит в эту сумму вклад  $v^6 h^4$ .



**Рис. 1.** Переход от разбиения на домино к совершенному паросочетанию в графе прямоугольной решетки

Сразу отметим два очевидных следствия из этого утверждения: а)  $D_{mn}(v, h)$  является многочленом от  $v$  и  $h$ ; б)  $D_{mn}(1, 1)$  — целое число (количество способов всех разбиений доски  $m \times n$ ). Увидеть эти свойства  $D_{mn}(v, h)$  непосредственно из формулы (1) не очень просто.

В этой статье приводится доказательство формулы (1) и решение еще одной похожей задачи — о разбиениях на домино *ацтекского алмазда* (см. рис. 6а) на с. 140). Формула (1) и подобные ей были получены в 60-е годы прошлого века при решении задач статистической физики. Несколько позже идеи, придуманные физиками, удалось приспособить для решения многих задач перечислительной комбинаторики. Подробности можно найти в статьях Г. Куперберга [6, 7], которые являются основным источником приводимых ниже рассуждений.

\*Работа поддержана грантами РФФИ №02-01-00716 и №02-01-22001 НЦНИ\_а и грантом поддержки научных школ НШ 1721.2003.1.

Для решения задач о разбиениях на домино мы рассматриваем более общую задачу подсчета числа *совершенных паросочетаний* в графе. Совершенное паросочетание — это такое разбиение множества вершин графа на пары, что каждая пара разбиения связана ребром в графе. Разбиениям на домино взаимно однозначно соответствуют совершенные паросочетания на графе прямоугольной решетки, как можно увидеть на рис. 1.

Задача подсчета числа паросочетаний в произвольном графе трудна<sup>1)</sup>. Удивительным образом оказывается, что эта задача решается намного проще в случае *планарных* графов, т. е. таких графов, которые можно нарисовать на плоскости без пересечений ребер. Граф прямоугольной решетки очевидным образом планарен, что и будет использовано для доказательства формулы (1).

Во второй половине статьи от читателя потребуются знания линейной алгебры. Необходимые сведения можно найти, например, в учебнике Винберга [1].

## 1. ЗНАК ПЕРЕСТАНОВКИ И ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Сначала напомним некоторые хорошо известные факты о перестановках.

*Перестановкой* множества  $\{1, \dots, v\}$  называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Множество всех перестановок обозначим через  $S_v$ . Перестановки можно перемножать, произведение перестановок — это композиция отображений. *Тождественная* перестановка  $\text{id}$  оставляет все элементы на месте. Для каждой перестановки  $\pi$  однозначно определена обратная  $\pi^{-1}$ , для которой выполняется равенство  $\pi \circ \pi^{-1} = \text{id}$  (знаком  $\circ$  будем обозначать произведение перестановок).

Задать перестановку можно, указав ее разложение на циклы:

$$\pi = (a_1^1 a_2^1 \dots a_{k_1}^1)(a_1^2 a_2^2 \dots a_{k_2}^2) \dots (a_1^{c(\pi)} a_2^{c(\pi)} \dots a_{k_{c(\pi)}}^{c(\pi)}). \quad (2)$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически:  $\pi(a_1) = a_2$ ,  $\pi(a_2) = a_3, \dots, \pi(a_k) = a_1$ . Разложение на циклы определено с точностью до циклических сдвигов чисел внутри скобок. Это легко понять, если проследить за *орбитой* числа, т. е. образами числа при последовательных применениях  $\pi$ . Циклы длины 1, т. е. неподвижные точки перестановки, при записи в виде произведения циклов обычно пропускаются.

*Знак*  $\text{sgn}(\pi)$  перестановки  $\pi$  — это число  $(-1)^{n+k}$ , где  $n$  — число элементов,  $k$  — число циклов, включая циклы длины 1. Перестановка называется *четной*, если ее знак равен +1, в противном случае она называется *нечетной*.

Перестановки  $(jk)$ , меняющие местами пару чисел  $j$  и  $k$ , называются *транспозициями*. Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций, хотя и неоднозначно. Легко проверить, что умножение перестановки на транспозицию  $(jk)$  меняет количество циклов на 1: увеличивает, если  $j$  и  $k$  входят в один цикл; уменьшает, если  $j$  и  $k$  входят в разные циклы. Отсюда получаем следующую полезную лемму.

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что эта задача  $\#P$ -полна. Определение класса  $\#P$  можно найти в книге Гэри и Джонсона [3] (где для этого класса используется устаревшее обозначение  $KP$ ).  $\#P$ -полноту этой задачи доказал Л. Вэлиант [9].

ЛЕММА 1. Четность числа транспозиций одинакова для всех разложений данной перестановки в произведение транспозиций.

Таким образом, при перемножении перестановок их знаки тоже перемножаются:

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (3)$$

Приведем еще несколько характеристик четности перестановки. Читателю рекомендуется самостоятельно проверить следующие утверждения.

1. *Инверсия* перестановки  $\pi$  — это такая пара  $(j, k)$ , что  $j < k$ , а  $\pi(j) > \pi(k)$ . Четность перестановки совпадает с четностью числа инверсий.
2. Четность перестановки совпадает с четностью числа циклов четной длины.
3. Четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней перестановки.

Пусть теперь  $v$  четно. *Совершенным паросочетанием* на множестве  $\{1, \dots, v\}$  назовем разбиение этого множества на пары (слово «совершенный» иногда будем опускать). Множество всех паросочетаний на множестве  $\{1, \dots, v\}$  обозначим  $P_v$ . Паросочетания естественно отождествляются с *инволюциями без неподвижных точек*, т. е. такими перестановками, которые разлагаются на циклы длины 2. Знак любой такой перестановки равен  $(-1)^{v/2}$ . Чтобы определить знаки для паросочетаний нетривиальным образом, требуется дополнительная структура.

Рассмотрим сначала *ориентированные паросочетания*, т. е. разбиения множества  $\{1, \dots, v\}$  на упорядоченные пары (в каждой паре известно, какая из вершин является первой). Перенумерация определяет *действие* перестановок на множестве ориентированных паросочетаний:

$$\pi((p_1, p_2), \dots, (p_{v-1}, p_v)) = ((\pi(p_1), \pi(p_2)), \dots, (\pi(p_{v-1}), \pi(p_v))). \quad (4)$$

Пусть перестановка  $\pi$  переводит какое-то ориентированное паросочетание в себя. Тогда  $\pi$  разлагается в произведение перестановок, меняющих местами первые и вторые вершины. Четность этих перестановок одинакова, так как они разлагаются на одинаковое количество циклов. Поэтому  $\pi$  четна.

Отсюда следует, что четность перестановок, переводящих одно ориентированное паросочетание в другое, одинакова: если  $\pi, \sigma$  — две такие перестановки, то  $\pi\sigma^{-1}$  переводит исходную перестановку в себя.

Поскольку знак произведения перестановок равен произведению знаков, корректно следующее определение.

*Два ориентированных паросочетания имеют одинаковые знаки, если одно переводится в другое четной перестановкой; разные знаки, если одно переводится в другое нечетной перестановкой.*

Мы определили лишь отношение знаков двух ориентированных паросочетаний. Если нужно однозначно определить знаки, достаточно выбрать какое-то ориентированное паросочетание и приписать ему знак «+». Обычно полагают, что паросочетание  $(1, 2)(3, 4) \dots ((v-1), v)$  имеет знак «+».

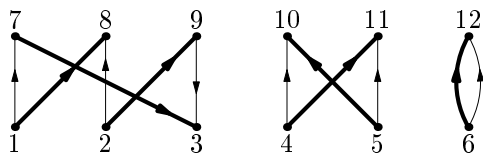


Рис. 2. Пример паросочетаний разного знака

Чтобы приписать знаки (неориентированным) паросочетаниям, зададим *ориентацию* на парах чисел, т. е. для каждой пары чисел укажем, какое из чисел является первым в этой паре. Тогда каждому паросочетанию однозначно соответствует ориентированное паросочетание с теми же парами вершин.

Пусть задана ориентация и два паросочетания  $p, q$ . Возьмем  $v$  точек и пронумеруем их числами  $1, 2, \dots, v$ . Пары, входящие в паросочетание  $p$ , соединим тонкими линиями, а пары, входящие в  $q$ , — жирными. Нарисуем ориентации: поставим стрелки, ведущие от первой вершины в паре ко второй (см. пример на рис. 2). Из каждой точки выходит ровно две линии, так что получили набор циклов четной длины.

Пусть  $a$  — общее количество ребер, ориентированных по циклу, а  $b$  — ориентированных против. Для циклов четной длины четность  $a$  и  $b$  одинакова. Число  $(-1)^{1+b}$  будем называть *знаком цикла*  $F$  и обозначать  $s(F)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Заметим, что знак цикла определен не только для циклов четной длины. Для циклов нечетной длины  $s(F) = (-1)^{1+b} = (-1)^a$  и знак цикла зависит от направления обхода цикла.

**ЛЕММА 2.** Знаки паросочетаний различаются на произведение знаков циклов, образованных этими паросочетаниями.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Получим одно паросочетание из другого в два приема. Вначале применим перестановку, сдвигающую числа вдоль циклов, образованных паросочетаниями. Четность этой перестановки совпадает с четностью количества циклов. Теперь согласуем ориентации с помощью транспозиций чисел, входящих в пары второго паросочетания. Четность количества требуемых транспозиций совпадает с четностью числа ребер, ориентированных по циклам.

Итак, четность перестановки, переводящей одно (ориентированное) паросочетание в другое, равна суммарной четности количества циклов и количества ребер, ориентированных по циклам. Но это и есть произведение знаков циклов.

## 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ И ПФАФФИАН

Естественные определения определителя и пфаффиана даются на языке линейной алгебры (см., например, [1]). Мы ограничимся здесь элементарными определениями, которые всё равно нам потребуются.

Рассмотрим матрицу  $A$  размера  $v \times v$ , в  $j$ -й строке и  $k$ -м столбце которой находится переменная  $a_{jk}$ . *Определитель*  $A$  по определению равен

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^v a_{k, \pi(k)}. \quad (5)$$

В формулу (5) входит  $v!$  слагаемых. Однако, чтобы вычислить значение определителя, не нужно делать так много операций. Хорошо известный метод исключения Гаусса позволяет найти значение определителя  $(v \times v)$ -матрицы за  $O(v^3)$  арифметических операций.

Далее считаем  $v$  четным. Рассмотрим *кососимметричную* матрицу  $A$  размера  $v \times v$ , т. е. матрицу, для которой  $a_{j,k} = -a_{k,j}$ . Нам будет удобно выделить в кососимметричной матрице «знаки» и «абсолютные величины». Сделаем это так. Введем переменные  $a_{(jk)}$ , зависящие от неупорядоченной пары индексов, и некоторую ориентацию. По ориентации построим кососимметричную матрицу  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_{jk} = 1$ , если в паре  $(j, k)$  первой является вершина  $j$ ;  $\varepsilon_{jk} = -1$ , если первой является вершина  $k$ ; по диагонали стоят нули:  $\varepsilon_{kk} = 0$ .

Теперь полагаем  $a_{j,k} = a_{(jk)} \varepsilon_{jk}$ .

*Пфаффиан*  $A$  равен

$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_{p \in P_v} \varepsilon(p) \tilde{A}(p), \quad (6)$$

где  $\tilde{A}(p)$  — произведение  $a_{(jk)}$  по всем парам  $(jk)$ , входящим в паросочетание  $p$ , а  $\varepsilon(p)$  — знак паросочетания  $p$  относительно ориентации  $\varepsilon$ .

Имеет место соотношение:

$$\det A = (\operatorname{Pf} A)^2. \quad (7)$$

Из него следует, что вычисление пфаффиана не сложнее вычисления определителя.<sup>2)</sup>

Формулу (7) проще доказать «по-научному», используя более осмысленные определения определителя и пфаффиана. Однако элементарное доказательство в стиле «раскроем скобки и приведем подобные», хотя и более громоздкое, также весьма поучительно. Его идея (взятая из [6]) состоит в том, что перестановки с циклами нечетной длины дают нулевой вклад в определитель кососимметричной матрицы, а перестановки с циклами четной длины естественно отождествляются с парами паросочетаний. При этом знаки согласуются.

Разберем это рассуждение подробнее. Слагаемые в формуле (5), по которой вычисляется значение определителя, разделим на три группы:

- A: содержащие неподвижную точку (т. е. цикл длины 1);
- B: не содержащие неподвижных точек, но содержащие цикл нечетной длины;
- C: состоящие только из циклов четной длины.

---

<sup>2)</sup> Можно быстро вычислять и определитель, и пфаффиан, без использования не только операции извлечения квадратного корня, но даже и операции деления. См. [8].

Запишем слагаемые, составляющие определитель, через ориентации и симметричные переменные  $a_{(jk)}$ . Получаем равенство

$$\operatorname{sgn}(\pi)A(\pi) = \prod_F s(F)A(F), \quad (8)$$

где произведение берется по циклам перестановки  $\pi$ , а  $A(F)$  — произведение  $a_{(jk)}$  вдоль цикла  $F$ .

Слагаемые из группы А равны 0, так как  $a_{jj} = -a_{jj} = 0$  по определению кососимметричной матрицы.

Слагаемые из группы В можно разбить на пары с противоположными значениями, так что их общий вклад в определитель равен 0. Чтобы описать такое разбиение на пары, выделим в перестановке цикл нечетной длины, который содержит наименьшее из чисел, входящих в циклы нечетной длины. Назовем этот цикл минимальным нечетным. Изменение направления обхода минимального нечетного цикла задает требуемое разбиение слагаемых на пары. В силу (8) эти слагаемые имеют противоположные значения.

Теперь перейдем к слагаемым из группы С. Сопоставим перестановкам, состоящим из циклов четной длины, упорядоченные пары паросочетаний. Циклу  $(a_1 \dots a_{2k})$  сопоставим паросочетания  $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$  и  $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2k}, a_1)$ . Как их упорядочить? Будем считать, что  $a_1$  — наименьшее из чисел  $a_1, \dots, a_{2k}$ , а паросочетание, в которое входит  $(a_1, a_2)$ , — первое. Это определение неприменимо к циклу длины 2, но в этом случае паросочетания совпадают и потому их порядок неважен.

Итак, мы сократили часть слагаемых в левой части равенства (7), а остальным взаимно однозначно сопоставили какие-то слагаемые в правой части (7) (разумеется, после раскрытия скобок). Описанное выше соответствие гарантирует, что соответствующие слагаемые содержат одни и те же переменные  $a_{(jk)}$ , причем в одинаковой степени. А знаки у соответствующих слагаемых совпадают по правилу определения знака паросочетания и в силу формулы (8).

### 3. ПАРОСОЧЕТАНИЯ В ПЛОСКОМ ГРАФЕ

Попробуем вычислить количество совершенных паросочетаний в графе, используя пфаффиан. Для этого занумеруем вершины графа и ориентируем его ребра, после чего сопоставим графу *ориентированную матрицу смежности*:  $A_{j,k} = \pm 1$ , если пара  $(jk)$  является ребром графа (знак определяется ориентацией);  $A_{j,k} = 0$ , если пара  $(jk)$  не является ребром графа. Пфаффиан такой матрицы равен сумме знаков совершенных паросочетаний графа.

Граф назовем *пфаффовым*, если существует ориентация его ребер, относительно которой знаки всех паросочетаний в этом графе равны. (Такую ориентацию будем называть *пфаффовой*.) Поэтому число совершенных паросочетаний в пфаффовом графе совпадает с точностью до знака с пфаффианом (т. е. квадратным корнем из определителя) ориентированной матрицы смежности.

Важным частным случаем пфаффовых графов, с которого и началась вся эта теория, являются планарные графы.<sup>3)</sup> *Планарный* граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы линии, изображающие его рёбра, не пересекались (естественно, за исключением концов). Саму картинку, изображающую граф указанным выше способом, будем называть *плоским графом*. *Грань* плоского графа — это цикл, внутри которого не лежит ни одной вершины. *Бесконечная грань* — это цикл, вне которого не лежит ни одной вершины.

**ТЕОРЕМА 1.** Плоский граф является пфаффовым.

Прежде чем доказывать теорему 1, сделаем несколько упрощающих замечаний и докажем две леммы.

Заметим, что отношение знаков паросочетаний определяется знаками циклов. Поэтому достаточно рассмотреть только связанные плоские графы без мостов. (*Мост* — это ребро графа, через которое не проходит ни одного цикла. Ориентации мостов не влияют на знаки паросочетаний.) Если в плоском связанном графе нет мостов, то каждое его ребро смежно в точности с двумя гранями (конечными или бесконечной).

**ЛЕММА 3.** Пусть в ориентированном плоском связанном графе без мостов  $n$  внутренних вершин (не лежащих на бесконечной грани). Тогда знак бесконечной грани равен произведению знаков конечных граней, умноженному на  $(-1)^n$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Фиксируем направление обхода против часовой стрелки. Каждое ребро, не входящее в бесконечную грань, обходится в противоположных направлениях при обходах смежных с ним граней. Поэтому вклад в произведение ориентаций от такого ребра всегда равен  $-1$ . Пусть в графе  $m$  ребер на бесконечной грани,  $k$  внутренних ребер и  $f$  конечных граней.

Произведение знаков конечных граней равно  $(-1)^{k+f}a$ , где  $a$  — произведение ориентаций ребер вдоль бесконечной грани. Знак бесконечной грани равен  $-a$ . По теореме Эйлера

$$(n + m) - (m + k) + (f + 1) = 2,$$

поэтому

$$-a = (-1)^{n-k+f}a = (-1)^n(-1)^{k+f}a, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

**ЛЕММА 4.** Существует ориентация плоского связанного графа без мостов и с четным числом вершин, относительно которой знаки всех граней равны  $+1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Лемму проще доказать, переходя к двойственному графу. Напомним построение двойственного графа. В каждой грани исходного графа лежит ровно одна вершина двойственного графа, вершины двойственного графа соединим ребром, пересекающим ребро исходного графа, которое смежно обоим граням, соответствующим выбранным вершинам (а если такого ребра нет, не будем соединять вершины ребром).

<sup>3)</sup>По-видимому, теорему 1 впервые сформулировал и доказал П. Кастелейн [5].

По ориентации графа можно построить ориентацию двойственного графа: потребуем, чтобы кратчайший поворот от ориентированного ребра исходного графа к ориентированному ребру двойственного происходил против часовой стрелки.

Посмотрев на рис. 3, легко понять, что после перехода к двойственному графу утверждение леммы звучит так: в связном плоском графе, имеющем четное число граней, можно так ориентировать рёбра, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер. Докажем это последнее утверждение.

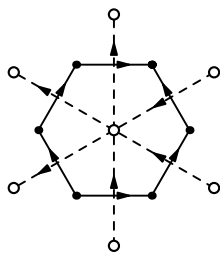


Рис. 3.

Возьмем произвольную ориентацию. Поскольку граней — четное количество, в силу теоремы Эйлера четность числа вершин и четность числа ребер совпадают. Пусть  $v_0, v_1$  — количество вершин, из которых выходит соответственно четное или нечетное количество ребер. Тогда  $v_0 + v_1 = e = v_1 \pmod{2}$ , т. е.  $v_0$  — четно. Разобьем все вершины, из которых выходит четное количество ребер, на пары и соединим каждую пару путем в графе. Поменяем ориентации ребер вдоль всех выбранных путей. Четность количества выходящих ребер в промежуточных вершинах не изменится (поскольку меняется у четного числа ребер), а конечных — изменится. Получаем искомую ориентацию.

Ориентацию, относительно которой знаки всех граней положительны, назовем *однородной*. Лемма 4 гарантирует существование однородной ориентации для плоского графа. Мы завершим доказательство теоремы 1, если докажем, что однородная ориентация плоского графа является пфафовой. Для этого используем лемму 3.

Ориентацию, относительно которой знаки всех граней положительны, назовем *однородной*. Лемма 4 гарантирует существование однородной ориентации для плоского графа. Мы завершим доказательство теоремы 1, если докажем, что однородная ориентация плоского графа является пфафовой. Для этого используем лемму 3.

Итак, пусть паросочетания в плоском связном графе различаются на циклы  $F_1, \dots, F_m$ . Внутри каждого такого цикла находится четное количество вершин (они ведь разбиты на пары паросочетанием), поэтому в силу леммы 3 знаки этих паросочетаний относительно однородной ориентации совпадают.

Теорема 1 доказана.

#### 4. ПОДСЧЕТ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Применим теорему 1 к исходной задаче подсчета паросочетаний в прямоугольной решетке. Прежде всего нужно указать какую-нибудь однородную ориентацию (она, как было доказано, является пфафовой). На рис. 4 указана однородная ориентация, которую мы будем использовать.

Теперь нужно составить ориентированную матрицу смежности размера  $tn \times tn$ , используя указанную ориентацию, затем вычислить ее определитель и извлечь из него квадратный корень. Полученное число и даст количество паросочетаний.

Многочлен  $\det(\lambda I - A)$  называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Его степень равна размеру матрицы  $n$ , так что есть ровно  $n$  комплексных

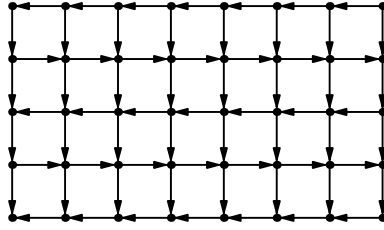


Рис. 4.

корней характеристического многочлена (с учетом кратности). Корни характеристического многочлена являются *собственными числами* матрицы  $A$ . Из теоремы Виета получаем, что определитель — это произведение собственных чисел.

Ориентированную матрицу смежности квадратной решетки  $m \times n$ , определяемую ориентацией на рис. 4, обозначим через  $A_{m,n}$ . Ее определитель мы будем выражать через произведение собственных чисел. Рассмотрим тензорное произведение  $m$ -мерного пространства, в котором выделен базис  $e_1, \dots, e_m$ , и  $n$ -мерного пространства, в котором выделен базис  $f_1, \dots, f_n$ . Первый сомножитель отвечает строкам решетки, а второй — столбцам. Будем рассматривать  $A_{m,n}$  как матрицу линейного оператора в базисе  $e_j \otimes f_k$ . Сверившись с рис. 4, действие этого оператора можно записать как

$$A_{m,n}: e_j \otimes f_k \mapsto H_m e_j \otimes f_k + (-1)^j e_j \otimes H_n f_k, \tag{10}$$

где  $H_d = -A_{1,d}$ , т. е. оператор, соответствующий матрице  $d$ -цепочки, см. рис. 5. Оператор, действующий по правилу  $e_j \mapsto (-1)^j e_j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , обозначим через  $P_d$ .

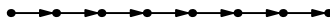


Рис. 5.

Из (10) и линейности операторов получим формулу для действия  $A_{m,n}$  на разложимом элементе (представимом в виде тензорного произведения векторов):

$$A_{m,n}: x \otimes y \mapsto H_m x \otimes y + P_n x \otimes H_n y. \tag{11}$$

Заметим, что  $P_d^2 = I$  (тождественный оператор), а  $P_d H_d + H_d P_d = 0$ , так как  $H$  меняет четность индекса у базисных векторов  $e_j$ . Поэтому

$$A_{m,n}^2: x \otimes y \mapsto H_m^2 x \otimes y + x \otimes H_n^2 y. \tag{12}$$

Оператор  $H_n^2$  — эрмитов, его собственные числа обозначим  $\lambda_{n,k}^2$ . Если  $y_k$  — собственный вектор  $H_n^2$  с собственным числом  $\lambda_{n,k}^2$ , то

$$A_{m,n}^2: x \otimes y_k \mapsto (H_m^2 + \lambda_{n,k}^2 I)x \otimes y_k. \tag{13}$$

Из (13) получаем, что собственные вектора  $A_{m,n}^2$  имеют вид  $x_j \otimes y_k$ , где  $y_k$  — собственный вектор  $H_n^2$  с собственным числом  $\lambda_{n,k}^2$ , а  $x_j$  — собственный вектор

$H_m^2$  с собственным числом  $\lambda_{m,j}^2$ . Собственные числа  $A_{m,n}^2$  равны

$$\lambda_{m,j}^2 + \lambda_{n,k}^2, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (14)$$

что уже напоминает искомую формулу (1). Определитель матрицы  $A_{m,n}$  равен произведению квадратных корней из всех этих чисел. Извлечение квадратного корня делает неопределенными знаки множителей. Однако мы знаем, что определитель должен быть неотрицательным целым числом (квадратом пфаффиана).

Осталось найти собственные числа операторов  $H_n$ . Для этого вычислим характеристический многочлен ориентированной матрицы смежности простой цепочки

$$C_n(\lambda) = \left. \begin{array}{cccccc} \lambda & -1 & 0 & \dots & & \\ 1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & \lambda & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} n \text{ строк}. \quad (15)$$

Разложим определитель по первой строке, а затем по первому столбцу. Получаем рекуррентное соотношение:

$$C_n(\lambda) = \lambda C_{n-1}(\lambda) + C_{n-2}(\lambda). \quad (16)$$

Начало этой последовательности многочленов находится прямым вычислением:

$$C_1(\lambda) = \lambda, \quad C_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1. \quad (17)$$

Остальные члены последовательности можно выразить через многочлены Чебышёва второго рода, определяемые соотношением

$$U_n(\cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad (18)$$

которое, как легко проверяется, эквивалентно следующей рекуррентности

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad U_1(x) = 1, \quad U_2(x) = 2x. \quad (19)$$

Докажем, что

$$C_n(\lambda) = i^n U_{n+1}\left(-\frac{i\lambda}{2}\right). \quad (20)$$

В вычислениях полагаем  $-i\lambda = 2x$ . Проверим совпадение начальных членов и по индукции эквивалентность рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \lambda = i2x = iU_2(x), \\ C_2(\lambda) &= \lambda^2 + 1 = -((-i\lambda)^2 - 1) = i^2(4x^2 - 1) = i^2U_3(x), \\ C_n(\lambda) &= \lambda C_{n-1}(\lambda) + C_{n-2}(\lambda) = \\ &= i^n (-i\lambda U_n(x) - U_{n-1}(x)) = i^n U_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Корни многочлена Чебышёва  $U_{n+1}(x)$  равны  $\cos \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Поэтому корни многочлена  $C_n(\lambda)$  равны

$$\lambda_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Объединяя (14) и (21), получаем собственные числа оператора  $A_{m,n}^2$ :

$$-4 \left( \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (22)$$

Таким образом и приходим к формуле (1).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Внимательный читатель обратил внимание на неточность в последней фразе. Формула (1) утверждает больше, она дает производящую функцию для числа разбиений по количеству горизонтальных и вертикальных домино. На самом деле, эта формула получается совершенно аналогичными рассуждениями. Нужно приписать вертикальным ребрам вес  $v$ , горизонтальным — вес  $h$ , а вместо оператора  $A_{m,n}$  рассмотреть оператор  $\tilde{A}_{m,n}$ , который действует по правилу:

$$\tilde{A}_{m,n}: e_j \otimes f_k \mapsto v H_m e_j \otimes f_k + (-1)^j e_j \otimes h H_n f_k. \quad (23)$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично: доказываем, что собственные значения оператора  $\tilde{A}_{m,n}^2$  равны

$$v^2 \lambda_{m,j}^2 + h^2 \lambda_{n,k}^2. \quad (24)$$

## 5. ЕЩЕ ОДИН ПРИМЕР: АЦТЕКСКИЙ ДИАМАНТ

Описанный выше способ подсчета числа паросочетаний в плоском графе активно используется в перечислительной комбинаторике. Заинтересованный читатель может узнать подробности в статьях [4, 6, 7], там же можно найти более подробную библиографию.

Мы ограничимся всего одним дополнительным примером: подсчетом числа разбиений на домино *ацтекского диаманта* (см. рис. 6а). Этой задаче посвящена отдельная статья [4] в этом сборнике. Интересно сравнить чисто комбинаторное решение в [4] с вычислением определителя, приводимым ниже (это вычисление взято из статьи Г. Куперберга [7]).

Ацтекский диамант 4-го порядка изображен на рис. 6а). У диаманта  $n$ -го порядка по  $2n$  вертикальных и горизонтальных рядов клеток, а всего клеток  $2n(n+1)$ . Аналогично прямоугольной доске мы рассмотрим граф соседства клеток. Это тоже плоский граф, поэтому у него есть пфаффовы ориентации. Для вычисления нам будет удобно использовать ориентацию, изображенную на рис. 6б). Вершины графа диаманта раскрасим в шахматном порядке в черный и белый цвет. На рисунке видно, что все горизонтальные рёбра ориентированы слева направо, а вертикальные — от черной вершины к белой. Пфаффовость такой ориентации проверяется легко: у каждого квадрата есть пара сопоставленных горизонтальных сторон и пара противонаправленных вертикальных сторон.

Мы воспользуемся шахматной раскраской еще и для того, чтобы упростить вычисление. Заметим, что эта раскраска — правильная, т. е. рёбра соединяют

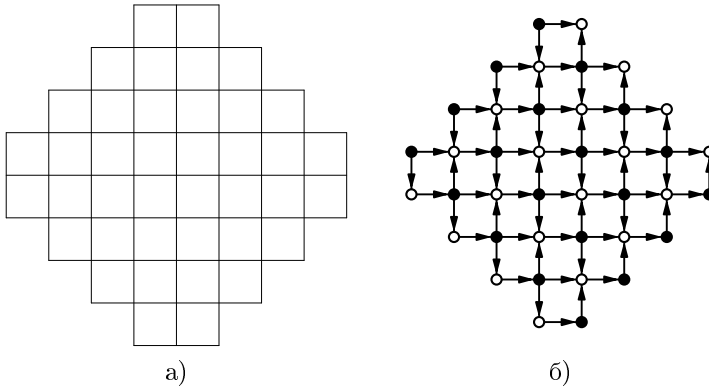


Рис. 6.

вершины разных цветов. Поэтому ориентированная матрица смежности этого графа имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

здесь первая половина строк и столбцов отвечает черным вершинам, а вторая — белым. Несложная проверка показывает, что  $\det A = (\det M)^2 = (\text{Pf } A)^2$ . Поэтому искомое число есть  $|\det M|$ .

Отличные от нуля элементы матрицы  $M$  равны  $\pm 1$ . Расстановку знаков изображает рис. 7а), на котором  $+1$  изображаются сплошными линиями, а  $-1$  — штриховыми.  $M$  — это матрица линейного преобразования пространства, базис которого индексирован белыми точками, в пространство, базис которого индексирован черными точками. Как видно на рис. 7а), и те, и другие образуют прямоугольники размеров  $(n + 1) \times n$  и  $n \times (n + 1)$  соответственно. Обозначим

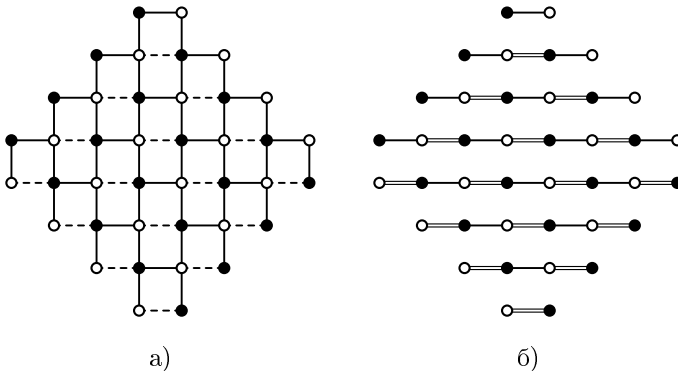


Рис. 7.

через  $V^n$  пространство с базисом  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ , а через  $V^{n+1}$  — пространство с базисом  $\{e_0, \dots, e_n\}$ . Из белых вершин выходят рёбра в четырех направлениях. Если считать, что  $M$  отображает  $V^{n+1} \otimes V^n$  в  $V^n \otimes V^{n+1}$ , то его можно записать в виде следующей суммы, где каждое слагаемое отвечает сонаправленным ребрам:

$$M = -L \otimes L^T + L \otimes R^T + R \otimes R^T + R \otimes L^T. \quad (26)$$

Здесь  $L, R$  — матрицы преобразований, задаваемых следующими правилами:  $Le_n = 0, Le_j = e_j$  при  $0 \leq j \leq n-1, Re_0 = 0, Re_j = e_{j-1}$  при  $1 \leq j \leq n$ ; а  $X^T$  обозначает транспонированную матрицу.

Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц. Умножением на подходящие матрицы упростим вычисление определителя  $M$ . Эти матрицы получаются из матриц биномиальных коэффициентов  $B(n)$ , элементы которых равны

$$B(n)_{jk} = \binom{j}{k} \quad (0 \leq j, k < n), \quad \binom{j}{k} = 0 \text{ при } j < k. \quad (27)$$

Матрицы  $B(n)$  — нижнетреугольные с единицами на главной диагонали, поэтому их определители равны 1.

Равенства

$$\begin{aligned} B(n)L &= LB(n+1), & \text{т. е. } B(n)LB(n+1)^{-1} &= L, \\ B(n)R + LB(n+1) &= RB(n+1), & \text{т. е. } B(n)RB(n+1)^{-1} &= R - L, \end{aligned}$$

проверяются непосредственным вычислением с использованием основного тождества для биномиальных коэффициентов

$$\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} = \binom{j+1}{k}.$$

С помощью этих равенств можно проверить, что

$$\begin{aligned} (B(n) \otimes (B(n+1)^{-1})^T) M (B(n+1)^{-1} \otimes B(n)^T) &= \\ = -L \otimes L^T + L \otimes (R-L)^T + (R-L) \otimes (R-L)^T + (R-L) \otimes L^T &= \\ = R \otimes R^T - 2L \otimes L^T. \end{aligned} \quad (28)$$

Структуру матрицы  $R \otimes R^T - 2L \otimes L^T$  можно увидеть на рис. 76), где  $+1$  обозначены одинарными ребрами, а  $-2$  — двойными. Видно, что матрица распалась на несколько блоков. Преобразования внутри каждого блока задаются нижнетреугольными матрицами. На главной диагонали блока из верхней половины стоят  $+1$ , а на главной диагонали блока из нижней половины стоят  $-2$ . Определитель матрицы равен произведению определителей блоков. Окончательно получаем:

$$|\det M| = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}. \quad (29)$$

Это и есть число разбиений ацтекского алмазда на домино.

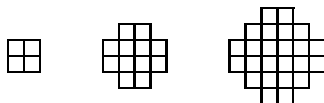
## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


- [1] Винберг Э. Б. *Курс алгебры*. М.: Факториал, 1999.
- [2] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика*. М.: Мир, 1998.
- [3] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. М.: Мир, 1982.
- [4] Кохась К. П. *Разбиения на домино* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005. С. 143–163.
- [5] Kasteleyn P. W. *The statistics of dimers on a lattice* // Physica, 1961. V. 27. P. 1209–1225.
- [6] Kuperberg G. *An exploration of the permanent – determinant method*. E-print, LANL archive. math.CO/9810091. 1998.
- [7] Kuperberg G. *Kasteleyn cokernels*. E-print, LANL archive. math.CO/0108150. 2002.
- [8] Rote G. *Division-free algorithms for the determinant and the pfaffian: algebraic and combinatorial Approaches*. In: Computational Discrete Mathematics (ed. H. Alt), LNCS 2122, pp. 119–135, 2001. Springer-Verlag, 2001.
- [9] Valiant L. G. *The complexity of computing the permanent* // Theoretical Computer Science. 1979. V. 8. P. 189–201.

# Разбиения на домино

К. П. Кохась\*

Мы приведем несколько фактов о разбиении клетчатых фигур на домино и дадим комбинаторные доказательства этих фактов. Больше всего нас интересуют количества разбиений на домино прямоугольников и ацтекских диамантов. Ацтекский диамант ранга  $n$  — это «клетчатый ромбик» со стороной  $n$ . На рисунке ниже изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3. Ацтекский диамант ранга 4 можно увидеть на рис. 6а, с. 140.



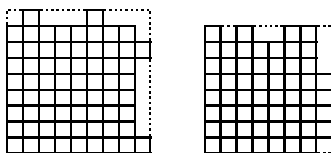
Количество разбиений данной фигуры на домино будем изображать пиктограммой данной фигуры, с символом «#» перед ней. Например, #  = 2.

Статья написана во многом благодаря XVI Летней конференции турнира городов, где автор представлял задачу о разбиениях клетчатых фигур на домино вместе с С. Берловым, И. Богдановым и К. Куюмжиян, которым он очень благодарен за дружеские советы и ценные замечания.

## 1. ТЕОРИЯ ДЕТАЛЕЙ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Будем называть *n-деталью* квадрат  $n \times n$ , у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки верхнего или правого края. Пронумеруем строки  $n$ -детали числами  $1, 2, \dots, n$  снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца. Будем называть  $n$ -деталь *правильной*, если из пары клеток  $(n, i)$  и  $(i, n)$  при  $i < n$  вырезана ровно одна, а также вырезана клетка  $(n, n)$ .

На рисунке в качестве примера изображена неправильная 9-деталь и правильная 8-деталь.



\*Поддержано грантом НШ-2251.2003.1

Клетки правого столбца и верхней строки квадрата  $n \times n$  назовем каемкой. Все клетки каемки, кроме правого верхнего угла (назовем его угловой клеткой), можно разбить на пары симметричных относительно диагонали квадрата.

**ТЕОРЕМА 1.** *Количество разбиений  $n$ -детали на домино нечетно тогда и только тогда, когда деталь — правильная.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Индукция по  $n$ . База  $n = 2$  очевидна. Докажем переход.

Рассмотрим сначала правильную  $(n + 1)$ -деталь  $D$ . Вырежем из нее доминошки, покрывающие клетки каемки. В результате получится  $n$ -деталь, которая будет правильной только в том случае, если каждая из вырезанных доминошек содержала ровно одну клетку каемки. Заметим, что такой способ покрыть клетки каемки детали  $D$  доминошками единственен. Итак, среди всех способов покрытия каемки детали  $D$  доминошками только один способ приводит (после удаления этих доминошек) к правильной  $n$ -детали, а остальные способы приводят к неправильным  $n$ -деталю. Применяя предположение индукции, заключаем, что число способов разбить правильную  $(n + 1)$ -деталь на домино нечетно.

Пусть теперь  $D$  — неправильная  $(n + 1)$ -деталь. Из предыдущих рассуждений следует, что количество разбиений  $(n + 1)$ -детали на домино нечетно тогда и только тогда, когда удалением доминошек, лежащих *внутри* каемки, из нее можно получить нечетное количество правильных  $(n + 1)$ -деталю. Рассмотрим несколько доминошек, целиком лежащих внутри каемки неправильной детали  $D$ . Пусть после их удаления из детали  $D$  получится правильная. Тогда, так как правильная деталь содержит ровно одну клетку из каждой пары клеток, симметричных относительно диагонали квадрата, каемка детали  $D$  содержит клетки, симметричные всем вырезанным из нее доминошкам. Но тогда можно вырезать из каемки  $D$  доминошки, симметричные вырезанным в первом способе, и получится *другая* правильная деталь. Таким образом, вырезая из каемки неправильной детали доминошки, можно получить четное количество правильных деталю. Значит, количество разбиений неправильной  $(n + 1)$ -детали на домино четно. Индукционный переход доказан.  $\square$

Определение детали и критерий четности числа разбиений детали на домино изобрел Д. В. Карпов в 1997 г. в неопубликованной работе [2] (частично ее результаты опубликованы в [1]). Ему же принадлежит доказательство критерия четности числа разбиений прямоугольника на домино (теорема 2 ниже) с помощью деталю. Сам этот критерий, видимо, стал известен незадолго до работы Д. В. Карпова, например, он упоминается в [10], как проблема, ожидающая комбинаторного доказательства.

**ТЕОРЕМА 2.** *Количество разбиений прямоугольника  $m \times n$  на домино нечетно тогда и только тогда, когда числа  $m + 1$  и  $n + 1$  взаимно просты.*

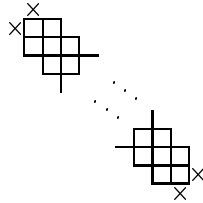
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Индукция, реализующая алгоритм Евклида. Пусть  $m > n$ . Рассмотрим линию сетки — «ось», которая отсекает от прямоугольника квадрат  $n \times n$ . Удалим все доминошки, которые она пересекает. Тогда оставшаяся часть квадрата  $n \times n$ , очевидно, является деталю. Достаточно разобрать

случай, когда эта деталь правильная. В этом случае ось пересекает ровно  $n$  доминошек, наша деталь — это прямоугольник  $n \times (n - 1)$ , а вторая часть — это прямоугольник  $(n - 1) \times n$ , для которого выполнено индукционное предположение.  $\square$

## 2. ТЕОРИЯ «ФЛИПОВ»

Мы начнем с несложной леммы.

**ЛЕММА 1 (О ДИАГОНАЛИ).** Пусть дана фигура, которая содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, как показано на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.



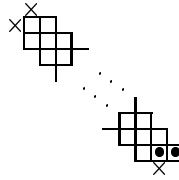
Тогда количество разбиений такой фигуры на доминошки чётно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Докажем, что найдется квадрат  $2 \times 2$ , состоящий из двух доминошек замощения и содержащий две клетки этого диагонального ряда (переставляя доминошки в таком квадрате, мы легко разобьем множество разбиений на пары). Действительно, если такого квадрата не найдется, то, просматривая этот ряд клеток, начиная с верхнего левого угла, мы видим, что каждая очередная доминошка, накрывающая диагональную клетку, должна накрывать также либо клетку справа, либо клетку снизу. Дойдя до правого нижнего угла, получаем противоречие.  $\square$

В качестве приложения докажем, например, что количество разбиений квадрата  $2n \times 2n$  на домино делится на 4. Действительно, отметим в каждом разбиении на домино самый нижний диагональный квадрат  $2 \times 2$ . Для каждого возможного положения диагонального квадрата, количество разбиений, содержащих как раз на этом месте отмеченный диагональный квадрат  $2 \times 2$ , чётно — осевая симметрия относительно всё той же диагонали разбивает множество таких разбиений на пары. Кроме того мы можем выбирать, каким из двух способов разбит на доминошки диагональный квадрат. Поэтому общее число разбиений делится на 4.

Докажем еще одну полезную лемму.

**ЛЕММА 2 (О ПОЛУДИАГОНАЛИ).** Пусть дана фигура, которая содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, показанных на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.



Если удалить из такой фигуры доминошку, помеченную жирными кружочками, то у оставшейся фигуры количество разбиений на домино будет иметь ту же четность, что и у исходной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Рассуждая как и в лемме о диагонали, мы либо найдем диагональный квадрат  $2 \times 2$  (множество разбиений, содержащих такой квадрат, автоматически распадается на пары), либо убедимся, что последняя доминошка в этом ряду как раз накрывает две отмеченные клетки.  $\square$

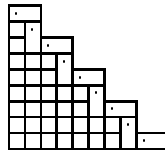
Лемма 2 представляет собой с виду бесхитростный, но довольно мощный инструмент для изучения четности количества разбиений на домино.

ЛЕММА 3 ([10]). Пусть дана последовательность клетчатых фигур

$$H_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad H_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad H_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$$

Фигура  $H_n$  получается из  $H_{n-1}$  добавлением слева вертикального прямоугольника  $2 \times (2n - 1)$ . Тогда все фигуры  $H_n$  разбиваются на домино нечетным числом способов.

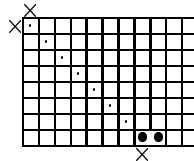
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диагональ, идущую из левого верхнего угла фигуры. Рассуждая как в лемме о полудиagonали, мы можем последовательно удалить из фигуры (снизу вверх) все изображенные доминошки.



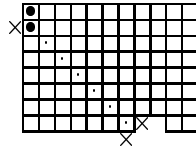
В этом случае незамошенная часть есть перевернутая фигура  $H_{n-1}$  и утверждение следует по индукции.  $\square$

С помощью леммы 2 мы можем дать еще одно доказательство теоремы 2.

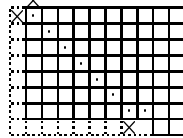
ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Индукция, реализующая алгоритм Евклида. Рассмотрим диагональный ряд клеток, выходящий из угла. По лемме о полудиagonали, достаточно ограничиться изучением четности количества разбиений, содержащих отмеченную доминошку.



Теперь мы можем взять диагональный ряд клеток снизу от только что рассмотренного и, просматривая его снизу вверх, снова применить лемму о полудиagonали.



Продолжая опускать рассматриваемую диагональ, не изменяя четности числа разбиений, мы сможем убрать все клетки первого столбца, а также все клетки нижней строки, лежащие левее отмеченной доминошки. После этого опять можно применить лемму о полудиagonали.



Продолжая дальше, мы уберем клетки второго столбца и второй строки (лежащие левее найденной доминошки). Действуя таким образом, мы уберем в конце концов из нашего прямоугольника  $m \times n$  прямоугольную часть размера  $(n + 1) \times n$ . Осталась часть  $(m - n - 1) \times n$ , которая удовлетворяет предположению индукции.  $\square$

Аналогично можно доказать и теорему 1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пусть дано два разбиения на домино некоторой фигуры. Допустим, что доминошки, накрывающие некоторую клетку  $A$  этой фигуры, не совпадают. *Цепочкой с началом в клетке  $A_1 = A$*  назовем последовательность доминошек  $D_1 = \{A_1, A_2\}$ ,  $E_1 = \{A_2, A_3\}$ ,  $D_2 = \{A_3, A_4\}$ ,  $E_2 = \{A_4, A_5\}$ , ..., где доминошки  $D_1, D_2, \dots$  принадлежат первому разбиению, а доминошки  $E_1, E_2, \dots$  — второму. Эта цепочка естественным образом продолжается до тех пор, пока в ней снова не встретится клетка  $A_1$ .

Можно также рассматривать цепочки, построенные по разбиениям на домино двух пересекающихся фигур. В этом случае цепочка может оборваться, когда мы выйдем за пределы одной из фигур.

*Диагональной прямой* будем называть прямую с угловым коэффициентом 1, проходящую через центры клеток.

**ЛЕММА 4.** Пусть дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой. Тогда, если на оси симметрии лежит  $2n$  клеток фигуры, то число разбиений на доминошки такой фигуры делится на  $2^n$ .

Отметим, что если на оси симметрии фигуры лежит нечетное число клеток, то и вся фигура состоит из нечетного числа клеток и ее нельзя разрезать на домино.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Диагональную ось симметрии фигуры будем в дальнейшем называть просто осью, а осевую симметрию относительно оси — просто

симметрией. Раскрасим клетки диагонали попеременно в черный и белый цвета. Пусть  $A$  — одна из черных клеток. Возьмем произвольное разбиение. Найдем в нём «минимальное» множество доминошек, содержащее клетку  $A$  и при этом симметричное относительно оси. Это множество можно построить следующим образом. Рассмотрим исходное разбиение, разбиение симметричное ему относительно оси, и построим по этим разбиениям цепочку с началом в клетке  $A$ . Нетрудно сообразить, что, кроме клетки  $A$ , эта цепочка имеет еще ровно одну клетку, лежащую на оси, причем эта клетка белая (в противном случае построенная цепочка доминошек охватывает симметричную область, разбитую на доминошки, но при этом содержащую нечетное число клеток). Ясно, что если в качестве  $A$  взять другую черную клетку оси, то полученное множество не будет пересекаться с построенным ранее. Значит, мы можем построить  $n$  непересекающихся множеств, далее так и будем называть их минимальными. Доминошки, не принадлежащие ни одному из этих множеств, будем называть стабильными.

Заметим теперь, что если любое из  $n$  минимальных множеств отразить относительно оси, а остальные доминошки разбиения не трогать, то получится новое разбиение на домино. Тогда мы можем разбить всё множество разбиений на домино на блоки по  $2^n$  штук — для каждого разбиения возьмем все его стабильные доминошки, а оставшуюся часть фигуры замостим, пользуясь для каждого из  $n$  минимальных множеств выбором — отражать его относительно оси или оставить как есть. Вместе с каждым из  $2^n$  вариантов этого выбора мы получим свое разбиение на домино — всего  $2^n$  штук.  $\square$

Следующая лемма уточняет только что доказанный результат, привнося некоторую структуру во множество разбиений на домино. Для ацтекского диаманта это утверждение доказано в [13] (некомбинаторно), а для произвольной фигуры — в [5] (мы приводим здесь это доказательство).

*ЛЕММА 5. Пусть дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой, и пусть на оси симметрии лежит  $2n$  клеток фигуры. Отметим  $n$  из этих клеток через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1. Рассмотрим такие разбиения фигуры на домино, которые согласованы со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена правее или ниже, если эта цифра — 0, и левее или выше — если 1. Тогда для каждой расстановки в отмеченных клетках нулей и единиц количество согласованных с ней разбиений фигуры на домино одно и то же (т. е. не зависит от расстановки).*

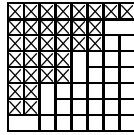
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Всю техническую работу мы уже проделали в доказательстве предыдущей леммы. Будем считать, что клетки диагонали попеременно раскрашены в черный и белый цвета и что числа 0 и 1 расставляются на черных клетках. Рассмотрим любую черную клетку. Пусть на ней стоит, например, число 0. Возьмем произвольное разбиение на доминошки, согласованное с разметкой. Наша черная клетка принадлежит минимальному симметричному множеству в этом разбиении. Если симметрично отразить это множество, получится новое разбиение, согласованное с новой разметкой — той, которая

в наблюдаемой черной клетке содержит 1, а в остальных черных клетках — то же, что было до симметрии. Пользуясь такими симметриями, мы сможем построить взаимно однозначное соответствие между любыми двумя множествами согласованных разбиений.  $\square$

Теперь мы можем доказать основную теорему о разбиении квадрата на домино. Эта теорема сначала была доказана некомбинаторными методами (с использованием формулы (1) на с. 129) (см. [8]). Комбинаторное доказательство, приводимое ниже, принадлежит Л. Пачтеру [10].

**ТЕОРЕМА 3.** *Количество разбиений квадрата  $2n \times 2n$  на домино — число вида  $2^n(2k+1)^2$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем пользоваться разметкой из утверждения леммы 5. Тогда мы можем ограничиться подсчетом разбиений, в которых доминошки, закрывающие отмеченные клетки, закрывают также клетку либо справа, либо снизу от отмеченной, — такие разбиения назовем редуцированными. Вот пример расположения доминошек, накрывающих размеченные клетки в редуцированном разбиении.



Очевидно, количество редуцированных разбиений квадрата на домино в  $2^n$  раз меньше количества всех разбиений.

Если в шахматной раскраске рассматриваемая диагональ состоит из черных клеток, то область над диагональю содержит белых клеток на  $n$  больше, чем черных. Поэтому при дальнейшем разбиении на домино все остальные клетки диагонали накрыты доминошками из верхней части. Таким образом, после разбиения на доминошки весь квадрат будет разбит на две части — клетки одной из них помечены крестиками, клетки другой — не помечены. Каждая из этих частей есть в точности фигура  $H_n$  из леммы 3. И тем самым количество редуцированных разбиений на доминошки всего квадрата равно  $(\# H_n)^2$ , а количество всех разбиений —  $2^n(\# H_n)^2$ . Осталось вспомнить, что по утверждению леммы 3 число  $\# H_n$  нечетно.  $\square$

### 3. АЦТЕКСКИЕ ДИАМАНТЫ

Мы начнем этот раздел с доказательства одного соотношения (теорема 2.1 из [9]), которое обладает несомненной притягательностью и направляет мысли в нужную сторону.

**ЛЕММА 6.** *Количество разбиений на домино прямоугольника  $2n \times 2t$  и фигур, получающихся удалением из него двух или четырех угловых клеток, связаны соотношением*



ТЕОРЕМА 4. Последовательность  $T_n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}T_{n-1} = 2T_n^2. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

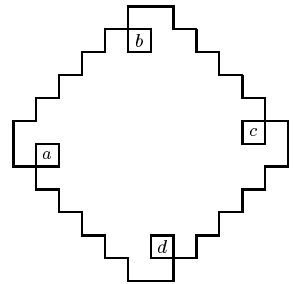
$$T_n = 2^{n(n+1)/2}.$$

Количество разбиений ацтекского алмаза на домино впервые получено в [6] неэлементарными средствами. Мы приведем доказательство теоремы 4, опирающееся на лемму 7. Это доказательство принадлежит И. Богданову. После этого мы дадим еще одно доказательство, фактически следуя [9], и еще одно комбинаторное доказательство, в котором ни доминошки, ни соотношение 2 не используются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем «ориентированную» версию соотношения 2:

The diagram shows an equation (3) involving four diamond-shaped figures. The first row shows a solid diamond on the left, followed by a dot, then a dashed diamond, followed by an equals sign. The second row shows a dashed diamond, followed by a dot, then a solid diamond, followed by a plus sign, then a dashed diamond, followed by a dot, then a solid diamond. The number 3 is at the end of the second row.

Пусть фигура  $D$  из леммы 7 — это ацтекский алмаз ранга  $n + 1$ . Отметим в нём вблизи «вершин» клетки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (см. рис. справа). Такое назначение клеток  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  допустимо, поскольку в доказательстве леммы 7 от этих клеток (кроме цвета) требуется в действительности лишь одно: чтобы существование цепочки доминошек, ведущей из  $a$  в  $c$ , препятствовало существованию цепочки, ведущей из  $b$  в  $d$ . Осталось заметить, что удаление помеченных клеток приводит к появлению большего числа доминошек, расположение которых определяется однозначно. Например,



$$\#D \setminus \{a, b\} = \# \text{ [diamond with a and b removed] } = \# T_n.$$

The diagram shows a diamond shape with two small squares removed from its corners. The top square is labeled 'b' and the left square is labeled 'a'. The equation shows that the number of domino tilings of this shape is equal to  $\# T_n$ .

Аналогично  $\#D \setminus \{a, b, c, d\} = \#T_{n-1}$ . Следовательно, соотношение (3), которое мы доказываем, есть в данном случае в точности соотношение (1) из леммы 7.  $\square$

Прежде чем приводить второе доказательство теоремы 4, мы в качестве подготовки рассмотрим его «одномерную» версию, а заодно узнаем некоторые подробности о функциональных соотношениях.

Рассмотрим числовой треугольник Проппа [11]

$$\begin{array}{cccccc}
 a & c & e & g & \dots & \\
 & b & d & f & \dots & \\
 & & h & k & \dots & \\
 & & & \ell & \dots & \\
 & & & & \dots & 
 \end{array} \tag{4}$$

образованный по правилу: для любых четырех чисел, образующих «ромбик», выполнено соотношение

$$x \begin{matrix} w \\ z \end{matrix} y \quad wz = xy + 1. \tag{5}$$

Например, пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая — из двоек. Тогда очевидно, что при всех  $n$  числа в  $n$ -й строке одинаковы, обозначим их  $f_{2n-2}$ , и выполнено соотношение

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1. \tag{6}$$

Отсюда  $f_0 = 1, f_2 = 2, f_4 = 5, f_6 = 13, \dots$  Узнаете? Это числа Фибоначчи.

ЛЕММА 8. Числа Фибоначчи удовлетворяют соотношению (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. В самом деле, число Фибоначчи  $f_n$  — это количество разбиений прямоугольника  $2 \times n$  на домино, потому что эти количества подчинены очевидному рекуррентному соотношению

$$\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

А тогда выполнение тождества (6) для чисел Фибоначчи сразу следует из тождества (1): достаточно в лемме 7 в качестве фигуры  $D$  взять доску  $2 \times (2n + 2)$  и рассмотреть клетки, указанные на рисунке.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & & & & d & \\ \hline b & & & & c & \\ \hline \end{array} \tag{7} \quad \square$$

Мы дадим другое, еще более доминошное доказательство этой формулы.

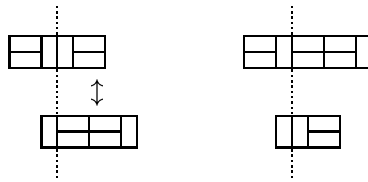
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Рассмотрим всевозможные (упорядоченные) пары разбиений прямоугольника  $2 \times 2n$  на домино, а также пары, состоящие из разбиения прямоугольника  $2 \times (2n + 2)$  и разбиения прямоугольника  $2 \times (2n - 2)$ . Пример таких пар и удобный способ взаиморасположения элементов пары показаны на рисунке.



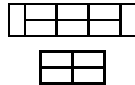
Опишем взаимно однозначное соответствие между этими множествами пар. При этом нам потребуется добавить в первое множество один лишний элемент.

Соответствие устроено очень просто. Если в нижнем прямоугольнике первой пары есть «шов», отрезающий правый блок  $2 \times 2$  (т. е. если этот блок замощен двумя целыми доминошками), мы передвинем этот блок вверх, «приклеив» к верхнему прямоугольнику. Этот случай изображен выше.

Если же шва нет, т. е. продолжение вниз правой стороны верхнего прямоугольника разрезает в нём какую-то доминошку, мы будем просматривать все вертикальные линии справа налево в верхнем прямоугольнике до тех пор, пока не найдем такой шов, продолжение которого вниз образует шов и в нижнем прямоугольнике. Нетрудно проверить, что такой шов обязательно найдется (в крайнем случае он может проходить по левой стороне нижнего прямоугольника). Найдя шов, мы отрезаем по нему части прямоугольников, расположенные правее, и меняем их местами.



Ясно, что построенное соответствие разным парам замощений прямоугольников  $2 \times 2n$  сопоставляет разные пары замощений прямоугольников  $2 \times (2n + 2)$  и  $2 \times (2n - 2)$ , поскольку очевидно, как устроено обратное соответствие: мы просматриваем нижний прямоугольник  $2 \times (2n - 2)$ , начиная с правой стороны и двигаясь влево, в поисках первого же шва, который разрезает оба прямоугольника, после чего меняем местами отрезанные части. Этого шва не существует лишь в единственном случае, показанном на рисунке.



Для этого случая потребуется в первое множество добавить лишний элемент.  $\square$

Вот замечательное утверждение из [11]. Снова рассмотрим треугольник Проппа (4). Будем считать, что элементы первых двух строк — это независимые переменные, а элементы всех остальных строк — это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (5). Нетрудно подсчитать, например, что элемент  $\ell$  в треугольнике (4) имеет вид

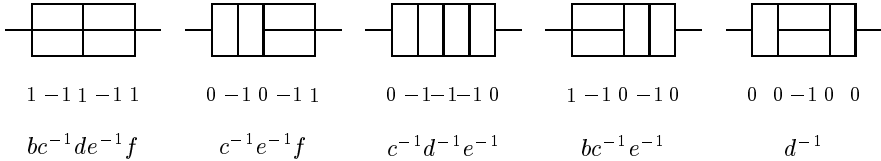
$$\ell = \frac{hk + 1}{d} = \frac{bd + 1}{c} \cdot \frac{df + 1}{e} + 1 = bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}. \quad (7)$$

Теперь выпишем все разбиения прямоугольника  $2 \times 4$  на домино и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напомним его редуцированную валентность: количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных  $b, c, d, e, f$  в произведении  $b^*c^*d^*e^*f^*$ .



Сравните то, что получилось, с правой частью (7).

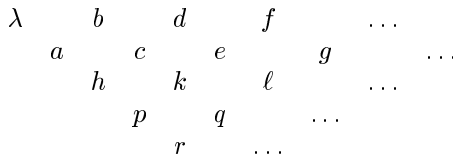
**ЛЕММА 9.** *Наблюдения, проделанные выше, являются общим фактом, а именно:*

1) *рациональные функции из треугольника (4) суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени  $\pm 1$  или 0. Все одночлены входят в сумму с коэффициентом 1.*

2) *Одночлены, составляющие функцию из  $(n + 2)$ -й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника  $2 \times 2n$  на доминошки по описанному выше алгоритму.*

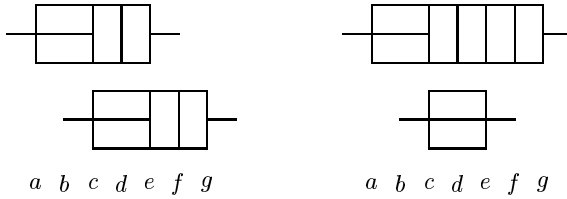
Это совершенно удивительный факт. Глядя на соотношение (5), у нас нет оснований думать, что оно не приводит к появлению громоздких рациональных дробей, а алгоритм построения одночленов по разбиениям на домино вообще выглядит как мистика.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим функциональный треугольник,



состоящий из рациональных функций от переменных  $a, b, c, d, e, f, g, \dots$ , заданных не при помощи соотношения (5), а с помощью описанного выше комбинаторного алгоритма. Мы ограничимся рассмотрением частного случая  $n = 4$ . Докажем, что выполнено соотношение «ромбика»  $kr = pq + 1$ . Для этого воспользуемся взаимно однозначным соответствием из второго доказательства леммы 8. Каждая функция в этом соотношении — сумма одночленов, соответствующих разбиениям определенных прямоугольников на домино. Чтобы получить произведение  $kr$ , мы можем перебрать все пары разбиений на домино прямоугольников  $2 \times 4$ , для каждой такой пары перемножить соответственные одночлены, а потом сложить все, что получилось. Аналогично можно получить произведение  $pq$ . Отметим, что при таком вычислении мы должны брать переменные, составляющие одночлены, в соответствии с положением перемножаемых функций в треуголь-

нике. На рисунке снизу приведены примеры пар разбиений, а снизу подписаны переменные, «отвечающие» за каждую вертикаль.



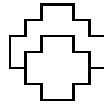
Заметим теперь, что взаимно однозначное соответствие из леммы 8 сопоставляет друг другу пары разбиений, порождающие равные одночлены. Это очевидно: при соответствии мы всего лишь меняем местами по вертикали (!) куски разбиений; при этом суммы редуцированных валентностей контролируемых узлов на одной вертикали не меняются (в том числе, на шве), а только этим и определяются степени переменных в одночлене.

Полное доказательство проводится по индукции. Приведенное рассуждение обосновывает индукционный переход. □

#### 4. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ АЦТЕКСКОМ ДИАМАНТЕ

Теперь мы дадим второе доказательство теоремы 4, опять проверяя соотношение (3).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Рассмотрим ацтекский диамант ранга  $n + 1$ . Удаляя два диагональных ряда клеток, идущих вдоль его правой верхней и левой верхней сторон, мы можем получить из него ацтекский поддиамант ранга  $n$ .



Назовем этот поддиамант ранга  $n$  *нижним*. Аналогично можно получить *верхний*, *левый* и *правый* поддиаманты. Пересечением этих поддиамантов является *центральный* поддиамант ранга  $n - 1$ .

Рассмотрим множество  $A$ , состоящее из пар независимых разбиений ацтекского диаманта ранга  $n$  и его центрального поддиаманта ранга  $n - 2$ . Рассмотрим множество  $B$ , которое содержит пары, состоящие из независимых разбиений верхнего и нижнего поддиамантов ацтекского диаманта ранга  $n$ , а также пары, состоящие из независимых разбиений левого и правого поддиамантов. Утверждение теоремы сразу следует из следующей леммы.

**ЛЕММА 10.** *Существует взаимно однозначное соответствие между множествами  $A$  и  $B$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построим отображение из множества  $A$  в множество  $B$ . Возьмем элемент множества  $A$ , т. е. разбиение ацтекского диаманта ранга  $n$  и

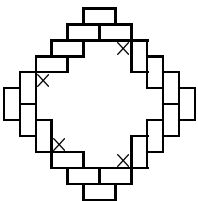
разбиение его центрального поддиаманта ранга  $n - 2$ . Рассмотрим сначала случай, когда к левой или правой «вершине» диаманта (для определенности — к левой) прилегает блок разбиения вида  $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ . В этом случае все доминошки, прилегающие к левому краю диаманта, расположены горизонтально. Тогда построим следующую пару разбиений левого и правого поддиамантов. Отодвинем в сторону все доминошки, прилегающие к левому краю, а самую верхнюю и самую нижнюю из них вообще удалим. У нас останется разбиение правого поддиаманта ранга  $n - 1$ . А отодвинутый фрагмент объединим с центральным поддиамантом ранга  $n - 2$ , получится разбиение левого поддиаманта ранга  $n - 1$ .

$$\text{Diamond} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} = \text{Diamond} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \quad (8)$$

Аналогично определим отображение в случае, когда к верхней или нижней вершине большого диаманта прилегает блок  $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}$ .

В общем случае, который детально описан ниже, отображение устроено так: удалим две доминошки, прилегающие к двум противоположным вершинам большого диаманта (скажем, к левой и правой; при этом выбор между левой–правой и верхней–нижней вершинами зависит от исходных разбиений), наложим диамант и его центральный поддиамант друг на друга и разрежем оба диаманта на две части (условно говоря, верхнюю и нижнюю) таким образом, чтобы разрез проходил только по сторонам доминошек в обоих разбиениях, после чего объединим нижнюю часть большого диаманта с верхней частью маленького (получится разбиение нижнего поддиаманта) и верхнюю часть большого диаманта с нижней частью маленького (получится разбиение верхнего поддиаманта).

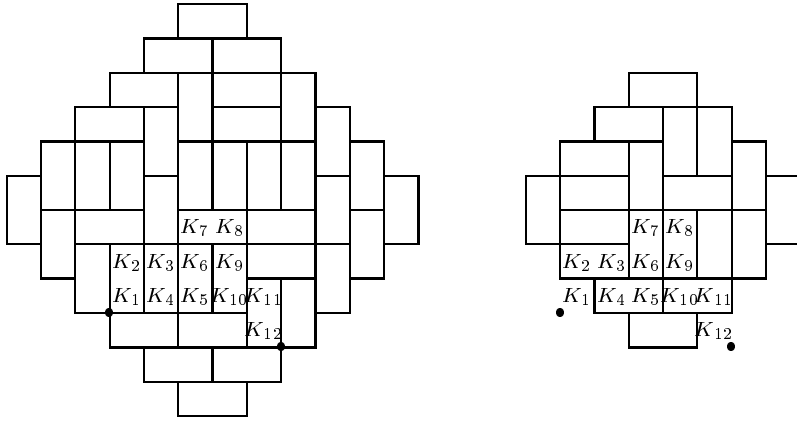
Перейдем к деталям, ну то есть не к деталям, конечно, а к подробностям. Допустим, что разбиение большого диаманта не относится к уже разобранному типу, т. е. сверху и снизу расположены горизонтальные, а слева и справа —



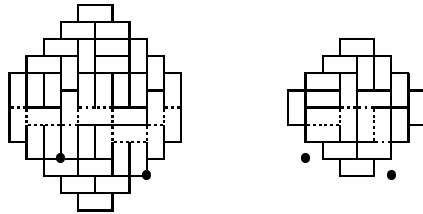
вертикальные доминошки. В этом случае на каждой стороне диаманта можно указать *разделяющую* клетку, такую что по одну сторону от нее доминошки ориентированы горизонтально, а по другую сторону — вертикально. На рисунке эти клетки помечены крестиками.

Пусть  $K_1$  — любая из разделяющих клеток. Построим цепочку доминошек, начинающуюся с клетки  $K_1$ . Эта цепочка клеток закончится, когда в ней встретится еще одна разделяющая клетка, скажем,  $K_m$ . Клетки  $K_1$  и  $K_m$  не могут находиться на противоположных сторонах диаманта, что легко видеть, например, из соображений шахматной раскраски. Таким образом, мы построили цепочку клеток, соединяющую разделяющие клетки на двух соседних сторонах большого диаманта, пусть для определенности это левая и правая нижние стороны. Тогда очевидно, что верхняя граница построенного множества клеток есть ломаная, которая не рассекает ни одной доминошки в обоих разбиениях и при этом делит малый диамант на две части.

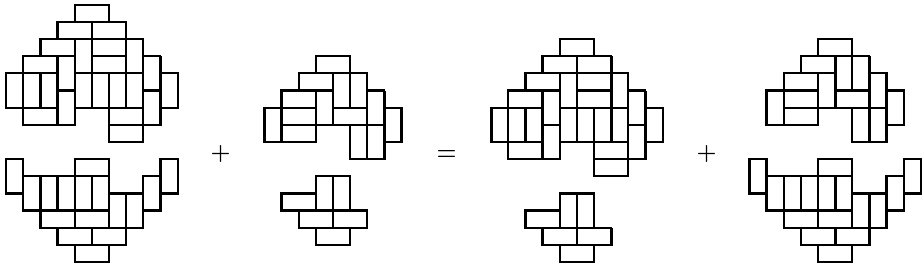
Разрезом малого диаманта назовем часть этой ломаной, лежащую внутри малого диаманта.



Уберем из большого диаманта самую левую и самую правую доминошки. Дополним разрез малого диаманта *подходящими отрезками границы малого диаманта*, чтобы получился разрез большого диаманта слева направо.



Заметим, что одновременно с этим разрезом не может существовать разреза большого диаманта, идущего сверху вниз, поскольку такой разрез пересекал бы построенную цепочку клеток  $K_i$  и, следовательно, разрезал бы доминошку в одном из разбиений. С другой стороны, разрезов, идущих слева направо, может быть несколько. Для однозначности конструкции выберем среди них самый низкий. Теперь мы можем разрезать оба диаманта и поменять отрезанные нижние части. Мы получим разбиения верхнего и нижнего диамантов.



Итак, мы описали отображение из множества  $A$  в множество  $B$ . Очевидно, что это отображение сопоставляет разным элементам множества  $A$  разные

элементы множества  $B$ . Оно является взаимно однозначным, поскольку нетрудно сообразить, как устроено обратное отображение. Оно устроено так. Для произвольной пары разбиений, скажем, левого и правого поддиамантов рассмотрим малый диамант, являющийся их пересечением.

Если к нижней вершине нижнего поддиаманта прилегает блок  $\square$ , мы имеем дело со случаем, обратным к случаю (8). Если же такого блока нет, начнем строить цепочку клеток, аналогичную цепочке  $K_i$ . Первым разбиением будем называть разбиение нижнего диаманта, вторым — верхнего. Рассмотрим разделяющие клетки, прилегающие к нижним сторонам нижнего диаманта (если все доминошки, прилегающие к нижнему краю, ориентированы горизонтально, разделяющей назовем верхнюю из двух клеток в самом левом и в самом правом ряду), пусть  $K_1$  — разделяющая клетка на левой нижней стороне, и пусть она будет черного цвета (при шахматной раскраске). Цепочка клеток с началом  $K_1$  закончится, когда на очередном шаге мы окажемся вне пересечения первого и второго диамантов, причем последняя клетка в этой цепочке будет «второй» клеткой последней доминошки. Если эта доминошка из второго разбиения, то ее вторая клетка черная, и значит, мы оказались на противоположной стороне объединения диамантов. Этого не может быть, поскольку область снизу от построенной цепочки содержит нечетное число клеток, хотя при этом разбита на доминошки первым способом. Следовательно, эта доминошка из первого разбиения и привела она нас на разделяющую клетку правой нижней стороны, что, собственно, и требуется. Дальше режем, переставляем и готово. Лемма доказана.  $\square$

Из доказанной леммы 10 можно получить простое комбинаторное доказательство утверждения, обобщающего лемму 9, о пирамиде из функций, заданной при помощи соотношения октаэдра, и связи этих функций с разбиениями ацтекского диаманта (так называемый эффект лорановости, см. [11], [7]). Еще одно элементарное доказательство теоремы об ацтекском диаманте, основанное на рассмотрении взвешенных сумм и остроумной индукции, можно прочесть в [12].

## 5. ПОДСЧЕТ КОЛИЧЕСТВА РАЗБИЕНИЙ НА ДОМИНО

Покажем, как, используя полученные результаты, можно подсчитать количество разбиений клетчатой фигуры на домино [3]. Нам все-таки придется перейти на двойственный язык графов и совершенных паросочетаний. Двойственный граф ацтекского диаманта изображен на рис. 6б, с. 140 (нам не потребуются раскраска вершин и ориентация ребер этого графа, показанные на этом рисунке). Рассмотрим сначала вопрос о подсчете взвешенных сумм паросочетаний для ацтекского диаманта. Это следующая задача. Пусть в двойственном графе для ацтекского диаманта каждому ребру сопоставлено некоторое число — «вес». Весом совершенного паросочетания назовем произведение весов всех входящих в него ребер. Сумму весов всех возможных паросочетаний ацтекского диаманта ранга  $n$  обозначим через  $W_n$  и будем называть взвешенной суммой паросочетаний.

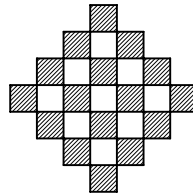
Например, если все веса равны 1, то  $W_n = T_n$ . А если вес какого-то ребра равен нулю, то мы можем воспринимать это как запрет на участие этого ребра в паросочетаниях. Утверждение теоремы 4 и тождество (3) мгновенно обобщаются на случай взвешенных паросочетаний.

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть дан двойственный граф ацтекского алмаза ранга  $n$ . Аналогично определению 3 рассмотрим верхний, нижний, левый, правый и центральный подалмазы, обозначим соответственно через  $W_u, W_d, W_\ell, W_r, W_c$  взвешенные суммы паросочетаний для этих подалмазов. Пусть  $u, d, \ell, r$  — веса соответственно самого верхнего, самого нижнего, самого левого, самого правого ребра в исходном графе. Тогда выполнено соотношение.

$$W_n W_c = \ell \cdot r \cdot W_u \cdot W_d + u \cdot d \cdot W_\ell \cdot W_r. \quad (9)$$

Доказательство этой теоремы получается аналогично второму доказательству теоремы 4, если вместе с переключиванием частей в биекции из леммы 10 рассматривать также произведения весов доминошек, составляющих эти части.

Будем теперь считать, что веса ребер принимают только значения 0 и 1. Тогда подсчет взвешенной суммы паросочетаний ацтекского алмаза можно организовать следующим образом. Для каждой закрашенной на рисунке клетки подсчитаем сумму произведений весов ее горизонтальных ребер и вертикальных ребер.



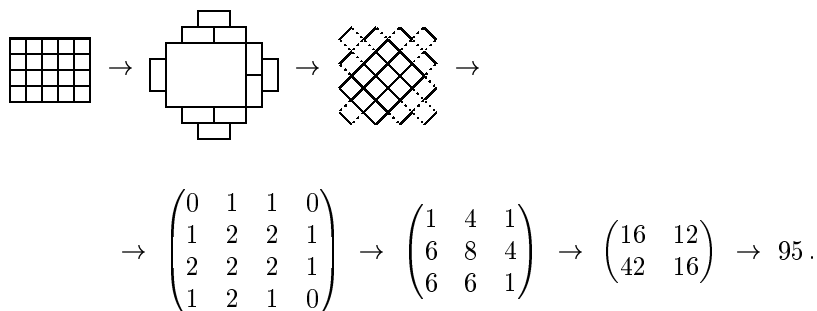
Повернем алмаз на  $45^\circ$  и запишем все подсчитанные числа в виде матрицы  $n \times n$ , обозначим ее  $A^{(n)}$ . Введем также вспомогательную матрицу  $A^{(n+1)}$ , у которой все элементы равны единице. Далее вычислим последовательно матрицы  $A^{(n-1)}, \dots, A^{(1)}$  по следующему правилу. Матрица  $A^{(k)}$  имеет размер  $k \times k$  и вычисляется по матрицам  $A^{(k+1)}$  и  $A^{(k+2)}$  при помощи соотношений

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{A_{ij}^{(k+1)} A_{i+1, j+1}^{(k+1)} + A_{i+1, j}^{(k+1)} A_{i, j+1}^{(k+1)}}{A_{i+1, j+1}^{(k+2)}}.$$

Тогда матрица  $A^{(1)}$  содержит единственное число, которое и есть искомая взвешенная сумма. Приведенное правило прямо следует из рекуррентного соотношения (9) по индукции.

Рассмотрим теперь произвольную доску. Поместим ее в ацтекский алмаз, так, чтобы дополнение этой доски до всего алмаза можно было замостить домино. Фиксируем замощение дополнения фигуры. В двойственном графе ацтекского алмаза ребрам, принадлежащим двойственному графу доски, сопоставим вес 1. Кроме того сопоставим вес 1 ребрам, изображающим доминошки

из дополнения доски. Всем остальным рёбрам сопоставим вес 0. Выполнив описанную выше процедуру, мы найдем количество разбиений доски на доминошки. Единственное, что требуется для корректности работы этого алгоритма, — это чтобы «внутренние» элементы матрицы  $A^{(n)}$  были не равны 0. Например, для прямоугольника  $4 \times 5$  получаем

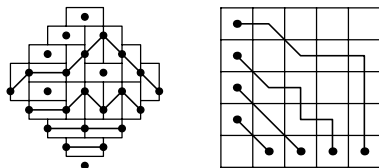


## 6. ЕЩЕ ОДНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ АЦТЕКСКОМ ДИАМАНТЕ

В заключение мы приведем еще одно доказательство теоремы о диаманте<sup>1)</sup>, основанное на остроумной переформулировке, которая оставляет надежду найти «совсем уж элементарное» доказательство. В [14] похожая переформулировка применяется к прямоугольным доскам.

*Из шахматной доски  $(n+1) \times (n+1)$  вырезана клетка  $a_1$ . На всех остальных клетках вертикали  $a$  стоят «хромые» шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Тогда существует  $2^{n(n+1)/2}$  непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым, все  $n$  королей могут перейти на клетки нижней горизонтали (порядок ходов несущественен, важен только вид траекторий).*

Намек на то, как это относится к диамантам, приведён на картинке.



Для того чтобы найти количество наборов маршрутов воспользуемся следующей теоремой Карлина–Мак-Грегора–Линдстрема (см. [4]).

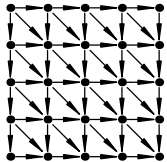
<sup>1)</sup>Пока статья готовилась к печати, в сети появилось аналогичное доказательство, см. Sen-Peng Eu, Tung Shan Fu. *A simple proof of Aztec diamond theorem.* <http://www.arxiv.org/math.CO/0412041>.

**ТЕОРЕМА.** Пусть дан ациклический ориентированный граф, имеющий  $n$  входов и  $n$  выходов, пронумерованных числами от 1 до  $n$ , причем в любом наборе из  $n$  непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам, каждый маршрут соединяет вход и выход с одним и тем же номером. Обозначим через  $A_{km}$  число путей, ведущих от  $k$ -го входа к  $m$ -му выходу. Тогда число наборов из  $n$  непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам, равно  $\det A$ .

Вычислим матрицу, описывающую движение королей. Граф возможных перемещений королей изображен ниже. Мы можем считать, что на удаленной угловой клетке доски также стоит король, которому просто не нужно двигаться. Тогда элементы матрицы  $A^{(n)} = (A_{km})$  (напомним, что это матрица  $(n+1) \times (n+1)$ ) можно вычислять последовательно по правилу, сходному с правилом вычисления биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля:

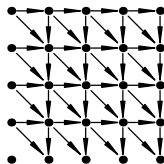
$$A_{km} = A_{k-1m} + A_{k m-1} + A_{k-1 m-1}.$$

Так, для доски  $5 \times 5$  имеем



$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix}$$

Заметим, что то же самое количество маршрутов мы получим, если опять уберем углового короля и запретим движение королей вдоль первой вертикали и вдоль первой горизонтали. Рассмотрим матрицу  $B^{(n)}$ , описывающую движение королей в этой ситуации.



$$B^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 2 & 10 & 26 & 50 \\ 2 & 14 & 50 & 126 \end{pmatrix}$$

Как видим,  $B^{(5)} = 2A^{(4)}$ .

**ЛЕММА 11.** Обозначим  $b_{pq}$  — количество способов, которыми хромой король может пройти с клетки  $(1, p)$  на клетку  $(q, 1)$ , не заходя по пути на нижние  $p-1$  клеток первой вертикали (т. е. на клетки  $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, p-1)$ ) и на левые  $q-1$  клеток первой горизонтали; а через  $a_{pq}$  — количество всех способов, которыми хромой король может пройти с клетки  $(1, p)$  на клетку  $(q, 1)$ . Тогда

$$b_{pq} = 2a_{p-1q-1}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим маршруты короля на доске  $p \times q$  из левого верхнего угла в правый нижний, при которых он не заходит на первую вертикаль и первую горизонталь. Если первый ход короля — горизонтальный, то король может  $a_{p-1q-1}$  способами добраться к клетке над правым нижним углом и далее сделать ход вниз. Если же первый ход — диагональный, то и после этого король

имеет  $a_{p-1}q-1$  вариантов движения к правому нижнему углу. Некоторые из них, правда, приводят его на первую горизонталь (и у этих маршрутов последний ход горизонтальный) — так изменим эти маршруты, передвинув всю их среднюю часть на одну клетку вверх и заменив самый первый (диагональный) ход на горизонтальный, а самый последний (горизонтальный) ход на диагональный. Нетрудно видеть, что это биекция.  $\square$

Числа  $a_{pq}, b_{pq}$  — это матричные элементы матриц  $A^{(n)}, B^{(n)}$ . Из леммы следует, что  $B^{(n)} = 2A^{(n-1)}$ . А так как величины  $\det B^{(n)}$  и  $\det A^{(n)}$  выражают одно и то же количество наборов маршрутов, мы получаем рекуррентное соотношение

$$\det A^{(n)} = 2^n \cdot \det A^{(n-1)},$$

из которого сразу следует утверждение теоремы о диаманте.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. *Петербургские математические олимпиады*. СПб: Лань, 2003. Задача 97.109.
- [2] Карпов Д. В. *О четности количества разбиений на прямоугольники  $1 \times 2$* . Не опубликовано. 1997.
- [3] Bass T., Charles K.  
<http://www.math.wisc.edu/~propp/reach/charles/octagon.pdf>
- [4] Benjamin A. T., Cameron N. T. *Counting on determinants*.  
[www.math.hmc.edu/benjamin/papers/determinants.pdf](http://www.math.hmc.edu/benjamin/papers/determinants.pdf)
- [5] Ciucu M. *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry* // J. Combin. Theory Ser. A. V. 77. 1997. No. 1. P. 67–97.
- [6] Elkies N., Kuperbeg G., Larsen M., Propp J. *Alternating sign matrices and domino tilings* // J. of Comb. 1992. V. 1. P. 111-132.
- [7] Fomin S., Zelevinsky A. *The Laurent Phenomenon*.  
<http://www.arxiv.org/math.CO/0104241>
- [8] John P., Sachs P., Zarnitz H. *Domino covers in square chessboards* // Zastosowania Matematyki (Applicationes Mathematicae) XIX, 3–4, 1987. P. 635–641.
- [9] Kuo E. *Application of graphical condensation for enumerating matchings* // Theoret. Comp. Sci. V. 319. 2004. P. 29–57.  
<http://www.arxiv.org/math.CO/0304090>.
- [10] Pachter L. *Combinatorial approaches and conjectures for 2-disibility problems concerning domino tilings of polyminoes* // Electron. J. Combin. V. 4. 1997. R29.
- [11] Propp J. *Frieze-ing and condensation*.  
<http://www.math.wisc.edu/~propp/bilinear/domino>

- [12] Propp J. *Generalized domino shuffling*.  
<http://www.arxiv.org/math.CO/0111034>
- [13] Propp J., Stanley R. *Domino tilings with barriers* // J. Combin. Theory Ser. A. V. 87, No.2 347–356 (1999).  
<http://www.arxiv.org/math.CO/9801067>
- [14] Strehl V. *Counting domino tilings of rectangles via Resultants* // Advances in Appl. Math. 2001. Vol. 27. No. 2–3. P. 597–626.

# Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником

Е. Д. Куланин

Покажем, что для любой точки окружности Эйлера произвольного треугольника существует семейство окружностей, проходящих через эту точку, аналогичное «семейству Фейербаха» из одноименной статьи Л. А. Емельянова и Т. Л. Емельяновой в №6 «Математического просвещения».

Гипербола, действительная и мнимая полуоси которой равны, называется *равносторонней*. Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат, в которой ее уравнение запишется в виде  $xy = k$ . Таким образом, обычная школьная гипербола, совпадающая с графиком обратно пропорциональной зависимости  $y = k/x$ , является равносторонней. Пара перпендикулярных прямых также является равносторонней гиперболой.

Если коника (кривая второго порядка) задана уравнением  $Q(x, y) = 0$ , где

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

то она является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда  $a+c = 0$ .

Из теоремы о пучке коник, проходящих через четыре точки [4], следует, что в общем случае есть ровно одна равносторонняя гипербола, проходящая через четыре заданные точки.

Исключением являются четверки точек, образованные вершинами треугольника и его ортоцентром, и четверки точек, лежащие на одной прямой. Любая коника, проходящая через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносторонней гиперболой. Справедливо и обратное:

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Ортоцентр любого треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, лежит на этой же гиперболе.*

Подробнее об этих фактах см. [1, с. 149].

Пусть  $D$  — точка в плоскости треугольника  $ABC$ ,  $A_1, B_1, C_1$  — пересечения прямых  $DA, DB, DC$  с прямыми  $BC, CA, AB$  соответственно. Отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  называются *чевианами*. Будем называть треугольник  $A_1B_1C_1$  *чевианным треугольником* точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$ , а окружность, описанную около чевианного треугольника, — *чевианной*.

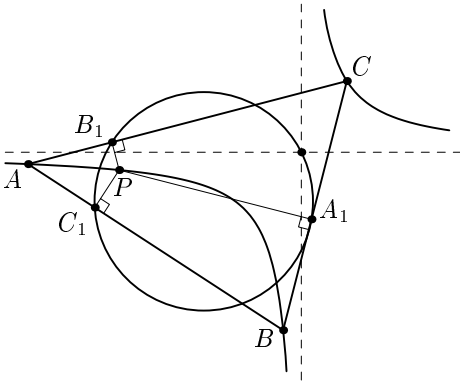


Рис. 1.

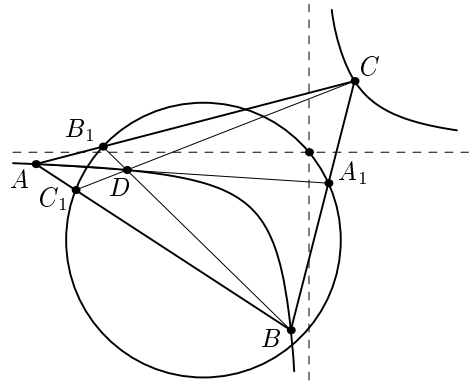


Рис. 2.

Пусть  $P$  — точка в плоскости треугольника  $ABC$ ,  $A_1, B_1, C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда треугольник  $A_1B_1C_1$  называется *педальным треугольником* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Если точка  $P$  совпадает с одной из вершин треугольника  $ABC$ , то педальный треугольник этой точки вырождается в высоту, проходящую через эту вершину. Для точек описанной окружности педальный треугольник также вырождается: основания перпендикуляров лежат на одной прямой, которая называется *прямой Симсона*.

Окружность, описанную около педального треугольника, будем называть *педальной*.

Равносторонние гиперболы, описанные около треугольника, оказываются связанными с педальными и чевианными окружностями (см. рис. 1 и рис. 2).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $P$  — произвольная точка равносторонней гиперболы, отличная от точек  $A, B, C$  той же гиперболы. Тогда педальная окружность точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через центр этой гиперболы.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $A, B, C, D$  — точки на равносторонней гиперболы. Тогда чевианная окружность точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через центр этой гиперболы.

В следующих двух разделах мы докажем теоремы 1 и 2.

### 1. ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ПЕДАЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом разделе мы доказываем теорему 1. Следующий хорошо известный факт читателю предлагается проверить самостоятельно.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.** Обозначим через  $AH_1, BH_2, CH_3$  высоты непрямоугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$

подобны треугольнику  $ABC$  с коэффициентами подобия  $|\cos \angle A|$ ,  $|\cos \angle B|$ ,  $|\cos \angle C|$  соответственно.

**ЛЕММА 1.** *Центры всех равносторонних гипербол, проходящих через вершины треугольника  $ABC$ , лежат на окружности Эйлера (окружности девяти точек) этого треугольника.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Приведем доказательство, принадлежащее А. Акоюнчу.

Пусть  $D$  — четвертая (кроме  $A, B, C$ ) точка пересечения гиперболы и описанной около треугольника  $ABC$  окружности,  $A', B', C', D'$  — ортоцентры треугольников  $BCD, CDA, DAB, ABC$ , которые по предложению 1 лежат на той же гиперболе. Обозначим через  $R$  радиус описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Используя упражнение 1, получаем

$$CD' = 2R|\cos \angle BCA| = 2R|\cos \angle BDA| = DC'.$$

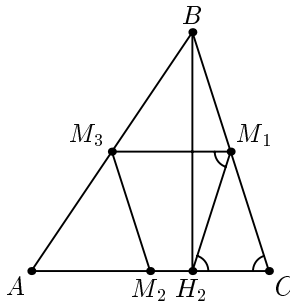
Так как  $CD' \parallel DC'$ , то  $CDC'D'$  — параллелограмм, т. е.  $C'D' \parallel CD$  и  $C'D' = CD$ . Следовательно, четырехугольники  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  центрально симметричны. Их центр симметрии является центром гиперболы. При этом он совпадает с серединой отрезка  $DD'$  и, значит, лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (а также треугольников  $BCD, CDA$  и  $DAB$ ).  $\square$

Из леммы 1 вытекает

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Для любых четырех точек, ни одна из которых не совпадает с ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках, окружности Эйлера четырех треугольников с вершинами в любых трех из этих четырех точек имеют общую точку.*

**ЛЕММА 2.** *Отрезок, соединяющий середину одной из сторон треугольника с основанием высоты, лежащей на другой его стороне, виден из одной из двух остальных середин сторон под углом, равным тому углу треугольника, на сторонах которого лежат эта последняя середина и основание высоты.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отрезок  $H_2M_1$  является медианой прямоугольного треугольника  $BH_2C$ , проведенной из вершины прямого угла  $H_2$  (рис. 3), поэтому



**Рис. 3.**

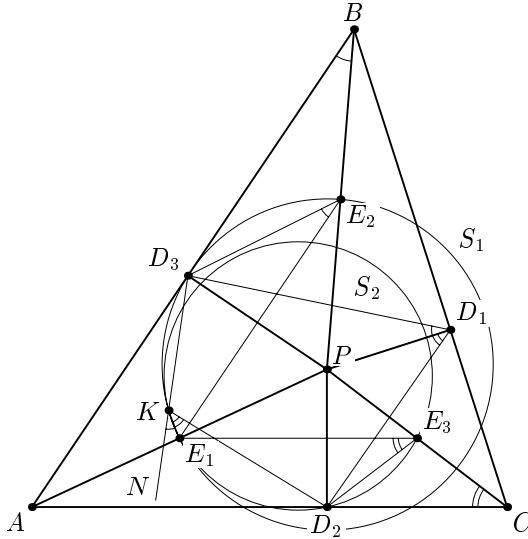


Рис. 4.

$H_2M_1 = CM_1$  и  $\angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2$ , но  $M_1M_3 \parallel AC$  как средняя линия треугольника  $ABC$ , откуда получаем  $\angle M_3M_1H_2 = \angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2 = \angle ACB$ , что и требовалось.  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $P$  — точка, отличная от центра описанной окружности и ортоцентра треугольника  $ABC$ . Тогда педальная окружность точки  $P$  проходит через точку пересечения окружностей Эйлера треугольников  $APB$ ,  $APB$ ,  $BPC$ ,  $CPA$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $E_1, E_2, E_3$  середины отрезков  $AP, BP, CP$ , а через  $D_1, D_2, D_3$  — проекции точки  $P$  на стороны  $BC, CA, AB$  соответственно (рис. 4). Пусть  $K$  — вторая точка пересечения окружностей Эйлера  $S_1$  и  $S_2$  треугольников  $APB$  и  $APC$  (отличная от  $E_1$ ). Поскольку у четырех окружностей Эйлера, о которых идет речь в теореме, согласно следствию 1 есть общая точка, то это точка  $K$ . Поэтому достаточно показать, что точка  $K$  лежит на описанной окружности  $D_1D_2D_3$ . Рассмотрим угол  $NKD_2$ , смежный с углом  $D_2KD_3$ , и докажем, что  $\angle NKD_2 = \angle D_2D_1D_3$ . Тогда

$$\angle D_2D_1D_3 + \angle D_2KD_3 = \angle D_2D_1D_3 + 180^\circ - \angle NKD_2 = 180^\circ,$$

а это и означает, что точки  $K, D_1, D_2, D_3$  лежат на одной окружности. Действительно,  $\angle NKD_2 = \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2$ , но  $\angle NKE_1 = \angle D_3E_2E_1$ , поскольку четырехугольник  $D_3E_2E_1K$  вписан в окружность  $S_1$ , а  $\angle E_1KD_2 = \angle E_1E_3D_2$ , как вписанные, опирающиеся на дугу  $E_1D_2$  окружности  $S_2$ . В свою очередь по лемме 2 имеем  $\angle D_3E_2E_1 = \angle ABP = \angle D_3BP$ ,  $\angle E_1E_3D_2 = \angle ACP = \angle D_2CP$ . Так как  $\angle PD_1B = \angle PD_3B = 90^\circ$ , то около четырехугольника  $D_1BD_3P$  можно описать окружность, откуда получаем, что  $\angle D_3BP = \angle D_3D_1P$ . Аналогично,

$\angle D_2CP = \angle D_2D_1P$ . Итак,

$$\begin{aligned} \angle NKD_2 &= \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2 = \angle D_3E_2E_1 + \angle E_1E_3D_2 = \\ &= \angle D_3BP + \angle D_2CP = \angle D_3D_1P + \angle D_2D_1P = \angle D_2D_1D_3, \end{aligned}$$

что и требовалось. Другие случаи взаимного расположения точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $P$  рассматриваются аналогично.  $\square$

Так как точка пересечения окружностей Эйлера треугольников  $ABC$ ,  $BPC$ ,  $CPA$  совпадает с центром равносторонней гиперболы, проведенной через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ , то из теоремы 3 вытекает теорема 1.

Отметим еще одно следствие теорем 1 и 2.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Одна из точек пересечения чевианной и pedalной окружностей произвольной точки  $P$ , отличной от вершин треугольника  $ABC$ , лежит на окружности Эйлера этого треугольника.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведем через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $P$  равностороннюю гиперболу  $\Gamma_P$ . Тогда по теореме 2 чевианная окружность точки  $P$  проходит через центр  $K$  гиперболы  $\Gamma_P$ , лежащий на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , а согласно теореме 1 pedalная окружность точки  $P$  также проходит через центр  $K$  этой гиперболы.  $\square$

## 2. ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ЧЕВИАННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Автору было известно только аналитическое доказательство теоремы 2. А. Заславскому и А. Акопяну удалось придумать геометрическое доказательство этой теоремы, которое приводится ниже.

**ЛЕММА 3.** *Пусть даны два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ .  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — точки пересечения, соответственно,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$ ,  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Если треугольник  $A'B'C'$  перспективен как треугольнику  $A_1B_1C_1$ , так и треугольнику  $A_2B_2C_2$  (с центрами перспективы  $D_1$  и  $D_2$ ), то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  лежат на одной конике.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  в квадрат. Точка  $A'$  лежит на пересечении прямых  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$ , точка  $C'$  — на пересечении прямых  $A_1B_1$  и  $D_1C_1$ . Поэтому точки  $A'$  и  $C'$  при этом преобразовании переходят в бесконечно удаленные точки, соответствующие перпендикулярным направлениям, а четырехугольник  $A_2B_2C_2D_2$  переходит в прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Кроме того, центром как квадрата, так и прямоугольника будет образ точки  $B'$ . Очевидно, что коника, проходящая через вершины квадрата и одну вершину прямоугольника, проходит и через три остальные вершины прямоугольника.  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.** *Пусть дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ , отличная от его ортоцентра. Тогда центры вписанной и невписанных окружностей чевианного*

треугольника  $P$  относительно  $ABC$  лежат на равносторонней гиперболе, проходящей через  $A, B, C, P$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $A'B'C'$  — чевианный треугольник точки  $P$ ,  $I$  — центр его вписанной окружности,  $I_1, I_2, I_3$  — центры невписанных окружностей. Тогда треугольники  $ABC$  и  $I_1I_2I_3$  удовлетворяют условиям леммы — они перспективны треугольнику  $A'B'C'$  с центрами перспективы  $P$  и  $I$  соответственно. Следовательно, точки  $A, B, C, P, I_1, I_2, I_3, I$  лежат на одной конике. Эта коника является равносторонней гиперболой, поскольку  $I$  — ортоцентр треугольника  $I_1I_2I_3$ ,  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме 4 центры невписанных окружностей чевианного треугольника  $I_1, I_2, I_3$  лежат на гиперболе. Так как чевианная окружность является окружностью Эйлера треугольника  $I_1I_2I_3$  (вершины чевианного треугольника — основания высот треугольника  $I_1I_2I_3$ ), то по лемме 1 она проходит через центр гиперболы.  $\square$

### 3. ЕЩЕ РАЗ О СЕМЕЙСТВЕ ФЕЙЕРБАХА

Покажем теперь, как из теоремы 2 следует результат о «семействе Фейербаха», полученный Л. Емельяновым и Т. Емельяновой. Проведем через вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  и центр  $I$  вписанной в него окружности равностороннюю гиперболу  $\Gamma_I$ . Обозначим через  $J$  точку Жергонна, а через  $N$  — точку Нагеля, т. е. точку пересечения чевиан, основаниями которых служат точки касания невписанных окружностей со сторонами (а не с продолжениями сторон) треугольника  $ABC$ . Напомним, что для точек  $A, B, C, D$ , лежащих на одной прямой, выражение  $(AC/BC) : (AD/BD)$  называется двойным отношением и обозначается  $(ABCD)$ . При этом отношение  $AC/BC$  считается положительным, если точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ , и отрицательным в противном случае. Говорят, что точки  $A, B, C, D$  образуют гармоническую четверку, если их двойное отношение равно  $-1$ . Проведем из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  биссектрисы  $AL$  и  $AL_1$  внутреннего и внешнего углов при вершине  $A$  соответственно. Тогда точки  $B, C, L, L_1$  образуют гармоническую четверку. В самом деле, по свойствам биссектрис внутреннего и внешнего угла треугольника  $BL/LC = AB/BC$ ,  $BL_1/L_1C = -AB/AC$ , откуда  $(ABCD) = -1$ .

Пусть  $I$  — центр вписанной, а  $I_a$  — центр невписанной окружности, касающейся стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ ,  $L$  — основание биссектрисы  $AL$ ,  $I'_a, I'$  и  $A'$  — прямоугольные проекции точек  $I_a, I, A$  на сторону  $BC$ . В треугольнике  $ABL$  отрезки  $AI$  и  $AI_a$  являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине  $A$ , поэтому четверка  $A, L, I, I_a$  — гармоническая. Так как при параллельном проектировании двойное отношение сохраняется, то точки  $A', L, I', I'_a$  также образуют гармоническую четверку, а соответствующие лучи  $AA', AL, AI', AI'_a$  — гармонический пучок. Ясно, что на сторонах  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  располагаются еще две аналогичные гармонические четверки, которым соответствуют гармонические пучки лучей, исходящих из вершин  $B$  и  $C$ . Это означает, что ортоцентр  $H$  и точки  $I, J, N$  проектируются из каждой

вершины треугольника  $ABC$  четырьмя лучами, образующими гармонический пучок. Поэтому точки  $H, I, J, N$  лежат на кривой второго порядка, проходящей через вершины треугольника  $ABC$ .

Но любая кривая второго порядка, которая проходит через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносоставленной гиперболой, т. е. совпадает в данном случае с гиперболой  $\Gamma_I$ . Таким образом, мы доказали, что точки  $J$  и  $N$  лежат на гиперболе  $\Gamma_I$ . Тогда описанная окружность чевианного треугольника точки  $J$ , совпадающая с вписанной окружностью треугольника  $ABC$ , проходит по теореме 2 через центр гиперболы  $\Gamma_I$ , лежащий согласно лемме 1 на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Но по теореме Фейербаха вписанная окружность касается окружности Эйлера, т. е. имеет с ней единственную общую точку  $F$ , поэтому центр гиперболы  $\Gamma_I$  совпадает с точкой Фейербаха  $F$ .

Итак, описанная окружность чевианного треугольника любой точки, лежащей на  $\Gamma_I$ , проходит через точку  $F$ . В частности, окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника  $ABC$ , проходит через  $F$ . Поскольку точка Нагеля  $N$  лежит на  $\Gamma_I$ , то точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника  $ABC$  и точка  $F$  также лежат на одной окружности, которую мы будем обозначать через  $S_I$ .

**ЛЕММА 4.** *Рассмотрим треугольник  $ABC$ , вписанный в равносоставленную гиперболу  $\Gamma$ . Пусть  $X$  — точка пересечения касательных к гиперболе  $\Gamma$ , проведенных в вершинах  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ ,  $Y$  — в вершинах  $A$  и  $B$ , и  $Z$  — в вершинах  $A$  и  $B$ ;  $P$  — произвольная точка гиперболы  $\Gamma$ , отличная от  $A, B, C$ ;  $P_1 = AP \cap BC$ ,  $P_2 = BP \cap AC$ ,  $P_3 = CP \cap AB$ . Тогда прямые  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$ ,  $P_1P_2$  проходят через точки  $X, Y, Z$  соответственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим вырожденный вписанный шестиугольник  $BBACCP$ . Тогда  $X = BB \cap CC$ ,  $P_3 = BA \cap CP$ ,  $P_2 = AC \cap PB$  и по теореме Паскаля точки  $X, P_3, P_2$  лежат на одной прямой. Аналогично показывается, что прямые  $P_3P_1$  и  $P_1P_2$  проходят через точки  $Y$  и  $Z$  соответственно.  $\square$

Так как ортоцентр треугольника  $ABC$  лежит на любой равносоставленной гиперболе, описанной около треугольника  $ABC$ , то прямые, содержащие стороны его ортоцентрического треугольника, проходят через точки  $X, Y, Z$ . Другими словами, точки  $X, Y, Z$  лежат на прямых, содержащих стороны ортоцентрического треугольника и для их определения достаточно найти точки пересечения прямых, содержащих стороны чевианного треугольника точки  $P$ , с соответствующими прямыми, содержащими стороны ортоцентрического треугольника  $ABC$ .

Легко видеть, что в случае  $\Gamma = \Gamma_I$  точки  $X, Y, Z$  совпадают с полюсами  $A_{00}, B_{00}, C_{00}$  из статьи Емельяновых.

**ЛЕММА 5.** *Если равносоставленные гиперболы, описанные около треугольника  $ABC$ , имеют общий центр, то они совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $D$  — точка, симметричная одной из вершин треугольника  $ABC$  относительно общего центра гипербол и отличная от ортоцентра  $ABC$ . Тогда равносоставленные гиперболы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют 4 общие точки  $A, B,$

$C, D$ , ни одна из которых не является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных, и поэтому совпадают.  $\square$

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $P$  — точка, отличная от вершин  $A, B, C$  треугольника  $ABC$ ;  $AP_1, BP_2, CP_3$  — чевианы, пересекающиеся в точке  $P$ ;  $H_1, H_2, H_3$  — основания высот  $AH_1, BH_2, CH_3$  треугольника  $ABC$ ;  $X = P_2P_3 \cap H_2H_3$ ,  $Y = P_1P_3 \cap H_1H_3$ ,  $Z = P_1P_2 \cap H_1H_2$ ;  $\Gamma_P$  — равносоставленная гипербола, проведенная через точки  $A, B, C, P$ ;  $AT_1, BT_2, CT_3$  — чевианы, пересекающиеся в точке  $T$ , причем прямые  $T_2T_3, T_1T_3, T_1T_2$  проходят через точки  $X, Y, Z$  соответственно. Тогда точка  $T$  лежит на гиперболе  $\Gamma_P$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведем через точки  $A, B, C, T$  равносоставленную гиперболу  $\Gamma_T$ . По лемме 4 точки  $X, Y, Z$  совпадают с точками пересечения соответствующих касательных к гиперболам  $\Gamma_P$  и  $\Gamma_T$  в вершинах  $A, B, C$  треугольника  $ABC$ , т. е. гиперболы  $\Gamma_P$  и  $\Gamma_T$  имеют общие касательные в точках  $A, B, C$ . Обозначим через  $M_1, M_2, M_3$  середины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ . Тогда прямые  $M_1X, M_2Y, M_3Z$  пересекаются в центре гипербол  $\Gamma_P$  и  $\Gamma_T$ . Так как гиперболы  $\Gamma_P$  и  $\Gamma_T$  имеют общий центр, то по лемме 5 они совпадают. Таким образом, точка  $T$  лежит на гиперболе  $\Gamma_P$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 3.** В случае, когда точка  $P$  из теоремы 5 совпадает с центром  $I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$ , все точки  $T$ , удовлетворяющие условию теоремы 5, лежат на равносоставленной гиперболе  $\Gamma_I$  с центром в точке Фейербаха  $F$  треугольника  $ABC$ .

Заметим, что в следствии 3 говорится о тех точках  $T$ , описанная окружность чевианного треугольника которых принадлежит «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых.

Обозначим через  $I_a, I_b, I_c$  центры вневписанных окружностей, касающихся сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ , а через  $F_a, F_b, F_c$  — точки касания вневписанных окружностей с центрами  $I_a, I_b, I_c$  с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ .

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Если точка  $P$  из теоремы 5 совпадает соответственно с точками  $I_a, I_b, I_c$ , то все точки  $T$ , удовлетворяющие условиям теоремы 5, лежат соответственно на равносоставленных гиперболах  $\Gamma_{I_a}, \Gamma_{I_b}, \Gamma_{I_c}$  с центрами в точках  $F_a, F_b, F_c$ .

Пусть  $A_a, B_a, C_a$  — точки касания вневписанной окружности с центром  $I_a$  треугольника  $ABC$  с прямыми  $BC, CA, AB$  соответственно. Аналогично определим  $A_b, B_b, C_b$  и  $A_c, B_c, C_c$ , и пусть  $A_I, B_I, C_I$  — точки касания вписанной окружности  $I$  с этими же прямыми в той же последовательности. Как было показано выше, точки  $A_a, B_b, C_c$  и  $F$  лежат на одной окружности  $S_I$ .

**ЗАДАЧА 1.** Докажите, что каждая из следующих трех четверок точек:  $A_I, B_c, C_b, F_a$ ;  $A_c, B_I, C_a, F_b$ ;  $A_b, B_a, C_I, F_c$  лежит на одной окружности.

Обозначим эти окружности через  $S_a, S_b, S_c$  соответственно. Будем в дальнейшем называть окружности  $S_I, S_a, S_b, S_c$  окружностями четырех точек треугольника  $ABC$ . Из полученных результатов следует

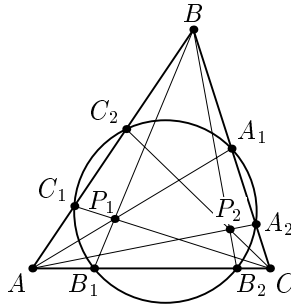


Рис. 5.

**ТЕОРЕМА 6.** Шестнадцать точек касания вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника с прямыми, содержащими стороны этого треугольника, и его окружностью Эйлера лежат на четырех других окружностях по четыре точки на каждой окружности.

**ЗАДАЧА 2.** Докажите, что каждая из следующих шести четверок точек:  $A_a, A_I, F_a, F$ ;  $A_b, A_c, F_b, F_c$ ;  $B_b, B_I, F_b, F$ ;  $B_c, B_a, F_c, F_a$ ;  $C_c, C_I, F_c, F$ ;  $C_a, C_b, F_a, F_b$  лежит на одной окружности.

**ЗАДАЧА 3.** Докажите, что точки касания вписанной и трех внеписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью Эйлера лежат на двух окружностях, по восемь точек на каждой окружности, причем центры этих окружностей совпадают с серединами полуокружностей, на которые делит гипотенуза описанную окружность этого треугольника.

#### 4. ТЕОРЕМА ФЕЙЕРБАХА И ЧЕВИАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

При доказательстве того, что центр гиперболы  $\Gamma_I$  совпадает с точкой Фейербаха  $F$ , мы использовали теорему Фейербаха. Покажем, что на самом деле теорему Фейербаха можно вывести из теоремы 2. Для этого нам понадобится следующая лемма.

**ЛЕММА 6.** Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  — чевианы треугольника  $ABC$ ,  $A_2, B_2, C_2$  — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$ , соответственно со сторонами  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 5). Тогда отрезки  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке, т. е. также являются чевианами треугольника  $ABC$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $AA_1, BB_1, CC_1$  — чевианы треугольника  $ABC$ , то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1, \quad (1)$$

и, так как произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки,

на их внешние части равны, то  $AC_2 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AB_1$ ,  $BA_2 \cdot BA_1 = BC_2 \cdot BC_1$ ,  $CB_2 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CA_1$ . Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2 \cdot AC_1 \cdot BA_2 \cdot BA_1 \cdot CB_2 \cdot CB_1 = AB_2 \cdot AB_1 \cdot BC_2 \cdot BC_1 \cdot CA_2 \cdot CA_1$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1,$$

т. е. по теореме, обратной теореме Чебы, отрезки  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  пересекаются в одной точке.  $\square$

Итак, в общем случае чевианная окружность треугольника является чевианной окружностью двух точек. Через вершины треугольника и каждую из этих точек можно провести единственную равностороннюю гиперболу. Согласно теореме 2 общая чевианная окружность этих точек проходит через центры проведенных гипербол, лежащие на окружности Эйлера треугольника, и поэтому имеет с окружностью Эйлера две общие точки.

Поскольку вписанная и три внеписанные окружности являются чевианными окружностями одной точки, то каждая из этих окружностей имеет с окружностью Эйлера треугольника единственную общую точку, т. е. касается окружности Эйлера.

## 5. ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются *изогональными относительно этого угла*.

**ТЕОРЕМА 7.** Пусть  $P$  — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда прямые, изогональные соответственно прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  этого треугольника, пересекаются в одной точке  $P'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A_1B_1C_1$  — педальный треугольник точки  $P$ , не лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$  (рис. 6),  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки, симметричные  $P$  относительно середин сторон  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$  соответственно. Тогда треугольник  $P_1P_2P_3$  гомотетичен серединному треугольнику треугольника  $A_1B_1C_1$  с центром гомотетии в точке  $P$  и коэффициентом гомотетии, равным 2. Следовательно треугольник  $P_1P_2P_3$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ , причем стороны этих треугольников соответственно параллельны. Далее, поскольку четырехугольники  $PB_1P_1C_1$ ,  $PC_1P_2A_1$ ,  $PA_1P_3B_1$  являются параллелограммами, то  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — ортоцентры треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$ ,  $CA_1B_1$  соответственно (рис. 7). Поэтому  $AP_1 \perp B_1C_1$ ,  $BP_2 \perp C_1A_1$ ,  $CP_3 \perp A_1B_1$ . Но  $B_1C_1 \parallel P_2P_3$ ,  $C_1A_1 \parallel P_1P_3$ ,  $A_1B_1 \parallel P_1P_2$ , откуда вытекает, что  $AP_1 \perp P_2P_3$ ,  $BP_2 \perp P_1P_3$ ,  $CP_3 \perp P_1P_2$ . Таким образом, прямые  $AP_1$ ,  $BP_2$ ,  $CP_3$  содержат

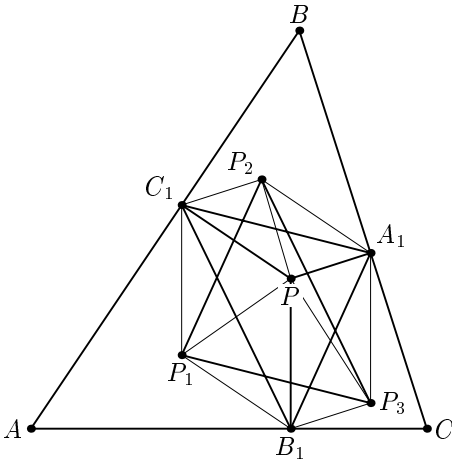


Рис. 6.

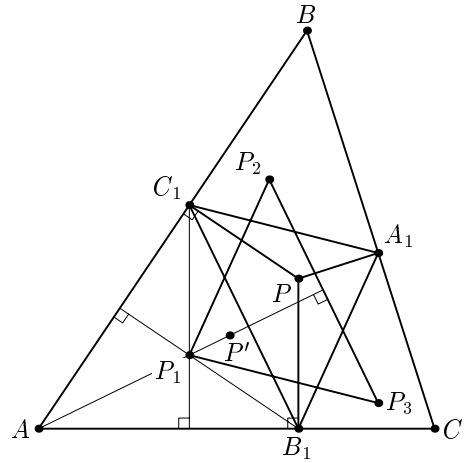


Рис. 7.

высоты треугольника  $P_1P_2P_3$  и, следовательно, пересекаются в точке  $P'$  — ортоцентре треугольника  $P_1P_2P_3$ . Поскольку  $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90^\circ$ , то  $BP$  — диаметр описанной окружности треугольника  $BC_1A_1$ , а, как легко убедиться, прямые, содержащие высоту и диаметр описанной окружности треугольника и выходящие из вершины одного и того же угла треугольника, изогональны относительно этого угла. Естественно, что то же самое справедливо для углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ .  $\square$

Точки  $P$  и  $P'$  называются *изогонально сопряженными* точками относительно треугольника  $ABC$  или просто *изогональными* точками. Точки описанной окружности треугольника оказываются изогонально сопряженными бесконечно удаленным точкам.

**ТЕОРЕМА 8.** Пусть точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда прямые, изогональные прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , параллельны. Верно и обратное: прямые, изогональные параллельным прямым, проходящим через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $AP_1$ ,  $BP_2$ ,  $CP_3$  прямые, изогональные прямым  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  соответственно (см. рис. 8). Изогональность влечет равенства углов

$$\angle CAP = \angle BAP_1, \quad \angle CBP = \angle ABP_2, \quad \angle BCP = \angle ACP_3, \quad \angle BAP = \angle CAP_1.$$

Углы  $\angle CAP$  и  $\angle CBP$  опираются на дугу  $PC$  и потому равны. Аналогично,  $\angle BAP = \angle BCP$ . Поэтому  $\angle P_2BA = \angle P_1AB$ ,  $\angle P_1AC = \angle P_3CA$ , что и означает параллельность прямых  $AP_1$ ,  $BP_2$ ,  $CP_3$ .

Доказательство обратного утверждения аналогично.  $\square$

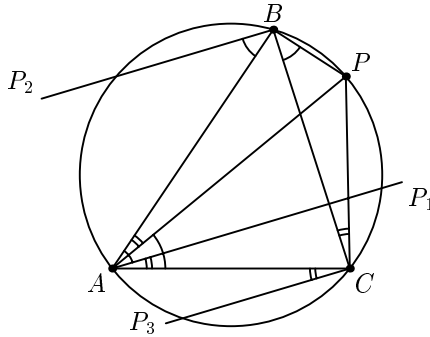


Рис. 8.

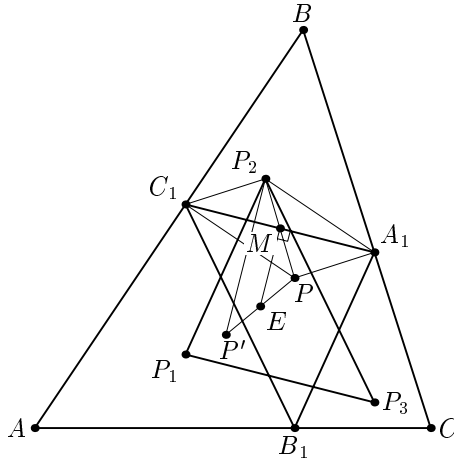


Рис. 9.

**ТЕОРЕМА 9.** Пусть  $P$  и  $P'$  — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника  $ABC$ , а  $A_1B_1C_1$  и  $A'_1B'_1C'_1$  — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A'_1B'_1C'_1$  лежат на одной окружности.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что точка  $E$  — середина отрезка  $PP'$  — является центром описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ . Поскольку  $(P')' = P$ , то отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Используем те же обозначения, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Обозначим через  $M$  середину  $A_1C_1$ . Так как четырехугольник  $PA_1P_2C_1$  — параллелограмм (см. рис. 9), то  $M$  — середина отрезка  $PP_2$ , но  $P_2P' \perp P_1P_3$  и  $P_1P_3 \parallel A_1C_1$ , поэтому серединный перпендикуляр к  $A_1C_1$  совпадает со средней линией треугольника  $P'PP_2$ , т. е. точка  $E$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $A_1C_1$ .

Аналогично показывается, что  $E$  лежит на серединных перпендикулярах к  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  и, таким образом, совпадает с центром описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .  $\square$

Легко видеть, что центр  $O$  описанной окружности треугольника и точка  $H$  пересечения его высот изогонально сопряжены. Поэтому из теоремы 9 получаем, что середины сторон произвольного треугольника и основания его высот лежат на одной окружности (окружности Эйлера).

Подобные треугольники  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  являются уменьшенными копиями треугольника  $ABC$  (см. упр. 1), поэтому можно рассматривать точки, одинаково расположенные относительно треугольников  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ .

**ТЕОРЕМА 10.** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — проекции точки  $P$  на стороны (или продолжения сторон)  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ ;  $P_1, P_2, P_3$  — точки, симметричные  $P$  относительно середин сторон  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ ;  $H_1, H_2, H_3$  — основания высот  $AH_1, BH_2, CH_3$  треугольника  $ABC$ . Тогда точки  $P, P_1, P_2, P_3$  одинаково расположены по отношению к треугольникам  $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$  соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку при симметрии относительно биссектрисы угла  $B$  треугольник  $BH_3H_1$  переходит в треугольник, гомотетичный треугольнику  $ABC$  с коэффициентом гомотетии равным  $\cos \angle ABC = \cos \beta$ , то одинаково расположенные точки треугольников  $ABC$  и  $BH_3H_1$  лежат на прямых, изогональных относительно угла  $B$ . Ранее было показано (см. доказательство теоремы 7), что прямые  $BP$  и  $BP_2$  изогональны, а  $P_2$  — ортоцентр треугольника  $BC_1A_1$ . С другой стороны,  $PB$  — диаметр описанной окружности треугольника  $BC_1A_1$ . Применяя результат упражнения 1 к треугольнику  $BC_1A_1$ , приходим к выводу, что  $BP_2$  — диаметр окружности, описанной около треугольника, подобного  $BC_1A_1$  с коэффициентом подобия  $\cos \beta$ . Значит,  $PB = BP_2 \cos \beta$ , и точки  $P$  и  $P_2$  одинаково расположены относительно треугольников  $ABC$  и  $BH_3H_1$ .  $\square$

Комбинируя предыдущие теоремы, получаем такое следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 5.** Пусть  $H_1, H_2, H_3$  — основания высот  $AH_1, BH_2, CH_3$  треугольника  $ABC$ ; точки  $P, P_1, P_2, P_3$  одинаково расположены по отношению к треугольникам  $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$  соответственно. Тогда треугольник  $P_1P_2P_3$  равен педальному треугольнику  $A_1B_1C_1$  точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ , причем стороны треугольников  $P_1P_2P_3$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно параллельны.

Перейдем к доказательству следующего важного утверждения.

**ТЕОРЕМА 11.** Пусть  $P$  — произвольная точка в плоскости треугольника  $ABC$ , не лежащая на его описанной окружности;  $AH_1, BH_2, CH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1, E_2, E_3$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ ;  $P_1, P_2, P_3$  — точки, одинаково расположенные с  $P$  относительно треугольников  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC$  соответственно. Тогда прямые  $E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3$  пересекаются в такой точке  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ ,

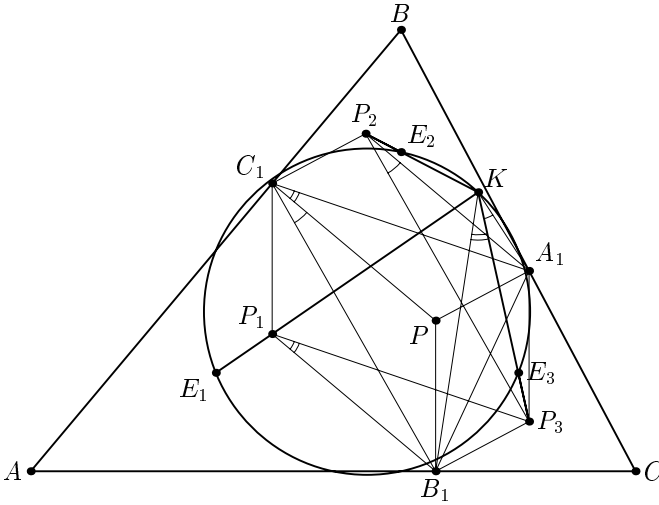


Рис. 10.

через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим центр описанной окружности треугольника  $ABC$  через  $O$ . Точки  $E_1, E_2, E_3$  являются центрами описанных окружностей треугольников  $T_1 = AH_2H_3, T_2 = BH_3H_1, T_3 = CH_1H_2$  соответственно. Поэтому прямые  $E_iP_i$  одинаково расположены с прямой  $OP$  относительно треугольников  $T_i, ABC$  соответственно. Значит, они изогональны прямым  $\ell_i$ , проходящим через  $E_i$  параллельно  $OP$ . (Напомним, что подобие, совмещающее треугольники  $ABC$  и, скажем,  $T_1$ , является композицией гомотетии с центром в  $A$  и отражения относительно биссектрисы угла  $A$ .) По теореме 8 получаем, что прямые  $E_iP_i$  проходят через точку  $K$  на описанной окружности треугольника  $E_1E_2E_3$ , т. е. на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Обозначим через  $A_1, B_1, C_1$  проекции точки  $P$  на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC, \angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ . Так как  $P_2$  и  $P_3$  — ортоцентры треугольников  $A_1BC_1$  и  $B_1CA_1$  (см. теорему 10 и доказательство теоремы 7), то  $\angle P_2A_1P_3 = 180^\circ - \angle P_2A_1B - \angle P_3A_1C = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ . Далее,  $\angle P_2KP_3 = \angle E_2KE_3 = 180^\circ - \alpha = \angle P_2A_1P_3$  (напомним, что треугольник  $E_1E_2E_3$  гомотетичен треугольнику  $ABC$  с центром гомотетии  $H$ , поэтому  $\angle E_2E_1E_3 = \angle BAC = \alpha$ ). Из равенства углов  $\angle P_2KP_3$  и  $\angle P_2A_1P_3$  следует, что точки  $P_2, K, A_1, P_3$  лежат на одной окружности. Аналогично показывается, что точки  $P_3, B_1, P_1, K$  также лежат на одной окружности.

Теперь можно найти угол  $\angle B_1KA_1$ :  $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1$ , но  $\angle B_1KP_3 = \angle B_1P_1P_3$  как вписанные углы, опирающиеся на дугу  $P_3A_1$  окружности  $B_1P_1KP_3$ , а  $\angle P_3KA_1 = \angle P_3P_2A_1$  как вписанные углы, опирающиеся на дугу  $P_3A_1$  окружности  $A_1P_3P_2K$ . Как известно из доказательства теоремы 7,

четырёхугольники  $P_1C_1PB_1$ ,  $P_1C_1A_1P_3$ ,  $B_1C_1P_2P_3$ ,  $C_1P_2A_1P$  являются параллелограммами, поэтому  $\angle B_1P_1P_3 = \angle PC_1A_1$  и  $\angle P_3P_2A_1 = \angle B_1C_1P$  как углы с соответственно параллельными сторонами.

Итак, окончательно получаем  $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle B_1P_1P_3 + \angle P_3P_2A_1 = \angle PC_1A_1 + \angle B_1C_1P = \angle B_1C_1A_1$ , т. е.  $\angle B_1KA_1 = \angle B_1C_1A_1$  и поэтому точка  $K$  лежит на описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Доказательство существенным образом опирается на рис. 10. Точки  $K$  и  $C_1$  могут находиться по разные стороны от прямой  $A_1B_1$ . В этом случае аналогичными рассуждениями можно доказать, что  $\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1KB_1 = 180^\circ$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Теорему 11 можно переформулировать следующим образом: Пусть  $P$  — произвольная точка в плоскости треугольника  $ABC$ ;  $AH_1$ ,  $AH_2$ ,  $AH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  — середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ;  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  — прямые, параллельные прямой  $OP$  и проходящие через точки  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  соответственно;  $\ell'_1$ ,  $\ell'_2$ ,  $\ell'_3$  — прямые, изогональные  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  относительно треугольника  $E_1E_2E_3$ . Тогда прямые  $\ell'_1$ ,  $\ell'_2$ ,  $\ell'_3$  пересекаются в такой точке  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.** Докажите теорему 11 для тупоугольного и прямоугольного треугольников.

Поскольку для всех точек  $P$ , лежащих на фиксированной прямой, проходящей через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , точка  $K$  окружности Эйлера этого треугольника будет одной и той же, то из теоремы 11 вытекает

**СЛЕДСТВИЕ 6.** Пусть  $\ell$  — прямая, проходящая через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда описанные окружности педальных треугольников всех точек  $P$ , лежащих на прямой  $\ell$ , имеют общую точку  $K$ , принадлежащую окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Из доказательства теоремы 11 следует также, что различным прямым, проходящим через центр описанной окружности, будут соответствовать различные точки окружности Эйлера.

## 6. ТЕОРЕМА ФЕЙЕРБАХА И ПЕДАЛЬНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

Как уже говорилось, педальные треугольники точки  $P$  и изогонально сопряженной ей точки  $P'$  имеют общую описанную окружность (теорема 9). Из этого факта и теоремы 11 следует, что эта описанная окружность пересекает окружность Эйлера треугольника  $ABC$  в двух точках  $K$  и  $K'$ , причем  $K$  — это точка пересечения прямых  $E_1P_1$ ,  $E_2P_2$ ,  $E_3P_3$ , а  $K'$  — точка пересечения прямых  $E_1P'_1$ ,  $E_2P'_2$ ,  $E_3P'_3$  ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки, одинаково расположенные с  $P$ , а  $P'_1$ ,  $P'_2$ ,  $P'_3$  — с  $P'$  относительно треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ ,  $ABC$ ).

Если прямая  $PP'$  проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , то, как ясно из сказанного выше, точки пересечения  $K$  и  $K'$  общей

описанной окружности педальных треугольников изогонально сопряженных точек  $P$  и  $P'$  будут совпадать, т. е. описанная окружность педальных треугольников точек  $P$  и  $P'$  будет касаться окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Таким образом, имеет место

**СЛЕДСТВИЕ 7.** Пусть  $P$  и  $P'$  — изогональные относительно треугольника  $ABC$  точки такие, что прямая  $PP'$  проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда общая педальная окружность точек  $P$  и  $P'$  касается окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника, тогда педальная окружность точки  $I$  совпадает со вписанной окружностью этого треугольника. Поскольку точка  $I$  изогонально сопряжена самой себе, то из наших рассуждений следует, что вписанная окружность треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника (предположение о наличии второй точки пересечения вписанной окружности с окружностью Эйлера приводит к противоречию, так как в этом случае должна существовать точка  $I$ , изогонально сопряженная с  $I$  и отличная от  $I$ ).

Аналогично, центры внеписанных окружностей  $I_a, I_b, I_c$  являются изогонально самосопряженными точками и поэтому внеписанные окружности также касаются окружности Эйлера данного треугольника.

Итак, нами доказана еще раз теорема Фейербаха.

Геометрическое место точек  $P$  таких, что прямая  $PP'$ , где  $P'$  — точка, изогональная  $P$ , проходит через центр описанной окружности треугольника, называется кубикой Мак-Кэя этого треугольника ([5, с.575]). Поэтому обобщение теоремы Фейербаха можно сформулировать следующим образом: педальная окружность любой точки кубики Мак-Кэя данного треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника.

## 7. ИЗОГОНАЛЬНЫЙ ОБРАЗ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вспомнив, что изогональные точки  $P$  и  $P'$  имеют общую педальную окружность (теорема 9), и учитывая следствие 6 и теорему 1, получим еще одно утверждение.

**ТЕОРЕМА 12.** Изогональным образом прямой  $\ell$ , проходящей через центр описанной окружности треугольника  $ABC$  и не содержащей его вершин, является равносоставленная гипербола, описанная около этого треугольника, причем асимптотами этой гиперболы являются прямые Симсона точек пересечения прямой  $\ell$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим точку  $P$  на прямой  $\ell$  и изогонально сопряженную ей точку  $P'$ . Проведем через  $P', A, B, C$  равносоставленную гиперболу  $\Gamma$ . Центр этой гиперболы лежит на окружности Эйлера и на общей педальной окружности точек  $P$  и  $P'$ . У этих двух окружностей есть, вообще говоря, две

общие точки, одна из которых, назовем ее  $K$ , лежит на всех педальных окружностях точек прямой  $OP$ , а вторая ( $K'$ ) — на всех педальных окружностях точек прямой  $OP'$ . Центр гиперболы  $\Gamma$  совпадает с  $K$  (если двигать точку по гиперболе, то  $K'$  будет меняться).

Повторив это рассуждение для любой другой точки  $P$  на прямой  $\ell$  и применив лемму 5, получаем утверждение теоремы.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 8.** *Геометрическим местом точек  $P$ , педальная окружность которых проходит через точку  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , является объединение равносторонней гиперболы с центром в точке  $K$ , описанной около треугольника  $ABC$ , но без точек  $A, B, C$ , и прямой  $\ell$ , изогональной этой гиперболе.*

Из следствия 8 вытекает, что к «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых можно добавить семейство педальных окружностей точек  $P$ , лежащих либо на равносторонней гиперболе  $\Gamma_I$ , проходящей через центр  $I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  и имеющей своим центром точку Фейербаха  $F$ , либо на прямой  $OI$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Аналогичные факты справедливы и для других точек Фейербаха  $F_a, F_b, F_c$  (точки касания со вневписанными окружностями).

На равносторонней гиперболе  $\Gamma_I$ , описанной около  $ABC$ , лежат, кроме вершин  $A, B, C$ , центр вписанной окружности  $I$ , точка Жергонна  $J$ , точка Нагеля  $N$  и естественно ортоцентр  $H$ . Выбирая любые 4 точки из указанных 7 (кроме тривиальной комбинации  $A, B, C, H$ ) и рассматривая чевианые и педальные окружности одной из этих 4 точек по отношению к треугольнику с вершинами в трех остальных, получим с учетом следствия 2, что эти окружности пройдут через точку Фейербаха  $F$ , совпадающую с центром гиперболы  $\Gamma_I$ . Аналогичные факты справедливы и для остальных точек Фейербаха  $F_a, F_b, F_c$ .

Рассмотрим теперь равностороннюю гиперболу  $\Gamma_O$ , являющуюся изогональным образом прямой Эйлера  $OH$  треугольника  $ABC$ . Эта гипербола проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  и точку  $L$ , изогональную точке пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Как известно (см. [5, 7]), точка  $L$  называется точкой Лемуана. Для нахождения центра этой гиперболы используем следующую теорему В. Тебо из сборника «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» [2, с.81].

**ТЕОРЕМА.** *Пусть  $AH_1, BH_2, CH_3$  — высоты треугольника  $ABC$ . Тогда прямые Эйлера треугольников  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$  пересекаются в такой точке  $T$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , для которой один из отрезков  $TH_1, TH_2, TH_3$  равен сумме двух остальных.*

Обобщение теоремы Тебо приведено в [3].

Будем называть точку пересечения прямых Эйлера треугольников  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$  точкой Тебо треугольника  $ABC$ . Из следствия 6 вытекает, что описанные окружности педальных треугольников всех точек  $P$ , лежащих на прямой Эйлера, проходят через точку Тебо треугольника  $ABC$ , так что она является центром гиперболы  $\Gamma_O$ . Так как точка пересечения медиан  $G$

треугольника лежит на его прямой Эйлера, то описанная окружность педального треугольника точки  $G$  проходит через точку Тебо этого треугольника.

Чевианные и педальные окружности всех точек, лежащих на  $\Gamma_O$ , а также педальные окружности всех точек, лежащих на прямой Эйлера  $OH$  треугольника  $ABC$ , проходят через точку Тебо. На гиперболе  $\Gamma_O$  лежат точки  $A, B, C, H, O, L$ . Поэтому, в частности, чевианная окружность точки  $O$ , а также чевианная и педальная окружности точки Лемуана  $L$  проходят через точку Тебо. Если начертить равностороннюю гиперболу и из любой ее точки как из центра провести окружность, пересекающую эту гиперболу в четырех точках, то для полученных четырех треугольников с вершинами в указанных точках центр гиперболы будет точкой Тебо.

## 8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Аналогия между педальными и чевианными треугольниками, которая прослеживается в приведенных выше результатах, не имеет удовлетворительного объяснения. Дело усугубляется еще и тем, что эта аналогия неполна. В частности, вопрос о касании чевианных окружностей с окружностью Эйлера оказывается намного сложнее вопроса о касании педальных окружностей и окружности Эйлера. В последнем случае ответ дает кубика Мак-Кэя. Аналогичное множество для чевианных окружностей устроено гораздо сложнее.

Геометрическое место точек  $P$ , чевианная окружность которых проходит через точку  $K$  окружности Эйлера  $ABC$ , состоит из равносторонней гиперболы  $\Gamma$  с центром в точке  $K$ , из которой удалены точки  $A, B, C$ , и некоторой кривой  $L$ , которую описывает вторая точка  $P'$  с той же самой чевианной окружностью, что и  $P$  (см. лемму 6), в то время как точка  $P$  пробегает гиперболу  $\Gamma$ . Назовем эту кривую  $L$  *чевианным образом гиперболы*.

Вопрос о существовании чевианных окружностей, касающихся окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , сводится к вопросу о существовании равносторонних гипербол, описанных около треугольника  $ABC$  и проходящих через обе точки  $P$  и  $P'$ , т. е. о пересечении гиперболы и ее чевианного образа.

Обозначим через  $M$  множество точек, чевианная окружность каждой из которых касается окружности Эйлера данного треугольника. Это множество пусто для любого треугольника, поскольку центры вписанной и невписанных окружностей принадлежат  $M$ . С другой стороны, компьютерные эксперименты показывают, что существуют треугольники, множество  $M$  которых содержит некоторые дополнительные точки.

Результаты компьютерных экспериментов приводят также к предположению, что если  $M$  является кривой, то ее асимптоты — прямые, содержащие медианы треугольника  $ABC$ .

Автор выражает благодарность М. Н. Вялому за улучшение изложения и структуры статьи, а также А. Заславскому и А. Акопяну — за предоставленное ими геометрическое доказательство теоремы 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глаголев Н. А. *Проективная геометрия*. М.: Высшая школа, 1963.
- [2] *Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly»*. М.: Мир, 1977.
- [3] Куланин Е. Д. *О прямых Эйлера и окружности девяти точек* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №43, 2000.
- [4] Прасолов В. В. *Теорема о пучке коник, проходящих через четыре точки* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 1. 1997. С. 109–114.
- [5] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. М.: МНЦМО, 2001.
- [6] Куланин Е. Д. *Об одном свойстве точек Фейербаха* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №10, 1997.
- [7] Зетель С. И. *Новая геометрия треугольника*. М.: Учпедгиз, 1940.

# О матрицах Грама

В. А. Юдин

Рассмотрим несколько известных задач из дискретной геометрии. Решения практически всех сегодня неизвестны.

Через  $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  обозначим скалярные произведения векторов  $x$  и  $y$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Для произвольного набора  $W = \{e_1, \dots, e_q\}$  различных единичных векторов выпишем их матрицу Грама

$$G(W) = \begin{bmatrix} 1 & e_1e_2 & \dots & e_1e_q \\ e_2e_1 & 1 & \dots & e_2e_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_qe_1 & e_qe_2 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(в дальнейшем будем отождествлять единичные векторы с точками единичной сферы  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : xx = 1\}$ ).

## 1. ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Все различные скалярные произведения, встречающиеся в (1), запишем в строчку

$$S(W) = \{1, t_1, \dots, t_s\}, \quad 1 > t_1 > \dots > t_s. \quad (2)$$

Например, если  $W$  состоит из  $(n+1)$ -й вершины правильного симплекса, вписанного в  $S^{n-1}$ , то  $S(W)$  состоит всего из двух чисел  $\{1, -1/n\}$ . Если  $W$  — совокупность вершин правильного  $2q$ -угольника, то

$$S(W) = \{1, \cos \frac{\pi}{q}, \cos \frac{2\pi}{q}, \dots, -1\}.$$

Пусть мы знаем всю строчку (2) для некоторой сферической конфигурации  $W$ . Можем ли мы единственным образом восстановить  $W$ ?

Вначале определимся с единственностью. Две конфигурации  $W_1, W_2$  считаем одинаковыми, если существует вращение  $\rho$  такое, что  $W_1 = \rho W_2$ . Под вращением  $\rho$  понимаем линейное преобразование  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , осуществляемое посредством ортогональной матрицы  $T$ ,  $TT' = T'T = E$  с  $\det T = \pm 1$ . Изменение ориентации допускается. Ортогональная матрица «сохраняет» скалярные произведения

$$TxTy = xT'Ty = xEy = xy,$$

следовательно, для «поворота»  $\rho$  строчки  $S(W)$  и  $S(\rho W)$  одинаковы.

В общей ситуации ответ на вопрос, конечно, отрицательный. Однако некоторым загадочным образом сферические конфигурации делятся на два класса: восстанавливаемые по  $S(W)$  и невозстанавливаемые.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Любая сферическая конфигурация  $W = \{e_1, e_2, e_3\}$  из  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  по  $S(W)$  восстанавливается единственным образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть сферическая конфигурация  $W = \{e_1, \dots, e_8\}$  из  $\mathbb{R}^3$  такова, что

$$S(W) = \left\{1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right\}.$$

Тогда  $W$  — восемь вершин куба.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. (Hantjes, 1948) Пусть сферическая конфигурация  $W = \{e_1, \dots, e_{12}\}$  из  $\mathbb{R}^3$  такова, что

$$S(W) = \left\{1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -1\right\}.$$

Тогда  $W$  — двенадцать вершин икосаэдра. Скалярные произведения его полностью характеризуют.

Доказательства первых двух утверждений несложны, относительно третьего см. [1], где также обсуждается ряд близких вопросов. Наша цель — показать, что при  $n \geq 3$  невозстанавливаемая конфигурация существует уже при  $q = 4$ . Достаточно в  $\mathbb{R}^3$  привести две разные конфигурации  $W_1, W_2$  с одинаковыми строчками (2). Пусть  $W_1$  состоит из векторов  $e_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$ ,  $e_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$ ,  $e_3 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ ,  $e_4 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ , а  $W_2$  — из векторов  $e_1 = \{1, 0, 0\}$ ,  $e_2 = \{0, 0, 1\}$ ,  $e_3 = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$ ,  $e_4 = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$ . Вычислим их матрицы Грама

$$G(W_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G(W_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

и увидим, что  $S(W_1) = S(W_2) = \{1, 0, -1/2\}$ . Однако  $W_1$  и  $W_2$  — разные конфигурации, поскольку нулей в  $G(W_1)$  четыре, а в  $G(W_2)$  — шесть.

Усложним теперь вопрос. Поставим набору  $W$  в соответствие таблицу

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & t_1 & t_2 & \dots & t_s \\ \hline q & N_1 & N_2 & \dots & N_s \end{array}, \quad (3)$$

где верхняя строка есть  $S(W)$ , а нижняя определяется кратностями

$$N_i = \sum_{x, y \in W, xy=t_i} 1; \quad N_1 + \dots + N_s = q^2 - q.$$

Для какого наименьшего  $q$  можно построить два разных набора  $W_1, W_2$ , имеющих одну и ту же таблицу (3).

## 2. КОЛИЧЕСТВО РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ГРАМА

Сколько различных элементов содержится в матрице (1)? Если не учитывать главную диагональ, то верхняя граница  $(q^2 - q)/2$  очевидна, и она достигается. При  $q \rightarrow \infty$  относительно нижней границы при  $n \geq 3$  неизвестен даже ее порядок роста. Случай  $n = 2$  прост.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть на единичной окружности расположено  $q$  различных точек. Тогда количество  $s$  различных расстояний между ними удовлетворяет неравенству

$$s \geq \begin{cases} \frac{q-1}{2}, & q \text{ — нечетно,} \\ \frac{q}{2}, & q \text{ — четно.} \end{cases} \quad (4)$$

Действительно, возьмем произвольную точку  $x$  нашей конфигурации  $W$  и проведем через нее диаметр. Он разобьет окружность на две дуги. Нужно рассмотреть два случая: точка  $-x \in W$  и  $-x \notin W$ . Если  $-x \in W$ , то на одной из дуг будет располагаться не менее чем  $(q-2)/2$  точек  $W$ , если  $q$  — четно, и не менее  $(q-1)/2$  точек  $W$ , если  $q$  — нечетно. Поскольку все расстояния от  $x$  до этих точек разные, то получается оценка

$$s \geq \begin{cases} \frac{q+1}{2}, & q \text{ — нечетно,} \\ \frac{q}{2}, & q \text{ — четно.} \end{cases}$$

Аналогично рассматривается и второй случай. Нижняя оценка (4) точна, она достигается для  $q$  вершин правильного  $q$ -угольника.

Воспользуемся одним соображением П. Эрдёша [2] и для размерности  $n = 3$  дадим «слабую» оценку снизу длины строчки (2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть  $W = \{e_1, \dots, e_q\} \subset S^2$ . Тогда

$$s = s(q) \gg q^{1/2}.$$

Все оценки будем проводить, учитывая лишь порядок. Возьмем произвольную точку  $x \in W$  и соединим ее со всеми остальными. Пусть оказалось  $m$  различных расстояний, значит имеем оценку

$$s \gg m, \quad (5)$$

но она плоха, если  $m$  «мало». В этой ситуации продолжим рассуждения. Всего в  $W$  имеется  $q$  точек,  $q-1$  из них располагаются на  $m$  окружностях. Значит, на одной из них расположено не менее чем  $\lceil \frac{q-1}{m} \rceil$  точек. Из предыдущего утверждения находим

$$s \gg q/m. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим

$$s \gg \max\{m, q/m\} \gg q^{1/2}.$$

Поднимаясь по размерности, повторяем рассуждения и находим, что при  $n = 4$   $s \gg q^{1/4}$  и т. д.

В евклидовых пространствах на рассматриваемый выше вопрос смотрят и с другой стороны. Множество  $W$  из  $\mathbb{R}^n$  называется множеством с двумя расстояниями, если всевозможные расстояния между точками  $W$  равны только  $d_1$  и  $d_2$ ,  $0 < d_1 < d_2$ . Каково наибольшее количество точек  $N = N(n)$  содержится в таких множествах? Точные значения известны [3, 4] лишь для малых размерностей. Порядок роста  $N(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  известен, это  $n^2$ . Нижняя оценка делается так: в  $\mathbb{R}^{n+1}$  рассмотрим совокупность  $n(n+1)/2$  точек  $W = \{1^2, 0^{n-1}\}$  — две произвольные координаты равны 1, а остальные  $n-1$  координаты равны 0. Можно считать, что  $W \subset \mathbb{R}^n$ , так как каждая точка  $x$  из  $W$  лежит на гиперплоскости  $x_1 + \dots + x_{n+1} = 2$ .  $W$  есть множество с двумя расстояниями  $d_1 = \sqrt{2}$  и  $d_2 = 2$ . Верхняя оценка  $N(n) \leq (n+1)(n+2)/2$  (А. Blokhuis) выводится труднее (подробности в [4]).

### 3. МНОЖЕСТВА С ОДНИМ РАССТОЯНИЕМ

В этом разделе мы остаемся в конечномерном банаховом пространстве, но уже не обязательно евклидовом. Будем оценивать мощность множества, у которого все взаимные расстояния равны одному и тому же числу. Использовать терминологию функционального анализа не хочется. Обсуждение будем вести в терминах разностных множеств. Множество

$$M^* = \{z = x - y : x \in M, y \in M, x \neq y\}, \quad M \subset \mathbb{R}^n,$$

называется разностным. В  $\mathbb{R}^n$  рассмотрим выпуклую, центрально-симметричную относительно нуля область  $D$  с границей  $\Gamma$ .

**ЗАДАЧА.** Для заданной  $\Gamma$  найти в  $\mathbb{R}^n$  множество  $M$  наибольшей мощности  $N = N(n)$ , удовлетворяющее условию  $M^* \subset \Gamma$ .

Если  $\Gamma = S^{n-1}$  — сфера, то очевидно, что  $N(n) \leq n+1$ , и оценка достигается на вершинах правильного симплекса. Если  $\Gamma$  — граница куба, то  $N(n) \leq 2^n$ . Оценка точная, в качестве  $M$  следует взять  $2^n$  вершин куба. Если

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \dots + |x_n| = 1\}, \quad (7)$$

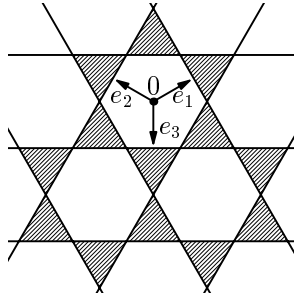
то задача решена лишь при размерностях  $n = 1, 2, 3, 4$ , причем последний случай разобран совсем недавно [5]. Рассматривая в качестве  $M$   $2n$  точек с координатами  $\{\pm \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\}, \dots, \{0, 0, \dots, 0, \pm \frac{1}{2}\}$  получаем оценку снизу  $N(n) \geq 2n$ . Она служит основанием для гипотезы  $N(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$ .

Постановка задачи довольно близка к аналогичным из теории кодирования. Попробуем использовать известные методы гармонического анализа, связанные с положительной определенностью.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 6.** Пусть тригонометрическая сумма

$$f(x) = \sum_s \lambda_s e^{2\pi i s x}, \quad s x = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n$$

удовлетворяет условиям 1)  $\lambda_s \geq 0, \lambda_0 > 0$ ; 2)  $f(x) \leq 0, x \in \Gamma$ .



Тогда

$$N(n) \leq \frac{f(0)}{\lambda_0}. \tag{8}$$

Действительно, пусть  $M = \{x^{(k)}\}_1^N$  и  $M^* \subset \Gamma$ , тогда по условию 2

$$I = \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)} - x^{(l)}) = Nf(0) + \sum_{k \neq l} f(x^{(k)} - x^{(l)}) \leq Nf(0).$$

С другой стороны, по условию 1

$$I = \sum_s \lambda_s \sum_{k,l=1}^N e^{2\pi i s(x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_s \lambda_s \left| \sum_{x \in M} e^{2\pi i s x} \right|^2 \geq \lambda_0 N^2,$$

откуда вытекает (8).

Для  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 1\}$  нужная тригонометрическая сумма строится мгновенно

$$f(x) = \prod_{j=1}^n \cos^2 \frac{\pi x_j}{2} = 2^{-n} \prod_{j=1}^n (1 + \cos \pi x_j).$$

Имеем  $f(x) = 0$ ,  $x \in \Gamma$ ; в силу формул тригонометрии все коэффициенты  $\lambda_s$  неотрицательны,  $\lambda_0 = 2^{-n}$ . Значит, из (8) находим требуемую оценку  $N(n) \leq 2^n$ .

Для различных  $\Gamma$  можно построить соответствующие тригонометрические суммы, которые приводят к хорошим оценкам  $N(n)$ , но для  $\Gamma$ , определенной (7), нужная тригонометрическая сумма строиться почему-то не хочет.

Рассмотрим еще один пример. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — нормали к различным сторонам правильного шестиугольника (см. рис.) Положим

$$f(x) = \cos e_1 x \cos e_2 x \cos e_3 x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2e_1 x + \cos 2e_2 x + \cos e_3 x).$$

На рисунке заштриховано множество

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq 0\}.$$

Выбрав в качестве  $\Gamma$  произвольное подмножество из  $F$ , из неравенства (8) получаем, что мощность любого множества  $M$  такого, что  $M^* \subset \Gamma$ , не превосходит

четырёх. Из этого примера видно, что «гладкость»  $\Gamma$  и выпуклость  $D$  особенно и «не при чём».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. of the Amer. Math. Soc., 1992. V. 96, N. 3.
- [2] Erdős P. *On sets of distances of  $n$  points* // Amer. Math. Monthly, 1946. V. 53. P. 248–250.
- [3] Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K. *Unsolved problems in Geometry*. New York: Springer, 1991.
- [4] Koolen J., Laurent M., Schrijver A. *Equilateral dimension of the rectilinear space* // Designs, Codes and Crypt., 2000. V. 21. P. 149–164.
- [5] Lisoněk P. *New maximal Two-Distance Sets* // J. Combin. Theory. Ser. A, 1997. V. 77. P. 318–338.

---

# Задачи и олимпиады

---

## О повторяющихся под словах

Р. М. Травкин

Известно, что существует бесконечная последовательность букв трехбуквенного алфавита, в которой никакое слово не повторяется подряд (бесконечное бесквадратное слово). Построение такой последовательности — довольно трудная задача: если записывать буквы слова как попало, то можно прийти к конечному слову, которое нельзя продолжить, сохраняя свойство бесквадратности.

Для 57-й московской математической олимпиады (1993 г.) А. В. Спивак предложил следующую задачу.

**ЗАДАЧА 1:** *Существует ли последовательность из 32 букв русского алфавита, не содержащая двух одинаковых кусков, идущих подряд, такая что при присписывании справа любой буквы указанное свойство нарушается?*

Построим такую последовательность над произвольным алфавитом из  $k$  символов  $\{A_1, \dots, A_k\}$  по индукции. Положим

$$z_1 = A_1, \quad z_2 = A_1 A_2 A_1, \quad \dots, \quad z_k = z_{k-1} A_k z_{k-1}, \quad \dots$$

Если к слову  $z_k = z_{k-1} A_k z_{k-1}$  присписать символ  $A_k$ , то получится слово  $z_{k-1} A_k z_{k-1} A_k$ , содержащее два одинаковых куска (подслова) подряд. Если присписать любой другой символ  $A_s$ , два одинаковых куска в  $z_k$  найдутся в силу предположения индукции ( $z_k$  заканчивается на  $z_{k-1}$ ). Задача решена.

В связи с задачей 1 естественно возникает вопрос: *Какова минимально возможная длина  $l_k$  последовательности, удовлетворяющей условию задачи?* ( $k$  — мощность алфавита.) Из приведённого выше решения получается оценка  $l_k \leq 2^k - 1$ . На 2-м фестивале математических боев «Кубок памяти А. Н. Колмогорова» А. Я. Канель-Беловым была предложена задача, в которой предлагалось найти точный ответ на этот вопрос.

В этой статье мы рассматриваем более общую постановку задачи, когда запрещено  $n$ -кратное повторение слова. Получен точный ответ:  $n^k - 1$ .

Данная работа докладывалась на международной конференции школьников ЮНИОР-99, организованной корпорацией INTEL (научный руководитель — А. Я. Канель-Белов).

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Напомним определения и обозначения, используемые при работе со словами.

*Слово* — это конечная последовательность символов (букв) из некоторого алфавита. Слова мы будем обозначать строчными латинскими буквами, а символы алфавита — прописными. Длиной  $|u|$  слова  $u$  называется количество букв в слове. Удобно также использовать и пустое слово нулевой длины, которое вообще не содержит букв.

Слово  $uv$  получается приписыванием после слова  $u$  слова  $v$ . Подслово — это подпоследовательность символов, идущих подряд. В образной терминологии олимпиадных задач подслово называется куском. Через  $w^n$  будем обозначать слово, состоящее из  $n$  раз повторенного слова  $w$  ( $w^0$  обозначает пустое слово).

Пусть  $w$  — непустое слово. Тогда назовем слово вида  $ww$  *квадратичным*, вида  $www$  — *кубическим*,  $w^n$  —  *$n$ -степенным*. Слово, не содержащее подслов вида  $ww$ ,  $www$ ,  $w^n$ , будем называть соответственно *бесквадратным*, *бескубным*,  *$n$ -бесстепенным*. Назовем  $n$ -бесстепенное слово  *$n$ -критическим*, если при добавлении к нему справа любой буквы алфавита удлиненное слово не является  $n$ -бесстепенным, то есть имеет вид  $xw^n$ .

## МИНИМАЛЬНАЯ ДЛИНА КРИТИЧЕСКОГО СЛОВА

Основное утверждение данной работы состоит в точной нижней оценке длины  $n$ -критического слова.

**ТЕОРЕМА 1.** *Минимальная длина  $n$ -критического слова в алфавите из  $k$  букв равна  $n^k - 1$ .*

Вначале докажем, что эта оценка достигается.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Для любых натуральных  $k$  и  $n$  существует  $n$ -критическое слово в алфавите из  $k$  букв.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** проводится индукцией по количеству букв алфавита. При  $k = 1$  утверждение очевидно. Пусть утверждение выполняется для  $k = m$ . Обозначим через  $u(n, m)$  соответствующее  $n$ -критическое слово. Добавим к алфавиту еще одну букву  $A_{m+1}$ . Тогда слово

$$u(n, m + 1) = (u(n, m)A_{m+1})^{n-1}u(n, m)$$

является  $n$ -бесстепенным.

Действительно, пусть  $u(n, m + 1)$  содержит слово  $v = w^n$ . Тогда в  $v$  нет буквы  $A_{m+1}$ , поскольку в  $u(n, m + 1)$  есть всего  $n - 1$  буква  $A_{m+1}$ . Значит,  $v$  содержится в  $u(n, m)$ , что невозможно по предположению индукции. В то же время при добавлении к слову  $u(n, m + 1)$  как буквы  $A_{m+1}$ , так и любой другой буквы, получаем слово, заканчивающееся на  $n$ -ую степень.  $\square$

По индукции легко проверить, что длина слова  $u(n, k)$ , построенного при доказательстве предложения 1, равна  $n^k - 1$ .

Доказывать нижнюю оценку будем следующим образом. Назовем слово  $X/N$ -*нерасширяемым*, если при прибавлении к нему справа буквы  $X$  оно приобретает вид  $xw^N$ . Здесь  $N$  — некоторое натуральное число, которое будем называть

индексом  $X$ -нерасширяемости). Если слово в алфавите из  $k$  букв ( $k \geq 1$ ) является нерасширяемым по всем буквам алфавита соответственно с индексами  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , то назовем его  $(N_1, N_2, \dots, N_k)$ -нерасширяемым. Ясно, что  $n$ -критическое слово будет нерасширяемым по каждой букве алфавита с индексом  $n$  (хотя обратное, вообще говоря, неверно).

ЛЕММА 1. Пусть слово  $u$  является  $(N_1, \dots, N_k)$ -нерасширяемым. Тогда

$$|u| \geq N_1 \cdot \dots \cdot N_k - 1. \tag{1}$$

Из этой леммы вытекает нижняя оценка в теореме 1. В самом деле, любое  $n$ -критическое слово является  $(n, \dots, n)$ -нерасширяемым, а правая часть формулы (1) при  $N_1 = \dots = N_k = n$  дает  $n^k - 1$ .

### ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Определим на словах преобразование  $F_{A,N}$ . Здесь  $A$  — произвольная буква,  $N \geq 2$  — натуральное число (для краткости вместо  $F_{A,N}$  будем писать  $F$ , если понятно, какие значения  $A, N$  имеются в виду). Пусть  $L \geq 1, X \neq A$ . По определению полагаем  $F_{A,N}(A^L) = A^{\min\{L-1, N-2\}}$ ,  $F_{A,N}(A^L X) = A^{\min\{L-1, N-2\}} X$ ,  $F_{A,N}(X)$  — пустое слово. Чтобы определить преобразование  $F_{A,N}$  на произвольном слове  $u$ , разобьем слово  $u$  на  $A$ -блоки, которые строятся следующим образом.

Каждое слово однозначно представляется в виде

$$u = A^{r_1} X_1 A^{r_2} X_2 \dots A^{r_s} X_s A^{r_{s+1}}, \tag{2}$$

где  $s$  — число букв в слове  $u$ , отличных от  $A$ ,  $r_i \geq 0$  при  $i = 1, \dots, s+1$  и  $X_i \neq A$  при  $i = 1, \dots, s$  (при  $s = 0$  равенство (2) принимает вид  $u = A^{r_1}$ ). Используя представление (2), слово  $u$  можно разбить на подслова

$$A^{r_1} X_1, \quad A^{r_2} X_2, \quad \dots, \quad A^{r_s} X_s, \quad A^{r_{s+1}},$$

которые называются  $A$ -блоками (если  $u$  не кончается на  $A$ , то подслово  $A^{r_{s+1}}$  пусто и не считается  $A$ -блоком). Например, слово  $A^2 B^2 A C A^2$  разбивается на  $A$ -блоки  $A^2 B, B, A C, A^2$ , а слово  $A^2 B^2 A C$  — на  $A$ -блоки  $A^2 B, B, A C$ .

Если слово  $u$  разложено на  $A$ -блоки  $b_1, b_2, \dots, b_s$ , то по определению

$$F_{A,N}(u) = F_{A,N}(b_1) F_{A,N}(b_2) \dots F_{A,N}(b_s).$$

Преобразование  $F_{A,N}$  обладает следующими свойствами:

- (F1) если  $u$  кончается на  $A$  и буква  $X \neq A$ , то  $F(uX) = F(u)X$ ;
- (F2) если  $u$  не кончается на  $A$ , то  $F(uv) = F(u)F(v)$ ;
- (F2') (следствие свойства F2) пусть  $u_1, \dots, u_r$  — произвольные слова, причем  $u_1, \dots, u_{r-1}$  не кончаются на  $A$ . Тогда  $F(u_1 \dots u_r) = F(u_1) \dots F(u_r)$ ;
- (F3)  $F(u)$  является началом слова  $F(uv)$ ;
- (F4)  $F(v)$  является концом слова  $F(uv)$ ;
- (F5) каждый  $A$ -блок уменьшается на одну или более букв;

(F6) результат преобразования каждого  $A$ -блока имеет длину  $\leq N - 1$ .

Несложная проверка этих свойств предоставляется читателю.

Доказательство леммы 1 использует следующую лемму

**ЛЕММА 2.** Пусть  $u$  —  $X/M$ -нерасширяемое слово, кончающееся на  $A$  и  $N \geq 2$  — натуральное. Тогда слово  $F_{A,N}(u)$  является: а)  $X/M$ -нерасширяемым, если  $A \neq X$ ; б)  $X/(M-1)$ -нерасширяемым, если  $A = X$  и  $M = N$ .

#### Вывод леммы 1 из леммы 2

Теорема 1 доказывается индукцией по сумме индексов  $N_1 + \dots + N_k$ . Без ограничения общности можно считать, что  $u$  оканчивается на букву  $A$ , имеющую номер 1 в алфавите.

Случай 1:  $N_1 = 1$ .

Пусть  $\tilde{u}$  — слово, получающееся из  $u$  отбрасыванием всех букв  $A$ . Тогда  $\tilde{u}$  является словом над алфавитом, состоящим из всех букв исходного алфавита, кроме  $A$ . Очевидно, что  $\tilde{u}$  является  $(N_2, \dots, N_k)$ -нерасширяемым и имеет сумму индексов меньше, чем  $u$ . Следовательно, для  $\tilde{u}$  справедливо предположение индукции. Поэтому  $|u| \geq |\tilde{u}| \geq N_2 \cdot \dots \cdot N_k - 1 = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k - 1$ , что и требовалось доказать.

Случай 2:  $N_1 > 1$ .

В силу леммы 2 слово  $F(u)$  является  $(N_1 - 1, N_2, \dots, N_k)$ -нерасширяемым, поэтому к нему можно применить предположение индукции. Получим неравенство:

$$|F(u)| \geq (N_1 - 1) \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k - 1. \quad (3)$$

Пусть  $X$  — любая буква алфавита, отличная от  $A$ . Поскольку  $u$  кончается на  $A$ , то

$$F(u)X = F(uX). \quad (4)$$

Ввиду (3) и (4)

$$|F(uX)| = |F(u)X| \geq (N_1 - 1) \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k. \quad (5)$$

Ввиду (F6) и (5) количество  $A$ -блоков в слове  $F(uX)$  не менее  $N_2 \cdot \dots \cdot N_k$ , поэтому с учетом (F5) получаем оценку:

$$|uX| \geq (N_1 - 1) \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k + N_2 \cdot \dots \cdot N_k = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k,$$

откуда  $|u| \geq N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k - 1$ , что и требовалось доказать.

#### Доказательство леммы 2

Доказательство а). Поскольку  $u$  является  $X/M$ -нерасширяемым словом, то найдется такое слово  $x$  и такое непустое слово  $w$ , что  $uX = xw^M$ . Согласно свойству (F4), слово  $F(uX)$  кончается на  $F(w^M)$ . Далее, согласно свойству (F2'), поскольку  $w$  кончается на  $X$ ,  $F(w^M) = (F(w))^M$ . Поскольку  $w$  кончается на  $AX$  (за исключением тривиального случая  $M = 1$ ), то  $F(w)$  кончается на  $X$ , и, следовательно, не пусто. Применяя свойство (F1), получаем, что  $F(u)X = F(uX)$ .

Таким образом, получаем, что  $F(u)X$  кончается на  $(F(w))^M$ . Следовательно, поскольку  $F(w)$  не пусто,  $F(u)$  является  $X/M$ -нерасширяемым, что и требовалось доказать.

Доказательство б). Поскольку  $u$  является  $A/N$ -нерасширяемым, то  $uA = xw^N$  для некоторого слова  $x$  и непустого слова  $w$ . Возможны два случая. Если  $u$  кончается на  $A^{N-1}$ , то  $F(u)$  кончается на  $A^{N-2}$ , и, следовательно, является  $A/(N-1)$ -нерасширяемым.

В противном случае выполняется равенство  $F(u)A = F(uA)$ . Кроме того, этот случай возможен лишь при  $N > 2$ . Если бы  $w$  состояло из одних букв  $A$ , то слово  $xw^N$  кончалось бы на  $A^N$ . Но это невозможно, поскольку мы предположили, что  $u$  не кончается на  $A^{N-1}$ . Следовательно, в  $w$  есть буква, отличная от  $A$ . Поэтому  $w$  можно представить в виде  $zA^k$ , где  $k \geq 1$ , а  $z$  не кончается на  $A$ . Тогда слово  $uA = x(zA^k)^N$  кончается на  $A^k(zA^k)^{N-1} = (A^kz)^{N-1}A^k$ . Согласно свойству (F3), найдется непустое слово  $t$ , такое, что  $F(A^kz) = F(A^k)t$ .

Согласно (F2'),

$$\begin{aligned} F((A^kz)^{N-1}A^k) &= (F(A^kz))^{N-1}F(A^k) = \\ &= (F(A^k)t)^{N-1}F(A^k) = F(A^k)(tF(A^k))^{N-1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $uA$  кончается на  $(A^k)^{N-1}A^k$ , то  $F(u)A = F(uA)$  кончается на  $F((A^kz)^{N-1}A^k)$ , которое, в свою очередь, кончается на  $(tF(A^k))^{N-1}$ . Таким образом,  $F(u)$  является  $A/(N-1)$ -нерасширяемым, что и требовалось доказать.

# Функциональные корни

Влад Викал

Апостол Апостолов

Функциональное уравнение  $f \circ f = g$ , где  $g$  — строго убывающая, непрерывная функция, не имеет непрерывных решений, определенных на всей числовой прямой. В статье исследуется ситуация, когда допускается конечное или счетное число разрывов. В частности, показано, что если разрешить  $f$  иметь лишь конечное число разрывов, то уравнение не имеет решений на числовой прямой.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Всем хорошо знакомо обозначение  $f^{(k)}(x) = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{k \text{ раз}}(x)$ . Функция  $f^{(k)}(x)$  называется  $k$ -й итерацией функции  $f$ . При этом  $f^{(-1)}(x)$  обозначает обратную функцию, а  $f^{(-k)}(x)$  есть  $(f^{(-1)})^{(k)}(x)$ . Ясно, что  $(f^{(m)})^{(n)}(x) = f^{(mn)}(x)$ . Естественно определить  $f^{(1/2)}(x)$  как функцию  $g$ , такую что  $g(g(x)) = f(x)$  (аналогично определяется  $f^{(1/k)}(x)$  и далее  $f^{(r/q)}(x)$ ). Такую функцию мы назовем *функциональным или итерационным корнем*. Функциональные корни являются важным инструментом анализа динамических систем, так как они делают возможным естественный переход от дискретного времени к непрерывному. Действительно, пусть имеется последовательность моментов времени  $\dots, -1, 0, 1, \dots$  и состояние системы меняется по закону  $w(t+1) = g(w(t))$ . Если мы переходим к непрерывному времени, то, например, преобразование  $w(t) \rightarrow w(t+1/2)$  должно определяться такой функцией  $f$ , что  $f(f(x)) \equiv g(x)$ .

Математические приложения функциональных корней включают также численные методы, анализ данных в хаотических системах и многое другое. Итерирование играет важную роль и при описании эволюции систем в других научных областях, как например, в экологии, эпидемиологии, оптимизации промышленных процессов, теории автоматов и теории турбулентности. Более подробно об этих вопросах см. [1–10].

Нас интересует вопрос о существовании функционального корня второй степени, т. е. о функциональном уравнении

$$f \circ f = g. \quad (1)$$

Легко видеть, что если  $g$  монотонно убывает, то уравнение (1) не имеет решений в классе непрерывных функций. В самом деле, монотонно убывающая функция принимает каждое свое значение по разу, т. е. равенство  $g(x) = g(y)$  влечет

равенство  $x = y$ . Поскольку из  $f(x) = f(y)$  следует  $f(f(x)) = f(f(y))$ , что равносильно  $g(x) = g(y)$ , приходим к выводу, что  $f$  принимает каждое свое значение ровно один раз. Вместе с непрерывностью  $f$  это влечет ее монотонность, т. е.  $f$  либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. В обоих случаях  $f \circ f$  монотонно возрастает, что противоречит выбору  $g$ .

С другой стороны, если разрешить функции  $f$  быть разрывной, то уравнение (1) часто имеет решение, например при  $g(x) = -x$ . Этот случай интересен тем, что множество функций  $f$ , удовлетворяющих уравнению

$$f(f(x)) = -x, \tag{2}$$

— это в *точности* множество функций, графики которых переходят в себя при повороте на  $90^\circ$  относительно начала координат.

**ЗАДАЧИ**

1. Проверьте это свойство графиков решений уравнения (2).
2. Постройте функцию  $f$  со счетным числом точек разрыва, удовлетворяющую уравнению (2) и определенную на всей числовой прямой.

УКАЗАНИЕ. Положим  $f(0) = 0, x_0 = 0$ . Выберем последовательность  $x_k, k = 1, \dots$ , такую что  $x_k > 0, x_k \rightarrow \infty$ . Представим  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  в виде объединения непересекающихся пар полуинтервалов  $D_k = (x_{k-1}, x_k] \cup [-x_k, -x_{k-1})$ . Пусть  $y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ . Построим кусочно-линейное решение уравнения (2) с областью определения  $D_k$ , переставляющее полуинтервалы  $(x_{k-1}, y_k], (y_k, x_k], [-x_k, -y_k), [-y_k, -x_{k-1})$ .

3. Постройте решение уравнения (2) с областью определения  $(-1, 1)$ . А также найдите функциональные корни любой степени  $f^{(2^k)} = -x$  со счетным числом точек разрыва. Проверьте, что всегда  $f(0) = 0$ , и, кроме того, отображение  $f$  биективно.

**2. ЭФФЕКТЫ ЧЕТНОСТИ**

Интересные эффекты возникают, когда рассматривается решение функционального уравнения  $f(f(x)) = g(x)$ , где  $g$  — непрерывная монотонно убывающая функция, в классе функций с конечным (а не счетным) числом точек разрыва.

На 53-й Московской математической олимпиаде А. Я. Беловым была предложена следующая задача.

**ЗАДАЧА.** *Существует ли функция  $f$  с конечным числом точек разрыва, удовлетворяющая условию  $f(f(x)) = -x$ , область определения которой есть а) отрезок  $[-1, 1]$ ; б) открытый интервал  $(-1, 1)$ ?*

Ответы в пунктах а) и б) неожиданно оказываются разными. В пункте а) ответ «существует», в пункте б) ответ «нет»!

Напомним, что *орбитой точки  $x_0$*  называется множество

$$\text{orb}(x_0) = \{f^{(n)}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Аналогично, *орбитой множества I* является семейство множеств

$$\text{orb}(I) = \{ \{f^n(I)\} \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

РЕШЕНИЕ ПУНКТА а). Построим функцию  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  с конечным числом точек разрыва, такую, что  $f(f(x)) = -x$ . Положим  $f(0) = 0$ , и пусть функция  $f$  действует по правилу  $1/2 \mapsto -1 \mapsto -1/2 \mapsto 1 \mapsto 1/2$ . На оставшихся открытых интервалах функция действует как изображено на рис. 1, т. е.  $f((-1/2, 0)) = (-1, -1/2)$ ,  $f((0, 1/2)) = (1/2, 1)$ ,  $f((1/2, 1)) = (-1/2, 0)$ ,  $f((-1, -1/2)) = (0, 1/2)$ . Сравните с рис. 2, где изображена орбита точки  $x$ .  $\square$

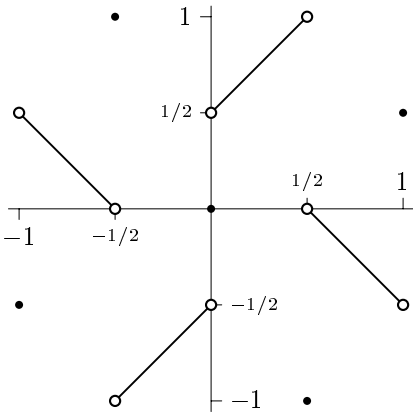


Рис. 1. График  $f$

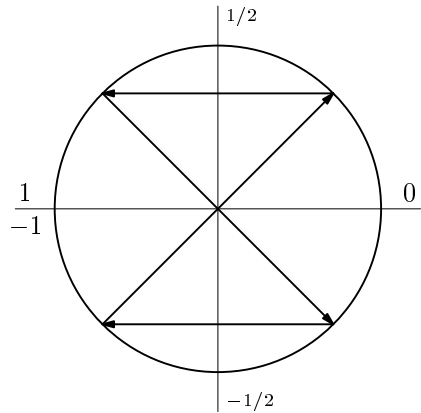


Рис. 2. Орбита  $x$

РЕШЕНИЕ ПУНКТА б). Покажем, что не существует функции  $f: (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$  с конечным числом точек разрыва, для которой  $f(f(x)) = -x$ .

Если такая функция существует, то  $f$  биективна, а 0 — единственная неподвижная точка.

В самом деле,  $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$ ;  $z = -(-z) = f(f(-z)) = f(s)$ , где  $s = f(-z)$ ;  $f(x) = x \Rightarrow f(x) = f(f(x)) = -x$ , откуда  $x = -x$ , т. е.  $x = 0$ .

Покажем, что орбита каждой точки, кроме нуля, содержит в точности 4 элемента.

В самом деле,  $f(f(f(f(x)))) = -(-x) = x$ . Если  $x \neq 0$ , то, как мы видели,  $f(x) \neq x$ ,  $f(f(x)) = -x \neq x$  и если  $x = f(f(f(x)))$ , то  $f(x) = f(f(f(f(x)))) = x$ , т. е.  $x = 0$ .

Рассмотрим множество  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  точек разрыва функции  $f$  и положим

$$A^* := \{0\} \cup \bigcup_{a \in A} \text{orb}(a).$$

Это множество *вполне инвариантно* относительно  $f$ , т. е.

$$f(y) \in A^* \iff y \in A^*.$$

Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — элементы множества  $A^*$ , перечисленные в порядке возрастания. Поскольку орбита любой точки из  $A^*$ , кроме нуля, содержит 4 элемента, то

$$m = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Положим  $I_1 = (-1, b_1)$ ,  $I_{m+1} = (b_m, 1)$ , и для  $2 \leq j \leq m$  пусть  $I_j = (b_{j-1}, b_j)$ .

Применяя лемму 2, приведённую ниже, к  $I = (-1, 1)$  и  $M = A^*$ , получаем, что  $f$ -орбита каждого интервала  $I_j$  состоит из 4 элементов. Поэтому  $m + 1 = 4p$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ . Но это противоречит уравнению (3), т. е. существованию функции  $f$  с конечным числом точек разрыва.  $\square$

Здесь мы наблюдаем *комбинаторный аспект* задачи. Мы показали, что длина орбиты каждой точки, кроме неподвижной, равна 4 и потому количество интервалов полученного разбиения имеет вид  $4k + 1$ . Но оказывается, что и длина орбиты каждого интервала тоже равна 4, откуда получаем противоречие.

### 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Естественно возникает более общий вопрос: *дана строго убывающая непрерывная функция  $g$ , определенная на всей числовой прямой. Может ли существовать функция  $f$  с конечным числом точек разрыва, такая что  $f \circ f = g$ ?*

Ответ на этот вопрос дает

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА.** *Пусть  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — строго монотонно убывающая непрерывная функция. Тогда не существует итерационного корня второй степени из  $g$  с конечным числом точек разрыва.*

Вначале докажем несколько вспомогательных утверждений.

**ЛЕММА 1.** *Пусть на некотором интервале заданы функции  $f$  и  $g$ , причем  $g$  непрерывна и взаимно однозначна. Пусть  $f$  и  $g$  коммутируют, т. е.  $f \circ g = g \circ f$ . Тогда непрерывность функции  $f$  в некоторой точке  $x_0$  равносильна ее непрерывности в точке  $g(x_0)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что из биективности и непрерывности функции  $g$  следует биективность и непрерывность функции  $g^{(-1)}$ . Поэтому достаточно доказать только одну импликацию, а потом заменить  $g$  на  $g^{(-1)}$ .

Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ . Положим  $y_0 = g(x_0)$  и рассмотрим произвольную последовательность  $(y_n)$ , такую что  $y_n \rightarrow y_0$ . Положим  $x_n = g^{(-1)}(y_n)$ . Тогда  $x_n \rightarrow x_0$ , поскольку  $g^{(-1)}$  — непрерывная функция. Так как  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , то

$$f(y_n) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) = f(g(x_0)),$$

что и требовалось.  $\square$

Пусть  $f \circ f = g$ . В этом случае  $f$  и  $g$  коммутируют, и мы получаем

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *При условии (1) орбита точки разрыва функции  $f$  под действием  $g$  состоит из точек разрыва. Если множество точек разрыва конечно, то и орбита любой из них конечна.*

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть  $I = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\mathbb{R})$ , где  $g$  — строго убывающая функция,  $f^{(s)}(x) = g(x)$ . Если функция  $f$  имеет конечное множество точек разрыва, то все они принадлежат  $I$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая точка вне  $I$  имеет бесконечную орбиту. Остается применить следствие 1.  $\square$

ЗАДАЧА 4. Пусть  $g$  — строго убывающая непрерывная функция,  $g(\mathbb{R})$  — открытый луч. Тогда для любого  $s > 1$  уравнение  $f^{(s)}(x) = g(x)$  не имеет решений в классе функций с конечным числом точек разрыва.

УКАЗАНИЕ. С помощью следствия 2 можно показать, что  $f$  непрерывна и убывает на  $\mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R})$ . Если  $c$  — граница  $g(\mathbb{R})$ , то  $f(c) \neq c$ , иначе было бы  $g(c) = c$ . По непрерывности  $f(c) \in g(\mathbb{R})$ , откуда  $f(\mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R})$ . В то же время  $f(g(\mathbb{R})) = g(f(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R})$ , т.е.  $f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$ . Так как  $f$  взаимно однозначна, то  $g(\mathbb{R}) \subsetneq f(\mathbb{R})$  — противоречие.

Отметим, что отсюда вытекает решение задачи К. Малькова, опубликованной в сборнике «Математическое просвещение», №3, 1999, с. 232, под номером 3.3; решение К. Малькова опубликовано в «Математическом просвещении», №5, 2001, с. 227–228.

ЛЕММА 2. Пусть  $I \subseteq \mathbb{R}$  — открытый интервал, а  $f: I \rightarrow I$  — биективная функция. Рассмотрим множество точек  $M \subset I$ ,  $|M| = t$ , вполне инвариантное относительно  $f$ . Пусть  $\{I_j\}_{j=1}^{m+1}$  — разбиение  $I$  на открытые интервалы точками множества  $M$ . Тогда:

- (i) Если  $f$  непрерывна на каждом интервале  $I_j$ , то  $f(I_j) = I_k$  для некоторого  $1 \leq k \leq t + 1$ .
- (ii) Если, дополнительно к (i),  $f \circ f$  строго убывает, то  $f^{(4)}(I_j) = I_j$  для всех  $1 \leq j \leq t + 1$ .
- (iii) Если, дополнительно к (i) и (ii), некоторая точка  $x_0$  принадлежит  $M$  и  $f(f(x_0)) = x_0$ , то орбита каждого интервала  $I_j$  имеет 4 элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Занумеруем интервалы разбиения слева направо и рассмотрим некоторый интервал  $I_j$ . Функция  $f$  отображает  $I_j$  на  $f(I_j)$  непрерывно и биективно, поэтому  $f(I_j) = (c, d)$  для некоторых  $c, d \in I$ . Поскольку  $I_j \cap M = \emptyset$ , а  $M$  вполне инвариантно относительно  $f$ , то  $(c, d) \subseteq I_k$  для некоторого  $1 \leq k \leq t + 1$ . Используя  $f^{(-1)}$  и рассуждая аналогично, получаем, что  $f(I_j) = I_k$ .

(ii) Так как  $f^{(2)}$  строго убывает, то  $f^{(4)}$  строго возрастает. Имеется ровно  $j - 1$  интервалов слева от  $I_j$ . Применяя утверждение (i) к  $f^{(4)}$ , получаем, что существует ровно  $j - 1$  интервалов слева от  $f^{(4)}(I_j)$ . Следовательно,  $f^{(4)}(I_j) = I_j$ .

(iii) Из (ii) следует, что орбита каждого интервала  $I_j$  состоит из 1, 2 или 4 элементов. Предположим, что  $f(f(I_j)) = I_j$ . Так как функция  $f \circ f$  строго

убывает и непрерывна на  $I_j$ , то по теореме о промежуточном значении существует  $x \in I_j$ , для которого  $f(f(x)) = x$ . Но строго убывающая функция может иметь лишь одну неподвижную точку. Значит,  $x = x_0 \in M$ , — противоречие. Следовательно, орбита каждого интервала имеет длину 4.  $\square$

**ЛЕММА 3.** Пусть  $g$  — строго убывающая непрерывная функция и выполнено уравнение  $f \circ f = g$ . Тогда функции  $f$  и  $g$  имеют единственную неподвижную точку, причем общую.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно, что строго убывающая функция может иметь лишь одну неподвижную точку. Если при этом функция непрерывна, то по теореме о промежуточном значении такая точка  $x_0$  существует. Тогда  $f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$ , т. е.  $f(x_0)$  также является неподвижной точкой функции  $g$ . Значит,  $f(x_0) = x_0$ . Обратно, если  $f(x) = x$ , то  $g(x) = f(f(x)) = x$ , откуда  $x = x_0$ .  $\square$

**ЛЕММА 4.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — открытый интервал, а  $f, g: I \rightarrow I$  таковы, что  $f \circ f = g$ , причем  $g$  непрерывна и биективна, а  $f$  имеет конечное число точек разрыва. Тогда каждая из этих точек либо является неподвижной точкой функции  $g$ , либо имеет  $f$ -орбиту из 4 элементов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A$  — множество точек разрыва функции  $f$ . Поскольку  $g$  и  $f$  коммутируют, то по следствию 1 леммы 1  $g(A) \subseteq A$ . Так как  $A$  конечно, а функция  $g$  инъективна, то  $g(A) = A$ . Пусть  $a \in A$  и  $g(a) \neq a$ . Поскольку  $g \circ g$  строго возрастает и  $g(g(A)) = A$ , то  $g(g(a)) = a$ , т. е.  $f^{(4)}(a) = a$ . Так как  $g(a) \neq a$ , то  $f(a) \neq a$  и  $f^{(3)}(a) = f^{(-1)}(a) \neq a$ , т. е.  $a$  имеет орбиту из 4 точек.  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ.** Допустим, что существует функция  $f$ , обладающая свойствами из условия теоремы. Очевидно,  $g^{(n+1)}(\mathbb{R}) \subseteq \subseteq g^{(n)}(\mathbb{R})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $g$  непрерывна и строго монотонна, то  $g^{(k)}(\mathbb{R})$  — открытый интервал в  $\mathbb{R}$ . Положим

$$I = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\mathbb{R}).$$

Поскольку  $g$  непрерывна и строго убывает, то уравнение  $g(x) = x$  имеет ровно одно решение  $x_0$ . Тогда  $g^{(k)}(x_0) = x_0$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ , откуда  $x_0 \in I$ , т. е.  $I \neq \emptyset$ .

Поскольку  $I$  — счетное пересечение открытых интервалов, то  $I$  связно. При этом  $g(I) = I$ . Легко видеть, что  $I$  не может быть полуинтервалом в силу монотонности  $g$ . Предположим, что  $I = [a, b]$  для некоторых  $a < b$ . Так как  $g$  строго убывает, то  $g(a) = b$ ,  $g(b) = a$ . Но концы промежутка не влияют на наши рассуждения, так что можно считать  $I$  открытым интервалом.

Пусть множество  $A_{\text{ext}}$  состоит из всех точек разрыва функции  $f$  и точки  $x_0$ . Из следствия 2 леммы 1 вытекает, что  $A_{\text{ext}} \subset I$ . Применяя леммы 3 и 4 к  $f, g: I \rightarrow I$ , получаем, что множество  $A_{\text{ext}}$  состоит из  $4p + 1$  элементов для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ . Соответствующее разбиение интервала  $I$  должно состоять из  $4p + 2$  открытых интервалов. Применяя к  $I$  лемму 2(iii) с  $M = A_{\text{ext}}$ , получаем,

что орбита каждого интервала  $I_j$  состоит из четырех элементов и потому число интервалов должно делиться на 4, тогда как оно имеет вид  $4p+2$ . Таким образом, предположение о существовании функции  $f$  ведет к противоречию.  $\square$

#### 4. ПОПЫТКА ДАЛЬНЕЙШЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Естественно попытаться обобщить основную теорему. А что если функция  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно убывает, но не обязательно непрерывна? Ясно, что если  $g$  имеет бесконечное число точек разрыва, то функциональный корень  $f$ , для которого  $f \circ f = g$ , тоже имеет бесконечное число точек разрыва. Поэтому потребуем, чтобы функция  $g$  имела конечное число точек разрыва.

Оказывается, в этом случае уравнение (1) может иметь решения, определенные на всей числовой прямой.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Существует открытый интервал  $I \subset \mathbb{R}$  и функции  $f, g: I \rightarrow I$  с конечным числом точек разрыва, такие что  $g$  строго убывает и  $f(f(x)) = g(x)$  для всех  $x \in I$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Здесь мы начинаем не с выбора функции  $g$  с последующим построением  $f$ , а с построения самой функции  $f$ . Для облегчения вычислений рассмотрим  $I = (-16, 16)$ , вместо  $(-1, 1)$ .

$$\text{Пусть } f: (-16, 16) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{при } x \in (-16, -8), \\ -\frac{x}{2} + 10 & \text{при } x \in (-8, 0), \\ -\frac{x}{2} - 10 & \text{при } x \in (0, 8), \\ \frac{x}{2} - 2 & \text{при } x \in (8, 16), \\ -2 & \text{при } x = -8, \\ -10 & \text{при } x = 0, \\ 2 & \text{при } x = 8. \end{cases}$$

Легко проверить, что  $f$  имеет 3 точки разрыва и что  $g := f \circ f$  строго убывает и тоже имеет 3 точки разрыва. Чтобы лучше увидеть получившуюся картину, см. рис. 3 и рис. 4.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Отметим, что график функции  $f$  симметричен (за исключением одной точки) относительно поворота плоскости на  $180^\circ$  (см. также рис. 1).

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Мы хотим поблагодарить Алексея Белова и Гётца Пфандера, которые познакомили нас с функциональным уравнением  $f \circ f = -\text{id}$ , а также Александра Буфетова за полезные замечания и Бориса Френкина за редакционную правку.

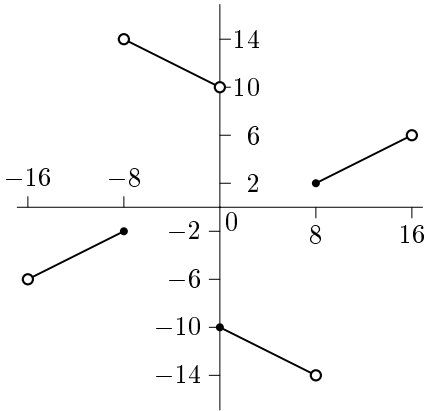


Рис. 3. График  $f$

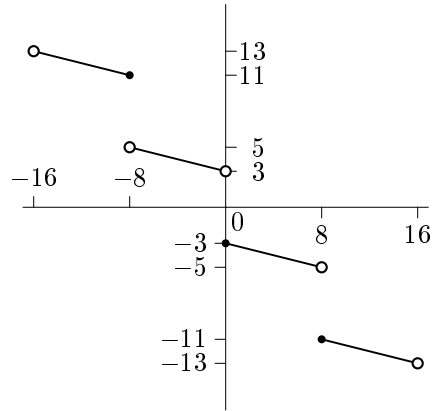


Рис. 4. График  $g$

Мы особенно благодарны Алексею Белову, который поддержал наши попытки обобщить это функциональное уравнение.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L.-S. *Periodic points of one-dimensional maps* // Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 819. Springer Verlag, Berlin, 1980. P. 18–34.
- [2] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [3] Kuczma M., Choczewski B., Ger R. *Iterative Functional Equations*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Misiurewicz M., Nitecki Z. *Combinatorial Patterns for Maps of the Interval* // Mem. Amer. Math. Soc., 1990. Vol. 456.
- [5] Misiurewicz M. *Formalism for studying periodic orbits of one dimensional maps* // European Conference on Iteration Theory (ECIT 87), World Scientific, Singapore, 1989. P. 1–7.
- [6] Stefan P. *A Theorem of Sharkovski on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line* // Commun. math. Phys., 1977. Vol. 54. P. 237–248
- [7] Targonski G. *Topics in Iteration Theory*. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1981.
- [8] Targonski G. *Progress of iteration theory since 1981* // Aequationes Math., 1995. Vol. 50. P. 50–72.

- [9] Шарковский А. Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя* // Укр. матем. ж., 1964. Т. 16, №1. С. 61–71.
- [10] *Одномерная динамика и теорема Шарковского* // X летняя конференция турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 21–25, 79–91.

---

Влад Вико́л, Международный Университет Бремен;  
28759 Bremen, Germany;  
e-mail: v.vicol@iu-bremen.de

Апосто́л Апосто́лов, Международный Университет Бремен;  
28759 Bremen, Germany;  
e-mail: a.apostolov@iu-bremen.de

# Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда

М. Н. Вялый

Мы рассматриваем прямоугольные параллелепипеды. Длины ребер параллелепипеда будут обозначаться  $c \geq b \geq a$ .

Длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда, соединяющего две точки, будем называть *расстоянием* между точками.

В осеннем туре 25-го Турнира Городов была предложена задача (автор — С. В. Маркелов):

*Верно ли, что самой удаленной от вершины параллелепипеда точкой является центрально симметричная ей вершина?*

Ответ зависит от значений  $a, b, c$  и нетрудно привести примеры, когда он отрицателен. Ниже мы даем ответ на этот вопрос для всех возможных значений  $a, b, c$ .

Отметим два очевидных свойства кратчайших путей:

- (а) если точки лежат на одной грани параллелепипеда, то и кратчайший путь между ними лежит в этой грани (поскольку он является и кратчайшим путем в пространстве между этими точками);
- (б) кратчайший путь не проходит дважды через одну и ту же грань (участок пути между двумя частями пути по грани можно заменить на отрезок внутри грани и уменьшить длину пути).

*Геодезическим* назовем путь, каждая достаточно малая часть которого — кратчайший путь между ее концами. Очевидно, что кратчайший путь является геодезическим. Ясно также, что любой геодезический путь по поверхности параллелепипеда является ломаной.

Геодезический путь может заканчиваться в вершине параллелепипеда, но вершина параллелепипеда не может быть внутренней точкой геодезического пути. Действительно, любые две грани параллелепипеда, которым принадлежит данная вершина, имеют общее ребро. Остальное ясно из рис. 1.

Таким образом, геодезический путь можно продолжать до тех пор, пока (и если) он не попадет в одну из вершин параллелепипеда. При переходе через ребро геодезический путь нужно продолжать так, чтобы на развертке он был прямым (см. рис. 2). *Комбинаторным типом* геодезического пути назовем последовательность ребер параллелепипеда, которые пересекает этот путь. Геодезический путь восстанавливается однозначно по комбинаторному типу, начальной и конечной точкам (после развертки граней, через которые проходит этот путь, в одну плоскость, он становится отрезком прямой).

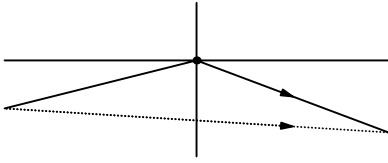


Рис. 1.

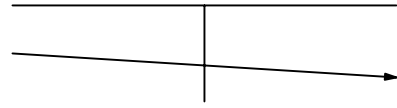


Рис. 2.

Рассмотрим грань  $F$  параллелепипеда и кратчайшие пути из точки  $X$  в точки грани  $F$ . Из свойства (б) следует, что таких путей конечное число. Разворачивая кратчайшие пути в плоскость грани  $F$  в соответствии с их комбинаторными типами, получим множество образов точки  $X$ :  $X_1, \dots, X_n$ .

Напомним, что *диаграммой Вороного* множества точек  $X_1, \dots, X_n$  называется разбиение плоскости на области близости: область Вороного  $V_j$  состоит из таких точек  $x$ , для которых точка  $X_j$  — ближайшая. Границы областей диаграммы Вороного конечного числа точек — прямолинейные отрезки или лучи, лежащие на серединных перпендикулярах к некоторым парам этих точек.

В точку  $Y$ , которая является внутренней точкой области Вороного  $V_j$  диаграммы Вороного множества образов точки  $X$ , ведет единственный кратчайший путь из  $X$  (на развертке ему соответствует отрезок  $X_jY$ ), а в точки границы диаграммы Вороного, отличные от вершин параллелепипеда, ведет по крайней мере два кратчайших пути (в точку  $Y$ , которая лежит на границе областей  $V_j, V_k$ , ведут два кратчайших пути, которым на развертке соответствуют отрезки  $X_jY, X_kY$ ).

Назовем точку на поверхности параллелепипеда *дальней* от  $X$ , если в нее ведет более одного кратчайшего пути из  $X$ . Мы показали, что точки на границах диаграмм Вороного граней параллелепипеда являются дальними от  $X$ . Обратное очевидно по построению. Заметим, что самая удаленная от  $X$  точка обязательно лежит на границе диаграммы Вороного и потому будет дальней от  $X$  (для точки  $Y$ , лежащей внутри области  $V_j$ , можно продолжить отрезок  $X_jY$  внутри области  $V_j$ ).

**ЛЕММА 135.** Пусть две грани параллелепипеда имеют общее ребро  $VW$ , а точка  $X$  лежит на одной из этих граней, причем  $\angle XVW \geq 45^\circ$ . Тогда в окрестности вершины  $V$  множество дальних точек состоит из интервала  $VY$ , причем  $\angle XVY = 135^\circ$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. рис. 3. В малой окрестности  $V$  геодезические пути через ребро  $VW$  конкурируют только с путями, проходящими через третью грань, содержащую  $V$ . Если развернуть эту третью грань вверх от правой грани, то слева от нее будет грань, содержащая вершину  $X$ . Геодезический путь, идущий через три грани, при такой развертке изображается отрезком, начинающимся в точке  $X'$ , которая получается из  $X$  поворотом на  $90^\circ$ . Точка  $V$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $XX'$ , так что если  $VY$  лежит на серединном перпендикуляре, то  $\angle XVY = 135^\circ$ .  $\square$

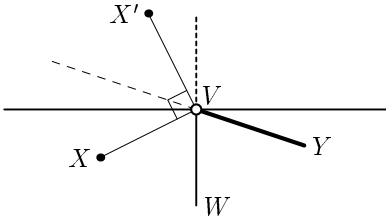


Рис. 3.

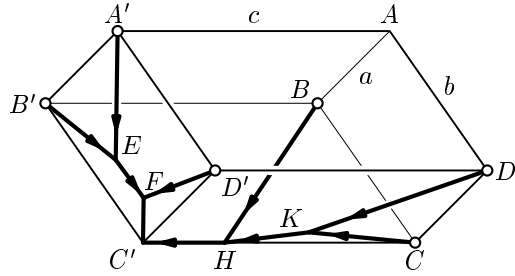


Рис. 4.

Обозначим вершины и длины ребер как показано на рис. 4 (напомним, что  $c \geq b \geq a$ ). На этом же рисунке изображено множество точек, дальних от вершины  $A$ .

Все вершины, кроме  $C'$ , лежат в одной грани с вершиной  $A$ . Поэтому направления отрезков дальних точек, выходящих из этих вершин, определяются по лемме 135. По этим направлениям находим точки  $E, K$ ; направления отрезков  $EF$  ( $KH$ ) определяются из условия равенства длин путей типов  $(BB', B'C')$  и  $(A'D')$  (соответственно,  $(DD')$  и  $(BC), (CC')$ ). Отрезок  $HC'$  также состоит из дальних точек, так как в его точки ведут кратчайшие пути типов  $(DD')$  и  $(BB')$ .

Корректность построенной диаграммы можно проверить, рассмотрев по очереди все области, на которые она разбивает грани параллелепипеда. Например, в точки области  $BB'C'H$  ведут кратчайшие пути типа  $(BB')$ . Действительно, пути, проходящие через ребро  $BC$ , длиннее, так как длины путей типов  $(BB')$  и  $BC$  равны на отрезке  $BH$ . Пути типа  $(DD', CC')$ , проходящие через отрезок  $HC'$ , длиннее, так как длины путей типов  $(DD')$  и  $(BB')$  равны на отрезке  $C'H$ . Пути, приходящие на рассматриваемую грань через ребро  $B'C'$ , длиннее, так как их отделяет от этой грани ломаная  $B'EFC'$  (на звеньях этой ломаной равны длины путей типа  $(BB', B'C')$  и путей, которые попадают на грань  $A'B'C'D'$  через три оставшиеся стороны этой грани).

Аналогично проверяется корректность всех остальных областей.

Теперь найдем самую удаленную точку от вершины  $A$ . На всех отрезках множества дальних точек, за исключением ломаной  $EFC'$ , направление возрастания расстояния определяется из рисунка и изображено на нём стрелками. Развернув кратчайшие пути, ведущие к точкам отрезка  $EF$ , как показано на рис. 5, видим, что направление возрастания расстояния — от  $E$  к  $F$ . Итак, наиболее удаленной точкой от вершины  $A$  будет либо  $C'$ , либо  $F$  (расстояние от точки до прямой — выпуклая функция).

Развертка путей, ведущих к отрезку  $C'F$ , показывает, что  $\angle FC'D' = 45^\circ$ . Осталось выполнить несложные вычисления. Введем систему координат с началом в  $C'$  (рис. 5), ось абсцисс которой направлена по лучу  $C'D'$ , а ось ординат — по лучу  $C'B'$ . Точки отрезка  $C'F$  имеют координаты  $(t, t)$ , точка  $F$  соответствует значению  $t(F) = a(c - b)/(2c)$  (проверку этого факта оставляем читателю для самостоятельного упражнения).

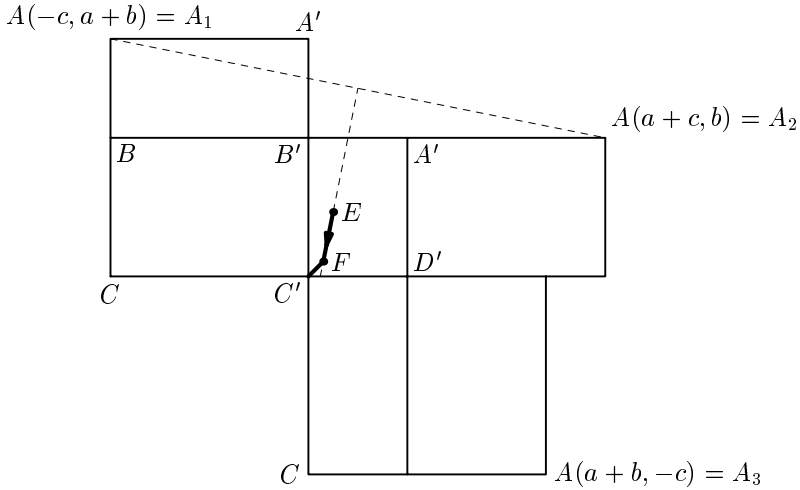


Рис. 5.

Разность квадратов расстояний равна

$$|A_1F|^2 - |A_1C'|^2 = 2t^2 + 2(c - a - b)t.$$

Поэтому вершина  $C'$  (центрально симметричная вершине  $A$ ) будет самой удаленной от вершины  $A$  при выполнении условия

$$c \leq a + b - \frac{a(c - b)}{2c}.$$

Заметим также, что если  $c > a + b$ , то самой удаленной точкой от вершины  $A$  заведомо будет точка  $F$ . (В этом случае расстояние монотонно растет при движении от  $C'$  к  $F$ .) При условии

$$0 < c - a - b < \frac{a(c - b)}{c}$$

функция расстояния от  $A$  имеет два локальных максимума: в точках  $F$  и  $C'$  и седловую точку на отрезке  $C'F$ .

В заключение — несколько задач.

1. (С. В. Маркелов) Может ли кратчайший путь между двумя вершинами на поверхности параллелепипеда проходить по 4 граням? по 5 граням? по всем граням? (Кратчайший путь из вершины  $A$  проходит не более, чем по трем граням.)

2. (А. Шень) Какое максимальное количество различных кратчайших путей может вести из точки на грани параллелепипеда в точку на противоположной грани?

3. Чему равен диаметр прямоугольного параллелепипеда в зависимости от длин ребер  $a, b, c$ ?

Автор благодарит А. А. Заславского за ценные обсуждения и С. А. Дориченко за помощь в подготовке данной заметки.

# Problems.Ru и проблемы классификации

П. В. Сергеев

И. В. Ященко\*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы хотели бы рассказать читателям «Математического Просвещения» о нашем интернет-проекте Problems.Ru<sup>1</sup>); о тех трудностях, с которыми приходится сталкиваться при реализации столь масштабного плана, и о тех скромных успехах, которых нам всё же удалось достичь. Мы надеемся, что наши коллеги, в свою очередь, поделятся с нами своими знаниями и ценными рекомендациями. Поскольку до сих пор, по крайней мере в русскоязычном секторе всемирной паутины, не существовало сайта, содержащего такое количество обработанных задач, все участники нашего проекта ощущают некоторую нехватку опыта и с радостью прислушаются к вашим советам.

Одним из главных вопросов, вставших при создании Problems.Ru, был вопрос, как хранить и показывать пользователю такое количество задач, чтобы можно было найти то, что нужно, и не заблудиться в огромном количестве параметров. О том, как эта проблема была решена на нашем сайте, мы расскажем ниже.

## 2. НЕМНОГО ИСТОРИИ

Первым наиболее значимым проектом создания электронной базы задач была система «Задачи», разработанная большим коллективом авторов (М. А. Бузиниер, Р. К. Гордин, А. Я. Канель, С. И. Трифонов, И. Ф. Шарыгин. . .). В настоящее время эта система интегрирована в состав Problems.Ru. Это был совместный проект московской школы №57 и ДННТМ (филиал Московского Городского Дворца Детского и Юношеского Творчества). Система «Задачи» распространялась на дискетах, с которых потом устанавливалась на компьютер. В дальнейшем система развивалась в МЦНМО и была перенесена на интернет-сайт «Задачи по геометрии», являющийся частью веб-узла Московского Центра Непрерывного Математического Образования (МЦНМО). Локальная, несколько упрощенная для удобства пользования, версия была поставлена во все школы г. Москвы при содействии Департамента образования г. Москвы. В настоящее время имеется ряд интернет-проектов, содержащих задачи по математике и не только. Кроме уже упомянутого сайта МНЦМО, на котором

\*Поддержано грантом НШ-2251.2003.1

<sup>1</sup>)Проект осуществляется при поддержке Департамента образования г. Москвы и АНО «Научно-методический центр „Школа нового поколения“».

размещена самая крупная коллекция задач олимпиад и кружков, важное место занимает питерский проект «Математические олимпиады и олимпиадные задачи» (<http://zaba.ru>). Много задач также собрано на сайте Кировского Центра по работе с одаренными детьми (<http://www.kirov.ru/~sms/>). К сожалению, федеральные порталы по естественнонаучному образованию, создаваемые в рамках федеральных программ, уступают всем упомянутым ресурсам по наполнению и посещаемости в сотни раз.

Из электронных проектов, содержащих задачи, не выходящие за рамки школьной программы, наиболее крупным и законченным представляется проект «Все задачи школьной математики», реализованный совместно издательством «Просвещение», издательством «Интерактивная линия» и Институтом Новых технологий. Эта работа была отмена призом «Книга года 2003».

### 3. О НАШЕМ ПРОЕКТЕ

Что представляет собой проект Problems.Ru? Получить представление об этом проще всего, зайдя на сайт <http://www.problems.ru>.

В настоящее время здесь опубликовано около 10000 (десяти тысяч) задач по математике, разбитых по темам и расклассифицированных по сложности. Большая часть задач приводится с решениями (или, по крайней мере, с ответами). Задачи рассчитаны на школьников средних и старших классов. Конечно, это не стандартные примеры «из учебника», а задачи, тем или иным образом дополняющие школьную программу. На сайте очень много как «олимпиадных», так и исследовательских задач, относящихся к самым разным разделам математики.

Все задачи взяты либо из открытых источников, либо с разрешения издательств и авторов печатных изданий. В отдельном окне информации о задаче можно увидеть «происхождение» каждой задачи и дополнительную информацию о ней. Все публикуемые материалы (и условия, и решения) выверяются нашими редакторами, которые проставляют сложность и тему в каждом конкретном случае. На сайте также расположен небольшой словарики, в котором приводятся определения и формулировки некоторых теорем, необходимых для решения задач. Словарь пополняется в соответствии с пожеланиями посетителей — можно задать вопрос на сайте, и в течение несколько дней искомая формулировка появится на Problems.Ru.

Разработан специальный интерфейс для составления занятий кружков, проведения олимпиад и т. д. Просмотрев нужные разделы, посетитель отмечает подходящие задачи, вводит свои заголовки (например, «Занятие 7. Принцип крайнего»), дату и т. п. и в «версии для печати» получает готовое задание.

### 4. ЗАЧЕМ (И КОМУ) ВСЁ ЭТО НУЖНО?

Проект ставит перед собой следующие цели:

1) *Дать возможность всем желающим познакомиться с интересными задачами по математике.*

На нашем сайте собраны как жемчужины математики (то, что доступно на школьном уровне), так и просто много очень интересных задач из самых разных

областей математики. Можно решать задачи, пролистывая разделы по темам, или просматривая задачи из какого-то одного источника (будь то книга по планиметрии или задачи «Математического праздника»).

Конечно, задач в базе великое множество, поэтому мы отбираем самые, на наш взгляд, красивые или поучительные и публикуем их в разделе «задача дня» на титульной странице (каждый день задача там меняется на другую). Мы стараемся, чтобы в этом разделе была представлена вся «классика жанра». Приведем примеры некоторых из таких задач (различной сложности):

**ЗАДАЧА 63856.** Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из А в В, другой — из В в А. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в В в 4 часа вечера, а другой — в А в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

**ЗАДАЧА 77906.** Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?

**ЗАДАЧА 35241.** На координатной плоскости нарисовали параболу — график функции  $y = x^2$ , а затем стерли оси координат. Как с помощью циркуля и линейки восстановить ось симметрии параболы?

**ЗАДАЧА 78148.** На плоскости даны четыре прямые, из которых никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идет пешеход. Известно, что 1-й встречается со 2-м, с 3-м и с 4-м, а 2-й встречается с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й пешеход встретится с 4-м.

**ЗАДАЧА 35799.** Внутри круглого блина радиуса 10 запекли монету радиуса 1. Каким наименьшим числом прямолинейных разрезов можно наверняка задеть монету?

**ЗАДАЧА 56846.** Медианы треугольника  $ABC$  разрезают его на 6 треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

(Последняя теорема, как нам сообщил Виктор Васильевич Прасолов, была открыта совсем недавно — в 2002 году. Ее автор голландец Floor van Lamoen.)

2) *Помочь учителям и преподавателям математики в проведении факультативов и кружков по математике.*

Интерфейс сайта (в режиме «показывать с решениями») максимально приспособлен для приготовления заданий для занятий кружка или домашних заданий. Можно быстро просмотреть много задач по данной теме (темам) и, отметив понравившееся задачи, распечатать готовое задание. Одновременно можно напечатать и листок, где те же задачи приводятся с решениями и ответами (в помощь преподавателю). Удобно пользоваться сайтом и для поиска нестандартных дополнительных задач по обычным школьным темам — для наиболее сильных учеников.

3) Дать возможность школьникам, особенно живущим в отдаленных регионах, изучить самые разные разделы математики.

Часто школьник, живущий далеко от областного центра (впрочем, и в областных центрах положение не лучше) и интересующийся математикой, не может развиваться дальше потому, что нет ни кружков, ни интересных сборников задач. С помощью Problems.Ru такой школьник сможет познакомиться с разными областями математики, заняться решением задач из интересующего его раздела, познакомиться с задачами олимпиад разного уровня.

Конечно, самое главное при изучении математики — решение задач. Ни учебник, ни урок, ни наш проект никогда не заменят (и не стремятся к этому) самостоятельное решение задач. Тем более, не хотелось бы лишить ребенка той радости открытия, которая появляется при решении даже самой простой задачи. Именно поэтому на сайте по умолчанию показываются только тексты условий (решения открываются в отдельном окне). Но и у школьника, и у преподавателя, встречаются ситуации, когда хочется сравнить свое решение с авторским, или узнать, как решаются задачи на такую-то тему. Авторы убеждены, что это существенно необходимый элемент обучения, почему мы и стараемся представлять большую часть задач с решениями или комментариями.

## 5. ТЕМЫ И МЕТОДЫ

С самого начала перед авторами проекта стал вопрос о рубрикаторе. Было принято принципиальное решение делать классификацию по темам научной, соответствующей (насколько это возможно в данном классе задач) различным разделам математики, а не «научно-популярной». Мы не можем привести в этой статье всё дерево тем, но процитируем ниже небольшой фрагмент:

### 88. Алгебра и арифметика

...

#### 134. Теория чисел. Делимость

##### 138. Признаки делимости

139. Признаки делимости на 2 и 4

822. Признаки делимости на 5 и 10

140. Признаки делимости на 3 и 9

141. Признаки делимости на 11

142. Признаки делимости (прочее)

228. Деление с остатком

836. НОД и НОК

232. Алгоритм Евклида

229. Сравнения по модулю. Арифметика остатков

243. Малая теорема Ферма

136. Простые числа. Основная теорема арифметики

960. Китайская теорема об остатках

963. Арифметические функции

964. Количество и сумма делителей числа

- 965. Функция Эйлера
- 966. Функция Мёбиуса
- 967. Арифметические функции (прочее)
- 230. Уравнения в целых числах ()
- 856. Произведения и факториалы
- 231. Теория чисел. Делимость (прочее)

...  
(Номера тем — внутренние, и пользователю не видны.)

Уже на этом (довольно простом) примере видно, что названия тем могут оказаться не совсем понятными школьнику. Несмотря на то, что некоторые темы снабжены статьями (либо написанными авторами сайта, либо из журнала «Квант»), а различные определения и формулировки находятся в словарики на сайте, мы обдумываем возможность сделать два разных входа на сайт: для преподавателей и для школьников. Во втором случае темы будут более обширные (сгруппированы вместе) и под более простыми названиями. Логично было бы также для этого входа отобрать самые красивые и поучительные задачи. Впрочем, окончательное решение еще не принято.

Как и при любой классификации, неизбежно возникают ситуации, когда в разных разделах возникают очень похожие темы. Например, темы, относящиеся к биссектрисе, у нас находятся как в разделе «Замечательные точки и линии в треугольнике» так и в разделе «Геометрические места точек (ГМТ)». Не всегда очевидно, в какой же именно теме должна быть данная задача. В таких случаях мы часто приписываем задаче обе темы. При этом, конечно, хотелось бы, чтобы количество тем у данной задачи не превосходило двух-трех. В геометрии, к сожалению, это не всегда получается, но классификация геометрических задач это вообще отдельная очень сложная проблема. Вместе с тем, мы планируем сделать подсказки вида «см. также тему такую-то» у схожих тем. Единственным исключением из общей структуры классификатора является раздел «методы», который дает «ортогональное» разбиение всех задач не по областям математики, а по используемым методам решения (таким как индукция, поиск инварианта и т. д.).

На сайте есть возможность поиска задач, относящихся одновременно, например, к теме «Теория чисел. Делимость» и методу «Принцип Дирихле», что, как мы надеемся, делает наш тематический рубрикатор достаточно удобным в использовании.

## 6. Сложности со сложностью

Начнем с нескольких примеров. Насколько сложны приведённые ниже задачи?

**ПРИМЕР 1.** [Задача 60385.] У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами?

Казалось бы, задача тривиальная, и ответ в ней  $(C_7^5 \cdot C_9^5)$  фактически и является решением. А если школьник вовсе не знаком ни с сочетаниями, ни с символикой  $C_n^k$ , то мало того, что придется всё придумать «с нуля», так еще и непонятно, в какой форме представлять ответ. Придется вычислить само число (2646). Задача окажется совсем не простой.

**ПРИМЕР 2.** [Задача 60508.] Докажите, что число  $2^{2^n} - 1$  имеет по крайней мере  $n$  различных простых делителей.

Если эта задача рассматривается сама по себе, то решить ее довольно сложно, а если она (как и в книге-источнике) идет после задачи о взаимной простоте чисел Ферма, то решение является легким упражнением.

**ПРИМЕР 3.** [Задача 60837.] Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (каре, конечно, должно содержать более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата  $3 \times 3$ , а если один человек болен, то в виде двух квадратов  $2 \times 2$ .

Хотелось бы, чтобы читатель прежде, чем читать дальнейший текст, оценил это сам.

Ясно, что если школьник видит эту задачу в главе книги (или в задании) под названием «Китайская теорема об остатках», то больших сложностей ее решение не составит. А если школьник вообще никогда об этом не слышал, то задача будет очень сложной, ибо придется доказать эту теорему, пусть и в частном случае (не на много легче, чем в общем). Деление на классы здесь также не поможет: китайскую теорему об остатках в школе вообще не проходят.

**ПРИМЕР 4.** [Задача 58329.] Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

Если школьник не знает про инверсию (которую в школе не изучают), то решить эту задачу крайне сложно.

Из приведённых примеров видно, что оценивать сложность по какой-то одной шкале очень трудно. В качестве иллюстрации того, что происходит, когда этих шкал несколько, приведем пример из другой области.

В советской (а теперь — российской) школе альпинизма все маршруты на горные вершины оцениваются по единой шкале — от 1Б (сложности 1А нет по определению) до 6Б. Цифра означает категорию, а буква (А или Б) — полукатегорию сложности. Например, маршрут на западную вершину Эльбруса (5642м, Кавказ) по классике имеет сложность 2А, на пик Маяковского (4208 м, Заилийский Алатау) по восточной стене — 4А, на Эверест (8848м, Гималаи, высшая точка планеты) по классике — 5А, маршрут Семилеткина на пик Свободной Кореи (4740м, Киргизский хребет, Тянь-Шань) — 6А. Надеемся, что даже человеку, мало знакомому с альпинизмом, из этих примеров ясно, что определение сложности маршрута дело совсем не простое. И, что более важно, зная

только свой личный уровень и только категорию сложности восхождения, часто невозможно понять — будет ли тебе это под силу. Нужна дополнительная информация. Дело в том, что при оценке по единой шкале суммируются следующие факторы: длительность и сложность ледовых участков, скальных участков, протяженность всего маршрута, возможность организации надежной страховки, высота вершины и особые погодные условия (такие, к примеру, как на вершине Серо-Торре, расположенной в «ревущих сороковых» широтах) и т. д. В конце получается какая-то усредненная сложность — 4Б, к примеру. Получается она с помощью сравнения с некоторыми «образцовыми» маршрутами, про которые уже давно решено, что они имеют такую-то сложность.

На Западе же другой подход. Там каждому маршруту приписывается комбинация из различных букв и цифр, оценивающих различные (ледовые, скальные и т. д.) составляющие маршрутов. К тому же, ясное дело, французская шкала отличается от американской, а американская от британской. Например, сложность (чисто скального) маршрута по североамериканской шкале может иметь вид: V, 5.8, A2+. Это означает (цитируем с разрешения сайта Mountain.Ru), что V — маршрут проходится за 1–2 дня; ночевка, как правило, неизбежна, 5.8 — сложность лазания на ключевом участке равна 5.8 по скальной шкале, A2+ — не очень надежные точки страховки, впрочем способные держать массу тела и даже небольшой срыв.

Американские альпинисты уже считают даже эту шкалу недостаточно подробной (например, явно не указана средняя крутизна маршрута).

Обобщим: мы рассмотрели два разных подхода к оценке сложности. На Problems.Ru мы реализовали первый вариант, основанный, прежде всего, на сравнении с некоторыми образцовыми задачами, приведёнными в таблице на сайте. Сложность каждой задачи оценивается как положительное число, с одной значащей цифрой после запятой. Пользователь же видит усредненное значение в виде натурального числа со знаком + или -. Например, 3+ означает, что задача имеет сложность чуть выше, чем три. При этом каждый редактор ставит сложность (глядя на таблицу) по своему усмотрению, что не может не добавлять разнообразия. Тем не менее, как было проверено экспериментально, при достаточной квалификации редакторов различия в сложности как правило остаются в рамках замены + на -.

К сожалению, нам не удалось придумать никаких четких критериев выставления сложности. Более того, мы не беремся утверждать, что каждая задача, например, сложности 2 для каждого посетителя сайта будет проще, чем каждая задача сложности 3. Но мы надеемся, что большинство посетителей сайта согласится с нами в том, что большая часть задач сложности 2 проще, чем большая<sup>2)</sup> часть задач сложности 3.

---

<sup>2)</sup>Посетитель считается согласным с нами в оценке сложности 2–3, если из задач сложности 2 можно выделить такое подмножество, содержащее не менее половины задач, и из задач сложности 3 можно выделить такое подмножество, содержащее не менее половины задач, что, по мнению данного посетителя, любая задача первого подмножества проще любой задачи второго подмножества.

Конечно, в отличие от альпинизма, получить травмы, несовместимые с жизнью, при неправильной оценке сложности, в математике нельзя, но испортить олимпиаду или занятие, подобрав задачи не того уровня, очень просто. Хотелось бы этого избежать.

Если читатели «Математического Просвещения» могут нам посоветовать более четкие критерии оценки сложности, то мы обязательно примем их к сведению.

## 7. ПРИГЛАШЕНИЕ К СОТРУДНИЧЕСТВУ

Всех, заинтересовавшихся нашим проектом, мы приглашаем принять в нём участие.

Хотелось бы расширить диапазон задач, включив информатику, лингвистику, физику, но пока наш коллектив состоит из математиков. В наших дальнейших планах поддержка словарика и поднятие его до уровня полноценного энциклопедического словаря по математике, написание различных статей по темам нашего рубрикатора, помогающих как ученикам, так и учителям, лучше разобраться в данной теме, внесение задач текущих олимпиад и публикация on-line занятий ряда кружков.

---

# По мотивам задачника «Математического просвещения»

---

## Теорема о блохе и кузнечике

А. А. Заславский

А. В. Спивак

Эта заметка посвящена решению задачи 8.5 из задачника «Математического просвещения». Напомним ее формулировку.

Для иррационального числа  $\alpha > 1$  обозначим  $N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}$ . Для каких натуральных  $k$  найдутся числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , такие, что множества  $N(\alpha_1), \dots, N(\alpha_k)$  образуют разбиение натурального ряда.

Сразу приведем ответ:  $k = 2$ . Существование искомым чисел для  $k = 2$  вытекает из *теоремы о блохе и кузнечике*, доказанной известным физиком и математиком лордом Рэлеем.

**ТЕОРЕМА.** Множества  $N(\alpha), N(\beta)$  задают разбиение натурального ряда тогда и только тогда, когда числа  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \quad (1)$$

Необходимость условия (1) почти очевидна. Действительно, для любого  $n$  количество элементов множества  $N(\alpha)$ , не превосходящих  $n$ , равно  $[\frac{n+1}{\alpha}]$ . Предположим, что  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\left[\frac{n+1}{\alpha}\right] + \left[\frac{n+1}{\beta}\right] - n > n\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1\right) - 1 \rightarrow \infty,$$

т. е. существует бесконечно много чисел, входящих как в  $N(\alpha)$ , так и в  $N(\beta)$ . Аналогично, при  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$  существует бесконечно много чисел, не входящих ни в одно из двух множеств.

Докажем достаточность условия (1). Предположим сначала, что некоторое число  $n \in N(\alpha) \cap N(\beta)$ . Это означает, что найдутся натуральные  $x, y$ , такие,

что  $[x\alpha] = [y\beta] = n$ , т. е. выполнены неравенства

$$\begin{cases} n < x\alpha < n + 1, \\ n < y\beta < n + 1. \end{cases}$$

Преобразовав эту систему к виду

$$\begin{cases} \frac{x}{n+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{x}{n}, \\ \frac{y}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{y}{n} \end{cases}$$

и сложив неравенства, получим

$$\frac{x+y}{n+1} < 1 < \frac{x+y}{n},$$

или  $n < x + y < n + 1$ , что невозможно, так как  $x, y \in N$ .

Аналогично, если некоторое  $n \notin N(\alpha) \cup N(\beta)$ , то найдутся  $x, y$ , удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x\alpha < n, \\ (x+1)\alpha > n+1, \\ y\beta < n, \\ (y+1)\beta > n+1, \end{cases}$$

из которой после преобразований вытекает  $n - 1 < x + y < n$ .

Теорема Рэлея имеет очевидное

СЛЕДСТВИЕ. Если числа  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенству

$$\frac{m}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = 1 \quad (2)$$

для некоторых натуральных  $m$  и  $n$ , то  $N(\alpha) \cap N(\beta) = \emptyset$ .

Действительно, числа  $\alpha' = \alpha/m$ ,  $\beta' = \beta/n$  удовлетворяют (1), следовательно,  $N(\alpha') \cap N(\beta') = \emptyset$ , но  $N(\alpha) \subset N(\alpha')$ ,  $N(\beta) \subset N(\beta')$ .

Основной нашей целью будет доказательство обратного утверждения: для любых  $\alpha, \beta$ , таких, что  $N(\alpha) \cap N(\beta) = \emptyset$ , найдутся натуральные  $m, n$ , удовлетворяющие равенству (2).

Пусть  $\gamma$  — число, дополнительное к  $\alpha$   $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1\right)$ . Тогда по теореме Рэлея для любого натурального  $n$  между  $[n\beta]$  и  $[(n+1)\beta]$  найдется число, кратное  $\gamma$ , т. е.  $\{[n\beta]/\gamma\} > 1 - 1/\gamma$  или

$$\{n\beta/\gamma\} - \{n\beta\}/\gamma \in (1 - 1/\gamma, 1) \pmod{1}. \quad (3)$$

Рассмотрим тор  $0 \leq x < 1$ ,  $0 \leq y < 1$  и будем отмечать на нем точки вида  $Z_n = (\{n\beta/\gamma\}, \{n\beta\})$ . В силу (3) все  $Z_n$  лежат вне параллелограмма  $P$ , ограниченного прямыми  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = \gamma x$ ,  $y - 1 = \gamma(x - 1)$ . Заполним экземплярами тора всю плоскость, тогда все точки  $Z_n$  попадут на прямую  $y = \frac{\{\beta\}}{\{\beta/\gamma\}}x$ . Если угловой коэффициент этой прямой иррационален, точки  $Z_n$  всюду плотно заполняют тор, и (3) не выполняется. Действительно, в этом случае числа  $\{\beta/\gamma\}$ ,  $\{\beta\}$  и 1 попарно

несоизмеримы, и по теореме об обмотке трехмерного тора множество точек вида  $(\{\beta/\gamma t\}, \{\beta t\}, \{t\})$ ,  $t \in R$  плотно в торе  $0 \leq x, y, z < 1$ . Соответственно, точки  $Z_n$  всюду плотно заполняют грань этого тора  $z = 0$ . Аналогично доказывается, что если угловой коэффициент рационален, но прямая пересекает какой-нибудь из параллелограммов  $P$ , (3) также не может выполняться. Из рис. 1 видно, что для того, чтобы прямая не пересекала  $P$ , она должна пройти через какую-то из точек  $(m, m - 1)$ , где  $m > (m - 1)\gamma$ .

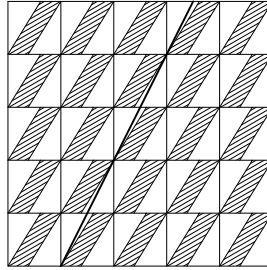


Рис. 1.

Таким образом, имеем  $\{(m - 1)\beta\} = \{m\beta/\gamma\}$  или  $(m - 1)\beta = m\beta/\gamma + n$ , что равносильно искомому утверждению.

Теперь уже совсем просто установить, что  $k = 2$  единственный ответ к задаче 8.5. Действительно, предположим, что натуральный ряд можно разбить на  $k > 2$  множеств вида  $N(\alpha)$ . Тогда существуют три числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , такие, что множества  $N(\alpha), N(\beta), N(\gamma)$  попарно не пересекаются, и по доказанному утверждению найдутся натуральные  $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ , такие, что выполнены равенства

$$\begin{cases} \frac{m_3}{\beta} + \frac{n_2}{\gamma} = 1, \\ \frac{n_3}{\alpha} + \frac{m_1}{\gamma} = 1, \\ \frac{m_2}{\alpha} + \frac{n_1}{\beta} = 1. \end{cases}$$

Эти равенства можно рассматривать, как систему линейных уравнений относительно  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ . Поскольку определитель системы равен  $m_1 m_2 m_3 + n_1 n_2 n_3 > 0$ , она должна иметь единственное, и причем рациональное, решение, что невозможно.

Из приведённого рассуждения следует также, что никакое множество  $N(\alpha)$  не может быть разбито на 2 или больше множеств такого же вида.

---

---

# Нам пишут

---

---

## О тождествах Рамануджана

С. В. Маркелов

В книге В. И. Левина [1] написано:

«Приведем еще две замечательные формулы Рамануджана:

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}},$$
$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}.$$

Эти точные равенства являются, конечно, частными случаями значительно более общих соотношений, которыми располагал Рамануджан, но о которых он никому ничего не сообщил. После его смерти часть этих общих соотношений была восстановлена другими математиками, но не подлежит сомнению, что некоторые из них утеряны навсегда.»

Известные автору попытки вывести эти «более общие соотношения» решают задачу с алгебраической точки зрения, выводя тождества «в буквах». (см. [3, 4]). В то же время, если посмотреть на ситуацию с тригонометрической точки зрения, можно прийти к новым тождествам, см. следующую страницу. Предлагаю желающим подумать попробовать выписать аналогичные тождества для других знаменателей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин В. И. *Рамануджан — математический гений Индии*. М.: Знание, 1968. С. 32–33.
- [2] Прасолов В. В. *Тождества Рамануджана* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005. С. 104–107.
- [3] Рисенберг Д. *Теорема Виета и сумма радикалов*. Задачи по математике. 2000–2004. МЦНМО, 2004. С. 168–175. Файлы книги: <ftp.mccme.ru/users/dotsenko>

$$\sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}} + \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13}} + \sqrt[3]{\cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13}} = \sqrt[3]{\frac{7 - 3\sqrt[3]{13}}{2}}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{31} + \cos \frac{15\pi}{31} + \cos \frac{23\pi}{31} + \cos \frac{27\pi}{31} + \cos \frac{29\pi}{31}} + \\ & + \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{31} + \cos \frac{7\pi}{31} + \cos \frac{17\pi}{31} + \cos \frac{19\pi}{31} + \cos \frac{25\pi}{31}} + \\ & + \sqrt[3]{\cos \frac{5\pi}{31} + \cos \frac{9\pi}{31} + \cos \frac{11\pi}{31} + \cos \frac{23\pi}{31} + \cos \frac{21\pi}{31}} = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt[3]{62} - 11}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{43} + \cos \frac{11\pi}{43} + \cos \frac{21\pi}{43} + \cos \frac{27\pi}{43} + \cos \frac{35\pi}{43} + \cos \frac{39\pi}{43} + \cos \frac{41\pi}{43}} + \\ & + \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{43} + \cos \frac{5\pi}{43} + \cos \frac{19\pi}{43} + \cos \frac{23\pi}{43} + \cos \frac{31\pi}{43} + \cos \frac{33\pi}{43} + \cos \frac{37\pi}{43}} + \\ & + \sqrt[3]{\cos \frac{7\pi}{43} + \cos \frac{9\pi}{43} + \cos \frac{13\pi}{43} + \cos \frac{15\pi}{43} + \cos \frac{17\pi}{43} + \cos \frac{25\pi}{43} + \cos \frac{29\pi}{43}} = \\ & = \sqrt[3]{\frac{13 - 3\sqrt[3]{86}}{2}} \end{aligned}$$

- [4] Шевелев В. С. *Три формулы Рамануджана* // Квант, №6, 1988. С. 52-55.  
[http://kvant.mccme.ru/1988/06/tri\\_formuly\\_ramanudzhana.htm](http://kvant.mccme.ru/1988/06/tri_formuly_ramanudzhana.htm)

## Специалисты против простоты

В. И. Арнольд

Как член редколлегий, я часто получаю отзывы на предполагаемые к публикации в журналах статьи. Ниже я воспроизвожу один отзыв, изменив лишь названия наук и животных, имена личностей и т. п. мелочи (так что всякое буквальное совпадение с какой-либо реальностью будет непреднамеренным и случайным, хотя дух этого отзыва и многих ему подобных других я постарался передать точно).

Рецензент пишет:

Рецензируемое исследование влияния фонетики на геологию не имеет предшественников ни среди работ специалистов по фонетике, ни среди работ геологов. Статья написана столь понятно, что ее могли бы понять даже студенты. Полученные автором результаты, видимо новы, хотя и понятны. Тематика исследования восходит к работам знаменитых ученых и адвокатов семнадцатого века.

Поэтому публикация присланной статьи в журнале такого высокого уровня, как ваш «Швамбранский алгебраический идеал» представляется мне нецелесообразной: уж слишком она понятна и доступна читателям.

Автор использует в качестве лемм некоторые факты теории чисел, например, что  $6 \times 7 = 42$  и  $7 \times 8 = 56$ . Я проверил, что эти теоремы теории чисел верны. Их можно было бы далеко обобщить, если использовать современную вычислительную технику: их способны доказывать, например, студенты четвертого курса математического факультета университета штата Коннектикут. Это еще раз показывает, что работа не заслуживает публикации в вашем уважаемом журнале: ее результаты слишком элементарно формулируются.

Наряду с указанными результатами, работа содержит и другой экспериментальный материал (что уже само по себе является очевидным доводом против ее публикации). При попытке сформулировать гипотезы, обобщающие эти свои эксперименты, автор совершает технические ошибки.

Дело в том, что он пренебрегает в своем анализе логарифмическими слагаемыми в степенных асимптотиках. Между тем, специалистам по теории чисел хорошо известно, что математическая наука состоит именно в вычислении этих логарифмических поправок (обычно в предположении о справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции или других подобных фактов).

Ошибка происходит из-за того, что автор провел свои эксперименты только в области двузначных чисел, и поэтому принял за постоянные логарифмически медленно меняющиеся величины.

В результате в работе получены неверные выводы. Например, автор приходит к заключению, что количество коров масти  $K_{12}$  в Гренландии не может превосходить число 3.

Между тем, гипотеза Римана приводит (как это было показано в неопубликованной диссертации рецензента, оставшейся, видимо, неизвестной автору) к логарифмическому поправочному слагаемому, увеличивающему ответ 3 на одну десятую процента. Более того, я убежден, что Г. Харди легко мог бы уменьшить это значение ответа на несколько десятитысячных процента от его величины.

Из сказанного видно, что публикация этой работы принесла бы вред, в особенности потому, что она могла бы препятствовать серьезным исследованиям настоящих специалистов в этой области, которые без этой работы смогли бы вывести из гипотезы Римана много интересного.

Следует также подчеркнуть, что рассматриваемый автором вопрос о гренландских коровах научного интереса не представляет (в отличие от классического вопроса об антарктических коровах, которым занимались многие специалисты, работ которых автор рецензируемой статьи, видимо, не читал, и о которых он умолчал).

Все это еще раз показывает, что публикация этой статьи нанесла бы урон репутации вашего уважаемого «Идеала».

Вдобавок к указанным недостаткам, в статье много других. В частности, отсутствуют доказательства ряда утверждений. Например, автор статьи пишет, будто А. А. Марков возразил: «нет, это противоречило бы существованию у каждого числа положительного квадратного корня».

Это утверждение — что Марков произнес такую фразу — нуждается в доказательстве, а его нет в статье. По меньшей мере необходимо было бы убрать кавычки (заменяв на «возразил, что») — иначе необученные читатели-студенты могут принять фантазию автора за достоверный факт, тогда как у отрицательных чисел положительных корней нет.

А. А. Марков не мог этой фразы говорить, так как он считал числами только дроби с числителями и знаменателями меньше миллиона. А среди них корень есть не всегда (например, его нет для числа 2, положительность которого умеют доказывать студенты третьего курса университета Калифорнии в Беркли).

Подводя итог, я повторяю, что считаю публикацию присланной статьи в журнале «Швамбранский алгебраический идеал» нецелесообразной.

\* \* \* \* \*

Мне довелось видеть отрицательные отзывы «специалистов» на работы Нобелевского уровня. Например, американские астрофизики объяснили мне, как они отвергли сделанные российскими астрономами (Гарькавым и Фридманом) предсказания орбит спутников Урана, основанные на обнаруженной при покрытии Ураном звезды системе его колец (и подтвержденные несколько месяцев спустя при пролете «Вояджера» мимо Урана). Мотивировка отказа была такой: «У нас в Америке господствует другая теория щелей между кольцами Сатурна, чем использованная советскими авторами (так называемая «теория пастухов»),

поэтому их работа опубликованной в нашем международном журнале быть не может.»

Другой пример — отклонение «Журналом экспериментальной и теоретической физики» статьи (награжденной через пару лет Ленинской премией): в отзыве самого высококвалифицированного специалиста эта статья упрекалась в следующем:

- 1) в ней употреблялись недопустимые в ЖЭТФ слова «теорема» и «доказательство»;
- 2) автор утверждал, что «из А вытекает В», тогда как каждому физика известно, что А из В не вытекает;
- 3) в работе упоминаются нефизические термины «поверхность тора» и «мера Лебега» («меры бывают десятичные, французские, — метры и т. п., или английские — ярды, дюймы и т. п., а мер Лебега мы не знаем»).

Упомянутая статья, отвергнутая физиками, была поэтому опубликована в математическом журнале, но на присуждении за нее Ленинской премии настояли впоследствии именно физики, постоянно ее использующие (а математическая секция проголосовала против).

\* \* \* \* \*

Прочитав этот отзыв (и множество подобных ему мнений «специалистов» о других статьях), я пришел к выводу, что публикация некоторого количества слабых или даже ошибочных нерцензированных работ принесла бы меньше вреда, чем отказы в публикации, основанные на отзывах подобных специалистов (отвергших в свое время представленные Академии наук Франции замечательные работы Абеля, а позже, возможно, и тексты Галуа).

Много подобных примеров приводит Ф. Клейн (в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии»), которому, кажется, так и не удалось добиться от «специалистов науки по модулю 5» достойного описания результатов из коллег по модулю 7 для своей замечательной «энциклопедии».

Возможно, именно возражения «специалистов» против «чрезмерной понятности» и «доступности студентам» статей приводят к тому грустному явлению, что большая часть публикуемых сегодня математических статей написана в нарочито непонятном стиле. По моему мнению, не то 90%, не то даже 99% этих статей не следовало бы публиковать по причине их полной недоступности читателям.

Опасность приводящей к непонятности статей чрезмерной специализации (не только в математике, но и в других науках) представляется мне очевидной. П. Капица недаром говорил, что чем фундаментальнее открытие, тем проще его можно изложить.

---

# Задачный раздел

---

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. По веточке ползет червячок со скоростью 1 мм/с, а веточка, в свою очередь, растет со скоростью 1 м/с. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растет равномерно, так что ее середина удаляется от концов со скоростью 0.5 м/с.) (А. Д. Сахаров)
2. Дано  $n$  магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот.) (А. К. Ковальджи)
3. Узлы  $k$ -мерной целочисленной решетки раскрашены в  $l$  цветов. Докажите, что найдется прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям решетки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решетки, где можно наверняка найти параллелепипед, в зависимости от  $k$  и  $l$ . (А. Я. Белов)
4. Дана последовательность  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ , такая что  $a_1 = 1$ ,  $a_k = a_{k-1} + a_{\lfloor k/2 \rfloor}$  при  $k > 1$ . Докажите, что ни один ее член не делится на 4. (М. Л. Концевич)
5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (Фольклор)
6. Рассмотрим всевозможные однокруговые турниры  $n$  шахматистов. Для каждого турнира найдем количества  $s_1 \leq \dots \leq s_n$  очков, набранных игроками, и возьмем в  $n$ -мерном пространстве точку с координатами  $(s_1, \dots, s_n)$ .

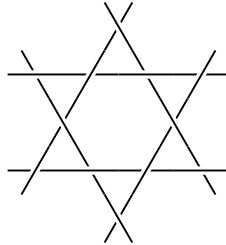
Доказать, что выпуклая оболочка этих точек является  $(n - 1)$ -мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют турнирам, в которых в любой паре участников набравший больше очков выигрывает в личной встрече.

(А. А. Заславский, А. В. Спивак)

7. Обозначим через  $P$  множество натуральных чисел вида  $n^k$ , где  $n > 1, k > 1$ . Найти сумму обратных величин всех чисел из  $P$ , уменьшенных на единицу, т. е.

$$\sum_{x \in P} \frac{1}{x - 1}. \quad (\text{Л. Эйлер})$$

8. Может ли фигура, указанная на рисунке, изображать несколько попарно скрещивающихся прямых, спроецированных на плоскость?



(А. Б. Скопенков)

9. Сколько синтаксически правильных выражений из  $n$  символов можно составить, если использовать только символы двух переменных  $X$  и  $Y$ , открывающую ( и закрывающую ) скобки, запятую (,), символ двуместной функции  $g$  и символ одноместной функции  $f$ ?

Синтаксически правильные выражения определяются индуктивно:  $X, Y$  — синтаксически правильные выражения, любое синтаксически правильное выражение имеет вид  $f(A)$  или  $g(A, B)$ , где  $A, B$  — синтаксически правильные выражения меньшей длины. (Фольклор)

10. При каких  $\alpha, \beta, \gamma$  существует непрерывная функция, определенная на отрезке длины  $\gamma$ , интеграл от которой по любому отрезку длины  $\alpha$  положителен, а по любому отрезку длины  $\beta$  — отрицателен? (П. Самовол)
11. Треугольник с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  разбивается биссектрисой одного из углов на две части, одна из которых выбрасывается. С оставшимся треугольником производится та же процедура и т. д. Для каких значений  $\alpha, \beta, \gamma$  может получиться треугольник, подобный исходному? (А. Белов, А. И. Галочкин)

## Решения задач из предыдущих выпусков

6.2. УСЛОВИЕ. Дана матрица ортогонального преобразования  $(a_{ij})$  размера  $3 \times 3$ , причем все  $a_{ij} \neq 0$ . Пусть  $B = (b_{ij}) = (a_{ij}^{-1})$ . Докажите, что  $\det B = 0$ .

РЕШЕНИЕ. Заметим, что

$$\prod_{i,j=1}^3 a_{ij} \cdot \det B = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{12} \\ a_{22}a_{23} & a_{21}a_{23} & a_{21}a_{22} \\ a_{32}a_{33} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{32} \end{vmatrix},$$

а у этой матрицы сумма строк равна нулю, поскольку столбцы матрицы  $A$  ортогональны. Значит, определитель равен нулю, что и требовалось.

(В. В. Доценко)

6.3. УСЛОВИЕ. Докажите, что система уравнений с  $n$  параметрами  $a_1, \dots, a_n$

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2 = 0, \\ \dots \\ a_1x_1^n + \dots + a_nx_n^n = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда сумма некоторых из  $a_i$  равна нулю.

РЕШЕНИЕ. Мы приведем даже два решения. Заметим сначала, что если сумма некоторых  $a_i$  равна нулю, то ненулевое решение, очевидно, есть: положим соответствующие  $x_i$  равными единице, а остальные — нулю. Поэтому интересно лишь доказательство обратного утверждения. Итак, пусть система имеет ненулевое решение.

Первое решение. («Линейные системы»<sup>1)</sup>) Рассмотрим систему как линейную относительно  $a_i$ . Ее определитель получается из *определителя Вандермонда* умножением на  $x_1x_2 \dots x_n$ . Если этот определитель не равен нулю, то относительно  $a_i$  наша система имеет лишь нулевое решение, т. е. все  $a_i$  равны нулю, что даже больше, чем требовалось. В противном случае либо среди  $x_i$  есть нули, либо некоторые из  $x_i$  равны между собой. В каждом из этих случаев несколько первых уравнений образуют аналогичную систему меньшего порядка, коэффициенты в которой — некоторые из  $a_i$  (в первом из этих случаев) или суммы параметров  $a_i$  (во втором случае; чтобы в этом убедиться, надо сгруппировать равные между собой  $x_i$ ), и можно вести индукцию по  $n$ .

<sup>1)</sup>См. обзор А. А. Кириллова «Инвариантные операторы над геометрическими величинами», ВИНТИ, 1980, с. 11–12; там этот результат приводится со ссылкой на Р. У. Биглова.

Второе решение. («Теорема Виета») Пусть  $\sigma_k$  —  $k$ -ая элементарная симметрическая функция от  $x_1, \dots, x_n$ . Умножим  $l$ -ое уравнение на  $(-1)^{n-l} \sigma_{n-l}$  ( $l = 1, \dots, n-1$ ) и сложим все уравнения:  $\sum_{k=1}^n a_k (x_k^n + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n-l} \sigma_{n-l} x_k^l) = 0$ .

Воспользуемся теоремой Виета:

$$(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k x^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Она позволяет преобразовать полученное равенство к очень простому виду:  $(-1)^n (a_1 + \dots + a_n) \sigma_n = 0$  (нужно подставить в выписанный многочлен  $x = x_k$ , умножить на  $a_k$  и сложить). Это означает, что либо сумма всех  $a_i$  равна нулю (отлично!), либо  $0 = \sigma_n = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ . А если одна из переменных равна нулю, то первые  $n-1$  уравнений образуют аналогичную систему меньшего порядка (снова индукция). (В. В. Доценко)

6.4. УСЛОВИЕ. а) Можно ли разбить пространство на окружности? А плоскость?

б) Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы любая точка была покрыта ровно три раза? А два раза?

РЕШЕНИЕ. а) Пространство можно разбить на окружности. Приведем явную конструкцию, принадлежащую Д. Фомину. Ясно, что полноторие  $T$  на окружности разбивается (внутри окружность, на которую нанизаны все остальные). Пусть  $T$  — полноторие;  $S'$  — окружность, проходящая через центр  $T$  так, что центр  $O$  окружности  $S'$  не содержится в  $T$ , а радиус  $S'$  больше внешнего радиуса полнотория  $T$ ;  $T'$  — новое полноторие, получающееся из  $T$  вращением вдоль оси  $\ell$ , проходящей через  $O$  и перпендикулярной плоскости окружности  $S'$ . Ясно, что  $T \cup S$  дополняется окружностями до  $T'$ . Итерируя эту конструкцию, легко получить семейство полноторий  $T^{(k)}$ ,  $T^{(k+1)} = T^{(k)}$ , заполняющее всё пространство. Получится требуемое разбиение.

Докажем, что плоскость разбить на окружности нельзя. Предположим противное. Построим последовательность  $P_i$  вложенных окружностей разбиения, радиусы которых стремятся к нулю. Первую окружность  $P_0$  выберем произвольно. Окружность  $P_{i+1}$  проходит через центр окружности  $P_i$ . Поскольку окружности разбиения не пересекаются, радиус следующей окружности в построенной последовательности по крайней мере вдвое меньше радиуса предыдущей. Очевидно, что  $P_i$  лежит внутри  $P_k$  при  $i > k$ . Поэтому есть ровно одна общая точка у кругов, ограниченных окружностями  $P_i$ . Окружность разбиения, проходящая через эту точку, пересекает все окружности  $P_k$  при достаточно большом  $k$ , что противоречит условию.

б) Приведем пример такого покрытия плоскости окружностями, что каждая точка покрыта ровно 2 раза. Этот пример принадлежит Н. Б. Васильеву. Он строится в два шага. Вначале возьмем все окружности единичного диаметра, лежащие в полосе единичной ширины. Легко видеть, что через каждую внутреннюю точку полосы проходит ровно 2 окружности, а через каждую граничную — ровно одна. Теперь закончим построение, добавляя окружности, ко-

торые получаются параллельными сдвигами на целые расстояния в направлении, перпендикулярном полюсе.

Докажем существование такого покрытия плоскости окружностями, что каждая точка покрыта ровно 3 раза. Назовем множество окружностей *правильным*, если любая точка плоскости покрыта не более чем тремя окружностями из этого множества.

**ЛЕММА 1.** Пусть имеется правильное множество окружностей  $P$ , содержащее менее континуума окружностей. Тогда для любой точки  $A$  можно дополнить  $P$  конечным (от 0 до 3) числом окружностей так, чтобы полученная система окружностей осталась правильной, а через  $A$  проходило бы ровно три окружности.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Точек пересечения окружностей из  $P$  менее континуума, так как окружности пересекаются не более чем в двух точках. Через  $A$  и любую точку, покрытую тремя окружностями из  $P$ , проходит не более двух окружностей единичного радиуса. Значит, всего таких окружностей менее континуума. А всего окружностей единичного радиуса — континуум. Значит, сохраняя правильность множества окружностей, добавить окружность, проходящую через  $A$ . Повторяя эту процедуру нужное число раз, получаем искомое расширение системы окружностей.

Возьмем первый ординал мощности континуума  $C$ . Перенумеруем с помощью  $C$  точки плоскости, окружности, пары окружностей и тройки окружностей. Для каждого ординала  $\alpha \leq C$  определим трансфинитной индукцией правильное множество окружностей  $P_\alpha$ . Для начального ординала 0 полагаем  $P_0 = \emptyset$ . Если  $\alpha = \beta + 1$  — непереломный ординал, то  $P_\alpha$  будет получаться из  $P_\beta$  применением леммы относительно точки  $p_\beta$ , соответствующей  $\beta$ . Для определенности считаем, что в  $P_\alpha$  включается  $C$ -минимальный набор окружностей, удовлетворяющий условию леммы. Если же  $\alpha$  — предельный ординал,  $\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$ , то  $P_\alpha = \bigcup_{i \in I} P_{\alpha_i}$ .

Множество окружностей  $P_C$  дает искомое покрытие плоскости.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Данная конструкция позволяет также решить пункт а), а также решать аналогичные задачи (например, построить систему прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны, а каждая точка покрыта ровно 2004 прямыми). Остается открытым вопрос, можно ли предъявить конструкцию, не использующую аксиому выбора (или, что то же самое, трансфинитную индукцию).

(А. Я. Канель)

**6.11. УСЛОВИЕ.** Рассматриваются слова из букв русского алфавита. Слова вида  $sut$  и  $suut$  имеют одинаковый смысл (здесь  $s, u, t$  — произвольные слова, возможно, пустые). Докажите, что количество различных смыслов конечно.

**РЕШЕНИЕ.** Данную задачу можно переформулировать так: *идемпотентная конечно-порожденная полугруппа конечна*.

Полугруппа  $P$  называется *конечно-порожденной*, если существует такое конечное множество элементов  $\{a_1, \dots, a_s\} \subseteq P$ , что любой другой элемент представляется в виде произведения этих элементов (они могут идти в произвольном

порядке, и каждый элемент может встречаться несколько раз). Полугруппа  $P$  идемпотентна, если каждый элемент  $a \in P$  идемпотентен, т. е.  $a^2 = a$ .

Введем отношения порядка и эквивалентности:

$$s \leq v, \text{ если для любых } t_1, t_2 \text{ } st_1 = st_2 \Rightarrow vt_1 = vt_2; \quad (\leq)$$

$$s \sim v, \text{ если } s \leq v \text{ и } v \leq s. \quad (\sim)$$

Через  $\Lambda$  будем обозначать пустое слово (единичный элемент полугруппы).

Приведем некоторые свойства введенных отношений.

ЛЕММА 1. а)  $s \leq us$ ; б)  $auas \sim uas$ ; в)  $s \sim t \Leftrightarrow st = s$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно. Неравенство  $uas \leq auas$  следует из а). С другой стороны,

$$auas \leq uauas = (ua)^2s = uas,$$

поэтому  $auas \sim uas$ . Осталось проверить в):  $t\Lambda = t^2 = tt$ , откуда  $s^2 = s = s\Lambda = st$ .

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу образующих, т. е. букв алфавита. Можно показать, число классов эквивалентности конечно. Для одной образующей оно очевидно. Пусть утверждение задачи выполнено для идемпотентных полугрупп с  $n$  образующими. Рассмотрим теперь идемпотентную полугруппу с  $n + 1$  образующей.

Сопоставим каждому классу эквивалентности в  $P$  его представителя, имеющего минимальную длину. Пусть  $a$  — самая левая буква представителя  $v$ . Тогда в силу п. б) леммы 1 буква  $a$  в слове  $v$  больше не встречается. Поэтому классов эквивалентности конечное число: представитель каждого класса может быть получен дописыванием к произвольной букве  $a_0$  элемента подполугруппы, порожденной образующими  $a_1, \dots, a_n$ , а их — конечное число по предположению индукции.

Докажем, что любое достаточное длинное слово в  $P$  можно *сократить*, т. е. указать слово меньшей длины, которое задает тот же элемент полугруппы  $P$ . Слово заведомо сократимо, если в нем рядом написаны два подслова, относящиеся к одному классу эквивалентности (см. лемму 1, пункт в).

Построим по слову граф, вершинами которого являются позиции слова, а ребру, соединяющему две позиции, сопоставлен класс эквивалентности подслова, концы которого находятся в этих двух позициях. Получили раскрашенный полный граф. Известная теорема Рамсея утверждает, что при фиксированном числе цветов и достаточно большом числе вершин в графе найдется одноцветный треугольник. Но одноцветному треугольнику соответствуют два записанных подряд подслова, которые принадлежат одному классу эквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя аналогичное рассуждение и бесконечную теорему Рамсея, можно доказать следующее утверждение: *пусть все слова конечной длины раскрашены в несколько цветов, тогда любое бесконечное вправо слово*

можно разбить на куски конечной длины так, чтобы все куски, за исключением быть может первого, были раскрашены в один цвет.

(А. Я. Канель)

7.1. УСЛОВИЕ. Известно, что  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  и  $|x_i - y_i| \leq \varepsilon$  при всех  $i$ ;  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$  — результат переупорядочивания набора  $\{y_i\}_{i=1}^n$  в порядке возрастания. Докажите, что  $|x_i - z_i| \leq \varepsilon$  при всех  $i$ .

РЕШЕНИЕ. Утверждение задачи равносильно такому: если для двух неубывающих последовательностей  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  и  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$  при некотором  $i$  выполнено неравенство  $|x_i - z_i| > \varepsilon$ , то для любой перестановки  $\sigma : [1, n] \rightarrow [1, n]$  найдется такое  $k$ , что  $|x_k - z_{\sigma(k)}| > \varepsilon$ .

Рассмотрим случай  $x_i < z_i$ . Найдется такое  $k \in [1, i]$ , что  $\sigma(k) \geq i$ . Для этого  $k$  выполнено

$$|x_k - z_{\sigma(k)}| = z_{\sigma(k)} - x_k \geq z_i - x_i > \varepsilon.$$

Случай  $x_i > z_i$  разбирается аналогично: нужно взять такое  $k \in [i, n]$ , что  $\sigma(k) \leq i$ . Тогда

$$x_k - z_{\sigma(k)} \geq x_i - z_i > \varepsilon.$$

(М. Н. Вялый)

7.3. УСЛОВИЕ. Покажите, что матрицы  $AA^T$  и  $A^T A$  имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел, где  $A$  — прямоугольная матрица,  $A^T$  — транспонированная матрица.

РЕШЕНИЕ. Будем рассматривать матрицу  $A$  как матрицу линейного оператора из  $V = \mathbb{R}^n$  в  $W = \mathbb{R}^m$ . Заметим, что  $(Ax, y) = (x, A^T y)$  (через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено стандартное скалярное произведение), поэтому ясно, что  $V = \ker A \oplus \operatorname{im} A^T$ ,  $W = \ker A^T \oplus \operatorname{im} A$ . Например,

$$v \in \ker A \Leftrightarrow (\forall u \in V)(Av, u) = 0 \Leftrightarrow (\forall u \in V)(v, A^T u) = 0 \Leftrightarrow v \perp \operatorname{im} A^T.$$

Докажем, что  $\ker A^T A = \ker A$ . Действительно,

$$AA^T x = 0 \Rightarrow (A^T x, A^T x) = 0 \Leftrightarrow A^T x = 0 \Rightarrow AA^T x = 0.$$

Завершить доказательство можно так. Собственный вектор  $x$  для  $A^T A$  с ненулевым собственным значением  $\lambda$  лежит в образе  $A^T$ , поскольку  $x = A^T(\frac{1}{\lambda} Ax)$ . Из сказанного выше следует, что для  $x$  можно даже выбрать представление  $x = A^T y$ , где  $y \perp \ker A^T$ , т. е.  $y \in \operatorname{im} A$ . Имеем:  $A^T AA^T y = \lambda A^T y$ , т. е.  $A^T(AA^T y - \lambda y) = 0$ . При этом вектор  $AA^T y - \lambda y$  лежит в образе оператора  $A$ , и потому ортогонален ядру оператора  $A^T$ . Значит, он равен нулю, т. е.  $y$  — собственный вектор для оператора  $AA^T$  с собственным значением  $\lambda$ , что и требовалось (обратное включение множеств собственных значений доказывается так же).

(В. В. Доценко)

7.4. УСЛОВИЕ.  $x, y > 0$ . Доказать неравенство:  $x^y + y^x > 1$ .

РЕШЕНИЕ. Если хотя бы одно из чисел  $x$  и  $y$  не меньше 1, то неравенство очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть случай  $0 < x, y < 1$ . При  $0 < y < 1$  из неравенства Бернулли заключаем, что

$$x^{1-y} = (1 + (x-1))^{1-y} < 1 + (x-1)(1-y) = x + y - xy < x + y.$$

Следовательно,  $x^y > \frac{x}{x+y}$ . Стало быть,

$$x^y + y^x > \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1. \quad (\text{А. И Храбров})$$

7.9. УСЛОВИЕ. Три человека имеют соответственно по  $n_1, n_2, n_3$  долларов. Каждый бросает монетку и получает результат — «орел» или «решку». Если у одного не тот же результат, что у двух других, то те двое платят ему по доллару. Если же все результаты одинаковы, то деньги не делят, но «такт» игры происходит. Игра кончается, когда у одного из игроков нет больше денег. Подсчитать среднюю продолжительность игры.

РЕШЕНИЕ. Ответ:  $\frac{4n_1n_2n_3}{3(n_1+n_2+n_3)-6}$ .

В решении нам потребуются две леммы.

Первая — хорошо известное утверждение из линейной алгебры.

ЛЕММА 1. Неоднородная система  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система имеет только нулевое решение.

ЛЕММА 2. Рассмотрим ориентированный граф<sup>1)</sup>  $V$  с выделенным подмножеством вершин  $G$  (вершины из множества  $G$  будем называть *граничными*, а остальные — *внутренними*). Пусть граница *достижима* из каждой внутренней точки (т. е. имеется ориентированный путь из этой точки в одну из граничных точек). Пусть далее каждой вершине приписано (комплексное) число так, что

- 1) число в каждой внутренней вершине равно среднему арифметическому чисел в концах выходящих из нее ребер;
- 2) все числа в граничных вершинах равны нулю.

Тогда и все числа во внутренних вершинах равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вершину  $A$ , в которой стоит максимальное по модулю число  $M$ . В силу 1) в концах каждого выходящего из нее ребра также стоит  $M$ . Повторяя это рассуждение, видим, что число  $M$  стоит во всех вершинах, достижимых из  $A$ . Поскольку из  $A$  достижима граничная вершина, то  $M = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие 1) можно несколько ослабить, но нам достаточно и такой формулировки.

<sup>1)</sup>В графе могут быть петли.

Можно считать, что игра происходит на множестве  $V$  позиций вида  $(n_1, n_2, n_3)$ , где  $n_1, n_2, n_3$  — произвольные неотрицательные целые числа с данной суммой

$$n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Назовем граничными позиции, в которых игра заканчивается, т. е. где по крайней мере одно из чисел  $n_1, n_2, n_3$  равно нулю, и построим граф с множеством вершин  $V$ , соединив выходящими ребрами каждую внутреннюю позицию  $A(n_1, n_2, n_3)$  с позициями, куда из нее можно попасть за один такт, т. е. с самой позицией  $A$  и позициями  $A'(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 2)$ ,  $A''(n_1 - 1, n_2 + 2, n_3 - 1)$ ,  $A'''(n_1 + 2, n_2 - 1, n_3 - 1)$ . Нетрудно проверить, что вероятность перехода за один такт из позиции  $A$  в каждую из этих четырех позиций равна  $1/4$ . Из граничных позиций (множество их обозначим через  $G$ ) ребра не выходят.

1) Сначала вычислим среднюю продолжительность  $l(A)$  игры, начавшейся в позиции  $A$ , в предположении, что она для каждой позиции конечна. В силу вышеизложенного

$$l(A) = 1 + \frac{1}{4}(l(A) + l(A') + l(A'') + l(A''')). \quad (*)$$

(Мы полагаем, что  $l(A) = 0$  для каждой граничной позиции).

Получилась система линейных уравнений с количеством уравнений и неизвестных, равным числу внутренних вершин. Соответствующая однородная система имеет вид

$$l(A) = \frac{1}{4}(l(A) + l(A') + l(A'') + l(A''')).$$

В силу леммы 2 она имеет только нулевое решение. В силу леммы 1 исходная система имеет решение, притом единственное. Осталось «угадать» это решение. Поскольку  $l(A)$  обращается в нуль в граничных позициях, естественно попробовать подобрать его в виде  $an_1n_2n_3$ . Подставляя в (\*) и раскрывая скобки, приходим к равенству  $(3n - 6)a = 4$ , т. е.  $a = \frac{4}{3n - 6}$ .

2) Докажем теперь, что средняя продолжительность игры действительно конечна.

$$l(A) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(A),$$

где  $p_k(A)$  — вероятность того, что игра, начавшись с позиции  $A$ , закончится ровно через  $k$  тактов. Нужно доказать, что этот ряд сходится.

Вероятности  $p_k(A)$ , очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$p_{k+1}(A) = \frac{1}{4}(p_k(A) + p_k(A') + p_k(A'') + p_k(A''')), \quad (**)$$

которые, наряду с начальными условиями

$$p_0(A) = \begin{cases} 0, & A \notin G, \\ 1, & A \in G \end{cases}$$

и граничными условиями  $p_k(A) = 0$  при  $A \in G$  и  $k > 0$ , позволяют вычислять их последовательно.

Рассмотрим векторы  $\mathbf{p}_k$  с координатами  $p_k(A)$  (количество координат равно числу всех вершин графа  $V$ ). Соотношения (\*\*\*) вместе с граничными условиями можно записать в виде  $\mathbf{p}_{k+1} = U\mathbf{p}_k$ , где  $U$  — линейный оператор на соответствующем пространстве. Тогда

$$\mathbf{p}_k = U^k \mathbf{p}_0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} U^k$ . Для этого достаточно проверить, что все собственные значения  $U$  (в том числе и комплексные) по модулю меньше 1. (Например, после приведения матрицы к жордановой форме можно убедиться в сходимости ряда непосредственным вычислением).

Пусть  $\mathbf{x}$  — собственный вектор оператора  $U$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda x(A) &= \frac{1}{4}(x(A) + x(A') + x(A'') + x(A''')) && \text{при } A \notin G, && (***) \\ \lambda x(A) &= 0 && \text{при } A \in G. \end{aligned}$$

Если  $|\lambda| \geq 1$ , но  $\lambda \neq 1$ , то, рассмотрев наибольшую по модулю координату  $x(A)$  вектора  $\mathbf{x}$ , немедленно придем к противоречию — левая часть соотношения

$$\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) x(A) = \frac{1}{4}(x(A') + x(A'') + x(A''')),$$

эквивалентного (\*\*\*), по модулю больше правой. Если же  $\lambda = 1$ , то координаты вектора  $\mathbf{x}$  удовлетворяют условию леммы 2, и следовательно, равны нулю. Противоречие. (Л. Медников)

### 7.11. УСЛОВИЕ. Все комплексные корни уравнения

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

по модулю строго меньше 1. Последовательность

$$\{v_k = A_0 u_{k+n} + A_1 u_{k+n-1} + \dots + A_n u_k\}$$

сходится. Докажите, что последовательность  $\{u_k\}$  тоже сходится.

РЕШЕНИЕ. Без ограничения общности можно считать, что  $A_0 = 1$ .

Разложим характеристический многочлен  $P(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$  на множители:

$$P(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdot \dots \cdot (x - \xi_n), \quad \xi_i \in \mathbb{C}, |\xi_i| < 1.$$

Рассмотрим операторы  $\Delta_\lambda$  в пространстве последовательностей:

$$u \mapsto \Delta_\lambda(u), \quad (\Delta_\lambda(u))_i = u_{i+1} - \lambda u_i.$$

Последовательность  $v$  есть результат применения произведения операторов  $\Delta_{\xi_i}$  к последовательности  $u$ :

$$v = \prod_{i=1}^n \Delta_{\xi_i} u.$$

Таким образом, достаточно доказать следующее: пусть  $|\xi| < 1$ , а  $v = \Delta_\xi u$  — сходится. Тогда и  $u$  также сходится. Достаточно рассмотреть случай  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ , поскольку замена  $\bar{v}_k = v_k - c$ ,  $\bar{u}_k = u_k - c/(1 - \xi)$  сохраняет рекуррентное соотношение  $v_k = u_{k+1} - \xi u_k$ . В этом случае докажем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ , и задача будет решена.

Индукцией легко проверить соотношение

$$u_{N+r} = \xi^r u_N + \xi^{r-1} v_{N+1} + \dots + \xi v_{N+r-1} + v_{N+r}. \quad (*)$$

Если  $v_k$  сходится к нулю, то для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $k$ , начиная с некоторого  $N$ , выполнено  $|v_k| < \varepsilon$ . Из (\*) получаем

$$|u_{N+r}| \leq |\xi|^r |u_N| + \varepsilon (|\xi|^{r-1} + \dots + \xi + 1) < |\xi|^r |u_N| + \frac{\varepsilon}{1 - |\xi|}.$$

Из этой оценки следует, что при  $C > 1/(1 - |\xi|)$  и при достаточно больших  $r$  выполнено

$$|u_{N+r}| < C\varepsilon,$$

а это и означает, что последовательность  $u_k$  сходится к нулю. (А. Я. Канель)

**8.8. УСЛОВИЕ.** В граничных клетках таблицы  $n \times n$  расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы так, чтобы каждое число<sup>1)</sup> равнялось среднему арифметическому своих соседей<sup>2)</sup>.

**РЕШЕНИЕ.** Условие можно записать в виде системы линейных уравнений (количество уравнений и неизвестных равно числу внутренних клеток). Соответствующая однородная система получится, если в граничных клетках записать нули. В силу леммы 2 из решения задачи 7.9 (с. 230) (вершины графа соответствуют клеткам таблицы, ребра соединяют соседние точки) она имеет только нулевое решение. В силу леммы 1 из решения задачи 7.9 (с. 230) исходная система имеет решение, притом единственное.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** В исходной задаче речь шла о квадратной таблице. Но утверждение верно и для любой «разумной» таблицы, в частности, для прямоугольной.

(Л. Медников)

<sup>1)</sup>Имеются в виду числа во внутренних клетках. В противном случае утверждение неверно.

<sup>2)</sup>Можно рассматривать как соседство «по стороне», так и «по вершине».

---

# Новые издания

---

---

## Книги издательства МЦНМО (2004 г.):

Э. Артин. **Теория Галуа**. Пер. с англ. А. В. Самохина. 66 с.

В книге изложены основы теории Галуа. Она написана ясным языком, материал тщательно подобран, ее автор — известный математик. Впервые она была опубликована в 1944 г. и затем неоднократно переиздавалась. Отдельная глава посвящена вопросу о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и построению правильных многогранников с помощью циркуля и линейки. Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. **Торические действия в топологии и комбинаторике**. 272 с.

Цель настоящей книги — ввести читателя в обширную область исследований, богатую фундаментальными результатами и важными приложениями. Она формируется последние тридцать лет на основе взаимопроникновения идей, методов и достижений комбинаторной геометрии и топологии, алгебраической топологии и геометрии, гомологической алгебры, теории особенностей, а в самое последнее время и дискретной математической физики. Среди топологических и комбинаторных объектов, изучаемых в книге, присутствуют как классические, так и появившиеся совсем недавно. Это — выпуклые многогранники, симплициальные и кубические комплексы, симплициально клеточные разбиения, триангуляции сфер и более общих многообразий, пространства триангуляций, алгебраические торические многообразия и различные топологические аналоги их, момент-угол комплексы, представляющие собой новый класс торических действий, конфигурации подпространств и их дополнения. В книге излагаются яркие результаты, обязанные глубоким связям геометрии, топологии, комбинаторики и гомологической алгебры. Приводится ряд классических и современных конструкций, позволяющих эффективно использовать эти связи. Книга содержит большой список открытых проблем.

С. Г. Влэдуц, Д. Ю. Ногин, М. А. Цфасман. **Алгеброгеометрические коды. Основные понятия**. 504 с.

Книга посвящена теории алгеброгеометрических кодов — области, возникшей в начале восьмидесятых годов прошлого века на стыке нескольких областей математики. С одной стороны здесь выступают такие классические области как алгебраическая геометрия и теория чисел, с другой — теория передачи информации, комбинаторика, конечные геометрии, теория плотных упаковок, и т. д. Книга не предполагает предварительного знакомства ни с теорией кодирования, ни с алгебраической геометрией. Ее отдельные главы могут служить введением как в теорию корректирующих кодов, так и в теорию алгебраических кривых. Особое внимание при этом уделяется кривым над конечными полями. Наконец, излагаются связи между этими областями — соб-

ственно теория алгеброгеометрических кодов. Книга будет полезна как начинающим математикам, так и специалистам.

Ю. В. Геронимус. **В молодые годы. Автобиографические записки.** 688 с.

Н. В. Горбачев. **Сборник олимпиадных задач по математике.** 560 с.

В книге собраны олимпиадные задачи разной сложности — как нетрудные задачи, которые часто решаются устно в одну строчку, так и задачи исследовательского типа. Книга предназначена для преподавателей, руководителей математических кружков, студентов педагогических специальностей, и всех интересующихся математикой.

М. А. Евдокимов. **От задачек к задачам.** 72 с.

Книга содержит 80 необычных задач с подробными решениями и комментариями. Для решения большинства задач первой части «Задачки» не требуется специальных знаний по математике. Это так называемый «математический фольклор», который будет интересен всем любителям поразмышлять над занимательной проблемой. Вторая часть «Задачи» состоит из авторских задач, предлагавшихся на различных математических олимпиадах (Московской, Всероссийской, олимпиадах МГУ и др.). Для удобства читателей книга снабжена тематическим путеводителем. Для школьников, руководителей математических кружков и всех любителей математики.

Д. П. Желобенко. **Основные структуры и методы теории представлений.** 488 с.

Предмет этой книги можно определить как топологическую алгебру, точнее — как теорию алгебро-топологических структур, допускающих естественные (операторно-значные) представления в векторных пространствах. К числу таких структур относятся топологические алгебры, алгебры Ли, топологические группы, группы Ли. Детально излагаются фундаментальные аспекты теории, в том числе теория инвариантных мер на локально компактных группах, теория Софуса Ли о связи между алгебрами Ли и группами Ли. Особенно подробно рассматриваются полупростые алгебры и группы Ли, банаховы алгебры, квантовые группы. Книга рассчитана на широкий круг читателей, от студентов и аспирантов физико-математических специальностей до научных работников, интересующихся общими вопросами современной теории представлений.

**Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д»)** Под ред. В. Доценко. 224 с.

Книга содержит учебные материалы, составлявшие содержание курса «математического анализа» в математическом классе 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д»). В нее включены задачи вечерней математической школы и собеседований, задачи всех трех лет обучения (включая контрольные работы и экзамены), список тем прочитанных лекций и избранные курсовые работы школьников.

С. Б. Каток.  **$p$ -адический анализ в сравнении с вещественным.** Пер. с англ. П. А. Колгушкина. 112 с.

В брошюре излагаются основные сведения, связанные с  $p$ -адическим анализом: приводится определение  $p$ -адических чисел, изучается их топология, функции от  $p$ -адического аргумента. Подробно рассматриваются отличия от классического вещественного анализа. Для студентов младших курсов физико-математических специальностей.

В. В. Лебедев. **Флуктуационные эффекты в макрофизике.** 256 с.

В курсе лекций развивается теория флуктуационных явлений, связанных с макроскопическими степенями свободы. Наряду с анализом критических явлений рассмотрены флуктуационные эффекты в различных фазах конденсированного состояния, где эти эффекты играют существенную роль. Представлена также теория динамических

флуктуаций, которая применяется как к равновесным, так и к неравновесным системам. Монография предназначена для студентов и аспирантов физических факультетов Университетов, а также для научных работников и инженеров, чьи интересы связаны с физикой конденсированных сред.

О. А. Логачев, А. А. Сальников, В. В. Ященко. **Булевы функции в теории кодирования и криптологии.** 470 с.

В книге впервые на русском языке в систематическом виде изложены криптографические и теоретико-кодовые аспекты использования аппарата теории булевых функций. Исключение составили лишь вопросы, связанные с теорией сложности и решением систем булевых уравнений. При этом в книге нашли свое отражение как классические результаты, так и результаты, опубликованные в последнее время. Для понимания книги достаточно сведений, имеющихся в университетских курсах по линейной алгебре, теории групп, теории конечных полей и полиномов, комбинаторике и дискретной математике. Помимо этого предполагается знакомство с основами теории вероятностей. Основой для книги послужили материалы курсов, читаемых авторами в МГУ для студентов механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики, специализирующихся по направлению «Информационная безопасность». Книга будет полезна студентам, аспирантам и научным работникам, интересующимся дискретной математикой, теорией кодирования и криптологией. Она может быть использована в том числе и как справочник.

С. М. Львовский. **Лекции по комплексному анализу.** 136 с.

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант курса лекций, прочитанного автором на втором курсе Независимого московского университета в весеннем семестре 2002 года. Помимо традиционного материала, приведены сведения о компактных римановых поверхностях; обсуждаются такие результаты, как теорема Римана – Роха и (отчасти) теорема Абеля, а в первом нетривиальном случае (для эллиптических кривых) приводятся и доказательства.

И. М. Парамонова, О. К. Шейнман. **Задачи семинара «Алгебры Ли и их приложения».** 48 с.

В сборнике, в форме задач, дается последовательное изложение основ теории алгебр Ли, включая нильпотентные, разрешимые и полупростые алгебры Ли, классификацию конечных систем корней, универсальные обертывающие алгебры, элементы теории кохомологий алгебр Ли, введение в аффинные алгебры Каца – Муди, элементы теории представлений, включая формулу характеров Вейля – Каца, некоторые приложения к интегрируемым системам и тождествам Макдональда. Предполагается знание математики в объеме первых трех семестров математических факультетов.

Я. П. Понарин. **Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов.** 160 с.

В книге в научно-популярной форме излагаются основы метода комплексных чисел в геометрии. Отдельные главы посвящены многоугольникам, прямой и окружности, линейным и круговым преобразованиям. Метод комплексных чисел иллюстрируется на решениях более 60 задач элементарного характера. Для самостоятельного решения предлагается более 200 задач, снабженных ответами или указаниями. Книга адресуется всем любителям геометрии, желающим самостоятельно овладеть методом комплексных чисел. Ее можно использовать для проведения кружков и факультативных занятий в старших классах средней школы.

В. В. Прасолов. **Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.** 352 с.

Методы, используемые современной топологией, весьма разнообразны. В этой книге подробно рассматриваются методы комбинаторной топологии, которые заключаются в исследовании топологических пространств посредством их разбиений на какие-то элементарные множества, и методы дифференциальной топологии, которые заключаются в рассмотрении гладких многообразий и гладких отображений. Нередко одну и ту же топологическую задачу можно решить как комбинаторными методами, так и дифференциальными. В таких случаях обсуждаются оба подхода. Одна из главных целей книги состоит в том, чтобы продвигнуться в изучении свойств топологических пространств (и особенно многообразий) столь далеко, сколь это возможно без привлечения сложной техники. Этим она отличается от большинства книг по топологии. Книга содержит много задач и упражнений. Почти все задачи снабжены подробными решениями.

**Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.** 560 с.

В книге рассматривается геометрическая интерпретация всех простых групп Ли в виде групп движений классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана, основных групп проективных, конформных, симплектических и метасимплектических геометрий над алгебрами. В книге рассматривается также геометрическая интерпретация групп Ли, получаемых предельными переходами из простых групп Ли. К таким группам относятся группы движений евклидовых, псевдоевклидовых, изотропных и многих других геометрий над алгебрами. Наряду с непрерывными пространствами рассматриваются конечные пространства, основными группами которых являются конечные группы типа Ли. В книге указываются важнейшие применения рассматриваемых геометрий к физике. Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся по неевклидовым геометриям.

**Б. А. Розенфельд. Аполлоний Пергский.** 176 с.

Труды многих величайших математиков древности переведены на многие языки, об этих математиках написано много исторических книг и статей. Переводы же книг Аполлония Пергского — создателя теории конических сечений — издавались крайне редко, большинство переводов были по существу пересказами. На русском языке были изданы только первые 20 теорем из главного труда Аполлония «Конические сечения». Настоящая книга представляет собой попытку создания научной биографии Аполлония, содержащей анализ его трудов с точки зрения современной науки. Для широкого круга читателей, интересующихся математикой.

**Н. Н. Савельев. Лекции по топологии трехмерных многообразий. Введение в инвариант Кассона.** Пер. с англ. И. А. Дынникова. 216 с.

Книга посвящена введению в бурно развивающуюся область математики — топологию трехмерных многообразий. Она начинается с изложения начальных сведений из этой области науки. Вторая часть книги посвящена инварианту Рохлина и его свойствам, в заключительной части книги рассматривается инвариант Кассона и его приложения. В книге приведено много примеров. Книга предназначена для студентов и аспирантов математических специальностей.

**Семинар «Глобус». Общематематический семинар. Выпуск 1.** Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. 264 с.

Цель семинара «Глобус» — по возможности восстановить единство математики. Семинар рассчитан на математиков всех специальностей, аспирантов и студентов. Первый выпуск включает доклады В. И. Арнольда, А. А. Болибруха, В. А. Васильева, С. И. Гельфанда, А. В. Зелевинского, В. Я. Ивриа, Ю. С. Ильяшенко, С. К. Ландо,

Ю. И. Манина, Й. Меннике, Я. Г. Синая, Б. Л. Фейгина, А. Я. Хелемского и М. А. Цфасмана.

Ю. Н. Тюрин и др. **Теория вероятностей и статистика.** Совместно с АО «Московские учебники». 256 с.

Учебное пособие по основам теории вероятностей и статистики рассчитано на учащихся 7–9 классов общеобразовательных учреждений. Оно также может быть использовано и в старших классах полной средней школы. В этой книге в равной мере уделяется внимание статистике и теории вероятностей и их роли в изучении явлений окружающего мира. Книга предназначена для первичного знакомства учащихся с формами представления и описания данных в статистике, рассказывает о случайных событиях, вероятностях и их свойствах. Изложение теории вероятностей доведено до понятий о случайных величинах и законе больших чисел. В приложениях даны примерные самостоятельные и контрольные работы для 7, 8 и 9 класса, написаны пояснения ко встречающимся терминам. Авторы стремились сделать изложение простым и не злоупотребляли математическим формализмом.

А. Г. Хованский. **Комплексный анализ.** 48 с.

В этой брошюре содержатся задачи к начальному полугодичному курсу комплексного анализа, который читался для второкурсников весной 2003 года в НМУ. Вот некоторые из тем, которые обсуждались в курсе: формула Стокса в ослабленных предположениях гладкости, содержащая как частный случай теореме Коши; геометрия преобразования инверсии и геометрия Лобачевского, связь этих геометрий с ТФКП; теорема Римана вместе с теоремой о продолжаемости отображения Римана до границы; римановы поверхности аналитических функций; принцип симметрии Римана – Шварца и теорема Пикара.

О. К. Шейнман. **Основы теории представлений.** 64 с.

Книга представляет собой семестровый вводный курс теории представлений конечных и важнейших компактных групп. Предназначается для студентов математических и физических специальностей, начиная со второго курса.

А. Шень. **Математическая индукция.** 36 с.

В брошюре рассказывается (для школьников 7–11 классов) о методе математической индукции на примере 29 задач, из которых 19 снабжены подробными решениями.

**XXVI Турнир им. М. В. Ломоносова (28 сентября 2003 года).** 136 с.

Приводятся условия и решения заданий Турнира с подробными комментариями (математика, физика, химия, астрономия и науки о Земле, биология, история, лингвистика, литература, математические игры). Авторы постарались написать не просто сборник задач и решений, а интересную научно-популярную брошюру для широкого круга читателей. Существенная часть материала изложена на уровне, доступном для школьников 7-го класса. Для участников Турнира, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

СЕРИЯ «БИБЛИОТЕКА „МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ“»

Вып. 29. С. Б. Гашков. **Системы счисления и их применение.** 52 с.

Различные системы счисления используются всегда, когда появляется потребность в числовых расчетах, начиная с вычислений младшеклассника, выполняемых карандашом на бумаге, кончая вычислениями, выполняемыми на суперкомпьютерах. В книжке кратко изложены и занимательно описаны некоторые из наиболее популярных систем счисления, история их возникновения, а также их применения, как старые, так и новые,

как забавные, так и серьезные. Большая ее часть доступна школьникам 7–8 классов, но и опытный читатель может найти в ней кое-что новое для себя. Текст книжки написан на основе лекций, прочитанных автором в школе им. А. Н. Колмогорова при МГУ и на Малом мехмате МГУ. Книжка рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников, учителей.

## ПЕРЕИЗДАНИЯ

- В. И. Арнольд. **«Жесткие» и «мягкие» математические модели.** 2-е издание, стереотипное 32 с.
- В. И. Арнольд. **Нужна ли в школе математика?** Стенограмма пленарного доклада (Дубна, 21 сентября 2000 г.). 2-е издание, стереотипное 32 с.
- В. И. Арнольд. **Что такое математика?** 2-е издание, стереотипное 104 с.
- В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. **Особенности дифференцируемых отображений.** 2-е издание, испр. 672 с.
- Н. Я. Виленкин. **Рассказы о множествах.** 3-е издание 152 с.
- И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. **Функции и графики (основные приемы).** Библиотечка ОЛ ВЗМШ. 6-е изд., испр. 120 с.
- И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом. **Тригонометрия.** 3-е издание, испр. и доп. (Совместно с АО «Московские учебники») 200 с.
- Р. К. Гордин. **Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы.** 2-е изд., исправленное. 416 с.
- Р. К. Гордин. **Это должен знать каждый матшкольник.** 3-е издание, стереотипное. 56 с.
- А. А. Заславский. **Геометрические преобразования.** 2-е издание, стереотипное. 86 с.
- А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. **Как решают нестандартные задачи.** Издание 3-е, исправленное. Под редакцией В. О. Бугаенко 96 с.
- Е. Г. Козлова. **Сказки и подсказки (задачи для математического кружка).** Издание 2-е, испр. и доп. 165 с.
- Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. **Алгоритмы: построение и анализ.** Изд. 2-е, стереотипное. (Совместно с «Бином. Лаборатория знаний») 960 с.
- Н. М. Коробов. **Теоретико-числовые методы в приближённом анализе.** 2-е издание, перераб. и доп. 288 с.
- Р. Курант, Г. Роббинс. **Что такое математика?** 3-е изд., испр. и доп. 568 с.
- С. К. Ландо. **Лекции о производящих функциях.** 2-е издание, испр. 144 с.
- С. М. Натанзон. **Краткий курс математического анализа.** 2-е издание. 96 с.
- В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. **Практический курс по уравнениям математической физики.** 2-е издание, стереотипное. 208 с.
- В. В. Прасолов. **Геометрия Лобачевского.** 3-е изд., испр. и доп. 88 с.
- В. Н. Сачков. **Введение в комбинаторные методы дискретной математики.** 2-е изд., испр. и доп. 424 с.
- В. В. Ткачук. **Математика — абитуриенту.** Издание одиннадцатое, исправленное и дополненное. (мягкая обложка) 922 с.
- А. Шень. **Программирование: теоремы и задачи.** 2-е изд., испр. и доп. 296 с.
- А. Н. Ширяев. **Вероятность.** В 2-х кн. 3-е издание, перераб. и доп. 520+408 с.

\* \* \* \* \*

По вопросам приобретения этих книг обращаться по адресу: 119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11, магазин «Математическая книга».

Тел.: (095)-241-7285, факс: (095)-291-6501, e-mail: biblio@mccme.ru

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В №8

СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
247,	18 снизу	А. Я. Белов	Г. Харди

Редактор В. В. Яценко  
Подготовка оригинал-макета: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ ,  
METAPOST, М. Н. Вялый

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.  
Подписано в печать 31.01.2005 г. Формат 70 × 100/16.  
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 15,0. Тираж 1000.

Издательство Московского Центра  
непрерывного математического  
образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Облиздат»  
248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5  
Заказ №