МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 26

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 26. —
М.: МЦНМО, 2020. — 288 с.
ISBN 978-5-4439-1515-9

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1515-9

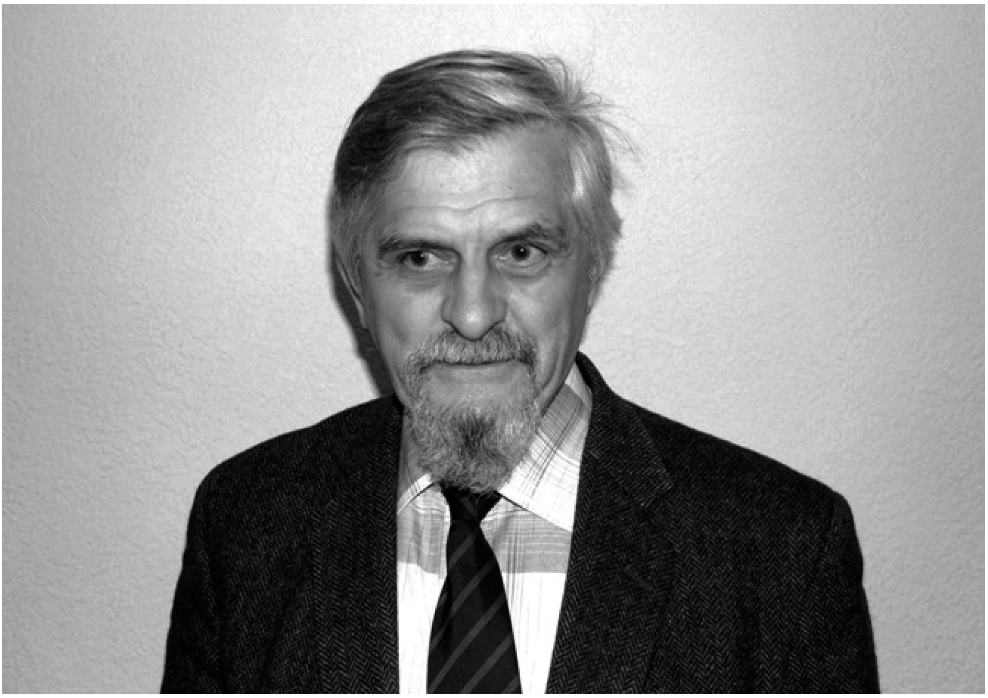
12 мая 2020 года скончался многолетний
главный редактор и член редколлегии
«Математического просвещения»,
доктор физико-математических наук,
профессор механико-математического факультета МГУ

Эрнест Борисович Винберг

Светлая память Эрнесту Борисовичу!

В следующем выпуске будут опубликованы материалы,
посвящённые Эрнесту Борисовичу Винбергу, и его тексты,
адресованные широкой математической аудитории.

Содержание



Поздравляем

Владимира Михайловича Тихомирова

с 85-летием!

Поздравляем наших коллег:

Редакцию журнала «Квант» —
с 50-летием журнала!

Редакцию журнала «Квантик» —
с выходом 100-го номера!

Жюри и оргкомитет Турнира городов —
с 40-летием турнира!

Заметки об истории ФМШ № 45 при ЛГУ и академической гимназии СПбГУ им. Д. К. Фаддеева

А. А. Флоринский

Цель этой статьи — рассказать о становлении математического образования в одной из наиболее известных в стране «университетских школ», носящей с марта 2015 года имя Дмитрия Константиновича Фаддеева (1907–1989).

Множество материалов об истории интерната было выпущено издательством Санкт-Петербургского государственного университета к трём юбилеям интерната — 45-му, 50-му и 55-му. Эти материалы включают биографические сведения о его выпускниках, статьи, рассказы и воспоминания преподавателей, выпускников и воспитателей интерната. Ознакомившись с ними, читатель сможет составить своё собственное впечатление о жизни и учёбе в интернате, о его педагогах и учениках, о событиях, связанных с интернатом, происходивших в те или иные периоды почти шестидесятилетней истории его существования.

Данная статья последовательным историческим повествованием не является. Её основная задача — дать читателю общее представление об уникальной, не похожей на другие школе, к созданию которой были причастны многие крупные учёные. Дать представление о школе, с которой её создатели связывали большие надежды и ожидания и которая сумела во многом эти ожидания оправдать.

Автор заранее просит прощения у всех тех, чья связанная с интернатом деятельность, чьи привязанности, оценки или впечатления не нашли здесь должного отражения.

Эти заметки посвящены в основном математическому образованию в интернате, причём почти исключительно периоду 70-х годов прошлого века. Это был период устойчивого роста и расцвета интерната, и поэтому он во многом интереснее и доступнее для описания и анализа, чем другие периоды. Обширный фактический материал, связанный с этим и близкими периодами развития интерната, можно найти в книге Т. В. Бурковой, специально посвящённой первым тридцати годам его существования (*Буркова Т. В.* Академическая гимназия. Очерки истории (1963–1991). Школа-интернат № 45 при ЛГУ. СПб.: СПбГУ, 2013). История олимпиадных успехов учащихся интерната подробно описана в статье С. Г. Соколина, специально посвящённой этой теме (*Соколин С. Г.* Олимпиады в 45 школе-интернате при ЛГУ // Сб.: 45 интернат, Учителя. Ученики. Воспоминания / Под ред. М. А. Горяева и Ю. В. Суховершиной. СПб.: КРОМ, 2009).

Автор настоящей статьи закончил интернат в 1979 году, и часть представленного в ней материала основана и на его личных впечатлениях и размышлениях. Цель статьи — рассказать прежде всего о математической стороне образования в интернате и о тех аспектах интернатской жизни, которые связаны с математическим образованием особенно тесно.

Автор выражает благодарность преподавателю и заведующей музеем истории интерната Нине Кировне Гутковой за многочисленные и полезные беседы об истории школы; выпускникам и преподавателям интерната Б. М. Беккеру, К. Э. Воеводскому, М. А. Всемирнову, В. М. Гольховому, Б. Б. Лурье, А. Г. Мошонкину, И. А. Панину, А. Н. Петрову, С. Г. Соколину, М. М. Фаддееву, Д. В. Фомину, своими воспоминаниями и советами немало способствовавшим уточнению данных заметок и их обогащению дополнительным материалом. Автор выражает признательность С. Е. Рукшину за ряд замечаний и благодарит Т. П. Дубову, Б. М. Макарова, Ю. Н. Ловягина и В. П. Одинца, с которыми ему удалось обсудить подробно ряд упоминаемых ниже вопросов теории интеграла. Автор выражает особую благодарность М. И. Башмакову и Ю. И. Ионину, прочитавшим рукопись статьи и сообщившим немало интересного об идеях, положенных в основу интернатских курсов математики 70-х годов.

Автор благодарен своим коллегам по работе в интернате — преподавателям и администраторам прошлых лет И. С. Никольской, С. С. Пивоварову, Р. С. Пусеву, Н. В. Серовой, Т. Б. Хвостиченко, неоднократно делившимся своими знаниями об интернате в период после двухтысячного года. Наконец, автор благодарит активно работающих в интернате в настоящее время преподавателей О. М. Кузнецову и Г. М. Головачёва, администраторов Д. Д. Андрианову и Е. В. Першину, любезно ответивших

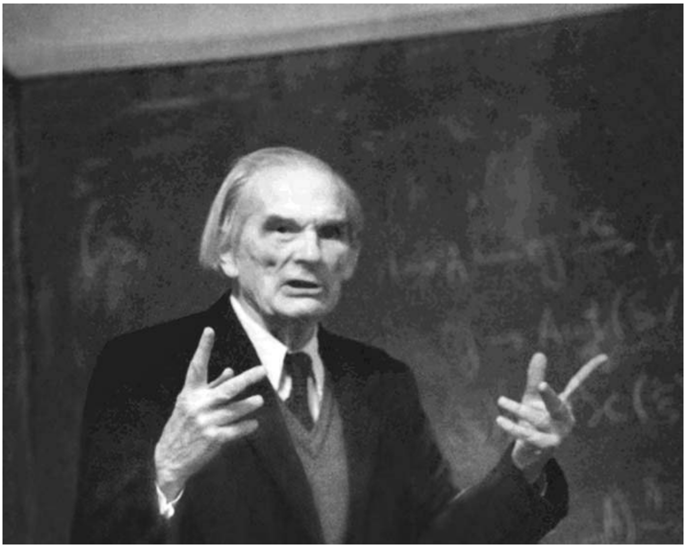
Интернат № 45 при ЛГУ

автору на вопросы, связанные с сегодняшней жизнью интерната, и рассказавших о текущих планах его развития.

Начало

Физико-математическая школа-интернат № 45 при Ленинградском государственном университете имени А. А. Жданова была создана по постановлению Совета министров СССР в 1963 году и переименована в Академическую гимназию СПбГУ в 1991. В 2015 году, по итогам общественного обсуждения, приказом ректора СПбГУ ей было присвоено имя Дмитрия Константиновича Фаддеева — замечательного математика, член-корреспондента Академии Наук СССР, активно участвовавшего в процессе создания школы и уделявшего значительное внимание развитию высшего и школьного математического образования в целом в России.

Историю школы аллегорически можно сравнить с историей фантастического сада. Этот сад, безусловно, был заложен теми, кто думал о развитии нашей страны, о будущем науки, о её роли в развитии страны и человечества, о необходимости вырастить тех, кто сможет в будущем это развитие обеспечить. Ещё более важной была мысль о том, что необходимо попытаться дать доступ к первоклассному образованию способным и готовым учиться ребятам, живущим в деревнях и посёлках с плохим сообщением, бедными библиотеками, вдали от основных учебных и научных центров. Будущие ученики интерната (саженцы) отбирались с помощью похожих на олимпиады экзаменов преподавателями Ленин-



Д. К. Фаддеев

градского университета (селекционерами), которые с большим энтузиазмом выезжали для этого в специальные командировки по всем областям Северо-Западного региона России, а также автономной республики Коми и прибалтийских республик. Среди преподавателей интерната также было очень много выпускников и преподавателей ЛГУ. Университетские требования и университетская атмосфера — вот что отличало с самого начала школу-интернат № 45 от других школ того времени!

В 70-х годах, когда учебный процесс уже устоялся, для обучения в интернате набирали два восьмых физико-математических класса, которые обучались затем три года (трёхгодичный поток), и три девятых класса, из которых два класса имели физико-математическую, а один химико-биологическую направленность (двухгодичный поток).

Таким образом, девятых классов в школе было пять, а всего различных классов — двенадцать, ибо последним классом в те времена был десятый. Хотя среди учащихся и были ленинградцы, также поступавшие по результатам экзаменов, однако они составляли выраженное меньшинство (например, в нашем классе их было трое). Некоторые учащиеся до интерната обучались в деревенских школах, порою расположенных в нескольких километрах от места их проживания.

Предоставленная интернатом возможность поменять судьбу была в условиях плохой связи и отсутствия интернета абсолютно уникальной. Два или три года совместной жизни и учёбы в особой, предельно доб-

Гимназия имени Д. К. Фаддеева (современный вид)

рожелательной атмосфере товарищества и взаимопомощи, под руководством выдающихся педагогов, вспоминались впоследствии, по признанию многих выпускников, как время подлинного счастья.

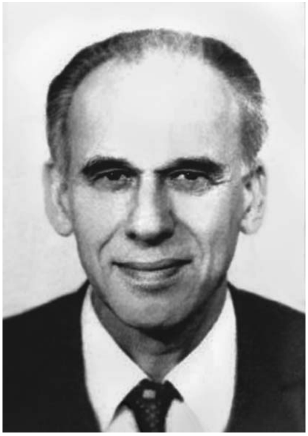
Что важнее для сада — селекционный материал или селекционер-садовник? Или методика ухаживания за растениями? Или почва, на которую подросшие и окрепшие саженцы попадут впоследствии? Так или иначе, но сад в 1963 году был заложен и процесс развития начался.

Спустя 60 лет, оглядываясь на достигнутые выпускниками интерната успехи, мы можем уверенно утверждать, что обучение в интернате с самого начала было высокоэффективным. По сравнению с процессами ухаживания за растениями, процессы обучения сложнее поддаются анализу, и не всегда легко выделить факторы, влияющие на их итоговую эффективность. В целом для характеристики любого учебного процесса важны по крайней мере три группы факторов. Во-первых, научный уровень программ и уроков, качество их содержания и усвоения. Во-вторых, уровень и глубина прямого психологического взаимодействия всех участников процесса обучения, их взаимоотношения в рамках изучения того или иного предмета. В-третьих, существенное значение имеет и косвенное психологическое взаимодействие участников учебного процесса, остающееся вне полного контроля их сознания, но влияющее и на становление личностей учащихся, и на восприятие знаний. Мы остановимся несколько подробнее на каждой из этих сторон преподавания ниже. По-видимому, значение имеет как каждая из них в отдельности, так и их сочетание, которое тоже может быть более или менее удачным. В интернате же оно было и удачным и плодотворным. Мы будем обсуждать далее лишь математическое образование в интернате, оставляя в стороне и организационные вопросы, и замечательные успехи его учащихся и выпускников в физике, химии, биологии и других науках, представляющие не меньший интерес, чем их достижения в математике.

Становление концепции математического образования

Видные математики вносили свой вклад в развитие интерната с первых дней его существования. Большое значения имела общая поддержка работы со школьниками (не только непосредственно в интернате), которую оказывали в те годы ректор ЛГУ А. Д. Александров, широко известные профессора С. В. Валландер, Ю. В. Линник, В. И. Смирнов, Д. К. Фаддеев, Г. М. Фихтенгольц и другие. Ныне академик РАО, а в то время недавний выпускник матмеха Марк Иванович Башмаков, участвовавший в процессе создания школы-интерната с самого его начала, выделяет трёх человек, чьи взгляды наиболее заметно повлияли на развитие программы по математике в интернате. Это А. Н. Колмогоров, Д. К. Фаддеев, В. А. Рохлин. Но прежде всего необходимо назвать самого Марка Ивановича — математики, работавшие в интернате с момента его создания, называют именно М. И. Башмакова в качестве человека, положившего начало формированию интернатской программы по математике. В круг основных интересов Марка Ивановича входили многочисленные математико-методические вопросы и прежде всего поиск математически безупречных способов изложения новых для школьников тем. Будучи и блестящим организатором (внёсшим, по общему мнению, принципиальный вклад в решение едва ли не всех вопросов, связанных с началом работы школы), он в короткий срок сумел сформировать команду молодых преподавате-

М. И. Башмаков



В. А. Рохлин

Ю. И. Ионин

лей, решивших задачу донесения до учеников современного и сложного математического содержания.

Фактически сразу в эту команду вошёл возглавивший её впоследствии математик и педагог Ю. И. Ионин, ставший через 10 лет одним из наиболее известных преподавателей математики в стране. Совместно с ним в первые годы в интернате работали В. А. Гусев, А. И. Плоткин, перешедшие через довольно короткое время на работу в другие известные образовательные учреждения страны, но внёсшие заметный вклад и в развитие методики преподавания в интернате. Несколько позже присоединились ставшие вместе с Ю. И. Иониным основными учителями математики в интернате: алгебраист и университетский преподаватель Б. М. Беккер; будущий глава Северо-западной заочной математической школы В. М. Гольховой; ставший вскоре главным тренером интернатских команд на математических олимпиадах всех уровней Л. Д. Курляндчик. В результате образовался костяк того преподавательского состава, через уроки и спецкурсы которого долгие годы проходило подавляющее большинство учащихся интерната. Ими были созданы методические материалы, созданы и собраны задачи, составившие основу интернатских курсов алгебры и анализа. Часть этих материалов вошла в книгу: *Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М., Ионин Ю. И.* Алгебра и начала анализа. Задачи и решения. СПб.: СПбГУ, 2002; М.: Высшая школа, 2004.

К работе в интернате с самого начала привлекались также очень сильные студенты и аспиранты-математики, основные интересы которых были связаны с наукой. Среди них были С. В. Востоков, Ю. В. Матиясевич, А. А. Суслин, А. В. Яковлев, получившие в период, близкий к их работе в интернате, ныне всемирно известные математические результаты. В более поздний период в интернате работали и оказывали значительное влияние на преподавание математики такие известные учёные, как О. Я. Виро, О. Л. Виноградов, О. А. Иванов, Б. Б. Лурье, Н. Ю. Нецветаев, С. В. Фомин и другие. В результате учащиеся интерната могли с самого начала взаимодействовать с математиками различных специализаций, крупными педагогами и специалистами, готовыми передавать молодым свои знания, энергию и неоценимый научный опыт.

Программы по математике в интернате

Содержание программ по математике в интернате имело несколько важных особенностей. Во-первых, был очень высок процент материала, до этого никогда не преподававшегося в средней школе. Достаточно назвать производные, интегралы, векторы. Второй особенностью была установка «всё должно быть доказано» (цитата из выступления М. И. Башмакова на конференции, посвящённой 55-й годовщине образования интерната) или, более широко, — установка на безупречность математического изложения. Также важное значение имело желание учителей познакомить школьников с разнообразными дополнительными приёмами решения задач, с недостаточно представленными как в обычных школьных, так и в стандартных вузовских программах полезными фактами. Иначе говоря, научить их тому, чему научиться потом будет негде или некогда — немало примеров таких фактов можно найти и в элементарной теории чисел, и в геометрии, и в комбинаторике. Сочетание этих установок ставило перед преподавателями интерната многочисленные и трудные математико-методические задачи. Эти задачи решались постепенно, порою с участием крупных математиков и молодых преподавателей интерната. Сейчас вклад отдельных специалистов в процесс формирования интернатских программ по математике часто уже невозможно выделить. Решалась труднейшая задача формирования математического багажа школьника на основе неадаптированных и современных математических идей, причём таким образом, чтобы учащийся мог дальше использовать эти идеи и уверенно опираться на них многие годы. Проводилась огромная работа по поиску новых способов определения многих основных понятий, поиску новых строгих, но доступных школьникам доказательств основных теорем. Систематически использовались и конструктивные и аксиоматические методы, что позволяло давать краткие и строгие определения многим сложным математическим понятиям. Вещественные числа в ряде потоков определялись конструктивно, в других — аксиоматически. Но в любом случае подчёркивалось и соблюдалось правило: любое свойство чисел, встречавшееся учащимся ранее или нет, должно быть полностью доказано, опираясь на определение или путём вывода из аксиом. Это устанавливало некоторую планку уровня строгости всего курса. Её удавалось удерживать не только в простых, но и в методически наиболее сложных вопросах, излагая без потери уровня строгости такие темы, как интегралы и их приложения, производные, векторы, элементарные функции, выпуклость, кривые и их длины и другие.

Определение интеграла. Я остановлюсь для примера на понятии «определённый интеграл» — в том виде, в каком наш класс познакомился с ним в 1979 году на лекциях Б. М. Беккера. Это была одна из основных форм определения интеграла в интернате, введённая в преподавательскую практику Ю. И. Иониным. Возможностям раннего введения понятия интеграла была специально посвящена его диссертация (руководители Д. К. Фаддеев и М. И. Башмаков, 1976 год). В основу обсуждаемого подхода к интегралу было положено то, что интеграл можно охарактеризовать как единственную аддитивную функцию промежутка, удовлетворяющую некоторым простым неравенствам «монотонной нормировки» (см. ниже). Одно из первых упоминаний подобной характеристики интеграла можно найти в работе *Hahn H. and Rosenthal A.* Set Functions. University of New Mexico Press. Albuquerque, 1948; заметное внимание в конце 50-х и начале 60-х годов прошлого века уделяли такого рода характеристикам интеграла в своих лекциях Д. А. Владимиров, Б. З. Вулих, Г. И. Натансон, В. П. Хавин и другие. На возможность аксиоматических подходов к определению целого ряда геометрических понятий, основанных на свойстве аддитивности, неоднократно указывал В. А. Рохлин; по собственному признанию многих работавших в те годы математиков (в том числе Ю. И. Ионина), взгляды В. А. Рохлина оказывали сильное влияние на их математическое мировоззрение[1)].

Молодые преподаватели интерната (в том числе В. А. Гусев, Ю. И. Ионин, А. И. Плоткин) под влиянием своих руководителей и учителей

[1)] По сообщению С. Е. Рукшина, в школьном преподавании подход к интегралу как к аддитивной функции промежутка развивал А. И. Плоткин, узнавший о таком подходе от своего учителя В. П. Хавина. Сотрудники кафедры математического анализа СПбГУ указывают на Д. А. Владимирова как на инициатора использования ряда важных для обсуждаемого подхода идей. М. И. Башмаков отмечает и заметное общее влияние Д. А. Владимирова на преподавание в интернате, куда он неоднократно приезжал принимать экзамены.

(М. И. Башмакова, Д. А. Владимирова, В. А. Рохлина, Д. К. Фаддеева, В. П. Хавина) постепенно сформировали целый комплекс взаимосвязанных оригинальных подходов к изложению ряда тем, связанных с интегралом; так, В. А. Гусевым разрабатывался подход к введению производной с опорой на уже изученное понятие интеграла, также использовался интеграл и при изложении некоторых элементов тригонометрии; мы не будем, однако, останавливаться на этих темах подробно.

Определение интеграла, о котором шла речь выше, заключалось в следующем. Интегралом от ограниченной функции f, заданной на замкнутом промежутке E вещественной прямой, называется единственная аддитивная функция промежутка $T[a,b]$, заданная на множестве всех замкнутых содержащихся в E промежутков и обладающая следующим свойством: если функция f на $[a,b]$ ограничена снизу и сверху некоторыми константами m и M, то значение $T[a,b]$ лежит между числами $m(b-a)$ и $M(b-a)$. Если такая функция $T[a,b]$ действительно существует и единственна, то исходная функция f называется интегрируемой, а число $T[a,b]$ называется значением интеграла от функции f по промежутку $[a,b]$.

Каковы же методические особенности данного определения, хорошо оно или плохо? Разумеется, однозначно ответить на последний вопрос невозможно. И всё же можно высказать два соображения. Во-первых, хотя приведённое выше определение эквивалентно классическому определению интеграла Римана, оно и короче классического определения, и использует более простой математический аппарат. Здесь нет ни операции перехода к пределу, ни разбиений отрезков на сколь угодно мелкие части, ни трудных для начинающего сумм сколь угодно большого количества слагаемых, ни точных верхних и нижних границ числовых множеств. В определении присутствуют только сложение и умножение чисел и связанные с этими действиями свойства неравенств. Таким образом, мы имеем перед собой форму определения интеграла Римана, пригодную для изучения даже в восьмом классе. Именно с этой целью данное определение изучалось и использовалось Ю. И. Иониным. Второе соображение состоит в том, что данная форма определения интеграла легко переносится на случай, когда функция f задана на некотором достаточно произвольном пространстве E, снабжённом некоторой конечно-аддитивной мерой. Это открывает возможность более лёгкого перехода к изучению интеграла по мере в дальнейшем, уже в высших учебных заведениях. Таким образом, усилия, затраченные учащимся на изучение приведённого выше определения, не пропадут даром! Ознакомившийся с ним школьник получает представление не только о правилах выполнения действий с неравенствами, но и об общих идеях современной теории интеграла.

Вернёмся теперь к лекциям Б. М. Беккера. Они читались в двухгодичном потоке выпускному 10 классу во втором семестре. Квалификация слушателей здесь выше, чем в 8 классе трёхгодичного потока, где это определение также изучалось, но времени у лектора намного меньше. А трудности, связанные с практическим применением приведённого определения, очевидны. Например, прямо по определению не так-то легко установить, что интеграл от суммы равен сумме интегралов (проблема состоит здесь в проверке свойства интегрируемости суммы). Пути решения этой проблемы хорошо известны во всех элементарных теориях интеграла. Но у школьного преподавателя есть специфические трудности — он должен закончить свой курс для десятиклассников до завершения учебного года. И он должен дать учащемуся как-то пощупать любое новое и серьёзное определение достаточно быстро, без развёртывания предварительных теорий. Так или иначе, но это «ощупывание» мне хорошо запомнилось с десятого класса. Из-за переносов лекций какие-то занятия не состоялись, и почти сразу возникло определение натурального логарифма числа x, большего единицы, как интеграла по промежутку $[1, x]$ от функции $1/x$. Ну, а потом, как-то очень быстро, возникла контрольная, на которой, кроме прочего, было предложено установить несколько неравенств, связанных с оценкой логарифмов натуральных чисел. Весь класс был уверен, что эти задачи попали в контрольную по недоразумению — свойства натуральных логарифмов, видимо, случайно оказались не пройденными… А про упомянутые выше определения все, увы, забыли… А зря! Прямо по определениям интеграла и логарифма мы могли бы легко получить искомые неравенства. Достаточно было оценить значение функции $1/x$ с помощью двух констант на нескольких промежутках, и прямо по определению интеграла мы получали все искомые оценки. А так мы, вместо хороших оценок логарифмов, получили плохие оценки в журнал и неоценимый опыт конкретного использования высоко абстрактных аксиоматических определений на практике. Независимо от достоинств или недостатков тех или иных подходов к математическим понятиям, описанный педагогический сюжет является, по-моему, иллюстрацией великолепного педагогического мастерства учителя.

Замечание. В качестве чисто математического дополнения (или упражнения) для любознательного читателя отметим ещё раз, что приведённое выше определение интеграла можно фактически без изменений переносить на различные более общие ситуации. Например, можно взять

Выпускники 1972 года

в качестве E множество натуральных чисел, а в качестве «промежутков» рассматривать любые (в том числе и неограниченные) его подмножества, состоящие из натуральных чисел, идущих подряд. При этом длина конечного промежутка по определению полагается равной нулю, а бесконечного единице. Тогда ограниченная функция на E — это произвольная ограниченная числовая последовательность чисел, а её интегрируемость эквивалентна существованию у неё предела, понимаемого в обычном смысле. Итак, классическое понятие предела последовательности можно рассматривать как частный случай приведённого выше понятия интеграла.

Общие особенности учебного процесса в интернате

Мы упомянем лишь некоторые особенности учебного процесса, в основном связанные с преподаванием математики. Но прежде всего мы отметим одну общую, очень существенную, хотя и косвенную (с точки зрения каждого отдельного урока) психологическую особенность учебного процесса в интернате в целом. Она состояла в том, что почти все учащиеся жили в интернате, а не дома. Их жизнью после уроков управляли в основном воспитатели (чаще всего воспитательницы), до какой-то степени заменявшие им родителей. Воспитательницы ставили себе целью обеспечение хорошей психологической атмосферы в каждом классе, каждой палате (палата — комната в общежитии, в которой проживало с некоторыми вариациями около 6 человек). И надо сказать, что в целом они в этом преуспевали. Атмосфера доброжелательства и взаимопомощи среди учащихся интерната, о которой часто вспоминают многие выпускники, — это их заслуга. Многие выпускники с большой благодарностью говорят именно о своих воспитательницах. «Жилось нам там припеваючи» — писал выпускник 1976 года, ныне член-корреспондент РАН И. А. Панин, вспоминая воспитательницу своего класса Людмилу Петровну Романову, работавшую в интернате с самого его открытия и обладавшую, по свидетельствам многих, исключительной чуткостью и добротой. Координировала воспитательский корпус Анна Освальдовна Пускова, пользовавшаяся непререкаемым авторитетом как среди учеников и учителей, так и среди самих воспитателей. Общее руководство организационными вопросами школы и общежития осуществлял, разумеется, директор интерната, которым в 70-е годы был Борис Васильевич Борисов. Характерные для него высокие деловые качества и человеческая порядочность создавали хорошую основу для успешной работы всех интернатских структур.

Так или иначе, но постоянное проживание учащихся в интернате влекло множество следствий. Более высокую самостоятельность учащихся интерната по сравнению со сверстниками. Готовность рассчитывать порой только на свои силы. Необходимость развития способности к правильной самооценке, в том числе при восприятии материала на уроках. Большую роль товарищей по классу и по общежитию — и как друзей, готовых помочь, и как коллектив интересных, неординарных личностей, оказывающих сильное влияние друг на друга. Взаимопомощь в интернате, интернатская дружба были очень сильны. Была и особая роль таких уроков, как физкультура и литература, оказывающих заметное влияние на развитие личности и дающих, каждый в своём роде, выходы творческой энергии учащихся. Здесь, как всегда в интернате, была очень велика роль и преподавателей и самих воспитанников. Олег Иванович Дугин и Нина Кировна Гуткова — преподаватели физкультуры в интернате 70-х годов — прививали учащимся любовь к физкультуре и спорту, к различным формам спортивного самовыражения. Их поддерживали и преподаватели других дисциплин. Например, в туристических походах активно участвовали и многие математики, начиная с Марка Ивановича Башмакова, который сам их организовывал в первые годы существования интерната. В воспоминаниях выпускников в числе активных участников походов и одновременно великолепных учителей часто фигурируют математики Юрий Иосифович Ионин, Галина Васильевна Шалугина, Неля Набиевна Удальцова. В восьмидесятые годы большой вклад в развитие спортивных и походных навыков учащихся интерната вносил воспитатель, лингвист и руководитель интернатского театрального кружка Арсений Ефимович Бойцов, водивший учащихся в категорийные горные походы по многим известным горным массивам. Он также оказывал заметное влияние на развитие различных творческих способностей школьников.

Значительное обогащали все стороны жизни школьников в чём-то близкие к походам археологические раскопки древнего города Херсонес, куда многие учащиеся интерната с преподавателями выезжали летом во время каникул.

К сожалению, в истории интерната была и трагическая страница, также связанная с походами. В 1970 году в результате несчастного случая погибли одна из очень ярких интернатских преподавательниц математики Кира Александровна Муранова и бросившийся в горную реку для её спасения талантливейший математик-десятиклассник Геннадий Кегелес.

Вернёмся к самим урокам физкультуры. При сдаче различных нормативов (важной в условиях интерната) внимание школьников привлекалось и к тому, что любое спортивное достижение представляет ценность, является показателем, который уважают все и которым вправе гордиться каждый. В результате у многих возникало желание достигнуть яркого спортивного результата. Я ограничусь примером из жизни нашего класса: ныне доцент СПбГУ физик и математик Василий Буслов в школе, после упорных тренировок, выполнял на турнике подъём переворотом 35 раз подряд. Этот факт у всех очевидцев оставался в памяти долгие годы, играя роль и точки опоры (значит, можно!), и источника собственного интереса к спортивным достижениям.

Также была очень велика и роль уроков литературы и сложившихся в интернате литературных традиций. Основной из них была традиция стихосложения, систематически и целенаправленно формировавшаяся учителями литературы (в том числе преподававшей в интернате и вызывавшей неизменно любовь и уважение учеников в течение более чем тридцати лет Н. П. Соболёвой, а также работавшими параллельно с ней, но более короткое время, также очень яркими педагогами Н. П. Королёвой, И. Г. Полубояриновой, А. А. Тишковой и другими). Требование написать стихотворение на свободную тему обязательно возникало на одном из уроков литературы в каждом классе. У нас это задание было предложено, кажется, на второй встрече с нашим преподавателем литературы, Натальей Павловной Соболёвой. На первой она объясняла, что на каждом уроке литературы с собой надо иметь всего три вещи. Первое — голову. Второе, насколько помню, тетрадь, третье — прочитанное произведение. Акцент на первое запомнился очень хорошо и ввиду его нетривиальности, и ввиду того, что такая установка по отношению к литературе была не очень уж привычна. Что касается стихов, то речь в упомянутом задании шла об их написании прямо на уроке, а не дома. Стихи, написанные дома, в школе также приветствовались. Вне уроков ежегодно, порой неоднократно, проводились вечера поэзии, пользовавшиеся огромной популярностью. В результате у учащихся формировалась любовь к поэзии, а у многих и поэтическое мышление, что, безусловно, обогащало их личность и интеллект. Почти в каждом выпуске интерната встречались и те, кто в дальнейшем связывал свою судьбу с литературой. Способствовали творческому самовыражению в интернате и преподаватели других дисциплин. Очень последовательно поощряла стихосложение и разнообразные другие формы творчества школьников Анна Алексеевна Карцова, ныне профессор СПбГУ и один из самых известных преподавателей химии в стране (как школьных, так и университетских). Вечера химика, которые она проводила (и продолжает проводить) в школе, стали известны далеко за пределами интерната и Петербурга.

Общенаучному и математическому развитию учеников прямо или косвенно способствовал в интернате весь учебный процесс. Программы по целому ряду предметов включали материал, преподаваемый в первое время существования интерната только в вузах. Это требовало от учащихся быстрого приспособления к восприятию большого потока информации и приводило к ускорению их развития во многих отношениях. Впоследствии собранные материалы вошли во многие написанные преподавателями интерната пособия, книги и статьи. Известнейшим пособием по физике стала книга, сейчас выдержавшая уже несколько изданий, которую в интернате называли сокращённо «Быков — Бутиков — Кондратьев». Задачник по химии А. А. Карцовой и Н. М. Луцкой и множество других учебников и книг по химии, написанных к настоящему времени при участии или под руководством А. А. Карцовой, также теснейшим образом связаны с уроками химии в интернате.

Решение задач было важной формой работы на уроках математики, физики, химии.

Что касается химии, то у многих математических классов, в том числе и у нашего, уроки вела Ирина Михайловна Луцкая. Манера Ирины Михайловны акцентированно говорить, думаю, надолго и хорошо запомнилась многим: контрольная работа. Достаём листочки, пишем. За-да-ча о-дин. Точ-ка. Ре-ше-ни-е. Через 45 минут сдаём. Влияние даже этого микрофрагмента на учеников достаточно сильно. Кроме прочего, он содержит «установку», диктующую порядок оформления каждой отдельной задачи (такие вещи часто обсуждаются в курсах нейролингвистического программирования). Самому курсу химии в изложении Ирины Михайловны были присущи и чёткость формулировок, и логика, и великолепная структурированность материала.

Преподаватели физики часто использовали на своих уроках довольно сложный математический аппарат и этим расширяли и математический кругозор учащихся. Чаще всего в 70-х годах в основных математических классах уроки вели А. А. Быков, С. П. Зеленин, В. М. Терехов. Они очень хорошо взаимодействовали с математиками в учебном процессе и в то же время оказывали на учеников сильное самостоятельное влияние. Оно распространялось и на формирование научного мышления, и на многое другое, включая, порою, формирование сугубо математических взглядов учащихся. Так, на одном из уроков физики, которые вёл у нас Виктор Максимович Терехов, мы узнали о работе А. Н. Колмогорова по теории турбулентности, в которой элементарный «метод размерностей» использовался для получения основных результатов. Примеры получения серьёзных результатов простыми методами Виктор Максимович вообще приводил с большим удовольствием. На его уроках можно было услышать много полезного, а его суждения о математике были содержательными, уважительными и обоснованными. Кроме того, уклад уроков, их атмосфера, тон Виктора Максимовича обладали уникальным свойством укреплять у учащихся оптимизм, уверенность в своих силах и веру в собственное светлое научное будущее.

Но вернёмся к урокам математики. Мы остановимся кратко лишь на нескольких элементах учебного процесса.

Волшебство математики и самообразование

Особенностью интернатских курсов математики было то, что их изучение не предполагало, по крайней мере формально, больших предварительных знаний учащихся. Иначе говоря, часто использовалось логическое построение с нуля, аксиоматический метод, о котором мы уже говорили выше. Использование аксиоматического метода, с одной стороны, делает материал более доступным для учащихся, с другой — повышаются требования к пониманию материала, ибо в него включается понимание уже не только самих результатов, но и всей логической структуры изложения. Возрастает роль всего, что происходит на уроке. При отсутствии стабильных учебников роль урока возрастает ещё больше. В результате изложение материала требует от преподавателя известного напряжения сил и высокой математической квалификации. И она была безусловно присуща всем известным мне преподавателям математики в интернате. Вместе с тем им была присуща увлечённость, готовность показать ученикам всю красоту как задач, так и построений математики. Трудно представить, чтобы при наличии двух решений задачи, стандартного и «олимпиадного», преподаватель интерната о втором решении умолчал.

Это отношение к предмету, восхищение его красотой, готовность к напряжению сил при работе, передавались учащимся, причём как осознанно, так и, если можно так выразиться, фотографически. Хорошо известно, что дети запоминают не только то, на что учитель (или родитель) специально обращал их внимание, но и то, на что он ни их внимания, ни, возможно, своего совсем не обращал. Воспринимают его мышление, манеру речи, оценку правдоподобности тех или иных гипотез, прибаутки и шутки, реакцию на неожиданную трудность в решении задачи. И детская готовность подражать, при наличии достойных примеров перед глазами (прежде всего, «любимых учителей»), является сильнейшим фактором их личностного и профессионального роста. Подражать в интернате, как уже не раз отмечалось, всегда было кому! Для многих учителей была характерна сильная увлечённость математикой как наукой, заметно влиявшая и на коллег и на учащихся. Часто она сочеталась с выдающимися собственными математическими достижениями.

Многие очень яркие математики работали в интернате то или иное, иногда довольно короткое время; примерами могут служить Ю. А. Давыдов, Э. Д. Глускина, С. В. Фомин, В. М. Харламов, В. Г. Тураев, В. А. Гриценко и многие другие. Оставив неизгладимые воспоминания у одного или нескольких поколений школьников, они переходили затем к другим видам математической деятельности. Это достаточно естественное явление, связанное с безостановочностью процессов развития личности, и его нельзя считать отрицательным. Но когда, решив переменить место жительства и вид математической деятельности, интернат покидал харизматический идеолог всего интернатского математического образования Юрий Иосифович Ионин, это вызвало огромное сожаление всех, кто был так или иначе причастен или просто знаком с учебным процессом в интернате. По свидетельству тогда десятиклассника, а ныне член-корреспондента РАН М. А. Всемирнова, чтобы пожелать Юрию Иосифовичу счастливого пути и дальнейших успехов, к нему перед отъездом пришёл в гости весь десятый математический класс. Замечу в дополнение, что несколько десятков написанных с тех пор Ю. И. Иониным математических работ и одну монографию интересующийся читатель легко найдёт в интернете…

В целом взаимодействие учителей и учеников на уроках математики по мере развития учебного процесса всё более превращалось во взаимодействие профессионалов. Одним из способов профессионального самовыражения учащихся, проявлением их математической самостоятельности было самообразование.

Существовали, по-видимому, три разновидности самообразования. Было учебное самообразование, толчком к которому мог служить запущенный учебный материал или, напротив, желание не запускать его. Для осуществления желаемого человек принимался усердно «учиться». Это означало, что он пытался разобраться в изложении преподавателя, со всеми его тонкостями, преуспеть в решении (вполне самостоятельном) возникавших ранее на занятиях вопросов и задач, а также ознакомиться с трактовкой темы в различных учебных и не полностью учебных пособиях. Высокий уровень овладения текущим материалом признавался одноклассниками за каждым начавшим «учиться» товарищем. Это было высокой оценкой, свидетельством взаимного уважения. Однако постоянно «учиться» могли не многие: материал, изучаемый в интернате, не был простым.

Второй вид самообразования можно назвать олимпиадным. Его мотивировка — набрать на следующей олимпиаде сто процентов очков, желательно за сокращённое время, на голову превзойдя всех ранее участвовавших в каких-либо олимпиадах школьников.

Третий вид самообразования можно условно назвать научным. Он заключался в попытках самостоятельно овладеть никак не связанным с основными занятиями материалом, например, каким-либо современным разделом математики (или физики). Интерес к теме мог быть связан и с одним из читавшихся в интернате спецкурсов, и с желанием превзойти товарищей, и с гамлетовским соображением типа «разве может настоящий математик жить, не зная этого». Стоит заметить, что самообразование — и учебное, и научное, и олимпиадное, иногда чрезмерно интенсивное — было очень характерно для учащихся интерната.

Олимпиады и критерии успеха

Соревновательный элемент был, безусловно, важен в жизни учащихся интерната. Почти все они в своих предыдущих школах были первыми, поэтому желание сразу убедить себя и других в своих преимуществах перед одноклассниками было естественным фоном жизни. Но первыми в чём? Безусловно, олимпиадные успехи ценились и вызывали и белую зависть одноклассников, и уважение друзей и учителей, и гордость за учебное заведение. А как не гордиться, если знаешь, что порою, скажем, на городской олимпиаде по математике все дипломы первой степени по параллели получают только учащиеся твоей школы? Что они со школьной олимпиады отправляются сразу на Всероссийскую? Что они постоянно получают по несколько дипломов на Всесоюзной олимпиаде, что постоянно кто-то побеждает и на Международной?

Вот несколько примеров, иллюстрирующих сказанное. В 1976 году на международной олимпиаде было три ленинградца (Нецветаев, Соломяк, Финашин) — все из интерната; на городской олимпиаде по математике в 1977 году учащиеся интерната получили все первые дипломы по 8 и 9 классам, в 1978 году — все первые дипломы по 9 и 10 классам, в 1979 году — все первые и вторые дипломы по 9 классам и все первые дипломы по 10 классам. Однако олимпиадные победы никогда не были в интернате единственным критерием успеха. Все преподаватели, включая главного специалиста по олимпиадной математике и тренера многих интернатских олимпиадных команд Л. Д. Курляндчика, отмечали не самую высокую значимость олимпиадных успехов. Что же тогда ценилось более всего? Умение решать трудные задачи как таковые — в первую очередь. Преподаватель дал на дом задачу. Кто решил? Один человек! Он крут! А если это каждый раз один и тот же человек, то он очень крут. Из олимпиад же, по свидетельству многих выпускников, больше всего ценились внутренние, школьные, как самые трудные. Они проходили в два, а в отдельных случаях в три тура. В первом туре участвовали фактически все учащиеся интерната. Второй (а в отдельных случаях и третий) тур имел одной из целей формирование команды интерната для поездки на Всероссийскую, а в некоторые годы и на Всесоюзную олимпиаду. Как составлялись задачи для этих олимпиад? По свидетельству Ю. И. Ионина, в 1970-х годах в проведении школьных олимпиад активно участвовали многие сильные выпускники предыдущих лет. Участвовали, разумеется, и преподаватели интерната и сам Юрий Иосифович, который ещё до работы в интернате, будучи студентом, в поисках хороших задач «прочесал

Команда интерната на Всероссийской олимпиаде (математика, физика, химия), 1980 г. Слева направо: Дима Бураго (9-мат), Паша Арбузов (10-хим), Галина Васильевна Шалугина, Олег Ижболдин (10-мат), Федя Ратников (10-физ), Ирина Михайловна Луцкая, Володя Ухов (8-физ), Дима Файнгауз (10-мат), Саша Мегрецкий (10-мат), Дима Фомин (9-мат), ?, Дима Овсянников (10-физ), Саша Сивацкий (10-мат), Саша Боричев (10-мат), Андрей Савкин (8-мат), Миша Семенченко (9-физ), Игорь Готлиб (8-хим)

со своим сокурсником Львом Слуцманом старые номера The American Mathematical Monthly лет за 50»! Неудивительно, что на интернатских олимпиадах встречалось много трудных задач. Но верно и то, что многие задачи внутренних интернатских олимпиад были основаны на вопросах, содержательных и вне чисто олимпиадного контекста.

Вот, например, три вопроса, представляющие собой перефразировку трёх задач олимпиады 1974 года (её текст нашёл в своём архиве и любезно предоставил автору Владимир Михайлович Гольховой). Вопрос номер один. Каждая ли функция, заданная на всей вещественной прямой, может быть представлена в виде суммы двух функций, график каждой из которых центрально симметричен? Вопрос номер два. Из какого максимального количества дуг окружностей может состоять граница неодноточечной фигуры, являющейся пересечением двадцати кругов? Вопрос номер три. Какие числа может получить из двух заданных взаимно простых натуральных чисел машина, способная выполнять лишь один вид действий — находить среднее арифметическое двух натуральных чисел в случае, если оно тоже является натуральным числом? Особенность этих вопросов в том, что каждый из них с очевидностью может стать стартовой точкой для интересной исследовательской работы школьника.

Несколько слов о новейшем периоде развития интерната

Подробности развития интерната в девяностые и в начале двухтысячных годов, включая возникавшие в течение этого времени организационные трудности, не относятся к числу предметов рассмотрения в данной статье. Содержание учебного процесса в этот период времени характеризовалось прежде всего увеличением количества направлений обучения, появлением новых интересных специализаций, активным поиском, в основном в естественнонаучном и гуманитарном направлениях. При этом некоторое размывание физико-математических приоритетов учебного процесса порою также имело место. Произошло заметное снижение спортивно-олимпиадных успехов учеников интерната. Однако высокий научный уровень преподавания в интернате сохранился. Интерес к решению олимпиадных задач начал постепенно замещаться интересом к решению задач исследовательского типа. Это совпало с повышением интереса к исследовательской и проектной деятельности школьников и в российском, и в мировом математическом образовании. Появилось немало математических соревнований, связанных с решением задач различной трудности без контроля времени: заочные этапы некоторых известных олимпиад, исследовательские турниры, различные научные конкурсы и конференции для школьников. В новейший период с 2010 по 2019 год учащиеся интерната добились заметных успехов в этих новых видах соревнований, хотя их уровень спортивно-олимпиадной активности по сравнению с рассматриваемым в статье периодом оставался низким; разные виды математической активности часто оказываются плохо совместимыми. Так, команда Академической гимназии стала единственной командой из России, которая дважды завоёвывала медали на международных турнирах системы ITYM — в 2016 году в Петербурге и в 2018 году в Париже[2)]. В обоих случаях командой руководил выпускник интерната Д. В. Миланов.

[2)] Турниры ITYM представляют собой командные соревнования, имеющие высокую популярность в Белоруссии, Болгарии, Германии, Румынии, Франции и других странах. Задачи исследовательского характера для этих турниров составляются научным комитетом олимпиады, включающим специалистов из ряда европейских университетов. Создание и развитие системы ITYM связано в первую очередь с именами белорусских и французских математиков, в числе которых Борис Задворный, Давид Змейков, Мартин Андлер.

Учащиеся интерната добиваются успехов и в выполнении школьных исследовательских работ. Например, одиннадцатиклассник Иван Лунёв в 2015 году установил, что существуют такие три двенадцатизначных взаимно простых натуральных числа x_1, x_2, x_3, что построенная на них последовательность «Трибоначчи» (так называется последовательность, каждый член которой, начиная с четвёртого, равен сумме трёх предыдущих), не содержит простых чисел. Этот результат позволил ему успешно выступить на ряде престижных исследовательских конкурсов. Однако гораздо более важно и интересно то, что результат Лунёва являлся на момент получения мировым рекордом: ранее были известны только взаимно простые числа с двадцатью и более знаками, порождающие аналогичную последовательность Трибоначчи. Научным руководителем рекордсмена был член-корреспондент РАН Максим Александрович Всемирнов, выпускник интерната 1989 года. Результат И. Лунёва позже был опубликован: *Lunev I.* A Tribonacci-Like Sequence of Composite Numbers // Journal of Integer Sequences. 2017. Vol. 20. Article 17.3.2. Также интересные результаты и первые премии на различных конкурсах школьных исследовательских работ получили в тот же период С. Брыгин, П. Кравцов, И. Подлужный.

В этот же период интернатом, в некоторых случаях совместно с другими учебными заведениями, для развития математических способностей и интересов, а также активизации исследовательской деятельности учащихся было проведено несколько летних школ и олимпиад. Многие известные математики, преподаватели и выпускники интерната и СПбГУ приняли активное участие в этих мероприятиях. В их числе Н. Б. Ампилова, А. С. Виноградов, К. Э. Воеводский, М. А. Всемирнов, О. А. Граничин, А. Л. Громов, О. А. Иванов, К. П. Кохась, Н. В. Кривулин, С. Г. Крыжевич, А. А. Лодкин, Н. Ю. Нецветаев, А. С. Матвеев, Г. Ю. Панина, А. Н. Петров, Р. С. Пусев, Ф. Х. Райтман, И. П. Соловьёв. В течение пяти лет в работе летних школ принимал также участие известный московский математик, член-корреспондент РАН Е. В. Щепин, оказывавший значительное влияние на их программу и снискавший среди школьников большую популярность, передававшуюся от поколения к поколению.

Возвращаясь к основной теме нашего изложения, отметим, что в интернате «настоящими» считались не сиюминутные, а долговременные успехи. На входе в школу каждый день все видели не только списки учащихся интерната — победителей международных олимпиад разных лет, но и списки выпускников, защитивших диссертации — кандидатские и докторские. Ранняя защита, решение мировой проблемы, построение новой теории — вот чего ждали от учеников преподаватели и о чём готовы были мечтать и они сами. Не требуя от учеников выбора той или другой специальности, никак не ограничивая их право на перемену интересов и поиск, школьные критерии успеха всей своей системой подводили каждого учащегося к следующей мысли: главное, что от него ждут, — серьёзные успехи после окончания школы на любом выбранном им поприще.

О матбое 1968 года

Хочется привести, без особых комментариев, один пример, лучше иллюстрирующий равноправные, профессиональные, во многом уникальные отношения между преподавателями математики и их учениками в интернате, чем многие страницы отвлечённого текста. В далёком 1968 году в интернате решили провести математический бой между школьниками и преподавателями (см. статью С. Г. Соколина «Подтверждая и опровергая тезисы Лемана» в журнале «Санкт-Петербургский Университет» № 14, 16 октября 2008). Матбой — это устное командное соревнование, в котором представители команд по очереди докладывают решения задач, полученных ими за несколько часов до боя, и по очереди оппонируют друг другу. В бое со стороны преподавателей участвовали Ю. И. Ионин, А. В. Яковлев, Л. Д. Курляндчик, Ю. В. Матиясевич, Г. В. Розенблюм. Со стороны учащихся участвовали победители многих олимпиад С. Семеньков, А. Берзиньш, П. Суворов. Судил матбой известнейший профессор кафедры математического анализа ЛГУ Гаральд Исидорович Натансон. А среди зрителей этого поразительного мероприятия, как я узнал совсем недавно, находился А. Б. Александров, ныне профессор кафедры математического анализа СПбГУ, тогда считавшийся ещё слишком молодым для участия в этом матбое. Менее чем через 15 лет, однако, им была уже решена известная проблема существования внутренней функции в многомерном комплексном шаре, за что позже получена международная премия имени Салема.

Итоги

Попробуем подвести теперь краткий итог нашему рассказу о школе, по некоторым параметрам ставшей, безусловно, одной из лучших школ в мире. Все особенности жизни и учёбы в интернате, о которых мы рассказали, служили лишь средством к достижению одной главной цели — воспитанию будущих учёных. Удалось ли её достигнуть? Ответ, я думаю, представляется и естественным и ожидаемым — да, выпускники интерната, повзрослев, сумели проявить себя в многочисленных областях разных наук, стали мощнейшими двигателями развития научного знания во всём мире. Среди первых выпускников — академик РАН А. А. Болибрух (1950–2003), давший миру решение 21-й проблемы Гильберта; академик РАН С. В. Кисляков, один из крупнейших специалистов по математическому анализу, уже много лет возглавляющий одно из значительнейших математических учреждений в России — Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова (ПОМИ); известный тополог, профессор В. М. Харламов, внёсший важнейший вклад в решение 16-й проблемы Гильберта. Некоторое, хотя и не полное, представление о математических достижениях выпускников интерната можно составить по материалам двух конференций, проведённых в ПОМИ к 50-летию и 55-летию со дня образования ФМШ № 45 — Академической гимназии имени Д. К. Фаддеева СПбГУ. Списки (из заметно более ста) участников и докладчиков этих конференций, а также видеозаписи некоторых докладов читатель легко найдёт на сайте ПОМИ РАН. Одним из более ранних источников, также отображающих достижения выпускников интерната, может служить выпущенный Американским математическим обществом в начале девяностых годов том переводов статей петербургских математиков (AMS Translations, Series 2, Vol. 174). Его титульными редакторами стали уже очень известные к тому времени выпускники интерната А. А. Болибрух, А. С. Меркурьев, Н. Ю. Нецветаев. В сборник вошли (кроме нескольких статей об интернате, которые читатель может найти также в специальном выпуске журнала «Санкт-Петербургский Университет» за май 1997 года) переводы научных работ ряда известных к тому времени выпускников интерната, а также статья не являвшегося выпускником, но преподававшего в интернате в первые годы его существования А. А. Суслина. Исследования А. А. Суслина, одного из самых известных петербургских алгебраистов, доказавшего в 1976 году гипотезу Серра о соотношениях между свободными модулями и проективными модулями над кольцом многочленов, в целом оказали сильное влияние на многих выпускников, выбравших в качестве области своих научных занятий алгебру. Теорема, называемая ныне в литературе теоремой Меркурьева — Суслина о группах Брауэра, стала одним из первых примеров ярких результатов, связанных с именами выпускников интерната.

К настоящему моменту множество важных результатов получено выпускниками интерната практически во всех основных областях математики (далее выпускники перечисляются в порядке года выпуска). Так, очень

А. А. Суслин

известны в области алгебры работы выпускников интерната (из числа связанных с ПОМИ и СПбГУ) В. А. Гриценко, А. С. Меркурьева, И. А. Панина, А. С. Сивацкого, А. Л. Смирнова, И. Б. Фесенко, О. Т. Ижболдина, Н. А. Карпенко, М. А. Всемирнова и многих других. К числу очень известных в области анализа относятся работы С. В. Кислякова, А. Б. Александрова, В. В. Пеллера, Б. М. Соломяка, Д. В. Якубовича, А. А. Боричева, В. В. Капустина, А. Г. Полторацкого, Е. В. Абакумова. В области геометрии и топологии — В. М. Харламова, В. Г. Тураева, В. В. Макеева, Н. Ю. Нецветаева, С. М. Финашина, Г. Ю. Паниной, Д. Ю. Бураго, И. В. Итенберга, А. В. Малютина. В различных областях математики и на стыках различных областей находятся работы многих выпускников, в том числе А. А. Болибруха, А. П. Качалова, С. А. Евдокимова, А. Н. Тихомирова, А. И. Мартикайнена, С. А. Ананьевского, Е. И. Шустина, Д. Ю. Григорьева, Н. А. Каразеевой, С. В. Фомина, М. В. Бабича, Г. А. Мошонкина, В. О. Тарасова, И. А. Ананьевского, В. А. Буслова, М. М. Фаддеева, А. Н. Лебедевой, Ю. В. Якубовича и других. Разумеется, ни один из приведённых выше списков не может претендовать на какую бы то ни было полноту.

Всё это означает, что выпускники в целом выполнили то, чего от них ожидали отцы-основатели интерната, учителя, родители, воспитатели. Они внесли значительный вклад в решение многих трудных научных вопросов. В зону их внимания многократно попадали проблемы, связанные с основными для той или иной области математики конструкциями, теоремами, подходами (хотя очевидно, что любое применение подобной терминологии к конкретным исследованиям носит субъективный характер). В нескольких областях математики возникли целые циклы работ, написанные выпускниками интерната, порою совместно с учителями, учениками или коллегами, и вошедшие в число самых заметных достижений в соответствующих областях.

Ещё более важным, чем известность работ, представляется другое: многих учёных — выпускников интерната связывает научная и личная дружба, обогащающая их профессионально и по-человечески, способная служить и стимулом для продолжения своей работы, и источником радости в жизни и оптимизма.

Этого же, то есть крепкой дружбы, хочется в первую очередь пожелать и сегодняшним учащимся Академической гимназии имени Д. К. Фаддеева. Как и успехов в учении, которые обязательно позволят им, подобно выпускникам старшего поколения, превзойти своих предшественников и учителей, получить новые научные результаты, написать новые учебники, внести существенный вклад в развитие своей страны и человечества!

Александр Алексеевич Флоринский, матмех СПбГУ
florinskiy.a@gmail.com

Воспоминания об интернате

А. А. Болибрух

Два года, проведённые в Физико-математической школе-интернате № 45 в Ленинграде, были одними из самых интересных в моей жизни и во многом определили не только мою профессиональную судьбу как математика, но и сформировали мой характер, отношение к жизни — всё то, что обычно называют жизненными и нравственными ценностями. В школьной интернатской программе были алгебра, математический анализ, история, литература…, и нас очень хорошо учили всем этим наукам наши любимые учителя: Юрий Иосифович Ионин, Ефим Эммануилович Наймарк, Ирина Георгиевна Полубояринова и многие другие, которых я люблю и помню. Но кроме обязательной школьной жизни была ещё и внешкольная, которая значила для нас ничуть не меньше. О некоторых эпизодах этой жизни мне и хотелось бы здесь рассказать.

Интернат в те годы находился в Ленинграде на улице Савушкина, за Чёрной речкой. До центра города можно было добраться за 30–45 минут, а это значит, что ленинградские музеи, театры, здание университета с его библиотекой были в пределах досягаемости. Зимой 1966 года каждую неделю нас водили на экскурсии в Эрмитаж. Вместе с прекрасным экскурсоводом (к сожалению, не помню её имени) мы прошли почти всю выставленную тогда экспозицию современного искусства от картины к картине: от импрессионистов до Пикассо. Нам рассказывали об импрессионизме и пуантилизме на примерах картин Клода Моне и Поля Синьяка, о кубизме, о русских модернистах, о том, как научиться понимать современную живопись. И я ценю эти уроки ничуть не меньше

Эта глава впервые опубликована на английском языке в переводе А. Б. Сосинского в книге «Mathematics in St. Petersburg» (AMS, 1996. P. 1–5), затем на русском в журнале «Ленинградский Университет», 1999, и в книге: *Болибрух А.А.* Воспоминания и размышления о давно прошедшем. М.: МЦНМО, 2013. С. 89–95.

уроков алгебры или анализа, потому что они познакомили меня с новым для меня миром, миром живописи.

Мне вообще кажется, что 14–15-летнему человеку иногда необходимо всего лишь узнать (увидеть, услышать или прочитать) о существовании какого-то нового незнакомого ему мира, будь это мир современной живописи, поэзии или, скажем, китайской литературы. Причём услышать от «источника, заслуживающего доверия», например, от любимого учителя. Так на уроке литературы я узнал от Ирины Георгиевны о существовании Большого драматического театра и о Г. А. Товстоногове. Мне удалось достать билеты на его спектакль по «Идиоту» Ф. М. Достоевского с гениальным Иннокентием Смоктуновским в роли князя Мышкина, и я до сих пор считаю этот спектакль лучшим из всех когда-либо виденных мною. С тех пор я «заболел» театром и уже в Москве, будучи студентом МГУ, пересмотрел все спектакли «Современника», театра на Таганке, театра Образцова. Не пропускал я и ни одной премьеры А. Эфроса в театре на Малой Бронной.

В том, как много значит мнение учителя, как он одной сказанной невзначай фразой может оказать влияние на формирование мировоззрения своих учеников, я неоднократно убеждался впоследствии, когда уже сам (на пятом курсе университета) преподавал математический анализ в 7-й московской школе. Приведу только один связанный с этим пример. Как-то, рассказывая десятиклассникам теорему о мощности множества непрерывных на отрезке функций, я заметил, что один из моих учеников читает постороннюю литературу. Меня возмутил даже не столько сам факт чтения, сколько то, что он читал. А читал он не Хлебникова, Булгакова или, скажем, А. Белого, что я ещё мог бы простить, а одного совершенно никчёмного с моей точки зрения писателя. Я отобрал у него эту книгу и взамен дал единственную, которая тогда нашлась в моём портфеле, — томик стихов одного из самых любимых моих поэтов, Тао Юань-мина. Я бы, наверное, забыл об этом случае, если бы через несколько лет мои бывшие ученики не пригласили меня на традиционную встречу своего класса. Большинство из них к тому времени училось на различных факультетах МГУ, МФТИ и в других известных московских вузах. В конце вечера ко мне подошёл тот самый ученик и спросил, помню ли я историю с томиком стихов Тао Цяня и представляю ли я, какое влияние это оказало на его жизнь? Оказалось, что он настолько увлёкся китайской поэзией, что после поступления на биофак МГУ организовал там нечто вроде общества любителей классической китайской литературы и стал настоящим её знатоком! Этот случай поразил меня, и с тех пор во время лекций или семинарских занятий я всегда стараюсь найти время для того, чтобы сказать своим студентам хотя бы несколько слов об интересной выставке, книге или увиденной мною театральной постановке.

В нашем интернате были не только математические классы, но и химический с биологическим, в котором учился сын Аркадия Исааковича Райкина. Я не знаю, собирался ли Костя Райкин всерьёз заниматься биологией после окончания школы, но способности к этому у него, безусловно, были. Однако яркая артистическая одарённость оказалась сильнее, и Костя поступил после окончания интерната в театральное училище. Сейчас он известный актёр театра и кино, руководит московским театром «Сатирикон». Но и тогда, в 9–10 классах, он порой поражал нас своей пластикой и умением даже самые серьёзные вещи превращать в игру. Так, на выпускном экзамене по математике ему достался вопрос о десятичной записи вещественного числа. В составе экзаменационной комиссии были члены попечительского совета интерната, известные математики, среди них был знаменитый алгебраист Д. К. Фаддеев. Во время ответа Кости он о чём-то заговорился с остальными, и комиссия потеряла бдительность, чем немедленно воспользовался Костя. Он начал свой ответ примерно так: «Пусть число a лежит на отрезке $[0, 1]$. Разделим его на десять равных частей и рассмотрим ту часть, в которой лежит наше число. Разделим полученный отрезок на десять частей и вновь рассмотрим ту часть, в которой лежит a…» Обычно в этом месте говорят: «и т. д.», а затем заканчивают доказательство. Однако Костя монотонным голосом с мягкими весёлыми модуляциями продолжал делить всё меньшие и меньшие отрезки к всеобщей тихой радости сидящих в классе выпускников. Наконец, когда Костя добрался до отрезков размером с диаметр атомного ядра, комиссия обратила внимание на подозрительную тишину в классе и воззрилась на доску. Последовала пауза, после которой Д. К. Фаддеев сказал, что получено достаточное количество знаков после запятой и процесс деления можно прекратить. Больше Костю ни о чём не спрашивали, и он успешно сдал экзамен.

У нас в школе часто устраивались литературные вечера, на которые приглашались известные артисты, самодеятельные поэты и певцы. Причём дело не ограничивалось простым выступлением. После концерта обычно возникали стихийные дискуссии, на которых обсуждались самые разные вещи, начиная от современной советской поэзии и кончая положением в Алжире. Безусловно, самым запоминающимся из таких вечеров был вечер Аркадия Райкина. Школьный актовый зал был забит до отказа, а Райкин в течение полутора часов показывал нам свои самые лучшие вещи, включая те, с которыми в то время ему не разрешалось выступать в официальных концертах. Тогда я впервые услышал про «генетику —

продажную девку империализма», про «наш паралич — самый прогрессивный в мире» и про многое другое, ставшее впоследствии классикой советской эстрады.

Нет ничего удивительного в том, что в физико-математической школе в середине 60-х годов многие увлекались поэзией и сами писали стихи. В то время профессия физика была необычайно престижной, конкурсы в ведущие технические вузы и университеты страны были громадные, и большинство одарённых молодых людей, имеющих способности ко многим (в том числе и гуманитарным) наукам, выбирали математику или физику. Но и гуманитарные способности требовали выхода, поэтому, наверное, каждый второй в нашей школе писал стихи.

Пик этой поэтической активности пришёлся на зиму 1966 года, и тогда же произошли два связанных с этим любопытных события. Первому предшествовало вывешивание в школе большой стенгазеты со стихами наших интернатских поэтов, второму — появление в школьном общежитии самодеятельных литературных журналов. Появился такой журнал и в нашей комнате, старостой которой был Витя Томс (поэтому комната наша носила название «Хижина дяди Томса»). Назывался этот журнал (редактором и единственным членом редколлегии которого был я сам) по-простому: «Тихий омут», и в первом его номере были помещены стихи почти всех без исключения моих товарищей по комнате. Надо сказать, что для многих из них этот литературный опыт был первым в их жизни, и может быть поэтому печальная, а временами и не очень нормативная лексика нашего журнала несколько контрастировала с оптимистическим вариантом, вывешенным в школе. В этом не было ничего странного или неискреннего, просто два этих издания описывали две разные стороны нашей интернатской жизни, в которой были как свои радостные, так и печальные моменты. Закончив оформление журнала, мы благоразумно прикрепили его кнопками к обратной стороне дверцы платяного шкафа, стоявшего в нашей комнате, и пошли на занятия.

Надо же было так случиться, что именно в этот день с инспекционной поездкой в наш интернат приехал министр просвещения РСФСР (в этом состояло первое из упомянутых выше событий). Министру показали школу, физическую лабораторию, сводили на урок в один из классов, показали нашу стенгазету со стихами, а затем повели в общежитие. До сих пор не знаю, как это могло произойти, но, войдя в общежитие, министр немедленно направился в нашу комнату, затем открыл дверцу шкафа, снял с кнопок наш журнал, бегло просмотрел его и, сказав что-то вроде: «Вот что у вас тут на самом деле делается», отбыл в Москву. Мы в это время находились на уроке, но «хорошие новости распространяются быстро», и когда мы, понурив головы, вернулись к себе в общежитие, настроение у нас было хуже некуда.

Дело было даже не в том, что мы чувствовали себя виноватыми и боялись наказания. Мы понимали, как мы подвели своих учителей и интернат в целом, ведь было известно, что министр являлся одним из основных противников всякого рода специализированных математических школ и интернатов, поскольку, на его взгляд, само их существование нарушало принцип социальной справедливости. Так что одним из последствий произошедшего могло быть и прекращение приёма в интернат с последующим его закрытием. И вот тут произошло событие, которое я до сих пор не могу забыть.

К нам в комнату пришли наши учителя, которым, наверное, уже досталось от школьного и районного начальства за то, что произошло. Но они не стали нас ругать или наказывать и вообще не высказали ни одного слова упрёка в наш адрес. Они сказали, что пришли извиниться за поведение некоторых взрослых, не понимающих современной поэзии, и попросили не держать на таких людей зла, добавив, что в будущем нам часто придётся встречаться с людьми, просто не способными понять какие-то вещи, и что это не должно быть основанием для обиды на них. И ещё они попросили нас не бросать писать стихи и пригласили на вечер-конкурс школьных поэтов, который должен был вскоре состояться в интернате. В этот день мы получили урок по предмету, которого нет в сетке школьного расписания, но который мы запомнили на всю жизнь.

Выпускные экзамены в школе — особая пора. Последним и самым трудным из них для нашего класса был экзамен по физике. Дело в том, что в нашем классе собрались очень сильные математики: несколько победителей Всероссийской олимпиады, победители Ленинградской городской олимпиады и один будущий победитель Международной математической олимпиады — Витя Турчанинов (в настоящее время блестящий программист). С физикой же дело обстояло хуже — только один победитель Всероссийской олимпиады по физике — Боря Ровнер. Почему-то наши учителя физики считали, что мы недостаточно хорошо относимся к их предмету, и решили проэкзаменовать нас с пристрастием. Перед началом экзамена они объявили, что будут спрашивать нас очень жёстко и поставят нам две оценки: официальную и неофициальную, но такую, какую мы получили бы при поступлении в ЛГУ при самом недоброжелательном пристрастном опросе. Мотивировалось всё это необходимостью потренироваться перед вступительными экзаменами в университет.

Подобная преамбула меня совершенно не испугала: я был тогда одним из главных претендентов на золотую медаль, всегда легко сдавал экзамены и не боялся их. Но я до сих пор с некоторым содроганием вспоминаю последовавший затем кошмар. Я очень хорошо начал отвечать, полностью рассказав вопрос билета и решив задачку. Но уже первая дополнительная задача испортила мне настроение. Меня спросили, по какой траектории полетит брошенный с поверхности Земли камень в случае отсутствия атмосферы, и я тут же ответил: «По параболе». На что мне вежливо объяснили, что мой ответ неверен и что камень полетит по дуге эллипса (поскольку в условии не было сказано, что Землю можно считать плоской). И так далее. Не помню всех заданных мне вопросов, на какие-то из них я отвечал правильно, на какие-то — с точки зрения экзаменатора — нет. Помню только последний из них, который добил меня (и экзаменатора). Меня спросили, что происходит с верёвочным контуром, в который периодически вставляют и вынимают магнит. Что-то забрезжило в моей уже ничего не соображающей голове (что-то вроде того, что по инструкции техники безопасности нельзя влажными руками касаться электрической проводки), и я сказал, что если влажность воздуха высока, то по верёвке может потечь слабый ток. «С каких это пор великие законы физики зависят от влажности воздуха!» — буквально взревел мой мучитель, и экзамен на этом закончился. Я получил 5/4—, и когда экзаменатор немного остыл, узнал, что, оказывается, в верёвке произойдёт поляризация. В общем, всё закончилось благополучно, но я с тех пор немного недолюбливаю физику.

Сейчас интернат находится в другом месте, за городом, ближе к новому зданию университета. Но каждый раз, приезжая в Санкт-Петербург (что, к сожалению, бывает нечасто), я сажусь в 80-й автобус и еду за Чёрную речку, на улицу Савушкина, 61.

Геометрия: классика и современность

Сумма углов треугольника и теорема Гаусса — Бонне

А. Б. Сосинский

Все мы знаем, что в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180°. А знаем ли мы, что значат эти слова? Как мы понимаем выражение «сумма углов»? В каком смысле эта сумма «равна» 180°?

В этой заметке мы сначала попытаемся понять, какие ответы на эти вопросы даёт стандартный учебник геометрии для 7-го класса[1], и, обсудив эти ответы, приведём две разные трактовки утверждения о сумме углов треугольника — чисто геометрическую и аналитическую (основанную на теории меры). Затем остановимся на второй трактовке и увидим, что она имеет красивейшее обобщение, которое, я думаю, окажется неожиданным для большинства читателей «Математического просвещения».

§ 1. Что говорит учебник

На с. 70 учебника геометрии для 7-го класса читаем:

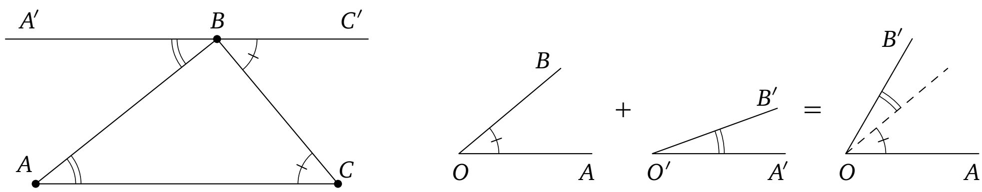
Теорема. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Что под этим понимается? Как авторы учебника расшифровывают слова «сумма углов»? В теореме написано, что эта сумма равна 180 градусам — стало быть имеется в виду сумма *мер* углов (т. е. сумма чисел)?

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда Саймонса.

[1] *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И.* Геометрия. 7–9 классы. М.: Просвещение, 2010.

Посмотрим доказательство теоремы. Оно начинается с утверждения «рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$» — стало быть, речь идёт о сумме чисел? Однако далее проводится классическое, чисто геометрическое построение (рис. 1а): через точку B проводим прямую $A'BC'$, параллельную AC; тогда в точке B развёрнутый угол $A'BC'$ составлен из трёх углов $\angle A'BA, \angle ABC, \angle CBC'$; при этом углы $A'BA$ и BAC равны (в смысле равенства геометрических фигур) как накрест лежащие, по той же причине равны углы $C'BC$ и BCA.



а) б)

Рис. 1. Сложение углов

Таким образом выходит, что в учебнике доказано не утверждение теоремы (т. е. равенство $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$), а тот факт, что *геометрическая сумма углов* (т. е. фигура, полученная приложением трёх углов к друг другу) представляет собой развёрнутый угол. Но не будем торопиться обвинять авторов учебника в непоследовательности или путанице. Дело в том, что в учебнике заранее оговорено, что эти два утверждения равносильны. Именно, на с. 18 мы читаем: «Равные углы имеют равные градусные меры», а на с. 20 поясняется на примере, что такое геометрическая сумма углов (рис. 34), т. е. никакой непоследовательности в учебнике нет.

Правда, как математику и педагогу, мне не нравится такое изложение в частности потому, что понятие «геометрическая фигура» остаётся без определения.

Но здесь уместно небольшое отступление. Понимая опасность путаницы между двумя смыслами слова «равенство», А. Н. Колмогоров в своём курсе геометрии ввёл термин «конгруэнтность», означающий равенство геометрических фигур. Это нововведение почему-то вызвало возмущение большинства учителей математики, родителей учеников и даже некоторых математиков (например, Л. С. Понтрягина) и способствовало сворачиванию колмогоровской реформы. Другое нововведение, а именно простое и чёткое формальное определение геометрической фигуры как множества точек, тоже оказалось под огнём критики (например, со стороны С. П. Новикова). Я не собираюсь вмешиваться в эту давно канувшую в Лету дискуссию, но отмечу только, что в обсуждаемом учебнике авторы были вынуждены отказаться от естественного определения геометрической фигуры как множества точек потому, что тогда фигуры, равные в геометрическом смысле, в общем случае были бы *неравными* как множества точек (!).

Вернёмся к учебнику. Оправдано ли отождествление геометрического равенства фигур и равенства их мер? Думаю, что нет. Я бы предложил перед формулировкой теоремы дать геометрическое определение суммы углов. Например, такое: геометрической суммой углов $\angle AOB$ и $\angle A'O'B'$ называется угол $\angle AOB'$, полученный прикладыванием углов друг к другу без наложения, с отождествлением лучей $[O, B\rangle$ и $[O', A'\rangle$ (рис. 1б). Тогда теорема формулируется иначе:

Теорема. *Геометрическая сумма углов треугольника — развёрнутый угол и, следовательно, сумма их градусных мер равна* 180°.

Мне кажется, что при такой формулировке учителю будет проще объяснять смысл этой фундаментальной теоремы, а ученикам станет более понятным и убедительным её доказательство.

Но это лишь моё мнение, а авторы учебника могут возразить, что такая формулировка теоремы (в учебнике для массовой школы) осложняет её понимание и выпячивает несущественную тонкость.

§ 2. Переформулировка теоремы о сумме углов треугольника и одномерная теорема Гаусса — Бонне

Теперь обсудим «арифметическую» формулировку теоремы о сумме углов треугольника:

Теорема 1. *Сумма мер углов треугольника равна* 180°.

Заметим сразу, что эта теорема, с виду совсем элементарно-геометрическая, к геометрии на самом деле отношения не имеет: в основе её строгой формулировки лежит *теория меры* — ветвь математического анализа. В рамках строгой геометрической аксиоматики (в духе аксиоматики Гильберта) эта теорема не имеет смысла, её нельзя сформулировать. Давайте переформулируем теорему 1 в эквивалентном виде, хотя внешне не очень похожем на только что записанный. Для этого нам потребуется несколько определений.

Для многогранника M в пространстве эйлерова характеристика $\chi(M)$ определяется как сумма

$$\chi(L) = \mathcal{V} - \mathcal{E} + \mathcal{F},$$

где $\mathscr{V}$ — число вершин многогранника M, $\mathscr{E}$ — число его рёбер, а $\mathscr{F}$ — число граней. Так, эйлерова характеристика куба равна $8-12+6=2$. Это же определение имеет смысл для плоского многоугольника (при этом гранью многоугольника считается ограниченная им область, так что для многоугольника N эйлерова характеристика равна $\chi(N)=\mathscr{V}-\mathscr{E}+1$). Например, для треугольника $\chi(\triangle)=3-3+1=1$.

Пусть теперь L — замкнутая ломаная без самопересечений на плоскости. Начиная от любой её вершины, будем двигать вектор единичной длины вдоль рёбер L (против часовой стрелки) — поворачивая его в вершинах так, чтобы он скользил по очередному ребру, — пока не вернёмся в начальную вершину. Назовём *тотальной кривизной* ломаной L (и обозначим $K(L)$) число оборотов, совершённых нашим вектором при обходе ломаной L. Заметим, что для случая, когда L — треугольник с углами α, β, γ, тотальная кривизна будет равна 1: действительно, наш вектор поворачивается вокруг каждой вершины на угол, равный внешнему углу треугольника, т. е. на углы $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$, и в итоге на угол

$$180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma=540^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ;$$

последнее равенство следует из теоремы 1.

Теперь теорему 1 можно переформулировать так:

Теорема 1′. *$K(\triangle)=\chi(\triangle)$, т. е. тотальная кривизна треугольника равна его эйлеровой характеристике.*

«Зачем заменять простую и ясную формулировку теоремы 1 на такую вычурную?» — спросит читатель. Дело в том, что именно эта формулировка (в отличие от предыдущей) имеет целый ряд замечательных обобщений и модификаций. Во-первых, такую:

Для замкнутой ломаной L выполнено равенство $K(L)=\chi(L)$, т. е. тотальная кривизна любой плоской замкнутой ломаной без самопересечений равна её эйлеровой характеристике.

Эта теорема легко доказывается индукцией по числу рёбер.

Однако гораздо интереснее следующая теорема, относящаяся к дифференциальной геометрии (ещё одной ветви математического анализа):

Теорема 2. *Для гладкой замкнутой кривой C на плоскости тотальная кривизна $K(C)$, т. е. число оборотов касательного вектора при обходе кривой, равно эйлеровой характеристике $\chi(C)$.*

В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что тотальная кривизна гладкой кривой равна интегралу от локальной кривизны $\kappa(s)$

вдоль кривой, делённому на 2π, и утверждение теоремы 2 записывается в виде следующей красивой формулы:

$$\chi(C) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s \in C} \kappa(s)\, ds.$$

В этой статье мы остаёмся в рамках элементарной математики, поэтому я не буду определять кривизну кривой в точке и — тем более — эйлерову характеристику кривой (на произвольной гладкой кривой приходится выбирать некоторую дополнительную структуру, а затем доказывать корректность, т. е. независимость от произвольного выбора, или же нужно построить теорию гомологий — весьма неэлементарную науку!).

Дальнейшие обобщения связаны с увеличением размерности: мы переходим от (одномерных) ломаных к многогранным поверхностям.

§ 3. Обобщение: двумерная теорема Гаусса — Бонне

Для начала посмотрим на классическую (совсем не элементарную) двумерную формулу Гаусса — Бонне из дифференциальной геометрии, в которой S — гладкая ориентированная поверхность в трёхмерном пространстве, а $\Gamma(s)$ — гауссова кривизна в точке $s \in S$:

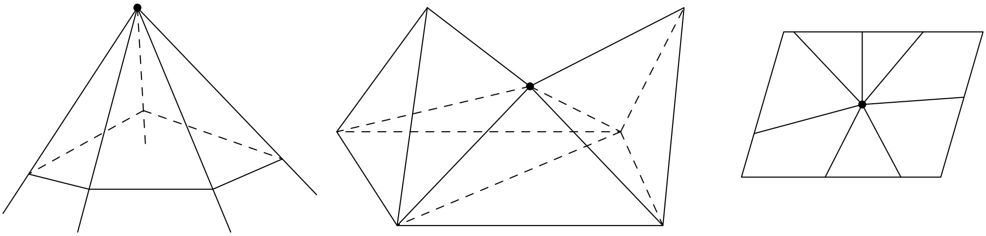
$$\int\limits_{s \in C} \Gamma(s)\, ds = 2\pi \cdot \chi(C).$$

Что такое интеграл по гладкой поверхности, гауссова кривизна и эйлерова характеристика гладкой поверхности, я здесь объяснять не буду: наша цель — сформулировать и доказать дискретный (= кусочно-линейный) вариант этой формулы, который окажется вполне элементарным. При этом роль гладкой поверхности будет играть триангулированная поверхность, лежащая в евклидовом пространстве, роль интеграла — сумма по вершинам поверхности, а аналог гауссовой кривизны (в вершинах) мы сейчас определим.

Пусть $v \in \mathscr{V}(S)$ — вершина триангулированной поверхности S в евклидовом пространстве, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — примыкающие к ней углы (вернее, их меры, которые мы будем в дальнейшем исчислять в радианах). Число

$$\Gamma = \Gamma(S, v) = 2\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$$

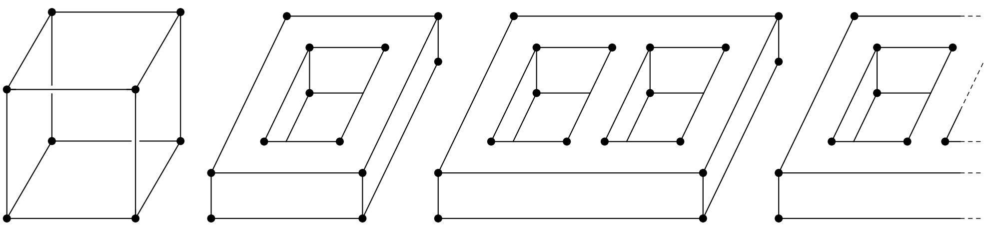
назовём *кривизной* поверхности S в вершине v. Заметим, что кривизна может быть как положительной, так и отрицательной, а также нулевой (рис. 2).



$K > 0$ $K < 0$ $K = 0$

Рис. 2. Положительная, отрицательная и нулевая кривизна

Будем считать известным, что имеется счётное число топологически различных замкнутых (= без края) триангулированных поверхностей в трёхмерном пространстве и они классифицируются своим родом g (числом ручек) или своей эйлеровой характеристикой χ (ибо $\chi = 2 - 2g$). Именно, это сфера $\mathbb{S}^2$ ($g = 0$), тор $\mathbb{T}^2$ ($g = 1$), крендель $\mathbb{M}^2_2$ ($g = 2$), сфера с n ручками $\mathbb{M}^2_n$ ($g = n$), … (рис. 3). Доказательство этих фактов можно найти в любом учебнике топологии.



$\chi = 2$, $g = 0$ $\chi = 0$, $g = 1$ $\chi = -2$, $g = 2$ $\chi = -4$, $g = 3$

Рис. 3. Куб, тор и другие многогранные поверхности

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Сумма Σ кривизн по всем вершинам $v_i \in \mathscr{V}(S)$ триангулированной поверхности S, лежащей в трёхмерном пространстве, равна эйлеровой характеристике поверхности, умноженной на 2π:*

$$\sum_{v_i \in \mathscr{V}(S)} \Gamma(S, v_i) = 2\pi \cdot \chi(S).$$

Доказательство[2]. Проведём доказательство для каждой из этих поверхностей по отдельности, начиная со сферической поверхности.

[2] Другое доказательство можно найти в книге: *Табачников С. Л., Фукс Д. Б.* Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011. С. 311–312.

Сначала занумеруем все углы при вершинах произвольным образом: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$. Тогда слагаемые суммы кривизн во всех вершинах поверхности S будут иметь вид $2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})$, где $\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_s}$ — углы при вершине v_j, т. е.

$$\Sigma = \sum_{v_j \in \mathscr{V}(S)} \big(2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})\big).$$

Если раскрыть скобки в этой сумме, мы получим $\mathscr{V}$ слагаемых 2π, где $\mathscr{V}$ — число вершин поверхности S, и сумму всех углов со знаком минус: $-(\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_N)$. Поменяем порядок слагаемых в этой сумме так, чтобы три угла каждого треугольника стояли подряд. Тогда эту сумму можно записать в виде $(\phi_i + \phi_j + \phi_k) + \ldots + (\phi_r + \phi_s + \phi_t)$, где в первой скобке стоят внутренние углы первого треугольника, а в последней — внутренние углы последнего треугольника. Сумма в каждой скобке равна π. Сколько будет таких скобок? Столько, сколько есть в S треугольников; обозначим это число через $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{E}$ — число рёбер (= сторон) у S. Поскольку к каждому из трёх рёбер каждого треугольника примыкают два треугольника, имеем $\mathscr{E} = \frac{3}{2}\mathscr{F}$. Эйлерова характеристика сферической поверхности S равна 2, значит,

$$2 = \mathscr{V} - \mathscr{E} + \mathscr{F} = \mathscr{V} - \frac{3}{2}\mathscr{F} + \mathscr{F} = \mathscr{V} - \frac{\mathscr{F}}{2},$$

откуда $\mathscr{F} = 2\mathscr{V} - 4$. Получаем

$$\Sigma = 2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot (2\mathscr{V} - 4) = 4\pi = 2\pi \cdot \chi(S),$$

и тем самым теорема доказана в случае поверхности рода 0.

Доказательство в случае поверхности S рода 1 (т. е. тора) аналогично. Для тора имеем

$$\Sigma = \sum_{v_j \in \mathscr{V}(S)} \big(2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})\big) = 2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot \mathscr{F}.$$

Поскольку эйлерова характеристика тора равна нулю и $\mathscr{E} = 3\mathscr{F}/2$ (последнее верно для всех замкнутых ориентированных поверхностей), получаем $\mathscr{F} = 2\mathscr{V}$. Отсюда

$$2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot 2\mathscr{V} = 0 = 2\pi \cdot \chi(T),$$

что и требовалось.

Доказательство в случае поверхности $\mathbb{M}_g^2$ с g ручками при $g \geqslant 2$ аналогично доказательству для тора, только в конце доказательства надо воспользоваться тем, что $\chi(\mathbb{M}_g^2) = 2 - 2g$.

Теорема доказана. $\square$

§ 4. Что же мы получили? А дальше?

Мы сформулировали теорему о сумме углов треугольника в необычном виде и поняли, что теорема эта совсем не геометрическая — в таком виде её следует отнести к математическому анализу. И именно в таком виде она имеет естественные обобщения в дифференциальной геометрии кривых и поверхностей — в теоремах Гаусса — Бонне. Затем мы сформулировали дискретные аналоги этих теорем, заменив интегралы на суммы, кривые на ломаные, гладкие поверхности на триангулированные поверхности в евклидовом пространстве, и привели их (элементарные) доказательства. Все эти теоремы, начиная с теоремы о сумме углов треугольника, в сущности являются утверждениями о существовании инвариантов, классифицирующих некоторые объекты. Более того, в каждой из теорем фигурируют два инварианта, осуществляющие эту классификацию — один топологический (эйлерова характеристика), другой аналитический (сумма кривизн во всех вершинах), — и они отличаются на множитель 2π (по-своему замечательный)!

Секрет успеха здесь в том, что мы нетривиально и концептуально правильно переформулировали исходную теорему и только после этого смогли увидеть её обобщения. А можно ли дальше идти по пути обобщения? Да, безусловно можно, и это поистине грандиозный путь: он ведёт сначала к знаменитой теореме Римана — Роха (в варианте, придуманном Гротендиком), а затем к ещё более знаменитой теореме Атьи — Зингера об индексе эллиптических операторов и, после лишь небольшого поворота в сторону, к некоторым вариантам теоремы Лефшеца о неподвижной точке. Здесь тоже суть дела состоит в совпадении топологического и аналитического классифицирующих инвариантов.

Рассказывать про эти теоремы на элементарном языке я не могу, так как не умею для них находить концептуально правильную дискретизацию. Но верю — она есть, и надеюсь — будет найдена, где-то на указанном выше пути.

Благодарности

Автор благодарен В. А. Тихомирову и В. Ф. Бутузову за обсуждение предварительных версий статьи.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ
asossinsky@yandex.ru

Неевклидовы решения евклидовых задач

П. В. Бибиков, И. И. Фролов

§ 1. Введение

Поводом для написания данной статьи послужила следующая задача, вошедшая в шорт-лист Международной математической олимпиады 2010 г. (иными словами, эта задача не была предложена на самой олимпиаде, но вошла в число претендентов на эту почётную роль; полный список задач шорт-листа 2010 г. можно найти на странице [9]).

Задача 1. *Рассмотрим отрезок AB и точку H на нём. Проведём три дуги окружностей с концами в точках A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, и три луча с началом в точке H, лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возни-*

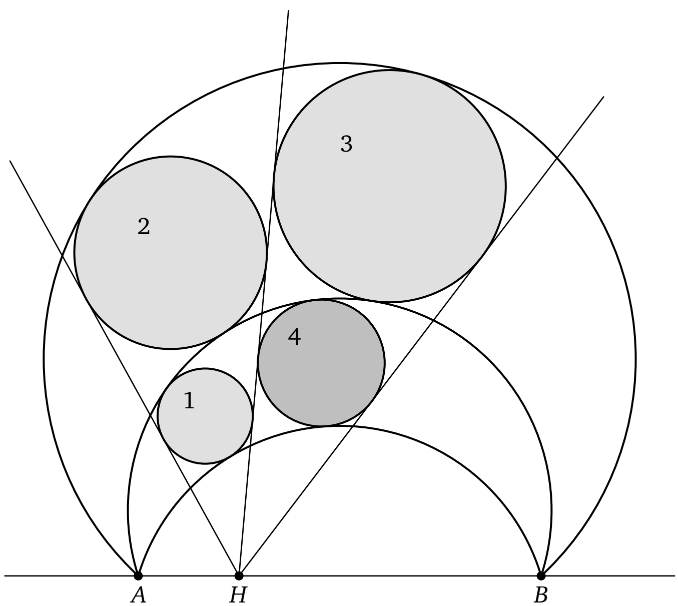


Рис. 1

кают четыре криволинейных четырёхугольника (*две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах*). *Докажите, что если в три из этих четырёхугольников можно вписать окружность, то и в четвёртый четырёхугольник можно вписать окружность* (рис. 1).

Оказывается, у этой задачи существует очень короткое решение (буквально устное). И для того, чтобы понять его, нам нужно будет посмотреть на рис. 1 под несколько иным углом — а именно, с точки зрения геометрии Лобачевского… В принципе, подобный подход не нов (см., например, статью Гальперина [3]), однако, по всей видимости, он до сих пор считается весьма экзотическим и пригодным буквально для единичных случаев. Познакомившись с задачами, приведёнными ниже, можно убедиться, что это неверно и данный метод вполне заслуживает того, чтобы его знали и умели применять.

§ 2. Модели Пуанкаре и модель Клейна

Мы начнём с описания трёх наиболее часто встречающихся моделей плоскости Лобачевского: моделей Пуанкаре в верхней полуплоскости и в круге, а также модели Клейна. Все они будут необходимы нам в тех или иных евклидовых задачах. Более подробное описание этих моделей можно найти в [6].

Начнём с модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. В этой модели *плоскостью Лобачевского* называется фиксированная полуплоскость (которую обычно называют верхней) относительно некоторой прямой. Эта прямая вместе с бесконечно удалённой точкой называется *абсолютом*. Точки абсолюта называются *бесконечно удалёнными точками* плоскости Лобачевского. *Прямыми* в модели Пуанкаре являются полуокружности с центром на абсолюте и вертикальные лучи, перпендикулярные абсолюту. Угол между двумя неевклидовыми прямыми (т. е. прямыми в плоскости Лобачевского) по определению полагается равным евклидовому углу между соответствующими кривыми.

Одним из наиболее важных фактов в геометрии Лобачевского (равно как и в евклидовой геометрии) является теорема о сумме углов треугольника. Оказывается, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше π. Можно наглядно убедиться в этом, рассмотрев треугольник, получающийся малым шевелением прямых, попарно пересекающихся на абсолюте: дуги полуокружностей, образующих такой треугольник, практически касаются друг друга, поэтому углы между ними могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Упражнение 1. Попробуйте доказать, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше π.

Из теоремы о сумме углов неевклидова треугольника выводится *четвёртый признак равенства треугольников*: два треугольника равны по трём углам. В частности, отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет подобий, кроме движений: любое преобразование подобия сохраняет углы, а потому является движением.

Упражнение 2. Докажите четвёртый признак равенства треугольников.

В свою очередь из этого признака следует важный факт: инверсия относительно полуокружности с центром на абсолюте является движением в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. В самом деле, такая инверсия сохраняет верхнюю полуплоскость и углы между кривыми (по свойству конформности инверсии). Более того, можно даже сказать, как называется это движение: это *осевая симметрия*. Именно поэтому инверсия играет такую большую роль в модели Пуанкаре: ведь осевые симметрии, как известно, порождают всю группу движений плоскости Лобачевского (т. е. любое движение является композицией конечного числа инверсий).

Упражнение 3. Докажите, что гомотетия с центром на абсолюте и положительным коэффициентом также является движением в модели Пуанкаре. Каким образом это движение раскладывается в композицию инверсий, и как разумно назвать это движение (по аналогии с евклидовой геометрией)?

В геометрии Лобачевского также можно определить простейшие кривые. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского элементарные кривые более разнообразны и не ограничиваются одной лишь окружностью.

Упражнение 4. Докажите, что всякая евклидова окружность, целиком лежащая в верхней полуплоскости, является также неевклидовой окружностью, и наоборот, каждая неевклидова окружность является одновременно и евклидовой окружностью.

Возникает естественный вопрос: а чем является евклидова окружность, пересекающая абсолют? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним ещё два определения.

Эквидистантой называется множество точек плоскости Лобачевского, расположенных на заданном расстоянии h от данной прямой p и лежащих в заданной полуплоскости относительно этой прямой. Прямая p

называется *базой* эквидистанты, величина h — *высотой*. Иначе говоря, эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной.

Орициклом называется кривая, которая пересекает все прямые, имеющие общую бесконечно удалённую точку, под прямым углом.

Отметим, что наклонные лучи с началом на абсолюте являются эквидистантами, а прямые, параллельные абсолюту, — орициклами.

Упражнение 5. Докажите, что евклидова окружность, касающаяся абсолюта, является орициклом, а окружность, пересекающая абсолют в двух точках, — эквидистантой (рис. 2).

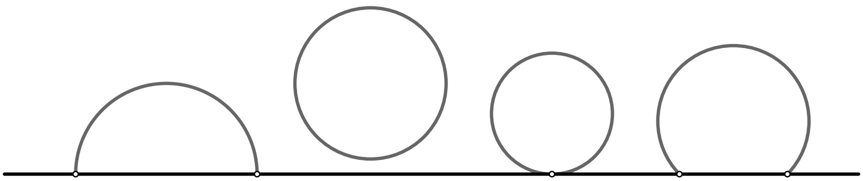


Рис. 2

Упражнение 6. Докажите, что если даны две эквидистанты с общей базой и высотами h_1 и h_2, лежащие в одной полуплоскости относительно базы, то расстояние от любой точки одной из эквидистант до другой равно $|h_1 - h_2|$. Эту величину естественно назвать *расстоянием между эквидистантами*.

Теперь опишем модель Пуанкаре в круге. Легче всего сделать это, совершив инверсию уже знакомой нам модели в верхней полуплоскости относительно окружности с центром *в нижней полуплоскости*. В таком случае плоскость Лобачевского станет внутренностью некоторого круга (который также называется абсолютом), а прямые в этой модели будут изображаться дугами окружностей, ортогональных абсолюту, а также диаметрами самого абсолюта.

Упражнение 7. Опишите, как выглядят окружности, эквидистанты и орициклы в модели Пуанкаре в круге.

Наконец, опишем модель Клейна. Переход к ней от модели Пуанкаре в круге можно осуществить так. Рассмотрим сферу, экватором которой служит абсолют модели Пуанкаре в круге. Пусть A — точка модели Пуанкаре, A_1 — точка пересечения поверхности сферы с прямой NA, где N — северный полюс. Спроектировав точку A_1 на плоскость экватора, получим точку A'. Сопоставив каждой точке A точку A', мы получим некоторое преобразование экваториального круга. То, что получилось, назовём *моделью Клейна* плоскости Лобачевского.

Давайте поймём, как выглядят прямые в модели Клейна. В модели Пуанкаре в круге прямая изображается или в виде диаметра абсолюта, или в виде дуги окружности, ему перпендикулярной. Понятно, что образом диаметра круга будет тот же диаметр. Посмотрим, во что перейдёт дуга окружности, ортогональная абсолюту. При центральной проекции на сферу эта дуга перейдёт в дугу окружности, перпендикулярную плоскости абсолюта (поскольку такая проекция есть не что иное как пространственная инверсия). Поэтому ортогональной проекцией получившейся дуги окружности на экватор сферы является хорда экватора. Таким образом, в модели Клейна все неевклидовы прямые изображаются в виде хорд абсолюта.

Упражнение 8. 1. Докажите, что окружности в модели Клейна — это либо евклидовы окружности, центр которых совпадает с центром абсолюта, либо эллипсы, касающиеся абсолюта в двух мнимых точках.

2. Опишите, как выглядят эквидистанты и орициклы в модели Клейна.

§ 3. Вокруг задачи из шорт-листа

Теперь мы готовы перейти к решению задачи из шорт-листа, сформулированной во введении. Уже сейчас, при взгляде на рис. 1, становится понятно, что для её решения будет полезна модель Пуанкаре в верхней полуплоскости. Ведь с точки зрения этой модели на картинке нарисованы две тройки эквидистант с общими базами. И это обстоятельство действительно можно использовать.

Чтобы проследить весь путь к решению, мы начнём с красивого утверждения, которое интересно и само по себе. А именно, докажем следующую лемму.

Лемма (о грустном привидении). *Рассмотрим две окружности ω_1 и ω_2, вписанные в область между дугами с концами в точках A и B* (рис. 3). *Тогда центр внешней гомотетии этих окружностей лежит на прямой AB.*

Доказательство. Посмотрим на эту картинку с точки зрения геометрии Лобачевского. Тогда прямая AB станет абсолютом, дуги с концами в точках A и B станут эквидистантами, а евклидовы окружности, вписанные в область между ними, превратятся в неевклидовы (хотя по форме они не отличаются от евклидовых, но центр их смещён ближе к абсолюту). Заметим, что радиусы *неевклидовых* окружностей ω_1 и ω_2

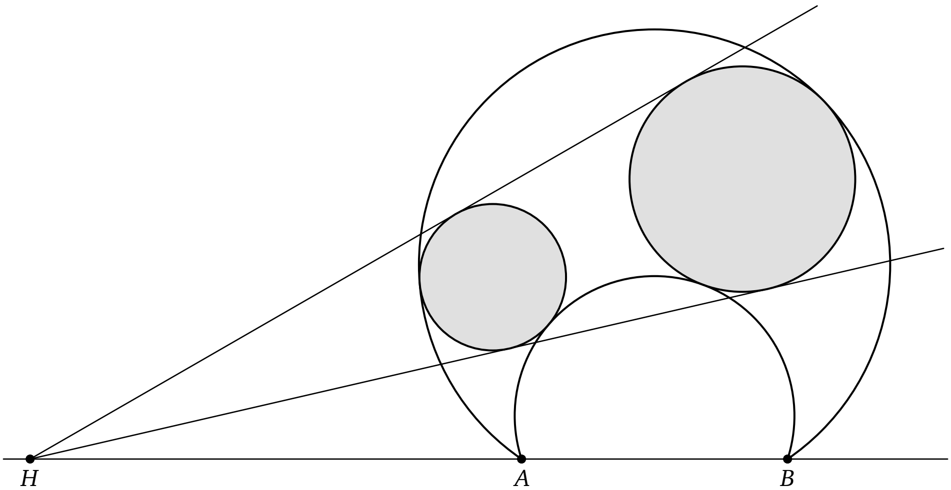


Рис. 3

равны, поскольку оба они равны половине расстояния между эквидистантами. Теперь докажем, что если взять любую другую эквидистанту, касающуюся обеих окружностей и пересекающую абсолют в каких-то точках C и D, то найдётся вторая эквидистанта, проходящая через C и D и также касающаяся обеих окружностей. В самом деле, рассмотрим эквидистанту, проходящую через точки C и D, которая расположена по ту же сторону от первой эквидистанты, что и окружности, и которая удалена от первой эквидистанты на расстояние, равное диаметру окружностей. Легко видеть, что она касается обеих окружностей (например, потому, что эти эквидистанты симметричны относительно неевклидовой линии центров наших окружностей).

Осталось применить это соображение к паре эквидистант, являющихся общими внешними касательными к нашим окружностям. □

Неформально говоря, конструкцию, описанную в этой лемме, с точки зрения евклидовой геометрии можно представлять так. Поскольку эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной (т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой в фиксированной полуплоскости), то пара эквидистант с общей базой — это просто пара параллельных прямых. Тогда понятно, что радиусы всех окружностей, вписанных в пространство между ними, равны: ведь это просто окружности, вписанные в полоску между параллельными прямыми. Такие окружности можно совместить параллельным переносом, который в неевклидовой геометрии является композицией двух инверсий относительно непе-

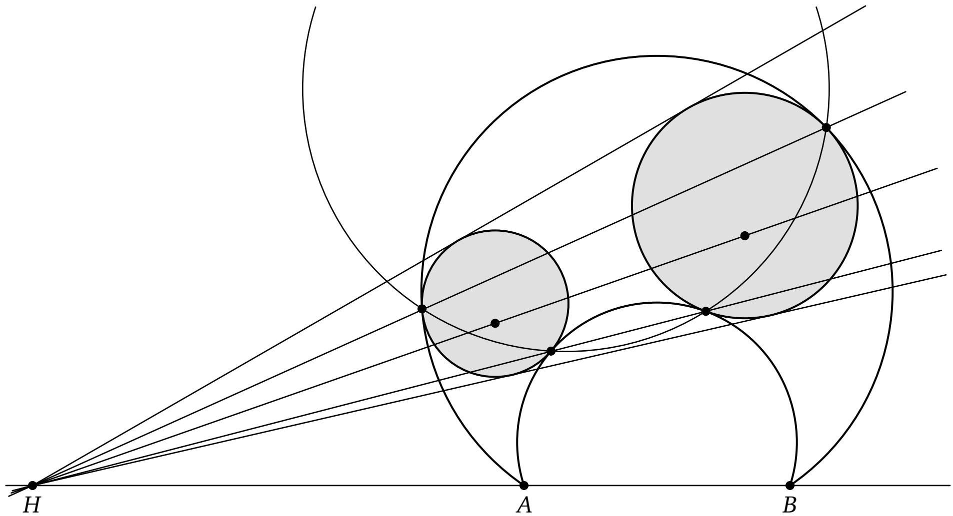


Рис. 4

ресекающихся полуокружностей с центрами на абсолюте. Такая неформальная трактовка бывает удобна, чтобы лучше понять ситуацию.

Посмотрим, какие факты можно извлечь из этой леммы и как при этом будет работать модель Пуанкаре.

Предложение. *В условиях предыдущей леммы точки касания окружностей и эквидистант лежат на одной евклидовой окружности, а прямые, проходящие через эти точки, пересекаются в центре H внешней гомотетии окружностей* (рис. 4).

Доказательство. Рассмотрим инверсию с центром в точке H относительно окружности, ортогональной обеим эквидистантам и переводящей серые круги друг в друга (с точки зрения неевклидовой геометрии мы рассматриваем осевую симметрию относительно прямой, ортогональной паре эквидистант и переводящей одну неевклидову окружность в другую; из этой интерпретации также следует существование такой инверсии: достаточно рассмотреть неевклидову прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку между неевклидовыми центрами пунктирных окружностей). Тогда точки касания серых кругов с эквидистантами перейдут друг в друга, так как точки касания должны перейти в точки касания (рис. 4). Отсюда сразу следует, что пары точек касания лежат на прямых, проходящих через центр инверсии H. А из леммы о подобных треугольниках (см., например, [4]) вытекает, что все четыре точки касания лежат на одной окружности. □

Замечание 1. Из решения также следует, что прямые, соединяющие евклидовы центры серых кругов, и прямые, соединяющие их неевклидовы центры, также проходят через точку H (рис. 4).

Теперь перейдём к *задаче из шорт-листа*, с которой и начинался этот сюжет. Мы приведём здесь даже два решения: первое будет более «евклидовым» (отчасти оно похоже на авторское решение), а второе будет использовать исключительно геометрию Лобачевского. Читатель может сравнить эти решения и решить для себя, какое из них проще и понятнее.

Первое решение. Заметим, что точка H является центром внешней гомотетии окружностей 1 и 2. По лемме о грустном привидении центр внешней гомотетии окружностей 2 и 3 (рис. 1) лежит на абсолюте. Поэтому по теореме о трёх гомотетиях (см., например, [8]) для окружностей 1, 2, 3 центр внешней гомотетии окружностей 1 и 3 также лежит на абсолюте. Рассмотрим окружность 4, касающуюся двух дуг и средней прямой (рис. 1). По лемме о грустном привидении центр гомотетии окружностей 1 и 4 лежит на абсолюте. Значит, по теореме о трёх гомотетиях для окружностей 1, 3, 4 центр гомотетии окружностей 3 и 4 также лежит на абсолюте. Но тогда это в точности точка H. Поэтому окружность 4 касается правой прямой, что и требовалось доказать.

Второе решение. По сути рис. 1 эквивалентен вот такой картинке в евклидовой геометрии (рис. 5). Ведь эквидистанта — это аналог параллельной прямой, поэтому криволинейные четырёхугольники — это просто неевклидовы аналоги параллелограммов. А если в параллелограмм можно вписать окружность, то это ромб. Таким образом, нужно просто доказать, что если в сетке из параллелограммов есть три ромба (как на картинке), то в ней все параллелограммы будут ромбами. Но это очевидно!

Формально и без аналогии с евклидовой геометрией это можно доказать так. Заметим, что неевклидовы окружности равны, поскольку все они попарно вписаны в пары эквидистант. Теперь рассмотрим пару гори-

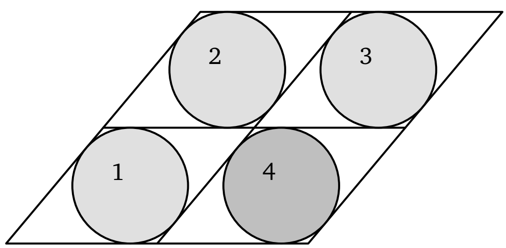


Рис. 5

зонтальных эквидистант и среднюю наклонную эквидистанту. Далее, рассмотрим окружность, касающуюся всех трёх эквидистант (существование такой окружности следует, например, из задачи Аполлония, см. [7]). Поскольку расстояние между средней и правой наклонными эквидистантами равно диаметру этой окружности, правая эквидистанта также будет касаться этой окружности. Задача решена!

В таком виде задача допускает следующее обобщение. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если три криволинейных четырёхугольника будут описанными, то и четвёртый будет описанным.

Упражнение 9. Докажите это утверждение.

Теперь рассмотрим пример задачи, найти евклидово решение которой пока не удалось, а неевклидово получается в две строчки.

Задача 2. Рассмотрим отрезок AB и точку H на нём. Проведём три дуги окружностей с концами в точках A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, и три луча с началом в точке H, лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возникают четыре криволинейных четырёхугольника (две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах). Докажите,

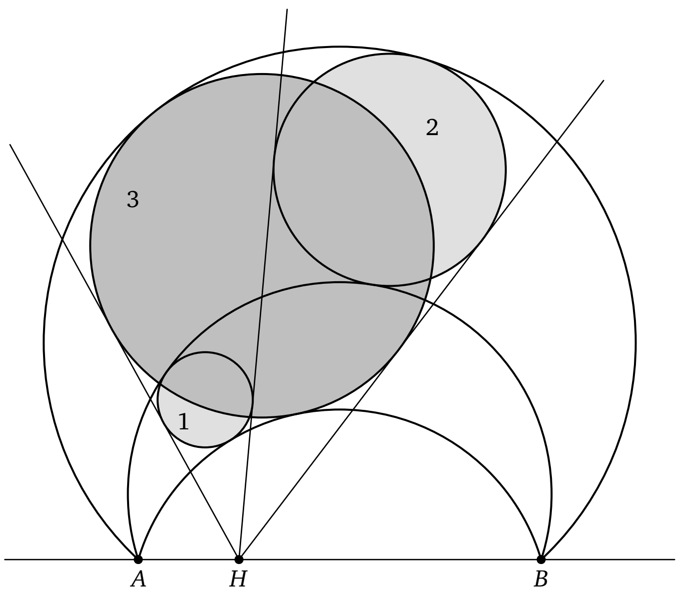


Рис. 6

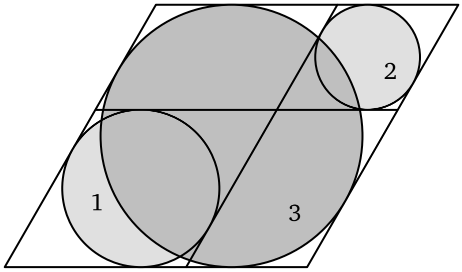


Рис. 7

что если в два диагональных (т. е. не имеющих общих сторон) четырёхугольника можно вписать окружность, то и в большой криволинейный четырёхугольник можно вписать окружность (рис. 6).

Решение. Рисунок 6 эквивалентен вот такой картинке в евклидовой геометрии (рис. 7). Есть сетка из параллелограммов, в которой два параллелограмма по диагонали являются ромбами. Тогда большой параллелограмм тоже будет ромбом. Следовательно, в него можно вписать окружность.

Приведём также несколько модификаций этой задачи.

Задача 3. 1. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если два диагональных криволинейных четырёхугольника будут описанными, то и большой криволинейный четырёхугольник будет описанным.

2. Более того, можно делить большой четырёхугольник на n^2 частей с любым натуральным n и брать маленькие части по одной в каждом столбце и строке.

В заключение этого раздела приведём пару хорошо известных картинок из евклидовой геометрии, которые также допускают простой анализ в неевклидовой геометрии с помощью тех же соображений (рис. 8).

На левой картинке можно видеть тройку орициклов и тройку эквидистант, а на правой — две тройки эквидистант.

§ 4. По мотивам олимпиады Шарыгина

Теперь посмотрим, как работают модель Пуанкаре в круге и модель Клейна. Часто потребуется осуществлять переход между этими моделями, поэтому напомним, что для этого достаточно заменить дуги окружностей,

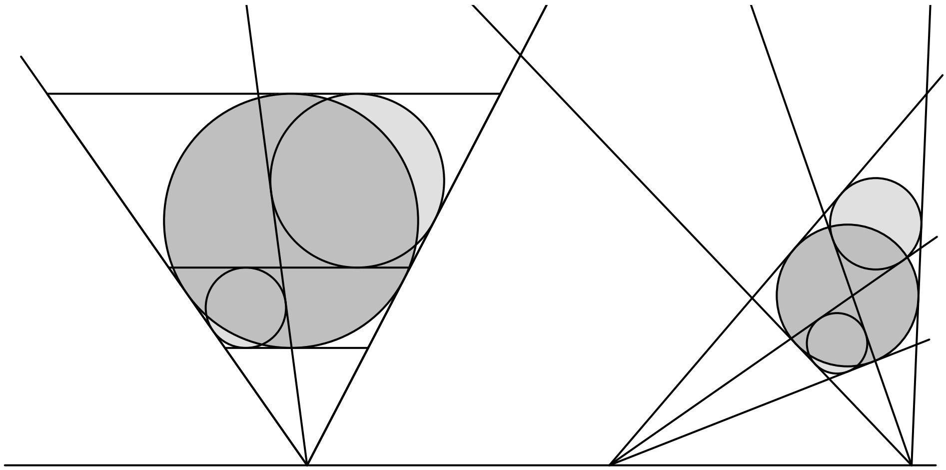


Рис. 8

перпендикулярных абсолюту, на общие хорды этих дуг и окружности абсолюта.

Задача 4. Окружность Ω касается окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 внешним образом. Окружность Γ_1 соосна с ω_2 и ω_3 и проходит через точку касания ω_1 с Ω. Окружности Γ_2 и Γ_3 определяются аналогично. Тогда окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соосны (рис. 9).

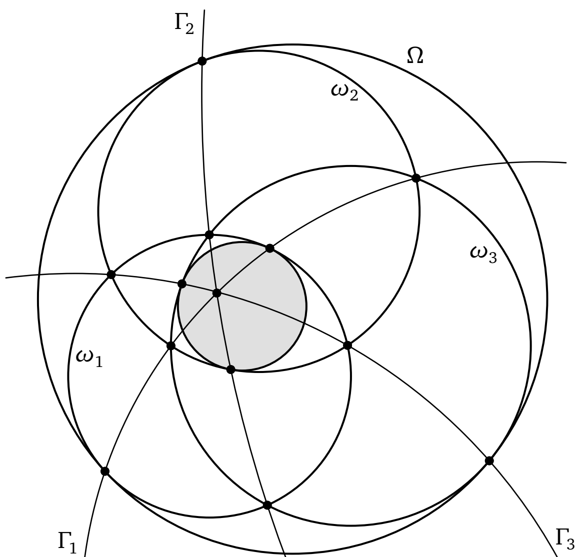


Рис. 9

Решение. Вначале рассмотрим случай, когда не все окружности ω_1, ω_2, ω_3 пересекаются. В таком случае рассмотрим окружность ω, перпендикулярную ω_1, ω_2, ω_3. Она обязательно существует: её центр — это радикальный центр окружностей ω_1, ω_2 и ω_3. Заметим, что любая окружность, соосная с ω_2 и ω_3, также будет перпендикулярна ω. Значит, окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 перпендикулярны ω.

Рассмотрим модель Пуанкаре в круге для плоскости Лобачевского, приняв ω за абсолют, и перейдём к модели Клейна. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 станут прямыми, образующими неевклидов треугольник. Окружность Ω станет коникой, вписанной в этот треугольник, а окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 превратятся в прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания коники со сторонами. Как хорошо известно, эти прямые пересекаются в одной точке (в этом можно убедиться, сделав проективное преобразование, переводящее конику в окружность, и сведя задачу к отысканию точки Жергонна). Переходя обратно к модели Пуанкаре, получаем, что окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 ортогональны абсолюту и имеют общую точку. Значит, они соосны.

Упражнение 10. Решите задачу в случае, когда окружности ω_1, ω_2 и ω_3 попарно пересекаются.

Указание. Сделайте инверсию в точке касания окружностей Ω и ω_1.

Упражнение 11. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Окружность ω касается отрезка MA в точке P, отрезка MD в точке Q и окружности $ABCD$ в точке X. Докажите, что X лежит на радикальной оси окружностей (ACQ) и (BDP).

Задача 4 по существу эквивалентна существованию точки Жергонна в неевклидовом треугольнике. Следующая задача эквивалентна существованию точки Нагеля. Нам не известно её решение, не использующее геометрию Лобачевского.

Задача 5. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 попарно пересекаются. Окружность Γ_1 касается окружностей ω_2 и ω_3 внешним образом и касается ω_1 внутренним образом, причём Γ_1 лежит внутри ω_1. Рассмотрим окружность, проходящую через точку касания ω_1 с Γ_1 и точки пересечения ω_2 с ω_3, а также две аналогичные окружности. Тогда эти три окружности пересекаются в двух точках (рис. 10).

Замечание 2. Иногда вместо неевклидовых вневписанных окружностей нужно рассматривать эквидистанты или орициклы (подробнее см. [2]). Наше рассуждение не зависит от этого, поэтому для краткости

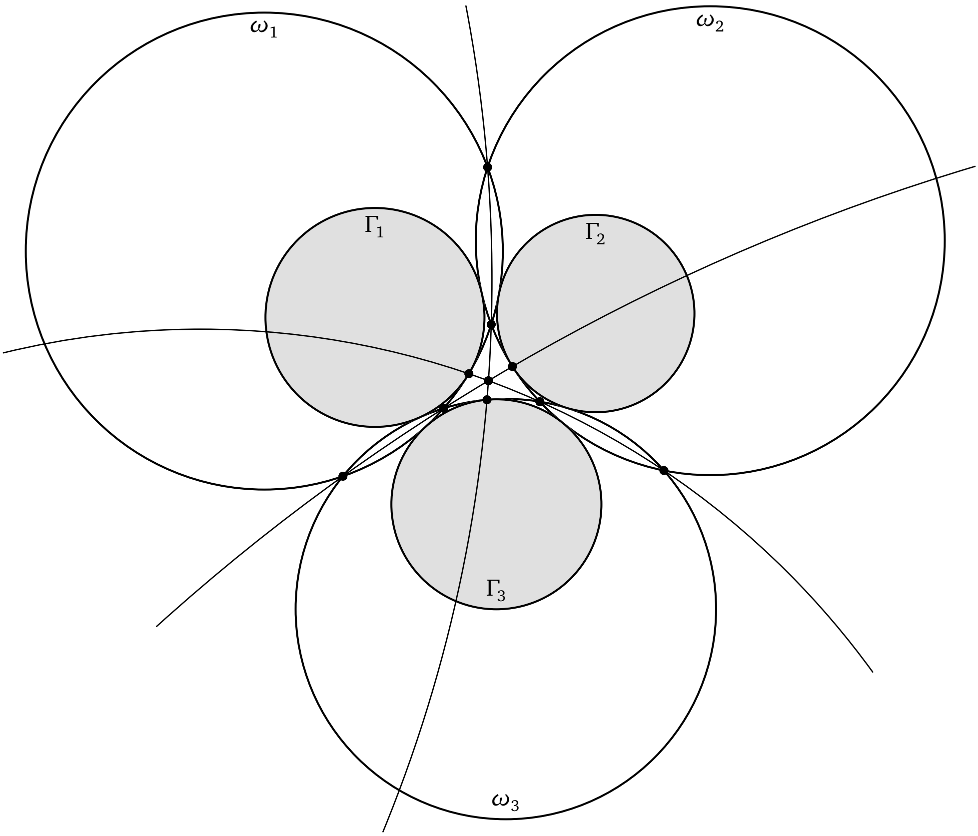


Рис. 10

мы будем говорить «вневписанные окружности», имея в виду евклидовы окружности.

Решение. Эта задача эквивалентна следующей. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского, A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Это утверждение проще всего доказать с помощью *неевклидовой теоремы Чевы*: если выполнено соотношение

$$\frac{\operatorname{sh}(AB_1)}{\operatorname{sh}(B_1C)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(CA_1)}{\operatorname{sh}(A_1B)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(BC_1)}{\operatorname{sh}(C_1A)} = 1,$$

то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Здесь

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

— гиперболический синус числа x; подробнее см. [6, с. 35–36].

Для того чтобы применить неевклидову теорему Чевы, осталось заметить, что $AB_1 = BA_1$, $BC_1 = CB_1$ и $CA_1 = AC_1$.

Упражнение 12. Докажите эти равенства.

Замечание 3. Точно так же можно было бы решить и предыдущую задачу, сводящуюся к отысканию точки Жергонна. Однако, в отличие от точки Жергонна, для точки Нагеля нам не известно чисто геометрическое доказательство, не использующее теорему Чевы.

§ 5. Классические теоремы и модель Клейна

Далее мы рассматриваем, как работает в евклидовых задачах модель Клейна. Поскольку эта модель основана на проективной геометрии, неудивительно, что три задачи, о которых сейчас пойдёт речь, также имеют проективную природу. Первые две задачи являются классическими и хорошо известны, а третья, возможно, не так популярна.

Задача 6 (задача о бабочке). Рассмотрим в окружности хорду AB и её середину M. Проведём через точку M две хорды PQ и RS. Пусть прямые PR и QS пересекают хорду AB в точках C и D (рис. 11). Тогда $CM = DM$.

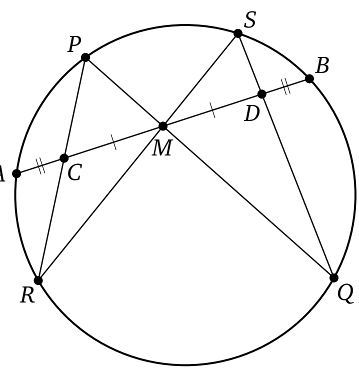


Рис. 11

Решение. Хорошо известен проективный характер данной задачи, который делает весьма затруднительными чисто евклидовы решения, использующие подобные треугольники, равенства углов и т. д. Оказывается, что этот проективный характер можно использовать для интерпретации задачи в модели Клейна геометрии Лобачевского.

Рассмотрим рис. 11 с точки зрения модели Клейна, приняв окружность за абсолют. Применим центральную симметрию с центром в точке M. Ясно, что тогда прямая PR перейдёт в прямую QS, а точка C перейдёт в точку D. Получается, что *неевклидовы* длины отрезков CM и DM равны. Однако тогда эти отрезки симметричны относительно диаметра абсолюта, проходящего через M, а потому *евклидовы* длины этих отрезков также равны, что и требовалось доказать.

Отметим идею связать пару пересекающихся хорд в окружности с центральной симметрией в модели Клейна относительно точки пересечения хорд. В следующей теореме это соображение будет использовано сразу трижды.

Задача 7 (теорема Паскаля). Рассмотрим шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, лежащие на одной окружности. Пусть P — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, Q — точка пересечения прямых B_1C_2 и B_2C_1, R — точка пересечения прямых C_1A_2 и C_2A_1. Тогда точки P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 12).

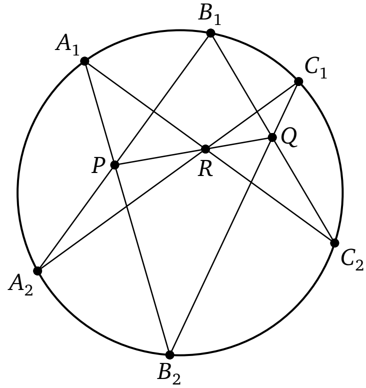


Рис. 12

Замечание 4. Для удобства будем считать точки P, Q и R лежащими внутри окружности, что достигается подходящим выбором положения точек A_i, B_i, C_i на окружности (рис. 12). Рассуждения можно обобщить и для произвольного положения точек, см., например, [1].

Доказательство. Все рассмотрения будем проводить в модели Клейна. Проведём прямую PQ, пересекающую прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 в точках X, Y и Z соответственно. Докажем, что $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$. Для этого рассмотрим композицию центральных симметрий $Z_Q \circ Z_P$. Ясно, что эта композиция переводит A_1 в C_1 и A_2 в C_2. Кроме того, имеют место следующие равенства неевклидовых углов: $\angle A_1XP = \angle B_2YP = \angle B_1YQ = \angle C_2ZQ$.

Теперь рассмотрим центральную симметрию Z_R, переводящую A_1A_2 в C_1C_2. Поскольку $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$, несложно доказать, что точка R должна лежать на прямой PQ. В самом деле, существует единственная центральная симметрия, переводящая A_1A_2 в C_1C_2, и её центр — это с одной стороны точка R, а с другой — неевклидова середина отрезка PQ. Значит, точка R — это неевклидова середина отрезка PQ. □

Рассмотрим ещё одну классическую (но, видимо, на этот раз не широко известную) теорему.

Теорема 1 (Фрежье). *Пусть дана коника и точка C на ней. Тогда хорды XY коники, которые видны из C под фиксированным* (*ориентированным*) *углом, огибают некоторую конику.*

Доказательство (А. Акопян). Пусть X — произвольная точка нашей коники. Тогда для неё существует единственная точка $Y = f(X)$ на конике, такая, что ориентированный угол $\angle XCY$ равен заданному. Легко видеть, что отображение $f\colon X \mapsto Y$ проективно.

Теперь проективным преобразованием переведём данную конику в окружность. Тогда проективное преобразование f перейдёт в проективное преобразование окружности $\widetilde{f}$. Продолжим его на плоскость и будем считать окружность абсолютом модели Клейна. В таком случае продолженное преобразование, которое мы также обозначим через $\widetilde{f}$, будет собственным движением плоскости Лобачевского. Следовательно, оно является композицией двух осевых симметрий. В зависимости от расположения их осей существуют три типа собственных движений: поворот (соответствующий пересекающимся прямым), орициклический поворот (соответствующий прямым, пересекающимся на абсолюте) и параллельный перенос (соответствующий расходящимся прямым). Несложно видеть, что поворот сохраняет концентрические окружности, орициклический поворот — орициклы, а параллельный перенос — эквидистанты. Поэтому в зависимости от типа движения $\widetilde{f}$ все прямые $X\widetilde{f}(X)$ будут огибать окружность, орицикл или эквидистанту. Каждая из этих кривых является коникой, поэтому и её прообраз также будет коникой, что и требовалось доказать. □

В заключение приведём решение следующей классической задачи.

Задача 8. Рассмотрим треугольник ABC и окружность ω. Пусть A', B', C' — полюсы прямых BC, CA, AB относительно окружности ω. Тогда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке (рис. 13).

Решение. Снова посмотрим на нашу задачу через призму модели Клейна. Для определённости мы рассмотрим случай, когда треугольник ABC

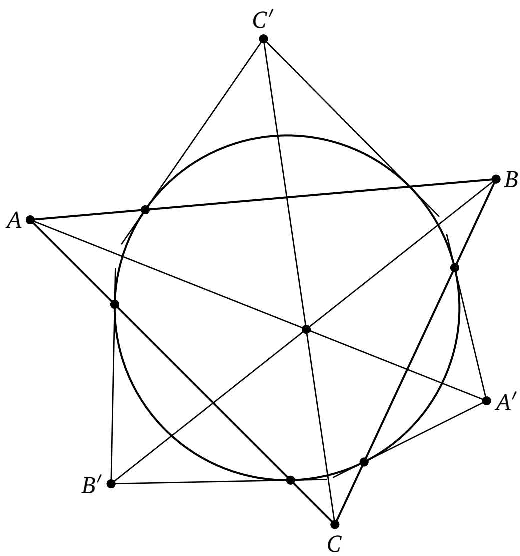


Рис. 13

целиком лежит внутри окружности ω (о методе перехода к общему случаю см. [1]). Тогда прямые AA', BB' и CC' — это высоты треугольника ABC.

Упражнение 13. Докажите это.

Таким образом, мы свели задачу к классической задаче пересечения высот неевклидова треугольника в одной точке. Легче всего это доказать, переместив треугольник таким образом, чтобы одна из его вершин совпала с центром абсолюта. Тогда неевклидовы высоты такого треугольника совпадут с евклидовыми, что и завершает решение задачи.

Мы завершим эту статью следующей задачей, которая представляется нам очень трудной.

Задача 9. Рассмотрим вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в O. Тогда центры I_{ab}, I_{bc}, I_{cd} и I_{da} вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD и ODA лежат на одной окружности (рис. 14).

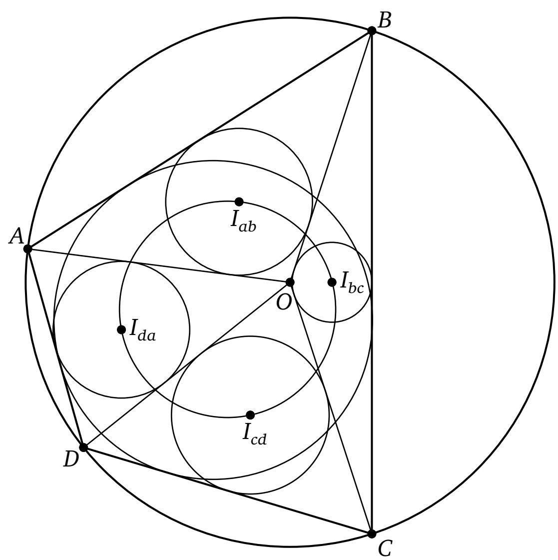


Рис. 14

Решение этой задачи, принадлежащее А. А. Заславскому, можно найти в [5].

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на сим-

плектической плоскости // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 93–99.

[2] *Бибиков П. В.* Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 142–148.

[3] *Гальперин Г. А.*. Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 93–112.

[4] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Заславский А. А.* О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2019. С. 163–166.

[6] *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2016.

[7] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2019.

[8] *Протасов В. Ю.* Выход в пространство — 2 [продолжение] // Квант. 2018. № 1. С. 8–14.

[9] `https://www.imo-official.org/problems.aspx`

Павел Витальевич Бибиков, лицей «Вторая школа» (г. Москва)

`bibikov.pv@sch2.ru`

Иван Ильич Фролов, факультет математики НИУ ВШЭ

`frolov1999@yandex.ru`

Педальные окружности, обобщённые точки Фейербаха и полюсы треугольника

М. И. Бидва, А. А. Шевцов

В данной работе исследуются обобщённые точки Фейербаха. Это обобщение производится с помощью теоремы Акопяна — Заславского — Фонтене, утверждающей, что педальные окружности точек, лежащих на одной прямой с центром описанной окружности, проходят через общую точку (которую мы и называем обобщённой точкой Фейербаха). Оказывается, что многие известные свойства точки Фейербаха допускают обобщение на случай такой точки, причём доказательства, получаемые для общего случая, оказываются более простыми и понятными. В работе развивается соответствующая техника работы с обобщёнными точками Фейербаха, основанная прежде всего на технике педальных треугольников. Также получены обобщения ряда классических конструкций, связанных с треугольником, таких как полюсы треугольника (исследованные ранее Емельяновыми и Поповым). Отметим, что некоторые результаты ранее уже были получены Д. Гринбергом, П. Кожевниковым и Д. Швецовым.

§ 1. Введение

Множество работ в элементарной геометрии посвящено точке Фейербаха — точке касания вписанной окружности треугольника и окружности девяти точек. Её свойства поистине неисчерпаемы, если уже более полутора столетий открываются всё новые и новые. Обнаружены её взаимосвязи с такими классическими объектами, как гомотетия, инверсия, точка Микеля, радикальные оси и многими другими. При этом доказательства многих красивых свойств точки Фейербаха отнюдь не просты и требуют многоходовых и сложных рассуждений.

В данной работе мы предлагаем новый подход к изучению свойств точки Фейербаха. Грубо говоря, мы утверждаем, что многие её свойства являются лишь *частными случаями* значительно более общих теорем, связанных с совершенно иными конструкциями, ранее особо не привлекавшимися для исследования точки Фейербаха. Стартуя с одного красивого утверждения (так называемой теоремы Куланина, см. [5]), мы последовательно построим теорию, обобщающую различные свойства точки Фейербаха, причём сделаем это с использованием инструментов, ранее не привлекавшихся для изучения её свойств. Отметим, что некоторые результаты, представленные в данной статье, уже получены ранее в работах [8] и [4]. Однако мы продемонстрируем иной подход к данным фактам, который также поможет связать эти результаты с классическими результатами про точку Фейербаха.

Для удобства зафиксируем основные обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

- A, B, C — вершины треугольника;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC;
- I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC;
- E — центр окружности девяти точек ε треугольника ABC;
- ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку O;
- A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно;
- $P_aP_bP_c$ — педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC, а Ω_P — его педальная окружность;
- F_ℓ — обобщённая точка Фейербаха (см. теорему 1).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Мы начнём наш рассказ со следующей теоремы.

Теорема 1 (Фонтене). *Пусть P — произвольная точка на прямой OI. Тогда её педальная окружность Ω_P проходит через точку Фейербаха F треугольника ABC.*

Красивое доказательство этого факта, использующее изогональное сопряжение и свойства равнобокой гиперболы, можно найти в [1, с. 106].

Теорема Фонтене допускает важную модификацию, которая и будет ключевой при обобщении понятия точки Фейербаха. По всей видимости, эта теорема принадлежит Е. Куланину и впервые была опубликована в [5].

Теорема 2 (Куланин). *Пусть P — произвольная точка прямой ℓ, проходящей через точку O. Тогда все педальные окружности Ω_P проходят через одну точку* (рис. 1).

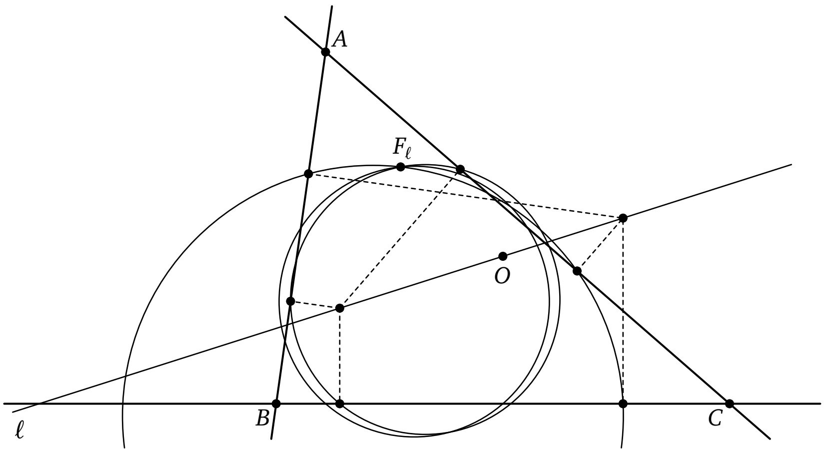


Рис. 1

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы Фонтене, приведённому в [1, с. 106] (см. также [5]).

Общую точку всех педальных окружностей Ω_P точек прямой ℓ мы будем обозначать через F_ℓ и называть *обобщённой точкой Фейербаха*. Эта точка зависит от прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности O треугольника ABC. В случае $\ell = OI$ точка F_ℓ совпадает с обычной точкой Фейербаха F. Отметим также, что все точки F_ℓ лежат на окружности Эйлера ε треугольника ABC (поскольку окружность Эйлера является педальной окружностью точки O).

§ 3. Полюсы треугольника

В этом разделе мы обобщим понятие полюсов треугольника. Впервые оно появилось в работе Емельяновых [2]. В ней авторы строили семейство замечательных окружностей, описанных около чевианных треугольников и проходящих через точку Фейербаха F. Понятие полюсов треугольника было обобщено в работе В. Попова [6], где полюсы зависели от треугольника, гомотетичного серединному с центром в точке Фейербаха. Мы же пойдём ещё дальше и сформулируем понятие полюсов треугольника, зависящее от двух точек P и Q, которые лежат на прямой ℓ, проходящей через центр O описанной окружности треугольника ABC.

Теорема 3. *Рассмотрим произвольную прямую ℓ, проходящую через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — произвольные точки на этой прямой. Обозначим через A_{pq} точку пересечения прямых P_bP_c и $F_\ell Q_a$. Аналогично определим точки B_{pq} и C_{pq}. Возьмём*

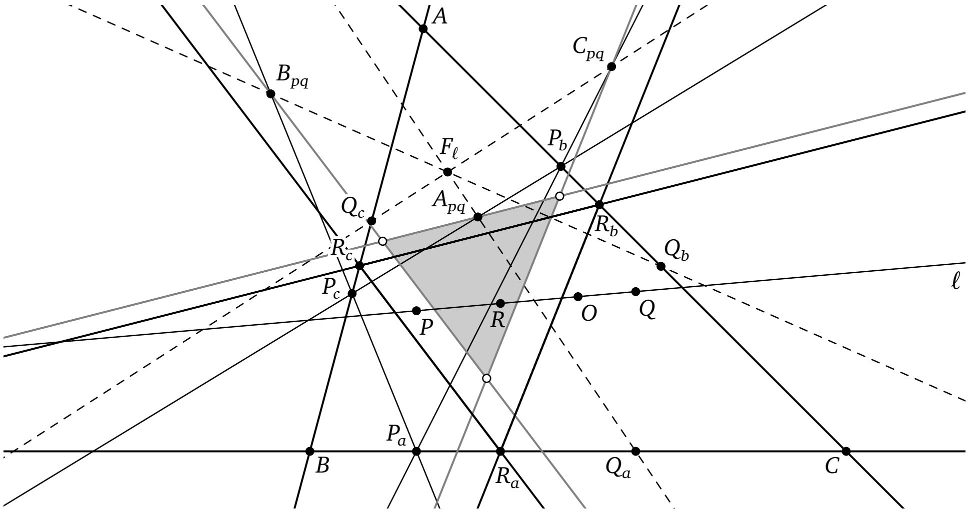


Рис. 2

произвольную точку R на прямой ℓ, её педальный треугольник $R_aR_bR_c$ и проведём через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямые, параллельные R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно. Тогда получившийся треугольник будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ (рис. 2).

Точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} мы будем называть *полюсами треугольника, соответствующими точкам P и Q*.

Перед тем как переходить к доказательству этой теоремы, рассмотрим некоторые её частные случаи (ранее доказанные в работах [2, 3, 6]).

При $P = Q = I$ и $R = O$ полюсы A_{ii}, B_{ii}, C_{ii} лежат на средних линиях треугольника ABC. Это в точности основная теорема статьи [3].

При $P = I$ и $Q = R = O$ полюсы A_{io}, B_{io}, C_{io} совпадают с полюсами треугольника ABC, введёнными Емельяновыми в работе [2], а треугольник, гомотетичный $M_aM_bM_c$, получается отражением точек касания G_a, G_b, G_c относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC.

При $P=I$, $R=O$ и произвольном Q полюсы A_{iq}, B_{iq}, C_{iq} совпадают с обобщёнными полюсами Попова. Это один из основных результатов статьи [6].

Таким образом, конструкции, известные ранее, соответствуют фиксированному положению точек P и R.

3.1. Случай $Q = P$, $R = O$

Мы начнём доказательство теоремы 3 со следующего частного случая (впрочем, представляющего также самостоятельный интерес).

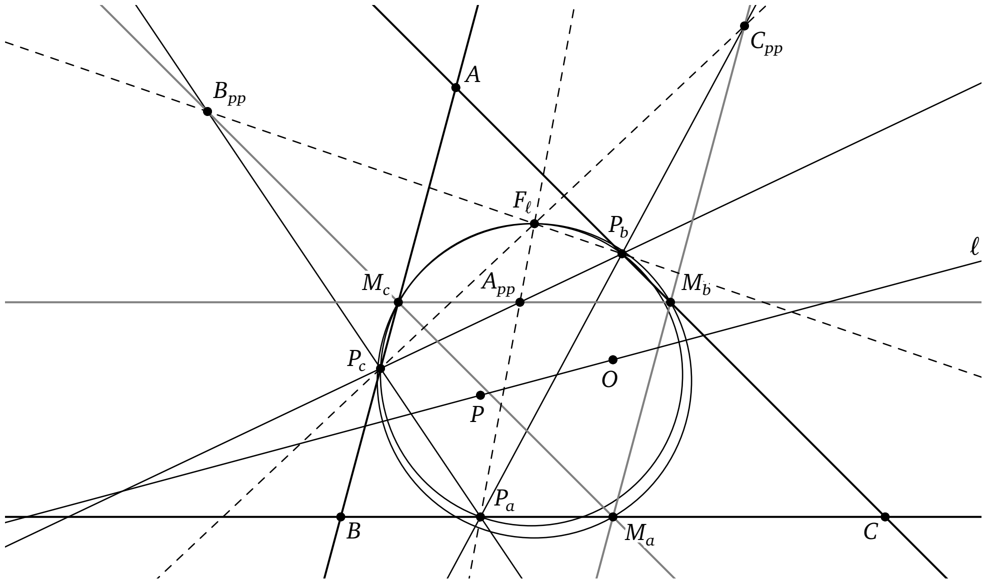


Рис. 3

Предложение 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, прямую ℓ, проходящую через O, и точку P на ней. Обозначим через A_{pp} точку пересечения прямых P_bP_c и M_bM_c. Тогда точки P_a, A_{pp} и F_ℓ лежат на одной прямой* (рис. 3).

Замечание 1. По существу это предложение соответствует случаю $Q = P$ и $R = O$ в обозначениях теоремы 3. Также заметим, что это предложение равносильно равенствам $A_{pp} = A_{op}$, $B_{pp} = B_{op}$ и $C_{pp} = C_{op}$.

Доказательство. Будем равномерно двигать точку P по прямой ℓ. Заметим, что тогда точка P_a будет равномерно двигаться по прямой BC со скоростью $\bar{v}_a$. Докажем, что точка A_{pp} также будет двигаться равномерно по прямой M_bM_c (со скоростью $\overline{w}_a$). В самом деле, применим теорему Менелая к треугольнику AM_bM_c и точкам P_b, P_c и A_{pp}. Точки P_b и P_c движутся равномерно, и из теоремы Менелая следует, что точка A_{pp} также будет двигаться равномерно.

Теперь рассмотрим гомотетию, переводящую вектор $\bar{v}_a$ в вектор $\overline{w}_a$ (ясно, что такая гомотетия существует и единственна). Тогда точки P_a и A_{pp} гомотетичны при всевозможных положениях точки P на прямой ℓ.

Остаётся показать, что центр построенной нами гомотетии совпадает с обобщённой точкой Фейербаха F_ℓ. Для этого рассмотрим два положения точки P, а именно точки пересечения описанной окружности Ω тре-

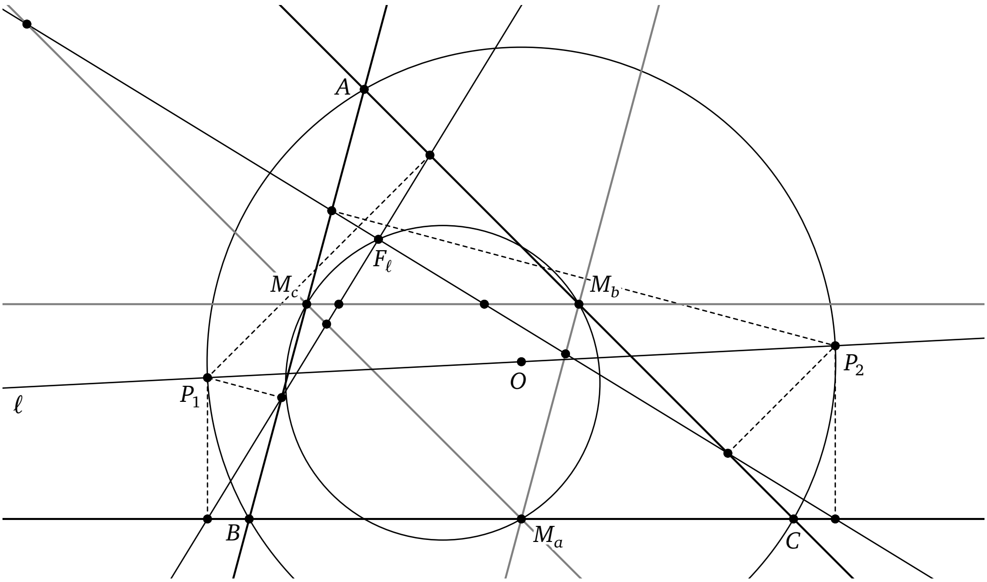


Рис. 4

угольника ABC с прямой ℓ (точки P_1 и P_2 на рис. 4). Тогда прямая P_aA_{pp} становится прямой Симсона для соответствующего конца диаметра, а потому в соответствии с теоремой Куланина обе такие прямые проходят через точку F_ℓ. С другой стороны, эти же прямые пересекаются в центре нашей гомотетии. Значит, центр гомотетии совпадает с точкой F_ℓ, что и требовалось доказать. □

3.2. Общий случай

Теперь мы готовы доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Будем равномерно двигать точку P по прямой ℓ. Обозначим через t ориентированную длину отрезка OP (т. е. выберем положительное направление на прямой ℓ и будем считать длину t отрезка OP положительной, если точка P находится на положительном луче, и отрицательной в противном случае). Введём декартову систему координат с началом в точке F_ℓ и обозначим через $(X_a(t), Y_a(t))$, $(X_b(t), Y_b(t))$, $(X_c(t), Y_c(t))$ координаты точек A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} соответственно. Докажем, что каждая из этих координатных функций является рациональной по переменной t, причём степень числителей равна 2, а степень знаменателей равна 1.

Для определённости рассмотрим точку A_{pq} (рассуждения для точек B_{pq} и C_{pq} аналогичны). Ясно, что точки P_b, P_c будут двигаться равномерно, поэтому их координаты являются линейными функциями от переменной t. Уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), имеет вид

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Отсюда следует, что коэффициенты при x и y в уравнении прямой P_bP_c также линейно зависят от t, а свободный член этого уравнения квадратичен по t. Наконец, пересекая прямую P_bP_c с неподвижной прямой $F_\ell Q_a$, получаем искомые координаты точки A_{pq} пересечения этих прямых. Точно так же доказывается, что координаты точек B_{pq} и C_{pq} имеют аналогичный вид.

Теперь докажем, что при равномерном движении точки P прямые $A_{pq}B_{pq}$, $B_{pq}C_{pq}$, $C_{pq}A_{pq}$ будут двигаться параллельно (но не равномерно). Это условие равносильно равенствам

$$F_\ell A_{pq} = \alpha \cdot F_\ell C_{pq} \quad \text{и} \quad F_\ell B_{pq} = \beta \cdot F_\ell C_{pq},$$

где α и β — некоторые константы, не зависящие от t (например, можно вычислить их для некоторого конкретного момента времени t_0, а затем доказать, что они остаются неизменными в любой другой момент времени).

Докажем только первое равенство, поскольку второе доказывается аналогично. Перепишем первое равенство в координатах:

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t), \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

(здесь α_1 и α_2 — фиксированные константы). Вспомним, что каждая из функций, фигурирующих в этих соотношениях, является отношением многочленов степеней 2 и 1. Поэтому, домножая каждое из равенств на знаменатели соответствующих функций, получаем, что данные равенства равносильны обращению в тождественный нуль двух кубических многочленов от t. Для проверки этого условия достаточно найти четыре различных значения t, или, что то же самое, четыре различных положения точки P, при которые утверждение теоремы верно (так как если у многочлена степени не выше 3 есть 4 различных корня, то этот многочлен тождественно равен 0). Укажем эти положения.

Во-первых, рассмотрим два момента времени, когда точка P совпадает с O (этот случай соответствует $t = 0$) и с Q. Из предложения 1 следует, что точки A_{pq} совпадают в эти два момента времени, причём они отличны от начала координат F_ℓ. Аналогичное верно для точек C_{pq}. Поэтому если определить константы α_1 и α_2 по формулам $\alpha_1 = X_a(0)/X_c(0)$ и $\alpha_2 = Y_a(0)/Y_c(0)$, то равенства

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

верны при двух моментах времени t.

Во-вторых, рассмотрим два положения точки P, являющихся концами диаметра описанной окружности Ω треугольника ABC, лежащего на прямой ℓ. В это случае точки A_{pq} и C_{pq} совпадают с F_ℓ, а потому их координаты равны 0 и требуемые равенства также верны.

Таким образом, мы нашли четыре момента времени, при которых соотношения между координатами точек A_{pq} и C_{pq} верны. Значит, эти соотношения верны в любой момент времени t, откуда следует параллельность прямых вида $A_{pq}C_{pq}$. Аналогично доказывается параллельность прямых $A_{pq}B_{pq}$ и $B_{pq}C_{pq}$. Таким образом, все треугольники вида $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ гомотетичны с центром в точке F_ℓ при всевозможных положениях точки P.

Осталось понять, почему при проведении через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямых, параллельных R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно, треугольник, образованный этими прямыми, будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ. Для этого рассмотрим момент времени, в который точка P совпадает с R. Тогда точки $A_{pq} = A_{rq}$, $B_{pq} = B_{rq}$ и $C_{pq} = C_{rq}$ будут лежать на прямых R_bR_c, R_cR_a и R_aR_b соответственно. Для произвольного положения точки P рассмотрим гомотетию с центром в F_ℓ, которая переведёт A_{rq} в A_{pq}. Тогда по доказанному выше эта же гомотетия переведёт B_{rq} в B_{pq} и C_{rq} в C_{pq}. Поэтому прямая R_bR_c перейдёт в прямую, проходящую через A_{pq} параллельно ей. Аналогичное произойдёт с двумя оставшимися прямыми R_cR_a и R_aR_b. Таким образом, теорема 3 полностью доказана. □

§ 4. Обобщённая точка Фейербаха и прямые Симсона

В этом разделе мы опишем ряд свойств обобщённой точки Фейербаха F_ℓ треугольника ABC, которая соответствует прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности O. Многие из этих свойств основаны на рассмотрении прямых Симсона точек пересечения прямой ℓ с описанной окружностью Ω треугольника ABC.

Теорема 4. *Прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC, пересекаются в точке F_ℓ.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC, пересекаются в одной точке $\widetilde{F}_\ell$, лежащей на окружности Эйлера ε (поскольку точка O является ортоцентром серединного треугольника $M_aM_bM_c$, а прямые, симметричные прямой, проходящей через ортоцентр, относительно сторон, пересекаются в одной точке описанной окружности). Докажем, что эта

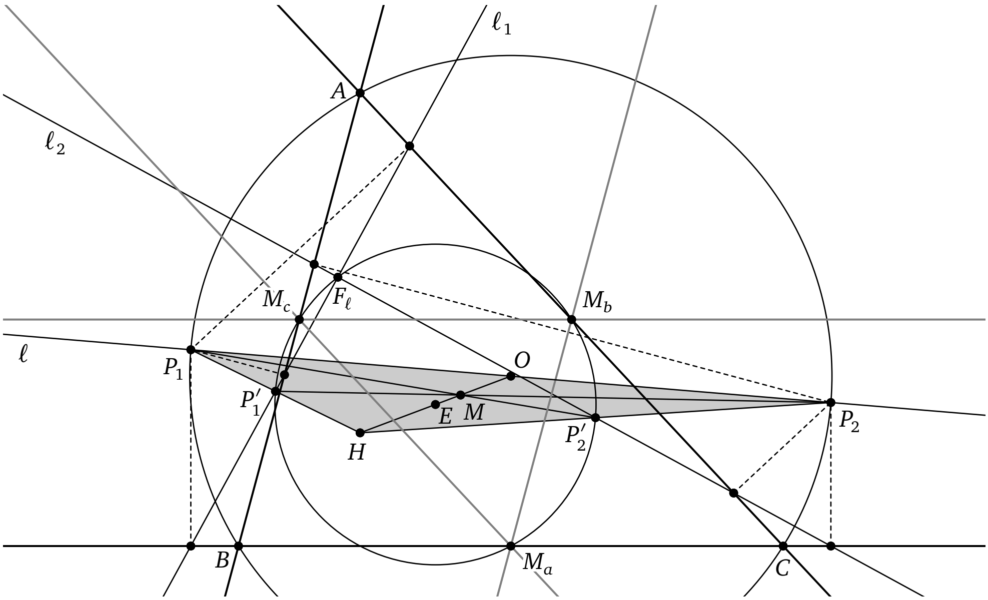


Рис. 5

точка на самом деле совпадает с F_ℓ. Пусть P — произвольная точка прямой ℓ. Из предложения 1 следует, что прямые P_aA_{pp}, P_bB_{pp} и P_cC_{pp} пересекаются в точке F_ℓ. Поэтому достаточно найти два положения точки P, в которых прямая P_aA_{pp} проходит через $\widetilde{F}_\ell$.

Выберем в качестве таких положений точки P_1 и P_2, лежащие на описанной окружности треугольника ABC (рис. 5). Тогда нам нужно доказать, что прямые Симсона точек P_1 и P_2 проходят через точку $\widetilde{F}_\ell$.

Пусть P_1' и P_2' — образы точек P_1 и P_2 при гомотетии с центром в ортоцентре H треугольника ABC и коэффициентом $1/2$ (рис. 5). Поскольку P_1P_2 — диаметр окружности Ω, то $P_1'P_2'$ — диаметр окружности ε. Кроме того, прямая Симсона точки P_1 проходит через середину P_1' отрезка P_1H (аналогичное верно и для точки P_2; см. рис. 5).

Далее, отрезки P_1P_2', P_2P_1' и HO пересекаются в одной точке (центре тяжести треугольника P_1P_2H) и делятся этой точкой в отношении $2:1$. Значит, эта точка совпадает с точкой M пересечения медиан треугольника ABC. Сделав гомотетию с центром в M и коэффициентом $-1/2$, получаем, что прямая Симсона точки P_1 относительно окружности Ω параллельна прямой Симсона точки P_2' относительно окружности ε.

Осталось доказать, что прямая Симсона ℓ_2' точки P_2' параллельна прямой $P_1'\widetilde{F}_\ell$. Для этого отметим на окружности ε такие точки X и Y, что $\widetilde{F}_\ell X$ и $P_2'Y$ перпендикулярны M_aM_b (рис. 6). Заметим, что прямая ℓ парал-

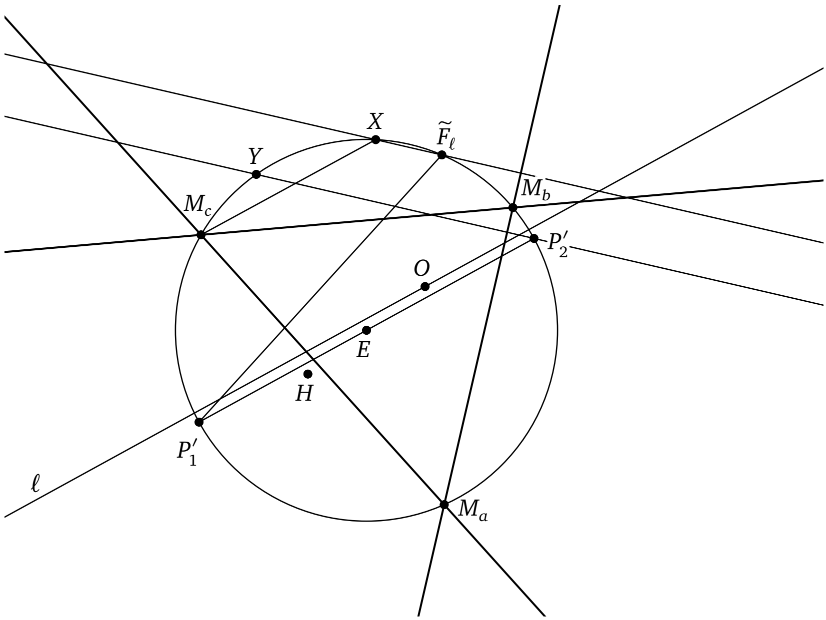


Рис. 6

лельна прямой Симсона точки $\widetilde{F}_\ell$, так как она является её образом при гомотетии с центром в точке H и коэффициентом 2. С другой стороны, прямая Симсона точки $\widetilde{F}_\ell$ параллельна прямой M_cX, а прямая Симсона ℓ_2' точки P_2' параллельна M_cY (подробнее см. [7]). Но $P_2'Y$ параллельно $X\widetilde{F}_\ell$, поэтому

$$\overset{\frown}{M_cP_1'} = \overset{\frown}{P_2'X} = \overset{\frown}{\widetilde{F}_\ell Y},$$

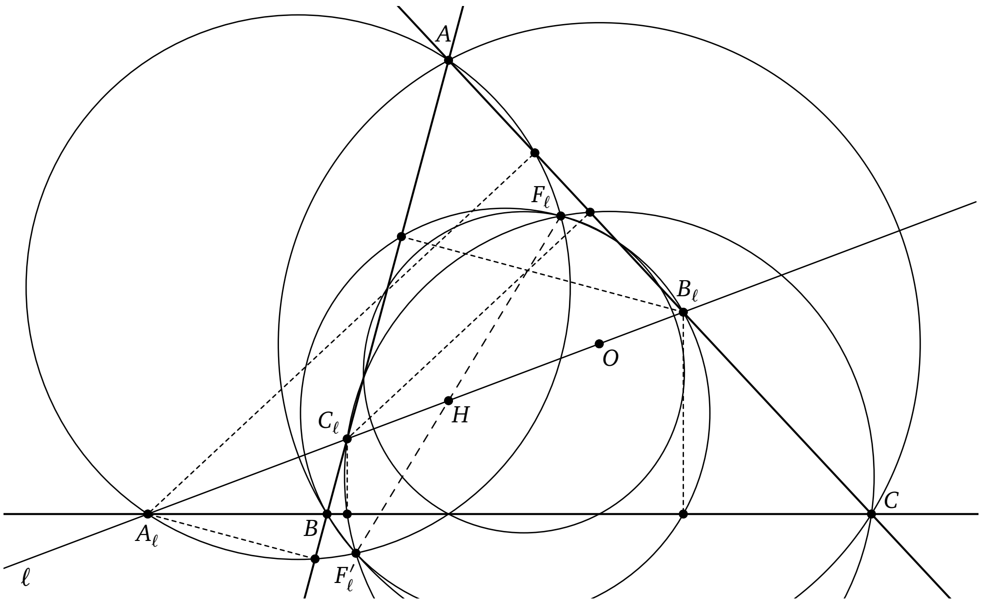
откуда следует, что ℓ_2' параллельна M_cY и $P_1'\widetilde{F}_\ell$, что и требовалось доказать. □

Используя эту теорему, удаётся доказать следующие красивые факты.

Теорема 5. *При равномерном вращении прямой ℓ вокруг точки O точка F_ℓ будет равномерно двигаться по окружности Эйлера ε.*

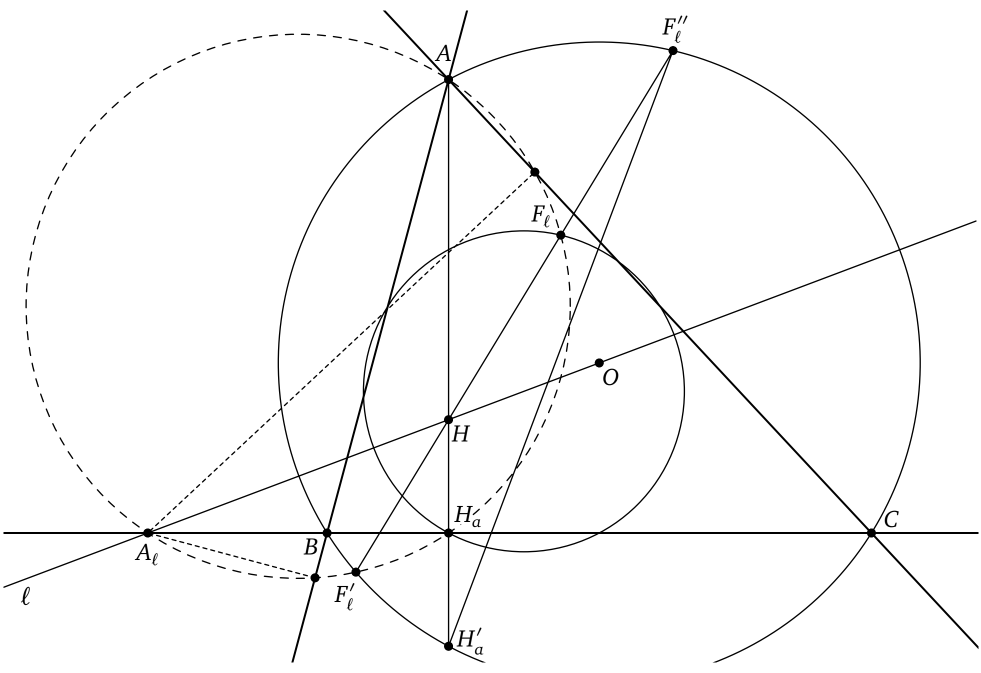
Доказательство. В самом деле, при равномерном вращении прямой ℓ вокруг точки O точки P_1 и P_2 будут равномерно вращаться по описанной окружности Ω. Но тогда точка F_ℓ пересечения их прямых Симсона ℓ_1 и ℓ_2 также будет вращаться равномерно, поскольку при равномерном вращении точки по окружности её прямая Симсона (относительно фиксированного треугольника) вращается равномерно. □

Теорема 6. *Пусть A_ℓ, B_ℓ и C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно. Тогда окружности, построенные на отрез-*



A
F_ℓ
B_ℓ
O
H
C_ℓ
C
A_ℓ
B
F'_ℓ
ℓ

Рис. 7



F''_ℓ
A
F_ℓ
O
H
H_a
C
A_ℓ
B
F'_ℓ
ℓ
H'_a

Рис. 8

ках AA_ℓ, BB_ℓ, CC_ℓ как на диаметрах, пересекаются в двух точках: F_ℓ и F'_ℓ, причём точка F'_ℓ лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC, а ортоцентр H этого треугольника принадлежит прямой $F_\ell F'_\ell$ (рис. 7).

Доказательство. Сначала докажем, что отрезок AA_ℓ виден из точки F_ℓ под прямым углом. Отсюда будет следовать принадлежность точки F_ℓ окружности с диаметром AA_ℓ (доказательства для других двух окружностей аналогичны). Согласно теореме Куланина педальная окружность точки A_ℓ проходит через точку F_ℓ. Но эта окружность проходит также через вершину A, потому что изогональный образ точки A_ℓ — это вершина A (как, впрочем, и изогональный образ любой точки прямой BC). Отсюда следует, что точки A, A_ℓ и F_ℓ лежат на одной окружности с диаметром AA_ℓ.

Центрально-симметрично отразим точку H относительно H_a и F_ℓ. Получим точки H'_a и F''_ℓ, лежащие на описанной окружности Ω треугольника ABC (рис. 8 и доказательство предыдущей теоремы). Далее, обозначим через F'_ℓ точку пересечения луча HF_ℓ с описанной окружностью Ω треугольника ABC, отличную от F_ℓ. Докажем, что угол $AF'_\ell A_\ell$ также прямой. Заметим, что основание высоты H_a треугольника ABC лежит на окружности с диаметром AA_ℓ, поэтому достаточно доказать, что точки A, F_ℓ, H_a и F'_ℓ лежат на одной окружности. Но в треугольнике $HH'_aF''_\ell$ отрезок H_aF_ℓ является средней линией, а четырёхугольник $AF''_\ell H'_a F'_\ell$ вписанный, поэтому и четырёхугольник $AF_\ell H_a F'_\ell$ вписанный, что и требовалось доказать. □

§ 5. Автополярные треугольники и обобщение теоремы Емельяновых

В этом разделе мы вернёмся к предложению 1 и рассмотрим интересные частные случаи. Интерес к конфигурациям, рассматриваемым в этом разделе, обусловлен замечательной теоремой Емельяновых, доказанной ими в [2]. Суть её заключается в том, что полюсы A_{io}, B_{io} и C_{io} образуют автополярный треугольник относительно вписанной окружности ω и порождают семейство замечательных окружностей, проходящих через точку Фейербаха. Для этого необходимо взять на стороне BC треугольника произвольную точку X_a, провести прямые $C_{io}X_a$ и $B_{io}X_a$ и пересечь с прямыми AC и AB соответственно. Получившиеся точки X_b и X_c вместе с точкой X_a образуют чевианный треугольник (так как прямые AX_a, BX_b и CX_c пересекаются в одной точке). Более того, прямая X_bX_c проходит через точку A_{io}, т. е. неважно, с какой из точек X_a, X_b или X_c начинать процесс. Ну и, наконец, описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку Фейербаха F.

В этом разделе мы обобщим этот результат Емельяновых на случай полюсов A_{hh}, B_{hh}, C_{hh}. В этом нам поможет геометрическое доказательство теоремы Емельяновых, найденное А. А. Заславским (см. [1, с. 105–106]).

Теорема 7. *Пусть OH — прямая Эйлера треугольника ABC. Тогда полюсы A_{hh}, B_{hh}, C_{hh} образуют автополярный треугольник относительно окружности Эйлера ε, причём вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$.*

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $H_aH_bH_cF_\ell$, вписанный в окружность Эйлера ε. Его противоположные стороны H_aH_c и $F_\ell H_b$ пересекаются в точке B_{hh}, а стороны H_aH_b и $F_\ell H_c$ — в точке C_{hh}, в то время как диагонали H_aF_ℓ и H_bH_c пересекаются в точке A_{hh}. Отсюда следует, что треугольник $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ является автополярным относительно окружности Эйлера ε.

Теперь докажем, что стороны этого треугольника содержат вершины треугольника ABC. В самом деле, рассмотрим четырёхугольник $H_cM_cH_bM_b$, также вписанный в окружность ε. Его диагонали пересекаются в точке A_{hh}, а боковые стороны — в точке A, поэтому точка A лежит на поляре точки A_{hh}. Но полярой точки A_{hh} является прямая $B_{hh}C_{hh}$, поэтому точка A лежит на $B_{hh}C_{hh}$. Рассуждения для остальных вершин абсолютно аналогичны. □

Из этой теоремы сразу вытекает аналог теоремы Емельяновых (см. [2]).

Теорема 8. *Пусть X_a — произвольная точка на прямой BC. Обозначим через X_b точку пересечения прямых X_aC_{hh} и AC, а через X_c — точку пересечения прямых X_aB_{hh} и AB. Тогда*

- *прямая X_bX_c проходит через точку A_{hh};*
- *прямые AX_a, BX_b и CX_c пересекаются в одной точке X;*
- *описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку F_{OL}, где L — точка Лемуана треугольника ABC* (рис. 9).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы Емельяновых, приведённому в [1, с. 105–106].

Как мы отмечали выше, определение полюсов A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} зависит от порядка выбора точек P и Q на прямой ℓ. Возникает вопрос: как связаны полюсы A_{pq} и A_{qp}, т. е. полюсы, соответствующие одним и тем же точкам, взятым в разном порядке? Появилась следующая

Гипотеза. *Точки пересечения Z_a, Z_b, Z_c прямых, содержащих соответственные стороны треугольников $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ и $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$, образуют треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке F_ℓ* (рис. 10).

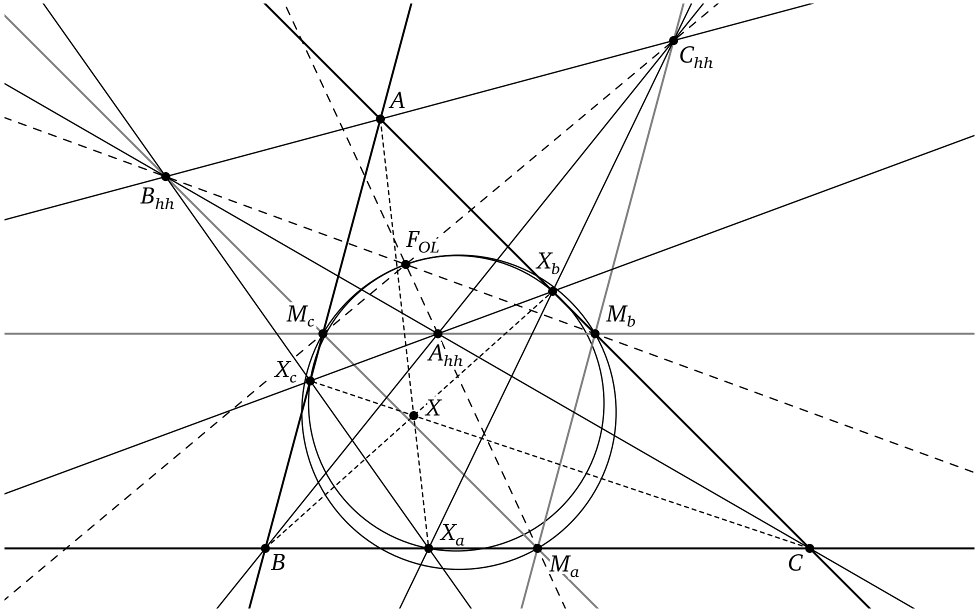

A
C_hh
B_hh
F_OL
X_b
M_c
M_b
A_hh
X_c
X
X_a
B
M_a
C

Рис. 9

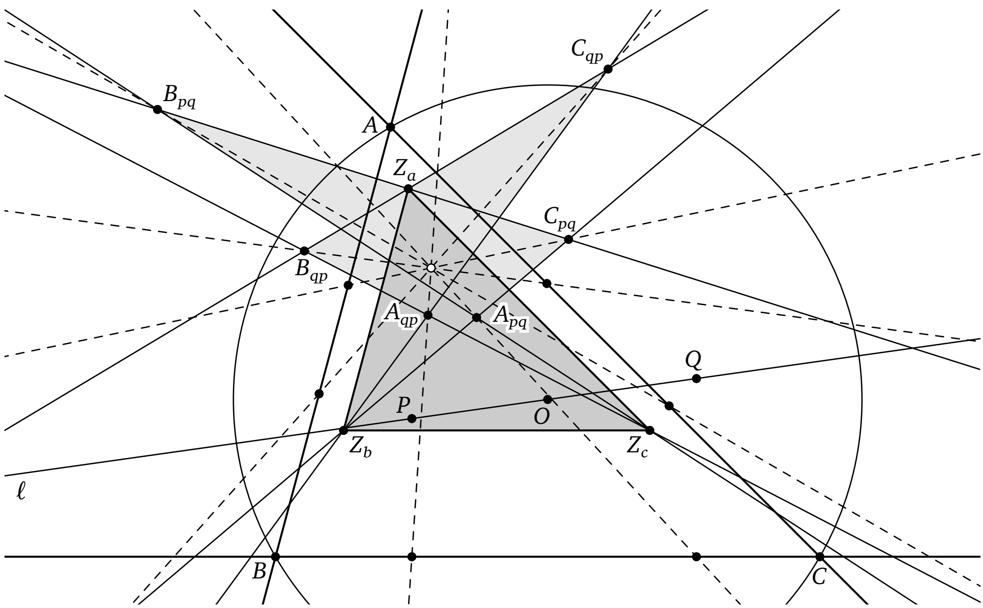

C_qp
B_pq
A
Z_a
C_pq
B_qp
A_qp
A_pq
Q
P
O
Z_b
Z_c
ℓ
B
C

Рис. 10

При подготовке 31-й Летней конференции международного математического Турнира городов И. И. Фролов показал, что эти треугольники перспективны с центром в точке F_ℓ. На конференции сербские школьники С. Гвоздич, А. Суботич, У. Цолович доказали гомотетичность этих треугольников (без информации о центре гомотетии), см. [9, с. 12, п. 3.11]. Таким образом, совместными усилиями гипотеза была доказана.

Как видно из теорем 7 и 8, существенный интерес представляет такой выбор точек P и Q на прямой ℓ, при котором вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$. Всегда ли на прямой ℓ можно выбрать такую пару точек? Эксперименты показывают, что такие точки существуют всегда, однако они не могут располагаться слишком далеко от точки O. Как можно точно описать положения точек P и Q, при которых справедливы аналоги теорем 7 и 8, авторам неизвестно.

Благодарности

Авторы благодарят П. В. Бибикова за постановку задачи и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.* Семейство Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 78–92.

[3] *Ивлев Ф. А.* Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 219–228.

[4] *Кожевников П. А., Швецов Д.* Обобщённая теорема Фейербаха // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады по математике 2013 года. М.: МЦНМО, 2014. С. 149–164.

[5] *Куланин Е. Д.* Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 164–182.

[6] *Попов В. Д.* Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 48–66.

[7] *Швецов Д.* От прямой Симсона к теореме Дроз — Фарни // Квант. 2010. № 6. С. 34–38.

[8] *Grinberg D.* Generalization of the Feuerbach point // http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html

[9] Об инверсных образах точки Фейербаха, полюсах треугольника и теореме Куланина // 31-я Летняя конференция Турнира городов, https://www.turgor.ru/lktg/2019/6-Inversions%20of%20the%20Feuerbach%20point/6-1ru-sol.pdf

Максим Игоревич Бидва, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
bidva.maxim@yandex.ru

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
andreyshevtsov2003@gmail.com

Формула и содержание

М. А. Горелов

В школьном курсе геометрии изучается достаточно много формул. Большинство из них очень простые. И это правильно. В данной статье рассказывается о чуть более сложной формуле. Но она содержит формулу Герона и теорему Птолемея, две формулы Эйлера, теорему Понселе и теорему Фейербаха, формулу Карно и формулу Стюарта, и многое другое. Такое богатство содержания свидетельствует о том, что эту формулу стоит если не запомнить, то, по крайней мере, иметь в виду.

Часть 1. Формула

В этой статье речь пойдёт о том, как алгебра помогает геометрии. Читатель, пожалуй, скажет: «Эка невидаль: в школьном курсе геометрии частенько приходится преобразовывать формулы, решать уравнения и т. п. Это не самая интересная часть геометрии». И в каком-то смысле он будет прав. Дело в том, что школьный курс алгебры гораздо беднее школьного курса геометрии. Но стоит добавить к нему совсем немножко, и алгебра становится мощным орудием, позволяющим решать довольно сложные геометрические задачи. Все используемые далее алгебраические факты можно найти в книгах [4, 5, 9] или [8].

Можно сказать, что алгебра — это искусство заменять сложные вычисления более простыми рассуждениями[1]. Об этом и пойдёт рассказ.

§ 1. Степень точки относительно окружности

Вначале напомним простой, но важный факт.

Пусть на плоскости задана окружность $\Omega(O, R)$ с центром O и радиусом R и точка A. Пусть прямая l, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках B и C. Тогда произведение длин отрезков AB и AC не зависит от выбора прямой l.

[1] По крайней мере, такая точка зрения имела право на существование в начале прошлого века. С тех пор само понятие «алгебра» стало значительно шире.

Упражнение 1. Докажите это утверждение, пользуясь теоремой Виета.

Указание. Важно правильно выбрать координату на прямой.

Пусть d — расстояние от точки A до центра O окружности Ω. Число $d^2 - R^2$ называется *степенью* точки A относительно окружности Ω.

Упражнения

2. Рассмотрим семейство квадратных трёхчленов вида $t^2 + pt + q$, график каждого из которых пересекает оси координат в трёх различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих трёх точках, проходят через одну точку.

3. Через две данные точки проведите окружность, высекающую на данной прямой хорду заданной длины.

4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

5. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что равенства $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ выполняются тогда и только тогда, когда H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника.

§ 2. Основная Формула

Обратимся к основному содержанию данной статьи. Пусть заданы треугольник ABC и точка D в его плоскости. Используем обычные обозначения $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ для сторон треугольника. Расстояния от точки D до вершин треугольника обозначим через $u = AD$, $v = BD$, $w = CD$ (рис. 1). Пусть также R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, S — его площадь, p — полупериметр.

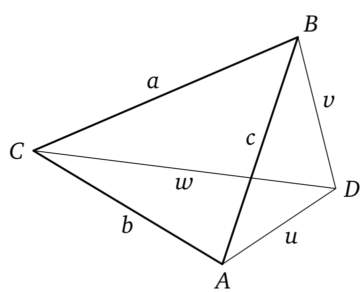


Рис. 1

Если заданы треугольник и расстояния u, v, w, то точка D определена однозначно. Значит, однозначно определено и расстояние d от этой точки до центра O описанной окружности треугольника ABC. Это расстояние даётся Формулой

$$16S^2(d^2 - R^2)^2 = (au + bv + cw)(au + bv - cw)(au - bv + cw)(-au + bv + cw). \quad (1)$$

Это равенство занимает в данной статье особое место, поэтому будем называть его Формулой (с большой буквы). То же равенство можно записать в ином виде:

$$16S^2(d^2-R^2)^2 = \\ = 2(a^2u^2b^2v^2 + a^2u^2c^2w^2 + b^2v^2c^2w^2) - (a^4u^4 + b^4v^4 + c^4w^4). \quad (2)$$

Поскольку в правой части Формулы (1) стоит произведение, можно назвать это равенство мультипликативной формой Формулы. Тогда равенство (2) естественно называть аддитивной формой Формулы, поскольку в её правой части стоит сумма. В разных случаях бывает удобнее та или другая форма.

Как запомнить Формулу (1)? В левой части фигурируют площадь треугольника ABC и степень точки D относительно описанной около него окружности. Посмотрим на правую часть. Четыре точки A, B, C и D можно тремя способами разбить на пары. Возьмём расстояния между точками из каждой пары разбиения и перемножим. Поскольку разбиений три, получим три произведения. Из них составляются суммы в скобках правой части по тому же принципу, что и в известной формуле Герона для площади треугольника.

Те же три произведения фигурируют и в правой части Формулы (2).

Сделаем одно важное замечание. В правую часть Формулы (1) все четыре точки A, B, C и D входят симметрично: если мы вместо треугольника ABC и точки D будем рассматривать треугольник ABD и точку C, то в левой части Формулы (1) будут фигурировать другая площадь и степень другой точки относительно другой окружности, а в правой части останется ровно то же произведение. Сказанное, разумеется, относится и к Формуле (2).

§ 3. Связь с формулой Герона

Приступим к доказательству Формулы. Будем доказывать её индуктивно. Начнём с самого естественного, пожалуй, частного случая. Пусть точка D совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABC.

Тогда $d=0$, $u=v=w=R$. И после очевидного сокращения формула (2) запишется в виде

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4). \quad (3)$$

Зафиксируем сторону a треугольника ABC и высоту h, опущенную на эту сторону. Тогда $16S^2=4a^2h^2$. Но треугольник не определяется этими двумя параметрами. Будем характеризовать треугольник расстоянием t от середины стороны BC до основания высоты, опущенной на эту сторону, приписывая этому расстоянию положительный знак, если основание высоты ближе к точке C, чем к точке B, и отрицательный в противном случае (рис. 2). Тогда по теореме Пифагора

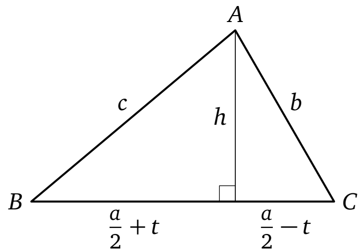


Рис. 2

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}+t\right)^2 \quad \text{и} \quad b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}-t\right)^2.$$

Остаётся подставить эти выражения в правую часть формулы (3) и упростить получившееся выражение.

Это уже несложно, но попробуем избежать этих вычислений.

Прежде всего заметим, что при подстановке в выражение

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \tag{4}$$

значений для b^2 и c^2 получится чётный многочлен $f(t)$ от переменной t. Действительно, при замене t на $-t$ значения b^2 и c^2 просто поменяются местами.

Чему равно $f(0)$? Очевидно, это значение записывается в виде однородного многочлена четвёртой степени от переменных a и h, в каждый из одночленов которого эти переменные входят в чётных степенях. Тогда его можно записать в виде $\lambda a^4 + \mu a^2h^2 + \tau h^4$ с какими-то коэффициентами λ, μ и τ. Попробуем определить эти коэффициенты. При $a = 0$ и $h = 1$ имеем $b = c = 1$ и выражение (4) равно нулю, а $\lambda a^4 + \mu a^2h^2 + \tau h^4 = \tau$. Значит, $\tau = 0$. Аналогично, при $a = 2$ и $h = 0$ будет $b = c = 1$ и выражение (4) обратится в нуль, поэтому $\lambda = 0$. Остаётся определить коэффициент μ. Взяв $a = 2$ и $h = 1$, получим $b^2 = c^2 = 2$, и выражение (4) будет равно 16, откуда $\mu = 4$, т. е. $f(0) = 4a^2h^2$.

Аналогичным образом можно убедиться, что $f(a/2) = 4a^2h^2$. А поскольку $f(t)$ — чётный многочлен, то и $f(-a/2) = 4a^2h^2$.

Наконец, взглянем на коэффициент при t^4 у многочлена $f(t)$. При подстановке значений для b^2 и c^2 в произведение b^2c^2 получим t^4 с коэффициентом 1. Также t^4 с коэффициентом 1 возникнет при подстановке выражений для b^2 и c^2 в слагаемые b^4 и c^4. В остальных слагаемых формулы (4) t^4 появиться не может. Значит, коэффициент при t^4 равен нулю. А поскольку многочлен $f(t)$ чётный, его степень не превосходит двух.

Но мы нашли три точки, в которых $f(t) = 4a^2h^2$. Значит, это равенство выполняется тождественно, что и требовалось доказать.

Замечание. Рациональный выбор «начала отсчёта» для переменной t позволил нам работать с чётным многочленом и тем самым сократить работу вдвое. Подобного рода мелочи при решении таких задач часто бывают крайне важными.

Рассуждения получились довольно длинными, поскольку я приводил их максимально подробно. При небольшом навыке все их можно воспроизвести в уме и очень быстро.

Упражнение 6. Докажите равенство

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)=\\ =(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Указание. При заданных b и c равенство достаточно доказать для пяти различных значений a. Как лучше выбрать эти пять значений?

Согласно формуле из последнего упражнения можно переписать равенство (3) в виде

$$16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Это равенство называют формулой Герона.

Кроме того, тождество из предыдущего упражнения доказывает эквивалентность формул (1) и (2).

Упражнение 7 [11, 1988 год, 1094]. Пусть a, b, c — неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства $a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ следует неравенство $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+ac+bc)$.

б) Верно ли обратное, т. е. следует ли из второго неравенства первое?

(*В. А. Сендеров*)

§ 4. Доказательство Формулы

Ещё один «особый» случай Формулы получается, когда точка D совпадает с одной из вершин треугольника ABC. Этот случай даже проще предыдущего. Например, если $D=C$, то $w=0$, $v=a$, $u=b$ и $d=R$. Поэтому левая часть Формулы (1) обращается в нуль, и в правой части этой формулы сразу две скобки равны нулю.

Таким образом, мы установили, что Формулы (1) и (2) верны для четырёх специально выбранных точек. Дальнейший план таков. Сначала мы установим, что эти формулы верны для точек, лежащих на нескольких специально выбранных прямых. А затем рассмотрим уже общий случай. Начнём с общих замечаний.

Рассмотрим произвольную прямую l в плоскости треугольника ABC и введём на ней координату, равную расстоянию от некоторой фиксированной точки P (со знаком). Если точка D имеет координату t, то расстояния u, v, w и d будут функциями t.

Посмотрим, как выглядят эти функции. Если h — расстояние от точки A до прямой l, а e — координата основания перпендикуляра, опущенного из точки A на l, то по теореме Пифагора

$$u = \sqrt{h^2 + (t-e)^2}.$$

Для нас важны два обстоятельства. Во-первых, u^2 — это приведённый квадратный трёхчлен. А во-вторых, эта функция всюду дифференцируема. (Эти утверждения верны и когда точка A лежит на прямой l. Для этого случая рассуждения лучше провести отдельно, но они совсем простые). То же, разумеется, верно и для функций v, w и d.

И ещё одно простое замечание. Пусть у нас есть функция

$$f(t) = f_1(t) f_2(t) f_3(t),$$

причём все три функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ дифференцируемы, а две последние из них обращаются в нуль при $t = t_0$. Тогда производная функции $f(t)$ равна нулю при $t = t_0$. Действительно, согласно правилу Лейбница

$$f'(t) = f_1'(t) f_2(t) f_3(t) + f_1(t) f_2'(t) f_3(t) + f_1(t) f_2(t) f_3'(t).$$

Пусть теперь прямая l проходит через точки B и C. Тогда в левой части Формулы (2) стоит многочлен четвёртой степени (от переменной t) со старшим коэффициентом $16S^2$. И в правой части этой Формулы стоит многочлен четвёртой степени. Его старший коэффициент равен

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

т. е. тоже $16S^2$.

Если t_C — координата точки C, то многочлен $d^2 - R^2$ обращается в нуль при $t = t_C$. Поэтому $t = t_C$ — кратный корень левой части Формулы (2). А поскольку правая часть этой Формулы равна правой части Формулы (1), она тоже обращается в нуль при $t = t_C$, причём вместе со своей производной (в силу замечания, сделанного выше). Поэтому $t = t_C$ — кратный корень правой части формулы (2).

Аналогичным образом доказывается, что если t_B — координата точки B, то $t = t_B$ — кратный корень и левой, и правой части Формулы (2).

Подведём итог. В левой и правой частях Формулы (2) стоят многочлены четвёртой степени. У этих многочленов одинаковые старшие коэффициенты и два общих кратных корня (т. е. как минимум четыре общих корня с учётом кратности). Следовательно, эти многочлены совпадают. А значит, Формулы (1) и (2) верны для любой точки, лежащей на прямой BC. То же, конечно, верно и для прямых AB и AC.

Пусть теперь прямая l проходит через точки O и C. Как и выше, можно заметить, что если t_C — координата точки C, то $t = t_C$ — общий кратный корень левой и правой частей Формулы (2). В предыдущем разделе показано, что эта Формула выполняется и в точке O. А ещё она верна в точке пересечения прямых OC и AB. Таким образом, в левой и правой частях Формулы (2) стоят многочлены четвёртой степени, имеющие с учётом кратности четыре общих корня. А поскольку их старшие коэффициенты совпадают, эти многочлены тождественно равны.

Таким образом, Формулы (1) и (2) верны для точек, лежащих на прямых OC, OB и OA.

Теперь можно рассмотреть общий случай. Фиксируем произвольную точку D и проведём через неё прямую l, не параллельную «выделенным» прямым OA, OB, OC, AB, AC, BC. Если мы введём на этой прямой координату t, то в левой и правой частях Формулы (2) будут стоять многочлены четвёртой степени, которые совпадают в шести точках пересечения прямой l с шестью «выделенными» прямыми. Значит, они совпадают во всех точках, в частности в точке D. Наша Формула доказана!

Другое алгебраическое доказательство Формулы можно найти в книге российского академика Якова Викторовича Успенского [10]. Оно, пожалуй, покороче, но использует теорию определителей. Ещё одно доказательство можно получить, сочетая векторную алгебру с идеями книги [2] (см. там задачу 183).

Часть 2. Содержание

Все рассматриваемые далее геометрические следствия доказанной Формулы имеют другие, в том числе и геометрические доказательства (см., например, [1, 3, 6, 7]). Многие результаты, используя специальные приёмы, можно доказать очень коротко и красиво. Нас в данном случае больше интересует общий метод, поэтому мы везде приводим алгебраические доказательства.

Есть общий принцип: если задачи из некоторого класса решаются неким универсальным методом, то для любой задачи этого класса, за редким исключением, можно найти другой метод, которым эта задача решается проще. В нашем случае это тоже так. Но разница между «универсальным» и «простым» решением в большинстве случаев оказывается меньше, чем можно было бы ожидать.

§ 5. Теорема Птолемея

В левой части формулы (1) стоит квадрат. Поэтому

$$(au+bv+cw)(au+bv-cw)(au-bv+cw)(-au+bv+cw) \geqslant 0.$$

Числа au, bv и cw положительны, поэтому отрицательной может оказаться не более чем одна скобка в левой части этого неравенства, а именно та, в которую с минусом входит наибольшее из чисел au, bv и cw. Но поскольку произведение неотрицательно, и эта скобка будет неотрицательной.

Итак, при любом положении точки D выполняется неравенство $au+cw \geqslant bv$. Оно носит имя Птолемея.

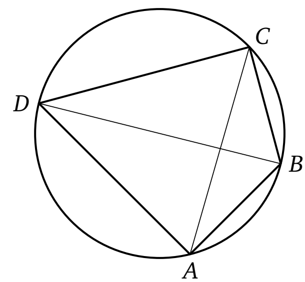


Рис. 3

Пусть точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$(au+bv+cw)(au+bv-cw)(au-bv+cw)(-au+bv+cw) = 0. \qquad (5)$$

Выясним, какая из скобок в этом равенстве обращается в нуль. Для определённости будем считать, что отрезки AC и BD пересекаются в своей внутренней точке (рис. 3).

Упражнения

8. Не ограничивая общности, можно считать, что к стороне AB примыкают углы четырёхугольника $ABCD$, большие или равные $\pi/2$. В этом предположении докажите, что последняя скобка в формуле (5) строго положительна.

9. При том же предположении докажите, что и вторая скобка в формуле (5) положительна.

Указание. Рассмотрите отдельно случаи $w \leqslant b$ и $w > b$.

10. Докажите знаменитую *теорему Птолемея*: произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

11. Выведите из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

12. Выведите из теоремы Птолемея теорему косинусов.

13. Получите из теоремы Птолемея формулу суммы синусов двух углов.

14. Докажите, что из всех треугольников с данной стороной AC и данным углом при вершине B наибольший периметр имеет равнобедренный.

15. Постройте вписанный четырёхугольник с заданными сторонами.

16 (VI Московская математическая олимпиада, 1940 г., второй тур, 7–8 класс, задача 2). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Доказать, что $DC = AD + BD$.

§ 6. Изопериметрическое неравенство

Остановимся на двух менее очевидных следствиях результатов, полученных в предыдущем параграфе. Начнём с неравенства Птолемея.

Докажем, что среди всех четырёхугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный.

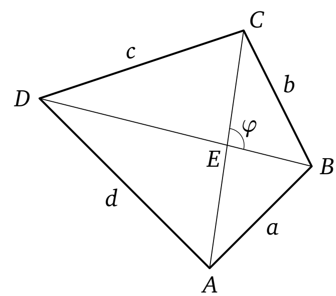


Рис. 4

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, E — точка пересечения его диагоналей AC и BD, $\angle BEC = \varphi$ (рис. 4).

По теореме косинусов для треугольников AEB, BEC, CED и AED получим

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \\ = 2(EA \cdot EB + EB \cdot EC + EC \cdot ED + ED \cdot EA)\cos\varphi.$$

Отсюда

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2(EA + EC)(EB + ED)\cos\varphi = 2AC \cdot BD \cos\varphi.$$

Поэтому для площади S четырёхугольника $ABCD$ имеем равенство

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot BD^2 - \frac{1}{16}(AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2.$$

Следовательно, по неравенству Птолемея

$$S^2 \leqslant \frac{1}{4}(AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2 - \frac{1}{16}(AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник вписанный.

Обозначив $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$, получим формулу для площади вписанного четырёхугольника

$$16S^2=4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$$

Имея опыт доказательства формулы Герона, можно предположить, что

$$4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d). \quad (6)$$

Для доказательства этого тождества заметим, что при $d=c$ и $d=-c$ получаем легко проверяемые тождества.

Упражнение 17. Выпишите их явно и докажите.

А при $d=a$, $d=-a$, $d=b$ и $d=-b$ получаются тождества, отличающиеся от этих двух только заменой переменных.

Таким образом, разность левой и правой частей тождества (6) — это многочлен от переменной d, имеющий шесть корней, степень которого не превосходит четырёх. Значит, он тождественно равен нулю, что и требовалось доказать.

Мы получили формулу Брахмагупты для площади вписанного четырёхугольника:

$$16S^2=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

В силу неравенства Коши отсюда следует $16S^2\leqslant(a+b+c+d)^4$, причём равенство достигается, если числа $a+b+c-d$, $a+b-c+d$, $a-b+c+d$ и $-a+b+c+d$ равны между собой, т. е. четырёхугольник — квадрат.

Подведём итоги. Площадь произвольного четырёхугольника меньше или равна площади вписанного четырёхугольника с теми же сторонам, а значит, с тем же периметром. А площадь вписанного четырёхугольника не превосходит площади квадрата с тем же периметром. Следовательно, среди всех четырёхугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Упражнения

18. Докажите тождество (6), используя формулу разности квадратов.

19. Докажите, что среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.

20. Докажите тождество

$$4(ac-bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=$$
$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d).$$

21. Разумеется, при фиксированном треугольнике ABC расстояния u, v, w от точки D до его вершин не могут быть независимыми. Данную зависимость можно выразить как равенство нулю некоторого многочлена от переменных a, b, c, u, v, w. Доказанных тождеств достаточно, чтобы убедиться в этом. Проверьте!

§ 7. Формула Карно

Пусть задан треугольник ABC, d_a, d_b, d_c — расстояния от центра O описанной окружности до сторон $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$ соответственно.

Докажем, что если треугольник остроугольный, то

$$d_a + d_b + d_c = R + r.$$

Пусть D_a, D_b, D_c — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны BC, AC, AB.

Применим равенство Птолемея к четырёхугольнику AD_bOD_c:

$$AO \cdot D_bD_c = AD_b \cdot OD_c + AD_c \cdot OD_b,$$

или

$$R \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_c + \frac{c}{2} \cdot d_b.$$

Аналогично

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_c + \frac{c}{2} \cdot d_a \quad \text{и} \quad R \cdot \frac{c}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_a + \frac{a}{2} \cdot d_b.$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$R \cdot \frac{a+b+c}{2} = d_a \frac{b+c}{2} + d_b \frac{a+c}{2} + d_c \frac{a+b}{2},$$

или

$$Rp = (d_a + d_b + d_c)p - \left(\frac{d_a a}{2} + \frac{d_b b}{2} + \frac{d_c c}{2}\right).$$

Остаётся заметить, что

$$\frac{d_a a}{2} + \frac{d_b b}{2} + \frac{d_c c}{2}$$

— это площадь треугольника, равная pr. Отсюда следует нужное равенство $d_a + d_b + d_c = R + r$.

Если угол C треугольника тупой, то выполнено равенство

$$d_a + d_b - d_c = R + r.$$

Упражнения

22. Докажите это равенство.

23. Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

24. Если вписанный многоугольник разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники, то сумма радиусов вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от способа разрезания.

25 (П. Эрдёш). Пусть h — длина наибольшей высоты остроугольного треугольника. Докажите, что $h \geqslant R + r$.

§ 8. Теорема Эйлера

Но вернёмся к нашей Формуле. Опустим из точки D перпендикуляры DD_a, DD_b, DD_c на прямые BC, AC, AB соответственно.

Упражнение 26. Докажите, что стороны треугольника $D_aD_bD_c$ равны $\frac{au}{2R}$, $\frac{bv}{2R}$, $\frac{cw}{2R}$ (используются обозначения рис. 1, с. 84).

По формуле Герона площадь Σ треугольника $D_aD_bD_c$ удовлетворяет условию

$$256\Sigma^2R^4 = (au + bv + cw)(au + bv - cw)(au - bv + cw)(-au + bv + cw).$$

Но тогда по Формуле (1) имеем

$$256\Sigma^2R^4 = 16S^2(d^2 - R^2)^2.$$

Отсюда $\Sigma = \frac{S}{4R^2}|d^2 - R^2|$. Этот результат принадлежит Эйлеру.

Вот первое следствие этого результата.

Пусть точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\Sigma = 0$, т. е. точки D_a, D_b, D_c лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона точки D относительно треугольника ABC.

§ 9. Ещё одна формула Эйлера

Получим ещё одно следствие. Но сначала простой вспомогательный результат.

Упражнение 27 (LX Московская математическая олимпиада, 1997 г., 11 класс, задача 1). На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты

точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна
$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$
где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

(*А. Заславский*)

Указание. Воспользуйтесь формулой $S = \frac{abc}{4R}$.

Применим этот результат к случаю, когда D_c, D_a, D_b — проекции центра I вписанной окружности треугольника ABC. Тогда
$$AD_b = AD_c = p - a, \quad BD_a = BD_c = p - b, \quad CD_a = CD_b = p - c.$$
Соответственно
$$x = \frac{p-a}{c}, \quad 1-x = \frac{p-b}{c}, \quad y = \frac{p-b}{a}, \quad 1-y = \frac{p-c}{a}, \quad z = \frac{p-c}{b}, \quad 1-z = \frac{p-a}{b}.$$
Следовательно,
$$\frac{\Sigma}{S} = 2\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = 2\frac{S^2}{pabc} = 2\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{abc} = 2r \cdot \frac{1}{4R}.$$

По теореме Эйлера из § 8 для $d = IO$ имеем
$$d^2 = R^2 - 4R^2\frac{\Sigma}{S}$$
(в этом случае $d < R$). Окончательно имеем
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$
Это знаменитая формула Эйлера. Иногда её записывают в виде
$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Упражнения

28. Докажите эквивалентность этих двух формул.

29. Докажите, что площадь Σ треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис треугольника ABC, равна
$$\frac{2Sabc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

30. Докажите, что площадь Σ треугольника, образованного основаниями высот треугольника ABC, равна $2S\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, где α, β, γ — углы треугольника.

31. Найдите расстояние между ортоцентром H треугольника ABC и центром O описанной около него окружности.

32. Докажите, что площадь Σ треугольника, образованного проекциями точки пересечения медиан треугольника ABC на его стороны, равна

$$\frac{4}{9}S^3\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}.$$

33. Докажите, что квадрат расстояния между точкой G пересечения медиан треугольника ABC и центром O описанной около него окружности равен

$$R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

34 (Олимпиада им. Шарыгина, 2006 г., заочный тур, задача 21). На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC}S^2_{A'B'C'}\geqslant 4S_{AB'C'}S_{A'BC'}S_{A'B'C}.$$

(*А. Заславский*)

35. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ не превосходит площади треугольника $A'B'C'$.

36. Докажите, что диаметр вписанной окружности треугольника не превосходит радиуса описанной окружности того же треугольника.

§ 10. Теорема Понселе для треугольника

Теорема Понселе для случая треугольника в известном смысле обратна к теореме Эйлера из § 9. Как часто бывает в геометрии, обратное утверждение удобно доказывать с использованием прямого. В данном случае это тоже так. Но нужна ещё алгебраическая техника.

Интересующая нас теорема звучит следующим образом.

Теорема Понселе. *Пусть заданы окружность Ω радиуса R и окружность ω радиуса r, расстояние d между центрами которых удовлетворяет условию $d^2=R^2-2Rr$. Тогда для любой точки A окружности Ω найдутся такие точки B и C, что треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан около окружности ω.*

Доказательство. Пусть A — произвольная точка окружности Ω. Поскольку

$$d^2=R^2-2Rr<R^2-2Rr+r^2=(R-r)^2,$$

выполняется неравенство $d < R - r$. Значит, вся окружность Ω, и в частности точка A, лежит вне окружности ω.

Проведём из точки A две касательные к окружности ω и обозначим точки их пересечения с окружностью Ω, отличные от A, через B и C. Пусть вписанная окружность ϖ треугольника ABC имеет центр J и радиус ρ. Нужно доказать, что окружности ω и ϖ совпадают.

Центр I окружности ω и точка J лежат на биссектрисе l угла BAC. Будем характеризовать положение точки T на этой прямой её расстоянием t от точки A.

Пусть O — центр окружности Ω. Рассмотрим функцию

$$f(t) = R^2 - 2Rh - TO^2,$$

где h — расстояние от точки T до прямой AB. Очевидно, величина h линейно зависит от t (а именно, $h = t \sin\delta$, где $\delta = \angle BAI$). Если обозначить через e расстояние от точки A до основания перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, а через g — длину этого перпендикуляра, то по теореме Пифагора $TO^2 = (t-e)^2 + g^2$. Поэтому $f(t)$ — квадратный трёхчлен.

По условию он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой I (в этом случае $h = r$, а $TO^2 = R^2 - 2Rr$). Согласно формуле Эйлера он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой J (в этом случае $h = \rho$, а $TO^2 = R^2 - 2R\rho$). И ещё, очевидно, он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой A (теперь $h = 0$, а $TO = R$).

Поскольку многочлен $f(t)$ отличен от тождественного нуля, две из этих трёх точек должны совпадать. Точка I лежит внутри окружности ω, а точка A — вне её. Значит, I отлична от A. По аналогичным причинам J отлична от A. Значит, I совпадает с J.

Окружности ω и ϖ имеют общий центр и касаются сторон угла BAC. Значит, они совпадают. Теорема доказана. $\square$

§ 11. Формула Стюарта

Вновь вернёмся к нашей Формуле. Если точка D лежит на прямой BC, то её положение однозначно определяется расстояниями $BD = v$ и $CD = w$. В частности, расстояния v и w определяют расстояние $AD = u$. Попробуем найти эту зависимость.

Упражнения

37. Чему равна в рассматриваемом случае степень точки D относительно описанной окружности треугольника ABC?

38. Выведите из Формулы (6) формулу Стюарта:

$$u^2 = \frac{b^2v + c^2w - avw}{a}.$$

Указание. Выразите площадь треугольника ABC через длины его сторон и разложите разность левой и правой частей Формулы на множители.

39. Докажите, что длина медианы треугольника со сторонами a, b, c, проведённой к стороне a, равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

40. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, D — произвольная точка. Докажите, что

$$9DM^2 = 3(DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Указание. Докажите это индуктивно: сначала для случая, когда точка D совпадает с вершиной или серединой стороны треугольника, потом для точек D, лежащих на прямых, содержащих стороны треугольника, и, наконец, для точек общего положения.

41 (Г. В. Лейбниц). Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, D — произвольная точка. Докажите, что

$$3DG^2 = (DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AG^2 + BG^2 + CG^2).$$

42. Известны стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A, B и C. Найдите расстояние от точки D до ортоцентра.

43. Докажите, что длина биссектрисы треугольника со сторонами a, b, c, проведённой к стороне a, равна

$$\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}.$$

44. Зная стороны треугольника, найдите расстояния от центра вписанной в него окружности до его вершин.

45. Зная стороны треугольника, найдите расстояние от точки пересечения медиан до центра вписанной окружности этого треугольника.

46. Докажите, что расстояние от центра вписанной окружности треугольника до его ортоцентра равно $2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C$.

47 (Э. Чезаро). Докажите, что площадь треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис, равна произведению длин биссектрис, делённому на удвоенный периметр исходного треугольника.

48. Зная стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A и B, найдите расстояние от точки D до точки касания вписанной окружности треугольника со стороной AB.

49. Известны стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A, B и C. Найдите степень точки D относительно вписанной окружности треугольника.

§ 12. Теорема Пурсера

Докажем следствие теоремы Птолемея, являющееся одновременно её обобщением.

Теорема Пурсера. *Пусть даны треугольник ABC и окружность ω. Обозначим через x, y, z длины касательных, проведённых из точек A, B, C к окружности ω. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу.*

Доказательство. Пусть окружность ω касается описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Рассмотрим случай, когда окружность ω лежит внутри окружности Ω (рис. 5).

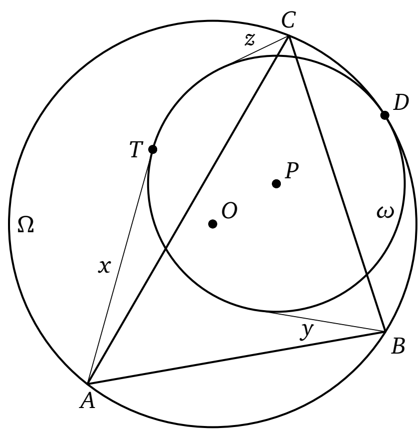


Рис. 5

Пусть ρ — радиус окружности ω, P — её центр, AT — касательная к ней, а остальные обозначения стандартны.

По теореме косинусов для треугольников AOD и AOP имеем

$$AD^2 = u^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\varphi,$$

$$AP^2 = R^2 + (R-\rho)^2 - 2R(R-\rho)\cos\varphi,$$

где φ — величина угла AOD. Отсюда

$$AP^2 = 2R^2 - 2R\rho + \rho^2 - (2R^2 - u^2)\frac{R-\rho}{R} = \rho^2 - u^2\frac{\rho}{R} + u^2.$$

Теперь по теореме Пифагора

$$AT^2 = x^2 = AP^2 - \rho^2 = u^2\Big(1 - \frac{\rho}{R}\Big), \quad \text{или} \quad x = u\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}.$$

Аналогично

$$y = v\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}, \quad z = w\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}.$$

Если точка D расположена так, что отрезки AD и BC пересекаются во внутренней точке, то $au = bv + cw$. Это равенство отличается от равенства $ax = by + cz$ только множителем $\sqrt{1 - \rho/R}$.

Упражнение 50. Рассмотрите самостоятельно случай, когда окружность ω касается окружности Ω внешним образом.

Обратное утверждение следует из прямого, и вновь в этом помогает алгебра.

Пусть сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу. Тогда

$$(ax + by + cz)(ax + by - cz)(ax - by + cz)(-ax + by + cz) =$$
$$= 2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4) = 0.$$

Обозначим расстояния AP, BP, CP через x_0, y_0, z_0. Тогда по теореме Пифагора

$$x^2 = x_0^2 + \rho^2, \quad y^2 = y_0^2 + \rho^2, \quad z^2 = z_0^2 + \rho^2$$

и, значит,

$$2\big(a^2(x_0^2 + \rho^2)b^2(y_0^2 + \rho^2) +$$
$$+ a^2(x_0^2 + \rho^2)c^2(z_0^2 + \rho^2) + b^2(y_0^2 + \rho^2)c^2(z_0^2 + \rho^2)\big) -$$
$$- \big(a^4(x_0^2 + \rho^2)^2 + b^4(y_0^2 + \rho^2)^2 + c^4(z_0^2 + \rho^2)^2\big) = 0.$$

При фиксированных положениях точек A, B, C и P это биквадратное уравнение относительно ρ. Такое уравнение имеет не более двух положительных корней. Но в силу доказанного «прямого» утверждения два корня мы знаем. В самом деле, если ω' и ω'' — две окружности с центром P, касающиеся окружности Ω, то их радиусы — корни данного уравнения. Значит, окружность ω совпадает с одной из окружностей ω' или ω'', что и требовалось доказать. □

Упражнение 51. Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка P — центр окружности Ω.

§ 13. Теорема Фейербаха

Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB, а A_0, B_0, C_0 — середины этих сторон. Тогда $AC_1 = p - a$, $AC_0 = c/2$ и

$$z = C_0C_1 = |AC_1 - AC_0| = \left|\frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2}.$$

Аналогично

$$x = A_0A_1 = \frac{|b-c|}{2}, \quad y = B_0B_1 = \frac{|a-c|}{2}.$$

Если $a \geqslant b \geqslant c$, то

$$2(ax - by + cz) = a(b-c) - b(a-c) + c(a-b) = 0.$$

Аналогично проверяется, что и при других соотношениях сторон треугольника ABC сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу.

Следовательно, по теореме Пурсера, применённой к треугольнику $A_0B_0C_0$ и вписанной окружности треугольника ABC, вписанная окружность треугольника ABC касается описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$ (её называют окружностью девяти точек треугольника ABC).

Это является содержанием теоремы Фейербаха.

Упражнение 52. Докажите, что окружность девяти точек треугольника ABC касается его вневписанных окружностей.

§ 14. Обобщение формулы

Докажем ещё одно следствие нашей Формулы, являющееся одновременно её обобщением.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC; S — его площадь; u, v, w — расстояния от точек A, B, C до точки D; ω — окружность с центром в точке D радиуса ρ; x, y, z — длины касательных, проведённых из точек A, B, C к окружности ω; d — расстояние от точки D до центра описанной окружности Ω треугольника ABC; R — радиус окружности Ω.

Рассмотрим выражение

$$2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4).$$

По теореме Пифагора его можно записать как многочлен от переменной ρ^2:

$$\varphi(\rho^2) = 2\big(a^2(u^2-\rho^2)b^2(v^2-\rho^2) + a^2(u^2-\rho^2)c^2(w^2-\rho^2) + \\ + b^2(v^2-\rho^2)c^2(w^2-\rho^2)\big) - \big(a^4(u^2-\rho^2)^2 + b^4(v^2-\rho^2)^2 + c^4(w^2-\rho^2)^2\big).$$

Очевидно, это квадратный трёхчлен. По теореме Пурсера он обращается в нуль при $\rho^2 = (d-R)^2$ и $\rho^2 = (d+R)^2$. Значит, его можно записать в виде

$$\varphi(\rho^2) = k(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2),$$

где k — некоторая константа.

Для её определения есть ещё одно известное значение многочлена φ : при $\varrho = 0$ согласно основной Формуле имеем $\varphi(0) = 16S^2(d^2 - R^2)^2$. Отсюда $k = 16S^2$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}16S^2(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) &= \\ &= 2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}16S^2(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) &= \\ &= (ax+by+cz)(ax+by-cz)(ax-by+cz)(-ax+by+cz).\end{aligned}$$

Очевидно, наша основная Формула получается из этой при $\rho = 0$.

Полезно преобразовать левую часть. Раскрыв скобки, получим

$$(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) = \rho^4 + R^4 + d^4 - 2(\rho^2R^2 + \rho^2d^2 + R^2d^2).$$

Справа стоит знакомое выражение — это умноженная на минус 16 площадь «треугольника» со сторонами ρ, R и d. Разумеется, переменные ρ, R и d могут меняться достаточно произвольно и далеко не всегда из отрезков длиной ρ, R и d можно составить треугольник, но алгебраическая форма остаётся хорошо знакомой.

Упражнение 53 (Дж. Кэйси). Даны четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Пусть δ_{ij} — длина общей внешней касательной к окружностям ω_i и ω_j. Докажите, что окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 касаются внешним образом некоторой окружности Ω тогда и только тогда, когда

$$\delta_{12}\delta_{34} \pm \delta_{13}\delta_{34} \pm \delta_{14}\delta_{23} = 0$$

(при некотором выборе знаков плюс и минус).

§ 15. Ещё раз о формуле Эйлера

С помощью только что доказанного результата можно, например, ещё раз вывести формулу Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Длины касательных, проведённых из вершин треугольника ко вписанной в него окружности, равны $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Упражнения

54. В этих переменных обобщённая формула из предыдущего раздела, применённая к вписанной и описанной окружностям треугольника, имеет вид

$$16S^2(r^2-(d-R)^2)(r^2-(d+R)^2)=16(xyz)^2(xy+xz+yz).$$

Убедитесь в этом.

55. Выведите из этой формулы равенство

$$d^4+R^4+r^4-2d^2R^2-2d^2r^2-2R^2r^2=r^3(4R+r).$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной d^2. Его дискриминант равен

$$4\big((R^2+r^2)^2-(R^2-r^2)^2+r^3(4R+r)\big)=4r^2(2R+r)^2.$$

Поэтому уравнение имеет два корня $d^2=R^2-2Rr$ и $d^2=R^2+2Rr+2r^2$.

Вписанная окружность лежит внутри описанной, значит, внутри описанной окружности лежит и центр вписанной. Поэтому $d^2<R^2$. Отсюда получаем окончательный результат: $d^2=R^2-2Rr$.

Упражнение 56. Разберитесь, откуда взялся «лишний» корень?

§ 16. Вписанно-описанные четырёхугольники

Пусть четырёхугольник вписан в окружность Ω радиуса R и описан около окружности ω радиуса r. Тогда согласно теореме Фусса расстояние d между центрами этих окружностей удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}. \qquad (7)$$

Это уже достаточно сложная теорема. Покажем, как её можно доказать с использованием обобщённой Формулы. Для этого преобразуем доказываемое равенство.

Приведём разность левой и правой частей к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}-\frac{1}{r^2}=\frac{2(R^2r^2+R^2d^2+r^2d^2)-R^4-d^4}{(R+d)^2(R-d)^2r^2}. \qquad (8)$$

Нужно доказать, что

$$R^4+d^4-2(R^2r^2+R^2d^2+r^2d^2)=0.$$

Здесь уже хорошо просматривается левая часть обобщённой формулы (без одного слагаемого).

Пусть задан вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $a=BC$, $w=CD$, $u=DA$, $c=AB$ и диагоналями $b=AC$ и $v=BD$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Поэтому для доказательства нужного результата можно выразить через стороны четырёхугольника радиус r, площадь S треугольника ABC и длины касательных x, y, z, проведённых из точек A, B и C к окружности ω, и применить обобщённую Формулу. Ввиду сказанного выше, нужно будет доказать, что

$$16S^2r^4 = (ax+by+cz)(ax+by-cz)(ax-by+cz)(-ax+by+cz). \quad (9)$$

Приступим к реализации этой программы. Первый шаг простой и стандартный.

Во-первых, четырёхугольник $ABCD$ вписанный, поэтому применима формула Брахмагупты, согласно которой площадь Σ этого четырёхугольника удовлетворяет равенству

$$16\Sigma^2 = (a+c+u-w)(a+c+w-u)(a+u+w-c)(c+u+w-a).$$

Во-вторых, четырёхугольник описанный, значит, $a+u=c+w$, откуда $\Sigma^2 = acuw$. В-третьих, для описанного четырёхугольника верна простая формула $2\Sigma = (a+c+u+w)r$. Отсюда

$$r^2 = \frac{4acuw}{(a+c+u+w)^2}.$$

Найдём сторону b треугольника ABC. По теореме Птолемея $bv=au+cw$. С другой стороны, сравнивая площади, легко установить, что

$$\frac{b}{v} = \frac{aw+cu}{ac+uw}.$$

Отсюда

$$b^2 = \frac{(au+cw)(aw+cu)}{ac+uw}.$$

Теперь для вычисления площади S можно использовать формулу Герона. Но в данном случае удобна не аддитивная и не мультипликативная, а «промежуточная» форма. Перепишем её в виде

$$16S^2 = \Big(((a+c)+b)((a+c)-b)\Big)\Big((b+(a-c))(b-(a-c))\Big).$$

Теперь можно написать

$$16S^2 = ((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2).$$

Упражнение 57. Докажите, что
$$S^2 = \frac{a^3c^3uw}{(ac+uw)^2}.$$

Займёмся вычислением длин касательных x, y, z. Не ограничивая общности, можно считать, что A — меньший угол четырёхугольника $ABCD$, а B — меньший из двух соседних с ним углов. Поскольку четырёхугольник вписанный, оба эти угла не превосходят $\pi/2$. Если оба угла равны $\pi/2$, то $ABCD$ — прямоугольник. А единственный описанный прямоугольник — это квадрат. Для него доказываемая формула (7) проверяется легко. Поэтому можно считать, что сумма углов DAB и ABC меньше π.

В таком случае лучи AD и BC пересекаются. Обозначим точку их пересечения буквой E, а длины отрезков AE и BE — буквами e и f.

Упражнение 58. Докажите, что
$$x = \frac{cu}{c+w}, \quad y = \frac{ca}{c+w}, \quad z = a - y = \frac{aw}{c+w}.$$

Теперь можно заняться правой частью обобщённой формулы.

Упражнение 59. Докажите, что правая часть формулы (9) равна
$$\frac{a^4c^4 \cdot 4u^2w^2 \cdot 4acuv}{(c+w)^4(ac+uw)^2}.$$

Указание. Здесь опять удобнее «промежуточная» форма. Как нужно разбить четыре скобки в правой части формулы (9) на пары?

Как следует из вышесказанного, левая часть формулы (9) равна
$$16\frac{a^3c^3uw}{(ac+uw)^2} \cdot \frac{16(acuw)^2}{(a+c+u+w)^4}.$$
Остаётся заметить лишь, что, поскольку четырёхугольник $ABCD$ описанный, выполняется равенство $a+c+u+w = 2(c+w)$. Формула доказана.

Упражнение 60. Четырёхугольник вписан в окружность радиуса R и описан около окружности радиуса r. Докажите, что $2r^2 \leqslant R^2$.

§ 17. Теорема Понселе для четырёхугольника

Утверждение, обратное к теореме Фусса и носящее название теоремы Понселе, может быть сформулировано следующим образом.

Пусть расстояние d между центрами окружности Ω с центром O и радиусом R и окружности ω с центром I и радиусом r удовлетворяет условию (7). Тогда для любой точки A окружности Ω найдётся четырёхугольник, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω, для которого точка A является вершиной.

Доказательство этого утверждения основано на той же идее, что и доказательство аналогичного утверждения для треугольника, но есть и некоторые нюансы. Их мы и обсудим.

В силу формулы (8) условие (7) равносильно условию

$$R^4 + d^4 - 2(R^2r^2 + R^2d^2 + r^2d^2) = 0. \tag{10}$$

Пусть окружности Ω и ω удовлетворяют этому условию.

Упражнение 61. Убедитесь, что окружность ω лежит внутри окружности Ω.

Выберем на окружности Ω произвольную точку A. Проведём из неё касательные к окружности ω, вторично пересекающие окружность Ω в точках B и D соответственно. Пусть точка C движется по дуге BD окружности Ω, не содержащей точки A, от точки B к точке D. Когда C совпадает с B, выполняется неравенство $AB+CD>AD+BC$, а когда точка C дойдёт до точки D, будет выполняться неравенство $AB+CD<AD+BC$. Значит, при некотором промежуточном положении точки C будет выполнено равенство $AB+CD=AD+BC$. Зафиксируем точку C именно в этом положении. Тогда в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность ϖ. Пусть J — её центр, а ρ — её радиус. Нужно доказать, что точка J совпадает с точкой I.

Так как окружности ω и ϖ касаются прямых AB и AD, точки A, I и J лежат на одной прямой l. Введём на этой прямой координату t так, чтобы точка A имела нулевую координату, а координаты точек прямой, лежащих внутри окружности Ω, были положительны.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = R^4 + TO^4 - 2(R^2h^2 + R^2TO^2 + r^2TO^2),$$

где T — точка с координатой t, а h — расстояние от этой точки до прямой AB. Если обозначить через δ угол BAI, а через e обозначить расстояние от точки A до основания перпендикуляра, опущенного из центра O на прямую l, то $h = t\sin\delta$, а $TO^2 = (t-e)^2 + R^2 - e^2$. В отличие от случая треугольника, теперь придётся немножко посчитать.

Используя только что полученные формулы, найдём, что

$$f(t) = ((1-2\sin^2\delta)t^2 - 4e(1-\sin^2\delta)t - 4(R^2\sin^2\delta - e^2)).$$

Как и в случае треугольника, непосредственно проверяется, что координаты точек I и J — положительные корни этого многочлена. Но полученный квадратный трёхчлен в общем случае может иметь два корня. Поэтому тут нужно разобраться подробно.

Коэффициент при t у этого квадратного трёхчлена всегда неположителен. Поэтому если $1-2\sin^2\delta<0$, сумма корней этого трёхчлена неположительна и он имеет не более одного положительного корня. Значит, точки I и J совпадают, и для данного случая теорема доказана.

Случай $1-2\sin^2\delta=0$ ещё проще. Остаётся разобраться со случаем $1-2\sin^2\delta>0$. Будем считать, что $d>0$.

Упражнение 62. Разберите случай $d=0$ самостоятельно.

Пусть прямая OI пересекает окружность Ω в точках B_0 и D_0, причём обозначения выбраны так, что точка I лежит между точками O и B_0 (рис. 6).

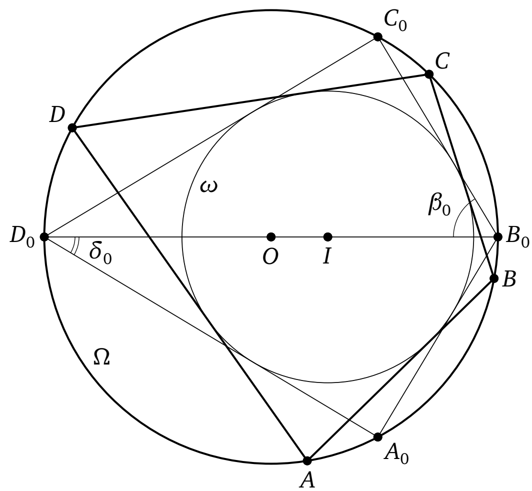


Рис. 6

Синус угла β_0 между касательной к окружности ω, проведённой из точки B_0, и прямой OI равен $r/(R-d)$. Условие (10) может быть переписано в виде

$$R^4+d^4-2R^2d^2=2r^2(R^2+d^2), \quad \text{или} \quad (R-d)^2(R+d)^2=2r^2(R^2+d^2).$$

Поэтому имеем

$$\frac{2r^2}{(R-d)^2}=\frac{(R+d)^2}{R^2+d^2}.$$

Правая часть этой формулы больше 1, значит, $1-2\sin^2\beta_0<0$.

Аналогично доказывается, что удвоенный квадрат синуса угла между касательной, проведённой из точки D_0 к окружности ω, и прямой OI меньше 1.

Упражнение 63. Убедитесь в этом.

Поэтому на (любой) дуге B_0D_0 окружности Ω найдётся такая точка A_0, что угол δ_0 между касательной, проведённой из этой точки к окружности ω, и прямой OI удовлетворяет равенству $1-2\sin^2\delta_0=0$.

Для случая, когда точка A совпадает с точкой A_0, теорема Понселе уже доказана, т. е. существует четырёхугольник с вершиной в этой точке, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω. Нетрудно видеть, что это четырёхугольник $A_0B_0C_0D_0$, где C_0 — точка, симметричная точке A_0 относительно прямой OI.

Точки A_0 и C_0 разбивают окружность Ω на две дуги: для точек A, лежащих на первой из них, выполняется неравенство $1-2\sin^2\delta<0$, а для точек, лежащих на второй, — неравенство $1-2\sin^2\delta>0$.

Пусть точка A лежит на второй дуге. Проведём из неё касательную к окружности ω. Она пересечёт окружность Ω в некоторой точке B, лежащей на первой дуге. В силу уже доказанного, существует четырёхугольник, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω, для которого точка B является вершиной. Очевидно, для этого четырёхугольника и точка A будет вершиной. Это завершает доказательство.

§ 18. Вишенка на торт

Всё изложенное выше давно и хорошо известно. А можно ли получить что-нибудь новое? Вот одна из идей.

Известно большое число неравенств для сторон треугольника. Как мы видели в начале второй части (с. 90), выполняются неравенства

$$(au+bv-cw)\geqslant 0,\quad (au-bv+cw)\geqslant 0,\quad (-au+bv+cw)\geqslant 0,$$

т. е. числа au, bv, cw измеряют стороны некоторого треугольника (возможно, вырожденного). Если конкретизировать положение точки D, то можно из известного неравенства получить новое. Вот как это работает в простейшем случае.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Тогда выполняются неравенства $|a-b|<c$, $|a-c|<b$, $|b-c|<a$. Возведя эти неравенства в квадрат и сложив, получим

$$|a-b|^2+|a-c|^2+|b-c|^2<a^2+b^2+c^2,$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2<a^2+b^2+c^2,$$

или

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc).$$

А поскольку $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, имеем

$$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2. \tag{11}$$

Оттолкнёмся от этого неравенства. Выберем на плоскости произвольную точку D, проведём из неё три луча так, чтобы углы между ними были равны $2\pi/3$, и отложим на них отрезки DA, DB, DC длиной u, v, w. Получим треугольник со сторонами $\sqrt{u^2+uv+v^2}$, $\sqrt{u^2+uw+w^2}$, $\sqrt{v^2+vw+w^2}$ (для него точка D является точкой Торичелли). Но тогда и числа $w\sqrt{u^2+uv+v^2}$, $v\sqrt{u^2+uw+w^2}$, $u\sqrt{v^2+vw+w^2}$ выражают длины сторон некоторого треугольника (в данном случае точка D не лежит на описанной окружности, поэтому треугольник невырожденный). Подставив их в только что доказанное неравенство, получим неравенство

$$\begin{aligned}4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+2uvw(u+v+w) &< \\ < \left(u\sqrt{v^2+vw+w^2}+v\sqrt{u^2+uw+w^2}+w\sqrt{u^2+uv+v^2}\right)^2&,\end{aligned}$$

справедливое для всех положительных чисел u, v, w.

Пусть теперь D — точка пересечения медиан треугольника со сторонами a, b, c. Тогда числа am_a, bm_b, cm_c выражают длины сторон некоторого другого треугольника. Подставим их в наше неравенство и выразим медианы через стороны по формулам

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Получим неравенство

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) \leqslant (am_a+bm_b+cm_c)^2,$$

или

$$32S^2 + (a^4+b^4+c^4) < 2(am_a+bm_b+cm_c)^2.$$

Из только что доказанного неравенства можно получить два неравенства, справедливые для всех положительных чисел. Можно использовать стандартную замену переменных $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$. А можно выразить длины сторон и медианы треугольника через расстояния от точки Торичелли до его вершин.

Есть ещё два направления для развития этой темы.

Выше для получения новых неравенств использовались точка Торичелли и точка пересечения медиан треугольника. Можно рассмотреть вместо них точки пересечения высот или биссектрис треугольника. Эти случаи несложны, но при этом получаются результаты, которые, пожалуй, проще получить другим способом. Однако можно рассмотреть другие, более экзотические, замечательные точки треугольника: точку Лемуана, точку Нагеля и т. д.

Кроме того, вместо неравенства (11) можно использовать другие неравенства для сторон треугольника. Начать можно с задач M7, M559, M727, M840, M852, M1107, M1317, M1333, M1439 из «Задачника „Кванта“» [11].

Пожалуй, основная проблема состоит в том, что в большинстве случаев получаются достаточно сложные неравенства. Поэтому нужно постараться либо найти случаи, когда получаются неравенства попроще, либо упростить получающиеся неравенства за счёт их ослабления. И то и другое требует определённых усилий. Но это хороший повод освоить алгебраическую технику, которой посвящена данная статья.

Список литературы

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.

[2] *Балк М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1987.

[3] *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[4] *Гашков С. Б.* Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М.: МЦНМО, 2006.

[5] *Гельфанд И. М., Шень А.* Алгебра. М.: МЦНМО, 2009.

[6] *Ефремов Д. Д.* Новая геометрия треугольника. М.: Ленанд, 2015.

[7] *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.

[8] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: Физматлит, 1994.

[9] *Шафаревич И. Р.* Избранные главы алгебры: учебное пособие для школьников. М.: Фонд математического образования и просвещения, 2000.

[10] *Uspensky J. V.* Theory of Equations. New York: McGraw-Hill, 1948.

[11] Задачник «Кванта» по математике. `http://www.kvant.info/zkm_tex/zkm_main.pdf`

Михаил Александрович Горелов, ФИЦ ИУ РАН

griefer62@gmail.com

Наш семинар: математические сюжеты

Алгебраические числа как векторы

А. Л. Канунников

В геометрии мы привыкли складывать *векторы* и умножать их на *скаляры* (числа), вновь получая векторы. Этот геометрический язык часто оказывается полезным в совершенно не геометрических ситуациях. В этой статье мы рассмотрим в качестве векторов *алгебраические числа* — так называются корни многочленов с рациональными коэффициентами. Сами же рациональные числа будут выступать в роли скаляров.

Для понимания статьи понадобятся начальные сведения о комплексных числах и многочленах (главное — уметь извлекать корни из комплексных чисел и делить многочлены с остатком). Рекомендуем по ходу чтения решать задачи, в конце статьи к ним приведены решения.

§ 1. Линейная независимость чисел

Начнём с простого примера. Как известно со времён древних греков, число $\sqrt{2}$ иррационально. Геометрически это можно сформулировать так: *«векторы» 1 и $\sqrt{2}$ не пропорциональны ни с каким рациональным коэффициентом*. Давайте тогда *натянем* на эти векторы «плоскость» — множество $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ (рис. 1). По любому «вектору» $a+b\sqrt{2}$ его «коэффициенты» a и b (если угодно, абсцисса и ордината) восстанавливаются однозначно: если $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$, $a,b,a',b'\in\mathbb{Q}$, то $a-a'=(b'-b)\sqrt{2}$, откуда $b'=b$ (иначе $\sqrt{2}=\dfrac{a-a'}{b'-b}\in\mathbb{Q}$), а тогда и $a=a'$.

При поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, грант «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

Замечание. Плоскость на рис. 1 отличается от обычной евклидовой плоскости, во-первых, тем, что координаты на ней рациональные (а не любые действительные), а во-вторых, тем, что на ней нет длин и углов.

Понятно, что вместо $\sqrt{2}$ можно взять любое иррациональное число. Возьмём $\sqrt[3]{2}$ и рассмотрим плоскость $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$. Интуитивно очевидно, что число $\sqrt[3]{4}$ не лежит в этой плоскости, т. е. *векторы* 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ *некомпланарны*: равенство

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2} \qquad (1)$$

не выполняется ни при каких $a,b\in\mathbb{Q}$.

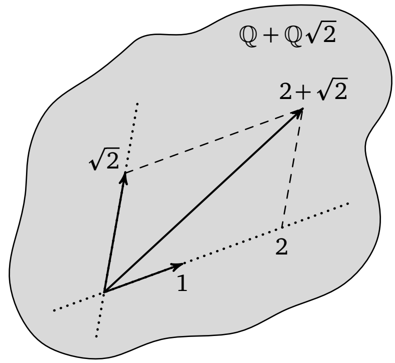


Рис. 1

Задача 1. Докажите это строго.

Понятия пропорциональности (коллинеарности) и компланарности обобщаются до понятия *линейной зависимости* любого количества векторов. Дадим соответствующее определение для чисел.

Определение 1. Система комплексных чисел $v_1,\ldots,v_n$ называется *линейно зависимой над* $\mathbb{Q}$, если $c_1v_1+\ldots+c_nv_n=0$ для некоторых рациональных $c_1,\ldots,c_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. В противном случае система $v_1,\ldots,v_n$ называется *линейно независимой над* $\mathbb{Q}$.

Замечания. Подчеркнём, что линейная зависимость или независимость — это свойство именно *системы*[1)] чисел (векторов), хотя часто говорят «векторы линейно зависимы».

Отметим простейшие свойства, сразу вытекающие из определения (проверьте их):

- система, содержащая нуль или два одинаковых числа, линейно зависима;
- система из одного числа линейно зависима в точности тогда, когда это число — нуль;
- подсистема линейно независимой системы линейно независима;
- система чисел линейно зависима в точности тогда, когда хотя бы одно из них *линейно выражается* через остальные (например, если $c_n\neq 0$ в определении 1, то $v_n=-\frac{c_1}{c_n}v_1-\ldots-\frac{c_{n-1}}{c_n}v_{n-1}$).

[1)] Свойство именно «футбольной команды», а не «каждого игрока в отдельности» (А. В. Михалёв).

Задача 2 (для решения понадобится материал статьи). В качестве затравки предлагаем доказать линейную независимость следующих систем чисел:

а) $1, \sqrt[10]{2}, \sqrt[10]{4}, \sqrt[10]{8}, \sqrt[10]{16}, \ldots, \sqrt[10]{512}$;

б) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots, \sqrt[100]{2}$;

в) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \ldots, \sqrt{991}, \sqrt{997}$ (под радикалами — простые числа);

г) $1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{9}, \sqrt[5]{27}, \sqrt[5]{81}$;

д) $\cos\frac{2\pi}{17}, \cos\frac{4\pi}{17}, \cos\frac{6\pi}{17}, \ldots, \cos\frac{16\pi}{17}$.

§ 2. Алгебраические числа

Во что превратится определение 1 линейной зависимости для степеней $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ некоторого числа α? Существуют такие рациональные числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, что

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_n\alpha^n = 0.$$

Другими словами, α является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами. Такие числа называются *алгебраическими*.

Множество всех алгебраических чисел обозначается буквой $\mathbb{A}$. Очевидно, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$, $i \in \mathbb{A}$ $(i^2 = -1)$, $\sqrt[5]{2} \in \mathbb{A}$. Приведём пару примеров посложнее.

Пример 1. Покажем, что $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{A}$. Дважды возведём в квадрат: $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (\alpha^2 - 5)^2 = 24$, т. е. α — корень многочлена $(x^2-5)^2-24 = x^4 - 10x^2 + 1$.

Пример 2. Число $c = \cos\frac{2\pi}{9}$ алгебраическое, так как по формуле косинуса тройного угла $4c^3 - 3c = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Существование неалгебраических или *трансцендентных* чисел можно вывести из соображений мощности: ненулевых многочленов с рациональными коэффициентами — счётное множество, и у каждого — конечное число корней, поэтому множество $\mathbb{A}$ счётно, в то время как множество $\mathbb{C}$ континуально. Это простое, с сегодняшней высоты, рассуждение появилось лишь после первых работ Кантора по теории множеств в 1870-х годах. Первое же доказательство было получено раньше совсем из других соображений: в 1844 году Лиувилль доказал, что алгебраические числа «плохо» (в некотором смысле) приближаются рациональными, и, используя это, построил примеры трансцендентных чисел. Вот одно из них: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$ (см. [2,5,8]). Позднее была доказана трансцендентность чисел e (Эрмит, 1873), π (Линдеман, 1882), e^{π} (Гельфонд, 1929). Однако до сих пор никто не знает, являются ли числа $e \pm \pi$, $e\pi$, e/π хотя бы иррациональными!

Среди всех ненулевых многочленов над $\mathbb{Q}$ с корнем $\alpha \in \mathbb{A}$ существует единственный многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1: если бы их было два, то их разность была бы многочленом меньшей степени с корнем α.

Определение 2. Указанный многочлен называется *минимальным многочленом числа* α и часто обозначается $\mu_\alpha(x)$, а его степень называется *степенью* числа α и обозначается $\deg\alpha$.

Алгебраические числа степени 1 — это в точности рациональные числа: $\deg\alpha = 1 \iff \mu_\alpha(x) = x - \alpha \iff \alpha \in \mathbb{Q}$. Алгебраические числа степени 2 называются *квадратичными иррациональностями*. Примеры: $\sqrt{2}$, i, $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Если $\deg\alpha = 2$, то $\alpha^2 = p\alpha + q$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Q}$, но $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Иными словами, числа $1, \alpha, \alpha^2$ линейно зависимы, а числа $1, \alpha$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Вообще, геометрически

$$\deg\alpha \text{ — это такое наименьшее } n \in \mathbb{N},$$
$$\text{что числа } 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \text{ линейно зависимы над } \mathbb{Q}.$$

В задаче 1 фактически предлагается доказать, что $\deg\sqrt[3]{2} = 3$, а в задаче 2а — что $\deg\sqrt[10]{2} = 10$. Казалось бы, очевидно, что $\deg\sqrt[n]{2} = n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, но для аккуратного доказательства нужно убедиться, что $\mu_{\sqrt[n]{2}}(x) = x^n - 2$. Почему это может быть не так? Вдруг двучлен $x^n - 2$ приводим над $\mathbb{Q}$, т. е. раскладывается в произведение многочленов степеней $< n$ с рациональными коэффициентами? Тогда $\sqrt[n]{2}$ является корнем одного из сомножителей. Можно ещё допустить, что двучлен $x^n - 2$ неприводим над $\mathbb{Q}$, но всё равно существует другой многочлен над $\mathbb{Q}$ степени $<n$ с корнем $\sqrt[n]{2}$… Подобные вопросы осмысленны для любого алгебраического числа α, и, чтобы в них разобраться, нужно знать два главных свойства минимального многочлена.

$$\text{Многочлен } \mu_\alpha \text{ неприводим над } \mathbb{Q}. \tag{2}$$

В самом деле, если многочлен μ_α раскладывается в произведение многочленов над $\mathbb{Q}$ меньшей степени, то α — корень одного из сомножителей, что противоречит минимальности $\deg\mu_\alpha$.

$$\text{Любой многочлен } f \in \mathbb{Q}[x] \text{ с корнем } \alpha \text{ делится на } \mu_\alpha. \tag{3}$$

Для доказательства поделим с остатком: $f = \mu_\alpha q + r$, где $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_\alpha$. Вторая возможность исключается, так как $r(\alpha) = f(\alpha) - \mu_\alpha(\alpha) q(\alpha) = 0$.

Из (2) и (3) следует, что *если мы нашли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с корнем α и старшим коэффициентом* 1, *то это и есть μ_α.*

Вернёмся к радикалам. Равенство $\deg \sqrt[n]{2} = n$, как мы поняли, равносильно неприводимости двучлена $x^n - 2$. Как её доказать? Существует ли вообще алгоритм разложения данного многочлена на неприводимые над Q? Да, такой алгоритм был разработан Кронекером в XIX веке, но он трудоёмкий. Сформулируем один полезный признак неприводимости.

Теорема 1 (признак Эйзенштейна [6]). *Если коэффициенты многочлена $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ для некоторого простого p удовлетворяют условиям: $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}, \ldots, a_0$, $p^2 \nmid a_0$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.*

Пример 3 (неприводимость некоторых двучленов). а) Двучлен $x^n - 2$ неприводим по признаку Эйзенштейна. Этот признак применим вообще к двучленам $x^n \pm p_1 \ldots p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа.

б) Но, скажем, к двучлену $x^3 - 4$ признак Эйзенштейна неприменим. Зато *для кубического* (*и квадратного*) *многочлена неприводимость над $\mathbb{Q}$ равносильна отсутствию рациональных корней*. А их можно найти перебором: *если несократимая дробь m/n является корнем многочлена*

$$f(x) = a_k x^k + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

где $a_k, a_0 \neq 0$, то $m \mid a_0$ и $n \mid a_k$ (*в частности, при $a_k = 1$ все рациональные корни — целые*), см., например, [1, глава 3, § 6]. Отсюда следует, что двучлен $x^3 - 4$ неприводим над $\mathbb{Q}$, а значит, $\deg \sqrt[3]{4} = 3$.

в) Пойдём дальше. Двучлен $x^5 - 4$ тоже не имеет рациональных корней, однако этого уже недостаточно для неприводимости: вдруг он раскладывается на множители степеней 2 и 3? Чтобы это опровергнуть, можно выйти в комплексную плоскость и разложить этот двучлен на линейные множители:

$$x^5 - 4 = \left(x - \sqrt[5]{4}\right)\left(x - \omega \sqrt[5]{4}\right)\left(x - \omega^2 \sqrt[5]{4}\right)\left(x - \omega^3 \sqrt[5]{4}\right)\left(x - \omega^4 \sqrt[5]{4}\right),$$

где $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Отсюда следует, что любой квадратный множитель двучлена $x^5 - 4$ со старшим коэффициентом 1 имеет свободный член вида $\omega^k \sqrt[5]{16}$ ($k \in \mathbb{Z}$), модуль которого $\sqrt[5]{16}$ иррационален (почему?).

Приведём другое изящное рассуждение. Двучлен $x^5 - 4$ неприводим $\iff$ $\deg \sqrt[5]{4} = 5$ $\iff$ $1, \sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{4^2}, \sqrt[5]{4^3}, \sqrt[5]{4^4}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Но

Мешок алгебраических чисел

Число α	Многочлен $\mu_\alpha(x)$
$\alpha\in\mathbb{Q}$	$x-\alpha$
$\sqrt[n]{2}$	x^n-2
i	x^2+1
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	x^4-10x^2+1
$\cos\dfrac{2\pi}{9}$	$4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$

Рис. 2

это просто переставленные числа $1, \sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2^2}, \sqrt[5]{2^3}, \sqrt[5]{2^4}$ с целыми коэффициентами, а их линейная независимость нам уже известна: она равносильна неприводимости двучлена x^5-2.

Задача 3. Обобщите рассуждение из примера 3в). Именно, пусть двучлен x^n-r^n неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что n — наименьшее натуральное число со свойством $r^n\in\mathbb{Q}$. Верно ли обратное в случае: а) $r\in\mathbb{R}$; б) $r\in\mathbb{C}$?

Задача 4. Установите критерий неприводимости двучлена $x^n-a\in\mathbb{Q}[x]$ в случаях: а) $a>0$ или n нечётно; б) $a<0$, $n=4$; в)** $a<0$, $n=2^s$, $s\geqslant 2$; г)** $a<0$.

Задача 5. Найдите многочлен $\mu_\alpha(x)$ для а) $\alpha=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$; б) $\alpha=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ (значения корней — арифметические). (Внешнее сходство обманчиво!) Для этого составьте кубический многочлен, имея перед глазами формулу Кардано [1, глава 3, § 9] для его корня.

Задача 6. Докажите, что все комплексные значения корня любой степени из алгебраического числа алгебраичны.

Мы завершим этот параграф двумя естественными вопросами об алгебраических числах.

Q1 *Верно ли, что сумма, разность, произведение и отношение алгебраических чисел являются алгебраическими числами*?

Ответ положительный, см. далее теорему 4.

Q2 *С учётом задачи* 6 *всякое число, получаемое из рациональных с помощью арифметических операций и извлечения корня, алгебраично. Вопрос*: *всякое ли алгебраическое число получается таким способом, т. е. выражается в радикалах*?

Отрицательный ответ был великим открытием первой половины XIX века. Ответ дал замечательный французский математик Эварист Галуа, когда ему не было 20 лет! На самом деле он установил критерий разрешимости уравнений в радикалах. Отметим, что привести пример конкретного многочлена над $\mathbb{Q}$, корни которого не выражаются в радикалах, с полным доказательством не так просто. Например, подойдёт многочлен x^5-4x+2.

§ 3. Избавление от иррациональности в знаменателе

Этот известный со школы сюжет тесно связан с алгебраическими числами. С квадратичными иррациональностями всё просто — для избавления от иррациональности в знаменателе достаточно умножить на сопряжённое число, например:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1, \qquad \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}.$$

Но уже с кубическими корнями дело обстоит гораздо сложнее.

Пример 4. Избавимся от иррациональности в знаменателях:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2}; \qquad \text{б) } \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+3}.$$

В пункте а) ещё можно схитрить, разложив знаменатель на множители:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2}=-\frac{(2+1)(2-2^3)}{18(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-2)}=-\frac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4)}{18},$$

но в пункте б) аналогичный приём приведёт к новым иррациональностям, к тому же мнимым. Покажем на этом примере, как действовать, когда в знаменателе стоит многочлен от одной иррациональности. В нашем случае это $\alpha^2+\alpha+3$, где $\alpha=\sqrt[3]{2}$. Надо представить дробь $1/(\alpha^2+\alpha+3)$ в виде многочлена от α, т. е. найти такой многочлен $u(x)\in\mathbb{Q}[x]$, что

$$\frac{1}{\alpha^2+\alpha+3}=u(\alpha).$$

Это значит, что многочлен $(x^2+x+3)u(x)-1$ имеет корень α, т. е., в силу (3), делится на $\mu_\alpha(x)=x^3-2$. Таким образом, для некоторого многочлена $v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ имеем:

$$u(x)(x^2+x+3)+v(x)(x^3-2)=1.$$

Но это не что иное как линейное представление наибольшего общего делителя многочленов x^2+x+3 и x^3-2.

Задача 7. Найдите многочлены $u(x)$ и $v(x)$ либо по алгоритму Евклида, либо методом неопределённых коэффициентов в предположении $\deg u<3$, $\deg v<2$.

Решив задачу 7, получим:

$$(2x^2+x-7)(x^2+x+3)-(2x+3)(x^3-2)=-15 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\alpha^2+\alpha+3}=-\frac{2\alpha^2+\alpha-7}{15}.$$

Прежде чем обобщить этот пример, введём для данного числа $\alpha\in\mathbb{C}$ множества

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}[\alpha]=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]\},\\ &\mathbb{Q}(\alpha)=\{f(\alpha)/g(\alpha)\mid f,g\in\mathbb{Q}[x],\ g(\alpha)\neq 0\}.\end{aligned}\tag{4}$$

Очевидно, $\mathbb{Q}[\alpha]$ замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, а $\mathbb{Q}(\alpha)$ — ещё и относительно деления (на ненулевые числа), причём это наименьшие множества с такими свойствами, содержащие $\mathbb{Q}$ и α. Возможность избавляться от иррациональности в знаменателях дробей из $\mathbb{Q}(\alpha)$ формально означает равенство $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}[\alpha]$. Например, для $\alpha=\sqrt{2}$ это так:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}.$$

Проанализировав пример 4, логично предположить, что это верно для любого алгебраического числа α. На самом деле это даже критерий алгебраичности!

Теорема 2. *Для всех* $\alpha\in\mathbb{C}$: $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}[\alpha]\iff\alpha\in\mathbb{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$, $\alpha \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha} = g(\alpha)$ для некоторого $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, т. е. $\alpha g(\alpha) - 1 = 0$ и $\alpha \in \mathbb{A}$.

$\Leftarrow$ Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$, $g \in \mathbb{Q}[x]$ и $g(\alpha) \neq 0$. Поскольку многочлен μ_α неприводим, то НОД (g, μ_α) равен либо μ_α, либо 1. Первый случай невозможен, иначе $\mu_\alpha \mid g$ и $g(\alpha) = 0$. Значит, многочлены g и μ_α взаимно просты и по алгоритму Евклида $u(x)g(x) + v(x)\mu_\alpha(x) = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Q}[x]$. Подставив сюда $x = \alpha$, получим $1/g(\alpha) = u(\alpha)$. Значит, $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$. $\square$

Задача 8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}; \quad \text{б) } \frac{\alpha}{\alpha+1}, \text{ если } \alpha^3 - \alpha + 1 = 0.$$

§ 4. Сопряжённые числа

Сопряжённые квадратичные иррациональности $a \pm b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0)$ являются корнями квадратного трёхчлена над $\mathbb{Q}$ — их минимального многочлена

$$\mu_{a \pm b\sqrt{2}}(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2.$$

Распространим понятие сопряжённости на любые алгебраические числа. Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$. Согласно основной теореме алгебры *любой многочлен положительной степени с комплексными коэффициентами раскладывается на линейные множители*, в частности,

$$\mu_\alpha(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n), \quad \text{где } n = \deg \alpha, \ \alpha = \alpha_1. \tag{5}$$

Определение 3. *Сопряжёнными* с числом $\alpha \in \mathbb{A}$ называются все корни многочлена μ_α.

Замечание. Не путайте с комплексно-сопряжёнными числами! Эти два понятия совпадают только для корней квадратных трёхчленов над $\mathbb{Q}$ с отрицательным дискриминантом: например, $\pm i$, $(3 \pm i\sqrt{11})/4$ — пары сопряжённых в обоих смыслах.

Поскольку многочлен μ_α неприводим, то согласно следующей теореме он не имеет кратных корней, т. е. числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны.

Теорема 3. *Неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен не имеет кратных комплексных корней.*

Доказательство. Пусть многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ имеет кратный корень. Тогда это корень и его производной f', а значит, и их наибольшего общего делителя (f, f'). Последний может быть найден алгоритмом Евклида, а потому если $f \in \mathbb{Q}[x]$, то и $(f, f') \in \mathbb{Q}[x]$. Далее, $0 < \deg(f, f') \leqslant \deg f' = \deg f - 1$. Значит, (f, f') — нетривиальный делитель многочлена f. $\square$

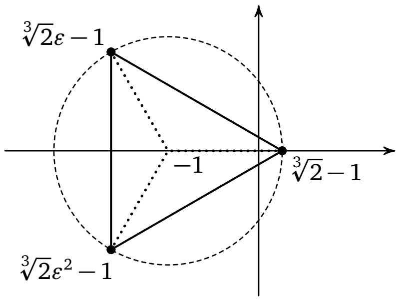


Рис. 3

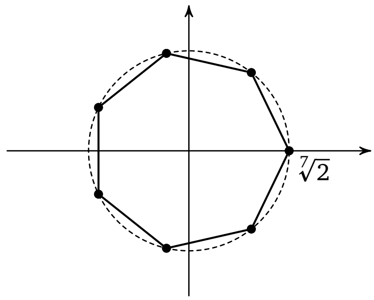


Рис. 4

Таким образом, *всякое алгебраическое число имеет ровно столько сопряжённых* (*включая себя*), *какова его степень.*

Пример 5. Пусть $a, b\in\mathbb{Q}$, $b\neq 0$. Числа $a\pm b\sqrt[3]{2}$, конечно, не будут сопряжёнными (как было бы для квадратичных иррациональностей). Число $a+b\sqrt[3]{2}$ иррационально и является единственным действительным корнем многочлена $(x-a)^3-2b^3$, который, стало быть, неприводим над $\mathbb{Q}$. Два других его корня и являются сопряжёнными к числу $a+b\sqrt[3]{2}$ — это числа $a+b\varepsilon\sqrt[3]{2}$ и $a+b\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, где $\varepsilon=(-1+i\sqrt{3})/2$ — комплексный кубический корень из 1 (рис. 3).

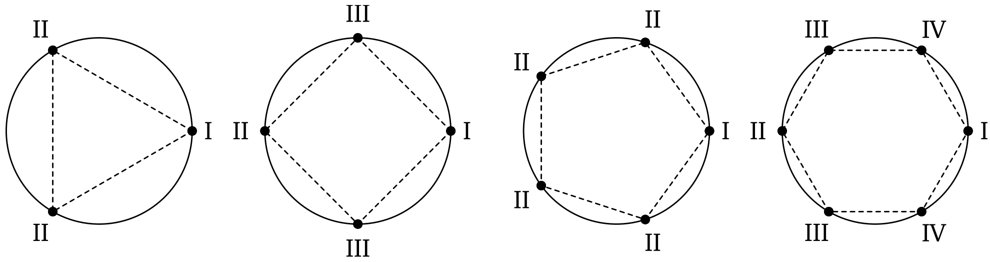
Пример 6. В примере 1 мы показали, что число $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — корень многочлена x^4-10x^2+1. Вот все его корни: $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$. Чтобы с полным правом назвать их сопряжёнными, убедимся в неприводимости многочлена x^4-10x^2+1 над $\mathbb{Q}$. Очевидно, он не имеет рациональных корней и не раскладывается в произведение двух квадратных трёхчленов: или сумма, или произведение любых двух его корней не лежит в $\mathbb{Q}$.

Пример 7. Сопряжённые с числом $\cos\frac{2\pi}{9}$ суть

$$\cos\Bigl(\frac{2\pi}{9}\pm\frac{2\pi}{3}\Bigr)=\cos\frac{4\pi}{9},\cos\frac{8\pi}{9},$$

см. пример 2. Вообще $\cos(2\pi/n)\in\mathbb{A}$ для любого $n\in\mathbb{N}$: как известно, $\cos n\varphi=T_n(\cos\varphi)$, где $T_n(x)=2^{n-1}x^n+\ldots\in\mathbb{Z}[x]$ — многочлены Чебышёва, следовательно, $T_n(\cos(2\pi/n))=\cos 2\pi=1$. Однако найти минимальный многочлен для числа $\cos(2\pi/n)$ и сопряжённые ему числа не так просто, см. далее пример 11.

Пример 8. Все n комплексных значений корня $\sqrt[n]{a}$, где $a\in\mathbb{Q}$, сопряжены, коль скоро двучлен x^n-a неприводим над $\mathbb{Q}$ (для каких a это так, см. задачу 4). См. рис. 4, где $n=7$ и $a=2$.



$x^3-1=$
$=\underset{\mathrm{I}}{(x-1)}\underset{\mathrm{II}}{(x^2+x+1)}$

$x^4-1=$
$=\underset{\mathrm{I}}{(x-1)}\underset{\mathrm{II}}{(x+1)}\underset{\mathrm{III}}{(x^2+1)}$

$x^5-1=$
$=\underset{\mathrm{I}}{(x-1)}\underset{\mathrm{II}}{(x^4+x^3+x^2+x+1)}$

$x^6-1=\underset{\mathrm{I}}{(x-1)}\underset{\mathrm{II}}{(x+1)}\times$
$\times\underset{\mathrm{III}}{(x^2+x+1)}\underset{\mathrm{IV}}{(x^2-x+1)}$

Рис. 5

Пример 9. Особого внимания заслуживают корни из единицы

$$\sqrt[n]{1}=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{n-1}\},\quad \text{где}\ \ \varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}. \tag{6}$$

Чтобы разбить их на классы сопряжённых, нужно разложить двучлен x^n-1 на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$: корни каждого множителя образуют класс сопряжённых алгебраических чисел. Разберём примеры для малых n (рис. 5). В пояснении нуждается лишь неприводимость многочлена $\dfrac{x^5-1}{x-1}$. Сделав замену $x-1=y$, получим многочлен

$$\frac{(y+1)^5-1}{y}=y^4+5y^3+10y^2+10y+5,$$

неприводимый по признаку Эйзенштейна (теорема 1).

Можно заметить, что в этих примерах корни каждого неприводимого множителя имеют один *порядок*. Порядок некоторого корня δ из единицы — это наименьшее $k\in\mathbb{N}$ со свойством $\delta^k=1$, обозначение $O(\delta)$ (от англ. order — порядок). Например, $O(-1)=2$, $O(i)=O(-i)=4$. Корни из единицы порядка n называются *первообразными корнями* степени n. Легко доказать, что в обозначениях формулы (6) имеем $O(\varepsilon^k)\mid n$ и $O(\varepsilon^k)=n \iff \text{НОД}(k,n)=1$. Количество таких k от 1 до n обозначается $\varphi(n)$, функция φ называется *функцией Эйлера*.

Рассмотрим многочлен, корнями которого являются все корни из единицы данного порядка:

$$\Phi_n(x)=\prod_{\delta:\,O(\delta)=n}(x-\delta)=\prod_{1\leqslant k\leqslant n,\,(k,n)=1}(x-\varepsilon^k).$$

Он называется *круговым*. Классифицируем корни степени n по их порядкам и в соответствии с этим разложим двучлен x^n-1 на множители:

$$\sqrt[n]{1} = \bigsqcup_{d|n} \{\delta \mid O(\delta) = d\} \quad \Rightarrow \quad x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \tag{7}$$

Оказывается, это и есть разбиение $\sqrt[n]{1}$ на классы сопряжённых и, соответственно, разложение двучлена $x^n - 1$ на неприводимые над $\mathbb{Q}$. Однако доказать неприводимость круговых многочленов не так-то просто, см., например, [1, глава 10, § 3, пример 3]. (О круговых многочленах рекомендуем статью [7].) Приведём ещё один пример — для $n = 12$ (рис. 6).

$$x^{12} - 1 = \overset{\mathrm{I}}{\underset{\Phi_1(x)}{(x-1)}}\overset{\mathrm{II}}{\underset{\Phi_2(x)}{(x+1)}}\overset{\mathrm{III}}{\underset{\Phi_3(x)}{(x^2+x+1)}}\overset{\mathrm{IV}}{\underset{\Phi_4(x)}{(x^2+1)}}\overset{\mathrm{V}}{\underset{\Phi_6(x)}{(x^2-x+1)}}\overset{\mathrm{VI}}{\underset{\Phi_{12}(x)}{(x^4-x^2+1)}}$$

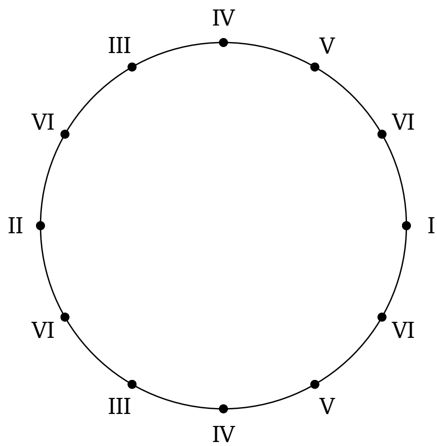


Рис. 6

На самом деле из определения круговых многочленов не очевидно даже, что их коэффициенты целые! Но это несложно выводится из разложения в формуле (7).

Задача 9. Проведите это рассуждение.

Задача 10. Найдите все целые ненулевые a и b, для которых $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ — корень из единицы.

Задача 11. Найдите сопряжённые с числами из задачи 5.

А теперь с помощью сопряжённых чисел мы ответим на вопрос Q1 предыдущего параграфа и даже докажем несколько больше. Начнём с примера.

Пример 10. Покажем, что $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{A}$. Имеем

$$t = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (t - \sqrt{2})^3 = 3,$$

и после раскрытия скобок получаем $A(t) + B(t)\sqrt{2} = 0$ для некоторых $A, B \in \mathbb{Q}[x]$. Уединение $\sqrt{2}$ с последующим возведением в квадрат равнозначно домножению на сопряжённое $A(t) - B(t)\sqrt{2}$. Итак, $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ — корень многочлена $f(x) = A^2(x) - 2B^2(x) \in \mathbb{Q}[x]$, а значит, алгебраическое число. Какие у него сопряжённые? Найдём все корни $f(x)$:

$$f(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(s) \pm B(s)\sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s \mp \sqrt{2})^3 = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad s = \varepsilon^k\sqrt[3]{3} \pm \sqrt{2}, \quad k = 0, 1, 2, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Означает ли это, что полученные 6 чисел сопряжены? Пока ещё нет: вдруг многочлен $f(x)$ приводим… Со всей уверенностью можно лишь утверждать, что *среди этих чисел содержатся сопряжённые* к $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$. Доказывать неприводимость $f(x)$ непосредственно довольно муторно. Чуть позже, с помощью сильнодействующих средств, мы сделаем это элегантно, см. пример 15 и задачу 16. А сейчас обобщим проведённое рассуждение.

Теорема 4. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все сопряжённые с $\alpha \in \mathbb{A}$, а $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — все сопряжённые с $\beta \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, то для любой операции $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ число $\alpha * \beta$ алгебраическое и его сопряжённые содержатся среди чисел $\alpha_i * \beta_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.*

Замечание. Не обязательно все числа $\alpha_i * \beta_j$ сопряжены с $\alpha * \beta$, простой пример: $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

Начнём доказывать теорему 4, следуя примеру 10, в котором $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}$ и $* = +$. В этом случае $(x - \sqrt{2})^3 - 3 = \mu_\beta(x - \alpha)$ и

$$f(x) = \mu_\beta(x - \alpha_1)\mu_\beta(x - \alpha_2) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i - \beta_j).$$

Рассмотрим такой многочлен в общей ситуации:

$$f(x) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i - \beta_j) = \mu_\beta(x - \alpha_1) \ldots \mu_\beta(x - \alpha_n).$$

Если этот многочлен имеет рациональные коэффициенты, то в силу (3) он делится на $\mu_{\alpha+\beta}(x)$, и теорема 4 доказана для операции сложения (для других операций доказательство аналогично). Почему же $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$? Суть в том, что этот многочлен не меняется при перестановках $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Более формально, переставлять нужно не числа, а переменные. Вот точная и более общая формулировка.

Теорема 5. *Если многочлен $F(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Q}[x, y_1, \ldots, y_n]$ не меняется при перестановках $y_1, \ldots, y_n$ и если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образуют набор корней некоторого многочлена над $\mathbb{Q}$, то $F(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}[x]$.*

Доказательство легко вытекает из формул Виета и основной теоремы о симметрических многочленах, см. [1, глава 3, § 8] и [5, § 9.1, теорема 9.2].

Задача 12. Докажите теорему 5 при $n = 2$.

Из теоремы 5 следует ещё одна полезная теорема, позволяющая по сопряжённым с $\alpha \in \mathbb{A}$ найти сопряжённые с числами из $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Теорема 6. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все сопряжённые с $\alpha \in \mathbb{A}$, то для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ все сопряжённые с $f(\alpha)$ суть $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$.*

Замечание. Среди чисел $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ могут быть равные, например, в тривиальном случае, когда $f = \mathrm{const}$.

Доказательство. Многочлен $\mu_{f(\alpha)}(f(x)) \in \mathbb{Q}[x]$ имеет корень α, а значит, согласно (3) делится на многочлен $\mu_\alpha(x)$ и потому имеет корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Это доказывает, что $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ сопряжены с $f(\alpha)$. Других сопряжённых нет, так как $(x-f(\alpha_1)) \ldots (x-f(\alpha_n)) \in \mathbb{Q}[x]$ по теореме 5. $\square$

Пример 11. Пусть $n \geqslant 3$. Поскольку согласно примеру 9 сопряжённые к

$$\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

суть ε_n^k, где $(k, n) = 1$, то, применив теорему 6 к $\alpha = \varepsilon_n$ и $f(x) = \dfrac{x + x^{n-1}}{2}$, получим набор сопряжённых чисел: $\cos(2\pi k/n)$, где $(k, n) = 1$. Минимальный многочлен $\mu_{\cos 2\pi/n}(x)$ ищется так. Надо взять круговой многочлен $\Phi_n(x)$, поделить его на $x^{\varphi(n)/2}$ и сделать замену $y = (x + x^{-1})/2$:

$$\mu_{\cos 2\pi/n}(x)\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) = \frac{\Phi_n(x)}{x^{\varphi(n)/2}}.$$

Например, при $n = 5$:

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 1 = 4y^2 + 2y - 1 = \mu_{\cos 2\pi/5}(y).$$

Вычислите по тому же рецепту $\mu_{\cos 2\pi/9}(y)$ и сравните с примером 2.

Задача 13. Найдите $\deg\sin\dfrac{2\pi}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

§ 5. Поля всё шире и шире

Для более глубокого изучения алгебраических чисел и решения более трудных задач мы познакомимся с понятием поля и освоим технику расширений полей. Будем рассматривать лишь поля, содержащиеся в $\mathbb{C}$.

Определение 4. Подмножество в $\mathbb{C}$ называется *полем*, если оно содержит числа 0 и 1 и замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (не на нуль). Если K, L — поля и $K \subseteq L$, то говорят, что K — *подполе* поля L или что L — *расширение* поля K.

- Вот пример цепочки или, как чаще говорят, *башни* подполей:
$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$
- Множества $\mathbb{Z}$, $[0, \infty)$, $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$ полями не являются (почему?).
- Легко понять, что $\mathbb{Q}$ — самое маленькое (числовое) поле: оно содержится в любом числовом поле.
- В силу теоремы 4 *множество $\mathbb{A}$ всех алгебраических чисел является полем.*
- Говорят, что поле $\mathbb{Q}(\alpha)$, определённое в (4), получается присоединением к полю $\mathbb{Q}$ числа α. Аналогично определяется поле $K(\alpha)$ для любого поля K и, более общо, $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ как наименьшее поле, содержащее K и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, — как говорят, *поле, порождённое над K числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

Ясно, что $K(\alpha, \beta) = K(\alpha)(\beta) = K(\beta)(\alpha)$, т. е. числа можно присоединять все сразу, а можно последовательно в любом порядке. Также ясно, что $K(\alpha) \subseteq L \iff K \subseteq L,\ \alpha \in L$ (здесь K, L — поля, $\alpha \in \mathbb{C}$).

Пример 12. Докажем, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Включение $\supseteq$ очевидно. Обратно,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \ni \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \ni \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}, \sqrt{2}.$$

Задача 14. Докажите, что

$$\mathbb{Q}(\varepsilon_3) = \mathbb{Q}(\varepsilon_6) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{12}),$$

где $\varepsilon_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Для любого поля K можно определить линейную зависимость чисел $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$ над K (определение 1 с заменой $\mathbb{Q}$ на K), а также понятия, связанные с алгебраичностью.

Определение 5. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим* над полем $K \subseteq \mathbb{C}$, если оно является корнем некоторого ненулевого многочлена над K. Аналогично случаю поля $\mathbb{Q}$ определяются минимальный многочлен $\mu_\alpha^K(x)$, степень $\deg_K \alpha = \deg \mu_\alpha^K(x)$ и сопряжённые с α: в определениях 2 и 3 заменяем $\mathbb{Q}$ на K.

Пример 13. Любое комплексное число алгебраично над $\mathbb{R}$ и сопряжено со своим комплексно-сопряжённым числом.

Справедливы аналоги утверждений (2), (3) и теоремы 3. Дело в том, что с многочленами над любым полем можно обращаться как мы привыкли: делить с остатком, применять алгоритм Евклида, раскладывать на неприводимые множители (см., например, [1, глава 3, § 5]).

Пример 14. Разложим двучлен x^4-2 на неприводимые над каждым из полей башни

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$$

и разобьём его корни на классы сопряжённых:

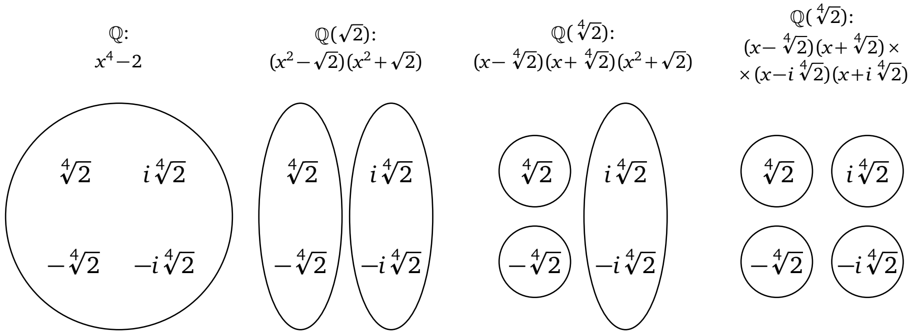


Рис. 7

В частности, $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{2}) = 4$, $\deg_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\sqrt[4]{2}) = 2$, $\deg_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}(\sqrt[4]{2}) = 1$.

Вообще при расширении поля неприводимые множители «измельчаются» и, соответственно, сопряжённые — корни одного неприводимого множителя — дробятся на более мелкие группы.

Если K — подполе поля L и число α алгебраично над K,
то α тем более алгебраично над L и $\mu_\alpha^L(x) \mid \mu_\alpha^K(x)$.

В самом деле, многочлен над K с корнем α можно рассматривать и над бо́льшим полем L. При этом с точки зрения поля L многочлен $\mu_\alpha^K(x)$ — это просто какой-то многочлен над L с корнем α, поэтому $\mu_\alpha^L(x) \mid \mu_\alpha^K(x)$ аналогично (3).

Задача 15. Разложите многочлен $\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$ (см. пример 9) на неприводимые и разбейте его корни на сопряжённые над полями $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.

А теперь покажем, как геометрические идеи помогают работать с алгебраическими числами.

Определение 6. Подмножество $L \subseteq \mathbb{C}$, содержащее поле K, называется *векторным пространством над* K, если L замкнуто относительно сложения и умножения на числа из K, т. е. $a+b, ka \in L$ для любых $a, b \in L$ и $k \in K$.

Важное замечание: *всякое поле является векторным пространством над любым своим подполем.*

Определение 7. Пусть L — векторное пространство над K. Предположим, что L содержит такие числа $e_1, \ldots, e_n$, что всякое $\alpha \in L$ представляется в виде

$$\alpha = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n \tag{8}$$

с однозначно определёнными коэффициентами $k_1, \ldots, k_n \in K$. Тогда система $e_1, \ldots, e_n$ называется *базисом* пространства L над K, равенство (8) — *разложением* числа α по этому базису, а число n — *размерностью* L над K и обозначается $\dim_K L$ (от англ. dimension — размерность). Если к тому же L является полем, то говорят, что L — *конечное расширение* поля K, размерность $\dim_K L$ называют *степенью расширения* и обозначают $[L:K]$, при этом пишут $K \xrightarrow{n} L$.

Это определение размерности как количества элементов в базисе нуждается в *проверке корректности*: базисов-то много, почему во всех одно и то же число элементов? Проведём доказательство на языке векторов. Прежде всего отметим, что векторы любого базиса линейно независимы (иначе у нулевого вектора было бы два разложения по базису). Поэтому достаточно доказать **основную лемму о линейной зависимости:** *если «много» векторов выражается через «мало», то «много» линейно зависимы* (Э. Б. Винберг). Вот точная формулировка.

Теорема 7. *Если $m > n$ и векторы $f_1, \ldots, f_m$ выражаются через векторы $e_1, \ldots, e_n$, то векторы $f_1, \ldots, f_m$ линейно зависимы.*

Доказательство. Проведём индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n > 1$ и для числа $n-1$ утверждение верно. При каждом $i = 1, \ldots, m$ выразим f_i через $e_1, \ldots, e_n$ и обозначим через c_i коэффициент при e_1: $f_i = c_i e_1 + \ldots$. Если $c_1 = \ldots = c_m = 0$, то $f_1, \ldots, f_m$ выражаются через $n-1$ векторов и сразу применимо предположение индукции. Если же среди c_i есть ненулевой, то для удобства можно считать, что $c_1 \neq 0$. Тогда векторы

$$f_2 - \frac{c_2}{c_1} f_1, \ \ldots, \ f_m - \frac{c_m}{c_1} f_1$$

выражаются через $e_2, \ldots, e_n$ и по предположению индукции линейно зависимы. Следовательно, векторы $f_1, \ldots, f_m$ тоже линейно зависимы. $\square$

Замечания. 1. Все понятия, связанные с линейной зависимостью, естественнее определять для абстрактных векторных пространств, а не для полей — их частных случаев, но для наших целей это не оправдано.

2. Расширение поля может содержать *бесконечную линейно независимую систему*, т. е. такую, всякая конечная подсистема которой линейно независима. Тогда оно не имеет конечного базиса и называется *бесконечномерным*. Например, степени $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ любого трансцендентного числа α, очевидно, линейно независимы. Следовательно, расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ бесконечномерно. Расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ тоже бесконечномерно, например, система $\{\sqrt[n]{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ линейно независима (аналогично задаче 2б).

Обобщим и уточним теорему 2 (доказательство аналогично).

Теорема 8. *Для любого поля K и любого числа α имеем*

$$K(\alpha) = K[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ алгебраично над } K \quad \Leftrightarrow \quad \dim_K K(\alpha) < \infty.$$

Если эти условия выполнены и $n = \deg \alpha$, то $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ — базис в $K(\alpha)$ над K и $\dim_K K(\alpha) = n$.

Основной инструмент в теории конечных расширений — следующая теорема.

Теорема 9 (о размерности башни). *Если $K \subseteq P \subseteq L$ — конечные расширения полей, то*

$$\dim_K L = \dim_K P \cdot \dim_P L.$$

Вам ничего не напоминает эта формула? Ну, конечно! Это же свойство логарифмов

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c.$$

И это совсем не удивительно, ведь, если вдуматься, размерность — это своего рода логарифм... Взгляните: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$. Впрочем, это только аналогия, а вот формальное доказательство.

Доказательство. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в P над K и базис $f_1, \ldots, f_m$ в L над P. Тогда mn произведений $e_i f_j$ образуют базис в L над K. В самом деле, разложив любой элемент $\alpha \in L$ по базису $f_1, \ldots, f_m$, а коэффициенты этого разложения — по базису P над K, получим представление α в виде линейной комбинации элементов $e_i f_j$. Это представление единственно ввиду их линейной независимости над K: если

$$\sum_{i,j} c_{ij} e_i f_j = \sum_j \Bigl(\sum_i c_{ij} e_i\Bigr) f_j = 0,$$

где $c_{ij} \in K$, то, во-первых, $\sum_i c_{ij}e_i = 0$ при всех j (так как $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимы над P), а во-вторых, $c_{ij} = 0$ при всех i, j (так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы над K). $\square$

Теорема о размерности башни настолько же проста, насколько и эффективна.

Пример 15. Найдём $d = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$. Ввиду теоремы 9 из рис. 8 ясно, что $d = 2a = 3b$. Кроме того, очевидно, что $b \leqslant 2$ (если вдруг $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, то $b = 1$). Отсюда $a = 3$, $b = 2$ и $d = 6$.

В качестве базиса в $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$, в соответствии с доказательством теоремы 9, можно взять попарные произведения чисел из любых базисов в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, см. рис. 9.

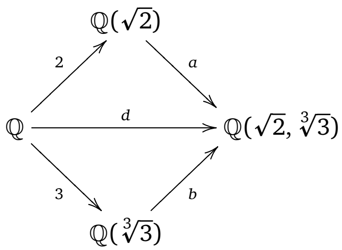


Рис. 8

$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$	$\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$
1	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{9}$

Рис. 9

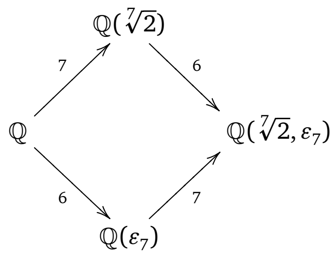


Рис. 10

Задача 16. Вернитесь к примеру 10 и докажите, что $\deg(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 6$.

Указание. Присоедините к полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$ число $\sqrt[3]{3}$ и докажите, что это расширение тривиально (имеет степень 1).

Пример 16. Пусть K — наименьшее поле, содержащее все корни двучлена $x^7 - 2$ (его *поле разложения*). Найдём $\dim_{\mathbb{Q}} K$. Ясно, что $K = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}, \varepsilon_7)$. Далее, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}) = 7$ и $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\varepsilon_7) = 6$. Из диаграммы на рис. 10 получаем ответ: $\dim_{\mathbb{Q}} K = 7 \cdot 6 = 42$.

Задача 17. Решите аналогичную задачу для двучленов а) $x^8 - 2$; б) $x^6 + 4$; в) $x^6 + 3$.

Задача 18. Докажите, что $\mathbb{Q}(\varepsilon_m) \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}$ при взаимно простых m и n.

В заключение параграфа покажем, как почти устно доказать, что $\mathbb{A}$ — поле. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\beta \neq 0$. По теореме 8 расширения башни $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\alpha) \to \to \mathbb{Q}(\alpha)(\beta)$ конечны, а тогда по теореме 9 размерность $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ конечна. Следовательно, степени $1, \gamma, \ldots, \gamma^n$ любого $\gamma \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, т. е. $\gamma \in \mathbb{A}$. Применяем это к $\gamma = \alpha * \beta$, где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

§ 6. Квадратичные расширения

Так называются расширения степени 2. Очевидно, $K(r)$ — квадратичное расширение поля K, если $r^2 \in K$, но $r \notin K$ (примеры: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$). На самом деле других квадратичных расширений не бывает, и для доказательства достаточно выделить полный квадрат в квадратном трёхчлене.

Теорема 10. *Всякое расширение степени* 2 *получается присоединением квадратного радикала. Иными словами, если $K \subset L$ — поля и $\dim_K L = 2$, то $L = K(r)$ для некоторого $r \in L$ с условием $r^2 \in K$.*

Доказательство. Возьмём любое $\alpha \in L \setminus K$. Тогда $L = K(\alpha) = K[\alpha]$ и $\alpha^2 = p\alpha + q$ для некоторых $p, q \in K$. Отсюда

$$\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4} \in K,$$

и можно взять $r = \alpha - \frac{p}{2}$. $\square$

Пусть $K \subset K(r)$ — квадратичное расширение, $r^2 \in K$. Сопряжённым к числу $a + br$, где $a, b \in K$, $b \neq 0$, служит число

$$\overline{a + br} = a - br.$$

Мы обозначили его как комплексно сопряжённое неслучайно; как легко проверить, оно обладает теми же свойствами:

- $\overline{z * w} = \bar{z} * \bar{w}$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\bar{z} = z \iff z \in K$.

Пример 17. Числа Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ определяются рекуррентно: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. И хотя эти числа целые, их явная формула удивительным образом содержит квадратичные иррациональности:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Переход к сопряжённым квадратичным иррациональностям часто оказывается эффективным. Вот пара фольклорных олимпиадных задач на эту тему.

Задача 19. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d, что

$$(a + b\sqrt{2})^2 + (c + d\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

Задача 20. Найдите первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа $(6+\sqrt{35})^{1000}$.

В заключение обсудим обобщение одной распространённой задачи о квадратных радикалах — доказательства иррациональности чисел вида

$$b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_m\sqrt{a_m} \tag{9}$$

для любого $m\in\mathbb{N}$, любых различных натуральных $a_1,\ldots,a_m$, свободных от квадратов (т. е. не делящихся на квадрат простого), и любых целых ненулевых $b_1,\ldots,b_m$ (см., например, [3]). Это доказывается индукцией по числу простых делителей произведения $a_1\ldots a_m$, шаг которой основан на переходе к сопряжённым квадратичным иррациональностям. Мы сделаем больше — опишем числа, сопряжённые к алгебраическому числу (9), в частности, найдём его степень, а также покажем геометрическую интерпретацию применённого метода — он сродни выбору базиса заданного набора векторов. Главные идеи ясны на примере с двумя радикалами.

Пример 18. Покажем, что 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ — базис поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. В силу теоремы 9 это равносильно тому, что 1, $\sqrt{3}$ — базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, а это значит, что $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Предположим, что $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$. Перейдём к сопряжённым: $-\sqrt{3}=a-b\sqrt{2}$, откуда $a=0$ и $\sqrt{3}=b\sqrt{2}$. Записав $b=k/l$, где $k,l\in\mathbb{N}$, получим $3l^2=2k^2$. Двойка входит в разложение левой части в чётной степени, а в разложение правой — в нечётной. Противоречие.

Итак, каждое число из $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ однозначно представимо в виде $\alpha=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$. Найдём его сопряжённые. Их количество равно $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha)\leqslant\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=4$. Запишем $\alpha_{++}:=\alpha$ двумя способами:

$$\begin{aligned}\alpha_{++}&=a+b\sqrt{2}+(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}),\\ \alpha_{++}&=a+c\sqrt{3}+(b+d\sqrt{3})\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Теперь ясно, что $\alpha_{+-}:=a+b\sqrt{2}-(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}$ сопряжено с α над $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, а $\alpha_{-+}:=a+c\sqrt{3}-(b+d\sqrt{3})\sqrt{2}$ сопряжено с α над $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Кроме того, $\alpha_{--}:=a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ сопряжено с α_{+-} над $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Следовательно, все 4 числа сопряжены над $\mathbb{Q}$. Почему у α нет других сопряжённых? Казалось бы, мы нашли уже четыре, но проблема в том, что среди них могут быть равные. Воспользуемся уже знакомым приёмом — покажем, что многочлен $(x-\alpha_{++})(x-\alpha_{+-})(x-\alpha_{-+})(x-\alpha_{--})$ имеет рациональные коэффициенты. В самом деле, перемножим отдельно первые две скобки,

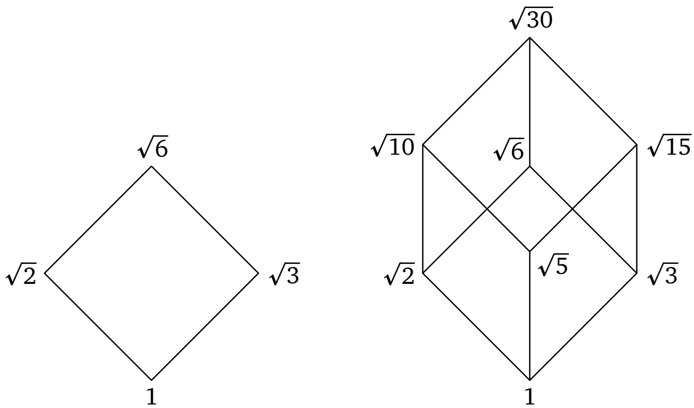


Рис. 11

отдельно последние две — в обоих произведениях «испарится» $\sqrt{3}$. Получатся многочлены над $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, причём с сопряжёнными коэффициентами: $\sqrt{3}$ встретится в них с разными знаками, поэтому при умножении он тоже исчезнет.

Перейдём к общей ситуации. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Рассмотрим поле $P = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ и 2^n произведений

$$\sqrt{p_1}^{k_1} \ldots \sqrt{p_n}^{k_n}, \quad \text{где } k_1, \ldots, k_n \in \{0, 1\}. \tag{10}$$

Их удобно поместить в вершины n-мерного *булева куба* $\mathbb{Z}_2^n$, см. рис. 11 ($n = 2$, $n = 3$).

Теорема 11. *Числа* (10) *образуют базис поля P над $\mathbb{Q}$, в частности,* $\dim_{\mathbb{Q}} P = 2^n$. *Сопряжённые к числу*

$$\alpha = f(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}), \quad \text{где } f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n], \tag{11}$$

суть числа

$$f(\pm\sqrt{p_1}, \ldots, \pm\sqrt{p_n}) \quad (\text{максимум } 2^n \text{ штук}). \tag{12}$$

Отметим, что если все числа (12) различны, то утверждение о сопряжённых очевидно, ведь сопряжённых всего не более 2^n. Например, из первого утверждения теоремы сразу следует, что 2^n чисел $\pm\sqrt{p_1} \pm \ldots \pm \sqrt{p_n}$ образуют набор сопряжённых. Однако среди чисел (12) могут быть повторяющиеся, и тогда надо провести более тонкое рассуждение.

Доказательство. Сначала покажем, что второе утверждение теоремы следует из первого. Если два числа вида $f(\pm\sqrt{p_1}, \ldots, \pm\sqrt{p_n})$ отличаются только знаком при одном радикале, скажем, при $\sqrt{p_1}$, то они сопряжены над $\mathbb{Q}(\sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n})$ и тем более над $\mathbb{Q}$. Следовательно, все эти числа сопряжены над $\mathbb{Q}$ (от каждого из них можно перейти к любому другому, меняя знаки у радикалов последовательно). Покажем, что других сопряжённых нет (аналогично примеру 18). Рассмотрим многочлен $F(x, y_1, \ldots, y_n)$, равный произведению 2^n скобок $x - f(\pm y_1, \ldots, \pm y_n)$. Очевидно, F чётен по каждой из переменных y_i (не меняется при замене y_i на $-y_i$), а значит, каждое y_i входит в F только в чётных степенях. Поэтому при подстановке $y_i = \sqrt{p_i}$ получим многочлен с рациональными коэффициентами. В силу (3) имеем $\mu_\alpha(x) \mid F(x, \sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$.

Теперь докажем первое утверждение индукцией по n. При $n = 1$ оно следует из иррациональности $\sqrt{p_1}$. Чтобы сделать шаг от n к $n+1$, покажем, что $\sqrt{p_{n+1}} \notin P$. В противном случае $\sqrt{p_{n+1}} = f(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$, где f — многочлен над $\mathbb{Q}$. По доказанному сопряжённые к правой части суть $f(\pm\sqrt{p_1}, \ldots, \pm\sqrt{p_n})$. Среди них должно быть ровно два различных, причём противоположных (как у левой части $\sqrt{p_{n+1}}$). Это возможно, только если это число вида $a\sqrt{p_{i_1} \ldots p_{i_s}}$, где $a \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$. Записав $a = k/l$, где $k, l \in \mathbb{N}$ (очевидно, $a > 0$), $k, l \in \mathbb{Z}$, и возведя в квадрат, получим $l^2 p_{n+1} = k^2 p_{i_1} \ldots p_{i_s}$. Простое p_{n+1} входит в разложение левой части в нечётной степени, а в разложение правой — в чётной. Противоречие с основной теоремой арифметики. $\square$

Как же найти сопряжённые с α без повторов, в частности, найти $\deg \alpha$? Идея ясна на примере.

Пример 19. Число $\alpha = \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$ ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$) сохраняется при смене знака у всех радикалов $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, и сопряжённых у него не 8, а 4:

$$\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}, \quad -\sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{15},$$
$$\sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15}, \quad -\sqrt{6} - \sqrt{10} + \sqrt{15}. \tag{13}$$

Покажем на этом примере, как алгоритмически найти сопряжённые без повторов. Рассмотрим радикалы (10), входящие в (11) с ненулевыми коэффициентами. Будем последовательно присоединять их, пропуская те, что присоединились автоматически по ходу дела, тогда каждый присоединяемый радикал увеличит степень (текущего) расширения вдвое. Например, для $\alpha = \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$ получим башню

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}),$$

к которой радикал $\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{10}$ уже присоединён. Представим α в виде $f(\sqrt{6}, \sqrt{10})$, где $f(x, y) = x + y + \frac{1}{2}xy$. Видно, что сопряжённые (13) имеют вид $f(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{10})$: знак при $\sqrt{15}$ уже нельзя выбирать произвольно, он однозначно определяется по знакам при $\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$.

Геометрическая интерпретация и алгоритм. Для практической реализации описанного алгоритма удобно вместо выражений (11) работать с наборами их показателей $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Например,

$$\sqrt{6} = \sqrt{2}^1\sqrt{3}^1\sqrt{5}^0 \longleftrightarrow (1,1,0),$$
$$\sqrt{10} = \sqrt{2}^1\sqrt{3}^0\sqrt{5}^1 \longleftrightarrow (1,0,1),$$
$$\sqrt{15} = \sqrt{2}^0\sqrt{3}^1\sqrt{5}^1 \longleftrightarrow (0,1,1).$$

Равенство $\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{10}$ соответствует тому, что вектор $(0,1,1)$ равен сумме векторов $(1,1,0)$ и $(1,0,1)$ (поскольку $1+1=0$ в $\mathbb{Z}_2$). Вообще описанный выбор произведений (10) есть не что иное как стандартный способ выбрать базис из данного набора векторов: *очередной вектор из набора включается в базис, если он не выражается через уже выбранные векторы*. Реализуя этот способ, записывают координаты векторов по столбцам матрицы, которую приводят к ступенчатому виду методом Гаусса (см., например, [1, глава 2, § 1]).

Пример 20. Найдём степень числа

$$\alpha = a\sqrt{10} + b\sqrt{14} + c\sqrt{35} + d\sqrt{42} + e\sqrt{105},$$

где $0 \neq a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$, и сопряжённые с этим числом. Здесь четыре простых делителя: $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$. Запишем показатели радикалов по столбцам $v_1, \ldots, v_5$ матрицы и приведём её к ступенчатому виду над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Соотношения между столбцами до и после преобразований строк одни и те же, поэтому столбцы v_1, v_2, v_4 линейно независимы и $v_3 = v_1 + v_2$, $v_5 = v_1 + v_4$. То же на языке радикалов:

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{10}) \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{14}) \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{42}) \ni \sqrt{35} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{14},$$
$$\sqrt{105} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{42}.$$

Следовательно, сопряжёнными с числом

$$\alpha = f(\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{42}),$$

где

$$f(x,y,z) = ax + by + \frac{1}{2}cxy + dz + \frac{1}{2}exz,$$

являются $2^3 = 8$ чисел: $f(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{14}, \pm\sqrt{42})$ и, значит, $\deg \alpha = 8$.

Теорема 12. *В обозначениях теоремы* 11 *пусть* $P_1, \ldots, P_s$ — *произведения каких-то из* $p_1, \ldots, p_n$, *такие, что* $\alpha = f(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r})$, *где*

$$f(x) \in \mathbb{Q}[x] \quad \text{и} \quad \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}) \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \sqrt{P_2}) \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r}).$$

Тогда сопряжённые с α *суть* 2^r *чисел*

$$f(\pm\sqrt{P_1}, \ldots, \pm\sqrt{P_r}) \quad \text{и} \quad \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r}).$$

Доказательство. Утверждение о сопряжённых доказывается так же, как в теореме 11. Далее, поскольку

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r}) = 2^r = \deg \alpha = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha)$$

и

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r}),$$

получаем $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_r})$. □

Задача 21 (XIX Турнир городов, осень 1997, основной вариант, 10–11 классы). Перемножаются все 2^{100} выражений вида

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}$$

(при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат: а) целое число; б) квадрат целого числа. (*А. Я. Канель-Белов*)

* * *

В статье [4] мы покажем, как с помощью полученных знаний об алгебраических числах можно найти открытое Гауссом построение правильного 17-угольника циркулем и линейкой.

Решения задач

1. В принципе это можно доказать «в лоб»: возвести в куб, заменить $\sqrt[3]{4}$ на $a + b\sqrt[3]{2}$ и отделить рациональную часть от иррациональной. Но это рутинно, а главное — не обобщается на числа $1, \sqrt[n]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$. Поступим иначе. Равенство (1) означает, что $\sqrt[3]{2}$ —

корень трёхчлена x^2-bx-a. Поэтому $\sqrt[3]{2}$, будучи также корнем двучлена x^3-2, является корнем и следующих многочленов:

$$\begin{gathered} x^3-2-x(x^2-bx-a)=bx^2+ax-2, \\ bx^2+ax-2-b(x^2-bx-a)=(a+b^2)x+ab-2 \end{gathered} \tag{14}$$

(мы применили к многочленам x^3-2 и x^2-bx-a алгоритм Евклида). Отсюда $(a+b^2)\sqrt[3]{2}+ab-2=0$, а тогда, так как $a,b\in\mathbb{Q}$, то получаем $a+b^2=ab-2=0$, откуда $b^3=-2$, что невозможно.

2. а) Двучлен $x^{10}-2$ неприводим по признаку Эйзенштейна.

б) Числа $1,r,r^2,\ldots,r^{100!-1}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, так как двучлен $x^{100!}-2$ неприводим.

в) См. теорему 11.

г) Аналогично примеру 15.

д) Пусть $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$. В силу примера 9 числа $\varepsilon,\varepsilon^{-1},\varepsilon^2,\varepsilon^{-2},\ldots,\varepsilon^8,\varepsilon^{-8}$ линейно независимы. Тогда их суммы по два: $\varepsilon+\varepsilon^{-1},\varepsilon^2+\varepsilon^{-2},\ldots,\varepsilon^8+\varepsilon^{-8}$ тем более линейно независимы. Остаётся заметить, что $\varepsilon^k+\varepsilon^{-k}=2\cos\frac{2\pi k}{17}$.

3. Наименьшее d с таким свойством заведомо делит n (так как $r^{n-dq}\in\mathbb{Q}$ для всех $q\in\mathbb{Z}$), поэтому $x^d-r^d\mid x^n-r^n$. Обратно, пусть двучлен

$$x^n-a=(x-r)(x-r\varepsilon)\ldots(x-r\varepsilon^{n-1})$$

приводим над $\mathbb{Q}$ ($\varepsilon=e^{2\pi i/n}$). Если m — степень его нетривиального делителя, то $r^m\varepsilon^d\in\mathbb{Q}$ для некоторого $d\in\mathbb{N}$.

а) Если $r\in\mathbb{R}$, то отсюда следует, что $r^m\in\mathbb{Q}$, так что ответ положительный.

б) В общем случае, когда $r\in\mathbb{C}$, ответ отрицательный, например, при $r=\varepsilon_3$: двучлен x^3-1 приводим, но $\varepsilon_3,\varepsilon_3^2\notin\mathbb{Q}$.

4. Разложим $a\in\mathbb{Q}$ на простые множители: $a=\pm p_1^{k_1}\ldots p_t^{k_t}$, $k_1,\ldots,k_t\in\mathbb{Z}$ ($t=0$ при $a=\pm1$).

а) Если $a>0$ или n нечётно, то можно взять действительное значение корня $r=\sqrt[n]{a}$. По пункту а) предыдущей задачи двучлен x^n-r^n неприводим, если и только если n — минимальное число со свойством $r^n\in\mathbb{Q}$. С другой стороны, для всех $d\in\mathbb{N}$ имеем

$$r^d\in\mathbb{Q}\quad\Leftrightarrow\quad\forall\, i\in\{1,\ldots,t\}\ n\mid k_id\quad\Leftrightarrow\quad n\mid(k_1,\ldots,k_t)d.$$

Минимальное d, удовлетворяющее этому условию, равно n, если и только если

$$(n,k_1,\ldots,k_t)=1 \tag{$*$}$$

(В частности, при $n > 1$ обязательно $t > 0$, т. е. $a \neq \pm 1$.) Итак, условие $(*)$ — критерий в пункте а).

б) Памятуя об известном разложении $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ и стремясь его обобщить, запишем $a=-4b^4$, где $b>0$, и разложим двучлен x^4-a на неприводимые над $\mathbb{R}$:

$$x^4-a=x^4+4b^4=(x^2-2bx+2b^2)(x^2+2bx+2b^2). \qquad (15)$$

Поскольку разложение над $\mathbb{R}$ единственно, то над $\mathbb{Q}$ двучлен либо неприводим, либо раскладывается точно так же. Последнее равносильно следующему: $b \in \mathbb{Q} \iff a \in -4\mathbb{Q}^4 \iff$ все k_i кратны 4, кроме показателя при двойке, который сравним с 2 по модулю 4.

в) (Понадобится материал § 5.) Докажем, что при $s \geqslant 2$ над любым полем $K \subseteq \mathbb{C}$:

$$x^{2^s}-a \text{ неприводим над } K \quad \iff \quad a \notin K^2 \text{ и } a \notin -4K^4.$$

$\Rightarrow$ При $a \in K^2$ раскладываем разность квадратов, а при $a \in -4K^4$ раскладываем как в (15).

$\Leftarrow$ Индукция по s. База $s=2$. Пусть $a=d^4$, тогда корни двучлена x^4-a имеют вид $\pm d$, $\pm id$. Сумма или произведение любых двух из них не лежит в K: $-d^2 \notin K$, иначе $a=d^4 \in K^2$; $d \pm id \notin K$, иначе $-4a=d^4(1\pm i)^4=-4d^4 \in K^4$ и $a \in -4K^4$. Шаг $s \to s+1$. По условию $a=c^2$, где $c \notin K$. Имеем

$$x^{2^{s+1}}-a=(x^{2^s}-c)(x^{2^s}+c).$$

Двучлены $x^{2^s} \pm c$ неприводимы над $K(c)$ по предположению индукции, так как $\pm c \notin K(c)^2, -4K(c)^4$. Поскольку разложение двучлена $x^{2^{s+1}}-a$ на неприводимые над $K(c)$ единственно и множители имеют коэффициенты $\pm c \notin K$, то над K двучлен неприводим.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(r^m) \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, "\leqslant 2^s"] \arrow[rr, "\leqslant n"] \arrow[dr, "\leqslant m"'] & & \mathbb{Q}(r) \\
 & \mathbb{Q}(r^{2^s}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 12

г) Пусть $n=2^s m$, где m нечётно, и $r \in \sqrt[n]{a}$. Тогда (рис. 12) двучлен x^n-a неприводим над $\mathbb{Q}$ $\iff$

$$\iff \quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r)=n \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r^m)=2^s, \\ \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r^{2^s})=m \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \text{двучлен } x^{2^s}-a \text{ неприводим над } \mathbb{Q}, \\ \text{двучлен } x^m-a \text{ неприводим над } \mathbb{Q}. \end{cases}$$

С учётом пунктов а) и в) окончательно получаем критерий для $a<0$:

- $s=0, 1$, $m>1$: условие $(*)$;
- $s \geqslant 2$, $m=1$: $a \notin -4\mathbb{Q}^4$;
- $s \geqslant 2$, $m>1$: условие $(*)$ и $a \notin -4\mathbb{Q}^4$.

5. а) Пусть $u = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$, $v = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Тогда

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 2 - 3(u+v),$$

т. е. $u + v$ — корень многочлена $x^3 + 3x - 2$. Он не имеет корней в $\mathbb{Q}$, а потому неприводим и совпадает с $\mu_{u+v}(x)$.

б) Аналогично приходим к многочлену $x^3 + 3x - 14$, но он имеет корень 2, причём единственный действительный ввиду возрастания на $\mathbb{R}$. Значит, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$ и $\mu_2(x) = x - 2$.

6. Если $\alpha \in \mathbb{A}$, $r \in \sqrt[n]{\alpha}$ и $f(\alpha) = 0$, то $g(\alpha) = 0$ для $g(x) = f(x^n)$.

7. *I способ*. Действуем по алгоритму Евклида:

$$x^3 - 2 = (x^2 + x + 3)(x - 1) - 2x + 1,$$
$$x^2 + x + 3 = (2x - 1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{15}{4},$$

$$\frac{15}{4} = g(x) - (g(x)(x-1) - f(x))\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) =$$
$$= f(x)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + g(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}\right).$$

II способ. Можно считать, что $\deg u < 3$ и $\deg v < 2$. Найдём такие a, b, c, d, что

$$(ax + b)(x^3 - 2) - (ax^2 + cx + d)(x^2 + x + 3) = 1,$$

приравняв коэффициенты при $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{cases} -2b - 3d = 1, \\ -2a - 3c - d = 0, \\ -3a - c - d = 0, \\ b - a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c, \\ b = a + c = 3c, \\ d = -\frac{1}{3}(2b+1) = -2c - \frac{1}{3}, \\ c = -3a - d = -4c + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{15}, \\ a = \frac{1}{15}, \\ b = \frac{1}{5}, \\ d = -\frac{7}{15}. \end{cases}$$

8. а) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2 - 3(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{8\sqrt{2}-6} =$$
$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}\right)(8\sqrt{2}+6)}{92}.$$

б) $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = \alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{\alpha+1} = \alpha^2 - \alpha + 1$ (повезло). Либо действуем по описанному алгоритму.

9. Индукция по n: 1) $\Phi_1(x)=x-1$; 2) если $\Phi_k(x)\in\mathbb{Z}[x]$ при всех $k<n$, то

$$\Phi_n(x)=\frac{x^n-1}{\prod_{d|n,d\neq n}\Phi_d(x)}\in\mathbb{Z}[x],$$

так как старшие коэффициенты многочленов в знаменателе равны 1. Это, кстати, способ вычислять круговые многочлены рекуррентно.

10. Пусть $\varepsilon=\dfrac{a+bi}{a-bi}$ — первообразный корень из единицы степени n. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\varepsilon)=\varphi(n)$. С другой стороны, так как $ab\neq 0$, то $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\varepsilon)=$ $=\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(i)=2$. Но $\varphi(n)=2\iff n=3,4,6$ (несложное упражнение). При $n=3,6$ получаем $\mathbb{Q}(\varepsilon)=\mathbb{Q}(i\sqrt{3})\neq\mathbb{Q}(i)$, а $n=4$ подходит: $\varepsilon=\pm i$. Отсюда $a=\pm b$.

11. а) В обозначениях решения задачи 5: $u+v$, $u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $u\varepsilon^2+v\varepsilon$, где $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$. б) 2.

12. Многочлен от y_1, y_2, не меняющийся при перестановках y_1 и y_2, есть линейная комбинация мономов $y_1^k y_2^k$ и выражений

$$y_1^k y_2^{k+l}+y_1^{k+l}y_2^k=y_1^k y_2^k(y_1^l+y_2^l).$$

Сумма в скобках выражается через y_1+y_2 и y_1y_2: раскладываем по биному

$$y_1^l+y_2^l=(y_1+y_2)^l-\ldots$$

и т. д. (получаются такие же выражения, но с меньшими степенями). Далее подставим вместо y_1 и y_2 корни α_1 и α_2 трёхчлена над $\mathbb{Q}$. Он равен $t^2-(\alpha_1+\alpha_2)t+\alpha_1\alpha_2$, поэтому $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\in\mathbb{Q}$. Доказательство при $n>2$ проходит по той же схеме, но гораздо труднее доказать, что всякий симметрический многочлен выражается через так называемые *элементарные симметрические* (аналоги y_1+y_2 и y_1y_2 при $n=2$).

13. Сведём задачу к случаю косинуса:

$$\sin\frac{2\pi}{n}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi(n+4)}{4n}.$$

Знаменатель несократимой дроби, равной $\dfrac{n+4}{4n}$, равен

$$\frac{4n}{(4n,n+4)}=\frac{4n}{(16,n+4)}.$$

С учётом примера 11 имеем

$$\deg\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{4n}{(16,n+4)}\right).$$

В таблице приведены все возможные случаи.

n	$(16, n+4)$	$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{4n}{(16, n+4)}\right)$
нечётно	1	$\frac{1}{2}\varphi(4n) = \varphi(n)$
$2(2m+1)$	2	$\frac{1}{2}\varphi(2n) = \varphi(n)$
$4(2m+1)$	$8(2, m+1)$	$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{2(2m+1)}{(2, m+1)}\right) = \frac{1}{4}\varphi(n),$ так как $\varphi(2(2m+1)) = \varphi(2m+1)$
$8m$	4	$\frac{1}{2}\varphi(n)$

14. Поскольку $\varepsilon_3 = (-1+i\sqrt{3})/2$ и $\varepsilon_6 = \varepsilon_3 + 1$, то $\mathbb{Q}(\varepsilon_3) = \mathbb{Q}(\varepsilon_6) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, а так как

$$\varepsilon_{12} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

то $\mathbb{Q}(\varepsilon_{12}) = \mathbb{Q}(i+\sqrt{3})$. Далее, $\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}^{-1} = \sqrt{3}$, поэтому $\mathbb{Q}(\varepsilon_{12}) \ni \sqrt{3}$, а тогда $\mathbb{Q}(\varepsilon_{12}) = \mathbb{Q}(i+\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.

15. Разложение над каждым из трёх полей получается группировкой корней $(\pm\sqrt{3}\pm i)/2$ многочлена $\Phi_{12}(x)$ на две пары одним из трёх способов:

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$

$\mathbb{Q}(i)$: $(x^2-ix-1)(x^2+ix-1)$

$\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$: $\left(x^2+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

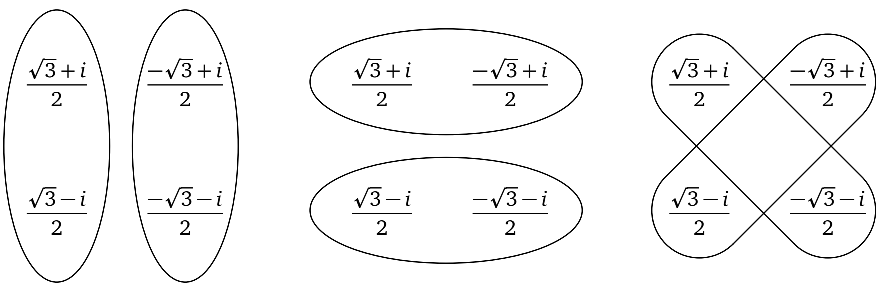


Рис. 13

16. Положим $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ (рис. 14). Расширение $\mathbb{Q}(\alpha) \xrightarrow{d} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ может быть получено присоединением $\sqrt{2}$, поэтому его степень $d \leqslant 2$. Но оно также получается присоединением $\sqrt[3]{3}$, следовательно, двучлен x^3-3 приводим над $\mathbb{Q}(\alpha)$, а тогда имеет в $\mathbb{Q}(\alpha)$ корень. Этим корнем

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, "3"] & \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, "2"] \arrow[r] \arrow[dr, "3"'] & \mathbb{Q}(\alpha) \arrow[r, "d"] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 14

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\varepsilon_m) \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, "\varphi(m)"] \arrow[rr, "\varphi(mn)"] \arrow[dr, "\varphi(n)"'] & & \mathbb{Q}(\varepsilon_m, \varepsilon_n) \\
 & \mathbb{Q}(\varepsilon_n) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 15

$$\begin{tikzcd}
 & & K(\varepsilon_m) = \mathbb{Q}(\varepsilon_m) \arrow[dr, "c"] & \\
\mathbb{Q} \arrow[urr, "\varphi(m)"] \arrow[r, "k"] \arrow[drr, "\varphi(n)"'] & K \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & & K(\varepsilon_m, \varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_m, \varepsilon_n) \\
 & & K(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_n) \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 16

может быть только действительное число $\sqrt[3]{3}$, значит, $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, т. е. $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$, в частности $\deg \alpha = 6$.

17. а) Поскольку $\varepsilon_8 = (1+i)/\sqrt{2}$, то $K = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \varepsilon_8) = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)$ — расширение степени 16: расширение $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2})$ имеет степень 8 (ввиду неприводимости двучлена $x^8 - 2$) и не содержит i.

б) $K = \mathbb{Q}(\alpha, \varepsilon_6)$, где $\alpha = i\sqrt[3]{2}$ и $\varepsilon_6 = (1 + i\sqrt{3})/2$. Поскольку $K \ni \alpha^3 = -2i$, то $K = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$. Это расширение имеет степень 12.

в) $K = \mathbb{Q}(\alpha, \varepsilon_6)$, где $\alpha = i\sqrt[6]{3}$, причём $\alpha^3 = -i\sqrt{3}$, поэтому $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Это расширение степени 6, так как двучлен $x^6 + 3$ неприводим над $\mathbb{Q}$ по признаку Эйзенштейна.

18. Поскольку $(m, n) = 1$, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, $\varepsilon_m \varepsilon_n$ — первообразный корень степени mn из единицы и $\mathbb{Q}(\varepsilon_m, \varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_m \varepsilon_n)$. Из рис. 15 теперь следует, что $\dim_{\mathbb{Q}(\varepsilon_m)} \mathbb{Q}(\varepsilon_m, \varepsilon_n) = \varphi(n)$.

Положим $K = \mathbb{Q}(\varepsilon_m) \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ и $k = \dim_{\mathbb{Q}} K$. Надо доказать, что $k = 1$ (рис. 16). Очевидно, $d \leqslant a$ и $c \leqslant b$. С другой стороны, по доказанному выше получаем $c = \varphi(n)$ и $d = \varphi(m)$. В то же время $ka = \varphi(m)$ и $kb = \varphi(n)$. Итак, $a \geqslant d = \varphi(m) = ka$, откуда $k = 1$.

19. Перейдём к сопряжённым числам:

$$(a - b\sqrt{2})^2 + (c - d\sqrt{2})^2 = 7 - 5\sqrt{2} < 0$$

— противоречие.

20. Сложим данное число с сопряжённым к нему:

$$(6+\sqrt{35})^{1000}+(6-\sqrt{35})^{1000}.$$

Эта сумма целая (по формуле бинома Ньютона). С другой стороны, сопряжённое число очень мало:

$$(6-\sqrt{35})^{1000}=\frac{1}{(6+\sqrt{35})^{1000}}<\frac{1}{10^{1000}},$$

Значит, у исходного числа первые 1000 цифр после запятой — девятки.

21. б) Рассмотрим 2^{99} многочленов $1+\varepsilon_2 x_2+\ldots+\varepsilon_{100}x_{100}$, где все ε_i равны ±1. Их произведение — чётный многочлен по каждой из переменных, а потому имеет вид $f(x_2^2,\ldots,x_{100}^2)$ и целые коэффициенты. В частности, при $x_2=\sqrt{k}$, $k\in\{2,\ldots,100\}$, получается целое число, обозначим его d. Повторив рассуждение с противоположными по знаку многочленами $-1+\varepsilon_2 x_2+\ldots+\varepsilon_{100}x_{100}$, получим то же число d (поскольку количество многочленов чётно). Значит, произведение из условия равно d^2.

Список литературы

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2017.

[2] *Каибханов А., Скопенков А.* Примеры трансцендентных чисел // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО. 2006. С. 176–184.

[3] *Камнев Л.* Иррациональность суммы радикалов // Квант. 1972. № 2. С. 26–27.

[4] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 143–166.

[5] *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел. М.: Академия. 2008.

[6] *Олейников В.* Иррациональность и неприводимость // Квант. 1986. № 10. С. 6–10.

[7] *Сендеров В., Спивак А.* Многочлены деления круга // Квант. 1998. № 1. С. 11–18.

[8] *Фельдман Н.* Алгебраические и трансцендентные числа // Квант. 1983. № 7. С. 2–7.

Андрей Леонидович Канунников, мехмат МГУ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
andrew.kanunnikov@gmail.com

Как придумать построение правильного семнадцатиугольника

А. Л. Канунников

Какие правильные n-угольники можно построить с помощью циркуля и линейки? Этот вопрос интересовал ещё древнегреческих геометров. Они знали построение при $n = 3, 4, 5, 15$ и умели удваивать число сторон. Продвижений не было две тысячи лет, пока в 1796 году не произошёл прорыв: 18-летний Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) научился строить правильный 17-угольник, а вскоре решил задачу окончательно. Это было первое большое открытие будущего «короля математиков», как называли Гаусса, и он им очень дорожил — даже завещал выгравировать на своей могиле правильный 17-угольник, вписанный в круг.

Несмотря на геометрическую постановку задачи, она решается методами алгебры и теории чисел, и Гаусс посвятил ей раздел в своём монументальном труде «Арифметические исследования» [1].

Слово Гауссу:

> «*Читатель может удивиться, что это исследование помещено именно в настоящем труде, который, на первый взгляд, посвящён совершенно чуждому этим вопросам предмету; однако само сочинение убедительно покажет, в какой тесной связи с высшей арифметикой эти вопросы находятся*» [1, с. 509].

> «*В то время как возможность деления круга на три и пять частей была известна уже ко временам Евклида, к этим сведениям на протяжении* 2000 *лет не было добавлено ничего нового…*» [1, с. 571].

При поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, грант «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

Вместе с работами Лагранжа о перестановках корней уравнений (1776) исследования Гаусса подготовили почву для настоящей революции в алгебре. Дело в том, что циркулем и линейкой строятся только те отрезки, длины которых выражаются в квадратных радикалах, а разрешимость уравнений в радикалах (любой степени) — центральная проблема алгебры того времени. Окончательно её решил замечательный математик Эварист Галуа (1811–1832), вдохновлённый идеями Лагранжа и Гаусса. Галуа полностью преобразил алгебру, заложив основы таких её современных разделов, как теория групп и теория полей. Теорию Галуа для двучленных уравнений фактически разработал Гаусс, обобщив и расширив свои исследования по построению правильных многоугольников.

Вершины правильного n-угольника Гаусс интерпретирует как комплексные корни n-й степени из единицы[1]. Ключевая идея Гаусса — группировать их в суммы, которые он называет *периодами*. Далее Гаусс находит те n, при которых эти периоды удаётся выразить в квадратных радикалах. Самое трудное и красивое — упорядочить корни должным образом для разбиения на периоды. Для простых n (к которым всё сводится) это упорядочение становится возможным благодаря замечательному факту — существованию первообразного корня по любому простому модулю. Эта теорема, также впервые доказанная Гауссом, стала настоящей жемчужиной теории чисел и алгебры.

Замечательное открытие Гаусса переплетается и с другими его результатами, ставшими классикой. Недаром оно обсуждается с разных сторон во многих книгах и статьях.

- Периоды Гаусса тесно связаны с его учением о квадратичных вычетах. Так, с помощью периодов Гаусс концептуально передоказал важнейший *квадратичный закон взаимности* [1, с. 643–648]. Упрощённое рассуждение, использующее более поздние идеи, см. в [4].
- В. А. Кириченко [10] частично переизлагает теорию периодов Гаусса на современном языке. Основные цели этого миникурса — «реклама замечательной книги [1] и доступное введение в теорию Галуа».
- П. Ю. Козлов и А. Б. Скопенков [12] приводят два доказательства теоремы Гаусса, предваряя их задачами, подводящими к ключевым идеям. Оба доказательства восходят к оригинальной работе [1] Гаусса, но изложение переработано и содержит оригинальные идеи авторов.

[1] Такая интерпретация была известна уже почти век — она основана на формуле Муавра (1707).

- М. М. Постников [14] излагает теорию Гаусса деления круга, *опираясь на выросшую из неё* теорию Галуа. Этот путь предполагает глубокую алгебраическую подготовку.
- М. Н. Аршинов и Л. Е. Садовский [3, глава 5], а также С. Г. Гиндикин [6, глава «Король математиков»] объясняют построение правильного 17-угольника с помощью группы автоморфизмов, т. е. опять-таки с точки зрения теории Галуа.

Главная цель нашей статьи — показать, как прийти к открытию Гаусса естественным путём, используя сравнительно простые средства — основы теории алгебраических чисел. Им мы посвятили отдельную статью «Алгебраические числа как векторы» [8] в этом выпуске. Там можно найти необходимые определения и обозначения. Мы также передокажем результаты построенной Гауссом теории, используя более современный язык и развитую технику.

§ 1. Что известно из «Начал» Евклида

Задачам на построение циркулем и линейкой и, в частности, построению правильных многоугольников посвящена IV книга трактата Евклида «Начала» (около 300 г. до н. э.) — главного труда античной математики. В нём описано, как по отрезкам a, b, c построить отрезки ab/c и $\sqrt{ab}$ (рис. 1). Это позволяет на числовой прямой с отмеченными точками 0, 1 и $a, b > 0$ отметить точки $a \pm b$, $ab/1$, $(a \cdot 1)/b$, $\sqrt{a \cdot 1}$. Таким образом, можно отметить все числа, которые получаются из рациональных с помощью арифметических действий и извлечения квадратных корней. Такие числа часто называют *поликвадратичными*.

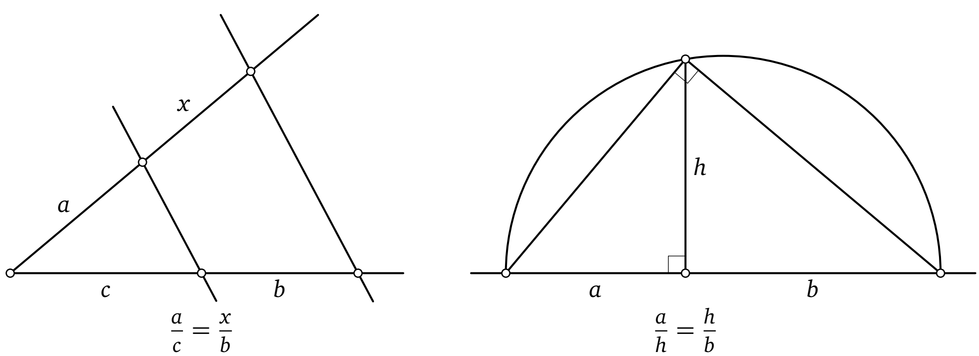


Рис. 1

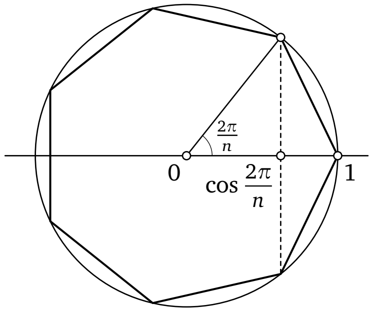


Рис. 2

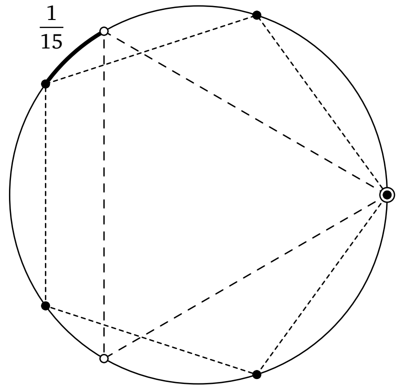


Рис. 3

Заметим теперь, что построение правильного n-угольника или деление окружности на n равных частей равносильно построению числа[2)] $\cos(2\pi/n)$ (рис. 2). При $n = 3, 4$ это тривиально. Случай $n = 5$ посложнее (см., например, [7, задача 5]):

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \tag{1}$$

Чтобы построить правильный 15-угольник, впишем в окружность правильные треугольник и пятиугольник, имеющие общую вершину (рис. 3). Ближайшие из отмеченных точек заключают дугу, равную $1/15$ окружности, поскольку $\frac{1}{15} = 2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$. Вообще, при взаимно простых m и n, имея $1/m$ и $1/n$ части окружности, можно построить $1/(mn)$ её часть: по алгоритму Евклида находим такие целые a и b, что $am + bn = 1$, т. е.

$$\frac{1}{mn} = a \cdot \frac{1}{n} + b \cdot \frac{1}{m}.$$

Наконец, умея строить $1/n$ часть окружности, легко построить и $1/(2n)$ часть, проведя биссектрису угла. Таким образом, с учётом разложения чисел на простые множители задача сведена к такой:

при каких простых $p > 2$ и натуральных k
можно построить правильный p^k-угольник? (2)

Ответ на этот вопрос заведомо положителен, если

$$\text{число } \cos\frac{2\pi}{p^k} \text{ поликвадратично.} \tag{3}$$

2) Построить число $a \in \mathbb{R}$ — значит отметить точку с координатой a на числовой прямой (здесь и далее — циркулем и линейкой). Фраза «построить отрезок длины a» осмысленна только при $a > 0$.

Выполняется ли это условие для каких-то ещё знаменателей вида p^k, кроме 3 и 5? Является ли оно не только достаточным, но и необходимым? На эти вопросы никто не знал ответов до конца XVIII века…

§ 2. Почему вдруг 17?

Забегая вперёд, отметим, что правильный 17-угольник можно построить с помощью полученной Гауссом [1, с. 571] формулы, которая после упрощений принимает вид

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{\sqrt{17}-1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}. \quad (4)$$

Покажем, как вывести эту формулу, а также как установить поликвадратичность числа $\cos(2\pi/17)$ без вычислений. Но обо всём по порядку.

Условие (3) на самом деле является и достаточным, и необходимым ввиду следующей теоремы.

Теорема 1. *Поликвадратичные числа и только они строятся циркулем и линейкой.*

Основные идеи доказательства. В § 1 мы показали, что действительные поликвадратичные числа строятся. Переход от построения «реальных отрезков» к «мистическим мнимым числам» заслуживает комментария. Комплексные числа — вполне реальные точки на плоскости, и их тоже можно отмечать циркулем и линейкой. Имея на комплексной плоскости точки $0, 1$ и $a, b \neq 0$, совсем легко построить точки $a \pm b$ и также несложно построить точки ab, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$: модули строятся как в § 1, а аргументы (углы) соответственно складываются (для ab), вычитаются (для a/b) и делятся пополам (для $\sqrt{a}$). Итак, любые (комплексные) поликвадратичные числа строятся циркулем и линейкой.

В обратную сторону теорема не столь очевидна, хотя главная идея лежит на поверхности: циркулем и линейкой строятся прямые и окружности, а они задаются линейными и квадратными уравнениями. Вот более подробное рассуждение.

Пусть уже построено некоторое множество чисел и все они поликвадратичны. Казалось бы, мы можем только проводить прямые и окружности через построенные комплексные числа на плоскости, а также строить окружности построенных радиусов с построенными центрами. Все такие прямые и окружности задаются уравнениями степени 1 и 2 с поликвадратичными коэффициентами, а значит, точки пересечения имеют поликвадратичные координаты. Однако нельзя забывать, что при построении можно также выбирать произвольные точки, причём иногда это просто необходимо (попробуйте, к примеру, построить центр данной окружности). Конечно, произвольные точки не считаются построенными циркулем и линейкой, но точка, полученная с их помощью и *не зависящая от их выбора*, считается построенной. А раз так, то произвольные точки можно считать поликвадратичными. Также следует учесть, что в ряде случаев произвол ограничен: точка случайно выбирается на данной прямой или окружности, а то и вовсе *достаточно близко* к уже построенной. Остаётся заметить, что множество поликвадратичных чисел содержит всюду плотное подмножество $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. За более полным и детальным доказательством мы отсылаем читателя к [14, глава 5], [16].

Теорема 1 прокладывает мостик от геометрической формулировки (2) к эквивалентной алгебраической (3), поэтому мы откладываем в сторону циркуль и линейку и вооружаемся инструментами из алгебры — алгебраическими числами и расширениями полей. Основы этой теории начали формироваться как раз в трактате Гаусса [1], были существенно развиты в работах Галуа, а полностью были разработаны во второй половине XIX века усилиями Куммера, Кронекера, Гильберта и др. Вы можете ознакомиться с ними по статье «Алгебраические числа как векторы» [8] в этом выпуске.

Переформулируем условие поликвадратичности на языке расширений полей. Поскольку присоединение квадратного радикала приводит к расширению степени 2, то всякое поликвадратичное число α содержится в некоторой башне полей вида

$$\mathbb{Q}=K_0 \xrightarrow{2} K_1 \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} K_m. \tag{5}$$

По теореме о размерности башни [8, теорема 9] получаем

$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \mid [K_m:\mathbb{Q}]=2^m,$$

а по теореме [8, теорема 8] получаем $\alpha \in \mathbb{A}$ и $\deg\alpha=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$[3]. Мы доказали простое, но важное необходимое условие поликвадратичности.

Теорема 2. *Всякое поликвадратичное число — алгебраическое, и его степень есть степень двойки.*

[3] Напомним, что $\deg\alpha$, где α — алгебраические число, — это степень минимального многочлена числа α.

Это условие не достаточно, см. далее задачу 2.

Итак, для выполнения условия (3) необходимо, чтобы $\deg\cos(2\pi/p^k)$ было степенью двойки.

Пример 1. Найдём минимальные многочлены для чисел $\cos\frac{2\pi}{9}$ и $\cos\frac{2\pi}{7}$.

а) По формуле тройного угла

$$4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

откуда $\cos(2\pi/9)$ — корень многочлена $8x^3-6x+1$. Этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ (после замены $2x=y$ получаем многочлен y^3-3y+1, не имеющий рациональных корней), а потому является минимальным для числа $\cos(2\pi/9)$.

б) Сумма комплексных корней двучлена x^7-1 по теореме Виета равна 0, поэтому сумма их действительных частей

$$1+2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}$$

тоже равна 0. Обозначив $c=\cos(2\pi/7)$, имеем:

$$1+2c+2(2c^2-1)+2(4c^3-3c)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (2c)^3+(2c)^2-2(2c)-1=0.$$

При этом многочлен y^3+y^2-2y-1 не имеет корней в $\mathbb{Q}$.

Значит, $\deg\cos(2\pi/7)=\deg\cos(2\pi/9)=3$, поэтому *правильные семиугольник и девятиугольник построить нельзя*.

В общем случае работать с косинусом неудобно. Скажем, для чисел $\cos(2\pi/13)$ и $\cos(2\pi/17)$ такие рассуждения, как в примере 1б, приведут (после громоздких вычислений) к многочленам степеней 6 и 8 соответственно, и для доказательства их неприводимости над $\mathbb{Q}$ уже будет недостаточно отсутствия рациональных корней. Препятствие преодолевается изящно и естественно. Вспомним, откуда вообще взялся косинус. Это абсцисса вершины правильного n-угольника (рис. 2), или, алгебраически, действительная часть корня из единицы

$$\varepsilon_n=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}. \tag{6}$$

Будучи корнем двучлена, число ε_n гораздо удобнее для исследования[4)], нежели $\cos(2\pi/n)$, причём они оба либо строятся циркулем и линейкой,

[4)] Гаусс: «*Между тем ни одно уравнение не является столь простым для рассмотрения и удобным для нашей цели, как уравнение $x^n-1=0$ …*» [1, с. 512]. О связи минимальных многочленов чисел ε_n и $\cos(2\pi/n)$ см. также [8, пример 11].

либо нет. Отметим, что восстановление вершин ε_n и ε_n^{-1} по их проекции $\cos(2\pi/n)$ (рис. 2) — геометрическое решение квадратного уравнения

$$x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\varepsilon_n,\varepsilon_n^{-1}.$$

В частности, при $n>2$ (когда $\varepsilon_n\neq\pm1$) имеем

$$\mathbb{Q}\Bigl(\cos\frac{2\pi}{n}\Bigr)\xrightarrow{2}\mathbb{Q}(\varepsilon_n) \quad\text{и}\quad \deg\varepsilon_n=2\deg\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Итак, нам нужно найти минимальный многочлен $\mu_{\varepsilon_n}(x)$ для $n=p^k$. Гаусс [1, п. 341] рассмотрел только случай $k=1$, доказав довольно сложным методом, что многочлен

$$\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$, а значит, $\Phi_p(x)=\mu_{\varepsilon_p}(x)$. Позднее нашли простое доказательство: сделать замену $x-1=y$ и применить признак Эйзенштейна [8, теорема 1], согласно которому многочлен

$$\Phi_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+py^{p-2}+\ldots+C_p^ky^{k-1}+\ldots+C_p^2y+p \quad (7)$$

неприводим, так как $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ кратно p при $k=1,\ldots,p-1$.

Более общо: число ε_{p^k} является корнем многочлена

$$\Phi_{p^k}(x)=\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}=\Phi_p(x^{p^{k-1}})$$

степени p^k-p^{k-1} (среди корней степени p^k из единицы исключаем корни степени p^{k-1}).

Задача 1. Докажите, что многочлен $\Phi_{p^k}(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. (Мы определили в [8, пример 9] круговые многочлены $\Phi_n(x)$ и упомянули без доказательства, что они неприводимы для любого n.)

Из задачи 1 следует, что $\deg\varepsilon_{p^k}=p^{k-1}(p-1)$. Когда это число — степень двойки? Ввиду нечётности p, тогда и только тогда, когда $k=1$ и $(p-1)$ — степень двойки: $p-1=2^l$. Если l делится на нечётное d, то 2^l+1 делится на $2^{l/d}+1$. Поскольку $2^l+1=p$ — простое, с необходимостью $d=1$. Значит, l не имеет нечётных делителей, кроме единицы, т. е. l — степень двойки, и p имеет вид $F_j=2^{2^j}+1$, где j целое неотрицательное. Числа такого вида называются *числами Ферма*. Первые пять из них простые:

$$F_0=3,\quad F_1=5,\quad F_2=17,\quad F_3=257,\quad F_4=65\,537.$$

Ферма полагал, что все F_j простые, но Эйлер это опроверг, показав, что $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ кратно 641. До сих пор неизвестно, существуют ли другие простые числа Ферма. (См. [9], где связь чисел Ферма с построением правильных многоугольников объясняется другим интересным способом.)

Итак, «круг подозреваемых» резко сузился, и мы подошли к главному вопросу: *для каких простых чисел Ферма p можно построить правильный p-угольник*? Важно понимать, что ответ «для всех» не следует из теоремы 2, ведь она даёт лишь необходимое условие поликвадратичности, надежду построить башню (5), для которой $K_m \supseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_p)$.

Задача 2. а) Докажите, что сопряжённые (т. е. корни того же минимального многочлена) с поликвадратичными числами тоже поликвадратичны. б) Пользуясь этим, приведите пример неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена степени 4, корни которого не поликвадратичны.

Оказывается, *построить башню можно для всех простых чисел Ферма*, и в этом состоит замечательный результат Гаусса — наиболее сложная часть следующей знаменитой теоремы.

Теорема 3 (Гаусс — Ванце́ль). *Правильный n-угольник строится циркулем и линейкой в точности тогда, когда n — произведение степени двойки и различных простых чисел Ферма* (*возможно, ни одного*).

На самом деле Гаусс доказал только утверждение «если». Вот что он пишет [1, с. 572] по поводу того, что других n нет: «Хотя границы нашего сочинения не позволяют провести этого доказательства, мы думаем, что надо всё же на это указать для того, чтобы кто-либо не пытался искать ещё других случаев, кроме тех, которые указаны нашей теорией, например, не надеялся бы свести на геометрические построения деление окружности на $7, 11, 13, 19, \ldots$ частей и не тратил бы зря своего времени». Аккуратное доказательство всё же следовало провести, и это сделал французский математик Пьер Ванцель [2] — выше мы фактически воспроизвели его рассуждение. Отметим, что Ванцель известен главным образом работой [2], в которой он доказал неразрешимость ещё двух классических задач на построение, также восходящих к древним грекам.

Теорема 4 (Ванцель [2]). *Удвоение куба и трисекция угла невыполнимы циркулем и линейкой.*

В самом деле, удвоение куба равносильно построению числа $\sqrt[3]{2}$, имеющего, очевидно, степень 3. А доказанная выше невозможность построить правильный девятиугольник (пример 1а) равносильна невыполнимости трисекции угла $2\pi/3$. (Неразрешимость третьей знаменитой проблемы —

квадратуры круга — следует из трансцендентности числа π, доказанной Линдеманом в 1882 году.)

Вот мы и поняли, «почему вдруг 17»: это следующее за пятёркой простое число Ферма. Теперь главное: как построить башню, оставаясь в рамках элементарной теории алгебраических чисел.

§ 3. Как прийти к периодам Гаусса

Разберём подробно случай $p = 17$. Положим $\varepsilon = \varepsilon_{17} = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$. Попробуем построить башню квадратичных расширений

$$\mathbb{Q} = K_0 \xrightarrow{2} K_1 \xrightarrow{2} K_2 \xrightarrow{2} K_3 \xrightarrow{2} K_4 = \mathbb{Q}(\varepsilon). \tag{8}$$

Как найти промежуточные поля K_1, K_2, K_3? Все числа из $K_1 \setminus \mathbb{Q}$ имеют степень 2 над $\mathbb{Q}$, все числа из $K_2 \setminus K_1$ имеют степень 2 над K_1, а значит, степень 4 над $\mathbb{Q}$ и т. д. Степень алгебраического числа, напомним, равна количеству сопряжённых с ним. Поле $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ имеет базис $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{15}$ над $\mathbb{Q}$ [8, теорема 8]. Вместо 1 можно взять ε^{16} — они взаимозаменяемы ввиду равенства $1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{16} = 0$. Так удобнее, поскольку

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{15}, \varepsilon^{16} \tag{9}$$

— это не только базис, но и набор сопряжённых чисел. Разложим произвольное $\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ по этому базису:

$$\alpha = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{16}\varepsilon^{16}, \quad \text{где } a_1, \ldots, a_{16} \in \mathbb{Q}. \tag{10}$$

Это многочлен от ε, и в такой ситуации список сопряжённых с α даёт следующая теорема.

Теорема 5 [8, теорема 6]. *Если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — все сопряжённые с алгебраическим числом β, то для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ все сопряжённые с $f(\beta)$ суть $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$.*

Таким образом, подставив в (10) вместо ε его сопряжённые $\varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{16}$, получим все сопряжённые с α:

$$\begin{gathered} a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \ldots, \\ a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^4 + a_3\varepsilon^6 + \ldots, \\ a_1\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^6 + a_3\varepsilon^9 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{11}$$

Среди этих чисел *какие-то должны повторяться,* коль скоро $\deg\alpha < 16$. Показатели степеней в k-й сумме из (11) равны $k, 2k, 3k, \ldots, 16k$ и дают все ненулевые остатки при делении на 17. Поэтому, заменив показатели их остатками, мы получим разложения по тому же базису (9). Например, второе число равно

$$a_1\varepsilon^2+a_2\varepsilon^4+\ldots+a_8\varepsilon^{16}+a_9\varepsilon+\ldots+a_{16}\varepsilon^{15}.$$

Таким образом, равенство каких-то из чисел (11) означает равенство их коэффициентов при одинаковых степенях ε. К сожалению, эти степени перемешиваются хаотично, оттого условия на коэффициенты получаются громоздкими.

Чтобы решить проблему, *переупорядочим* базисные элементы (9) так, чтобы при подстановке в них вместо ε любого сопряжённого числа они сдвигались по циклу. Попробуем, например, расположить степени ε так, чтобы при подстановке ε^2 вместо ε они сдвинулись по циклу на единицу. Тогда после ε будет стоять ε^2, затем $(\varepsilon^2)^2=\varepsilon^{2^2}$, $(\varepsilon^2)^{2^2}=\varepsilon^{2^3}$ и т. д. Выпишем ли мы так весь ряд (9)? Так как $2^4\equiv-1 \pmod{17}$, то $2^8\equiv 1 \pmod{17}$, поэтому девятым числом окажется $\varepsilon^{2^8}=\varepsilon$, т. е. зацикливание произойдёт раньше времени и мы выпишем лишь половину степеней ε. Не стоит огорчаться — мы просто не угадали с *первообразным корнем* по модулю 17 — двойка им не является. По определению, целое a называется первообразным корнем по модулю простого p, если степени $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ дают все ненулевые остатки при делении на p. Легко проверить, что по модулю 17 одним из первообразных корней является тройка. Поэтому, последовательно возводя ε в куб, мы выпишем все числа (9), см. рис. 4:

$$\{1,3,3^2,\ldots,3^{15}\}\equiv\{1,2,\ldots,16\} \pmod{17} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \{\varepsilon,\varepsilon^3,\varepsilon^{3^2},\ldots,\varepsilon^{3^{15}}\}=\{\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\ldots,\varepsilon^{16}\}.$$

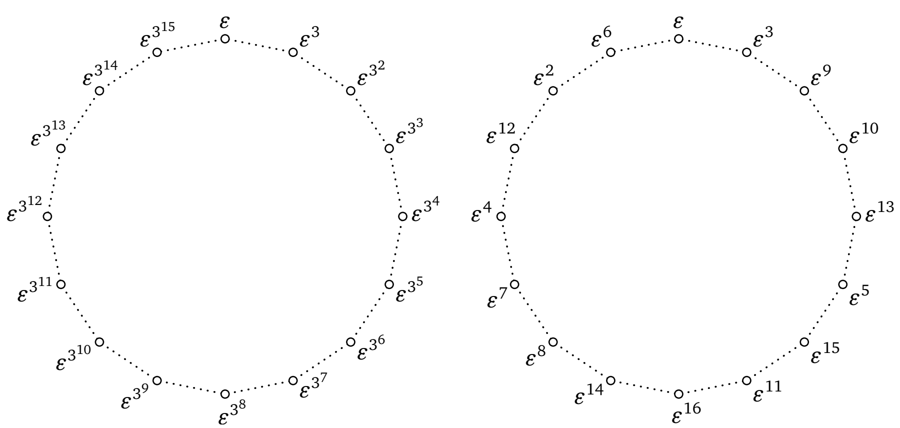


Рис. 4

Задача 3. Пусть целое a не кратно простому p. Как известно, по малой теореме Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Пусть k — наименьшее натуральное число со свойством $a^k \equiv 1 \pmod p$.

а) Докажите, что $k \mid p-1$.

б) Докажите следующее: a — первообразный корень по модулю $p \iff$ $\iff k = p-1 \iff k \neq (p-1)/q$ ни для какого простого делителя q числа $p-1$. (Например, при $p = 17$ это значит, что $a^{(17-1)/2} = a^8 \not\equiv 1 \pmod{17}$. Этому условию не удовлетворяет $a = 2$: $2^8 = 16^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{17}$, зато удовлетворяет $a = 3$: $3^8 = 81^2 \equiv (-4)^2 \equiv -1 \pmod{17}$.)

Феликс Клейн [11, с. 45]:

«30 мая 1796 года для Гаусса[5)] *наступает день его творческого крещения... Гаусс уже в течение долгого времени занимался группировкой корней из единицы, опираясь на созданную им теорию „первообразных корней“. И вот однажды утром, когда он был ещё в постели, он внезапно ясно и отчётливо осознал, что из его теории следует возможность построения правильного семнадцатиугольника. Как мы уже отмечали, это событие оказалось поворотным пунктом в жизни Гаусса. Он принимает решение полностью посвятить себя не филологии, а математике».*

Выпишем сопряжённые с произвольным числом из $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, разложенным по переупорядоченному базису.

Следствие 1 (теоремы 5). *Сопряжённые с любым числом* $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ *имеют вид*:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_{15}\varepsilon^{3^{15}},\\
\alpha_1 &= a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_0\varepsilon^{3^{15}},\\
\alpha_2 &= a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_1\varepsilon^{3^{15}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{14} &= a_{14}\varepsilon + a_{15}\varepsilon^3 + a_0\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_{13}\varepsilon^{3^{15}},\\
\alpha_{15} &= a_{15}\varepsilon + a_0\varepsilon^3 + a_1\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_{14}\varepsilon^{3^{15}},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $a_0, \ldots, a_{15} \in \mathbb{Q}$.

Теперь, когда коэффициенты в каждой строчке получаются циклическим сдвигом из предыдущей, приравнивать их не составляет труда. Так, если $\alpha_0 = \alpha_1$, то по цепочке $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{15}$, поэтому все α_i равны $a_0(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{16}) = -a_0$. Если $\alpha_0 = \alpha_2$, то коэффициенты повторяются через один: $a_0 = a_2 = \ldots = a_{14}$ и $a_1 = a_3 = \ldots = a_{15}$, поэтому числа α_j тоже

[5)] Напомним, ему всего 18 лет.

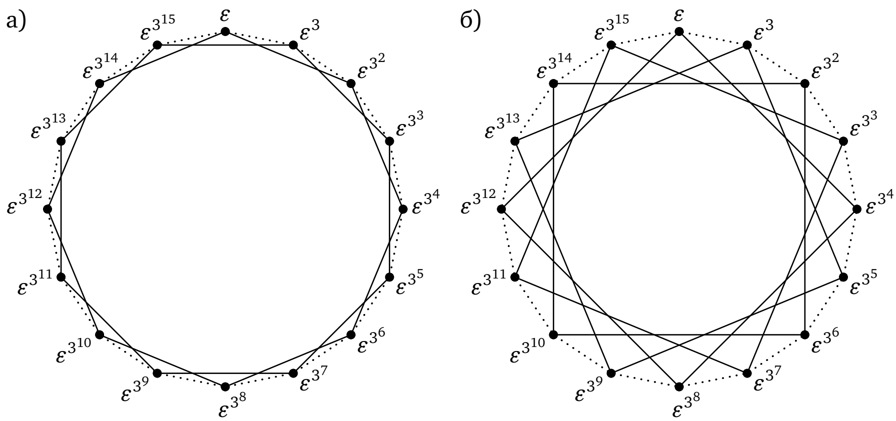


Рис. 5

повторяются через один. Важный пример такой пары чисел — две суммы степеней ε, взятых через одну:

$$\theta_0 = \varepsilon + \varepsilon^{3^2} + \varepsilon^{3^4} + \ldots + \varepsilon^{3^{14}}, \quad \theta_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{3^3} + \varepsilon^{3^5} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}}. \tag{13}$$

Гаусс называет их 2-*периодами* (рис. 5а). Поскольку они сопряжены и имеют степень 2, они образуют пару корней квадратного уравнения над $\mathbb{Q}$. Вскоре мы покажем, как его составить (что и делал Гаусс), но сейчас продолжим рассуждение без вычислений — путь к башне прощупывается! Взяв в 2-периодах каждое второе слагаемое, получим 4-*периоды* (рис. 5б), которые в свою очередь разбиваются на 8-*периоды* (на картинке это диаметры). Периоды одной длины Гаусс называет *однотипными*.

Замечание. 8-периоды равны удвоенным косинусам:

$$\varepsilon^{3^k} + \varepsilon^{3^{k+8}} = \varepsilon^{3^k} + \varepsilon^{-3^k} = 2\cos\frac{2\pi \cdot 3^k}{17}, \quad k = 1, \ldots, 8.$$

Периоды удобно организовать в таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4">$\theta_0=\varepsilon+\varepsilon^{3^2}+\varepsilon^{3^4}+\ldots+\varepsilon^{3^{14}}$</td><td colspan="4">$\theta_1=\varepsilon^3+\varepsilon^{3^3}+\varepsilon^{3^5}+\ldots+\varepsilon^{3^{15}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon^{3^4}+\varepsilon^{3^8}+\varepsilon^{3^{12}}}_{\theta_{00}}$</td><td colspan="2">$\underbrace{\varepsilon^{3^2}+\varepsilon^{3^6}+\varepsilon^{3^{10}}+\varepsilon^{3^{14}}}_{\theta_{01}}$</td><td colspan="2">$\underbrace{\varepsilon^3+\varepsilon^{3^5}+\varepsilon^{3^9}+\varepsilon^{3^{13}}}_{\theta_{10}}$</td><td colspan="2">$\underbrace{\varepsilon^{3^3}+\varepsilon^{3^7}+\varepsilon^{3^{11}}+\varepsilon^{3^{15}}}_{\theta_{11}}$</td></tr>
<tr><td>$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon^{3^8}}_{\theta_{000}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^4}+\varepsilon^{3^{12}}}_{\theta_{001}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^2}+\varepsilon^{3^{10}}}_{\theta_{010}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^6}+\varepsilon^{3^{14}}}_{\theta_{011}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^3+\varepsilon^{3^9}}_{\theta_{100}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^5}+\varepsilon^{3^{13}}}_{\theta_{101}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^3}+\varepsilon^{3^{11}}}_{\theta_{110}}$</td><td>$\underbrace{\varepsilon^{3^7}+\varepsilon^{3^{15}}}_{\theta_{111}}$</td></tr>
</table>

Обратите внимание, что при замене ε на ε^3 периоды не разрушаются, а лишь переставляются с однотипными, при этом структура таблицы сохраняется.

Как периоды помогут нам построить башню (8)? Поскольку d-периоды имеют степень d, имеем $[\mathbb{Q}(\theta_*) : \mathbb{Q}] = 2$, $[\mathbb{Q}(\theta_{**}) : \mathbb{Q}] = 4$ и т. д. Казалось бы, искомая башня имеет вид

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\theta_*) \subset \mathbb{Q}(\theta_{**}) \subset \mathbb{Q}(\theta_{***}) = \mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi}{17}\Big) \subset \mathbb{Q}(\varepsilon), \tag{14}$$

но… включения не очевидны! Возникают следующие вопросы:

Q1 *Верны ли какие-нибудь включения вида* (14)?
Q2 *Верны ли равенства*

$$\mathbb{Q}(\theta_0) = \mathbb{Q}(\theta_1), \quad \mathbb{Q}(\theta_{00}) = \mathbb{Q}(\theta_{01}) = \mathbb{Q}(\theta_{10}) = \mathbb{Q}(\theta_{11}) \quad \textit{и т. д.?}$$

Чтобы ответить на эти вопросы, опишем все возможные совпадения среди чисел (12). Пусть есть какое-то совпадение: $\alpha_j = \alpha_{j+d}$ для некоторых j и d. Тогда

$$\begin{gathered}\text{коэффициенты } a_k \text{ повторяются с шагом } d \text{ по кругу:}\\ a_k = a_l \text{ при всех } k \equiv l \pmod d,\\ \text{а тогда с тем же шагом повторяются и сами числа (12).}\end{gathered} \tag{15}$$

Если при этом $d > 0$ выбрано наименьшим, то d делит 16 (если $16 = dq + r$, $0 \leqslant r < d$, то $\alpha_0 = \alpha_d = \alpha_{2d} = \ldots = \alpha_r$, откуда $r = 0$) и различных среди чисел (12) ровно d. *Это и есть* $\deg\alpha$. (В частности, при $d = 16$ совпадений нет и $\deg\alpha = 16$.) Теперь для каждого делителя d числа 16 рассмотрим множество U_d чисел $\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию (15). В этом условии не требуется минимальность d, поэтому

$$U_d = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon) \mid \deg\alpha \leqslant d\} = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon) \mid \deg\alpha \text{ — делитель } d\}. \tag{16}$$

Теперь включения очевидны:

$$\mathbb{Q} = U_1 \subset U_2 \subset U_4 \subset U_8 \subset U_{16} = \mathbb{Q}(\varepsilon),$$

но возникает новый вопрос:

Q3 *Почему U_d — поля?*

Задача 4. Докажите, что:
а) $\mathbb{Q}(\theta_0) = \mathbb{Q}(\theta_1) = U_2$;
б) $\mathbb{Q}(\theta_{000}) = \ldots = \mathbb{Q}(\theta_{111}) = U_8$ (используйте тригонометрию).

Итак, мы поняли, как прийти к открытым Гауссом периодам, но теперь надо завершить рассуждение, в правильности которого сомнений нет. Надо ответить на вопрос Q1 или равносильный ему Q3.

§ 4. Завершение доказательства теоремы Гаусса — Ванцеля

Для каждого делителя d числа 16 мы определили множество U_d чисел

$$a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^{3^2} + \ldots + a_{15}\varepsilon^{3^{15}},$$

у которых коэффициенты a_k повторяются с шагом d по кругу. Вынося повторяющиеся коэффициенты за скобки, получим в скобках суммы степеней ε с шагом d, т. е. не что иное как d-периоды. Обозначим их $\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}$ — тогда каждое число из U_d однозначно запишется в виде

$$a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + \ldots + a_{d-1}\sigma_{d-1}.$$

Это значит, что U_d — векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}$. В частности, U_d замкнуто относительно сложения и вычитания, но нужна ещё замкнутость относительно умножения и деления. Следующая теорема даёт ответы на все вопросы Q1, Q2, Q3.

Теорема 6. *Для любого d-периода σ_j имеем $U_d = \mathbb{Q}(\sigma_j)$. В частности, U_d — поле.*

Доказательство. Как мы отметили, $\dim_{\mathbb{Q}} U_d = d$. Поле $\mathbb{Q}(\sigma_j)$ тоже имеет размерность d над $\mathbb{Q}$, поэтому достаточно доказать включение $\mathbb{Q}(\sigma_j) \subseteq U_d$. Но U_d состоит из чисел, у которых не более d сопряжённых, см. (16). А всякое число из $\mathbb{Q}(\sigma_j)$ имеет вид $f(\sigma_j)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, и по теореме 5 его сопряжённые суть $f(\sigma_0), \ldots, f(\sigma_{d-1})$, среди которых, очевидно, не более d различных. □

Итак, башня квадратичных расширений для 17-угольника построена.

Задача 5. Модифицируя доказательство теоремы 6, покажите, что полями U_d ($d = 1, 2, 4, 8, 16$) исчерпываются все подполя в $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Тем самым, построенная башня единственна.

Построение башни для любого простого числа Ферма p аналогично — нужно только найти первообразный корень по модулю p. Напомним, это такое целое g, что $\{1, 2, \ldots, p-1\} \equiv \{1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}\} \pmod p$. Его существование — ещё один блестящий результат Гаусса, классика теории чисел.

Теорема 7 [1, п. 54]. *По любому простому модулю существует первообразный корень.*

Задача 6. Найдите какие-нибудь первообразные корни по модулям 7, 11, 13. (Воспользуйтесь задачей 3.)

Задача 7. Докажите теорему 7 в интересующем нас случае, когда p — простое число Ферма. Воспользуйтесь тем, что $\mathbb{Z}_p$ — поле и что многочлен степени n с коэффициентами из любого поля имеет не более n корней.

Легко проследить, что последующие рассуждения аналогичны разобранному случаю $p=17$: многочлен $\Phi_p(x)=(x^p-1)/(x-1)$ неприводим над $\mathbb{Q}$ (см. § 2) и имеет множество корней $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}\}=\{\varepsilon, \varepsilon^g, \ldots, \varepsilon^{g^{p-2}}\}$, где $\varepsilon=\cos(2\pi/p)+i\sin(2\pi/p)$. Определяем периоды. Для этого разбиваем сумму $\varepsilon+\varepsilon^g+\varepsilon^{g^2}+\ldots+\varepsilon^{g^{p-2}}$ на две — с чётными и нечётными номерами (это 2-периоды). Каждую из этих сумм разбиваем так же ещё на две, и т. д. ($p-1$ — степень двойки). Теорема 6, очевидно, справедлива и в этой общей ситуации, и мы заключаем, что от поля $\mathbb{Q}$ к полю $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ можно прийти последовательными квадратичными расширениями. Теорема 3 Гаусса — Ванцеля полностью доказана.

Конструктивно ли наше доказательство, т. е. можно ли с его помощью построить правильный p-угольник? Да, поскольку каждое расширение степени 2 получается присоединением квадратного радикала [8, теорема 9], который вычисляется алгоритмически. Проще всего последовательно присоединять сами периоды, имея в виду их следующее свойство.

Теорема 8. *Пусть период θ_* (где $*$ — двоичное слово) распался на два: $\theta_*=\theta_{*0}+\theta_{*1}$. Тогда θ_{*0} и θ_{*1} — пара сопряжённых над полем $\mathbb{Q}(\theta_*)$.*

Доказательство. С периодом θ_{*0} сопряжены над $\mathbb{Q}$ все периоды того же типа. По теореме 6 получаем $\mathbb{Q}(\theta_{*0})\supset\mathbb{Q}(\theta_*)$, причём это расширение степени 2, следовательно, период θ_{*0} сопряжён над $\mathbb{Q}(\theta_*)$ ещё ровно с одним однотипным периодом, обозначим его $\theta_?$. Тогда

$$x^2-(\theta_{*0}+\theta_?)x+\theta_{*0}\theta_?\in\mathbb{Q}(\theta_*)[x] \quad \text{и} \quad \theta_{*0}+\theta_?\in\mathbb{Q}(\theta_*).$$

Коэффициенты при степенях ε в сумме $\theta_{*0}+\theta_?$ повторяются с подходящим шагом только при $\theta_?=\theta_{*1}$. □

Таким образом, на каждом шаге нужно вычислять произведение $\theta_{*0}\theta_{*1}$.

Замечание. Сам Гаусс не рассуждал в терминах полей , а последовательно составлял для периодов квадратные уравнения. Также с помощью вычислений с периодами он доказал следующие их свойства, из которых вытекает ответ на вопрос Q2 и частично — на вопрос Q3:

— произведение однотипных периодов равно сумме периодов того же типа [1, с. 522–524];
— каждый период является многочленом над $\mathbb{Q}$ от любого периода того же типа [1, с. 524–526].

§ 5. Вычисление периодов при $p = 17$

2-периоды. При раскрытии скобок в выражении

$$\theta_1\theta_0 = (\varepsilon^3 + \varepsilon^{3^3} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}})(\varepsilon^{3^2} + \varepsilon^{3^4} + \ldots + \varepsilon^{3^{16}}) \tag{17}$$

получится сумма $8^2 = 64$ слагаемых. Как известно, Гаусс вычислял много и с завидной для докомпьютерной эпохи точностью. И хотя рутинные вычисления никогда не были для него преградой, он владел высокой культурой счёта. Ещё в семь лет маленький Карл поразил школьного учителя, быстро сосчитав сумму $1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Вот и произведение (17) Гаусс вычислил с помощью удачной группировки, собрав члены $\varepsilon^{3^{2k+1}}\varepsilon^{3^{2l}}$ с одинаковой разностью $2k + 1 - 2l \pmod{16}$:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^{3+3^2} &+ \varepsilon^{3^3+3^4} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^{16}}) + (\varepsilon^{3+3^4} + \varepsilon^{3^3+3^6} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^2}) + \\ &+ (\varepsilon^{3+3^6} + \varepsilon^{3^3+3^8} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^4}) + (\varepsilon^{3+3^8} + \varepsilon^{3^3+3^{10}} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^6}) + \\ &+ (\varepsilon^{3+3^{10}} + \varepsilon^{3^3+3^{12}} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^8}) + (\varepsilon^{3+3^{12}} + \varepsilon^{3^3+3^{14}} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^{10}}) + \\ &+ (\varepsilon^{3+3^{14}} + \varepsilon^{3^3+3^{16}} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^{12}}) + (\varepsilon^{3+3^{16}} + \varepsilon^{3^3+3^2} + \ldots + \varepsilon^{3^{15}+3^{14}}).\end{aligned}$$

Полученные восемь сумм разбиты на четыре пары, в каждой из которых встречаются все степени $\varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{3^{16}}$ по разу (так как показатели всякий раз выстраиваются в геометрическую прогрессию со знаменателем 3, например, $3 + 3^2 \to 3^3 + 3^2 \to 3^3 + 3^4 \to \ldots$). Каждая такая сумма равна -1, поэтому $\theta_0\theta_1 = -4$. Таким образом, $(x - \theta_0)(x - \theta_1) = x^2 + x - 4$, откуда

$$\theta_0, \theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

(вопрос выбора знаков обсудим позже).

Упростим дальнейшие вычисления, оперируя с 8-периодами или удвоенными косинусами:

$$c_k = 2\cos\frac{2\pi k}{17} = \varepsilon^k + \varepsilon^{-k}, \quad k = 1, \ldots, 8.$$

Они удовлетворяют равенствам $c_k = c_{17-k}$ и $c_k c_l = c_{k+l} + c_{k-l}$, в которых индексы можно рассматривать по модулю 17 ввиду 2π-периодичности косинуса.

4-периоды. Имеем

$$\theta_{00}\theta_{01} = (c_1 + c_4)(c_2 + c_8) = c_3 + c_1 + c_8 + c_7 + c_6 + c_2 + c_5 + c_4 = -1,$$

значит, $(x - \theta_{00})(x - \theta_{01}) = x^2 - \theta_0 x - 1$, откуда

$$\theta_{00}, \theta_{01} = \frac{\theta_0 \pm \sqrt{\theta_0^2 + 4}}{2} = \frac{\theta_0 \pm \sqrt{8 - \theta_0}}{2}.$$

8-периоды. Поскольку $\theta_{000}\theta_{001} = c_1c_4 = c_3 + c_5 = \theta_{10}$, получаем, что

$$\theta_{000}, \theta_{001} = \frac{\theta_{00} \pm \sqrt{\theta_{00}^2 - 4\theta_{10}}}{2}.$$

Памятуя о равенстве $\mathbb{Q}(\theta_{10}) = \mathbb{Q}(\theta_{00})$, выразим θ_{10} через θ_{00}. Проще всего это сделать так:

$$\theta_{00}\theta_{10} = (c_1 + c_4)(c_3 + c_5) = c_2 + c_4 + c_4 + c_6 + c_1 + c_7 + c_1 + c_8 =$$
$$= -1 + c_1 + c_4 - c_3 - c_5 = -1 + \theta_{00} - \theta_{10} \quad \Rightarrow \quad \theta_{10} = \frac{\theta_{00} - 1}{\theta_{00} + 1}.$$

О выборе знаков. В наших формулах три знака $\pm$, и мы пока не знаем, какому знаку отвечает какой период в каждой найденной паре. В этом может помочь тригонометрия: на отрезке $[0; \pi]$ косинус убывает, поэтому $c_1 > \ldots > c_4 > 0 > c_5 > \ldots > c_8$. Далее, $c_1 > c_2 > \cos(\pi/3) = 1/2$ и

$$\theta_0 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + (-1) = 0,$$

значит,

$$\theta_0 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Аналогично можно сравнить и 4-периоды. Интересно, что Гаусс для этой цели использовал десятичные приближения [1, с. 540, п. 354] с избыточной точностью — 10 знаков после запятой! Однако давайте подумаем, так ли обязательно определяться со знаками. Что если просто вместо $\pm$ везде поставить $+$? Именно, последовательно построим отрезки:

$$a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad b = \frac{a + \sqrt{8 - a}}{2}, \quad c = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot \dfrac{b-1}{b+1}}}{2}. \tag{18}$$

Мы знаем, что $c = c_k$ — один из 8-периодов, т. е.

$$\frac{c}{2} = \cos\frac{2\pi k}{17}$$

при каком-то $k \in \{1, \ldots, 8\}$. Так вот, при каком именно — совершенно неважно для построения 17-угольника! Дело в том, что, последовательно откладывая дугу $2\pi k/17$ на окружности 16 раз, мы разделим окружность на 17 равных частей, каким бы ни было k. Просто при $k > 1$ точки деления будут появляться не подряд и мы сделаем несколько оборотов. С алгебраической точки зрения все первообразные корни 17-й степени из единицы равноправны, и в принципе любой из них мы могли бы принять за ε (не обязательно $\cos(2\pi/17) + i\sin(2\pi/17)$).

Задача 8. Определитесь со знаками $\pm$ в парах периодов $\{\theta_{00}, \theta_{01}\}$ и $\{\theta_{000}, \theta_{001}\}$ и убедитесь, что $\theta_{000} = c_1 = c$.

Замечание. Чтобы вывести формулу (4) для $\cos(2\pi/17)$, нужно упростить выражение под последним радикалом в (18). Используя равенства $a^2 = 4 - a$, $b^2 = ab + 1$ и $b = (a + \sqrt{8-a})/2$, можно получить следующую формулу:

$$b^2 - 4 \cdot \frac{b-1}{b+1} = \frac{1}{4}\left(17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}\right).$$

В трактате Гаусса [1, с. 571] стоит $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$ вместо $\sqrt{170 + 38\sqrt{17}}$ (Гаусс выражал θ_{10} в радикалах, а не через θ_{00}). Легко проверить, возведя в квадрат, что эти числа равны.

Для двух других простых чисел Ферма 257 и 65 537 вычисления лучше поручить компьютеру [15]. Впрочем, в XIX веке находились отважные, которые проделывали их вручную. Так, 257-угольник был построен Ришело, а в библиотеке Гёттингенгского университета хранится солидных размеров чемодан с построением 65 537-угольника!.. По этому поводу Дж. Литлвуд [13, с. 43] рассказал следующую историю: «Один слишком навязчивый аспирант довёл своего руководителя до того, что тот сказал ему: „Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами“. Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением...»

§ 6. Связь 2-периодов с квадратичными вычетами

Отдельного внимания заслуживают 2-периоды, тесно связанные с квадратичными вычетами. Любопытно, что построение пятиугольника начинается с $\sqrt{5}$ (см. (1)), а построение 17-угольника — с $\sqrt{17}$. Это не похоже на случайное совпадение. Посмотрим, чему равны 2-периоды

$$\theta_0 = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^4} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-1}}, \quad \theta_1 = \varepsilon^{g} + \varepsilon^{g^3} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-2}}$$

для других простых $p > 2$, не обязательно чисел Ферма. Как и ранее,

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

и g — любой первообразный корень по модулю p. Зависят ли 2-периоды от выбора g? Заметим, что все $(p-1)/2$ показателей $g^2, g^4, \ldots, g^{p-1}$ в периоде θ_0 являются *квадратичными вычетами* по модулю p, т. е., по определению, квадратами ненулевых вычетов. С другой стороны, этих квадратов не больше, чем $(p-1)/2$: все ненулевые вычеты можно записать в симметричной форме $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(p-1)/2$, поэтому их квадраты суть $1^2, 2^2, \ldots, ((p-1)/2)^2$. Итак,

$$\{g^2, g^4, \ldots, g^{p-1}\} \equiv \left\{1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\} \pmod p \tag{19}$$

— это в точности все квадратичные вычеты по модулю p. Значит, *2-периоды не зависят от выбора g*:

$$\theta_0 = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \varepsilon^{k^2}, \quad \theta_1 = -1 - \theta_0. \tag{20}$$

Пример 2. При $p = 3$:

$$\theta_0 = \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \theta_1 = \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Здесь $\theta_1 = \bar\theta_0 \notin \mathbb{R}$, в отличие от случаев $p = 5, 17$.

Задача 9. При $p=7$ имеем $\theta_0 = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon$, $\theta_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5$. Вычислите $\theta_0\theta_1$, а затем найдите θ_0, θ_1. (Вы увидите, что и здесь «замешан» $\sqrt{p}$, а точнее, $\sqrt{-p}$, как и в случае $p = 3$.)

Чтобы обобщить наши наблюдения при $p = 3, 5, 7, 17$ и выдвинуть гипотезу для любого p, давайте поймём, когда 2-периоды действительны (как при $p = 5, 17$), а когда — комплексно-сопряжены (как при $p = 3, 7$). Поскольку сумма сопряжённых чисел действительна, то $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, если сопряжённые корни попадают в один период. В противном случае $\theta_1 = \bar\theta_0$. Обобщим рис. 5а на любое нечётное p. Сопряжённые корни расположены на разных концах диаметров, а в один 2-период попадают корни, идущие через один. Значит, сопряжённые корни окажутся в одном 2-периоде, если число диаметров чётно, и в разных, если нечётно. Число диаметров равно $(p-1)/2$, что чётно при $p \equiv 1 \pmod 4$. Теперь мы готовы сформулировать гипотезу:

$$\{\theta_0, \theta_1\} = \begin{cases} \dfrac{-1 \pm \sqrt{p}}{2} & \text{при } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{p}}{2} & \text{при } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{21}$$

Вот план доказательства (подробности см. [1, с. 545, 868], [4]):

1) рассмотреть сумму $S = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{k^2}$ и показать, что $S = 1 + 2\theta_0$;

2) доказать, что $S\bar S = p$, сгруппировав слагаемые после раскрытия скобок должным образом;

3) $\bar S = \begin{cases} S, & p \equiv 1 \pmod 4, \\ -S, & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \Rightarrow S^2 = \begin{cases} p, & p \equiv 1 \pmod 4, \\ -p, & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \Rightarrow (21).$

Замечание. Определиться в (21) со знаками — задача весьма непростая, и Гаусс думал над ней не один год. В конце концов он доказал, что $S = \sqrt{p}$ при $p \equiv 1 \pmod 4$ и $S = i\sqrt{p}$ при $p \equiv 3 \pmod 4$ [1, с. 594–618]. (Выше при $p = 17, 7$ мы в этом убедились с помощью простых оценок.) На этом пути Гаусс не только передоказал центральный результат теории квадратичных вычетов — квадратичный закон взаимности, но и создал теорию гауссовых сумм, которая и по сей день является мощным средством в аналитической теории чисел. Надеемся, читатель оценил теперь не только красоту открытия Гаусса, но и его огромное значение.

Задача 10. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}) \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_{4004})$.

Решения задач

1. Снова сделаем замену $x = y + 1$:

$$\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}}) = \Phi_p((y+1)^{p^{k-1}}) = f(y).$$

Этот многочлен имеет свободный член $f(0) = \Phi_p(1) = p$. А поскольку

$$(a+b)^{p^s} \equiv a^{p^s} + b^{p^s} \pmod p$$

при всех целых a, b (индукция по s), то

$$f(y) \equiv \Phi_p(y^{p^{k-1}} + 1) \pmod p.$$

Старший коэффициент этого многочлена равен 1, а остальные кратны p по аналогии с (7). Значит, многочлен $f(y)$ неприводим по признаку Эйзенштейна [8, теорема 1].

2. а) Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\sqrt{\alpha}$ одно из значений корня. Возьмём любую бесконечную башню вида

$$\mathbb{Q} = K_0 \xrightarrow{2} K_1 \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} K_m \to \ldots$$

и докажем индукцией по m, что сопряжённые ко всякому $\alpha \in K_m \setminus K_{m-1}$ поликвадратичны. Для $m=1$ это очевидно, пусть $m>1$. Имеем $\alpha = a + b\sqrt{c}$, где $a, b, c \in K_{m-1}$. По предположению индукции сопряжённые к a, b, c поликвадратичны. Остаётся показать, что сопряжённые к α имеют вид $a' \pm b'\sqrt{c'}$, где a', b', c' — сопряжённые к a, b, c. Ввиду [8, теорема 6] достаточно установить, что всякое сопряжённое к $\sqrt{c}$ имеет вид $\pm\sqrt{c'}$. Это так, поскольку $\sqrt{c}$ — корень многочлена $\mu_c(x^2) \in \mathbb{Q}[x]$.

б) Из пункта а) следует, что если α — любое поликвадратичное число, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все его сопряжённые и $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $[L : \mathbb{Q}]$ — степень двойки. Построим при $n = 4$ такое α, что $[L : \mathbb{Q}]$ кратно 3.

Идея Лагранжа решения уравнения 4-й степени с неизвестными корнями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ состоит в переходе к вспомогательному кубическому уравнению с корнями $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3$, оно называется *резольвентой Феррари*. Можно вычислить, что для многочлена $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ резольвента имеет вид

$$R(x) = y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2.$$

Поэтому достаточно подобрать такие $a, b, c \in \mathbb{Q}$, чтобы многочлены P и R были неприводимы над $\mathbb{Q}$. Тогда присоединение к $\mathbb{Q}$ любого корня многочлена R приведёт к расширению степени 3, откуда $3 \mid \dim_{\mathbb{Q}} L$. Подойдут значения $a = 0$, $b = 2$, $c = -2$: многочлен $x^4 + 2x - 2$ неприводим по признаку Эйзенштейна, а многочлен $y^3 + 8y - 4$ неприводим ввиду отсутствия рациональных корней.

Отметим без доказательства такой критерий: *число α поликвадратично в точности тогда, когда степень поля разложения его минимального многочлена есть степень двойки.* Для доказательства, по-видимому, не обойтись без соответствий Галуа [5, с. 471].

3. а) Пусть $p - 1 = kq + r$, где $0 \leqslant r < k$. Тогда $a^r = a^{p-1} : (a^k)^q = 1$, откуда $r = 0$ ввиду минимальности k.

б) Любая степень a сравнима по модулю p ровно с одной из степеней $a, a, a^2, \ldots, a^k \equiv 1$, так как $a^{k+1} \equiv a$ и т. д. Поэтому если все вычеты $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ различны, то $k = p - 1$. Обратно, если $a^m \equiv a^n$ при некоторых $0 \leqslant m < n < k$, то $a^{n-m} \equiv 1$, хотя $n - m < k$. Тем самым первые два условия равносильны. Третье условие, очевидно, равносильно второму.

4. а) $\mathbb{Q}(\theta_0) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\theta_0$, $\mathbb{Q}(\theta_1) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\theta_1$, $U_2 = \mathbb{Q}\theta_0 + \mathbb{Q}\theta_1$, причём $\theta_0 + \theta_1 = -1$, откуда следуют оба равенства.

б) Поскольку $\cos n\phi$ — многочлен Чебышёва от $\cos\phi$, получаем

$$\mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi n}{17}\Big) \subseteq \mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi}{17}\Big).$$

Если $17 \nmid n$, то $nm \equiv 1 \pmod{17}$ для некоторого m, откуда

$$\mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi}{17}\Big) \subseteq \mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi n}{17}\Big).$$

Далее,

$$U_8 = \mathbb{Q}\cos\frac{2\pi}{17} + \ldots + \mathbb{Q}\cos\frac{16\pi}{17} \subseteq \mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi}{17}\Big).$$

Обратное включение следует из равенства размерностей:

$$\dim_{\mathbb{Q}} U_8 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\Big(\cos\frac{2\pi}{17}\Big) = 8.$$

5. Пусть K — любое подполе в $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ и n — наименьшее число со свойством $K \subseteq U_{2^n}$. Тогда K содержит число $\alpha \in U_{2^n} \setminus U_{2^{n-1}}$. Так как $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq K \subseteq U_{2^n}$ и $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg\alpha = 2^n = \dim_{\mathbb{Q}} U_{2^n}$, то $\mathbb{Q}(\alpha) = K = U_{2^n}$.

6. По модулю 7 двойка не подходит: $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, а тройка подходит: $3^2, 3^3 \not\equiv 1 \pmod 7$. По модулям 11 и 13 двойка подходит: $2^2, 2^5 \not\equiv 1 \pmod{11}$ и $2^2, 2^3 \not\equiv 1 \pmod{13}$.

7. Если по модулю простого $p = 2^{2^m} + 1$ нет первообразного корня, то $a^{(p-1)/2} = a^{2^{2^m-1}} \equiv 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p \setminus 0$. Это означает, что многочлен $x^{(p-1)/2} - 1$ имеет в поле $\mathbb{Z}_p$ вдвое больше корней, чем его степень. Противоречие.

8. Поскольку $\theta_{000} = c_1 > c_4 = \theta_{001}$ и $c_2 > c_8$, то $\theta_{00} = c_1 + c_4 > c_2 + c_8 = \theta_{01}$ и в формулах для периодов θ_{00} и θ_{000} следует выбрать знак $+$.

9. Имеем:

$$\begin{aligned}\theta_0\theta_1 &= (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4)(\varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6) = \\ &= \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + 1 + \varepsilon^5 + 1 + \varepsilon^8 + 1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} = \\ &= (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6) + 3 = 2,\end{aligned}$$

откуда θ_0, θ_1 — корни трёхчлена $x^2 + x + 2$, т. е. $\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$. Далее,

$$\operatorname{Im}\theta_0 = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} > 0,$$

поэтому $\theta_0 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ и $\theta_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

Список литературы

[1] *Гаусс К. Ф.* Арифметические исследования. (Др. назв.: Труды по теории чисел.) М.: АН СССР, 1959.

[2] *Wantzel P. L.* Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1837. Vol. 2. P. 366–372.

[3] *Аршинов М. Н., Садовский Л. Е.* Грани алгебры. М.: Факториал пресс, 2008.

[4] *Бурда Ю., Кадец Л.* Семнадцатиугольник и закон взаимности Гаусса // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 61–67.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.

[6] *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2018.

[7] *Канунников А. Л.* Магия комплексных чисел // Квант. 2017. № 5. С. 5–11, 51–52.

[8] *Канунников А. Л.* Алгебраические числа как векторы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 111–142.

[9] *Кириллов А.* О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма // Квант. 1994. № 6. С. 15–18.

[10] *Кириченко В. А.* Построения циркулем и линейкой и теория Галуа. Летняя школа «Современная математика», 2005. http://www.mccme.ru/dubna/2005/material.htm

[11] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1. М.: Наука, 1989.

[12] *Козлов П. Ю., Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 127–143. (Обновляемый текст: https://arxiv.org/abs/0804.4357)

[13] *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990.

[14] *Постников М. М.* Теория Галуа. М.: Факториал пресс, 2003.

[15] *Сафин А.* Программа для построения правильных многоугольников циркулем и линейкой // Московская математическая конференция школьников, 2008. http://www.mccme.ru/mmks/dec08/Safin.pdf

[16] *Хованский А. Г.* Построения циркулем и линейкой // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 42–60.

Андрей Леонидович Канунников, мехмат МГУ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
andrew.kanunnikov@gmail.com

Комбинаторные этюды о танграмах

В. М. Журавлёв

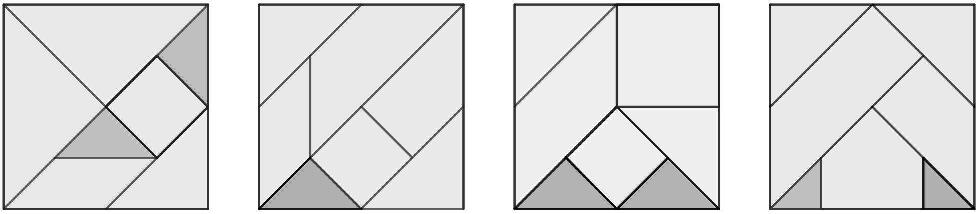
> Комбинаторика, которая всего лишь тридцать лет назад была карликом среди гигантов, превращается в быть может ещё большего гиганта…
>
> *Джан-Карло Рота*

§ 1. Вне времени

Немногим более 30 лет назад вышла из печати[1] книга Мартина Гарднера «Путешествие во времени». В этой книге он посвятил две главы танграмам. Необходимо отметить, что танграмы упоминаются М. Гарднером и в его более ранних книгах, например, в [1]. У Гарднера написано, что самая старая книга, в которой упоминается эта игра, вышла в Китае в 1803 году под названием «Собрание фигур из семи частей». Так что этой головоломке не менее двух веков. В одной из глав Гарднер увлекательно рассказывает историю танграма. Там же упоминается мистификация Сэма Лойда, опубликованная в 1903 году в книге «Восьмая книга Тана».

Интерес к этой головоломке был настолько огромен, что тысячи танграмов в формах людей, животных, букв алфавитов и прочих предметов складывались из разнообразнейших материалов — от простого картона до серебра и фарфора. К примеру, известный писатель Эдгар Аллан По владел танграмом, фигурки которого были вырезаны из слоновой кости. Что касается новейшей истории, то в XXI веке танграмы были выпущены в форме почтовых марок и, более того, банк HSBC использовал танграмы в своей рекламной компании 2005 года. Но история не останавливается, и мы уже видим танграмы в виде игровых приложений к мобильным телефонам.

[1] Книга на английском языке вышла в 1988 г., русский перевод [3] в 1990 г.



а) Классический Танграм — б) Разбиение по Сэй-Сёнагон — в) Головоломка «Пифагор» — г) Занимательный квадрат

Рис. 1. Классический танграм и другие

Удивительно, но всё вышесказанное относится к головоломке, состоящей из семи кусочков простейшей формы, называемых танами. Из этих семи кусочков (танов) можно сложить квадрат (рис. 1а) и ещё тысячу разнообразнейших фигурок (как, например, в книге [11]).

Поэтому Танграм — это больше, чем головоломка. Танграм — вне времени.

Назовём самый маленький из равнобедренных прямоугольных треугольников из набора Танграма *элементарным треугольником* (*элементарным таном*).

Отметим два свойства:

($*$) углы всех танов кратны $\pi/4$, т. е. равны $\pi/4$, $\pi/2$ или $3\pi/4$;

($**$) каждый тан мы можем мысленно разбить на несколько элементарных танов.

Так, квадрат, параллелограмм и один из треугольников разбиваются на два элементарных тана. А каждый из больших треугольников — на четыре элементарных тана.

Можем ли мы разбить квадрат каким-то другим способом на семь частей так, чтобы выполнялись свойства ($*$) и ($**$)? Конечно, можем! Вообще говоря, таких разбиений бесконечно много, но давайте посмотрим на некоторые из них. В той же книге Гарднера [3] дано разбиение квадрата по Сэй-Сёнагон (Sei Shōnagon)[2)] (рис. 1б).

Ещё одно известное в нашей стране разбиение квадрата на семь частей, удовлетворяющее условиям ($*$) и ($**$), находим в учебнике геометрии Д. И. Перепёлкина [14], изданном в 1948 году. Там приводится разбиение квадрата (рис. 1в), названное просто «известной игрой-головоломкой». Автор этой статьи впервые познакомился с «известной иг-

[2)] Вряд ли японская писательница знала о приписываемой ей головоломке.

рой-головоломкой» в детстве, когда его дедушка вырезал её элементы из фанеры. По всей видимости, чертёж был взят из учебника геометрии. Чуть позже советская промышленность выпускала эту игру-головоломку из пластика под названием[3] «Пифагор».

В настоящее время в магазинах игрушек и интернете можно найти головоломку «Занимательный квадрат» (рис. 1г).

Хотя приведённые наборы состоят из разных элементов, составленные из них фигуры мы также будем называть танграмами. Чтобы избежать путаницы, в тексте будем писать без кавычек и с заглавной буквы Танграм, Пифагор тогда, когда мы будем говорить непосредственно о головоломке или наборе элементов этой головоломки.

По мнению М. Гарднера, игра в Танграм распадается на три основные категории:

1) поиск одного или нескольких способов построения данной фигурки или изящного доказательства невозможности такого построения;
2) нахождение способа, позволяющего с наибольшей выразительностью или юмором (или тем и другим вместе) изобразить силуэты животных, людей или других узнаваемых предметов;
3) решение различных задач комбинаторной геометрии, возникающих в связи с составлением фигур из 7 танов.

Учитывая математическую направленность нашей статьи, мы займёмся третьей категорией задач, при этом постараемся не ограничивать себя семью танами. От простых головоломок, связанных с разрезанием фигур, мы перейдём к нетривиальным математическим задачам.

§ 2. Определения

Для наших дальнейших целей классифицируем танграмы.

Прежде всего уберём из нашего рассмотрения танграмы, части которых примыкают друг к другу только в вершине. Будем рассматривать танграмы, у которых граница не имеет самопересечений. Как сказали бы топологи, граница танграма должна быть топологически эквивалентна окружности. По определению А. Р. Рида такие танграмы называются *собственно танграмами*. В качестве наглядного примера на рис. 2 изображены ворона и лисица — несобственно танграм и собственно танграм. Если немного сдвинуть «треугольник, символизирующий ноги вороны», вдоль

[3] Эта головоломка не имеет никакого отношения к древнегреческому математику и философу Пифагору.

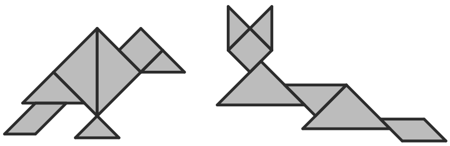


Рис. 2. Ворона — несобственно танграм, лисица — собственно танграм

границы, то мы получим собственно танграм. Поэтому среди собственно танграмов выделим ещё несколько важных подмножеств.

В комбинаторной геометрии рассматриваются *полиформы — плоские или пространственные геометрические фигуры, образованные путём соединения одинаковых ячеек — многоугольников или многогранников*. Наиболее известные из полиформ — фигуры, составленные из одинаковых квадратов — полимино, из одинаковых правильных треугольников — полиамонды и из одинаковых правильных шестиугольников — полигексы (см., например, [4]).

Идея рассмотрения фигур, составленных из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников по принципу «катет к катету, гипотенуза к гипотенузе», прослеживается также у М. Гарднера в книге [2]. Так составленные фигуры получили название *полиаболо* (n-аболо) (рис. 3). В литературе можно встретить и другие названия для таких фигур, например *супертанграмы* или *политаны*. Название «точно подогнанный танграм», предложенное в [3], нам кажется довольно громоздким, поэтому при дальнейшем изложении мы будем применять названия «политаны», «полиаболо» («n-аболо») или «танграмы» (опуская приставку «супер»). Название «полиаболо» предложено С. Дж. Коллинзом по аналогии с названиями полимино, полиамондов и других полиформ. Существует один монаболо — элементарный треугольник, три — диаболо, четыре — триаболо, 14 — тетраболо (рис. 3).

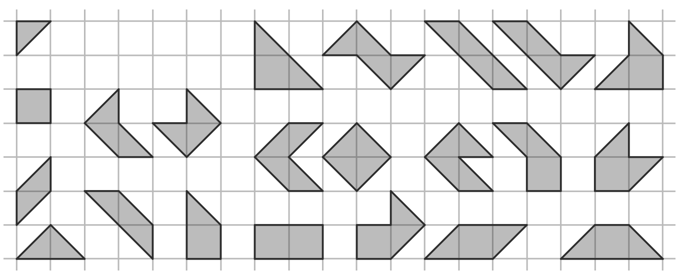


Рис. 3. Полиаболо

Порядком танграма назовём количество составляющих его элементарных треугольников, т. е. элементарный треугольник — это танграм порядка 1, n-аболо — танграм порядка n. Порядком набора элементов будем считать сумму порядков элементов. Таким образом, набор Танграма, набор Пифагора, как и квадраты на рис. 1а–в, сложенные из этих наборов, имеют порядок 16. В тоже время головоломка «Занимательный квадрат» (рис. 1г) имеет порядок 32, хоть и состоит из 7 частей.

Если длину катета элементарного тана принять равной 1, то площадь элементарного тана равна 1/2. В этом случае порядок танграма в два раза больше его площади.

Рассмотрим решётку на плоскости, образованную единичным квадратом. Назовём эту решётку *элементарной*. Любой политан можно расположить на плоскости так, чтобы его вершины располагались в узлах элементарной решётки.

Как и в случае других полиформ, политаны различаются по типам. *Трансляционный* тип политанов получается, если мы считаем одинаковыми фигуры, совпадающие при параллельном переносе. *Вращательный* (ротационный) тип возникает, если считать одинаковыми любые два политана, эквивалентные относительно группы собственных движений плоскости — поворотов и параллельных переносов, иногда их называют *односторонними* политанами. *Изометрический* тип возникает, если считать одинаковыми (эквивалентными) любые два конгруэнтных политана, т. е. совпадающих при поворотах и отражениях.

Термин «полиаболо» («n-аболо») мы будем применять для политанов изометрического или вращательного (одностороннего) типа. Начальными членами последовательности количеств изометрических n-аболо являются 1, 3, 4, 14, 30, 107, 318, 1116, 3743, 13 240, 46 476, 166 358, 596 638, 2 158 829, 7 839 845, … (см. [25], A006074). В 2013 году Джордж Сичерман (George Sicherman) вычислил 15-й член этой последовательности, который является наибольшим из известных в настоящее время.

Для количества односторонних n-аболо получаем последовательность 1, 4, 6, 22, 56, 198, 624, 2182, 7448, 26 319, 92 826, 332 181, 1 192 845, 4 315 845, 14 778 200, … (см. [25], A151519).

Для математика возникает вопрос про рост членов этих последовательностей. В последнем параграфе мы слегка коснёмся этой темы.

§ 3. Выпуклые танграмы

Если вы уже немного попрактиковались в составлении фигур из семи танов, то сумеете сложить не только квадрат, но и треугольник, прямоугольник, параллелограмм, трапецию. Возникает естественный вопрос комбинаторной геометрии: сколько можно составить выпуклых фигур из семи танов?

Эта задача была решена китайскими математиками Фу Цян Ван (Fu Tsiang Wang) и Чуань-Чи Сюн (Chuan-Chih Hsiung) в 1942 году в статье [20].

Аналогичная задача для головоломки «Пифагор» решена в статье А. Панова [13]. Для разбиения квадрата по Сэй-Сёнагон решение аналогичной задачи приведено в [18].

Посмотрим повнимательнее на основные идеи решения этой задачи.

Мы уже отмечали, что по свойству (∗∗) каждый тан разбивается на несколько элементарных танов. Всего набор Танграма разбивается на 16 элементарных танов. Таким образом, нам необходимо найти все выпуклые фигуры, состоящие из 16 элементарных танов.

Доказательство того факта, что вершины всех выпуклых фигур, состоящих из n элементарных танов, лежат в узлах элементарной решётки, не элементарно. Ключом к доказательству является факт несоизмеримости катета длиной 1 и гипотенузы длиной $\sqrt{2}$ элементарного треугольника.

Если установлено, что вершины всех выпуклых фигур, состоящих из элементарных треугольников, лежат в узлах элементарной решётки, то дальнейшие рассуждения можно перевести из области геометрии в алгебру. Сделаем это.

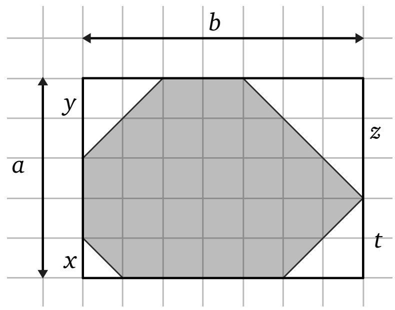


Рис. 4

Любой выпуклый танграм (многоугольник) представим в виде прямоугольника с отрезанными уголками (рис. 4). Длины сторон прямоугольника обозначим через a и b, а длины катетов отрезанных уголков через x, y, z и t, где $a, b \in \mathbb{N}$ и неотрицательные $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$. С учётом вращений и отражений плоскости можно считать, что $a \leqslant b$.

Площадь такого многоугольника равна

$$S = ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2). \tag{1}$$

Учитывая, что площадь 16 элементарных танов равна 8, мы получаем уравнение в целых числах

$$ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 8. \tag{2}$$

Мы также должны потребовать, чтобы сумма длин катетов отрезаемых уголков не превышала длины соответствующей стороны, поэтому должны выполняться неравенства

$$x + y \leqslant a, \quad z + t \leqslant a, \quad y + z \leqslant b, \quad x + t \leqslant b. \tag{3}$$

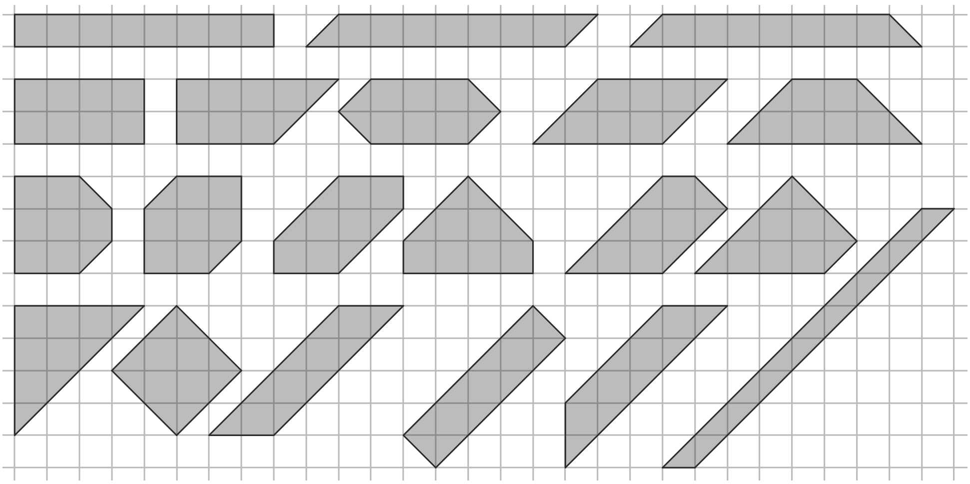


Рис. 5. Выпуклые многоугольники порядка 16

Теперь геометрическая задача на составление фигур превратилась в алгебраическую задачу нахождения решений диофантова уравнения.

Условий (2), (3) достаточно для решения диофантового уравнения. Мы получаем 20 решений и, соответственно, с точностью до вращений и отражений 20 выпуклых многоугольников (рис. 5), которые можно сложить из 16 элементарных танов. Остаётся проверить, что только 13 из этих 20 выпуклых многоугольников можно сложить из элементов Танграма.

В общем случае для выпуклых танграмов порядка n

$$ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \frac{n}{2}.$$

Полученные результаты удобно свести в табл. 1. В ней указаны корни диофантова уравнения, по которым однозначно определяется выпуклый многоугольник. В соответствующей колонке проставлен +, если этот многоугольник собирается из элементов одного из наборов Танграм, Сэй-Сёнагон, Пифагор.

В дополнении к главе 4 книги [3] М. Гарднер упоминает интересную задачу[4)], которую предложил Дж. Конвей. Цитируем: «Какова форма танов из „оптимального набора“, т. е. 7 выпуклых многоугольников, позволяющих составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников?»

На самом деле такая формулировка задачи даёт нам поле для серьёзного исследования. Дело в том, что при такой формулировке нет ограни-

[4)] В книге [3] она названа нерешённой.

Таблица 1

Т — Танграм; П — Пифагор; С — Сэй-Сёнагон; V_i — оптимальные наборы

№	a	b	x	y	z	t	Т	П	С	V_i
1	1	8	0	0	0	0			+	+
2	1	9	0	1	0	1			+	+
3	1	9	0	1	1	0			+	+
4	2	4	0	0	0	0	+		+	+
5	2	5	0	0	0	2	+	+	+	+
6	2	5	1	1	1	1	+	+	+	+
7	2	6	0	2	0	2	+	+	+	+
8	2	6	0	2	2	0	+	+	+	+
9	3	3	0	0	1	1	+		+	+
10	3	3	0	1	0	1	+	+	+	+
11	3	4	0	2	0	2	+		+	+
12	3	4	0	2	2	0	+	+	+	+
13	3	5	0	3	1	2	+		+	+
14	3	5	0	3	2	1	+	+	+	+
15	4	4	0	0	0	4	+	+	+	+
16	4	4	2	2	2	2	+	+	+	+
17	4	6	0	4	0	4		+		+
18	5	5	0	3	0	5		+		+
19	5	5	1	4	1	4		+		+
20	8	9	0	8	0	8				

чений на порядок оптимального набора. Если предположить, что задача формулировалась для набора, который можно составить из 16 элементарных треугольников, как и в головоломке Танграм, то такая задача гораздо проще. Собственно, в статье [19] задача решена в следующей уточнённой формулировке.

Задача 1 (Дж. Конвей, [3]). Какова форма танов из «оптимального набора», т. е. 7 выпуклых многоугольников, позволяющих составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников при условии, что порядок оптимального набора равен 16?

Решение. Отметим, что если набор состоит из 7 выпуклых танов, то с его помощью нельзя одновременно собрать фигуры № 1 и № 20 (рис. 5, фигуры нумеруются слева направо и сверху вниз). Для сборки фигуры № 20 один из элементов набора должен содержать «трапецию» из трёх элементарных танов, а эта трапеция не помещается в фигуру №1. Поэтому из такого набора можно составить не больше 19 выпуклых много-

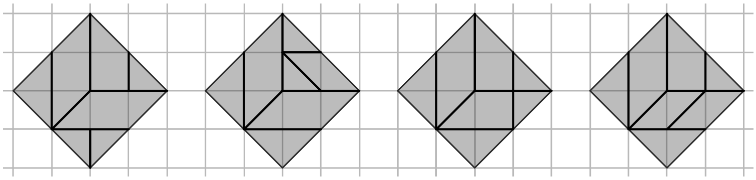


Рис. 6. Четыре оптимальных набора порядка 16

угольников. Остаётся предложить набор из 7 выпуклых танов, из которых можно сложить 19 выпуклых многоугольников.

В статье [19] приведён один из таких наборов, а в [18] доказано, что существует ровно четыре набора из семи танов, из которых можно собрать 19 выпуклых многоугольников (рис. 6).

В [18, 19] доказано, что для того, чтобы сложить все 20 выпуклых многоугольников порядка 16, необходимо и достаточно взять некоторый набор из 11 танов. (Найдите его!) Кроме того, ни из одного набора из 6 танов нельзя собрать 19 выпуклых многоугольников.

Задача Конвея выходит на совершенно другой комбинаторный уровень, если мы не ограничиваем порядок оптимального набора. Оставшимися ограничениями являются количество элементов набора — их 7 — и требование выпуклости каждого из элементов набора. Вот новая формулировка задачи.

Задача 2 (Дж. Конвей, для исследования). Какова форма 7 выпуклых танов из «оптимального набора», позволяющего составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников? Каков минимальный порядок оптимального набора?

Дадим некоторые пояснения.

Количество выпуклых многоугольников, которые можно составить из n элементарных треугольников, подсчитано для небольших n. Первоначальные члены этой последовательности находим в [25], A245676. Приведём первые 32 члена этой последовательности: 1, 3, 2, 6, 3, 7, 5, 11, 5, 10, 7, 14, 7, 16, 11, 20, 9, 17, 13, 22, 12, 25, 18, 27, 14, 24, 20, 31, 18, 36, 26, 37, … Таким образом, имеется один выпуклый многоугольник порядка 1 — это элементарный треугольник, 3 выпуклых многоугольника порядка 2 и т. д. Как было показано на рис. 5, имеется 20 выпуклых многоугольников порядка 16.

Из приведённой последовательности видно, что количество выпуклых многоугольников, которые можно составить из 20 элементарных танов, равно 22, а из 24 элементарных танов — уже 27. Если мы будем

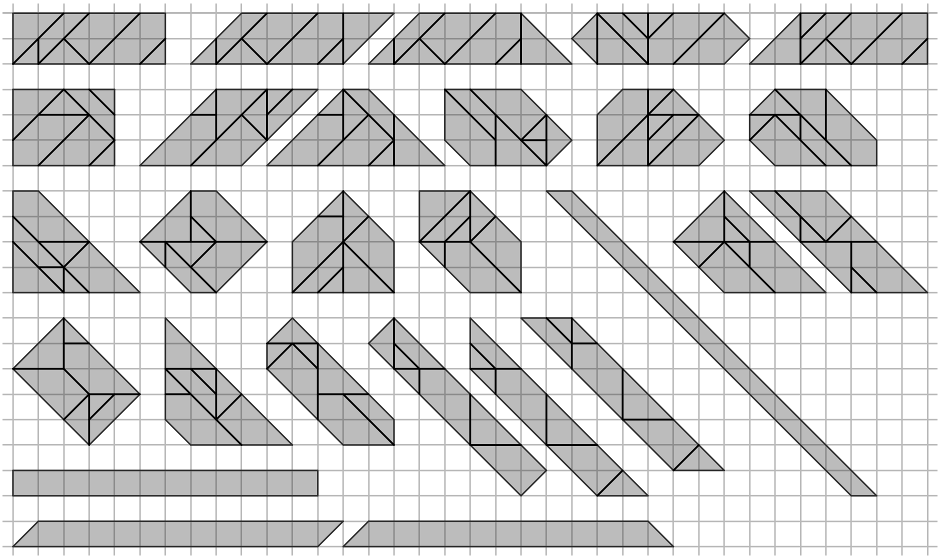


Рис. 7. Выпуклые многоугольники порядка 24 и набор из 7 танов

искать набор из семи выпуклых танов порядка 24, то собрать все 27 выпуклых многоугольников не удастся. Тем не менее можно предположить, что существует набор из семи элементов порядка 24, из которого можно собрать больше чем 19 выпуклых многоугольников.

Потратив некоторое время, такой набор можно найти «вручную» без написания компьютерной программы. Приведём его на рис. 7. Из такого набора из семи выпуклых танов порядка 24 удаётся собрать 23(!) выпуклых многоугольника. Четыре оставшихся выпуклых многоугольника из него не собираются.

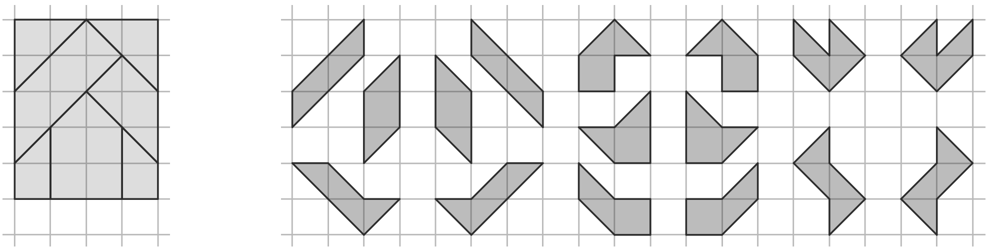
Неизвестно, есть ли набор из семи выпуклых элементов, из которого можно собрать больше 23 выпуклых многоугольников.

§ 4. Ещё несколько головоломок

Прежде чем углубиться в серьёзные вычисления, сделаем ещё один небольшой экскурс в головоломки.

В книге Генри Дьюдени [6] в задачах на построение фигурок используются два набора Танграма. В Советском Союзе из пластика производилась головоломка «Танграм-2», очевидно, состоявшая из двух наборов Танграма.

В прошлом веке Московский завод тепловой автоматики выпускал головоломку без названия (рис. 8а). Назовём эту головоломку в честь производителя — головоломка МЗТА. Она напоминает слегка удлинён-



а) б)

Рис. 8. Головоломки МЗТА, Тетратрион

ную головоломку «Занимательный квадрат», её компактной упаковкой является прямоугольник. В инструкции к головоломке МЗТА предлагалось собрать 129 фигур, а с учётом прямоугольника предложено к сборке 8 выпуклых фигур. Это не полный перечень выпуклых фигур, которые можно собрать из элементов этой головоломки. В книге [16] эта головоломка называется «танграммой». Короткая заметка об этой головоломке опубликована в [8].

В журнале «Наука и жизнь» [12] рассказывалось о Тетратрионе. Эта головоломка односторонняя (т. е. переворачивать элементы нельзя) и состоит из 16 элементов (рис. 8б). Попробуйте сложить из всех 16 элементов квадрат.

Головоломка Билютина [12] состоит из 20 элементов: это два диаболо (без квадрата), 4 триаболо и 14 тетраболо (рис. 3). Из элементов этой головоломки также можно сложить квадрат, а можно сложить два квадрата поменьше.

Все эти головоломки — родственники Танграма. Для них выполнены условия $(*)$ и $(**)$, т. е. углы всех элементов кратны $\pi/4$ и при этом каждый элемент головоломки удаётся разбить на элементарные треугольники.

Головоломки, о которых мы говорили, отличаются не только формой элементов, но и порядком наборов элементов, т. е. общим количеством элементарных треугольников, из которых можно сложить полный набор. Так, набор из двух Танграмов имеет порядок 32. Как мы упоминали ранее, порядок головоломки «Занимательный квадрат» также равен 32. Порядок набора для головоломки МЗТА равен 40, для Тетратриона 64, для головоломки Билютина 72.

Мы можем поставить общую комбинаторную задачу отыскания всех выпуклых фигур, которые можно составить из заданного количества элементарных треугольников. И затем найти, какие из этих выпуклых фигур составляются из элементов соответствующей головоломки.

Задача 3. а) Сколько выпуклых многоугольников можно составить из двух наборов Танграма?

б) А из двух наборов Пифагора?

в) Тот же вопрос для двух наборов Сэй-Сёнагон.

Задача 4. Сколько выпуклых многоугольников можно составить из элементов головоломки «Занимательный квадрат»?

Задача 5. а) Сколько выпуклых многоугольников можно составить из набора МЗТА?

б) (для исследования) Тот же вопрос для головоломки Билютина.

Задача 6 (для исследования). а) Какая форма у семи выпуклых танов из «экстремального» набора порядка 32, т. е. набора, из которого можно сложить максимальное число выпуклых многоугольников порядка 32?

б) Какое минимальное количество выпуклых танов должен содержать набор порядка 32, из которого можно сложить все 37 выпуклых многоугольников порядка 32?

§ 5. Горизонтально-выпуклые танграмы

От выпуклых танграмов перейдём к горизонтально-выпуклым.

В множестве трансляционных политанов мы рассмотрим подмножество горизонтально-выпуклых политанов.

Определение. *Горизонтально-выпуклыми называются такие политаны, что любая горизонтальная прямая либо не пересекает политан, либо пересекает его по отрезку* (*точке*).

Наше определение согласуется с определениями для горизонтально-выпуклых полимино и горизонтально-выпуклых полиамондов (см., например, [7, 21]).

На рис. 9а приведён пример горизонтально-выпуклого политана. На рис. 9б, 9в приведены примеры танграмов (собака, мост), *не* являющихся

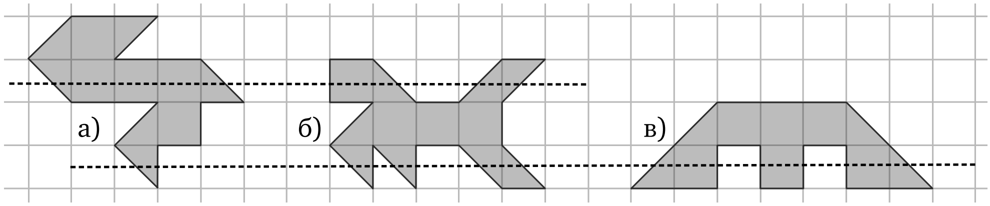


Рис. 9. а) Горизонтально-выпуклый политан.
б) и в) Не горизонтально-выпуклые политаны

горизонтально-выпуклыми, поскольку существует горизонтальная прямая, которая пересекает их соответственно по двум и трём отрезкам.

Количества горизонтально-выпуклых политанов малых порядков равны 4, 9, 24, 65, 192, 574, …

Напомним некоторые результаты, относящиеся к полиформам. Пусть s_n обозначает количество различных горизонтально-выпуклых n-мино (полимино, состоящих из n единичных квадратов). Начальные члены этой последовательности: $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 6$, $s_4 = 19$, $s_5 = 61$, $s_6 = 196$ (см. [25], A001169). Известно, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению третьего порядка:

$$s_n = 5s_{n-1} - 7s_{n-2} + 4s_{n-3} \quad \text{для } n \geqslant 5. \tag{4}$$

Производящей функцией для последовательности $\{s_n\}$ будет рациональная функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-5x+7x^2-4x^3}. \tag{5}$$

Доказано, что количество выпуклых по рядам полиамондов удовлетворяет рекуррентному соотношению седьмого порядка

$$f_n = 3f_{n-1} - 4f_{n-3} + f_{n-4} + f_{n-5} + 3f_{n-6} - f_{n-7} \quad \text{для } n \geqslant 8. \tag{6}$$

Начальные члены этой последовательности: 2, 3, 6, 14, 34, 84, 208, 515, 1272, … (см. [25], A238823). Производящей функцией для этой последовательности будет рациональная функция

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7}. \tag{7}$$

Разнообразные доказательства формул (4) и (5) можно найти в источниках [5, 15, 21–23]. В статье [7] получено рекуррентное соотношение (6) и доказана формула (7).

Мы можем ожидать, что последовательность количеств горизонтально-выпуклых политанов также удовлетворяет рекуррентному условию и производящая функция для этой последовательности будет рациональной функцией. В следующем параграфе мы это докажем.

§ 6. Производящие функции для горизонтально-выпуклых танграмов

В этом параграфе мы будем рассматривать формальные степенные ряды от одной или нескольких переменных, не вдаваясь в вопросы их сходимости. Операции сложения, умножения, дифференцирования рядов мы рассматриваем как соответствующие операции над формальными степенными рядами. Для получения результатов необходимо провести некоторые вычисления, которые мы оставляем читателям в качестве несложных упражнений. Будем в основном полагаться на технику из книги [5], но, в отличие от книги, маркируем строки, а не столбцы. Иногда мы будем упрощать выкладки с помощью комбинаторных рассуждений, построив соответствующие биекции между некоторыми множествами горизонтально-выпуклых политанов.

Пусть t_n обозначает количество различных горизонтально-выпуклых политанов порядка n (политанов, состоящих из n элементарных треугольников).

Теорема 1. *Последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению двенадцатого порядка*

$$\begin{aligned} t_n = 7t_{n-2} + 8t_{n-3} - 3t_{n-4} - 16t_{n-5} - 8t_{n-6} + \\ + 24t_{n-7} + 44t_{n-8} + 32t_{n-9} + 6t_{n-10} - 8t_{n-11} - 4t_{n-12} \end{aligned} \quad (8)$$

при $n \geqslant 13$.

Теорема 2. *Производящей функцией для множества горизонтально-выпуклых политанов является рациональная функция*

$$\begin{aligned} T(x) = \sum_n t_n x^n = \\ = \frac{x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}, \end{aligned}$$

где переменная x маркирует порядок политана.

Определим множества горизонтально-выпуклых политанов A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H и T в зависимости от формы их верхней строки (верхнего слоя), см. рис. 10:

а) если верхняя строка политана состоит только из одного элементарного треугольника a_1 или a_1^* (рис. 11), то отнесём политан к множеству A или A^*;
б) если верхняя строка политана состоит только из треугольника b_2 (рис. 11), то отнесём политан к множеству B;
в) если верхняя строка является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой короче верхнего, то отнесём политан к множеству C; для удобства дальнейших вычислений треугольник c_2 (рис. 11) также отнесём к множеству C;

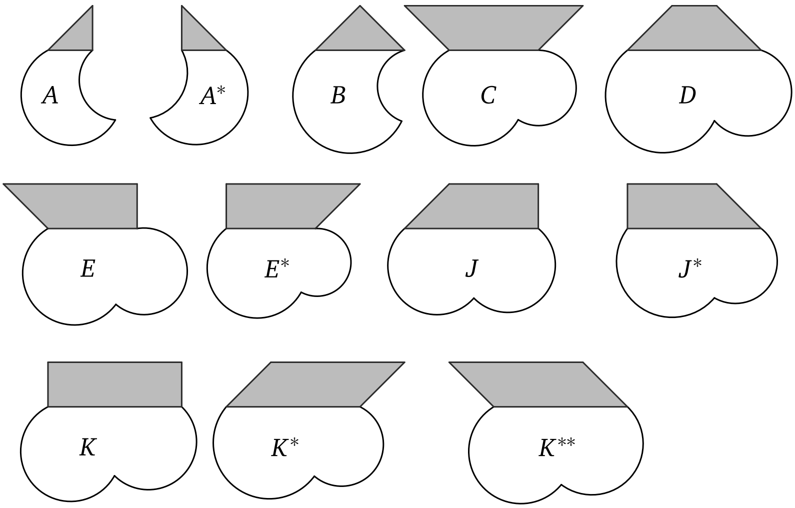


Рис. 10. Множества горизонтально-выпуклых политанов

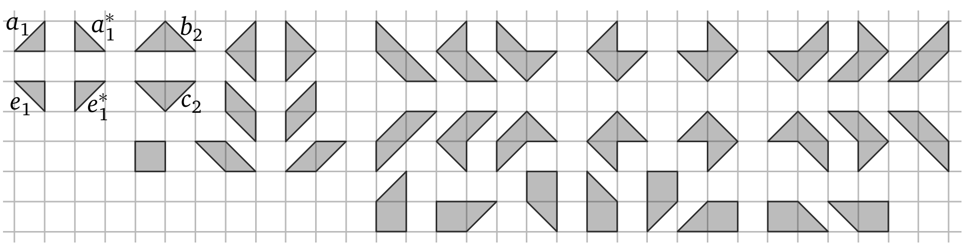


Рис. 11. Множества горизонтально-выпуклых политанов порядков 1, 2 и 3

г) если верхняя строка танграма является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой длиннее верхнего, то отнесём его к множеству D;

д) если верхняя строка танграма — прямоугольная трапеция, то отнесём его к множествам E, E^*, J или J^* соответственно; кроме того, треугольники e_1 и e_1^* (рис. 11) отнесём к множествам E и E^*;

е) если верхняя строка политана — прямоугольник или параллелограмм, то отнесём его к множеству K либо одному из множеств K^*, K^{**} соответственно.

Множество T — это множество всех горизонтально-выпуклых политанов, а H — множество всех горизонтально-выпуклых политанов, не принадлежащих множествам A, A^*, B.

Рассмотрим производящие функции от одной и двух переменных. Во вводимых функциях мы считаем, что переменная x маркирует порядок политана, а y маркирует количество контактных площадок в верхнем слое.

Пусть $a(p,m)$, $a^*(p,m)$, $b(p,m)$, $c(p,m)$, $d(p,m)$, $e(p,m)$, $e^*(p,m)$, $j(p,m)$, $j^*(p,m)$, $k(p,m)$, $k^*(p,m)$, $k^{**}(p,m)$, $h(p,m)$ и $t(p,m)$ — количество политанов порядка p типов A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H и T соответственно, верхний слой которых содержит m контактных площадок.

Из соображений симметрии мы можем заключить, что

$$k^*(p,m) = k^{**}(p,m).$$

Следовательно, производящие функции множеств K^* и K^{**} равны:

$$K^*(x,y) = K^{**}(x,y).$$

Аналогично

$$A(x,y) = A^*(x,y), \quad E(x,y) = E^*(x,y), \quad J(x,y) = J^*(x,y).$$

Поскольку у политанов из множеств A, A^*, B в верхнем слое контактные площадки отсутствуют, при $m \geqslant 1$ имеем

$$a(p,m) = a^*(p,m) = b(p,m) = 0.$$

Следовательно, производящие функции

$$A(x,y) = A^*(x,y) = \sum_p a(p,m)x^p y^m, \quad B(x,y) = \sum_p b(p,m)x^p y^m$$

не зависят от y и являются функциями одной переменной. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}A^*(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}B(x,y) = 0.$$

Можно записать $A(x,y) = A(x,1) = A(x)$, $B(x,y) = B(x,1) = B(x)$.

Производящими функциями для политанов типов C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H и T будут

$$C(x,y) = \sum_{p,m} c(p,m)x^p y^m,$$

$$D(x,y) = \sum_{p,m} d(p,m)x^p y^m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(x,y) = \sum_{p,m} t(p,m)x^p y^m.$$

Из определения следует, что

$$H(x,y)=C(x,y)+D(x,y)+E(x,y)+E^*(x,y)+\\ +J(x,y)+J^*(x,y)+K(x,y)+K^*(x,y)+K^{**}(x,y)=\\ =C(x,y)+D(x,y)+2E(x,y)+2J(x,y)+K(x,y)+2K^*(x,y), \quad (9)$$

$$T(x,y)=A(x,y)+A^*(x,y)+B(x,y)+H(x,y)=2A(x)+B(x)+H(x,y). \quad (10)$$

Отметим, что нам не надо искать функцию от двух переменных $T(x,y)$. Достаточно найти выражение этой функции при $y=1$, т. е. найти $T(x,1)$.

Нам понадобится

Лемма 1. *Для всех $p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ выполняются равенства*

а) $k(p+1,m+1)=k^*(p+1,m+1)=j(p,m)$, $k(p+1,1)=k^*(p+1,1)=a(p,0)$;
б) $j(p+1,m+1)=d(p,m)$, $j(p+1,1)=b(p,0)$;
в) $e(p+1,m+1)=k(p,m)$;
г) $c(p+1,m+1)=e(p,m)$.

Доказательство. а) Если мы добавим элементарный тан справа в верхний слой политана из множества J, то получим политан из множества K^*, у которого в верхнем слое не менее четырёх элементарных танов. Добавляя элементарный тан справа в верхний слой политана из множества A, получим политан из множества K^*, у которого в верхнем слое ровно два элементарных тана. Так мы получаем все политаны из множества K^*. Эта процедура обратима, и из каждого политана из множества K^*, удаляя правый элементарный тан из верхнего слоя, мы получим политан из множества J или A (рис. 12). Получаем взаимно однозначное соответствие между указанными множествами.

Случаи б), в), г) доказываются аналогично (рис. 12). □

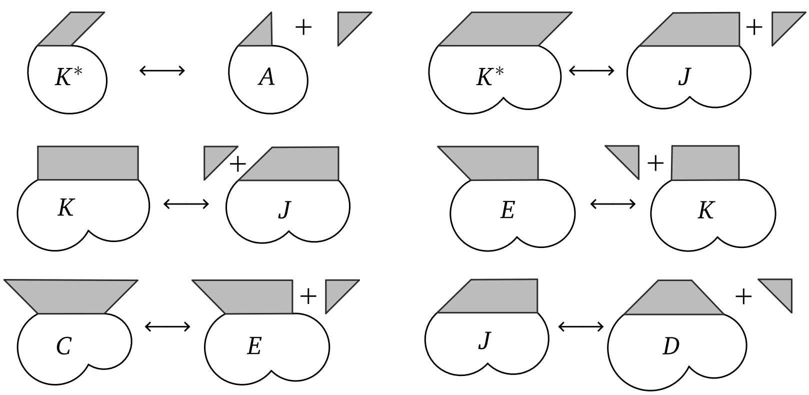


Рис. 12. Биекции

Из леммы 1 получаем следующую систему функций:

$$\begin{cases} K(x,y) = K^*(x,y) = xyA(x) + xyJ(x,y), \\ \qquad\qquad J(x,y) = xyB(x) + xyD(x,y), \\ \qquad\qquad E(x,y) = xy + xyK(x,y), \\ \qquad\qquad C(x,y) = xyE(x,y). \end{cases}$$

После соответствующих подстановок имеем

$$\begin{cases} K(x,y) = K^*(x,y) = xyA(x) + x^2y^2B(x) + x^2y^2D(x,y), \\ J(x,y) = xyB(x) + xyD(x,y), \\ E(x,y) = xy + x^2y^2A(x) + x^3y^3B(x) + x^3y^3D(x,y), \\ C(x,y) = x^2y^2 + x^3y^3A(x) + x^4y^4B(x) + x^4y^4D(x,y). \end{cases} \tag{11}$$

Тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned} H(x,y) = 2xy + x^2y^2 + (3xy + 2x^2y^2 + x^3y^3)A(x) + \\ + (2xy + 3x^2y^2 + 2x^3y^3 + x^4y^4)B(x) + \\ + (1 + 2xy + 3x^2y^2 + 2x^3y^3 + x^4y^4)D(x,y). \end{aligned} \tag{12}$$

Для доказательства следующих лемм проведём вспомогательные вычисления.

Для значений частной производной по y степенных рядов $H(x,y)$ и $D(x,y)$ при $y = 1$ введём обозначения:

$$\eta(x) = \frac{\partial}{\partial y}H(x,y)\Big|_{y=1}, \quad \delta(x) = \frac{\partial}{\partial y}D(x,y)\Big|_{y=1}.$$

При почленном дифференцировании формального ряда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(y^k H(x,y))\Big|_{y=1} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{p,m} h(p,m)x^p y^{m+k}\right)\Big|_{y=1} = \\ = \sum_{p,m}(m+k)h(p,m)x^p = \sum_p\left(\sum_m (m+k)h(p,m)\right)x^p \end{aligned}$$

для всех целых $k \geqslant 0$.

С другой стороны, используя свойство дифференцирования произведения функций, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^k H(x,y))\Big|_{y=1} = kH(x,1) + \eta(x).$$

Следовательно, для всех целых $k \geqslant 0$

$$kH(x,1) + \eta(x) = \sum_p\left(\sum_m (m+k)h(p,m)\right)x^p. \tag{13}$$

В частности, при $k = 0$

$$\eta(x) = \sum_p \Bigl(\sum_m mh(p, m)\Bigr) x^p. \tag{14}$$

В следующей задаче явно вычисляются формальные степенные ряды.

Задача 7. Докажите следующие равенства:

а) $\displaystyle\sum_{s=2}^{\infty} x^{2s} y^{s-1} = \frac{1}{y}\sum_{s=2}^{\infty}(x^2y)^s = \frac{x^4y}{1-x^2y}$, б) $\displaystyle\sum_{s=2}^{\infty} s x^{2s} y^{s-1} = \frac{x^4y(2-x^2y)}{(1-x^2y)^2}$.

Лемма 2. *Выполняется равенство*

$$A(x) = x + x\eta(x). \tag{15}$$

Доказательство. Посмотрим, как получаются политаны из множества A. Возьмём политан из A, состоящий из одного треугольника, и начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному политану так, чтобы получился новый политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный политан был из множеств A, A^* или B. Если исходный политан — из H и в его верхней строке содержится m контактных площадок, то такую операцию можно проделать m способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все политаны подмножества A, кроме треугольника a_1 (рис. 11, с. 181).

Следовательно, для всех p выполняются равенства

$$a(p+1, 0) = \sum_m mh(p, m).$$

Для треугольника a_1 мы имеем $a(1, 0) = 1$. Используя (14), получаем

$$A(x) = x + \sum_p a(p+1, 0)x^{p+1} = x + x\sum_p \Bigl(\sum_m mh(p, m)\Bigr)x^p = x + x\eta(x).$$

Что и требовалось доказать. □

Отсюда

$$\eta(x) = \frac{A(x)}{x} - 1. \tag{16}$$

Лемма 3. *Выполняется равенство*

$$B(x) = xA(x) + x^2H(x, 1). \tag{17}$$

Доказательство. Посмотрим, как получаются политаны из B. Возьмём треугольник b_2 (рис. 11) и начнём прикладывать его сверху к некоторому политану (назовём его исходным) так, чтобы получился новый политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный танграм был из множеств A, A^* или B. Если исходный политан из множества H и в его верхней строке содержится m контактных площадок, то такую операцию можно проделать $(m+1)$ способами. Заметим, что таким образом можно получить все политаны подмножества B, кроме треугольника b_2. Следовательно, для всех p выполняются соотношения

$$b(p+2,0)=\sum_m (m+1)h(p,m).$$

Для треугольника b_2 мы имеем $b(2,0)=1$.

Вспоминая (13), получаем

$$B(x)=x^2+\sum_p b(p+2,0)x^{p+2}=$$
$$=x^2+x^2\sum_p\Big(\sum_m (m+1)h(p,m)\Big)x^p=x^2+x^2(H(x,1)+\eta(x)).$$

С учётом (16) получаем требуемое: $B(x)=xA(x)+x^2H(x,1)$. □

Лемма 4. *Выполняется равенство*

$$D(x,y)=\frac{x^3yA(x)}{1-x^2y}+H(x,1)\frac{x^4y(2-x^2y)}{(1-x^2y)^2}. \tag{18}$$

Доказательство. Посмотрим, как получаются политаны из D. Возьмём политан из D, состоящий из одной строки площади $2s$, $s=2,3,4,\ldots$ У этого политана сверху $s-1$ контактных площадок, а снизу $s+1$ контактных площадок. Начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному политану так, чтобы получился новый политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный политан был из множеств A, A^* или B. Если исходный политан из H и в его верхней строке содержится m контактных площадок, то такую операцию можно проделать $m+s$ способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все политаны подмножества D, кроме тех, которые состоят из одной строки.

Следовательно, для всех p, s выполняются равенства

$$d(p+2s,s-1)=\sum_m (m+s)h(p,m).$$

Для политанов подмножества D, состоящих из одной строки, получаем $d(2s,s-1)=1$.

Используя (13), выведем соотношение для производящих функций. Получаем

$$D(x,y)=\sum_{p,m} d(p,m)x^py^m=$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty} d(2s, s-1)x^{2s}y^{s-1} + \sum_{p,s} d(p+2s, s-1)x^{p+2s}y^{s-1} =$$
$$= \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1}\left[\sum_{p}\left(\sum_{m}(m+s)h(p,m)\right)x^{p}\right] =$$
$$= \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1}(sH(x,1)+\eta(x)) =$$
$$= \frac{A(x)}{x}\sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + H(x,1)\sum_{s=2}^{\infty} sx^{2s}y^{s-1}.$$

Используя вычисления из решения задачи 7 (см. с. 185), получаем

$$D(x,y) = \frac{x^3 yA(x)}{1-x^2y} + H(x,1)\frac{x^4y(2-x^2y)}{(1-x^2y)^2}.$$

Лемма доказана. □

Перейдём теперь к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 2. Для получения системы уравнений с производящими функциями подставим $y=1$ в соотношения (12) и (18). Ещё два уравнения можно получить, если продифференцировать соотношения (12) и (18) по y и затем сделать подстановку $y=1$. С учётом (15) и (16) получаем систему из шести уравнений с шестью функциями:

$$\begin{cases} H(x,1) = 2x+x^2+(3x+2x^2+x^3)A(x)+(2x+3x^2+2x^3+x^4)B(x)+ \\ \qquad +(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)D(x,1), \\ D(x,1) = \dfrac{x^3A(x)}{1-x^2} + H(x,1)\dfrac{x^4(2-x^2)}{(1-x^2)^2}, \\ \eta(x) = 2x+2x^2+(3x+4x^2+3x^3)A(x)+(2x+6x^2+6x^3+4x^4)B(x)+ \\ \qquad +(2x+6x^2+6x^3+4x^4)D(x,1)+(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)\delta(x), \\ \delta(x) = \dfrac{x^3A(x)}{(1-x^2)^2} + H(x,1)\dfrac{2x^4}{(1-x^2)^3}, \\ A(x) = x+x\eta(x), \\ B(x) = xA(x)+x^2H(x,1). \end{cases}$$

Методом последовательного исключения неизвестных находим:

$$H(x,1)x) = \frac{x(1-x^2)^2(2+4x-4x^3-10x^4-11x^5-6x^6-2x^7)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},$$

$$A(x) = \frac{x^2(1-x^2)(1+4x+3x^2-10x^3-16x^4+17x^6+30x^7+21x^8+4x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},$$

$$B(x)=\frac{x(1-x^2)(1+2x-x^2-8x^3-8x^4+10x^5+24x^6+26x^7+12x^8-2x^9-2x^{10})}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},$$

$$D(x,1)=\frac{x^4(1+6x+7x^2-10x^3-20x^4-10x^5+6x^6+24x^7+19x^8+4x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

В итоге получаем

$$T(x,1)=\frac{x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

Теорема доказана. □

Из (11) находим:

$$J(x,1)=\frac{x^3(1+4x+3x^2-8x^3-12x^4+13x^6+20x^7+10x^8-2x^9-2x^{10})}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

Для $T(x)$ имеем

$$(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})\times$$
$$\times\sum_n t_n x^n = x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9).$$

Поскольку правая часть равенства является многочленом, то и левая часть должна быть многочленом. Коэффициент при x^n, где $n \geqslant 13$, равен

$$t_n-7t_{n-2}-8t_{n-3}+3t_{n-4}+16t_{n-5}+8t_{n-6}-$$
$$-24t_{n-7}-44t_{n-8}-32t_{n-9}-6t_{n-10}+8t_{n-11}+4t_{n-12}.$$

Но поскольку в правой части все коэффициенты при x^n, $n \geqslant 13$, равны нулю, последовательность t_n удовлетворяет для $n \geqslant 13$ рекуррентному соотношению двенадцатого порядка

$$t_n=7t_{n-2}+8t_{n-3}-3t_{n-4}-16t_{n-5}-8t_{n-6}+24t_{n-7}+$$
$$+44t_{n-8}+32t_{n-9}+6t_{n-10}-8t_{n-11}-4t_{n-12}. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили доказательство теоремы 1.

Характеристическое уравнение будет следующим:

$$x^{12}-7x^{10}-8x^9+3x^8+16x^7+8x^6-24x^5-44x^4-32x^3-6x^2+8x+4=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни, наибольший из них

$$x_{\max}\approx 2{,}9705133922.$$

Поскольку $x_{\max}$ не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку

$$2{,}97051339^n \leqslant t_n \leqslant 2{,}9705134^n \quad (20)$$

(см. следующий параграф).

Таблица 2

n	a	b	c	d	e	j	k	h	t
1	1	0	0	0	1	0	0	2	4
2	2	1	1	0	0	0	1	4	9
3	5	4	0	0	1	1	2	10	24
4	12	9	1	1	2	4	6	32	65
5	41	22	2	6	6	10	16	88	192
6	120	73	6	14	16	28	51	261	574
7	360	208	16	40	51	87	148	776	1704
8	1076	621	51	123	148	248	447	2307	5080
9	3205	1852	148	348	447	744	1324	6850	15 112
10	9512	5512	447	1041	1324	2200	3949	20 383	44 919
11	28 279	16 362	1324	3076	3949	6553	11 712	60 540	133 460
12	83 954	48 662	3949	9157	11 712	19 438	34 832	179 902	396 472
13	249 418	144 494	11 712	27 164	34 832	57 819	103 392	534 354	1 177 684

Приведём табл. 2, в которой сведены начальные значения последовательностей.

При помощи онлайн калькулятора (например, [24]) нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от одной переменной:

$$\begin{aligned}
A(x) &= x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 22x^5 + 73x^6 + 208x^7 + \\
&\qquad + 621x^8 + 1852x^9 + 5512x^{10} + \ldots, \\
B(x) &= x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 41x^5 + 120x^6 + 360x^7 + \\
&\qquad + 1076x^8 + 3205x^9 + 9512x^{10} + \ldots, \\
H(x) &= 2x + 4x^2 + 10x^3 + 32x^4 + 88x^5 + 261x^6 + 776x^7 + \\
&\qquad + 2307x^8 + 6850x^9 + 20\,383x^{10} + \ldots, \\
T(x) &= 4x + 9x^2 + 24x^3 + 65x^4 + 192x^5 + 574x^6 + 1704x^7 + \\
&\qquad + 5080x^8 + 15\,112x^9 + 44\,919x^{10} + \ldots
\end{aligned}$$

Понятно, что эти разложения согласуются с табл. 2.

§ 7. Пояснения к асимптотике

Дадим небольшие пояснения к формуле (20). Рекуррентному соотношению порядка k соответствует характеристический многочлен степени k с теми же коэффициентами. Каждый из корней характеристического многочлена представляет знаменатель некоторой геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному рекуррентному соотношению. Например, если все корни характеристического уравнения различны, то получаются k различных геометрических прогрессий, которые образуют базис рекуррентного соотношения. Тогда любая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению, представляется в виде суммы некоторых геометрических прогрессий, и её асимптотический рост совпадает с ростом наибольшего положительного корня характеристического уравнения (если такие имеются). Подробно о теории рациональных производящих функций можно прочесть в [15, глава 4, раздел 4.1]. Адаптированное для школьников изложение теории можно найти в книге [10].

В нашем случае все 12 корней характеристического уравнения различны, из них 4 пары сопряжённых комплексных корней $z_1, z_2, \ldots, z_8$ и 4 действительных корня $x_1, x_2, x_3, x_4 = x_{\max}$.

Левая часть характеристического уравнения является произведением двух сомножителей:

$$\begin{aligned}x^{12}-7x^{10}-8x^9+3x^8+16x^7+8x^6-24x^5-44x^4-32x^3-6x^2+8x+4=\\=(x^2+x+1)(x^{10}-x^9-7x^8+10x^6+6x^5-8x^4-22x^3-14x^2+4x+4).\end{aligned}$$

Поэтому два комплексных корня являются решениями квадратного уравнения, остальные корни могут быть найдены приближённо:

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_{3,4} &\approx -0{,}3404556671803965 \mp 1{,}015869789106097 \cdot i,\\
z_{5,6} &\approx 1{,}29200642827081 \mp 0{,}6600928274655522 \cdot i,\\
z_{7,8} &\approx -0{,}9685242996835521 \mp 0{,}681359052898141 \cdot i,\\
x_1 &\approx -1{,}778585858585858,\\
x_2 &\approx -0{,}6415582100196113,\\
x_3 &\approx 0{,}4835777126099707,\\
x_4 &\approx 2{,}9705133922.
\end{aligned}$$

При этом нетрудно проверить, что корень x_4 является наибольшим по модулю.

Получаем 12 различных геометрических прогрессий, которые образуют базис рекуррентного соотношения. Таким образом, последовательность горизонтально-выпуклых политанов представляется в виде линейной комбинации (суммы) геометрических прогрессий со знаменателями $z_1, z_2, \ldots, z_8, x_1, x_2, x_3, x_4$. Запишем

$$\begin{aligned} t_n = A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} + A_3 z_3^{n-1} + A_4 z_4^{n-1} + A_5 z_5^{n-1} + A_6 z_6^{n-1} + \\ + A_7 z_7^{n-1} + A_8 z_8^{n-1} + B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_2^{n-1} + B_3 x_3^{n-1} + B_4 x_4^{n-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

где коэффициенты A_1, $A_2, \ldots, A_8$, B_1, B_2, B_3, B_4 являются решением системы из 12 уравнений, получаемых при соответствующей подстановке $n = 1, 2, \ldots, 12$:

$$\begin{cases} t_1 = 4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \\ t_2 = 9 = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4 + A_5 z_5 + A_6 z_6 + A_7 z_7 + A_8 z_8 + \\ \qquad + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4, \\ t_3 = 24 = A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + A_3 z_3^2 + A_4 z_4^2 + A_5 z_5^2 + A_6 z_6^2 + A_7 z_7^2 + A_8 z_8^2 + \\ \qquad + B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_3 x_3^2 + B_4 x_4^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{12} = 39\,6472 = \ldots \end{cases} \tag{22}$$

На самом деле от комплексных геометрических прогрессий можно избавиться с помощью формулы Муавра:

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Учитывая, что

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\Big(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\Big),$$

по формуле Муавра получим

$$z_{1,2}^{n-1} = (-1)^{n-1}\Big(\cos\frac{\pi(n-1)}{3} \pm i\sin\frac{\pi(n-1)}{3}\Big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} = A_1(-1)^{n-1}\Big(\cos\frac{\pi(n-1)}{3} + i\sin\frac{\pi(n-1)}{3}\Big) + \\ + A_2(-1)^{n-1}\Big(\cos\frac{\pi(n-1)}{3} - i\sin\frac{\pi(n-1)}{3}\Big) = \\ = (A_1 + A_2)(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi(n-1)}{3} + i(A_1 - A_2)(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Сделав замену коэффициентов $C_1 = A_1 + A_2$, $C_2 = i(A_1 - A_2)$, от суммы $A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1}$ мы перейдём к периодической функции. Аналогично можно поступить с другими парами комплексных сопряжённых корней.

Поскольку корень x_4 — наибольший по модулю из всех действительных и комплексных корней, асимптотический рост последовательности количеств горизонтально-выпуклых политанов совпадает с ростом последовательности

$$B_4 x_4^{n-1} \approx \frac{B_4}{2{,}9705133922} \cdot 2{,}9705133922^n.$$

Последовательность количеств горизонтально-выпуклых политанов является возрастающей. Действительно, каждому $(n-1)$-политану сопоставим n-политан, добавляя тан в верхнюю строку определённым способом, при этом с учётом разбиения на множества горизонтально-выпуклых политанов A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**} можно добиться того, что все полученные n-политаны будут различными. Кроме того, будут существовать n-политаны, которые получатся иным способом.

Если $B_4 < 0$, то при больших n отрицательное слагаемое $B_4 x_4^{n-1}$ больше суммы остальных по абсолютной величине и количество горизонтально-выпуклых политанов отрицательно, что невозможно. Предположим, что $B_4 = 0$. Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1, B_2, B_3, B_4$ являются решением системы из 12 уравнений (22), получаемых при соответствующей подстановке $n = 1, 2, \ldots, 12$. Определитель матрицы правой части системы (22) представляет собой определитель Вандермонда от корней алгебраического уравнения.

Поскольку все корни разные, определитель Вандермонда не равен нулю. Следовательно, система имеет единственное решение. В этом решении $B_4 \neq 0$.

Таким образом, коэффициент B_4 положителен. Поскольку

$$2{,}97051339 \leqslant 2{,}9705133922 \leqslant 2{,}9705134,$$

при достаточно больших n выполнены асимптотические оценки

$$2{,}97051339^n \leqslant t_n \approx B_4 x_4^{n-1} \leqslant 2{,}9705134^n.$$

Другой способ найти асимптотику состоит в разложении производящей функции в сумму простейших дробей.

§ 8. Константы роста

В заключение отметим, что одной из задач при рассмотрении полиформ является нахождение или оценка константы роста.

Пусть $A(n)$ — последовательность трансляционных полимино порядка n (см. [25], A001168). Тогда существует предел

$$\lambda_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A(n)}$$

и отношение $A(n+1)/A(n)$ стремится к пределу λ_A при $n \to \infty$. На текущий момент лучшие известные оценки снизу и сверху на λ_A — это 4,0025 и 4,6496.

Если через $P(n)$ обозначить последовательность трансляционных полиамондов порядка n (см. [25], A001420), то точно так же существуют пределы

$$\lambda_P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)}.$$

В [17] доказано, что $2{,}8424 \leqslant \lambda_P \leqslant 3{,}6050$.

Пусть $F(n)$ обозначает последовательность трансляционных политанов порядка n. Можно предположить, что для трансляционных политанов также существует некоторая константа роста λ_F. Оценку снизу на эту константу можно получить, если заметить, что трансляционное полимино порядка n состоит из n квадратов, а квадрат состоит из двух элементарных треугольников, поэтому

$$A(n) < F(2n).$$

Улучшить эту оценку можно с использованием полиамондов. Дело в том, что с помощью аффинного преобразования (рис. 13) каждому полиамонду можно сопоставить политан.

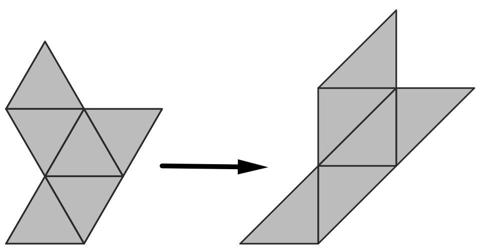


Рис. 13

Тогда у нас получается $P(n) < F(n)$, следовательно, $\lambda_P < \lambda_F$.

Получение более точных оценок для политанов потребует развития имеющихся алгоритмов для полимино и полиамондов и выходит за рамки этой статьи.

Для умножения многочленов, нахождения корней и разложения в ряды автором использовался онлайн-портал `https://cocalc.com`.

§ 9. Решения и указания к некоторым задачам

3. Всего имеется 37 выпуклых многоугольников порядка 32.

а) Из двух наборов Танграма можно собрать 33 из них (рис. 14).

б) Из двух наборов Пифагора можно собрать 31 из них (рис. 15).

в) Из двух наборов Сэй-Сёнагон можно собрать 33 из них (рис. 16).

4. Всего имеется 37 выпуклых многоугольников порядка 32. Из набора головоломки «Занимательный квадрат» можно собрать 22 выпуклых многоугольника (рис. 17).

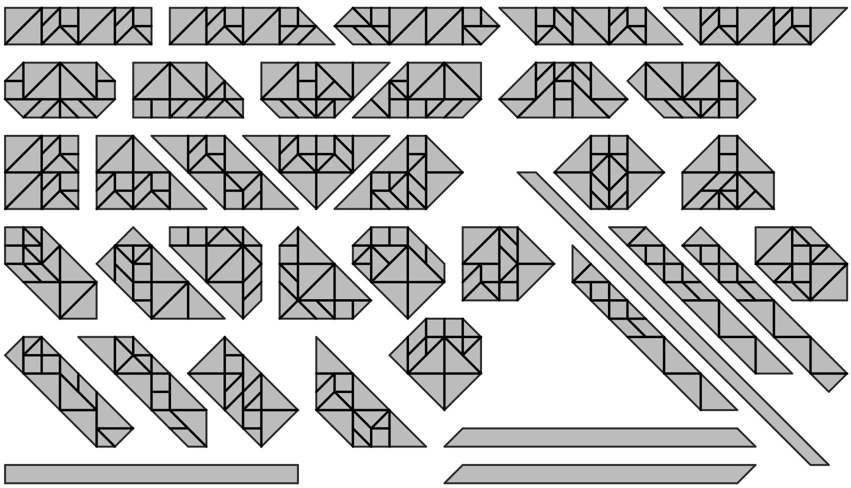


Рис. 14

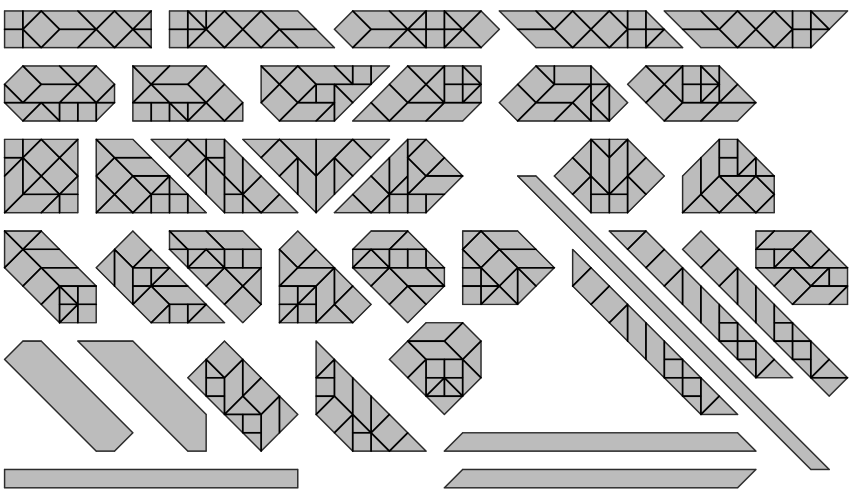


Рис. 15

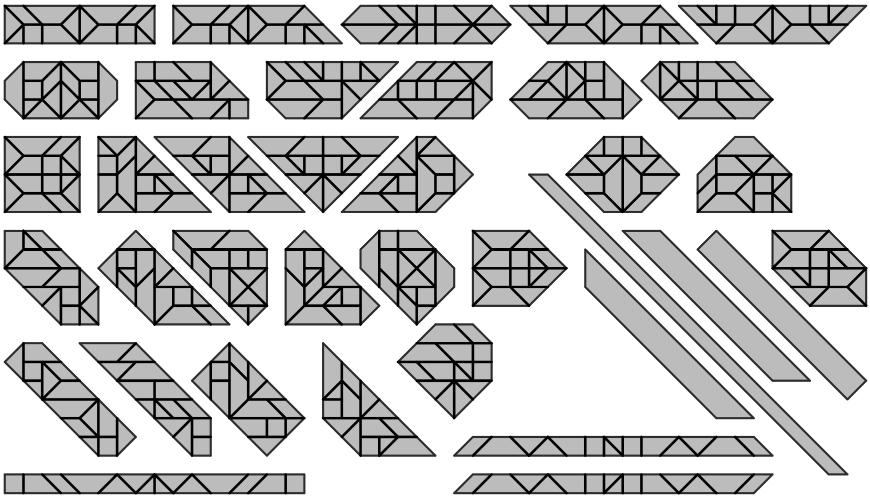


Рис. 16

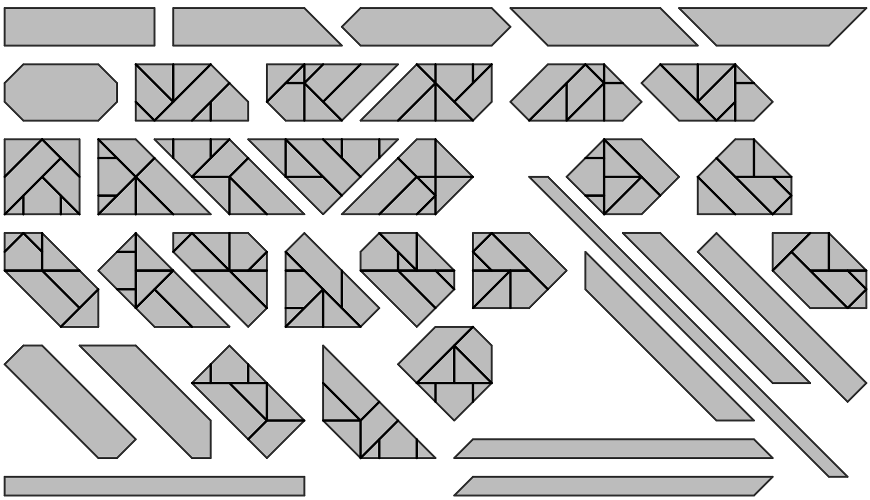


Рис. 17

5. Всего имеется 47 выпуклых многоугольников порядка 40. Из набора головоломки МЗТА можно собрать 21 из них (рис. 18).

7. Указания. а) Для решения задачи достаточно воспользоваться формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z},$$

а затем сделать подстановку $z = x^2 y$.

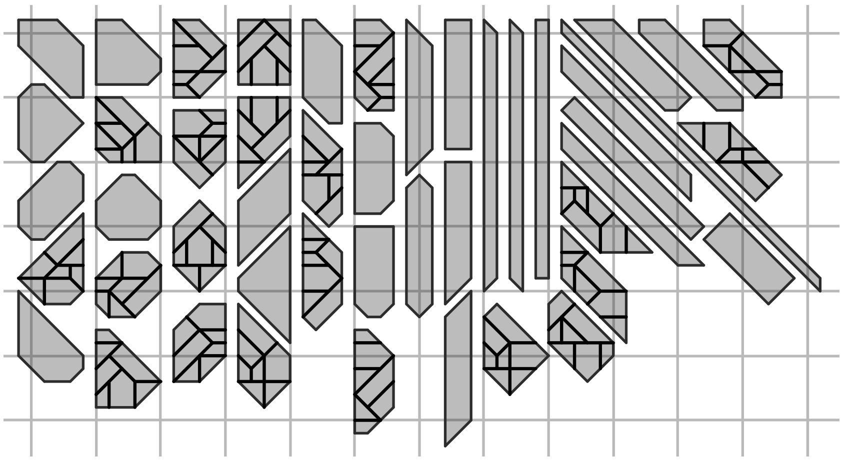


Рис. 18

б) Для решения задачи необходимо продифференцировать ряд из предыдущего пункта

$$\frac{\partial}{\partial z}(1+z+z^2+z^3+\ldots)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

а затем сделать подстановку $z=x^2y$.

Благодарности

Автор благодарит К. А. Ванькова и П. И. Самовола за внимание к работе.

Список литературы

[1] *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. С. 326–335.

[2] *Гарднер М.* Математические новеллы. М.: Мир, 1974. С. 267–281.

[3] *Гарднер М.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990. С. 37–66.

[4] *Голомб С. В.* Полимино. М.: Мир, 1975.

[5] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука. 1990. С. 69, задача 2.3.15. С. 336–337, решение задачи.

[6] *Дьюдени Г. Э.* 520 головоломок. М.: Мир, 1975. С. 214–215, задача 520.

[7] *Журавлёв В. М.* Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 107–129.

[8] *Журавлёв В.* Родственник Танграма // Квант. 2017. № 5, 2-я стр. обложки.

[9] *Кордемский Б. А.*, *Русалев Н. В.* Удивительный квадрат. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. С. 26–28.

[10] *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983.

[11] *Надеждина В.* Книга танграм. 1000 + 1 фигура. Минск: Харвест, 2007.

[12] Наука и жизнь, 1992, № 1. С. 128–129; 1969, № 6. С. 146–147.

[13] *Панов А.* Загадка фигуры № 51 // Квант. 1982. № 12. С. 34–37.

[14] *Перепёлкин Д. И.* Курс элементарной геометрии. Часть 1. Геометрия на плоскости. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С. 208–209.

[15] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 1990. С. 375–383, задача 4.7.18.

[16] *Таунсенд Ч. Б.* Звёздные головоломки. М.: АСТ-ПРЕСС, 1998. С. 37.

[17] *Barequet G.*, *Shalah M.*, *Zheng Y.* An improved lower bound on the growth constant of polyiamonds // Journal of Combinatorial Optimization. 2019. Vol. 37, № 2. P. 424–438.

[18] *Fox-Epstein E.*, *Katsumata K.*, *Uehara R.* The convex configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita”, Tangram, and other silhouette puzzles with seven pieces // IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences. E99-A (2016). 1084–1089.

[19] *Fox-Epstein E.*, *Uehara R.* The convex configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita” and other dissection puzzles // arXiv:1407.1923v1 [cs.CG] 8 Jul 2014.

[20] *Fu Tsiang Wang*, *Chuan-Chih Hsiung*. A Theorem on the Tangram // American Mathematical Monthly. 1942. Vol. 49. P. 596–599.

[21] *Hickerson D.* Counting Horizontally Convex Polyominoes // Journal of Integer sequences. 1999. Vol. 2. Article 99.1.8.

[22] *Klarner D. A.* Cell growth problems // Canad. J. Math. 1967. Vol. 19. P. 851–863.

[23] *Pólya G.* On the number of certain lattice polygons // J. Combinatorial Theory. 1969. Vol. 6. P. 102–105.

[24] `https://cocalc.com/`

[25] `http://oeis.org/`

Валерий Михайлович Журавлёв, ПАО «Туполев», Москва

`zhuravlevvm@mail.ru`

Задача коллекционера

И. Р. Высоцкий

Введение и исторический обзор

Всякий родитель сталкивается с математической задачей, которую задаёт чадо, получившее свой первый киндер-сюрприз с игрушкой внутри и описанием всей коллекции игрушек, которую всенепременно нужно собрать полностью. В коллекции могут оказаться 12 принцесс, 10 бегемотов или персонажи мультфильма.

Естественный вопрос — сколько придётся купить шоколадных яиц, чтобы завершить коллекцию — приводит к любопытной вероятностной модели, которая, будучи простой поначалу, развивается в непропорционально и обидно сложное обобщение, как только детей становится двое и требуется собрать две коллекции на двоих.

Впервые задача появилась, вероятно, в сочинении Муавра «Измерение шансов» (De Mensura Sortis, 1712); позже упоминалась Лапласом в «Аналитической теории вероятностей» (Theorie Analytique des probabilities, 1812).

В 1930-х американская компания Dixie Cup[1)], вероятно, одной из первых в истории маркетинга использовала гениальный ход: под крышкой бутылки с напитком был спрятан купон с изображением кого-то из популярных персонажей цирка Dixies. Разумеется, предъявителю полной коллекции купонов была обещана премия. Позже в ход пошла коллекция звёзд Голливуда и игроков бейсбольных команд высшей лиги.

Благодаря этому в англоязычной литературе задача встречается не только как задача коллекционера (Coupon Collector's Problem), но и под именем Dixie Cup Problem, а её обобщение на две коллекции (или больше) часто называют Double Dixie Cup Problem.

В русскоязычной литературе по какой-то причине задача коллекционера практически не встречается (исключение составляет [4]), что стран-

[1)] Dixie, Dixy (англ.) — солдатский котелок.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 26, 2020 (198–220)

но и несправедливо, поскольку эта классическая задача, бесспорно, заслуживает помещения в золотой фонд теории вероятностей на одну из почётных витрин.

В этой статье даётся классическое решение для одной, а также решение Ньюмана и Шеппа [1] для двух и более коллекций. Во второй части предлагается альтернативный подход к решению и бегло рассматриваются некоторые сопутствующие задачи.

§ 1. Классическая задача коллекционера

Формально речь идёт о длине серии независимых одинаковых испытаний, каждое из которых имеет $n \geqslant 2$ равновозможных исходов. Серия оканчивается при наступлении события «Каждый из n исходов случился хотя бы раз». В таком случае будем говорить о *завершении коллекции*, а под *коллекцией* в каждый момент времени будем понимать подпоследовательность исходов, впервые наступивших в серии. Такие исходы будем называть *экспонатами* коллекции.

Вместо сухой модели мы будем держать в голове содержательную интерпретацию, а именно — коллекцию из n бегемотов, спрятанных в шоколадных яйцах «Киндер-сюрприз». Этот образ ближе современному человеку, чем архаичные купоны Dixie Cup; кроме того, бегемоты обаятельнее безликих исходов в абстрактных испытаниях.

С точки зрения коллекционера упорядоченность экспонатов не важна, однако мы будем нумеровать экспонаты h_k в том порядке, в каком они появляются в коллекции. Под h_k мы понимаем не отдельного бегемота, а целый вид одинаковых бегемотов, представитель которого стал k-м экспонатом в коллекции.

Предположим, что в очередной попытке, т. е. из очередного яйца, с вероятностью $1/n$ может появиться один из n бегемотов независимо от результатов предыдущих попыток. Обозначим через $\xi = \xi(n)$ число яиц, купленных к моменту, когда собрана вся коллекция. Задача — найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Указание на n почти всегда опускаем, кроме случая, где действительно возникает такая необходимость.

Задача 1. Найти $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$.

Решение. Предположим, что в некоторый момент в коллекции уже есть $k-1$ различных экспонатов-бегемотов $(k = 1, \ldots n)$. Тогда вероятность получить k-й экспонат h_k при каждой последующей попытке равна $(n-k+1)/n$, поэтому число попыток φ_k до появления экспоната h_k имеет геометрическое распределение с параметром $(n-k+1)/n$, откуда

$$\mathrm{E}\varphi_k = \frac{n}{n-k+1}.$$

Переходя в равенстве

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \tag{1.1}$$

к математическим ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = nH_n, \tag{1.2}$$

где H_n обозначает n-е гармоническое число:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Пользуясь равенством

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

где $\gamma = 0{,}577\ldots$ — константа Эйлера — Маскерони, получаем формулу

$$\mathrm{E}\xi = n\ln n + \gamma n + \frac{1}{2} + o(1).$$

Случайные величины φ_k независимы, поэтому в равенстве (1.1) можно перейти к дисперсиям:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = \\ = n\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = n^2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - n\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = n^2 H_{2,n} - nH_n,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $j = n - k + 1$, а $H_{2,n}$ обозначает n-е гармоническое число второго порядка:

$$H_{2,n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Известно, что

$$H_{2,n} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

поэтому

$$\mathrm{D}\xi = n^2\frac{\pi^2}{6} - n + \frac{1}{2} - n\ln n - \gamma n - \frac{1}{2} + o(1) = n^2\frac{\pi^2}{6} - n\ln n - (\gamma+1)n + o(1).$$

Пример. Чтобы собрать коллекцию из 10 бегемотов, в среднем потребуется купить примерно

$$10\ln 10 + 10\gamma + \frac{1}{2} \approx 29{,}3 \text{ яиц.}$$

Выбирая в качестве решающего правила три стандартных отклонения, следует рассчитывать не более чем на

$$\mathrm{E}\xi + 3\sqrt{\mathrm{D}\xi} \approx 29{,}3 + 3\sqrt{125{,}7} \approx 63 \text{ попытки.}$$

Равенства (1.2) и (1.3) допускают несколько более общий вид, а именно:

$$\mathrm{E}\zeta = nH_k, \quad \mathrm{D}\zeta = n^2 H_{2,k} - nH_k, \tag{1.4}$$

где ζ — количество попыток, которые потребуются для восполнения k недостающих бегемотов.

§ 2. Две и больше коллекций — решение Ньюмана и Шеппа

Как уже отмечалось, случай, когда требуется собрать две коллекции при тех же условиях, оказывается намного сложнее. Как мы увидим, это связано с неопределённостью *дефицита*, т. е. числа бегемотов, недостающих до завершения последней нужной коллекции в момент, когда завершена предпоследняя. В случае же одной коллекции дефицит определённо равен n.

Точное решение задачи для m коллекций дали Дональд Ньюман и Лоуренс Шепп в 1960 году [1].

Как и прежде, считаем, что каждая попытка оканчивается одним из n равновозможных бегемотов. Испытания проводятся последовательно до тех пор, пока не собраны все возможные экспонаты для m коллекций, т. е. бегемоты каждого вида не появились хотя бы m раз ($m \geqslant 2$). Количество потребовавшихся попыток обозначим через ξ_m.

Задача 2. Найти $\mathrm{E}\xi_m$.

Теорема 1 (Ньюман, Шепп).

$$\mathrm{E}\xi_m = n\int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\cdot e^{-t}\right)^n\right)dt. \tag{2.1}$$

Асимптотическое приближение даётся следующей теоремой.

Теорема 2 (Ньюман, Шепп).

$$\mathrm{E}\xi_m = n\ln n + n(m-1)\ln\ln n + c_m + o(1), \tag{2.2}$$

где c_m — некоторая константа.

Природа чисел c_m исследована Эрдёшем и Реньи в 1961 году [2].

Доказательство теоремы 1 чрезвычайно остроумно. Пусть I_i — индикатор события «i попыток оказалось недостаточно, чтобы укомплектовать m коллекций» ($i \geqslant 1$). Вероятность этого события равна

$$\mathrm{E}I_i = \mathrm{P}(I_i = 1) = \frac{W_i}{n^i},$$

где W_i — количество последовательностей, составленных из i бегемотов, в каждой из которых хотя бы один бегемот встречается менее m раз. Переходя в равенстве

$$\xi_m = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} I_i$$

к математическим ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}\xi_m = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}I_i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_i}{n^i}.$$

Поскольку $W_0 = 1$, можно для общности включить единицу в сумму:

$$\mathrm{E}\xi_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_i}{n^i}.$$

Введём функцию

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \left\{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^i\right\},$$

где фигурными скобками обозначена операция удаления из многочлена или степенного ряда всех членов, содержащих каждую из переменных $x_1 \ldots x_n$ в степени m или выше. Тогда

$$W_i = f_i\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ единиц}},$$

и

$$\mathrm{E}\xi_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_i}{n^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{n^i}\bigg|_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1}. \tag{2.3}$$

Осталось удалить лишние слагаемые. Это несложно сделать для функции

$$\exp \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^i \right).$$

Чтобы оставить в этом ряде только те слагаемые, куда хотя бы одно из x_j входит в степени меньше чем m, вычтем из $\exp \sum_{j=1}^{n} x_j$ произведение

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x_2^k}{k!} \cdot \ldots \cdot \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!}.$$

Получим

$$\exp \sum_{j=1}^{n} x_j - \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x_j^k}{k!} = \left\{ \exp \sum_{j=1}^{n} x_j \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^i \right\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^i \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{i!}.$$

Полученное выражение отличается от требуемого (2.3) только знаменателем. Нужно придумать способ превратить факториалы $i!$ в степени n^i, оставив всю прочую структуру нетронутой. На помощь приходит равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-nt}\, dt = \frac{1}{n^{i+1}}.$$

Получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{n^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(f_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot n \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-nt}\, dt \right) =$$
$$= n \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{i!} t^i e^{-nt}\, dt = n \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x_1 t, x_2 t, \ldots, x_n t)}{i!} e^{-nt}\, dt =$$
$$= n \int_0^{\infty} \left(\exp \sum_{j=1}^{n} x_j t - \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(x_j t)^k}{k!} \right) e^{-nt}\, dt.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\xi_m = n \int_0^{\infty} \left(\exp \sum_{j=1}^{n} t - \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right)^n \right) e^{-nt}\, dt =$$
$$= n \int_0^{\infty} \left(e^{nt} - \left(e^t - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \right)^n \right) e^{-nt}\, dt = n \int_0^{\infty} \left(1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \cdot e^{-t} \right)^n \right) dt. \ \square$$

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы следует из равенства

$$\frac{\mathrm{E}_m\xi(n+1)}{n+1}-\frac{\mathrm{E}_m\xi(n)}{n}=\frac{1}{n}+\frac{m-1}{n\ln n}+\lambda_n,$$

где $\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda_n|<\infty$. Доказательство носит технический характер и приведено в [1]. □

Ньюман и Шепп в этот момент пишут: «Если первая коллекция „стоит“ $n\ln n$, то вторая и каждая последующая стоят $n\ln\ln n$». Под стоимостью следует понимать трудозатраты коллекционера, либо — буквально — стоимость элементов коллекции в денежных единицах.

Если теорема 1, являясь образцом искромётного остроумия, не даёт приемлемого метода вычисления, то теорема 2, напротив, даёт метод оценки, но не открывает природы выражения $\ln\ln n$. Может ли этот повторный логарифм появиться из более естественных соображений? Если этот вопрос интересен читателю, то он может пробежать глазами следующий параграф.

§ 3. Дефицит коллекции

Рассмотрим момент, когда $(m-1)$-я коллекция собрана $(m\geqslant 1)$. Для завершения m-й коллекции в эту минуту не хватает какого-то количества бегемотов. Теоретически этот *дефицит* бегемотов δ_m может принимать любое значение от 1 до n.

Теорема 3. *Для всех $m \geqslant 2$ случайные величины δ_m распределены одинаково, причём*

$$\mathrm{E}\delta_m = H_n, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{D}\delta_m = H_n^2 - 3H_n + 2H_{2,n}. \tag{3.2}$$

Первое равенство поможет «раскрыть тайну» повторного логарифма Ньюмана — Шеппа в (2.2). Равенство (3.2) говорит, что с ростом n диапазон вероятных значений дефицита растёт примерно с той же скоростью, что и математическое ожидание, а это значительно затрудняет поиск хорошей асимптотики для $\mathrm{E}\xi_m$.

Доказательство. Пронумеруем экспонаты в том порядке, в каком они появлялись в ходе собирания $(m-1)$-й коллекции. Например, бегемот вида h_1 — это первый бегемот $(m-1)$-й коллекции, через какое-то количество попыток за бегемотом h_1 явился бегемот вида h_2, какого ещё не было в $(m-1)$-й коллекции, но бегемоты этого вида уже появлялись прежде, чтобы пополнить предыдущие коллекции, если таковые есть.

Обозначим через A_{jk}, где $j \leqslant k$, событие «при комплектовании $(m-1)$-й коллекции между экспонатами h_k и h_{k+1} не появился ни один бегемот вида h_j». Здесь $k = 1, \ldots, n-1$. Событие A_{jk} состоит в том, что после экспоната h_k, но до экспоната h_{k+1} последовало несколько (может быть, ни одного) уже появлявшихся прежде (старых) бегемотов, но среди них не было h_j. Старых бегемотов всего k видов $(h_1, \ldots, h_k)$, а без бегемота h_j их всего $k-1$ вид. Новым экспонатом h_{k+1} может оказаться бегемот любого из $n-k$ видов, не встречавшихся ещё в $(m-1)$-й коллекции.

Поэтому вероятность события A_{jk} равна

$$\mathrm{P}(A_{jk}) = \frac{n-k}{n} + \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n-k}{n} + \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{n-k}{n} + \ldots = \frac{n-k}{n-k+1}. \tag{3.3}$$

Если к моменту завершения $(m-1)$-й коллекции не хватает бегемота некоторого вида для следующей, m-й коллекции, то будем называть такого бегемота *дефицитным*. Вероятность события A_j «бегемот h_j дефицитный» равна

$$\mathrm{P}(A_j) = \prod_{k=j}^{n-1} \mathrm{P}(A_{jk}) = \frac{n-j}{n-j+1} \cdot \frac{n-j-1}{n-j} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n-j+1}.$$

В частности, бегемот h_1 дефицитен с вероятностью $1/n$, а бегемот h_n дефицитен с вероятностью 1, что неудивительно, ибо $(m-1)$-я коллекция как раз и завершается появлением экземпляра именно этого вида.

Событие $\delta_m = k$ выражается алгебраически через события A_j. Оно равно объединению всевозможных пересечений k различных событий вида A_j и дополнений к остальным $n-k$ событиям A_j. Вероятности событий A_j не зависят от m, следовательно, вероятность события $\delta_m = k$ также не зависит от m.

Найдём математическое ожидание δ_m:

$$\delta_m = \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

где I_i — индикатор события A_i, и

$$\mathrm{E}\delta_m = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}I_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} = H_n.$$

Чтобы найти дисперсию дефицита δ_m, нужны математические ожидания произведений $I_i I_j$ $(i < j)$, т. е. индикаторов событий

B_{ij} «бегемоты h_i и h_j оба дефицитные».

Рассуждения здесь аналогичны тем, что мы только что провели. При $i \leqslant k < j$ согласно (3.3) бегемот h_i не появится между бегемотами h_k и h_{k+1} с вероятностью

$$\mathrm{P}(A_{ik}) = \frac{n-k}{n-k+1}.$$

При $i < j \leqslant k$ вероятность события B_{ijk} «между бегемотами h_k и h_{k+1} нет бегемотов h_i и h_j» равна

$$\mathrm{P}(B_{ijk}) = \frac{n-k}{n} + \frac{k-2}{n} \cdot \frac{n-k}{n} + \left(\frac{k-2}{n}\right)^2 \cdot \frac{n-k}{n} + \ldots = \frac{n-k}{n-k+2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(B_{ij}) = \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{P}(A_{ik}) \cdot \prod_{k=j}^{n-1} \mathrm{P}(B_{ijk}) = \prod_{k=i}^{j-1} \frac{n-k}{n-k+1} \cdot \prod_{k=j}^{n-1} \frac{n-k}{n-k+2} =$$

$$= \frac{(n-i)!(n-j+1)!2!}{(n-i+1)!(n-j+2)!} = \frac{2}{(n-i+1)(n-j+2)}.$$

Теперь в равенстве

$$\delta_m^2 = \sum_{i=1}^{n} I_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} I_i I_j = \sum_{i=1}^{n} I_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} I_i I_j$$

переход к математическим ожиданиям даёт:

$$\mathrm{E}\delta_m^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{P}(B_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{2}{(n-i+1)(n-j+2)}. \tag{3.4}$$

Преобразуем сумму во втором слагаемом:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{2}{(n-i+1)(n-j+2)} = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n-2} \frac{2}{(n-i)(n-j)} =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1} \frac{2}{(n-i)(n-j)} - 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)(n-j)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)^2} - 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} = H_n^2 + H_{2,n} - 2H_n.$$

Теперь из (3.4) получаем

$$\mathrm{E}\delta_m^2 = H_n + 2H_n^2 + 2H_{2,n} - 4H_n = 2H_n^2 - 3H_n + 2H_{2,n}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}\delta_m = \mathrm{E}\delta_m^2 - \mathrm{E}^2\delta_m = 2H_n^2 - 3H_n + 2H_{2,n} - H_n^2 = H_n^2 - 3H_n + 2H_{2,n}. \qquad \square$$

* * *

Чтобы сделать следующий шаг, нужно определить гармоническое число H_x для произвольного неотрицательного x или хотя бы для $x \geqslant 1$. Это можно сделать разными способами. Обычно полагают

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\, dt. \tag{3.5}$$

Очевидно, при $x = n \in N$ это определение согласуется с привычным равенством

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{d^2 H_x}{dx^2} < 0,$$

поэтому функция $y = -H_x$ выпукла на промежутке $[1; +\infty)$: её надграфик $\{(x; y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant -H_x\}$ является выпуклой фигурой.

Возможны и другие естественные продолжения последовательности H_n до непрерывной функции. Например, кусочно-линейное продолжение

$$H_x = H_{[x]} + \frac{\{x\}}{[x]+1}. \tag{3.6}$$

При таком определении функция $y = -H_x$ также выпукла.

* * *

Вернёмся к центральному вопросу о $\mathrm{E}\xi_m$.

Теорема 4. *При $m \geqslant 2$*

$$\mathrm{E}\xi_m < nH_n + n(m-1)H_{H_n}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Обозначим через ζ_j случайную величину, равную количеству попыток, которые потребуются, чтобы восполнить дефицит j-й коллекции δ_j. В силу (1.4)

$$\mathrm{E}\zeta_j = n\sum_{k=1}^{n} H_k \mathrm{P}(\delta_j = k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\xi_m &= \mathrm{E}(\xi + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_m) = \\ &= \mathrm{E}\xi + \sum_{j=2}^{m} \mathrm{E}\zeta_j = \mathrm{E}\xi + n\sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{n} H_k \mathrm{P}(\delta_j = k).\end{aligned}$$

Все величины δ_j распределены одинаково. Поэтому, говоря о числовых характеристиках любой из величин δ_j, можно заменить δ_j абстрактной случайной величиной δ, имеющей то же распределение. Тогда

$$\mathrm{E}\xi_m = nH_n + n(m-1)\sum_{k=1}^{n} H_k \mathrm{P}(\delta = k).$$

Рассмотрим отдельно сумму $\sum_k H_k \mathrm{P}(\delta = k)$. Функция $y = -H_x$ выпукла (здесь в качестве H_x можно взять любое подходящее продолжение последовательности H_n, например (3.5) или (3.6)). Поэтому в силу неравенства Йенсена

$$\sum_{k=1}^{n}(-H_k \mathrm{P}(\delta = k)) > -H_{\sum_k k\mathrm{P}(\delta = k)} = -H_{\mathrm{E}\delta} = -H_{H_n}.$$

Значит,

$$\mathrm{E}\xi_m < nH_n + n(m-1)H_{H_n}. \qquad \square$$

Полученная оценка проливает свет на появление повторного логарифма в (2.2), а ход доказательства выявляет общую природу слагаемых nH_n и nH_{H_n}.

Можно получить нижнюю оценку

$$\mathrm{E}\xi_m > nH_n\Big(1 + \mathrm{P}\Big(\delta \geqslant \frac{n}{H_n}\Big)\Big) \qquad (3.8)$$

(см. задачу 6 в § 5). Однако эта оценка не очень полезна ввиду трудоёмкости вычисления вероятностей в распределении дефицита.

Следующий параграф посвящён распределению величины δ и иному подходу к решению задачи коллекционера, совершенно отличному от изложенных выше.

§ 4. Коллекционирование как случайный процесс

Граф комплектования двух коллекций

Напомним, что через δ_m обозначен дефицит m-й коллекции, т. е. количество экспонатов, недостающих в m-й коллекции в момент завершения $(m-1)$-й коллекции, а ζ_m — число попыток, нужных, чтобы восполнить дефицит δ_m.

Очевидно, $\delta_1 = n$; мы видели, что при $m \geqslant 2$ все величины δ_m распределены одинаково, а, следовательно, все ζ_m при $m \geqslant 2$ также имеют одинаковые распределения. Значит, чтобы решить задачу коллекционера для произвольного числа коллекций, достаточно понять, как она решается в случае двух коллекций: $m = 2$.

Будем искать только $\mathrm{E}\xi_2$, поскольку при $m > 2$, как следует из доказанного выше,

$$\mathrm{E}\xi_m = (m-1)\mathrm{E}\xi_2 - (m-2)\mathrm{E}\xi, \qquad (4.1)$$

где, как и прежде, $\xi = \xi_1$ — число попыток, нужных для завершения первой коллекции.

* * *

Обозначим через $s_{i,j}$ состояние, когда первая коллекция содержит уже i экспонатов, а вторая j экспонатов $(0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n)$. Эти состояния в совокупности образуют случайный процесс S с начальным состоянием $s_{0,0}$ и конечным состоянием $s_{n,n}$. Переходы между состояниями имеют вероятности, зависящие от i и j. Изобразим весь процесс с помощью ориентированного графа $\mathfrak{S}$, подписав вероятности переходов около соответствующих стрелок (рис. 1).

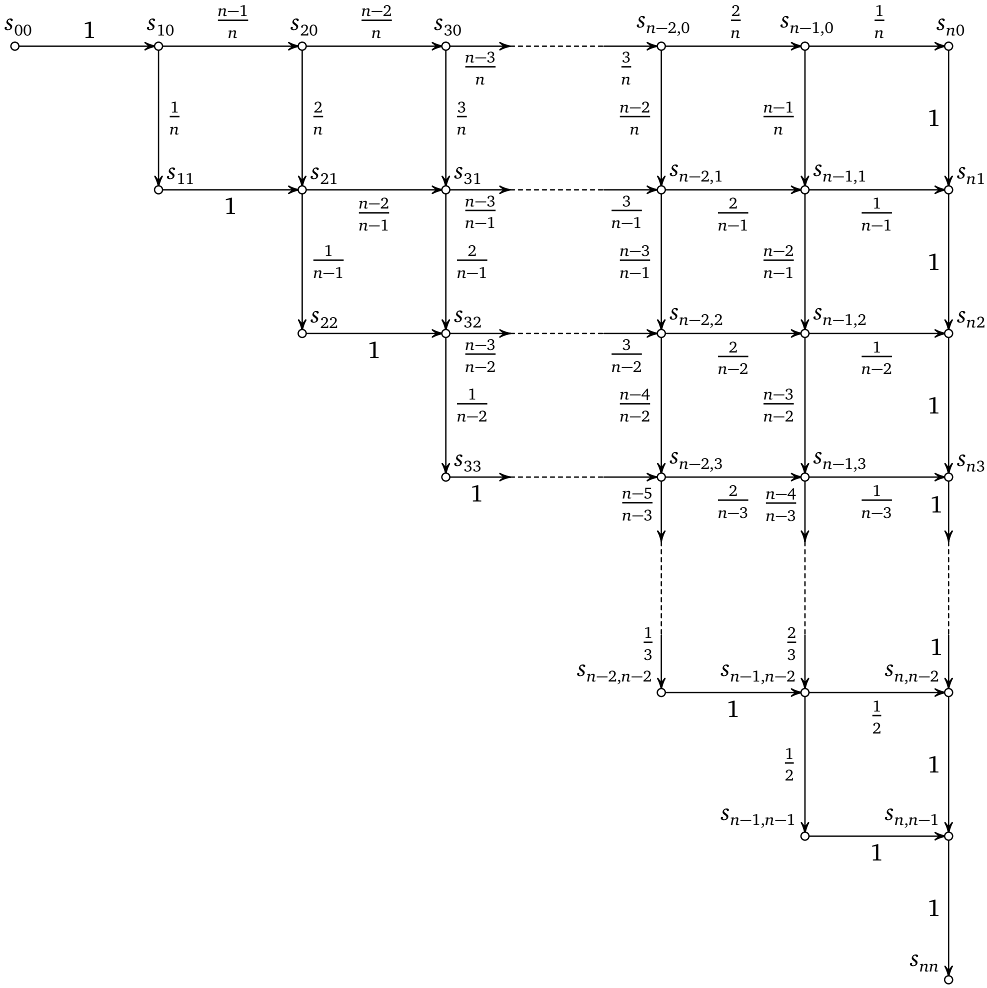


Рис. 1. Граф $\mathfrak{S}$

Каждое состояние может появиться с вероятностью $q_{i,j} = \mathrm{P}(s_{i,j})$. Положим $q_{0,0} = 1$, так как начальное состояние появится наверняка. Для общности положим $q_{0,j} = 0$ для $j > 0$ и $q_{i,-1} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда вероятности всех прочих состояний при $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ вычисляются по формуле

$$q_{i,j} = \frac{n-i+1}{n-j} q_{i-1,j} + \frac{i-j+1}{n-j+1} q_{i,j-1}. \tag{4.2}$$

Каждый способ собрать 2 коллекции в графе $\mathfrak{S}$ изображается одной из C_n цепочек[2)] длины $2n$, ведущих из $s_{0,0}$ в $s_{n,n}$. Каждый переход в цепоч-

---

[2)] C_n здесь обозначает n-е число Каталана $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

ке из состояния $s_{i,j}$ в одно из следующих возможных состояний $s_{i+1,j}$ или $s_{i,j+1}$ осуществляется за некоторое случайное число шагов $\varphi_{i,j}$.

Общее число попыток при комплектовании двух коллекций равно

$$\xi_2 = \sum_{\mathfrak{S}\setminus\{s_{nn}\}} I_{i,j}\varphi_{i,j},$$

где $I_{i,j}$ — индикатор события «процесс S пришёл в состояние $s_{i,j}$». Суммирование происходит по всем состояниям процесса, кроме конечного состояния $s_{n,n}$, из которого нет выхода, поскольку, попав в это состояние, коллекционер находит обе коллекции завершёнными.

Случайная величина $\varphi_{i,j}$ принадлежит геометрическому распределению $G\left(\frac{n-j}{n}\right)$. Действительно, при каждой попытке выход из состояния $s_{i,j}$ происходит тогда, когда появился новый экспонат для первой или второй коллекции, т. е. бегемот одного из $n-j$ видов, которых ещё нет во второй коллекции.

Поэтому

$$\mathrm{E}\xi_2 = \sum_{\mathfrak{S}\setminus\{s_{n,n}\}} \mathrm{E}I_{i,j}\mathrm{E}\varphi_{i,j} = \sum_{\mathfrak{S}\setminus\{s_{n,n}\}} q_{i,j}\cdot\frac{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n-j}\sum_{i=j}^{n} q_{i,j}\right). \tag{4.3}$$

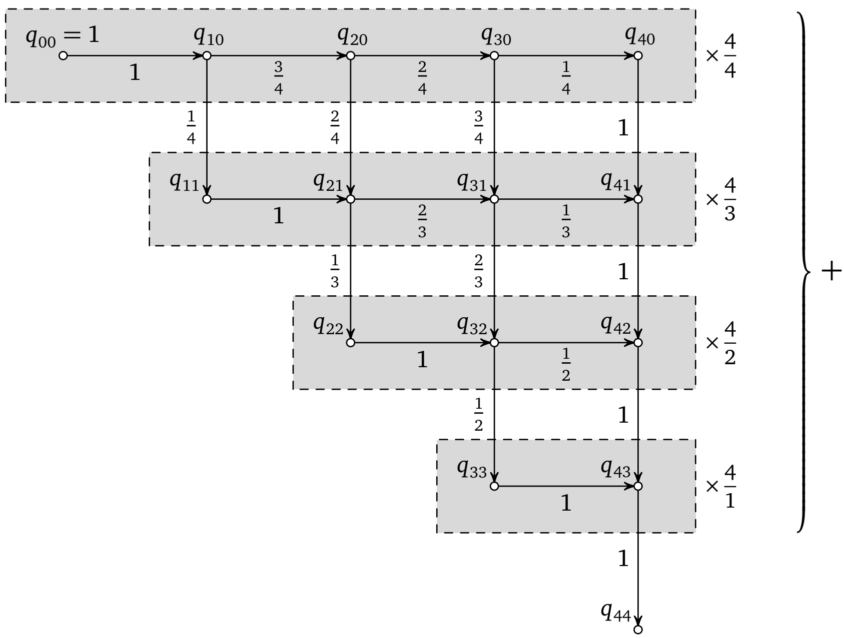


Рис. 2. Суммы вероятностей $q_{i,j}$ (кроме $q_{n,n}$) умножаются на соответствующий множитель $\frac{n}{n}$, $\frac{n}{n-1}$, …, $\frac{n}{1}$. Произведения суммируются

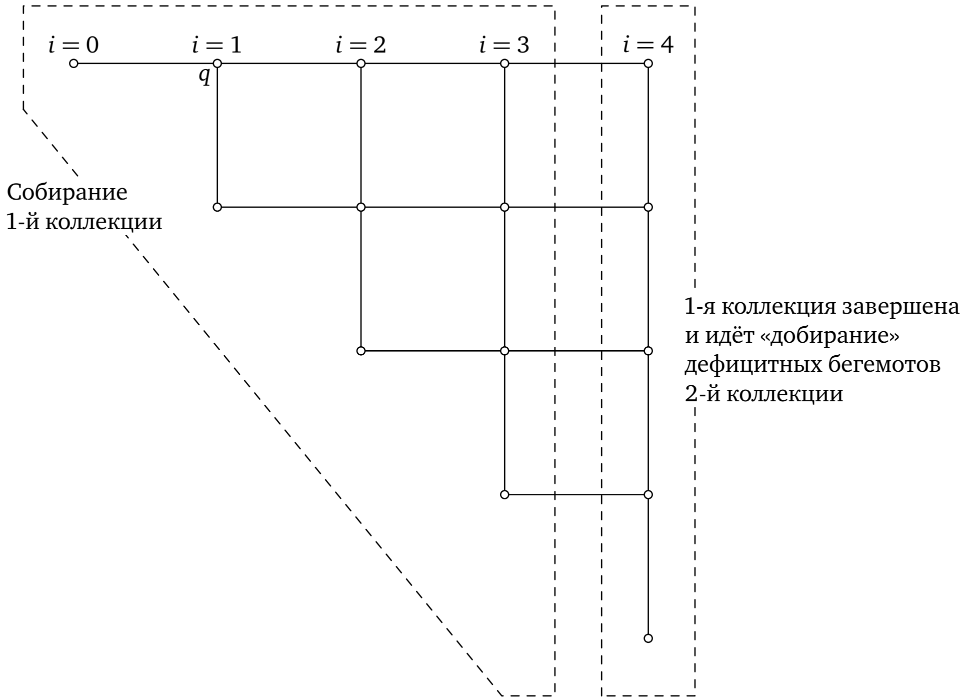


Рис. 3

Полученную сумму можно изобразить наглядно на графе $\mathfrak{S}$ (рис. 2). Для простоты и обозримости возьмём случай $n=4$. Состояния $s_{i,j}$ будем подписывать их вероятностями $q_{i,j}=\mathrm{P}(s_{i,j})$.

Все вертикальные цепи в графе $\mathfrak{S}$, кроме самой правой, в совокупности содержат состояния $s_{i,j}$, где $i<n$, когда первая коллекция ещё не собрана. Завершение первой коллекции означает переход на последнюю вертикальную цепь, где $i=n$ (рис. 3).

Поэтому в сумме (4.3) слагаемые с $i<n$ в сумме дают $\mathrm{E}\xi$, т. е. nH_n:

$$\mathrm{E}\xi_2=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n}{n-j}\sum_{i=j}^{n-1}q_{i,j}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n}{n-j}q_{n,j}=nH_n+n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{q_{n,j}}{n-j}. \qquad (4.4)$$

Формулы (4.3) или (4.4) совместно с (4.1) дают точное решение задачи коллекционера для двух, а значит, и для произвольного числа коллекций.

Матрица переходов

Общее количество состояний в графе $\mathfrak{S}$ равно C_{n+2}^2. Упорядочим их построчно: s_{00}, s_{10}, …, s_{n0}, s_{11}, s_{21}, …, s_{n1}, …, $s_{n-1,n-1}$, $s_{n,n-1}$, $s_{n,n}$ и построим матрицу переходов S для графа $\mathfrak{S}$. При $n = 3$ матрица имеет размер 10×10 и выглядит следующим образом (сверху и справа указаны состояния):

$$S = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccc} s_{00} & s_{10} & s_{20} & s_{30} & s_{11} & s_{21} & s_{31} & s_{22} & s_{32} & s_{33} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_{00} \\ s_{10} \\ s_{20} \\ s_{30} \\ s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{array} \end{array}.$$

Элемент в строке $s_{i,j}$ и в столбце $s_{k,l}$ равен вероятности перехода из $s_{i,j}$ в $s_{k,l}$. Матрица естественным образом разделяется на горизонтальные полосы. В первой полосе $n+1$ строк от $s_{0,0}$ до $s_{n,0}$, во второй n строк от $s_{1,1}$ до $s_{n,1}$ и так далее.

Матрица S не является стохастической в полном смысле слова, поскольку процесс конечен и поэтому последняя строка $s_{n,n}$ нулевая.

Теорема 5. *Элементы первой строки матрицы $(E-S)^{-1}$ равны $q_{i,j}$, т. е. вероятностям соответствующих состояний процесса $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. В первой строке матрицы S^k в столбце, соответствующем состоянию s_{ij}, стоит число, равное вероятности попадания из состояния $s_{0,0}$ в состояние $s_{i,j}$ ровно за k переходов ($k = 1, \ldots, 2n$). Единичная матрица E обладает тем же свойством: левая верхняя единица может рассматриваться как $q_{0,0}$, т. е. вероятность того, что процесс начинается с состояния $s_{0,0}$. Следовательно, вероятности попадания из $s_{0,0}$ в $s_{i,j}$ за некоторое число переходов образуют матрицу

$$E + S^1 + S^2 + \ldots + S^{2n} = \sum_{k=10}^{2n} S^k.$$

Матрица $E - S$ верхнетреугольная с единицами на главной диагонали. Поэтому обратная матрица $(E-S)^{-1}$ существует, и, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\sum_{k=0}^{2n} S^k = (E-S)^{-1}(E-S^{2n+1}) = (E-S)^{-1}.$$

Последнее равенство верно, поскольку матрица S^{2n+1} нулевая. □

Обозначим через $\boldsymbol{g}$ вектор-столбец

$$\Bigl(\underbrace{\frac{n}{n}, \frac{n}{n}, \dots, \frac{n}{n}}_{n+1}, \underbrace{\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}, \dots, \frac{n}{n-1}}_{n}, \dots, \underbrace{\frac{n}{1}, \frac{n}{1}}_{2}, 0\Bigr)^T$$

и заменим в матрице $E-S$ первый столбец вектором $\boldsymbol{g}$. Полученную матрицу назовём Q.

Теорема 6.

$$\mathrm{E}\xi_2 = \det Q. \tag{4.5}$$

Доказательство. Из теоремы 5 и равенства (4.3) следует, что первый элемент вектора

$$\boldsymbol{x} = (E-S)^{-1}\boldsymbol{g} \tag{4.6}$$

равен

$$x_1 = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n-j}\cdot\sum_{i=j}^{n} q_{i,j}\right) = \mathrm{E}\xi_2.$$

Умножая слева обе части (4.6) на $E-S$, получим $(E-S)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$. Методом Крамера из этого уравнения находим:

$$x_1 = \frac{\det Q}{\det(E-S)} = \det Q.$$ □

Для произвольного количества коллекций $m \geqslant 2$ из (4.1) теперь получаем:

$$\mathrm{E}\xi_m = (m-1)\det Q - (m-2)nH_n.$$

Подобный подход к решению задачи коллекционера с помощью случайного процесса описан Марко Ферранте и Моникой Сальталамаккья (Marco Ferrante, Monica Saltamacchia) в [3]. Однако помимо существенных переходов между состояниями Ферранте и Сальталамаккья рассматривают и переходы вида $s_{i,j} \to s_{i,j}$, которые в нашем случае изображались бы петлями в графе $\mathfrak{G}$. Матрица получается стохастической, приводит к линейной системе, дающей решение задачи, однако необратимость матрицы, аналогичной $E-S$ (в наших обозначениях), затрудняет получение результата, подобного теореме 6.

* * *

Пример для $n = 3$. Построим матрицу Q:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_{00} & s_{10} & s_{20} & s_{30} & s_{11} & s_{21} & s_{31} & s_{22} & s_{32} & s_{33} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & *0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ s_{00} \\ s_{10} \\ s_{20} \\ s_{30} \\ s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{matrix}$$

и найдём её определитель: $\mathrm{E}\xi_2 = \det Q \approx 9{,}639$. Тогда

$$\mathrm{E}\xi_3 = 2\mathrm{E}\xi_2 - 3H_3 \approx 13{,}778, \qquad \mathrm{E}\xi_4 = 3\mathrm{E}\xi_2 - 2 \cdot 3H_3 = 17{,}917, \quad \text{и т. д.}$$

В заключение — таблица значений $\mathrm{E}\xi_2$, приближений по формуле (2.2) без учёта констант, верхних оценок[3)] (3.7) и нижних (5.1) (усиление оценки (3.8)) для $n = 2, \ldots, 10$.

n	$\mathrm{E}\xi_2$	Оценка (2.2)	Верхняя оценка (3.7)	Нижняя оценка (5.1)
2	5,5	0,6533	5,5	5,5
3	9,6389	3,5780	9,75	9,6385
4	14,1887	6,8517	16,4444	14,0830
5	19,0414	10,4266	21,8889	18,6790
6	24,1339	14,2497	27,6	23,3342
7	29,4247	18,2815	33,5333	28,0141
8	34,8847	22,4923	39,6571	32,6474
9	40,4919	26,8598	45,9477	37,4319
10	46,2296	31,3662	52,3862	42,2063

[3)] Для вычисления H_{H_n} использовалась формула (3.6).

§ 5. Сопутствующие задачи

1. Докажите:
а) $\mathrm{P}(\delta = k) = \frac{1}{k} q_{n-1,n-k}$;
б) $\mathrm{P}(\delta = k) = q_{n,n-k} - q_{n,n-k-1}$ (полагая для общности $q_{n,-1} = 0$);
в) $\mathrm{P}(\delta \geqslant k) = q_{n,n-k}$.
2. Докажите:

$$\sum_{j=0}^{i} q_{i,j} \frac{n-i}{n-j} = 1$$

(в частности, при $i = n-1$ получаем сумму вероятностей $\mathrm{P}(\delta = k)$ из задачи 1а).

3. Найдите математическое ожидание «промежуточного дефицита бегемотов» $\delta^{(i)}$, т. е. числа экспонатов, которых недостаёт во второй коллекции в момент, когда первая коллекция пополняется $(i+1)$-м экспонатом $(i = 0, \ldots, n-1)$.

4. Докажите:

$$\sum_{j=0}^{i} q_{i,j} = 1 + H_n - H_{n-i}$$

(в частности, $\sum_{j=0}^{n-1} q_{n-1,j} = H_n = \mathrm{E}\delta$).

5. а) Вероятности дефицита одного и двух бегемотов равны:

$$\mathrm{P}(\delta = 1) = \mathrm{P}(\delta = 2).$$

б) Вероятность того, что дефицитных бегемотов ровно k $(1 < k < n)$, больше вероятности того, что их ровно $k+1$:

$$\mathrm{P}(\delta = 2) > \mathrm{P}(\delta = 3) > \ldots > \mathrm{P}(\delta = n).$$

6. Докажите:

$$\mathrm{E}\xi_m > nH_n\Big(1 + \mathrm{P}\Big(\delta \geqslant \frac{n}{H_n}\Big)\Big).$$

7. Найдите математическое ожидание количества лишних бегемотов каждого вида h_k, образовавшегося в ходе комплектования первой коллекции.

8. Найдите вероятность того, что для завершения первой коллекции нужно купить ровно k бегемотов.

Решения задач

1. а) $q_{n-1,n-k}$ — вероятность того, что в ходе коллекционирования случилось состояние, когда в первой коллекции $n-1$ экспонат, а во второй $n-k$ экспонатов. Тогда $q_{n-1,n-k} \cdot \frac{1}{k}$ — вероятность того, что состоится переход $q_{n-1,n-k} \to q_{n,n-k}$, т. е. первая коллекция будет завершена в момент, когда во второй не хватает ровно k экспонатов:

$$\frac{1}{k} \cdot q_{n-1,n-k} = \mathrm{P}(\delta = k).$$

б) Из (4.2) получаем:

$$q_{n,n-k} = \frac{1}{k} q_{n-1,n-k} + q_{n,n-k-1},$$

откуда

$$q_{n,n-k} - q_{n,n-k-1} = \frac{1}{k} q_{n-1,n-k} = \mathrm{P}(\delta = k).$$

в) Утверждение является очевидным следствием утверждения п. б).

2. $\frac{n-i}{n-j} q_{i,j}$ — вероятность того, что в процессе S состоялся переход

$$q_{i,j} \to q_{i+1,j},$$

т. е. событие $C_{i,j}$ «в момент, когда произошло пополнение первой коллекции экспонатом h_{i+1}, во второй коллекции было ровно j экспонатов». События $C_{i,j}$ несовместны и при $j=0, \ldots, i$ исчерпывают все возможности (образуют полную группу элементарных событий). Поэтому

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{n-i}{n-j} q_{ij} = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{P}(C_{i,j}) = 1.$$

3. $\mathrm{E}\delta^{(i)}$ можно найти тем же способом, какой использован при выводе формулы (3.1):

$$\mathrm{E}\delta^{(i)} = (n-i)\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-i+1} + \underbrace{\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}, \ldots, \frac{n}{n-1}}_{n-i \text{ слагаемых}}\Big) = \\ = (n-i)(H_n - H_{n-i} + 1).$$

4. Пусть $i < n$. События $C_{i,j}$ из решения задачи 2 можно понимать иначе: $C_{i,j} = \{$к моменту появления в первой коллекции $(i+1)$-го экспоната во второй коллекции не хватает $n-j$ бегемотов$\}$. Значит, $\mathrm{E}\delta^{(i)}$ (см. задачу 3) равно

$$\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\mathrm{P}(C_{i,j}) = \sum_{j=0}^{i} (n-j) \frac{n-i}{n-j} q_{i,j} = (n-i) \sum_{j=0}^{i} q_{i,j},$$

поскольку $\mathrm{P}(C_{i,j}) = 0$ при $j > i$. Утверждение задачи следует из уравнивания полученного выражения с выражением для $\mathrm{E}\delta^{(i)}$, найденным в задаче 3.

Пусть $i = n$. Утверждение теперь следует из того, что $q_{n,n-j} = \mathrm{P}(\delta \geqslant j)$ при $\leqslant j \leqslant n$:

$$\sum_{j=0}^{n} q_{n,j} = \sum_{j=0}^{n} q_{n,n-j} = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(\delta \geqslant j) = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\mathrm{P}(\delta = j) = \mathrm{E}\delta + 1 = H_n + 1.$$

5. а) Из задачи 1а) получаем:

$$\mathrm{P}(\delta = 1) = q_{n-1,n-1} = \frac{1}{2} q_{n-1,n-2} = \mathrm{P}(\delta = 2).$$

б) Из задачи 1а) и формулы (4.2) при $k \geqslant 2$ находим:

$$\mathrm{P}(\delta = k) = \frac{1}{k} q_{n-1,n-k} = \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} q_{n-2,n-k} + \frac{k}{k+1} q_{n-1,n-k-1}\right) > \\ > \frac{1}{k+1} q_{n-1,n-k-1} = \mathrm{P}(\delta = k+1).$$

6. Воспользуемся равенством (4.4):

$$\mathrm{E}\xi_2 = nH_n + n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n-j} q_{n,j} = nH_n + nH_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{H_n(n-j)} q_{n,j}.$$

Рассмотрим последнюю сумму отдельно. Из задач 1б) и 5б) следует, что кусочно-линейное продолжение $y = q_{n,x}$ последовательности вероятностей $q_{n,j}$ — выпуклая нелинейная возрастающая функция. При этом

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{H_n(n-j)} = \frac{H_n}{H_n} = 1.$$

В силу неравенства Йенсена

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{H_n(n-j)} q_{n,j} > q_{n,f(n)},$$

где

$$f(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{H_n(n-j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j-n}{H_n(n-j)} + \frac{n}{H_n} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n-j} = n - \frac{n}{H_n}.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}\xi_2 > nH_n + nH_n q_{n,n-\frac{n}{H_n}}. \tag{5.1}$$

Осталось заметить, что $q_{n,n-k} = \mathrm{P}(\delta \geqslant k)$ (см. задачу 1в)). Поэтому

$$q_{n,n-\frac{n}{H_n}} \geqslant \mathrm{P}\Bigl(\delta \geqslant \frac{n}{H_n}\Bigr).$$

Отсюда следует утверждение задачи.

7. Начиная с момента, когда в первой коллекции появился экспонат h_k, и до появления экспоната h_{k+1} в среднем появляется (см. с. 217, решение задачи 1)

$$\mathrm{E}\varphi_{k+1} - 1 = \frac{n}{n-k} - 1 = \frac{k}{n-k}$$

лишних экземпляров. Из этих лишних $\dfrac{k}{n-k}$ бегемотов в среднем $\dfrac{1}{n-k}$ бегемотов принадлежит виду h_k. Аналогично между экспонатами h_{k+1} и h_{k+2} появляется в среднем

$$\mathrm{E}\varphi_{k+2} - 1 = \frac{k+1}{n-k-1}$$

бегемотов, из них в среднем $\dfrac{1}{n-k-1}$ вида h_k и так далее. Математическое ожидание числа лишних бегемотов вида h_k равно

$$\frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k-1} + \ldots + 1 = H_{n-k}.$$

8. Обозначим через A_k событие «k бегемотов окажется недостаточно, чтобы собрать полную коллекцию». Пусть событие B_j состоит в том, что «после покупки k-го бегемота бегемот h_j дефицитный». Тогда $A_k = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$.

Применяя формулу включения-исключения, получаем:

$$\mathrm{P}(A_k) = n\mathrm{P}(B_1) - C_n^2\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) + \\ + C_n^3\mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n).$$

Вероятности событий B_j и их всевозможных пересечений найти несложно:

$$\mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_l) = \Bigl(\frac{n-l}{n}\Bigr)^k,$$

в частности $\mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = 0$. Включая в сумму для общности последнее нулевое слагаемое, получаем:

$$\mathrm{P}(A_k) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} \Bigl(\frac{n-j}{j}\Bigr)^k.$$

Значит, искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(A_{k-1}) - \mathrm{P}(A_k) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} \biggl(\Bigl(\frac{n-j}{n}\Bigr)^{k-1} - \Bigl(\frac{n-j}{n}\Bigr)^k\biggr) = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} \frac{j(n-j)^{k-1}}{n^k}.$$

Список литературы

[1] *Newman D. J., Shepp L.* The double Dixie Cup problem // Amer. Math. Monthly. 1960. Vol. 67, № 1. P. 58–61.

[2] *Erdős P., Renyi A.* On a classical problem of probability theory // Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutatом Int. Kőzl. 1961. Vol. 6. P. 215–220.

[3] *Ferrante M., Saltalamacchia M.* The Coupon Collector's Problem // Mater. Mat. 2014. Vol. 2. P. 1–35.

[4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1963. С. 229–230.

Иван Ростиславович Высоцкий, МЦНМО

i_r_vysotsky@hotmail.com

По мотивам задачника

О преобразовании Гаусса — Ландена*

Г. Б. Шабат

§ 0. Введение

В 2017 г. в сборнике «Математическое просвещение» была поставлена задача 21.11 (см. [5, с. 273]), которую мы приводим в чуть-чуть изменённых обозначениях:

(★) *Пусть* a, b *— положительные вещественные числа. Их арифметическое и геометрическое средние определяются как*

$$a_1 := \frac{a+b}{2}, \quad b_1 := \sqrt{ab}.$$

Докажите, что

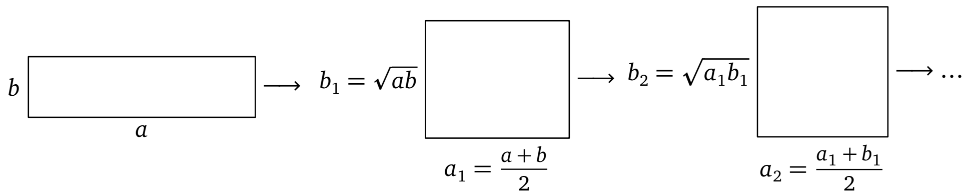
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a_1^2)(u^2+b_1^2)}}.$$

Предложенная для доказательства формула — классический результат, относящийся к математике конца XVIII – начала XIX века. Эта формула, её частные случаи и следствия из неё были предметом многолетних исследований Лагранжа и Гаусса — см. [2]. В настоящей статье мы обсудим формулу и связанную с ней математику, широко пользуясь средствами нашего времени.

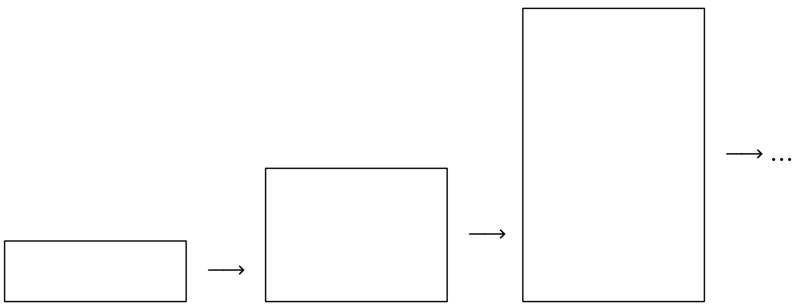
---

* Джон Ланден (1719–1790) — английский математик. В 1755 году он выразил длину дуги гиперболы как сумму двух длин дуг эллипса, что впоследствии привело к *преобразованию Ландена*, связанному с материалом настоящей статьи.

Упомянем постановку геометрической задачи, связанной с одновременным рассмотрением арифметического и геометрического средних: *построить квадрат, наиболее близкий к заданному прямоугольнику*. Эту задачу можно уточнить двумя способами: *построить квадрат с тем же* периметром, *что заданный прямоугольник*, и *построить квадрат с той же* площадью, *что заданный прямоугольник*. Смешав эти два уточнения и *итерируя*, получим последовательность прямоугольников, очень быстро становящихся неотличимыми от квадратов[1]:



В последующих параграфах будет приведено полное решение задачи (★), по существу заимствованное из дневников Гаусса. Однако *полное понимание* этого решения будет основано на связи приведённой последовательности прямоугольников с другой, в которой вертикальные стороны прямоугольников последовательно удваиваются[2]:



Вышеуказанная последовательность итераций и объясняет интерес к рассматриваемой конструкции. Введя начальную пару положительных вещественных чисел $(a_0, b_0) := (a, b)$, рассмотрим две последовательности

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}.$$

---

[1] Пример (в пикселях, $a = a_0$, $b = b_0$):

n	a_n	b_n
0	80	20
1	50	40
2	45	44,721…
3	44,860…	44,860…

[2] Настоящая работа завершается изложением этой конструкции удвоения.

Нетрудно доказать (читатель может сделать это самостоятельно или обратиться к [2]), что эти последовательности имеют общий предел, который называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a, b и обозначается[3)]

$$\mathrm{agM}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Обе последовательности сходятся необычайно быстро. И во времена Лагранжа и Гаусса, и в наше время их пределы используются для приближённого вычисления интегралов, которым посвящена настоящая работа. (Подобные интегралы называются *эллиптическими*, поскольку возникли при вычислении длины дуги эллипса. Начиная с XVIII века они широко применяются и в математике, и в её разнообразных приложениях.) Дело в том, что, согласно (★), в очевидных обозначениях

$$\mathrm{agM}(a, b) = \mathrm{agM}(a_1, b_1) = \mathrm{agM}(a_2, b_2) = \ldots = \mathrm{agM}(a_\infty, b_\infty),$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2 + a_\infty^2)(u^2 + b_\infty^2)}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a_\infty^2} = \frac{\pi}{a_\infty},$$

откуда получаем связь между арифметико-геометрическим средним и эллиптическим интегралом:

$$\mathrm{agM}(a, b) = \frac{\pi}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2 + a^2)(u^2 + b^2)}}}.$$

Поскольку левая часть этого равенства (по крайней мере с использованием современных компьютеров) легко вычисляется с любой точностью, знание достаточно хороших приближений числа π позволяет приближённо вычислять *произвольные* эллиптические интегралы. И наоборот, эта же формула позволяет на основе знания *некоторых* эллиптических интегралов с потрясающей точностью вычислять π — см. монографию [1].

§ 1. Численные эксперименты

Обсуждаемый нами факт — равенство двух положительных вещественных чисел; современные технологии позволяют быстро проверить его с любой точностью. Например, положив, как в рассмотренном выше

3) От слов *arithmetic-geometric Mean*.

примере, $a_0 = 2$, $b_0 = 18$ (чтобы следующая пара значений $a_1 = 6$, $b_1 = 10$ была рациональна), с помощью программы MAPLE получаем

$$\frac{1}{9}\mathrm{EllipticK}\Big(\frac{4}{9}\sqrt{5}\Big) = \frac{1}{5}\mathrm{EllipticK}\Big(\frac{4}{5}\Big).$$

Это равенство мало что скажет читателю, незнакомому с эллиптическими функциями и, в частности, с функцией EllipticK; однако сам факт выдачи такого результата говорит о том, что рассматриваемые интегралы присутствуют в библиотеке *специальных функций* этой программы.

Правда, если попросить MAPLE указать численные значения вычисленных интегралов, то на экране появится «равенство»

$$,3990605528 = ,3990605556,$$

т. е. совпадут только 8 десятичных знаков из 10.

Если, однако, настроить MAPLE на вычисления с 20 десятичными знаками, то «равенство» уточнится:

$$,39906055553294587753 = ,39906055553294587754.$$

Теперь совпадают 19 знаков из 20, и сомнения развеиваются.

Особую роль в истории математики сыграло вычисление Гаусса, датированное 30 мая 1799 года (см. [3, III, с. 361–371]). В наших обозначениях оно соответствует значениям $a = \sqrt{2}$, $b = 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+1{,}207106\ldots^2)(u^2+1{,}189207\ldots^2)}} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+1{,}198156\ldots^2)(u^2+1{,}198123\ldots^2)}} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+1{,}198140\ldots^2)(u^2+1{,}198140\ldots^2)}} \approx \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1{,}198140\ldots^2} = \frac{\pi}{1{,}198140\ldots} = 2{,}622057554292119810 3\ldots
\end{aligned}$$

Во времена Гаусса это число было хорошо известно, и для него было введено специальное обозначение:

$$2{,}6220575542921198103\ldots =: \varpi.$$

Оно[4] представляет собой *альтернативное* π. Дело в том, что со времён Эйлера эти два числа использовались параллельно:

$$\pi := \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 3{,}141592\ldots, \qquad \varpi := \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = 2{,}622057\ldots$$

Число 1,198140 …, которое во введении получило обозначение $\mathrm{agM}(\sqrt{2}, 1)$, оказалось удовлетворяющим равенству

$$\mathrm{agM}(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}.$$

В своём дневнике Гаусс пишет, связав обнаруженное равенство с проведёнными им ранее вычислениями длины лемнискаты: *доказательство этого факта несомненно откроет совершенно новую область анализа.*

Предсказание сбылось! Мы расскажем об этом в § 3 настоящей статьи.

§ 2. Подстановка, подсмотренная у Гаусса

В этом параграфе опять a и b — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a \geqslant b > 0, \tag{2.0}$$

и по ним строятся новые два:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}. \tag{2.1}$$

Предложение. *Подстановка*

$$u = \sqrt{\frac{u_1^2 + b_1^2}{u_1^2 + a_1^2}}\, u_1 \tag{2.2}$$

устанавливает требуемое равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)}}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Начнём с дифференциалов.

Лемма 1. *Выполнено равенство*

$$\mathrm{d}u = \frac{u_1^4 + 2a_1^2u_1^2 + a_1^2b_1^2}{u_1^2 + a_1^2} \frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)}}. \tag{2.4}$$

---

[4] В TEX-е эта буква ϖ называется *varpi* (варпи). Подобно этому, существуют $\vartheta, \varrho, \varphi$ наряду с θ, ρ, ϕ.

Доказательство. Действительно, согласно стандартным формулам

$$\mathrm{d}u =_{(2.2)} \mathrm{d}\left(\left(\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right)^{1/2} u_1\right) = u_1\,\mathrm{d}\left(\left(\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right)^{1/2}\right) + \left(\left(\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right)^{1/2}\right)\mathrm{d}u_1 =$$
$$= \frac{1}{2}u_1\left(\left(\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right)^{-1/2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right) + \sqrt{\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}}\,\mathrm{d}u_1.$$

Воспользовавшись формулой

$$\mathrm{d}\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}\,\mathrm{d}x$$

(здесь подразумевается, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ постоянны), получим

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u_1\left(\left(\frac{u_1^2+a_1^2}{u_1^2+b_1^2}\right)^{1/2}\right)\frac{a_1^2-b_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2}\,\mathrm{d}(u_1^2) + \sqrt{\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}}\,\mathrm{d}u_1 =$$
$$= \left((a_1^2-b_1^2)u_1^2\frac{(u_1^2+a_1^2)^{-3/2}}{\sqrt{u_1^2+b_1^2}} + \sqrt{\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}}\right)\mathrm{d}u_1.$$

Стандартные преобразования дают

$$\mathrm{d}u = \frac{(a_1^2-b_1^2)u_1^2+(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)}{u_1^2+a_1^2}\,\frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)}} =$$
$$= \frac{u_1^4+2a_1^2u_1^2+a_1^2b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\,\frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)}} = \text{правой части (2.4).} \qquad \square$$

В числителе дифференциала $\mathrm{d}u$ возник квадратный трёхчлен

$$u_1^4+2a_1^2u_1^2+a_1^2b_1^2$$

от переменной u_1^2. Его дискриминант оказывается квадратом:

$$a_1^4-a_1^2b_1^2 = a_1^2(a_1^2-b_1^2) = a_1^2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right) = a_1^2\frac{(a-b)^2}{4},$$

поэтому трёхчлен раскладывается на множители.

Лемма 2. *Выполнено равенство*

$$u_1^4+2a_1^2u_1^2+a_1^2b_1^2 = (u_1^2+a_1b)(u_1^2+a_1a).$$

Доказательство. Действительно,

$$u_1^4+2a_1^2u_1^2+a_1^2b_1^2 = (u_1^2+a_1^2)^2-a_1^2\cdot\frac{(a-b)^2}{4} =$$

$$= \left(u_1^2 + a_1^2 - a_1 \cdot \frac{a-b}{2}\right)\left(u_1^2 + a_1^2 + a_1 \cdot \frac{a-b}{2}\right) =$$
$$= \left(u_1^2 + a_1\left(a_1 - \frac{a-b}{2}\right)\right)\left(u_1^2 + a_1\left(a_1 + \frac{a-b}{2}\right)\right) = (u_1^2 + a_1 b)(u_1^2 + a_1 a). \qquad \square$$

Учитывая полученное в лемме 2 разложение, перепишем связывающую дифференциалы формулу (2.4):

Лемма 1′. *Выполнено равенство*

$$\mathrm{d}u = \frac{(u_1^2 + aa_1)(u_1^2 + ba_1)}{u_1^2 + a_1^2} \frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{(u_1^2 + a_1^2)(u_1^2 + b_1^2)}}. \tag{2.4$'$}$$

Теперь преобразуем подкоренные сомножители исходного дифференциала.

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$u^2 + a^2 = \frac{(u_1^2 + aa_1)^2}{u_1^2 + a_1^2}, \tag{2.5}$$

$$u^2 + b^2 = \frac{(u_1^2 + ba_1)^2}{u_1^2 + a_1^2}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Преобразуем:

$$u^2 + a^2 =_{(2.2)} \frac{u_1^2 + b_1^2}{u_1^2 + a_1^2} \cdot u_1^2 + a^2 =$$
$$= \frac{(u_1^2 + b_1^2)u_1^2 + (u_1^2 + a_1^2)a^2}{u_1^2 + a_1^2} = \frac{u_1^4 + (a^2 + b_1^2)u_1^2 + a^2 a_1^2}{u_1^2 + a_1^2}. \tag{2.7}$$

Дискриминант числителя (как многочлена от u_1^2) равен

$$(a^2 + b_1^2)^2 - 4a^2 a_1^2 =_{(2.1)} (a^2 + ab)^2 - a^2(a+b)^2 = 0,$$

так что этот числитель — квадрат многочлена от u_1^2. Действительно, продолжая преобразования, получаем

$$u^2 + a^2 =_{(2.6)} \frac{\left(u_1^2 + \frac{a^2 + b_1^2}{2}\right)^2 + a^2 a_1^2 - \left(\frac{a^2 + b_1^2}{2}\right)^2}{u_1^2 + a_1^2} =$$
$$= \frac{\left(u_1^2 + \frac{a^2 + ab}{2}\right)^2 + a^2 a_1^2 - \left(\frac{a^2 + ab}{2}\right)^2}{u_1^2 + a_1^2} =_{(2.2)} = \frac{(u_1^2 + aa_1)^2}{u_1^2 + a_1^2}.$$

Аналогично

$$u^2 + b^2 =_{(2.2)} \frac{u_1^2 + b_1^2}{u_1^2 + a_1^2} \cdot u_1^2 + b^2 = \frac{(u_1^2 + b_1^2)u_1^2 + (u_1^2 + a_1^2)b^2}{u_1^2 + a_1^2} = \frac{u_1^4 + (b^2 + b_1^2)u_1^2 + b^2 a_1^2}{a_1^2 + u_1^2}. \tag{2.8}$$

Снова вычисляя дискриминант, получаем

$$(b^2+b_1^2)^2-4b^2a_1^2=_{(2.1)}(b^2+ab)^2-b^2(a+b)^2=0,$$

так что этот числитель — тоже квадрат многочлена от u_1^2. Продолжая, получаем

$$u^2+b^2=_{(2.8)}\frac{\left(u_1^2+\dfrac{b^2+b_1^2}{2}\right)^2+b^2a_1^2-\left(\dfrac{b^2+b_1^2}{2}\right)^2}{u_1^2+a_1^2}=$$

$$=\frac{\left(u_1^2+\dfrac{b^2+ab}{2}\right)^2+b^2a_1^2-\left(\dfrac{b^2+ab}{2}\right)^2}{u_1^2+a_1^2}=_{(2.2)}=\frac{(u_1^2+ba_1)^2}{u_1^2+a_1^2}. \qquad \square$$

Соединяя (2.5) и (2.6), получаем

$$\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}=\frac{(u_1^2+aa_1)(u_1^2+ba_1)}{u_1^2+a_1^2}. \tag{2.9}$$

Эта формула вместе с $(2.4)'$ доказывает наше предложение. $\square$

§ 3. Алгебро-геометрический смысл подстановки Гаусса

Загадочная подстановка (2.2)

$$u=\sqrt{\frac{u_1^2+b_1^2}{u_1^2+a_1^2}}\,u_1 \tag{3.1}$$

должна найти объяснение!

Все преобразования § 2 имеют ясный геометрический смысл; он не очень сложен, но довольно-таки далёк от школьной математики, поэтому объяснения получатся длинными.

3.0. Появление алгебраических кривых

Начнём с ещё одного шага от анализа к алгебре (точнее, к алгебраической геометрии): если раньше мы перешли от определённого интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}}$$

к неопределённому

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}},$$

— а точнее, про интегралы почти забыли и работали с дифференциалами — то теперь давайте сосредоточимся на знаменателе подынтегрального выражения. Попробуем дать ему имя:

$$v := \sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}. \tag{3.2}$$

Если мы хотим оставаться в рамках вещественной математики, то никаких трудностей в работе с этим новым действующим лицом не видно: подкоренное выражение всегда неотрицательно.

Но тут мы должны честно предупредить читателя, что понять происходящее, видя только вещественные числа, абсолютно невозможно и нам в скором времени придётся выйти в комплексную область, а там функция $z \mapsto \sqrt{z}$ определена плохо.

Выход из этого затруднения весьма прост: возведём соотношение (3.2) в квадрат, получив a, b, в координатах u, v с параметрами a, b уравнение *алгебраической кривой* которую мы назовём

$$\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}\colon\ v^2 = (u^2+a^2)(u^2+b^2) \tag{3.3}$$

— это обозначение (в частности, две точки над именем кривой) скоро будет объяснено.

3.1. Изогения Гаусса

Теория кривых — богатый раздел алгебраической геометрии. Мы, однако, сразу обратимся к *отображениям* алгебраических кривых, причём весьма специального вида.

Наша ближайшая цель — установить связь между уравнением (3.3) и формулой (3.1). В координатах u_1, v_1 рассмотрим уравнение «другой» кривой

$$\ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1}\colon\ v_1^2 = (u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2). \tag{3.4}$$

Теперь мы готовы сформулировать результат, объясняющий происходящее.

Теорема-определение. *Определено отображение алгебраических кривых*

$$\ddot{\gamma}_{a,b}\colon\ \ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1} \to \ddot{\mathbf{E}}_{a,b}\colon\ (u_1,v_1) \mapsto \left(\frac{u_1v_1}{u_1^2+a_1^2}, \frac{u_1^4+2a_1^2u_1^2+a_1^2b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right).$$

Мы будем называть его изогенией Гаусса[5)].

Важное уточнение. Фигурирующее в теореме отображение не требует комментариев над полем действительных чисел $\mathbb{R}$: оно всюду опре-

[5)] Ни название, ни обозначение этого отображения не является общепринятым.

делено, поскольку при $a_1 \neq 0$ знаменатели *строго положительны*. Однако над произвольным полем — и прежде всего над особо интересующим нас полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ — отображение $\ddot{\gamma}_{a,b}$ не определено в точках $(u_1 = \pm \mathrm{i} a_1,\ v_1 = 0)$. Временно мы будем рассматривать изогению Гаусса вне этих точек, а впоследствии доопределим её.

Доказательство. Прямая проверка:

$$v^2 = \left(\frac{u_1^4 + 2a_1^2u_1^2 + a_1^2b_1^2}{u_1^2+a_1^2}\right)^2 = \left(\frac{u_1^4 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2u_1^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2ab}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u_1^2}\right)^2 \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} \left(\left(\frac{u_1v_1}{u_1^2+a_1^2}\right)^2 + a^2\right)\left(\left(\frac{u_1v_1}{u_1^2+a_1^2}\right)^2 + b^2\right)$$

или

$$\left(\frac{4u_1^4 + 2(a+b)^2u_1^2 + (a+b)^2ab}{4u_1^2 + (a+b)^2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{u_1^2v_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + a^2\right)\left(\frac{u_1^2v_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + b^2\right).$$

Подставив в правую часть последнего равенства v_1^2 из уравнения (3.4), получим тождество, в которое входит только одна переменная u_1:

$$\left(\frac{4u_1^4 + 2(a+b)^2u_1^2 + (a+b)^2ab}{4u_1^2 + (a+b)^2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{u_1^2v_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + a^2\right)\left(\frac{u_1^2v_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + b^2\right) =_{(3.4)}$$
$$=_{(3.4)} \left(\frac{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)u_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + a^2\right)\left(\frac{(u_1^2+a_1^2)(u_1^2+b_1^2)u_1^2}{(u_1^2+a_1^2)^2} + b^2\right) =$$
$$= \left(\frac{(u_1^2+b_1^2)u_1^2}{u_1^2+a_1^2} + a^2\right)\left(\frac{(u_1^2+b_1^2)u_1^2}{u_1^2+a_1^2} + b^2\right) =$$
$$= \frac{(u_1^2+b_1^2)u_1^2 + a^2(u_1^2+a_1^2)}{u_1^2+a_1^2} \cdot \frac{(u_1^2+b_1^2)u_1^2 + b^2(u_1^2+a_1^2)}{u_1^2+a_1^2} =$$
$$= \frac{\left(u_1^4 + (a^2+b_1^2)u_1^2 + a^2a_1^2\right)\left(u_1^4 + (b^2+b_1^2)u_1^2 + b^2a_1^2\right)}{(u_1^2+a_1^2)^2}.$$

Для завершения доказательства остаётся воспользоваться тождествами

$$u_1^4 + (a^2+b_1^2)u_1^2 + a^2a_1^2 = u_1^4 + (a^2+ab)u_1^2 + a^2\frac{(a+b)^2}{4} = \left(u_1^2 + \frac{a(a+b)}{2}\right)^2$$

и

$$u_1^4 + (b^2+b_1^2)u_1^2 + b^2a_1^2 = u_1^4 + (b^2+ab)u_1^2 + b^2\frac{(a+b)^2}{4} = \left(u_1^2 + \frac{b(a+b)}{2}\right)^2. \quad \square$$

Теорема. *У каждой точки кривой $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ при изогении Гаусса $\ddot{\gamma}_{a,b}$ ровно два прообраза.*

Два доказательства. Сначала наметим «школьный» вариант. Надо исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} u = \dfrac{u_1 v_1}{u_1^2 + a_1^2}, \\ v = \dfrac{u_1^4 + 2a_1^2 u_1^2 + a_1^2 b_1^2}{u_1^2 + a_1^2} \end{cases}$$

относительно неизвестных u_1, v_1. Второе уравнение является квадратным относительно u_1^2, так что при ненулевом дискриминанте у него ровно два решения. Величина v_1 определится первым уравнением при условии $u_1^2 + a_1^2 \neq 0$. Рассмотрение особых случаев предоставляется читателю.

Теперь проведём «взрослое» доказательство. Впрочем, главное соображение, на котором оно основано, вполне доступно школьнику:

Смена знаков обеих координат переводит кривые $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ и $\ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1}$ в себя; при этой смене знаков образ точки $(u_1, v_1) \in \ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1}$ при изогении Гаусса не меняется.

Иначе говоря, для любой точки $(u_1, v_1) \in \ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1}$ верно, что

$$(-u_1, -v_1) \in \ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1} \quad \text{и} \quad \ddot{\gamma}_{a,b}(u_1, v_1) = \ddot{\gamma}_{a,b}(-u_1, -v_1).$$

Теперь лемма мгновенно следует из теории Галуа. □

3.2. Эллиптические кривые

Мы собираемся разработать зрительные образы, связанные с кривыми $\ddot{\mathbf{E}}_{a_1,b_1}$ и $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$; поскольку они принадлежат одному и тому же классу кривых, в дальнейшем мы будем говорить о $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$.

Эти кривые называются *эллиптическими*, поскольку возникли при вычислении длины эллипса (см. введение).

Если эллипс задан уравнением

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1,$$

то он допускает параметризацию $(X = A\cos t,\ Y = B\sin t)$ и длина дуги такого эллипса, которую можно символически выразить в виде

$$\int \sqrt{(\mathrm{d}X)^2 + \mathrm{d}Y)^2},$$

задаётся интегралом

$$\int \sqrt{A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t}\, \mathrm{d}t.$$

После замены переменной $s := \sin t$ он превращается в

$$\int \sqrt{B^2 + (A^2 - B^2)s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = B\int \sqrt{1-k^2s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}},$$

где $k^2 = (B^2 - A^2)/B^2$. Последний интеграл с точностью до множителя традиционно переписывается в виде

$$\int \frac{(1-k^2s^2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

и распадается на два (они называются эллиптическими интегралами *первого* и *второго* рода). Один из них после очевидных преобразований (впрочем, невозможных в вещественной области) превращается в тот самый интеграл, которому посвящена настоящая статья.

Эллиптическая кривая

$$\ddot{\mathrm{E}}_k\colon\ v^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2),$$

возникшая в результате этих вычислений (мы пользовались переменной s вместо u, чтобы не перепутать её с переменной в нашем основном интеграле) называется *квартикой Лежандра*.

Как мы видим, эллиптические кривые записываются (уже сотни лет) в разных формах; нам предстоит освоить ещё по крайней мере одну.

3.3. От квартик к кубикам

Некоторое время мы воздержимся от извлечения квадратных корней и от интегрирования, так что будем считать все переменные и коэффициенты многочленов принадлежащими произвольному *алгебраически замкнутому полю* (которое мы будем называть *основным полем*). Читатель, у которого это понятие вызывает затруднение, может считать, что мы работаем над полем комплексных чисел (только временно ограничиваемся четырьмя арифметическими операциями).

До сих пор мы работали с эллиптическими кривыми, задаваемыми уравнениями

$$v^2 = f_4(u), \tag{3.5}$$

где f_4 — многочлен 4-й степени; предположим, что он *не имеет кратных корней*. Рассмотренные нами многочлены даже были *чётны*, что облегчало рассмотрение симметрий (изогении определялись сменой знаков).

Следующий шаг может показаться техническим, но он весьма важен. Мы собираемся перейти от многочленов степени 4 к многочленам степени 3.

Пользуясь алгебраической замкнутостью основного поля, разложим правую часть уравнения (3.5) на множители:

$$v^2 = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4); \tag{3.6}$$

согласно нашему предположению, все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *разные*. Применим к уравнению (3.6) любое дробно-линейное преобразование

$$u \to \frac{au+b}{cu+d},$$

переводящее какой-либо из корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ в *бесконечно удалённую точку*; нам удобно будет выбрать такое, что другой корень переведётся в 0. Иначе говоря, введём новую координату (где $m \neq 0$ остаётся в нашем распоряжении)

$$x := m\frac{u-\alpha_3}{u-\alpha_4}. \tag{3.7}$$

Исходная координата u легко выразится через неё:

$$u = \frac{\alpha_4 x - m\alpha_3}{x-m}. \tag{3.8}$$

Когда мы подставим соотношение (3.8) в уравнение (3.6), это уравнение (временно) утратит полиномиальность, превратившись в

$$v^2 = m(\alpha_3-\alpha_4)^2\frac{x((\alpha_1-\alpha_4)x-m\alpha_1+m\alpha_3)((\alpha_2-\alpha_4)x-m\alpha_2+m\alpha_3)}{(x-m)^4}, \tag{3.9}$$

или

$$v^2 = m\frac{\beta_{34}^2 x(\beta_{14}x-m\beta_{12})(\beta_{24}x-m\beta_{23})}{(x-m)^4}, \tag{3.10}$$

где для краткости записи введены величины $\beta_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$; отметим, что из несовпадения α_i следует

$$\beta_{34}^2\beta_{14}\beta_{24} \neq 0, \tag{3.11}$$

т. е. в числителе правой части уравнения (3.10) стоит именно кубический многочлен. Полиномиальность уравнения рассматриваемой кривой восстановится, если ввести новую координату y соотношением

$$v = \frac{\lambda y}{(x-m)^2}, \tag{3.12}$$

где λ — константа, которую мы сейчас подберём. Подставив (3.12) в (3.10) и умножив полученное уравнение на $(x-m)^4$, придём к уравнению

$$\lambda^2 y^2 = m\beta_{34}^2 x(\beta_{14}x-m\beta_{12})(\beta_{24}x-m\beta_{23}). \tag{3.13}$$

Подобрав подходящую константу λ (здесь мы очередной раз пользуемся алгебраической замкнутостью основного поля), мы придём к уравнению

$$y^2 = x(x-\gamma_1)(x-\gamma_2) \qquad (3.14),$$

в которое, таким образом, преобразовалось исходное уравнение (3.6). Легко проверить, что преобразование координат (x, y) в координаты (u, v), задаваемое уравнениями (3.8) и (3.12), обратимо. Остаётся (временное) затруднение, связанное с тем, что и это преобразование, и обратное ему не определены в конечном числе точек.

Обратимые преобразования, в обоих направлениях заданные рациональными функциями, называются *бирациональными*. Мы по существу показали, что *любая кривая, заданная уравнением $v^2 = f_4(u)$, бирационально эквивалентна кривой, заданной уравнением $y^2 = f_3(x)$, где f_3 и f_4 — многочлены* степени 3 и 4, не имеющие кратных корней. Проанализируем более детально эту бирациональную эквивалентность — обычно она называется *бирациональным изоморфизмом* — для наших кривых $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$.

3.4. Преобразование квартики $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ в кубику $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$

В случае кривой $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$, заданной уравнением (3.3), имеем для уравнения в форме (3.5):

$$f_4(u) = (u^2 + a^2)(u^2 + b^2).$$

Начиная с этого места будем пропускать детали вычислений и приводить лишь ответы. Очень усердный читатель восстановит вычисления вручную, идя вслед за Гауссом и его толкователями XIX века; автор, однако, настоятельно рекомендует использовать современные системы компьютерной алгебры.

Проведённое в пункте 3.3 преобразование квартики $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ в кубику $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ использует *мнимую единицу* i; можно считать, что мы стали работать над полем комплексных чисел, а можно — что мы выбрали (один из двух) элементов основного поля[6)], удовлетворяющих равенству $\mathrm{i}^2 = -1$.

Наше преобразование осуществляется формулами

$$x = -\frac{b(a+b)}{2}\frac{u-\mathrm{i}a}{u-\mathrm{i}b}, \quad y = \frac{\mathrm{i}b(a^2-b^2)}{4}\frac{v}{(u-\mathrm{i}b)^2}. \qquad (3.15)$$

Мы готовы перейти к кубике, которая сыграет основную роль в понимании изогении Гаусса.

[6)] Здесь надо предположить, что характеристика основного поля отлична от 2, т. е. $1 + 1 \neq 0$.

Теорема-обозначение. *Преобразование* (3.15) *переводит кривую* $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$, *заданную, напомним, уравнением*

$$v^2 = (u^2 + a^2)(u^2 + b^2),$$

в кривую[7] $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$, *заданную уравнением*

$$y^2 = x(x + ab)\Big(x + \frac{(a + b)^2}{4}\Big). \tag{3.16}$$

Замечания. (1) Уравнение кривой $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ легко запомнить: ненулевые корни его правой части — взятые с обратным знаком *квадраты среднего арифметического и среднего геометрического* от параметров кривой.

(2) Преобразование (3.15) не имеет смысла при $a = \pm b$: выражения для координат превращаются в константы. Поэтому над любым полем мы предполагаем $a \neq \pm b$.

(3) Преобразование не имеет смысла в характеристике 2, так что мы исключаем этот случай из рассмотрения.

(4) Преобразование *кажется* не имеющим смысла при $u = \mathrm{i}b$, а обратное ему преобразование (выписать которое предлагается читателю) — при $x = -b(a + b)/2$. Однако это впечатление ложно, и мы сейчас с этим будем разбираться.

(5) Многочлен в правой части (3.16) при $a \neq \pm b$ не имеет кратных корней.

3.5. Проективизация

До сих пор нам не требовалось обозначение для *основного поля*: мы просто проводили алгебраические операции над константами и координатами. *Теперь мы обозначим это поле традиционной буквой*[8] $\Bbbk$. Напомним, что мы считаем поле $\Bbbk$ произвольным *алгебраически замкнутым* и предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Читатель в очередной раз может считать, что $\Bbbk = \mathbb{C}$, но это не облегчает понимание обсуждаемых алгебро-геометрических конструкций.

До сих пор мы считали рассматриваемые кривые подмножествами плоскости $\Bbbk \times \Bbbk$, которую теперь будем называть *аффинной* и обозначать

$$\mathbf{A}_2(\Bbbk) := \Bbbk \times \Bbbk;$$

её подмножества, задаваемые полиномиальными уравнениями, мы теперь будем называть *аффинными кривыми*.

---

[7] Обратите внимание на количество точек над **E**!

[8] От немецкого *Körper* — тело. Термин был предложен Р. Дедекиндом, чтобы подчеркнуть *целостность* (числовых) множеств, замкнутых относительно арифметических операций.

Аффинную плоскость будем считать подмножеством *проективной*: $\mathbf{A}_2(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\mathbb{k})$. Проективная плоскость $\mathbf{P}_2(\mathbb{k})$ — это следующее фактормножество:

$$\mathbf{P}_2(\mathbb{k}) := \frac{(\mathbb{k} \times \mathbb{k} \times \mathbb{k}) \setminus \{(0,0,0)\}}{\mathbb{k}^\times},$$

где $\mathbb{k}^\times$ — мультипликативная группа поля, действующая на тройки элементов поля покомпонентным умножением. Будем обозначать через $(x:y:z)$ орбиту элемента $(x,y,z) \in \mathbb{k} \times \mathbb{k} \times \mathbb{k}$; тогда вложение $\mathbf{A}_2(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\mathbb{k})$ задаётся формулой

$$(x,y) \mapsto (x:y:1).$$

Мы собираемся перейти от аффинных кривых к проективным. Для кривых $y^2 = f_3(x)$, где f_3 — многочлен без кратных корней, это сделать совсем легко; разберём случай

$$\dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2}:\ y^2 = x(x-\gamma_1)(x-\gamma_2), \tag{3.17}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \dot{\mathbb{k}} := \mathbb{k} \setminus \{0\}$ и $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Согласно (3.16) и (3.17) кривая $\dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ превращается в $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ при

$$\gamma_1 = -ab, \gamma_2 = -\frac{(a+b)^2}{4}. \tag{3.18}$$

В проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\mathbb{k})$ мы будем пользоваться *однородными* координатами $(x:y:z)$, и в них аффинная плоскость $\mathbf{A}_2(\mathbb{k}) \subset \mathbf{P}_2(\mathbb{k})$ определяется условием $z \neq 0$. При этом условии имеет место равенство

$$(x:y:z) = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$$

и уравнение (3.17) можно переписать в виде

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x}{z}\left(\frac{x}{z} - \gamma_1\right)\left(\frac{x}{z} - \gamma_2\right). \tag{3.19}$$

Умножив это уравнение на z^3, мы получим уравнение кривой в $\mathbf{P}_2(\mathbb{k})$, которую обозначим

$$\mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2}: y^2 z = x(x-\gamma_1 z)(x-\gamma_2 z) \tag{3.20}$$

(обратите внимание на отсутствие точки над $\mathbf{E}$!). Из определения вложения аффинной плоскости в проективную и из соотношения между аффинными координатами (x,y) и однородными $(x:y:z)$ следует, что

$$\dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2} \subset \mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2}$$

и что в однородных координатах

$$\dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2} = \{P \in \mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2} \mid z(P) \neq 0\}. \tag{3.21}$$

Подчеркнём, что хотя значение $z(P)$ координаты z в точке P определено лишь с точностью до ненулевого множителя, обращение $z(P)$ в нуль определено корректно.

Остаётся определить разность $\mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2} \setminus \dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2}$. Для этого надо определить пересечение кривой $\mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2}$ с так называемой *бесконечно удалённой прямой*

$$\ell_\infty\colon\ z = 0. \tag{3.22}$$

Это просто: подстановка (3.22) в (3.20) даёт

$$0 = x^3, \tag{3.23}$$

т. е. на пересечении $\ell_\infty \bigcap \mathbf{E}_t$ выполнены два равенства: $x = 0$ и $z = 0$, а это возможно лишь в одной точке

$$\underline{\infty} := (0 : 1 : 0) \in \mathbf{P}_2(\mathbb{k}).$$

Мы установили, что

$$\ell_\infty \bigcap \mathbf{E}_t = \{\underline{\infty}\}$$

(на самом деле формула (3.23) показывает, что это пересечение *трёхкратно*, но мы в настоящей статье не касаемся теории кратностей и лишь упомянем, что ℓ_∞ — одна из *прямых перегиба* кривой $\mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2}$). Кроме того, из проведённых рассмотрений следует, что

$$\dot{\mathbf{E}}_{\gamma_1,\gamma_2} = \mathbf{E}_{\gamma_1,\gamma_2} \setminus \{\underline{\infty}\},$$

и мы наконец можем объяснить наше обозначение $\dot{\mathbf{E}}$: точка над обозначением *проективной* кривой $\mathbf{E}$ означает *прокол*!

Итак, нам удалось реализовать *аффинную* кубику $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ как *проективную* кубику $\mathbf{E}_{a,b}$ с одним проколом. Эта проективная кубика *гладка*; читателю предлагается сформулировать это свойство (или найти его в любом учебнике алгебраической геометрии); первоочередная задача — понять *топологию* этих кубик над $\mathbb{C}$; это — одна из промежуточных целей нашего выхода из аффинной плоскости в проективную.

Однако наша окончательная цель — понимание бесконечной цепочки изогений $\mathbf{E}_{a_{n+1},\,b_{n+1}} \to \mathbf{E}_{a_n,b_n}$ — потребует некоторых дополнительных средств.

3.6. Пополнение квартики $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$

Нам встречались и обозначения $\ddot{\mathbf{E}}$ с *двумя* точками над обозначением кривой; разберём основной для нас случай кривых $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$. Здесь проективизация не даёт желаемого результата, поскольку «на бесконечности» в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ кривая оказывается *особой*, т. е. *не*гладкой (читатель может придать точный смысл этому утверждению и проверить его — или же принять на веру). Приходится идти другим путём.

Начнём с интуитивного соображения. Если u стремится к бесконечности, то константы в уравнении $v^2 = (u^2 + a^2)(u^2 + b^2)$ пренебрежимо малы по сравнению с u и выполняется приближённое уравнение $v^2 \approx u^4$, обладающее двумя приближёнными решениями $v \approx \pm u^2$. Это позволяет заподозрить, что существует *полная*[9] кривая $\mathbf{E}_{a,b}$ (скоро мы прокомментируем повторное использование этого обозначения) и две бесконечно удалённые точки на ней $\underline{\infty}^{\pm} \in \mathbf{E}_{a,b}$, такие, что

$$\ddot{\mathbf{E}}_{a,b} = \mathbf{E}_{a,b} \setminus \{\underline{\infty}^+, \underline{\infty}^-\}.$$

На интуитивном уровне мы объяснили использование обозначения $\ddot{\mathbf{E}}$ как имеющего смысл «два прокола».

Чтобы придать этому построению точный смысл, введём на кривой $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ новые *локальные* (т. е. имеющие смысл вне конечного множества) координаты

$$U := \frac{1}{u^2}, \quad V := \frac{v}{u^2}, \tag{3.24}$$

связанные соотношением

$$V^2 = (a^2U^2 + 1)(b^2U^2 + 1). \tag{3.25}$$

Добавим ещё две точки $O^{\pm} \in \ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ условиями

$$u(O^{\pm}) = 0, \quad v(O^{\pm}) = \pm ab. \qquad (3.26).$$

Координаты (U, V) определены лишь на множестве $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b} \setminus \{O^{\pm}\}$; зато, временно введя аффинную кривую $'\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$, определённую уравнением (3.25), мы обнаружим на ней две точки, которые выше определялись неформально:

$$U(\underline{\infty}^{\pm}) = 0, \quad V(\underline{\infty}^{\pm}) = \pm 1. \tag{3.27}$$

Теперь мы можем определить *абстрактную* кривую

$$\mathbf{E}_{a,b} := \ddot{\mathbf{E}}_{a,b} \bigcup {}'\ddot{\mathbf{E}}_{a,b},$$

где на каждой из объединяемых аффинных кривых подразумеваются свои локальные координаты, связанные на пересечении соотношениями (3.24).

По аналогии с вложением кубики в проективную плоскость может возникнуть желание вложить в какое-нибудь проективное простран-

[9] Для кривой это означает, что она определена всюду вне конечного множества значений координат.

ство (или в произведение проективных пространств) полученное объединение аффинных кривых. Сделать это можно, хотя очевидных решений, видимо, нет. Мы, однако, заниматься такими вложениями не будем: математики переходят от вложенных многообразий к абстрактным, начиная с Гаусса и Римана в XIX веке — когда, впрочем, *алгебраические* многообразия понимались в основном как вложенные в аффинные или проективные пространства; лишь в XX веке абстрактные многообразия стали основными. В настоящее время издано, а также выложено в интернет огромное количество учебников и лекционных курсов по современной алгебраической геометрии; русскоязычному читателю естественно порекомендовать [7], где он найдёт и определение *полного* многообразия.

Мы позволили себе отождествить рассматриваемое объединение двух аффинных квартик с проективной кубикой не только потому, что они *изоморфны*. Читателю предлагается проверить, что формула (3.15) (относительно которой отмечалось, что соответствующее отображение только кажется неопределённым в некоторых точках) на самом деле определяет изоморфизм пополненных кривых $\ddot{\mathbf{E}}_{ab} \xrightarrow{\cong} \mathbf{E}_{ab}$. Главная причина заключается в том, что мы становимся на упомянутую только что современную точку зрения: считаем, что речь идёт об *одной и той же* кривой, только *реализованной* по-разному (в одном случае вложение в проективное пространство предъявлено, в другом — нет).

3.7. Квартика или кубика?

Каждая из реализаций имеет свои достоинства.

(а) Квартика $\ddot{\mathbf{E}}_{a,b}$ обладает редким для эллиптических кривых свойством: на ней сразу видны целых восемь точек! Помимо уже введённых четырёх, бросаются в глаза точки с u-абсциссами $\pm \mathrm{i}a$ и $\pm \mathrm{i}b$; дадим этим новым точкам легко запоминающиеся имена $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$. Полный список выделенных точек и их координат представлен в табл. 1.

Здесь (x, y)-координаты точек вычисляются по формулам (3.15). На кубике $\mathbf{E}_{a,b}$ точки $O^{\pm}$ и $\underline{\infty}^{\pm}$ в глаза не бросаются.

(б) На квартике действует *четверная группа Клейна* $\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2$, состоящая, помимо тождественного отображения, из инволюций $(u, v) \mapsto (-u, v)$, $(u, v) \mapsto (u, -v)$ и $(u, v) \mapsto (-u, -v)$. Отметим, что все они сохраняют наши 8 точек. Наиболее важна для нашего основного сюжета инволюция

$$\iota\colon (u, v) \mapsto (-u, -v),$$

не имеющая неподвижных точек.

Таблица 1

Точка	x	y	u	v	U	V
B^+	∞	∞	$\mathrm{i}b$	0	$-\frac{\mathrm{i}}{b}$	0
B^-	$-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	0	$-\mathrm{i}b$	0	$\frac{\mathrm{i}}{b}$	0
A^-	$-ab$	0	$-\mathrm{i}a$	0	$\frac{\mathrm{i}}{a}$	0
A^+	0	0	$\mathrm{i}a$	0	$-\frac{\mathrm{i}}{a}$	0
O^+	$-\frac{a(a+b)}{2}$	$\frac{-\mathrm{i}a(a^2-b^2)}{4}$	0	ab	∞	∞
O^-	$-\frac{a(a+b)}{2}$	$\frac{\mathrm{i}a(a^2-b^2)}{4}$	0	$-ab$	∞	∞
$\underline{\infty}^+$	$-\frac{b(a+b)}{2}$	$\frac{\mathrm{i}b(a^2-b^2)}{4}$	∞	∞	0	1
$\underline{\infty}^-$	$-\frac{b(a+b)}{2}$	$-\frac{\mathrm{i}b(a^2-b^2)}{4}$	∞	∞	0	-1

(в) Кубика $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ — гладкая аффинная кривая, дополненная в проективной плоскости единственной точкой B^+ (признаемся — *случайно* выбранной из четырёх точек $A^\pm, B^\pm$), тоже гладкой на проективном замыкании $\mathbf{E}_{a,b} \subset P_2(\Bbbk)$.

(г) На любой кубике $\mathbf{E}$ имеется структура абелевой группы $(\mathbf{E}, \oplus)$. Эта структура однозначно определяется правилом для $P, Q, R \in \mathbf{E}$:

$$P \oplus Q \oplus R = 0_{\mathbf{E}} \iff P, Q \text{ и } R \text{ коллинеарны}^{10)}$$

и правилом выбора нейтрального элемента $0_{\mathbf{E}} =: O \in \mathbf{E}$. Эта классическая теория достаточно сложна, см. введение в неё, например, в [6]. В случае кубики, заданной уравнением $y^2 = f_3(x)$, в качестве нейтрального элемента традиционно выбирают «бесконечно удалённую» точку $O \in \mathbf{E} \setminus \dot{\mathbf{E}}$. Для нашей кривой мы в соответствии с этой традицией произведём переименование

$$B^+ =: O \in \mathbf{E}_{a,b}.$$

Школьной математики (теорем Виета…) достаточно, чтобы выписать сложение $\oplus$ формулами в координатах. Однако формулы получаются до-

[10] В случае совпадения двух точек проходящая через них прямая заменяется на *касательную* к $\mathbf{E}$, а в случае совпадения трёх — на её *прямую перегиба*.

Таблица 2

Сложение $P \oplus Q$

$Q \backslash P$	O	B^-	A^-	A^+	O^+	O^-	$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^-$
O	O	B^-	A^-	A^+	O^+	O^-	$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^-$
B^-	B^-	O	A^+	A^-	O^-	O^+	$\underline{\infty}^-$	$\underline{\infty}^+$
A^-	A^-	A^+	O	B^-	$\underline{\infty}^-$	$\underline{\infty}^+$	O^-	O^+
A^+	A^+	A^-	B^-	O	$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^-$	O^+	O^-
O^+	O^+	O^-	$\underline{\infty}^-$	$\underline{\infty}^+$	B^-	O	A^-	A^+
O^-	O^-	O^+	$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^-$	O	B^-	A^+	A^-
$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^+$	$\underline{\infty}^-$	O^-	O^+	A^-	A^+	B^-	O
$\underline{\infty}^-$	$\underline{\infty}^-$	$\underline{\infty}^+$	O^+	O^-	A^+	A^-	O	B^-

статочно длинные[11)], и мы их не приводим. Тем не менее настоятельно рекомендуем читателю воспользоваться имеющимися техническими средствами, чтобы получать эти формулы и «нажатием кнопки» проверять наши утверждения, которые приводятся без обоснования.

Восемь выделенных нами (с помощью *квартики*) точек образуют *подгруппу*!

Если посмотреть на левую верхнюю четверть табл. 2, то видно, что множество $\{O, B^-, A^\pm\}$ составляет 4-элементную группу точек *порядка* 2, а правая нижняя четверть с учётом левой верхней показывает, что все восемь — точки *порядка* 4. (Для поля $\mathbb{C}$ скоро станет очевидно, что наша 8-элементная группа — половина 16-элементной группы точек порядка 4.)

3.8. Групповая интерпретация изогении Гаусса

Теперь пора вспомнить, что нас интересует не одна кривая $\mathbf{E}_{a,b}$, а изогения Гаусса

$$\mathbf{E}_{a_1,b_1} \xrightarrow{\gamma_{a,b}} \mathbf{E}_{a,b}$$

или, ещё лучше, — последовательность изогений

$$\ldots \xrightarrow{\gamma_{a_2,b_2}} \mathbf{E}_{a_2,b_2} \xrightarrow{\gamma_{a_1,b_1}} \mathbf{E}_{a_1,b_1} \xrightarrow{\gamma_{a_0,b_0}} \mathbf{E}_{a_0,b_0},$$

— мы просто добавляем индексы $n = 0, 1, 2, \ldots$ к введённым ранее обозначениям параметров, координат, точек, кривых и морфизмов. Предполага-

[11)] Например, прямая проверка *ассоциативности* операции $\oplus$ весьма громоздка, и вместо неё обычно используются нетривиальные геометрические конструкции — см. [6].

ется, что параметры $\{a_n, b_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ и $b_{n+a}^2 = a_n b_n$ (поскольку мы продолжаем работать над почти произвольным полем, мы нехитрым трюком избежали извлечения корней[12)]). Прямые вычисления показывают, что каждая изогения $\gamma_{a_n,b_n} : \mathbf{E}_{a_{n+1},b_{n+1}} \to \mathbf{E}_{a_n,b_n}$ преобразует координаты кубики следующим образом:

$$x_n = \frac{4x_{n+1}(x_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1})}{4x_{n+1} + (a_{n+1} + b_{n+1})^2},$$
$$y_n = -\frac{4y_{n+1}(2x_{n+1} + a_{n+1}^2 + a_{n+1}b_{n+1})(2x_{n+1} + b_{n+1}^2 + a_{n+1}b_{n+1})}{(4x_{n+1} + (a_{n+1} + b_{n+1})^2)^2}.$$

Небольшой прогресс по сравнению с изогениями в координатах квартик, которые мы взялись прояснить! Формулы стали только длиннее…

Но здесь нас и выручит групповая структура на кубиках. Подставляя в эти ужасные формулы координаты наших восьми точек, мы можем убедиться, что изогении Гаусса ведут себя очень просто:

$$B_{n+1}^{\pm} \mapsto B_n^+, \quad A_{n+1}^{\pm} \mapsto A_n^+, \quad O_{n+1}^{\pm} \mapsto B_n^-, \quad \underline{\infty}_{n+1}^{\pm} \mapsto A_n^-.$$

Оказывается, они обладают своеобразным свойством «чётности»: в очевидных обозначениях $\gamma_{a_n,b_n}(X^+) = \gamma_{a_n,b_n}(X^-)$. Это свойство следует сопоставить с не сразу бросающимся в глаза свойством приведённой выше таблицы сложения 8-элементной группы:

прибавление точки B^- «меняет знак»!

Вспомним теперь инволюции без неподвижных точек, которые здесь естественно обозначить ι_n и которые меняют знаки в прямом смысле слова (т. е. действуют по формуле $(u_n, v_n) \mapsto (-u_n, -v_n)$), и отождествить её и отождествим их с прибавлением B^- (это, как и многое другое, предоставляется читателю). Тогда обсуждаемый факт можно сформулировать более традиционно:

$$\gamma_{a_n,b_n} \circ \iota_n = \gamma_{a_n,b_n},$$

или[13)]

$$\forall\, P \in \mathbf{E}_{a_n,b_n} \quad [\gamma_{a_n,b_n}(P \oplus B_n^-) = \gamma_{a_n,b_n}(P)].$$

Мы вплотную подошли к разгадке тайны изогении Гаусса. Приведённые формулировки по существу равносильны следующему результату:

[12)] Гаусс работал также со случаем $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, и преодоление неоднозначности извлечения корней из комплексных чисел привело его к замечательным теориям, сильно опередившим его время, — см. [2].

[13)] Проверив прямым вычислением или выведя из каких-нибудь общих теорем, что такое соотношение достаточно проверить лишь на нескольких точках.

Теорема. *Каждая изогения Гаусса представляет собой факторизацию по двухэлементной группе*

$$\gamma_{a_n,b_n}\colon\ \mathbf{E}_{a_{n+1},\,b_{n+1}} \to \frac{\mathbf{E}_{a_{n+1},\,b_{n+1}}}{\{O_{n+1},\, B^-_{n+1}\}} \cong \mathbf{E}_{a_n,b_n}. \qquad \square$$

Краткая формулировка найдена. Осталось придать ей наглядность.

§ 4. Трансцендентный смысл изогении Гаусса

В этом последнем параграфе основным полем является $\Bbbk = \mathbb{C}$. Мы чуть-чуть коснёмся большой классической теории, взяв из неё лишь то, что нужно для наших целей.

4.0. Решётки в $\mathbb{C}$ и факторы по ним

Будем называть *решёткой* любую дискретную подгруппу ранга 2 аддитивной группы комплексных чисел. Иначе говоря, дискретное подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — решётка, если $0 \in \Lambda$, $\Lambda + \Lambda \subset \Lambda$, $-\Lambda = \Lambda$ и имеет место изоморфизм групп $(\Lambda, +) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Мы введём обозначение $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и для решётки Λ соответственно $\dot{\Lambda} = \Lambda \setminus \{0\}$. Для $k \in \dot{\mathbb{C}}$ решётки Λ и $k\Lambda$ называются *подобными*. Любая решётка представима (не единственным образом) в виде $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \dot{\mathbb{C}}$ и $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$. Из класса подобных решёток принято выбирать представитель вида $\Lambda = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, где $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Нам предстоит работать с *прямоугольными* решётками такого вида, где τ будет чисто мнимым числом. В частности, исходным примером для Гаусса была *квадратная решётка* с $\tau = \mathrm{i}$.

Фактор комплексной плоскости по решётке гомеоморфен тору. Этот факт особенно несомненен в случае прямоугольных решёток (которыми мы только и будем заниматься) в традиционной нормировке: *фундаментальная область* такой решётки — прямоугольник, и сдвиг по мнимой образующей решётки $z \mapsto z + \tau$ отождествляет горизонтальные стороны прямоугольника, а сдвиг по вещественной образующей $z \mapsto z + 1$ отождествляет вертикальные.

Особенно важно осмыслить не только фактор, но и *морфизм факторизации*

$$\mathbb{C} \to \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}.$$

Предлагается воспринимать его как комплексный аналог морфизма

$$\mathbb{R} \to \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}},$$

в котором тор заменяется на (тригонометрическую) окружность, а сам морфизм осуществляется парой функций (cos, sin). Об аналоге этой пары функций мы сейчас бегло расскажем[14].

4.1. $\wp$-функция Вейерштрасса

Подробнее с материалом этого пункта можно познакомиться по книге [4].

Для любого $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ введём *ряды Эйзенштейна* — функции решёток

$$\mathrm{G}_k(\Lambda) := \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^{2k}} \quad \text{и} \quad \mathrm{g}_2(\Lambda) := 60\mathrm{G}_2(\Lambda), \quad \mathrm{g}_3(\Lambda) := 140\mathrm{G}_3(\Lambda).$$

Главное действующее лицо — мероморфная[15] *$\wp$-функция*

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \Big(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \Big).$$

Её Λ-периодичность не совсем очевидна, но следует из её чётности и очевидной Λ-периодичности её производной

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

(аналогичная сумма для самой $\wp$-функции расходилась бы).

Оказывается, $\wp$-функция для любой решётки Λ удовлетворяет дифференциальному уравнению (тоже Вейерштрасса)

$$(\wp'_\Lambda(z))^2 = 4\wp_\Lambda(z)^3 - \mathrm{g}_2(\Lambda)\wp_\Lambda(z) - \mathrm{g}_3(\Lambda),$$

а это, с точностью до простых аффинных преобразований, — уравнение рассмотренных нами кубик, так что пара функций $(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)$ действительно аналогична паре (cos, sin).

Вернёмся к нашим кубикам $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$, которые заданы, напомним, уравнением

$$y^2 = x(x+ab)\Big(x + \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big),$$

где $a \geqslant b > 0$ согласно (2.0). Случай $a = b$ тривиален. При $a > b > 0$ получаем $-\big(\frac{a+b}{2}\big)^2 < -ab < 0$. Можно показать, что возникают два *периода*:

$$\text{вещественный} \int\limits_{-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}^{-ab} \frac{\mathrm{d}x}{y} \qquad \text{и} \qquad \text{мнимый} \quad \mathrm{i}\int\limits_{-ab}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-y^2}}$$

---

[14] Главное отличие заключается в том, что решётка $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ единственна, а классы подобия решёток $\Lambda \subset \mathbb{C}$ зависят от одного комплексного параметра.

[15] А именно, имеющая полюсы второго порядка в точках решётки Λ.

(при $b \to a \neq 0$ вещественный период, очевидно, стремится к нулю, а мнимый — к ненулевому мнимому числу). Решётка Λ, соответствующая кривой $\mathbf{E}_{a,b}$, порождена этими периодами.

Аффинные преобразования, приводящие используемые нами уравнения кривых $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ к требуемому виду

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3,$$

достаточно громоздки, и мы ограничимся случаем квадратной решётки, в котором $a = a_0 = \sqrt{2}+1$, $b = b_0 = \sqrt{2}-1$, а уравнения кривой имеют вид

$$y^2 = x(x+1)(x+2), \quad v^2 = u^4 + 6u^2 + 1.$$

Здесь из соображений симметрии $G_3 = g_3 = 0$, а

$$G_2 = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+n\mathrm{i})^4} = \frac{\varpi^4}{15} \approx 3{,}151,$$

$$g_2 = 60G_2 = 4\varpi^4 \approx 189{,}070.$$

Требуемое преобразование имеет вид

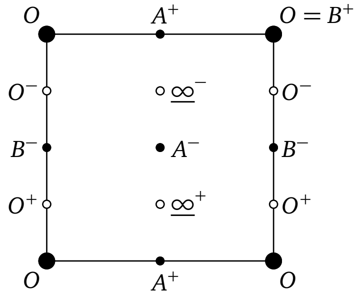
$$X := \frac{x}{\varpi^2} - 1, \quad Y := \frac{y}{2\varpi^3}.$$

Значения всех координат представлены в табл. 3.

Таблица 3

Точка	x	y	X	Y	z
$O = B^+$	∞	∞	∞	∞	0
B^-	-2	0	$\approx -6{,}875$	0	$\frac{\mathrm{i}}{2}$
A^-	-1	0	0	0	$\frac{1+\mathrm{i}}{2}$
A^+	0	0	$\approx 6{,}875$	0	$\frac{1}{2}$
O^+	$-2-\sqrt{2} \approx -3{,}414$	$(-2-\sqrt{2})\mathrm{i}$	$\approx -16{,}598$	$\approx -123{,}097\mathrm{i}$	$\frac{\mathrm{i}}{4}$
O^-	$-2-\sqrt{2} \approx -3{,}414$	$(2+\sqrt{2})\mathrm{i}$	$\approx -16{,}598$	$\approx 123{,}097\mathrm{i}$	$\frac{3\mathrm{i}}{4}$
$\underline{\infty}^+$	$-2+\sqrt{2} \approx -0{,}585$	$(2-\sqrt{2})\mathrm{i}$	$\approx 2{,}847$	$\approx 21{,}119\mathrm{i}$	$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{4}$
$\underline{\infty}^-$	$-2+\sqrt{2} \approx -0{,}585$	$-(2-\sqrt{2})\mathrm{i}$	$\approx 2{,}847$	$\approx -21{,}119\mathrm{i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3\mathrm{i}}{4}$

В единичном квадрате на комплексной плоскости эти точки расположены так:



4.2. Факторизация $\mathbb{C} \to \dfrac{\mathbb{C}}{\Lambda}$

Поверим, что аналогичные преобразования определены и в общем случае, т. е. уравнения наших аффинных кубик $\dot{\mathbf{E}}$ имеют вид

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3,$$

а проективные с уравнением

$$Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$$

получаются заклеиванием единственного прокола $O = (0:1:0)$,

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \setminus \{O\}.$$

Теорема. *Голоморфное отображение* $(\wp_\lambda, \wp'_\lambda)\colon \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \dot{\mathbf{E}}$ *является неразветвлённым накрытием и продолжается до голоморфного отображения* $(\wp_\lambda : \wp'_\lambda : 1)\colon \mathbb{C} \to \mathbf{E}$. *Последнее отображение является гомоморфизмом групп* $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbf{E}, \oplus)$ *с ядром* Λ.

Доказательство см. [4]. □

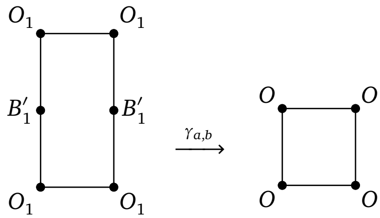
4.3. Подрешётки и изогении

Для $d \in \mathbb{N}$ назовём *d-изогенией* голоморфное отображение $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ комплексных эллиптических кривых, которое является гомоморфизмом групп и при котором у каждой точки $P \in \mathbf{E}$ имеется ровно d прообразов.

Из приведённых результатов легко вытекает, что

если $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ *— произвольная комплексная эллиптическая кривая, то d-изогении* $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ *находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с подрешётками* $\Lambda' \subset \Lambda$ *индекса d.*

При $d = 2$ с учётом *вещественной структуры* на $\mathbf{E}_{a,b}$ получаем обещанную визуализацию изогении Гаусса:



Удивительна её простота в сравнении с формулами, которые её определяют!

§ 5. Заключение

Приведя сначала прямое решение задачи о равенстве двух интегралов, оказавшееся необычайно громоздким, мы затем использовали эту задачу как повод рассказать о нескольких разделах классической математики в современных терминах, стараясь подтвердить слова Гаусса о *совершенно новой области анализа*, приведённые в конце § 1. Оказалось, что найденная Ланденом и Гауссом загадочная подстановка в эллиптическом интеграле может быть объяснена простыми и естественными конструкциями, если развить некоторые понятия топологии, алгебраической геометрии и теории функций комплексной переменной.

Автор надеется, что читатель, впервые встретившийся с этими понятиями, заинтересуется ими, но останется не удовлетворён уровнем изложения, принятым в статье, и захочет глубже изучить их. Многочисленные доступные в наше время учебники, статьи и материалы курсов разного уровня популярности предоставляют такую возможность.

Как и всякая хорошая задача, решённая в статье задача из «Математического просвещения» 2017 года, допускает разнообразные обобщения и аналоги, в том числе связанные с открытыми проблемами. Возможно, один из лучших способов освоить упомянутую в статье классику — включиться в активные исследования, продолжающиеся по сей день в *совершенно новой области анализа*.

Список литературы

[1] *Borwein J. M., Borwein P. B.* Pi and the AGM — A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. New York: Wiley, 1987.

[2] *Cox D. A.* The arithmetic-geometric mean of Gauss // L'Enseignemant Mathématique. 1984. Vol. 30. P. 275–330.

[3] *Gauss C. F.* Werke, III. Göttingen, 1876.

[4] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.

[5] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017.

[6] *Острик В. В., Цфасман М. А.* Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. М.: МЦНМО, 2001.

[7] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: МЦНМО, 2007.

Георгий Борисович Шабат, РГГУ

george.shabat@gmail.com

Обобщение леммы Веррьера

М. И. Бидва, А. М. Филатов, А. А. Шевцов

Данная заметка посвящена решению задачи 25.5 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 25, с. 168). Ранее эта задача была предложена на февральских сборах кандидатам в сборную России на Международной математической олимпиаде. В процессе исследования этой задачи удалось обнаружить много интересных фактов, обобщающих классические утверждения из элементарной геометрии. О некоторых из этих обобщений и пойдёт речь в данной заметке.

Напомним условие исходной задачи.

Задача. В треугольнике ABC рассматриваются две изогонально сопряжённые точки P и Q. Проведём через точки P и Q прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC и пересекающие прямые AB и AC в точках

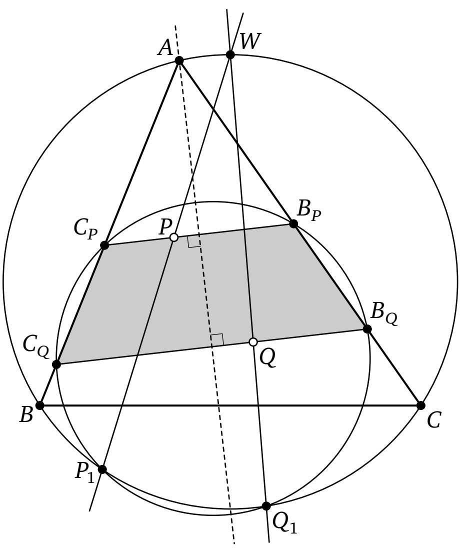


Рис. 1

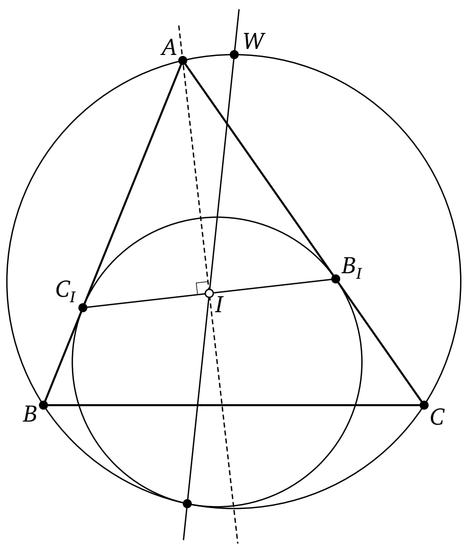


Рис. 2

C_P, B_P, C_Q, B_Q соответственно. Пусть также W — середина дуги BAC[1]) описанной окружности треугольника ABC. Прямые WP и WQ вторично пересекают описанную окружность в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности ω трапеции $B_PB_QC_QC_P$ (рис. 1).

Перед тем, как переходить к решению этой задачи, заметим, что она является обобщением классической *леммы Веррьера* (см., например, [5]): для этого достаточно рассмотреть случай, когда точки P и Q склеиваются в центре I вписанной окружности треугольника ABC. В этом частном случае получается, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке, соединяющем точки касания полувписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 2). Таким образом, в задачах, где фигурирует точка I, можно попытаться «раздвинуть» её, заменив на пару изогонально сопряжённых точек P и Q. Именно с такими обобщениями связаны утверждения, которые приводятся в этой заметке. Перейдём к решению задачи.

Решение. Во-первых, заметим, что

$$\angle WAC = \angle AC_PB_P = \angle AB_PC_P = \angle WP_1B = \angle WP_1C,$$

откуда следует, что четырёхугольники BC_PPP_1 и CB_PPP_1 вписанные (рис. 3). Тогда

$$\angle B_PP_1C_P = \angle B_PP_1P + \angle C_PP_1P = \angle B_PCP + \angle C_PBP.$$

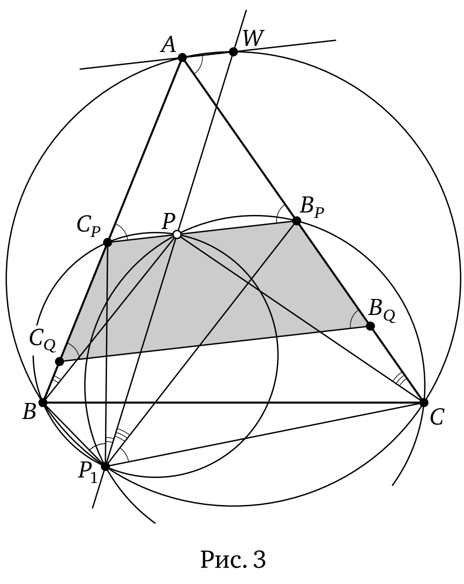


Рис. 3

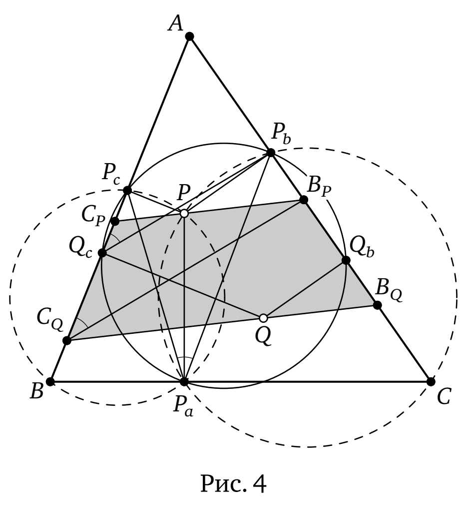


Рис. 4

1) Редакция приносит извинения за опечатку при публикации задачи 25.5: вместо дуги BAC была указана дуга BCA.

Докажем, что $\angle B_P C_Q C_P = \angle B_P P_1 C_P$ (отсюда будет следовать утверждение задачи).

Рассмотрим проекции P_a, P_b, P_c и Q_b, Q_c изогонально сопряжённых точек P и Q на стороны треугольника ABC (рис. 4). Тогда, как известно, эти проекции лежат на одной окружности (см., например, [4]). Из подобия треугольников APP_b и AQQ_c и параллельности прямых B_PC_P и B_QC_Q вытекают следующие соотношения:

$$\frac{AP_b}{AQ_c} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB_P}{AC_Q},$$

откуда получаем, что $AP_b/AB_P = AQ_c/AC_Q$. Значит, прямые Q_cP_b и C_QB_P параллельны. Получаем следующую цепочку равенств:

$$\angle B_P C_Q C_P = \angle P_b Q_c P_c = \angle P_b P_a P_c.$$

А теперь заметим, что четырёхугольники BP_cPP_a и CP_bPP_a также вписанные, откуда получаем, что

$$\angle P_b P_a P_c = \angle P_b P_a P + \angle P_c P_a P = \angle P_b C P + \angle P_c B P = \angle B_P P_1 C_P.$$

Таким образом, точка P_1 лежит на описанной окружности трапеции $B_PB_QC_QC_P$. Доказательство для точки Q_1 аналогично. Задача решена.

Рассмотрим теперь вторые точки P_2 и Q_2 пересечения прямых WP и WQ с описанной окружностью трапеции $B_PB_QC_QC_P$. Справедливо следующее красивое утверждение.

Предложение 1. *Диагонали четырёхугольников $B_PB_QC_QC_P$ и $P_1P_2Q_2Q_1$ пересекаются в одной точке, лежащей на биссектрисе угла BAC.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что точки P и Q гомотетичны с центром в точке R пересечения диагоналей трапеции $B_PC_PC_QB_Q$, так как $PC_P/PB_P = QB_Q/QC_Q$ (рис. 5). Ясно, что точка R лежит на биссектрисе угла BAC.

Теперь докажем, что прямые P_1Q_2 и P_2Q_1 проходят через точку R. Будем проводить рассуждения обратным ходом: рассмотрим точки X и Y пересечения прямых P_1R и P_2R с окружностью ω, отличные от P_1 и P_2, и докажем, что $X = Q_2$ и $Y = Q_1$. Обозначим через Z точку пересечения прямых P_1P_2 и XY.

Заметим, что прямая AW является полярой точки R относительно окружности ω. Более того, точка Z лежит на этой прямой. Значит, точка Z лежит на пересечении прямых AW и P_1W, т. е. совпадает с W (подробнее о свойствах поляр можно прочитать в [1]).

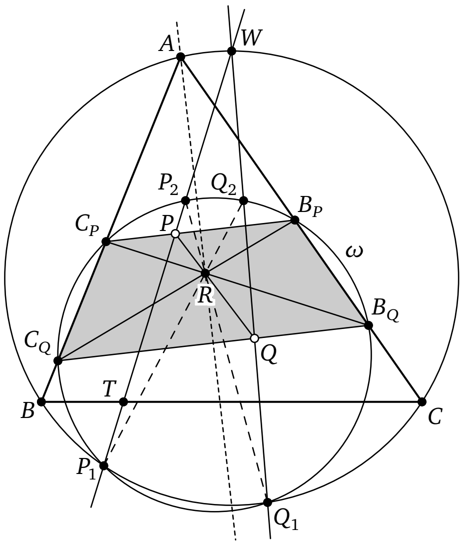


Рис. 5

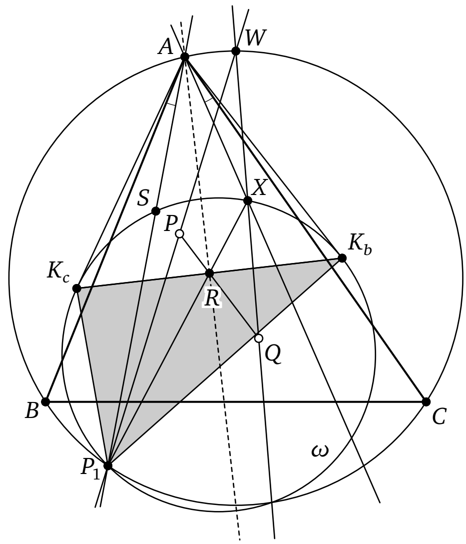


Рис. 6

Рассмотрим проекцию окружности ω на себя с центром в точке R. Эта проекция продолжается на всю плоскость до проективного преобразования. В результате такого преобразования точка P пересечения прямых B_PC_P и P_1P_2 перейдёт в точку пересечения прямых XY и B_QC_Q, причём точки P, R и точка пересечения прямых XY и B_QC_Q лежат на одной прямой. Тогда прямые XY и B_QC_Q пересекаются в точке Q. Значит, прямая XY совпадает с прямой Q_1Q_2 и $\{X, Y\} = \{Q_1, Q_2\}$ (рис. 5). Осталось доказать, что реализуется лишь случай $X = Q_2$ и $Y = Q_1$. Оказывается, строго сделать это не так легко. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пары прямых (AP_1, AX) и (AP_2, AY) изогональны относительно угла BAC.*

Доказательство этой леммы немедленно следует из свойств симедианы треугольника $P_1K_bK_c$, где K_b, K_c — точки пересечения ω с прямой, проходящей через R и параллельной B_PC_P (рис. 6; про симедиану и её свойства можно прочитать в [3]). Для этого вторично пересечём прямую AP_1 с описанной окружностью треугольника $P_1K_bK_c$ в точке S. Тогда, по свойству симедианы, точки X и S симметричны относительно AR, т. е. прямые AP_1 и AX изогональны относительно угла K_cAK_b. По симметрии относительно AR они изогональны и относительно угла BAC. □

Окончание доказательства предложения 1. Предположим, что $X = Q_1$ и $Y = Q_2$. Тогда по лемме 1 прямые AP_1 и AQ_1 являются изогоналями относительно угла BAC, а значит, прямые BC и P_1Q_1 параллельны (в силу симметрии относительно биссектрисы угла BAC). Но тогда

$$\angle WP_2Q_2 = \angle WQ_1P_1 = \angle WCP_1 = \angle WCB + \angle BCP_1 = \\ = \angle WBC + \angle BCP_1 = \angle WP_1C + \angle BCP_1 = \angle WTC,$$

где T — точка пересечения BC и P_1P_2. Отсюда следует, что BC параллельно P_2Q_2, а потому P_1Q_1 параллельно P_2Q_2, что неверно, так как обе прямые по предположению проходят через R. □

Замечание 1. Попутно мы получили, что прямые P_2Q_2 и BC параллельны.

Замечание 2. Точки P_1 и Q_1 можно определить как точки пересечения описанных окружностей треугольника ABC и трапеции $B_PB_QC_QC_P$. Однако в таком определении эти точки равноправны, поэтому неясно, какая из точек P_1 и Q_1 лежит на прямой WP, а какая — на WQ. Ответ на этот вопрос даёт доказанное в ходе решения исходной задачи свойство точек P_1 и Q_1, позволяющее различить их (рис. 3) через точку P_1 проходят описанные окружности треугольников PBC_P и PCB_P, а через точку Q_1 — описанные окружности треугольников QBC_Q и QCB_Q.

Теперь сформулируем следующее важное утверждение.

Предложение 2. *Точки A, W, P_2 и Q_2 лежат на одной окружности* Γ.

Доказательство легко получается из предыдущих результатов:

$$\angle P_2AQ_2 = \angle P_1AQ_1 = \angle P_1WQ_1 = \angle P_2WQ_2,$$

откуда и следует вписанность четырёхугольника AWQ_2P_2. □

Чем это утверждение так важно для нас? Чтобы это понять, отметим точки S_b и S_c пересечения окружности Γ с прямыми соответственно AC и AB, отличные от A (рис. 7). Оказывается, верна следующая

Теорема. 1. *Имеют место равенства $BC_Q = B_PS_b$ и $CB_Q = C_PS_c$* (рис. 7).

2. *В четырёхугольник BS_cS_bC можно вписать эллипс с фокусами в точках P и Q.*

Эта теорема обобщает следующую известную конструкцию. Рассмотрим треугольник ABC, в который вписана окружность с центром в точке I. Проведём через I прямую, перпендикулярную биссектрисе AI. Пусть эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках C_I и B_I соответственно. Отложим на лучах $[C_IA)$ и $[B_IA)$ отрезки $C_IS_c = CB_I$ и $B_IS_b = BC_I$. Тогда отрезок S_bS_c касается вписанной окружности треугольника ABC (рис. 8).

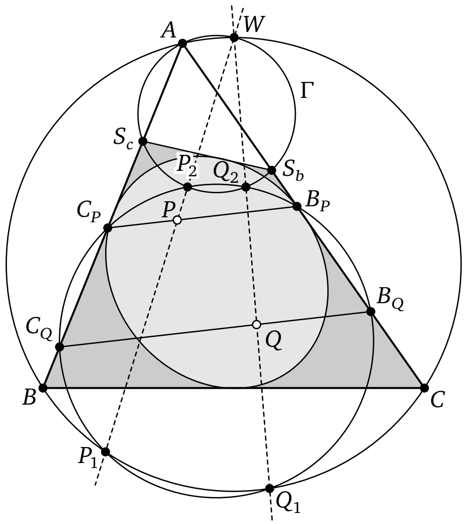


Рис. 7

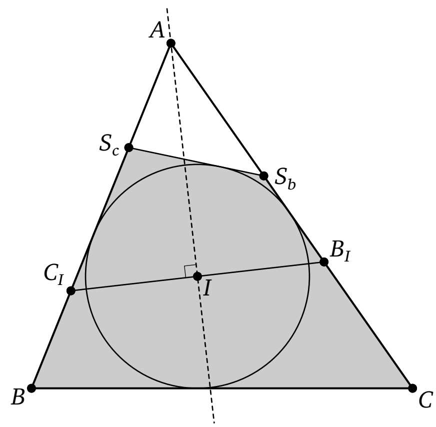


Рис. 8

Мы получаем дальнейшее обобщение этой конструкции, заменяя точку I на пару изогонально сопряжённых точек P и Q. В этом случае вместо касания с вписанной окружностью возникает касание с эллипсом, вписанным в треугольник ABC (рис. 7).

Доказательство теоремы мы разобьём на несколько лемм, каждая из которых интересна и сама по себе.

Лемма 2. *Четырёхугольник $C_PPP_2S_c$ — вписанный.*

Доказательство. В самом деле, имеет место следующая цепочка равенств углов:

$$\angle C_PS_cP_2 = 180^\circ - \angle AS_cP_2 = \angle AWP_2 = \angle AWP_1 = \angle C_PPP_1,$$

поскольку C_PP и AW перпендикулярны биссектрисе угла A и, следовательно, параллельны. Отсюда следует требуемое. □

Из вписанности четырёхугольников AWP_2S_c и AWP_1B получаем, что прямые S_cP_2 и BP_1 параллельны. Из вписанности четырёхугольников $P_1P_2C_PC_Q$ и $C_PPP_2S_c$ следует, что параллельны P_1C_Q и PS_c. Аналогичные утверждения можно получить, поменяв ролями P и Q.

Лемма 3. *Рассмотрим произвольную равнобокую трапецию $B_PB_QC_QC_P$. Пусть R — точка пересечения её диагоналей, а точки P и Q' выбраны на её основаниях так, что отрезок PQ' проходит через точку R. Также отметим на описанной окружности трапеции точки P_2 и Q_1 так, чтобы*

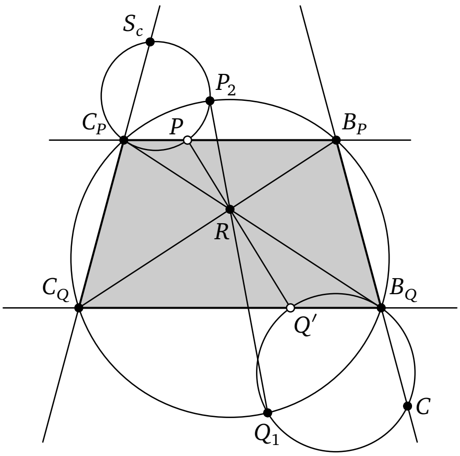


Рис. 9

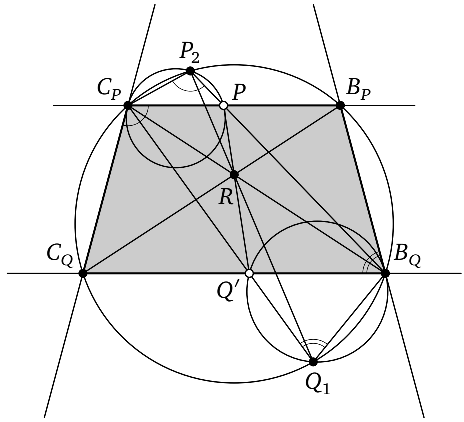


Рис. 10

отрезок P_2Q_1 проходил через R. Обозначим через S_c и C вторые точки пересечения описанных окружностей треугольников C_PPP_2 и $B_QQ'Q_1$ с прямыми C_PC_Q и B_PB_Q соответственно. Тогда $C_PS_c = CB_Q$ (рис. 9).

Доказательство. Будем равномерно двигать точку P по прямой B_PC_P. Тогда точка Q' будет равномерно двигаться по прямой B_QC_Q, а точки S_c и C будут равномерно двигаться по прямым C_PC_Q и B_PB_Q соответственно. Значит, для доказательства равенства отрезков C_PS_c и CB_Q достаточно найти два положения точки P, при которых оно выполнено. Выберем в качестве первого положения точку $P = B_P$, тогда $C = B_P$ и $S_c = C_Q$, поэтому $C_PS_c = C_PC_Q = B_PB_Q = CB_Q$.

В качестве второго положения выберем точку P, совпадающую с пересечением прямых B_PC_P и B_QP_2. Заметим, что тогда из теоремы Паскаля для шестивершинника $C_PB_PC_QB_QP_2Q_1$ следует, что точка Q' лежит на прямой C_PQ_1 (рис. 10). Далее, заметим, что описанные окружности треугольников C_PPP_2 и $B_QQ'Q_1$ касаются прямых C_PC_Q и B_PB_Q соответственно, так что $S_b = C_P$ и $C = B_Q$. В самом деле, $\angle C_QC_PP = \angle C_PP_2B_Q$ как углы, опирающиеся на равные хорды $B_PC_Q = C_PB_Q$. Аналогично равны углы $C_PQ_1B_Q$ и $B_PB_QC_Q$. Таким образом, здесь точка S_b совпадает с C_P, а точка C — с B_Q, поэтому длины отрезков C_PS_c и CB_Q действительно одинаковы и равны 0. □

Из леммы 3 легко следует первый пункт теоремы. В самом деле, достаточно применить эту лемму к точкам P и Q, лежащим на основаниях трапеции $B_PB_QC_QC_P$.

Теперь докажем п. 2. Чтобы установить существование эллипса с фокусами P и Q, вписанного в четырёхугольник BS_cS_bC, достаточно дока-

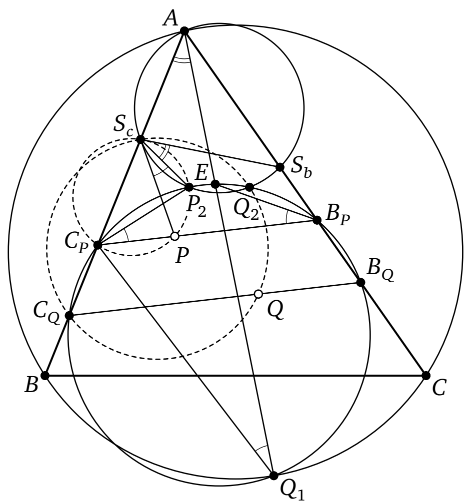


Рис. 11

зать изогональную сопряжённость точек P и Q относительно этого четырёхугольника: в таком случае искомым будет эллипс с фокусами P и Q и суммой расстояний, равной диаметру педальной окружности точек P и Q (см., например, [2]). Так как точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC, достаточно доказать их изогональную сопряжённость относительно треугольника AS_cS_b.

Лемма 4. *Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника AS_cS_b.*

Доказательство. Докажем, что $\angle S_bS_cP = \angle C_QS_cQ$ (для второй пары углов рассуждения аналогичны). Обозначим через E точку пересечения прямой AQ_1 с окружностью ω. Выпишем цепочку равенств углов (рис. 11):

$$\angle S_bS_cP = \angle S_bS_cP_2 + \angle P_2S_cP = \angle S_bAP_2 + \angle P_2C_PP = \angle C_PAQ_1 + \angle EB_PC_P = \\ = \angle C_PAQ_1 + \angle AQ_1C_P = \angle C_QC_PQ_1 = \angle C_QQ_2Q_1 = \angle C_QQ_2Q = \angle C_QS_cQ,$$

что и требовалось доказать. □

Наша теорема, наконец, доказана. □

В качестве упражнений попробуйте доказать другие замечательные свойства данной конфигурации.

Упражнение 1. Пары прямых (BQ, P_1B_Q), (BP, Q_1B_P), (CQ, P_1C_Q), (CP, Q_1C_P) пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Упражнение 2. Четырёхугольники $S_bQ_2P_2S_c$ и BP_1Q_1C подобны.

Упражнение 3. а) Точки пересечения пар прямых (AB, WQ), (AC, WP), (BP_1, CQ_1), (S_cP_2, S_bQ_2) и точка R лежат на одной прямой.

б) Точки пересечения пар прямых (AB, WP), (AC, WQ), (S_cQ_2, S_bP_2), (BQ_1, CP_1) и точка R лежат на одной прямой.

Благодарности

Авторы благодарят П. В. Бибикова за постановку задачи и помощь в подготовке статьи, а также П. А. Кожевникова, который сформулировал основную теорему и предложил авторам её доказать.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. 2007. С. 61–78.

[3] *Блинков Ю. А.* Симедиана // Квант. 2015. № 4. С. 35–39.

[4] *Куланин Е. Д.* Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9, 2005. С. 164–182.

[5] *Протасов В. Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха // Квант. 2008. № 4. С. 10–15.

Максим Игоревич Бидва, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
bidva.maxim@yandex.ru

Андрей Максимович Филатов, ученик школы № 444 (г. Москва)
filatov.andrey.m@gmail.com

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
andreyshevtsov2003@gmail.com

Нам пишут

Замечания к задачнику «Математического просвещения»

С. Б. Гашков

К задаче 21.2 (выпуск 21, с. 271; решение см. выпуск 22, с. 249–251). В моей статье в соавторстве с Е. Т. Шавгулидзе [3] указано похожее тождество, но с меньшим числом слагаемых (2^{n-1} вместо $2^n - 1$), и доказано, что это число минимально. Отмечу, что эти результаты были получены в 80-е годы.

По упражнению 3 к задаче 17.3 (выпуск 22, с. 244; 57-я Московская математическая олимпиада, 1994 г.). На самом деле эта задача совпадает с задачей 2 на 13-й Международной математической олимпиаде (1971 г.)

К задаче 22.5 (выпуск 22, с. 232; решение задачи 22.5в см. с. 282–284). Решением задачи 22.5а является любой канторов многочлен, в частности, суперпозиция $c(x_1, c(x_2, \ldots, c(x_{n-1}, x_n)) \ldots)$, где

$$c(x, y) = \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}.$$

Это написано во многих учебниках по теории алгоритмов и рекурсивных функций. Канторов многочлен $c(x_1, \ldots, x_n)$ по определению осуществляет нумерацию всех упорядоченных n-ок натуральных чисел (включая нуль). Функция $c(x_1, \ldots, x_n)$ имеет поэтому n обратных функций $c_i(x)$, таких, что справедливы тождества

$$c(c_1(x), \ldots, c_n(x)) = x, \quad c_i(c(x_1, \ldots, x_n)) = x_i.$$

Обратные функции — уже не многочлены, но в учебниках доказывается, что они, как и многочлены, примитивно рекурсивны.

Степень указанного многочлена равна 2^{n-1} . Можно вместо данной суперпозиции взять любую другую бесповторную суперпозицию, так как любая такая суперпозиция канторовых многочленов будет канторовым многочленом (если в суперпозиции переменные могут совпадать, то такая суперпозиция даёт многочлен, инъективно отображающий $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$, но это отображение не биективно: например, многочлен $c(x, c(y, c(y, \ldots) \ldots)$ инъективен на $\mathbb{N}^2$, но не биективен). Если глубина суперпозиции равна d, то степень соответствующего многочлена равна 2^d и все его коэффициенты положительны (а значит, он монотонен по каждой переменной). Очевидно, что в случае n переменных имеем $\log_2 n \leqslant d \leqslant n-1$; в частности, при $n = 2^k$ можно взять суперпозицию глубины k и соответствующий канторов многочлен имеет степень n, а в общем случае его степень не меньше n.

В задаче 22.5б поставлен вопрос, какова возможная степень канторова многочлена (не обязательно построенного так, как выше). Ответ таков: минимальная степень равна n. В книге [5] близкий вопрос сформулирован так (гл. 2, § 3, задача 40): какую минимальную степень может иметь многочлен от n переменных с целыми коэффициентами, если он при разных наборах натуральных значений переменных принимает различные значения? (Задача С. В. Конягина.) Ответ здесь тоже n. Для доказательства верхней оценки достаточно рассмотреть многочлен

$$p_n(x_1, \ldots, x_n) = \binom{x_1 + \ldots + x_n + n - 1}{n} + \\ + \binom{x_1 + \ldots + x_{n-1} + n - 2}{n-1} + \ldots + \binom{x_1 + x_2 + 1}{2} + \binom{x_1}{1},$$

являющийся прямым обобщением многочлена Кантора

$$c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1}.$$

Этот многочлен указан в решении задачи 41 того же параграфа (задачу 40 предложил я годом позже задачи 41). В тексте решения имеются очевидные опечатки. Без опечаток этот многочлен приведён в моей книге [2, § 1.8, задача 12]. Решение легко получить, используя следующий факт: любое натуральное число можно представить (и единственным образом) в виде

$$\binom{x_n}{n} + \binom{x_{n-1}}{n-1} + \ldots + \binom{x_n}{1}, \quad x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 \geqslant 0.$$

Для $n = 3$ доказательство этого утверждения приведено в книге [1] (задача 2.86 в издании 2009 г.). Его можно также найти в книге [4] (и, наверное, в других источниках).

Доказательство нижней оценки для задачи 40 в книге [5] не приведено. Идея этого доказательства такова. Пусть имеется многочлен $p(x_1, \ldots, x_n)$ степени $d<n$, инъективно отображающий $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим множество целых точек куба $[0, N]^n$. Так как их количество $(N+1)^n$, в силу условия инъективности и принципа Дирихле в одной из точек куба справедливо неравенство

$$|p(x_1, \ldots, x_n)| \geqslant \frac{(N+1)^n - 1}{2}.$$

Так как число одночленов в многочлене p не больше $(d+1)^{n+1}$, для любой точки указанного куба имеем

$$|p(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant (d+1)^{n+1} N^d C,$$

где C — максимум модулей коэффициентов многочлена p. Устремляя N к бесконечности, получаем противоречие.

Но задачу 22.5б можно понять и так: найти все возможные значения степени канторова многочлена от n переменных. Используя указанную конструкцию канторова многочлена и произвольные бесповторные суперпозиции, легко получить примеры монотонных канторовых многочленов n переменных, у которых степень будет составным числом из отрезка $[n+1; 2^{n-1}]$. Например, при $n=5$ имеем канторовы многочлены

$$p_5(x_1, \ldots, x_5), \quad p_3(x_1, p_2(x_2, x_3), p_2(x_4, x_5)),$$
$$p_2(p_2(p_2(x_1, x_2), p_2(x_3, x_4)), x_5), \quad p_3(x_1, x_2, p_3(x_3, x_4, x_5)),$$
$$p_3(x_1, x_2, p_2(x_3, p_2(x_4, x_5))), \quad p_2(x_1, p_2(x_2, p_2(x_3, p_2(x_4, x_5))))$$

степеней 5,6,8,9,12,16 (но многочлены степеней 7,10,11,13,14,15 таким образом получить не удаётся). Существуют ли канторовы многочлены других типов и других степеней — не ясно. Если в определении канторова многочлена ослабить условие биективности до условия инъективности, то монотонные многочлены $p_m(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$, $m \geqslant n$, от n переменных имеют все возможные степени, начиная с n.

При составных n существует несколько разных канторовых многочленов степени n от n переменных (например, при $n=6$ это p_6, $p_3(p_2, p_2, p_2)$, $p_2(p_3, p_3)$). Неизвестно, верно ли это при простых n.

Неизвестно, есть ли немонотонные канторовы многочлены.

Неизвестно, есть ли канторовы многочлены с целыми коэффициентами.

По поводу задачи 22.5в[1] мне не ясно, существуют ли вообще канторовы многочлены, осуществляющие биекцию $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{Z}$ или хотя бы инъекцию.

---

[1] См. ниже, с. 282–284.

Список литературы

[1] *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2009.

[2] *Гашков С. Б.* Современная элементарная алгебра. М.: МЦНМО, 2017. § 1.8, задача 12.

[3] *Гашков С. Б., Шавгулидзе Е. Т.* О представлении произведений в виде суммы степеней линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. 2014. № 2. С. 9–14.

[4] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Том 1. М.: Мир. 1976.

[5] *Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В.* Задачи студенческих олимпиад. М.: МГУ, 1987.

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ

sbgashkov@gmail.com

О задаче 22.1

А. С. Милевский

В «Математическом просвещении» (выпуск 22, с. 231) опубликована задача 22.1:

Пусть функция $g(x)$ такова, что при всех $x \geqslant 1$ выполняется равенство $g(x)^{g(x)} = x$. Найдите такую элементарную функцию $h(x)$, что

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-h(x)) = 0.$$

В решении этой задачи, опубликованном в «Математическом просвещении» (выпуск 23, с. 235), содержится ошибка. В последней строке решения написано:

$$\left|\ln x - \left(\ln x - \frac{\ln x \ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\right)\right| \to 0 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Но в действительности

$$\left|\frac{\ln x \ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\right| \to +\infty \quad \text{при } x \to \infty.$$

Скорее всего, для функции $g(x)$ невозможно построить требуемую аддитивную асимптотику с элементарной функцией h. Получается лишь мультипликативная асимптотика вида

$$h(x)(1+o(1)) \quad \text{при } x \to \infty.$$

На самом деле рассматриваемая задача приводит к так называемой функции Ламберта $W(z)$, которая является решением уравнения

$$W(z)e^{W(z)} = z,$$

откуда

$$g(x) = e^{W(\ln x)}.$$

Асимптотика функции $W(z)$ при $z \to \infty$ известна[1, p. 349], но не даёт решения задачи.

Список литературы

[1] *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert *W* function // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5, № 4. P. 329–359.

Александр Станиславович Милевский, МИИТ

a_s_mi@mail.ru

Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Найдите предел $\lim\limits_{t\to 1-0}\sqrt{1-t}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^{k^2}\right)$. (*Фольклор*)

2. а) Один из игроков рисует на плоскости выпуклый n-угольник и записывает координаты некоторой точки. Второй проводит произвольную прямую, а первый сообщает, с какой стороны от неё расположена точка. Какое наименьшее число прямых всегда достаточно, чтобы определить, внутри или снаружи многоугольника находится точка? (*Фольклор*)

   б) (Задача на исследование.) Аналогичный вопрос для правильных многогранников в высших размерностях, в частности для кубов. (*Фольклор*)

3. Пусть n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что число способов представить n в виде суммы нескольких натуральных чисел,

идущих в порядке невозрастания и не делящихся на p, равно числу способов представить n в виде суммы натуральных чисел, среди которых нет p одинаковых. (*А. Я. Канель-Белов*)

4. Пусть $k+2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k+2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k, то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k. (*А. Я. Канель-Белов*)

5. Даны коника Γ и её хорда AB. Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC.
(*А. А. Заславский, А. И. Сгибнев*)

6. Две фигуры на плоскости называются *равносоставленными*, если одну из них можно *перекроить* в другую. Это означает, что фигуру можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить вторую фигуру (части можно параллельно переносить и поворачивать, но не переворачивать на другую сторону). Если это можно сделать, перенося части параллельно самим себе, но не поворачивая, то фигуры называются *T-равносоставленными*. Для пространственных тел определения аналогичны.

   а) Даны два многоугольника на плоскости (не обязательно выпуклых). При каком условии они T-равносоставлены? (*Фольклор*)

   б) Докажите, что любые два параллелепипеда одинакового объёма T-равносоставлены. (*Г. Хадвигер*)

   в) Даны две фигуры на плоскости, их границы — участки окружностей и отрезки. При каком условии эти фигуры равносоставлены? Тот же вопрос, когда к частям фигур можно дополнительно применять гомотетии. (*Фольклор*)

   г) Можно ли круг перекроить в выпуклую фигуру, отличную от круга? Можно ли две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, перекроить в одну? (*И. А. Иванов-Погодаев*)

7. Пусть t, p — натуральные числа. Несколько ящиков вместе весят t тонн, причём каждый из них весит не более одной тонны. Какого количества p-тонных грузовиков заведомо достаточно, чтобы увезти весь этот груз? (*Фольклор*)

8. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, и пусть C есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что C — треугольник или что C — четырёхугольник? (*Ф. В. Петров*)

9. Пусть X — множество бесконечных последовательностей $(a_0, a_1, \ldots)$, состоящих из целых чисел. Функции $f : X \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in X$ равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$, назовём *аддитивными* (в множестве X сложение покоординатное). Последовательность из X, в которой лишь конечное число ненулевых членов, назовём *финитной*.

   а) Пусть аддитивная функция f равна нулю на всех финитных последовательностях. Обязательно ли она равна нулю на всём X?
   (*Фольклор*)

   б) Докажите, что аддитивных функций $f : X \to \mathbb{Z}$ счётное количество.
   (*Э. Шпекер*)

10. Вектор с полиномиальными координатами $\vec{v} = (P_1, \ldots, P_k)$ называется *унимодулярным*, если для некоторых многочленов $Q_1, \ldots, Q_k$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{k} P_i Q_i = 1$. Пусть все P_i — многочлены от $k-1$ переменной. Докажите, что существует обратимая матрица A над кольцом многочленов (т. е. A^{-1} — тоже матрица над кольцом многочленов) такая, что $\vec{v} \cdot A = (1, 0, \ldots, 0)$. (*В. А. Артамонов, А. Я. Канель-Белов*)

11. а) Для какого минимального числа отмеченных целых точек на плоскости наверняка найдётся треугольник с отмеченными вершинами, центр тяжести которого — целая точка?

    При каком наименьшем $M(k)$ можно из любых $M(k)$ целых точек выбрать k, центр тяжести которых — тоже целая точка?
    (*В. А. Сендеров*)

    б) Докажите, что среди любых $2n - 1$ целых чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n. (*Теорема Эрдёша — Гинзбурга — Зива*)

    в) Докажите, что существует константа $C > 0$ такая, что для любого простого числа p выполнено следующее. В любой последовательности из хотя бы $C \cdot p$ элементов группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ найдётся подпоследовательность, состоящая из ровно p элементов, сумма которых равна нулю. (*Н. Алон, М. Дубинер*)

12. Найдите все решения уравнения Пелля для многочленов с комплексными коэффициентами: а) $x^2 - (d^2 - 1)y^2 = z^2$; б) $x^2 - Dy^2 = z^2$.
    (*А. Я. Канель-Белов*)

Уточнение к задаче 7.5б

Приводим уточнённое условие задачи 7.5б («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 7, с. 187):

Задача 7.5. б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность или прямая проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности или прямой.

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и *естественность* задачи. Оно важно в том числе и поэтому. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

Публикуем очередные дополнения к задачам.

В выпуске 3 (с. 233) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*Теорема Гаусса — Люка*)

Её решение см. выпуск 18, с. 262. Ей родственна

Задача 3.5$'$. *Все корни многочлена лежат строго внутри некоторой полуплоскости, граница которой проходит через начало координат. Докажите, что все его коэффициенты не могут быть одновременно целыми.*

(*Фольклор*)

В выпуске 11 (с. 163) опубликована

Задача 11.7. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2n]$, таких, что $F(0) = 0$ и на любом интервале $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, производная равна ± 1.

а) Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $f(2n) = 0$?

б) Как подсчитать число функций, таких, что $-n/k < f(x) < n/k$?

(*А. Я. Белов*)

Ей родственна

Задача 11.7′. *Докажите, что*

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n^2}=\binom{2n}{n}. \qquad (\textit{Фольклор})$$

Также в выпуске 11 (с. 164) опубликована следующая

Задача 11.11. Дано $2n+1$ грузов попарно различной массы и чашечные весы без гирь. Докажите, что за $100n$ взвешиваний можно найти *медиану* (т. е. средний по массе груз). (*Фольклор*)

Её решение содержится в статье А. С. Малистова «О поиске медианы массива за линейное время» («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 21, М.: МЦНМО, 2017, с. 265–270). С этой задачей связана

Задача 11.11′. *Дано n грузов попарно различной массы и чашечные весы без гирь. На каждую чашку можно класть только одну гирю. Какое минимальное число взвешиваний требуется для упорядочения грузов по массе? Постарайтесь получить как можно более точные ответы для различных n.* (*Фольклор*)

В выпуске 13 (с. 179) опубликована

Задача 13.3. Известно, что для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty$, имеем $\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i<\infty$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2<\infty$. (*А. Я. Белов*)

Её решение см. выпуск 15, с. 237. Ей родственна

Задача 13.3′. *Известно, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i<\infty$, $a_i>0$. Пусть $s_j=\sum_{i=1}^{j} a_i$. Докажите, что тогда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{s_i}<\infty$.* (*Фольклор*)

В выпуске 14 (с. 273) опубликована

Задача 14.9. Докажите, что при игре «Жизнь»

а) в квадрате 2010×2010;

б) на бесконечной плоскости найдётся конфигурация без прообраза.

(Конвеевская игра «Жизнь» заключается в следующем: в некоторых клетках решётки стоит по фишке, а некоторые клетки пустые. Фишка, имеющая меньше двух соседей, умирает от одиночества, а имеющая больше трёх соседей — от перенаселённости. На пустом поле, имеющем три соседние фишки, рождается новая фишка. Клетки соседствуют по общим сторонам или общим вершинам. Состояния всех клеток меняются одновременно.) (*Фольклор*)

Её решение см. выпуск 16, с. 237–239.

В связи с игрой «Жизнь» можно поставить вопрос:

Задача 14.9$'$. *Рассмотрим аналог конвеевской игры «Жизнь», при которой нет смерти клеток. Найдтся ли конфигурация, при эволюции которой число клеток стремится к бесконечности*? (*А. Я. Белов*)

В выпуске 15 (с. 232) опубликована

Задача 15.1. Задачи на «устный счёт»:

а) Найдите первую цифру числа 2^{400}. (*А. Я. Белов*)

б) Найдите $[2^{\sqrt{15}}]$, не пользуясь калькулятором. (*А. В. Спивак*)

в) Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$? (*В. А. Сендеров*)

г) Оцените $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx$ с 20 % погрешностью. (*В. И. Арнольд*)

Её решение см. выпуск 23, с. 226–229.

Эта задача (и подобная ей задача 17.2, выпуск 17, с. 196, решение см. выпуск 23, с. 231–232) вызвала заметный интерес у читателей. Этот интерес не случаен. Для успешного решения задач математических олимпиад, в том числе высшего уровня, необходимы в первую очередь общеукрепляющие средства: хорошая проработка школьного материала — как школьной алгебры (культура алгебраических преобразований), так и школьной геометрии. Ухудшение школьного образования привело к проблемам с культурой выкладок, в то время как на кружках дают в основном комбинаторику и геометрию.

Вот аналогичные задачи:

Задача 15.1$'$. а) *Что больше*: $\int\limits_0^{2\pi} e^{\sin^2(x)}\, dx$ *или* 3π?

б) *Найдите интеграл* $\int\limits_0^{1} e^x \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ *с ошибкой не больше* 0,2.

в) *Вычислите* $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{100+x}$ *с точностью* 10^{-5}.

г) *Вычислите* $\int\limits_1^{10} x^x\, dx$ *с относительной погрешностью не более* 1 %. (*Фольклор*)

д) *Что больше*: $\operatorname{arctg}(e)$ *или* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$? (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 16 (с. 230) опубликована

Задача 16.4. Ограничена ли последовательность $\{a_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_{n+1} = (a_{n-1} \cdot a_n - 1)/a_{n-1}$, если $1 < x < 2$? (*К. Н. Игнатьев*)

Её решение см. выпуск 19, с. 260. Ей родственна

Задача 16.4$'$. *Пусть* $\mathrm{im}(x_0) \neq 0$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. *Докажите, что*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

(*Фольклор*)

В выпуске 17 (с. 97) опубликована

Задача 17.9. Имеется $2^n - 1$ коробок. В коробке первой величины содержатся две коробки второй величины. В каждой из 2^{k-1} коробок k-ой величины содержатся по две коробки $(k+1)$-ой величины. В коробках последней n-ой величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $[n/2]+1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз. Можно ли улучшить эту оценку? (*А. Я. Белов*)

Её решение см. выпуск 25, с. 182–185. Задача допускает обобщение:

Задача 17.9$'$ (на исследование). а) *Оцените число операций, требуемых для уравнивания, если в каждой бо́льшей коробке лежит* $2k$ *ме́ньших коробок следующего уровня.*

б) *В условиях задачи* 17.9 *найдите минимальное количество операций, позволяющее сделать отношение количеств орлов и решек равным* $p:q$, *где* 2^{n-1} *делится на* $p+q$.

в) *Естественно поставить вопрос, когда вместо орла или решки на самом нижнем уровне стоит элемент группы* $\mathbb{Z}_n$, *а операция состоит в добавлении единицы ко всем таким элементам, попавшим в коробку. При этом в каждой коробке лежит по n коробок следующего уровня иерархии.*

(*А. Я. Белов*)

В выпуске 18 (с. 256) опубликована

Задача 18.3. а) Пусть П — d-мерный параллелепипед. Найдите сумму количеств граней параллелепипеда П всех возможных размерностей:

$$\text{(число вершин)} + \text{(число рёбер)} + \text{(число двумерных граней)} + \\ + \text{(число трёхмерных граней)} + \ldots + \text{(число } (d-1)\text{-мерных граней)}.$$

Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.).

б) d-Мерный параллелепипед П («дом») с размером $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_d$ разделён гиперплоскостями, параллельными его рёбрам, на единичные кубики («квартиры»). У каждой квартиры имеются вершины, одномерные рёбра, а также грани всех остальных размерностей, начиная с двумерных и кончая $(d-1)$-мерными, — назовём их все «стенками» (размерностей $k = 0, 1, 2, \ldots, d-1$). Стенка, общая для двух или большего числа квартир, считается за одну. Найдите сумму количеств всех стенок у всех квартир дома П. Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.). (*Г. А. Гальперин*)

Ниже задача того же автора на родственную тему.

Задача 18.3$'$. *Рассмотрим множество всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через v, e, f число вершин, рёбер и граней у одного многогранника и устремим к бесконечности число вершин v (тогда и остальные два числа, e и f, тоже будут стремиться к бесконечности). Докажите, что из отрезков с целочисленными длинами v, e, f можно построить треугольник, и определите, к чему стремится наибольший угол этого треугольника при $v \to \infty$, если этот треугольник построен*

а) *на евклидовой плоскости;*

б) *на плоскости Лобачевского.* (*Г. А. Гальперин*)

В выпуске 19 (с. 257) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x+1)^3; \quad \text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y+1)^3$$

в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Её решение см. выпуск 20, с. 265–267. Вот новая задача того же автора.

Задача 19.3$'$. а) *Докажите, что уравнение* $(y^2 - 2x^2)^2 = 2y^2 + x + y$ *неразрешимо в натуральных числах* x, y.

б) *Докажите, что для каждого целого* $c \geqslant 4$ *уравнение* $x(y^2 - 2x^2) + cx + y + 1 = 0$ *имеет не больше пяти решений* (x, y) *в целых числах.*

(*Н. Н. Осипов*)

В выпуске 20 (с. 250) опубликована

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка* k, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство $b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$. Пусть $b_0 = 1$, $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ либо содержит член, имеющий 2016 различных простых делителей, либо является геометрической прогрессией: $a_n = c \cdot d^n$. (*А. Я. Белов*)

Родственна ей по сюжету

Задача 20.4$'$. *Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных* k, *что при всех натуральных* n *число* $k \cdot 2^n + 1$ — *составное.*

(*С. В. Конягин*)

В выпуске 22 (с. 232) опубликована

Задача 22.5в. Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Одним из моментов решения является доказательство следующего факта (настоящий выпуск, с. 284): если целые числа X, Y принадлежат данным арифметическим прогрессиям, K — фиксированное целое число, то уравнение $XY = K$ может иметь сколь угодно много решений. Следующая задача родственна этому утверждению.

Задача 22.5′. *Пусть k — фиксированное целое число. Назовём целое число хорошим, если оно даёт остаток* 1 *при делении на k. Назовём число отличным, если оно хорошее и не разлагается в произведение двух или более хороших чисел. Докажите, что найдётся хорошее число, разлагающееся в произведение отличных более чем* 2020 *способами.* (*В.А.Сендеров*)

В выпуске 25 (с. 167) опубликована

Задача 25.2. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_N$ удовлетворяют неравенствам: $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_2 + x_3 \geqslant 2$, …, $x_N + x_1 \geqslant N$. Найдите минимум суммы $S = x_1 + \ldots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$. (*Фольклор*)

В решении следующих задач используется тот же метод «линейного варьирования».

Задача 25.2′. *При какой максимальной высоте может не обрушиться стенка из n кирпичей?*

Кирпичи считаются двумерными (*они имеют ненулевую длину и высоту, но нулевую ширину*). *Все кирпичи одинаковы. Кирпичи можно класть друг на друга* (*так что один может выступать над другим в длину*). *На каждый кирпич можно положить только один* (*на который, в свою очередь, можно положить ещё один, и т. д.*). (*Фольклор*)

В общем случае (когда на земле лежит один кирпич, но на каждый кирпич можно класть сколько угодно) ответ неизвестен. Было бы интересно получить асимптотику.

Задача 25.2″. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, m$ — веществвеннные числа. Число a_k назовём m-лидером, если для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant m$, имеем

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+t-1} \geqslant 0.$$

Докажите, что сумма всех m-лидеров неотрицательна. (*Фольклор*)

В настоящем выпуске (с. 266) опубликована задача 6 о разрезаниях. В задачах такого рода естественно поставить вопрос о минимальном числе кусков при перекройке:

Задача 26.6$'$. а) *Оцените минимальное число частей, из которых можно сложить как куб, так и заданный параллелепипед.* (*Части можно параллельно переносить, но не поворачивать*).

б) *Можно ли правильный миллиардугольник разрезать на миллион частей, из которых потом можно сложить квадрат? Разрезы делаются ломаными линиями.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В настоящем выпуске (с. 267) опубликована также задача 12 об уравнении Пелля в кольце многочленов. К ней близка по тематике недостаточно известная, но методически очень полезная

Задача 26.12$'$. а) *Докажите, что уравнение Ферма $P^n+Q^n=R^n$ не имеет нетривиальных решений в кольце многочленов с комплексными коэффициентами.*

б) (Гипотеза abc для многочленов.) *Пусть многочлены $f, g, h \neq \mathrm{const} \in \mathbb{C}[x]$ таковы, что $f+g=h$, $\text{НОД}(f, g, h)=1$. Докажите, что*

$$\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} < n(fgh),$$

где $n(p)$ есть число различных комплексных корней многочлена $p \in \mathbb{C}[x]$. (*Фольклор*)

На международной студенческой олимпиаде в 2019 г. было предложено решить уравнения в матрицах:

Задача 26.12$''$. а) *Найдите все натуральные n, для которых найдутся обратимые матрицы A и B размера n с вещественными коэффициентами такие, что $AB-BA=B^2A$.* (*К. Керьян*)

б) *Существуют ли нечётное натуральное n и целочисленные матрицы A, B порядка n, для которых выполнена следующая система уравнений* (*где E — единичная матрица*)?

$$\begin{cases} \det(B)=1, \\ AB=BA, \\ A^4+4A^2B^2+16B^4=2019E. \end{cases}$$

(*О. Иброгимов*)

Продолжая подборку предыдущего выпуска, приводим ещё несколько фольклорных задач.

Ф1 Рассмотрим игру Го: двое по очереди ставят свои фишки в узлы клетчатой решётки. Соединять узлы можно при соблюдении следующих условий:

- узлы соседние (в том числе по диагонали);
- так, чтобы возникла замкнутая ломаная;
- так, чтобы не пересекать уже имеющиеся соединения противника.

Цель игры — окружить как можно больше фишек противника. Изначально стоит бесконечная горизонтальная линия синих фишек. Докажите, что синие выиграют.

Ф2 Пусть x_i, $i=0, 1, \ldots, n$, — попарно различные натуральные числа, при этом $x_0, x_1 < \ldots < x_n$. Докажите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}+\leqslant\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{j}.$$

Ф3 Дан n-мерный тетраэдр единичного объёма. Его вершины отражаются друг относительно друга, а затем берётся выпуклая оболочка получившегося множества. С полученным многогранником выполняется аналогичная операция, и т. д. Найдите объём тела, получившегося после k операций.

Ф4 Стороны n-гранника (n-вершинника) равны единице. Оцените его объём.

Ф5 Разрешается заменить вектор на противоположный. Докажите, что существует $A(n)$ такое, что для любого набора векторов длины не больше 1 можно добиться того, чтобы длина суммы не превосходила $A(n)$.

Ф6 Оцените объём тела диаметра 1.

Решения задач из прошлых выпусков

1.2$'$ (выпуск 22, с. 234). Условие. Последовательность цифр бесконечна влево, а вправо оканчивается на 36. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что 2^{N_k} оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. *Существование* искомой последовательности доказано в решении задачи 1.2, принадлежащем В. М. Тихомирову (выпуск 5, с. 218). *Непериодичность* доказывается как в решении задачи 1.2$''$ (см. ниже). Отметим, что если в задаче 1.2$''$ последовательность цифр отвечает нетривиальному идемпотенту, то в данном случае получается 10-адическое решение трансцендентного уравнения $2^x = x$, которое заведомо иррационально. (*А. Я. Канель-Белов*)

1.2$''$ (выпуск 25, с. 170). Условие. Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на 76. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что N_k^2 оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична.

(*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Вначале докажем *существование* такой последовательности. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. *Последовательное построение числа N_k индукцией по k.* Для $k = 1$ такие числа существуют. Пусть искомое k-значное число N_k (возможно, начинающееся с нуля) уже построено. Рассмотрим $(k+1)$-ю цифру b_k числа N_k^2. Положим $X_k = c_k 10^{k+1} + N_k$. Тогда

$$X_k^2 = c_k^2 10^{2(k+1)} + N_k^2 + 2c_k N_k 10^{k+1} \equiv \\ \equiv N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} N_k \equiv N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} \cdot 6 \pmod{10^{k+2}}$$

(так как по условию $N_k \equiv 6 \pmod{10}$ при всех k). Далее,

$$N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} \cdot 6 \equiv N_k + (b_k + 2c_k) 10^{k+1} \pmod{10^{k+2}}.$$

Требуется подобрать цифру c_k так, чтобы $(k+1)$-я цифра числа X_k^2 совпала с $(k+1)$-й цифрой числа X_k; тогда можно положить $N_{k+1} = X_k$ и продолжить процесс по индукции.

Это условие совпадения означает, что $b_k + 2c_k \equiv c_k \pmod{10}$, т. е. $c_k + b_k \equiv 0 \pmod{10}$, чего очевидным образом можно добиться.

Способ 2. *Построение числа N_k в явном виде.* В качестве X_n можно взять число, состоящее из последних n цифр числа 6^{5^n}. В самом деле,

$$(6^{5^n})^2 - 6^{5^n} = 6^{5^n}(6^{5^n} - 1).$$

Число 6^{5^n} делится на 2^{n+1}, а число $6^{5^n} - 1$ делится на 5^{n+1} в силу следующего частного случая *леммы Гензеля*:

Если $a \equiv 1 \pmod{p^k}$, *то* $a^{p^\ell} \equiv 1 \pmod{p^{k+\ell}}$ (положим $a = 6$, $p = 5$, $k = 1$, $\ell = n$).

Применение этого утверждения для решения олимпиадных задач — важная тема для кружка, см.: *Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Ященко И. В.* Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016. С. 33.

Теперь докажем *апериодичность*. Рассмотрим бесконечные влево последовательности десятичных цифр $\ldots a_k \ldots a_1$. Их можно естественным образом складывать и умножать. То, что получится, называется *кольцом целых* 10-*адических чисел*. Если же в этой последовательности ставить запятую и разрешать *конечное число знаков после запятой*, то получится *кольцо* 10-*адических чисел* (см. *Дынкин Е. Б., Успенский В. А.* Математические беседы. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. С. 67 и далее).

Кольцо обычных целых чисел можно изоморфно вложить в кольцо 10-адических целых чисел: каждому целому числу n нужно сопоставить бесконечную влево последовательность, крайние справа k членов которой при любом k составляют остаток от деления n на 10^k. Это вложение продолжается до изоморфного вложения поля рациональных чисел в кольцо 10-адических чисел. При этом рациональным числам отвечают периодические (возможно, с предпериодом) 10-адические дроби и только они. Доказательство утверждения «только» см. ниже в комментарии 3. В другую сторону доказательство по существу такое же, как для обычных периодических дробей.

Остаётся заметить, что если α — рациональное число, то равенство $\alpha^2 = \alpha$ возможно только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Для нашей последовательности последние два равенства не выполнены, а предыдущее выполнено. Значит, она соответствует иррациональному числу и потому апериодична. Задача решена.

Комментарии. 1. Аналогично 10-адическим числам определяются m-адические числа для любого натурального $m > 1$. Кольцо p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ при простом p является полем. Над полем $\mathbb{Q}_p$ можно строить матанализ, рассматривать логарифм и экспоненту, удовлетворяющие тем же функциональным уравнениям, что и в вещественном случае, и т. д.

2. Кольцо 10-адических чисел есть прямая сумма полей 2-адических и 5-адических чисел: $\mathbb{Q}_{10} = \mathbb{Q}_2 \bigoplus \mathbb{Q}_5$ (т. е. $\mathbb{Q}_{10}$ представляется в виде векторов с покоординатным сложением и умножением, причём первая координата принадлежит $\mathbb{Q}_2$, а вторая — $\mathbb{Q}_5$). *Идемпотент* есть элемент e такой, что $e^2 = e$. В любом поле есть два идемпотента: 0 и 1. Поэтому в кольце $\mathbb{Q}_{10}$ имеется четыре идемпотента: тривиальные $0 = (0, 0)$ и $1 = (1, 1)$ и нетривиальные $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Нашей последовательности отвечает идемпотент $e_2 = (0, 1)$, а аналогичной последовательности $\ldots 625$ — идемпотент $e_1 = (1, 0)$.

3. В «Математическом просвещении», сер. 2, вып. 5, с. 255 была предложена задача на близкую тему:

Докажите, что для любого натурального N найдётся такой номер n, что числитель несократимой дроби A_n/B_n, равной $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}$, делится на 2^N. (*Д. К. Фаддеев*[1])

Решение. В условии приведено разложение в ряд 2-адического логарифма для $\log(1 - x)$ при $x = 2$. Но $\log(1 - 2) = \log(-1)$ и $2\log(-1) = \log((-1)^2) = \log(1) = 0$, что и означает требуемое в задаче.

4. Отметим, что верен и факт, обратный использованному выше: если $\alpha = p/q$ — рациональное число, то его 10-адическое разложение периодично (возможно, с предпериодом). Действительно, при некотором m величина $\alpha \cdot 10^m$ имеет вид $x + p'/q'$, где x — целое, q' взаимно просто с 10, $p' < q'$. Покажем, что тогда p'/q' разлагается в чисто периодическую 10-адическую дробь. Поскольку 10 взаимно просто с q, то q делит $10^k - 1$ при некотором k. тогда $q = (10^k - 1)/t$ для некоторого натурального t. Отсюда $\alpha = x + r/(10^k - 1)$ для некоторого натурального r, $0 \leqslant r < 10^k - 1$.

Теперь заметим, что $-1 = \ldots 999 \ldots 9$. Отсюда

$$\begin{aligned} -1 &= 9\ldots 9\ (k \text{ девяток}) \cdot [\ldots (0\ldots 01) \ldots (0\ldots 01)] = \\ &= (10^k - 1) \cdot [\ldots (0\ldots 01) \ldots (0\ldots 01)] \end{aligned}$$

[1] Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989) — член-корреспондент АН СССР, профессор ЛГУ, специалист в области алгебры, теории чисел, вычислительной математики. Один из создателей школы, ныне носящей его имя (см. настоящий выпуск, с. 9–34).

(период $(0\dots01)$ содержит $(k-1)$ нуль и одну единицу). Поэтому

$$\dots(0\dots01)\dots(0\dots01)=\frac{-1}{10^k-1}.$$

Умножив обе части этого равенства на $r<10^k-1$, получаем, что 10-адическая дробь $r/(10^k-1)$ — чисто периодическая вида $\dots\bar r\dots\bar r\dots\bar r$, где $\bar r$ — результат дополнения r нулями слева до k-значного числа.

5. Заинтересованному читателю советуем обратиться к книге: *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

См. также: *Джамбетов Э. М.*, *Канель-Белов А. Я.*, *Шудуева И. С.* Свойства степенных вычетов натуральных чисел в различных системах счисления («Математическое образование», № 1(93), январь – март 2020 г., с. 46–50). (*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

8.10. Условие. Существует ли векторное пространство нильпотентных матриц некоторого порядка, произведения элементов которого порождают всю матричную алгебру? (Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^k=0$ для некоторого k.) (*П. Якобианов*)

Решение. Такое пространство можно найти среди матриц 3×3. Легко проверить, что при любых a и b матрица

$$\begin{pmatrix}0&a&0\\-b&0&a\\0&b&0\end{pmatrix}\tag{1}$$

нильпотентна, и такие матрицы образуют линейное пространство N. Несложно также проверить, что

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&0\\-b&0&a\\0&b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&0\\-b&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\tag{2}$$

В алгебре, порождённой пространством N, есть следующие *матричные единицы*

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Первая получается из матрицы (2) при $a=1$, $b=0$, вторая — из той же матрицы при $a=0$, $b=-1$. Третью и четвёртую матричные единицы можно получить из первых двух линейной комбинацией с матрицей (1) при различных значениях параметров. Среди произведений этих матриц есть все остальные матричные единицы, а значит, пространство N порождает полную матричную алгебру. (*И. Митрофанов*)

9.3. Условие. Узлы k-мерной целочисленной решётки раскрашены в ℓ цветов. Докажите, что найдётся прямоугольный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям решётки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решётки, где можно наверняка найти параллелепипед, в зависимости от k и ℓ. (*А. Я. Белов*)

Решение. *Верхняя оценка.* Покажем, что требуемая конструкция найдётся внутри куба $N \times \ldots \times N$ при достаточно большом N. Если $A \subseteq B$ — два конечных множества, назовём *плотностью* A в B отношение их мощностей $|A|/|B|$.

Лемма. *Пусть в клетчатом $(k+1)$-мерном кубе со стороной N есть подмножество X плотности λ. Тогда в кубе можно выбрать два параллельных k-мерных слоя так, что пересечение двух полученных сечений множества X, если их совместить внутри k-мерного куба, будет иметь в нём плотность больше чем $\lambda(\lambda - 1/(N-1))$.*

Доказательство. Выберем одну из координат. Соответствующее направление будем называть *вертикальным*, а множество клеток, у которых эта координата одинакова, будем называть *горизонтальным слоем*. Количество точек множества X на каждой из $M = N^k$ вертикальных линий обозначим через $a_1, \ldots, a_M$ соответственно. Тогда $a_1 + \ldots + a_M = \lambda NM$.

Число неупорядоченных пар (x_1, x_2), где точки x_1, x_2 принадлежат X и находятся на одной вертикали, можно оценить по неравенству о средних:

$$\frac{a_1(a_1-1)}{2} + \ldots + \frac{a_M(a_M-1)}{2} \geqslant \frac{\lambda^2 N^2 M - \lambda NM}{2}.$$

Значит, в какой-то паре слоёв не менее чем $\lambda(\lambda N - 1)M/(N-1)$ таких пар, а плотность пересечения больше чем $\lambda(\lambda - 1/(N-1))$. □

Плотность одного из цветов в кубе размерности k со стороной N составляет хотя бы $1/\ell$. Будем искать параллелепипед именно данного цвета. Положим

$$f(x) := x\left(x - \frac{1}{N-1}\right).$$

Пользуясь доказанной леммой, можно перейти к кубу с той же стороной, размерностью на 1 меньшей и плотностью $f(1/\ell)$. Таким образом, параллелепипед найдётся, если k итераций отображения f дадут положительную величину.

Это выполняется при достаточно больших N. Пусть $N > (2\ell)^{2^k}$, тогда индукцией по d получаем при $d \leqslant k$ оценку

$$f^d\left(\frac{1}{\ell}\right) > 2(2\ell)^{-2^d} > 0.$$

Нижняя оценка. Рассмотрим случайную раскраску куба со стороной N в ℓ цветов. Параллелепипедов будет всего

$$m = \left(\frac{N(N-1)}{2}\right)^k,$$

и каждый из них одноцветный с вероятностью $p = \ell^{-(2^k-1)}$. Если $mp < 1$, то заведомо существует раскраска без одноцветных параллелепипедов. Для этого можно взять, например, $N < \ell^{2^k/k}$. (*И. Митрофанов*)

Комментарий. По этой теме см. также статью: *Знак Е. И.* Разбиения целочисленных решёток и принцип Дирихле («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, с. 241–247) и комментарий А. Я. Канель-Белова к этой статье (там же, с. 248).

17.6 (в формулировке из выпуска 25, с. 169). Условие. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}$, $x^m + x^{-m}$ — ненулевые целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).

Решение. При $|x| = 1$ условие задачи равносильно тому, что x^n и x^m — корни шестой степени из 1, но тогда то же самое верно и для x. Далее считаем $|x| \neq 1$.

Пусть $x^m + x^{-m} = a$, $x^n + x^{-n} = b$. Если a или b равно ± 1 или ± 2, то получаем, что $|x| = 1$.

При целом $|a| > 2$ у уравнения $\lambda + \lambda^{-1} = a$ два различных решения, оба действительные и одного знака. А значит, у уравнения $z^m + z^{-m} = a$ ровно $2m$ различных комплексных решений. Модули любых двух решений либо равны, либо в произведении дают 1, а аргумент отношения любых двух решений имеет вид $2\pi k/m$ с целым k. Множество решений выглядит как два правильных m-угольника, гомотетичных с положительным коэффициентом.

Аналогичный факт верен и для решений уравнения $z^n + z^{-n} = b$.

Число x — общий корень многочленов $z^{2m} - az^m + 1$ и $z^{2n} - bz^n + 1$. Обозначим наибольший общий делитель этих двух многочленов через $P(z)$. Его вычисление по алгоритму Евклида показывает, что он приведённый с целыми коэффициентами. Допустим, x' — корень $P(z)$, отличный от x. Тогда

$$\frac{2\pi k}{m} = \arg\left(\frac{x'}{x}\right) = \frac{2\pi \ell}{n}$$

с целыми k и ℓ. Так как m и n взаимно просты, то у x и x' одинаковый аргумент. Значит, у многочлена $P(z)$ не более двух корней, и его степень 1 или 2.

В первом случае x — целое число, но тогда $x^n + x^{-n}$ не может быть целым при $|x| \neq 1$.

Во втором случае у $P(z)$ два корня с одинаковым аргументом и взаимно обратными модулями. Так как $P(z)$ имеет вещественные коэффициенты, оба корня тоже вещественные. Значит, корнями $P(z)$ являются числа x и $1/x$. Тогда по теореме Виета коэффициент в $P(z)$ при z (целое число) равен $-(x + 1/x)$. Поэтому и $x + 1/x$ — целое число.

Замечание. Без ограничения, что $x^n + x^{-n}$ и $x^m + x^{-m}$ не равны нулю, утверждение задачи не обязательно верно. Например, если

$$x = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},$$

то $x^3 + x^{-3} = 0$, $x^2 + x^{-2} = 1$, но $x + x^{-1} = \sqrt{3}$. (*И. Митрофанов*)

22.5в. Условие. Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: не существует.

Решение[2]. Пусть такой многочлен от двух переменных существует. Тогда его коэффициенты рациональны. Действительно, если многочлен имеет вид $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, то

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}(p(2,0) - 2p(1,0) + p(0,0)),\\
b &= \frac{1}{2}(p(1,1) - p(1,0) - p(0,1) + p(0,0)),\\
c &= \frac{1}{2}(p(0,2) - 2p(0,1) + p(0,0)),\\
f &= p(0,0),\\
d &= p(1,0) - p(0,0) - a,\\
e &= p(0,1) - p(0,0) - c.
\end{aligned}$$

Как известно, аффинным преобразованием с рациональными коэффициентами $(x, y) -> (x, y)$ можно привести такой многочлен к одной из следующих форм:

1) $Ax^2 + By^2 + C$, $AB > 0$ (эллиптический случай);
2) $A(x^2 - By^2) + C$, B — не квадрат целого числа (первый гиперболический случай);

[2] О решениях пп. а, б см. С. Б. Гашков, «Замечания к задачнику „Математического просвещения“», настоящий выпуск, с. 259–262.

3) $Axy + C$ (второй гиперболический случай);
4) $Ax^2 + y$ (невырожденный параболический случай);
5) $Ax^2 + C$ (вырожденный параболический случай);
6) x (линейный случай).

При указанном преобразовании решётка целочисленных точек переходит в некоторую решётку из точек с рациональными координатами. Эти точки можно представить в виде $z + mu + nv$, где z — фиксированная точка, u_1, u_2 — фиксированные векторы, m, n — произвольные целые числа. У векторов u_1, u_2 есть такие линейные комбинации w_1, w_2 с целыми коэффициентами, что вектор w_1 горизонтален, w_2 вертикален и их координаты целые. Положим $N = |w_1||w_2|$ и рассмотрим подрешётку, порождённую точкой z и векторами $|w_2|w_1$, $|w_1|w_2$. Применим гомотетию $(x, y) \to (kx, ky)$, где k — наименьший общий знаменатель координат точки z. Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из полученной решётки L. Тогда L состоит из всех целочисленных точек (x, y), для которых $(x, y) \equiv (x_0, y_0) \bmod (N)$.

На решётке L многочлен P имеет одну из перечисленных форм. Мы покажем, что либо многочлен не инъективен, либо он не принимает значений из некоторого луча. Эти свойства не меняются при умножении нашего многочлена на ненулевую константу. Умножив его на подходящее число, можно считать A натуральным числом, а C целым. Обозначим полученный многочлен через $P(x, y)$ и разберём вышеперечисленные случаи.

Случаи 1 *и* 5. Многочлен P не принимает достаточно далёких от нуля отрицательных значений.

Случай 2. Представим многочлен в виде

$$P(x, y) = A(x^2 - By^2 - 1) + (C + A).$$

Поскольку B не является полным квадратом, уравнение Пелля $x^2 - By^2 = 1$ имеет решение в натуральных числах (x_1, y_1). Линейное преобразование T, заданное матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 & By_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix},$$

является биекцией на решётке всех целочисленных точек и сохраняет значения многочлена P. Оно индуцирует биекцию на $(\mathbb{Z}/N)^2$, которая при возведении в некоторую степень $d > 1$ даёт тождественное отображение. Следовательно, T^d переводит в себя решётку L. При этом T^d не имеет неподвижных точек, кроме начала координат. Поэтому любая точка из L

переходит в другую точку из L с тем же значением P. Следовательно, P не биективен.

Случай 3. Рассмотрим произвольную точку $(x, y) \in L$. Если $x = 0$, то изменение другой координаты не меняет значение многочлена и утверждение доказано. Если $x \neq 0$, положим $q = N + 1$. Тогда $qx_0 \neq 1$, $qx \equiv x \bmod (N)$, $qy \equiv y \bmod (N)$. Следовательно, точки (qx, y) и (x, qy) различны и принадлежат L. При этом $A \cdot qx \cdot y + C = A \cdot x \cdot qy + C$, т. е. P не биективен.

Случай 4. Возьмём $N + 1$ точек решётки L с различными значениями x и одинаковым значением y. Хотя бы в двух из этих точек z_1, z_2 значения P сравнимы по модулю N. Прибавив в точке z_1 к координате y величину $P(z_2) - P(z_1)$, кратную N, получим точку $z' \in L$, для которой $P(z') = P(z_2)$. Следовательно, P не биективен.

Случай 6. Многочлен P не зависит от y и потому принимает каждое своё значение бесконечно много раз. (Это относится и к рассмотренному выше случаю 5.) Утверждение доказано.

Аналогичные рассуждения показывают, что и в трёхмерном пространстве искомый многочлен не существует.

(*А. Я. Канель-Белов, Л. Радзивиловский*)

25.1. Условие. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: 56.

Решение. *Оценка*. После 50 месяцев у аспиранта набирается достаточно работ «нобелевского уровня». Чтобы на последнюю работу остальные 9 аспирантов сделали 50 ссылок, требуется еще по крайней мере 6 месяцев.

Пример. Аспиранты цитируют все ранее вышедшие работы своих коллег.

Список литературы

[1] *Крылов И. А.* Кукушка и петух (басня).

(*А. Я. Канель-Белов*)

Опечатки, замеченные в выпуске 7

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
187	3 снизу	окружность	окружность или прямая
187	1 снизу	окружности	окружности или прямой

Опечатки, замеченные в выпуске 25

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
146	9 сверху	аналогичные мальчиков	аналогичные списки мальчиков
168	14 сверху	BCA	BAC

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:
— фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,
— место работы/обучения,
— электронный адрес для публикации.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Учебно-методическое издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 26

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 13.07.2020 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Тираж 800 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+