

**В.И. Ванько, О.В. Ермошина,
Г.Н. Кувыркин**

Вариационное исчисление и оптимальное управление

#15

*Комплекс учебников удостоен
Премии Правительства Российской Федерации
в области науки и техники за 2003 год*

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Выпуск 15

Комплекс учебников

«Математика в техническом университете»

из 21 выпуска

1. Введение в анализ
2. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
3. Аналитическая геометрия
4. Линейная алгебра
5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
6. Интегральное исчисление функций одного переменного
7. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
8. Дифференциальные уравнения
9. Ряды
10. Теория функций комплексного переменного
11. Интегральные преобразования и операционное исчисление
12. Дифференциальные уравнения математической физики
13. Приближенные методы математической физики
14. Методы оптимизации
15. Вариационное исчисление и оптимальное управление
16. Теория вероятностей
17. Математическая статистика
18. Случайные процессы
19. Дискретная математика
20. Исследование операций
21. Математическое моделирование в технике

В.И. ВАНЬКО, О.В. ЕРМОШИНА, Г.Н. КУВЫРКИН

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Под редакцией

д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Рекомендовано Министерством образования

Российской Федерации

*в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

4-е издание,
исправленное и дополненное



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГТУ им. Н. Э. Баумана

2 0 1 8

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.151.5

B17

Рецензенты:

профессор Н.А. Бобылев, профессор Р.А. Васин

Ванько, В. И.

B17 Вариационное исчисление и оптимальное управление : учебник для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 488 с. : ил. — (Математика в техническом университете ; вып. 15).

ISBN 978-5-7038-3845-7

ISBN 978-5-7038-4876-0 (вып. 15)

Наряду с изложением основ классического вариационного исчисления и элементов теории оптимального управления рассмотрены прямые методы вариационного исчисления и методы преобразования вариационных задач, приводящие, в частности, к двойственным вариационным принципам. На примерах из физики, механики и техники показана эффективность методов вариационного исчисления и оптимального управления для решения прикладных задач.

Для студентов и аспирантов технических университетов, а также для инженеров и научных работников, специализирующихся в области прикладной математики и математического моделирования.

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.151.5

Учебное издание

Математика в техническом университете

Выпуск 15

Ванько Вячеслав Иванович

Ермошина Олеся Владимировна

Кувыркин Георгий Николаевич

**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 25.06.2018. Тираж 350 экз. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 30,75. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1. press@bmstu.ru www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана. 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1. baumanprint@gmail.com

© Ванько В.И., Ермошина О.В.,
Кувыркин Г.Н., 1999

© Ванько В.И., Ермошина О.В., Ку-
выркин Г.Н., 2018, с изменениями

© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

ISBN 978-5-7038-4876-0 (вып. 15)

ISBN 978-5-7038-3845-7

...Мне казалось, что лучше пересказать удовлетворившие меня изложения различных вопросов механики, чем в погоне за ложной оригинальностью ставить себя в странное положение не повторять умных формулировок лишь на том основании, что они были кем-то до тебя сказаны.

Н.Г. Четаев. Теоретическая механика

ПРЕДИСЛОВИЕ

В истории развития естественных наук четко прослеживается стремление свести количество исходных положений данной науки к минимуму, и лучше всего к одному основополагающему принципу, который, как в зерне, заключал бы в себе все содержание рассматриваемой области знаний. Например, из принципа возможных перемещений Лагранжа вытекают уравнения равновесия системы материальных точек и абсолютно твердых тел. Соединив принцип Лагранжа с принципом Даламбера, получим более общий принцип механики, следствиями из которого являются уравнения движения.

Упомянутые принципы естественным образом обобщаются на модели сплошной среды — деформируемые твердые тела, жидкости и газы.

Одна из трудностей вычислительного характера, возникающих при реализации решения задачи, например, о нахождении напряженно-деформированного состояния сплошной среды либо некоторой конструкции, — высокий порядок производных искомых величин в уравнении движения (равновесия). Кроме того, вывод самих уравнений движения и постановка краевых условий зачастую являются самостоятельной проблемой.

В настоящее время достаточно распространена следующая схема постановки задач о состоянии деформируемых тел. На основе подходящего (в части IV мы обсуждаем этот вопрос) вариационного принципа выписывают функционал (чаще всего — некоторое интегральное соотношение). С помощью правил и приемов вариационного исчисления получают уравнения движения и естественные краевые условия.

Последнее обстоятельство является замечательным фактом: «хороший» вариационный принцип содержит всю информацию о природе изучаемого явления. Однако если получен функционал и известны его экстремальные свойства, до уравнений движения (равновесия) дело не доводят, а строят последовательность функций, предел которой доставляет функционалу стационарное или экстремальное значение, например минимизирует значение функционала. Этот способ получения приближенного решения является наиболее простым и экономичным.

Авторы выпуска XV серии «Математика в техническом университете» ставят перед собой следующие задачи:

- изложить основы классического вариационного исчисления, подчеркнув при этом особенности и специфику вариационных задач как задач, обобщающих проблему поиска экстремумов функций многих переменных без ограничений и с таковыми;
- обсудить основные идеи и методологию теории оптимального управления Понтрягина и метода динамического программирования Беллмана;
- изложить основную идею преобразования вариационных задач (выявление двойственных вариационных задач) и построения на их основе аппроксимаций искомого решения.

В части IV приведены примеры использования вариационных принципов при постановке и решении различных научно-технических проблем. На основе принципа Гамильтона получены известные уравнения математической физики, уравнения движения идеальной жидкости. Подробно рассмотрена аэродинамическая задача Ньютона (представлено решение задачи именно методами вариационного исчисления). Отмечена выдающаяся роль А.Н. Крылова, который не только дословно перевел великий труд И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», но и снабдил комментариями и подробными решениями многие утверждения Ньютона. Подчеркнем, что современное *вариационное* решение аэродинамической задачи принадлежит Крылову.

Изложен вариационный подход к задачам на собственные значения, подробно изучены задачи о продольном изгибе упругих стержней. Рассмотрены динамические и нестандартные задачи термомеханики.

В конце отдельных глав приведены задачи для самостоятельного решения в целях проверки усвоения материала.

Основные источники (монографии, учебники, журнальные статьи и задачки) помещены в списках литературы в алфавитном порядке.

Мы считаем своим приятным долгом выразить признательность профессору А.Н. Канатникову, чья критика во многом способствовала совершенствованию изложения, доцентам А.Д. Герман, которая любезно предоставила нам записи своих лекций по вариационному исчислению, и Е.В. Пилявской, активно сотрудничавшей с нами при написании дополнений, включенных в это издание (2.6–2.9, 3.4, 3.5, 16–18).

Авторы будут благодарны всем, кто выскажет свои замечания по книге.

Задания для самопроверки

Перед изучением данного выпуска полезно убедиться, что читатель готов к усвоению материала, изложенного в учебнике. Для этого предлагаются следующие задания.

1. Какие множества называют: а) замкнутыми; б) открытыми; в) ограниченными; г) компактными? Что называют диаметром множества? [I]

2. Дайте определение точной верхней (нижней) грани числового множества. В чем различие между $\min f(x)$ и $\inf f(x)$ для действительной функции $f(x)$ одного действительного переменного, определенной на некотором промежутке числовой прямой? [I]

3. Напишите формулу Тейлора: а) для функции одного действительного переменного; б) для функции многих переменных. [II], [V]

4. Как проверить, является ли функция одного действительного переменного выпуклой вверх (вниз)? [II]

5. Что такое: а) линейное пространство; б) евклидово пространство; в) нормированное пространство? Приведите пример нормы в линейном пространстве. Как вводят в $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное умножение? [IV]

6. Как найти собственные значения и собственные векторы: а) линейного оператора в конечномерном линейном пространстве; б) квадратной матрицы? Что такое характеристическое уравнение матрицы? [IV]

7. Какую квадратичную форму называют положительно (отрицательно) определенной? Сформулируйте критерий Сильвестра. [IV]

8. Какую функцию многих переменных называют: а) непрерывной по совокупности переменных; б) непрерывной по части переменных?

9. Что называют условным экстремумом функции многих переменных? Как можно найти точки условного экстремума? Что такое множители Лагранжа? [V]

10. При каких условиях интеграл, зависящий от параметра, есть дифференцируемая функция? [VI]

11. Что называют: а) кратным интегралом; б) криволинейным интегралом; в) поверхностным интегралом? Напишите: а) формулу Грина; б) формулу Остроградского — Гаусса; в) формулу Стокса. В каком случае значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования? [VII]

12. Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n -го порядка. Что называют его: а) частным решением; б) общим решением? Как для этого уравнения ставится задача Коши? [VIII]

13. Что такое первый интеграл системы ОДУ? Как ОДУ n -го порядка можно преобразовать в систему n ОДУ первого порядка? [VIII]

14. Что называют нормальной системой ОДУ? Как для однородной нормальной системы линейных ОДУ построить фундаментальную систему решений? [VIII]

15. Пусть дана нормальная система ОДУ. Что называют ее: а) решением; б) фазовой траекторией; в) интегральной кривой? При каких условиях фазовые траектории системы не пересекаются? [VIII]

16. Что такое сходящийся числовой ряд? При каких условиях данный функциональный ряд сходится на данном множестве точек: а) поточечно; б) равномерно? [IX]

17. При каких условиях на периодическую функцию можно утверждать, что ее ряд Фурье сходится к ней: а) в данной точке; б) на данном промежутке? [I], [IX]

18. Дайте определение: а) банахова пространства; б) гильбертова пространства. Что называют рядом Фурье элемента гильбертова пространства? Напишите неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. [IX]

19. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля. Найдите собственные значения и собственные функции оператора Штурма — Лиувилля в случае граничных условий в виде линейной комбинации функции и ее производной. [XI], [XII]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\blacktriangleleft$ и $\blacktriangleright$	— начало и окончание доказательства
$\#$	— окончание примера, замечания
$a \in A, A \ni a$	— элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) I-1.1
$a \notin A$	— элемент a не принадлежит множеству A I-1.2
$A \subseteq B, B \supseteq A$	— подмножество A включено в множество B или совпадает с ним I-1.2
$\bar{V}$	— замыкание множества V в нормированном или метрическом пространстве XIII
∂V	— граница множества V в нормированном или метрическом пространстве I, XIII
$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел I-1.2
$\mathbb{R}$	— множество действительных чисел I-1.3
$\mathbb{C}$	— множество комплексных чисел I-4.3, X
$\mathbb{R}^n$	— линейное арифметическое пространство IV
$AB, AB $	— отрезок, соединяющий точки A и B , и его длина III
$\mathbf{a}, a$	— вектор (элемент линейного пространства) и столбец его координат IV
$ \mathbf{a} $	— длина (модуль) вектора $\mathbf{a}$ III, IV
$\ \mathbf{a}\ $	— норма вектора $\mathbf{a}$ в нормированном пространстве IV
$\mathbf{0}$	— нулевой вектор III, IV
(a, b)	— скалярное произведение векторов a и b III, IV
A^T	— матрица, транспонированная к A III

$\det A$	— определитель матрицы A III
$\sum_{k=1}^n a_k$	— сумма n слагаемых $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ I-2.6
$k = \overline{1, n}$	— число k принимает последовательно все значения из множества $\mathbb{N}$ от 1 до n включительно I-2.6
$f(a), f(x) _{x=a}$	— значение функции $f(x)$ в точке a I-2.1
$\mathbf{x}(t)$	— вектор-функция скалярного аргумента t II
$f(\mathbf{x})$	— векторная функция векторного аргумента (функция многих переменных) V
$\text{grad } f(\mathbf{x})$	— градиент скалярной функции $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x}$ V
$\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}'(t)$	— производная вектор-функции скалярного аргумента t II
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, f'_x, f'_x(x, y)$	— частная производная функции $f(x, y)$ по переменному x V
$J[y]$	— функционал, определенный на некотором множестве функций $y(x)$; значение функционала на функции (в точке) $y(x)$ 1.2
$\ \cdot\ _C, \ \cdot\ _{C^1}$	— нормы в нормированном пространстве $C^1[a, b]$ 1.2
$C[a, b]$	— линейное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций 6.5
$C^n[a, b]$	— нормированное пространство функций, имеющих непрерывную n -ю производную IV-1.2
$L_2(\Omega)$	— гильбертово пространство функций, суммируемых на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с квадратом IX
$\delta y, \delta y(x)$	— вариация аргумента функционала, значение вариации в точке x 1.2
$\delta y' \equiv (\delta y)'$	— производная от вариации δy , если вариация изохронна
$\delta J[y, \delta y]$	— (первая) вариация функционала J в точке y 1.2

$\delta^2 J[y, \delta y]$	— вторая вариация функционала J в точке y 5.2
$I^*[x, u]$	— вспомогательный функционал, соответствующий функционалу $I[x, u]$ 7.2
$H(t, x, p)$	— функция Гамильтона 7.2, 7.3
$H(\psi, x, u)$	— функция Понтрягина 7.2, 7.3
∇	— оператор Гамильтона VII
Δ	— оператор Лапласа VII
$D(A)$ и $R(A)$	— область определения и область значений оператора A 10.2

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произноше- ние	Начертание	Произношение
A a <i>A a</i>	а	N n <i>N n</i>	эн
B b <i>B b</i>	бэ	O o <i>O o</i>	о
C c <i>C c</i>	цэ	P p <i>P p</i>	пэ
D d <i>D d</i>	дэ	Q q <i>Q q</i>	ку
E e <i>E e</i>	е	R r <i>R r</i>	эр
F f <i>F f</i>	эф	S s <i>S s</i>	эс
G g <i>G g</i>	же	T t <i>T t</i>	тэ
H h <i>H h</i>	аш	U u <i>U u</i>	у
I i <i>I i</i>	и	V v <i>V v</i>	вэ
J j <i>J j</i>	йот	W w <i>W w</i>	дубль-вэ
K k <i>K k</i>	ка	X x <i>X x</i>	икс
L l <i>L l</i>	эль	Y y <i>Y y</i>	игрек
M m <i>M m</i>	эм	Z z <i>Z z</i>	зэт

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
Η η	эта	O ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо «йот» иногда говорят «жи»).

ЧАСТЬ I

Классическое вариационное исчисление

Вариационное исчисление в широком смысле — это учение об изменении функций, и в качестве такового оно оказывается продолжением дифференциального и интегрального исчислений.

При таком понимании, например, исследования Пуанкаре о проблеме трех тел образуют главу вариационного исчисления, поскольку в них Пуанкаре из известных траекторий, обладающих некоторым свойством, с помощью принципа варьирования получил новые траектории с нужными свойствами.

Д. Гильберт

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Разнообразие задач, приводящих к поиску максимума или минимума некоторой интегральной величины, весьма велико. Это отражает мудрое высказывание великого Эйлера: «В мире нет ничего, в чем не был бы виден смысл какого-либо максимума или минимума».

1.1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам

Примеры успешного решения экстремальных проблем можно найти уже в древней истории.

Пример 1.1 (задача Дидоны). В IX веке до н.э. финикийская царевна Дидона и несколько ее спутников, спасаясь от преследования тирской знати, бежали из г. Тира и высадились на африканском берегу Средиземного моря. Решив поселиться именно здесь, Дидона упросила местных жителей отдать в ее распоряжение участок земли, который можно охватить шкурой быка (чувствуете двусмысленность постановки вопроса?). Простодушный правитель тех мест не понял всей глубины замысла и согласился отдать беглецам участок земли, площадь которого, по его разумению, должна равняться площади расправленной шкуры быка. Дидона же после заключения соглашения разрешила шкуру быка на тонкие полоски, связала их в длинный ремень и ограничила им довольно значительную территорию на берегу моря. Так был заложен город Карфаген, который впоследствии был-таки разрушен римлянами.

Задача, которую поставила Дидона, может быть сформулирована следующим образом. Найти такую кривую заданной длины L (L в упомянутой выше истории — длина ремня

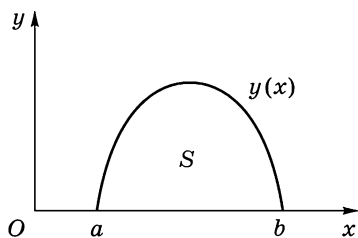


Рис. 1.1

из шкуры быка), которая ограничивает на плоскости фигуру наибольшей площади.

Формализуем задачу. Считая берег моря прямолинейным, расположим прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с берегом моря. Предположим, что прямолинейная (морская) часть границы участка земли есть отрезок $[a, b]$ оси Ox , а криволинейная часть является графиком *гладкой* (т. е. непрерывно дифференцируемой) *функции* $y = y(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ (рис. 1.1). При этом

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (1.1)$$

При сделанных предположениях длина L криволинейной части границы вычисляется по формуле [VI]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad (1.2)$$

а площадь S земельного участка — по формуле

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (1.3)$$

Итак, требуется найти такую гладкую функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2) (L фиксировано) и обеспечивает интегралу (1.3) максимальное значение. #

Задачи подобного рода ставили и решали (своими, оригинальными способами) еще Аристотель и Архимед. Так, Архимед установил замечательное свойство окружности: из всех замкнутых кривых, длины которых равны некоторому заданному значению, окружность охватывает наибольшую площадь; из всех замкнутых кривых, которые охватывают заданную площадь, окружность имеет наименьшую длину.

Несмотря на наличие древних precedентов, моментом рождения вариационного исчисления как математической дисциплины принято считать 1696 год, когда в июньском номере журнала «Acta Eruditorum» появилось письмо И. Бер-

нулли, в котором он писал: «Остроумнейших математиков всего мира приветствую я, Иоганн Бернулли! Людей высокого ума нельзя ничем более привлечь к работе, как указать им трудную и вместе с тем полезную задачу, решением которой возможно и славу приобрести, и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность ученого мира, если я, по примеру Паскаля, Ферма и других великих, предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют, и как велика сила их ума. Если кто-нибудь найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу».

Вскоре были даны три решения задачи И. Бернулли: первое принадлежало Якову Бернулли, второе — Лопиталю, третье появилось в английском научном журнале без подписи автора, но И. Бернулли без труда узнал в авторе Исаака Ньютона по его «львиным когтям».

Вот задача, предложенная И. Бернулли.

Пример 1.2 (задача о брахистохроне). В вертикальной плоскости через две данные точки O и B , не лежащие на одной вертикали, провести кривую (т.е. найти ее уравнение), двигаясь по которой материальная точка под действием силы тяжести переместится из верхней точки в нижнюю за минимальное время (рис. 1.2). Ту же задачу можно сформулировать и так: как спроектировать крышу дома, чтобы капли дождя скатывались с конька крыши за наименьший промежуток времени.

Предположим, что начальная скорость падающей точки равна нулю, а силы трения отсутствуют. К моменту, когда расстояние от начального положения точки O по вертикальной оси Oy прямоугольной системы координат Oxy будет равно y , точка потеряет потенциальную энергию, которая уменьшится на mgy (m — масса точки, g — ускорение свободного падения). Кинетическая энергия при этом увеличится на $mv^2/2$ (v — скорость точки). В силу закона сохранения энергии (ведь трение отсутствует) имеем

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0,$$

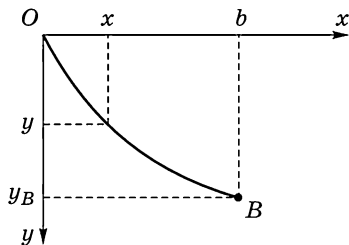


Рис. 1.2

откуда

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Далее, предполагая, что траектория движения есть кривая $y = y(x)$, причем $y(x)$ — гладкая функция, определенная на отрезке $[O, b]$, получаем

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2} dx}{dt},$$

где ds — дифференциал длины дуги кривой; t — время. Поэтому

$$\sqrt{2gy} dt = \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

и мы приходим к уравнению

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Из этого уравнения находим время, необходимое для перехода из точки O в точку B :

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (1.4)$$

Известные координаты начальной и конечной точек дают краевые условия для функции $y(x)$:

$$y(0) = 0, \quad y(b) = y_B. \quad (1.5)$$

Таким образом, нужно найти гладкую функцию $y(x)$, для которой $t \rightarrow \min$ при краевых условиях (1.5).

Пример 1.3 (задача о преломлении света). Согласно принципу Ферма, луч света, выходящий из точки A и попадающий в точку B , избирает путь, время перехода по которому является наименьшим. В однородной среде скорость света постоянна, а свет распространяется по прямым. Если же среда неоднородна, то скорость света изменяется от точки к точке, а траектории лучей света уже не будут прямыми. Пусть средой является атмосфера. Поскольку плотность воздуха зависит от высоты y над уровнем моря, то правомерно предположить, что и скорость света v зависит от y и выражается с помощью известной функции $v(y)$. Определим траекторию луча света из

данной точки A в данную точку B . В вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B , выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox была горизонтальна и расположена на уровне моря. Нам известны координаты $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$. Считаем, что луч света распространяется по кривой, являющейся графиком гладкой функции $y(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ (рис. 1.3).

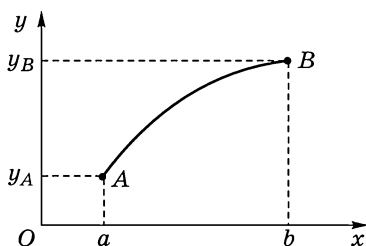


Рис. 1.3

При сделанных предположениях имеем

$$v(y) = \frac{ds}{dt},$$

где $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ — дифференциал длины дуги кривой $y = y(x)$. Поэтому

$$dt = \frac{ds}{v(y)},$$

и время, необходимое для перехода света из точки A в точку B , выражается интегралом

$$dt = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(y)} dx. \quad (1.6)$$

Задача состоит в определении такой гладкой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям $y(a) = y_A$, $y(b) = y_B$, что интеграл (1.6) получает наименьшее значение.

Сравнив (1.6) и (1.4), отметим, что задача о брахистохроне — частный случай задачи о преломлении света. Этот факт, отмеченный впервые И. Бернулли, представляет собой так называемую оптико-механическую аналогию*.

Пример 1.4 (задача о минимальной поверхности вращения). Пусть требуется в плоскости xOy соединить точки $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$ кривой так, чтобы боковая поверхность

* См.: Курант Р., Гильберт Д. (Здесь и далее в подстрочных библиографических ссылках указаны фамилии авторов работ, приведенных в списке литературы в конце книги.)

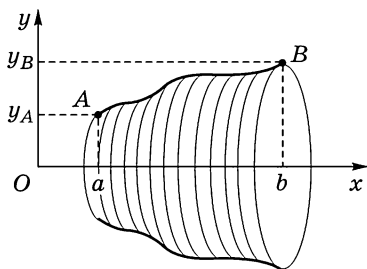


Рис. 1.4

тела, полученного от вращения этой кривой вокруг оси Ox , имела наименьшую площадь (рис. 1.4).

Предполагаем, что искомая кривая является графиком гладкой функции $y(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$. Вспомнив формулу для площади S боковой поверхности тела вращения [IV], получим задачу

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min \quad (1.7)$$

с краевыми условиями $y(a) = y_A$, $y(b) = y_B$.

Пример 1.5 (задача о геодезических линиях). На поверхности, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, проведем кривую, соединяющую две точки A и B этой поверхности и имеющую наименьшую длину (рис. 1.5).

Наименьшие по длине линии между двумя точками некоторой поверхности являются *геодезическими линиями* этой поверхности. Например, геодезическими линиями плоскости являются прямые, геодезическими линиями на сфере — дуги большого круга.

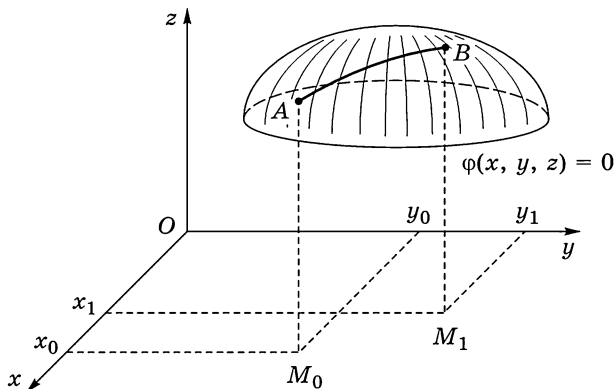


Рис. 1.5

Предположим, что *поверхность* $\varphi(x, y, z) = 0$ является *гладкой*, а искомая кривая может быть задана уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [a, b]$, с помощью гладких функций $y(x)$ и $z(x)$. Тогда ее длина L равна:

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dx. \quad (1.8)$$

Задача свелась к определению таких гладких на отрезке $[a, b]$ функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, что

$$\varphi(x, y(x), z(x)) \equiv 0,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

$$z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1,$$

а интеграл (1.8) принимает минимальное значение. #

Оригинальность сформулированных задач в том, что неизвестными в них являются функции, которые должны сделать значение интеграла наименьшим.

1.2. Основные определения

Пусть задано некоторое множество M функций. **Функционалом** J на M называют *отображение* $J: M \rightarrow \mathbb{R}$ множества M в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Функции из области определения M данного функционала будем называть **допустимыми функциями**.

Приведем некоторые типичные примеры функционалов:

- на множестве M всех функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, можно задать функционал формулой $J[y] = y(0)$;
- на множестве $M = C^1[a, b]$ интеграл

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx,$$

представляющий собой длину кривой $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, задает функционал;

• на том же множестве $M = C^1[a, b]$ можно определить функционал с помощью формулы

$$J[y] = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx}$$

(отношение интегралов представляет собой абсциссу центра масс кривой $y = y(x)$ [VI]).

Замечание 1.1. Уже по приведенным примерам видно, что интеграл, с помощью которого задается функционал, может быть достаточно сложным. Упрощая запись, в таких интегралах в подынтегральном выражении опускают аргументы неизвестной функции. Например, один из указанных выше интегралов записывают следующим образом:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

В дальнейшем будем придерживаться этого правила, а подробную запись использовать лишь в отдельных случаях, когда требуется подчеркнуть характер функциональной зависимости.

Область определения M функционала может иметь различную структуру. Предположим, что M — *нормированное пространство*, *норму* произвольного элемента x в нем обозначим $\|x\|$. Если в данном нормированном пространстве рассматриваются разные нормы, то их будем различать добавлением индекса, например $\|x\|_{\mathcal{E}}$. Приведем примеры.

Пример 1.6. а. *Банахово пространство* $C[a, b]$ функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|f\|_C = \max_{[a, b]} |f(x)|.$$

б. *Банахово пространство* $C^1[a, b]$ функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$. Норму в этом пространстве можно определить так:

$$\|f\|_{C^1} = \max_{[a,b]} \{|f(x)| + |f'(x)|\}.$$

в. *Гильбертово пространство* $L_2[a, b]$ функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. Нормой в этом пространстве является

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}. \quad \#$$

При изучении функционалов вводят ряд понятий, аналогичных соответствующим понятиям для функций: непрерывность, дифференцируемость, экстремум и др.

Если функционал $J[y]$ задан на линейном пространстве L и представляет собой *линейную форму* (линейную функцию) на этом пространстве, т. е. для любых $y_1, y_2 \in L$ и любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$J[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 J[y_1] + \alpha_2 J[y_2],$$

то функционал называют *линейным*.

Пример 1.7. Функционалы

$$J_1[y] = \int_a^b y(x) dx, \quad J_2[y] = y(0)$$

линейные, а функционал

$$J_3[y] = \int_a^b (1 + y(x))^2 dx$$

таковым не является. $\#$

Сложность вариационного исчисления, да и ряда других примыкающих математических дисциплин, состоит в том, что функции, сопоставляющие аргументу некоторое значение, сами рассматриваются как аргументы других отображений — функционалов. При этом характер зависимости, которую функция представляет, не является существенным. Учитывая эту сложность, мы в дальнейшем будем называть точками функции, рассматриваемые как элементы некоторого множества (как правило, нормированного пространства)

и как аргументы некоторого функционала. Это аналогично тому, как мы часто называем точкой аргумент действительной функции действительного переменного.

В нормированном пространстве можно ввести понятия окрестности точки и непрерывности отображения [IX], которые аналогичны соответствующим понятиям для числовых функций [I]. Так, ε -окрестностью точки y_0 нормированного пространства N называют множество $O_\varepsilon(y_0) = \{y \in N: \|y - y_0\| < \varepsilon\}$. Если в данном нормированном пространстве рассматриваются несколько норм, то каждой норме соответствует своя ε -окрестность фиксированной точки пространства.

Рассмотрим банахово пространство $C^1[a, b]$, введенное в примере 1.6, б. Наряду с ранее указанной нормой $\|\cdot\|_{C^1}$ в этом пространстве часто используют и другую норму:

$$\|y\|_C = \max_{[a,b]} |y(x)|.$$

Отметим, что с нормой $\|\cdot\|_C$ линейное пространство $C^1[a, b]$ уже не является банаховым.

Пусть ε — положительное число. **Сильной ε -окрестностью функции** $y_0 \in C^1[a, b]$ назовем множество функций $y \in C^1[a, b]$, для которых

$$\|y - y_0\|_C = \max_{[a,b]} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon.$$

Слабой ε -окрестностью той же функции назовем множество функций $y_0 \in C^1[a, b]$, для которых

$$\|y - y_0\|_{C^1} = \max_{[a,b]} \{|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y'_0(x)|\} < \varepsilon.$$

Из определений ясно, что функция $y(x)$, попавшая в слабую ε -окрестность функции $y_0(x)$, попадает и в сильную ε -окрестность этой же функции. Другими словами, слабая ε -окрестность всегда содержится в сильной ε -окрестности.

Функционал $J[y]$, определенный на нормированном пространстве M , называют **непрерывным в точке** $y_0 \in M$, если для всякого числа $\delta > 0$ существует такая ε -окрестность точки y_0 , что для любой точки y из этой окрестности выполнено неравенство

$$|J[y] - J[y_0]| < \delta.$$

В нормированном пространстве M функций выберем некоторую функцию $y_0(x)$, и пусть $y(x)$ — произвольная функция

из M . Разность $y(x) - y_0(x) = \delta y(x)$ называют **вариацией функции** $y_0(x)$. Сразу подчеркнем отличие понятия вариации от приращения функции в точке. Приращение функции в точке x_0 есть число, равное разности двух значений функции, а вариация — это функция, равная разности двух функций, рассматриваемых в качестве аргумента функционала. Для данного функционала $J[y]$ с областью определения M и данной функции $y \in M$ будем называть вариацию δy этой функции **допустимой вариацией**, если $y + \delta y \in M$. Для дифференцируемых функций следует различать производную вариации $\delta y' = (\delta y)'$ и вариацию производной $\delta(y')$. Значением первого понятия может быть лишь функция, являющаяся производной допустимой вариации, а значением второго — любая допустимая вариация.

Рассмотрим приращение функционала $J[y]$, определенного на нормированном пространстве $C^1[a, b]$ в точке y , соответствующее вариации (приращению аргумента) δy :

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]. \quad (1.9)$$

Пусть его можно представить как сумму

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y] = J_1[y, \delta y] + o(\delta y), \quad (1.10)$$

где $J_1[y, \delta y]$ — функционал, линейный относительно δy , а $o(\delta y)$ — функционал, являющийся бесконечно малой величиной более высокого порядка по сравнению с $\|\delta y\|$ при $\delta y \rightarrow 0$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C^1}$ в $C^1[a, b]$, т. е.

$$\frac{|o(\delta y)|}{\|\delta y\|_{C^1}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta y\| \rightarrow 0.$$

Тогда функционал $J[y]$ называют **дифференцируемым в точке** y , а линейный функционал $J_1[y, \delta y]$ — **сильным дифференциалом** (**дифференциалом Фреше**).

Понятие дифференцируемости функционалов аналогично понятию дифференцируемости функций. Функция $f(x)$ одного действительного переменного дифференцируема в точке x , если ее приращение $\Delta f(x)$ в этой точке можно представить в виде [II]

$$\Delta f(x) = A \Delta x + o(\Delta x),$$

где A не зависит от Δx , а $o(\Delta x)/\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Обратим внимание на то, что в этом представлении первое слагаемое $A\Delta x$ линейно относительно приращения Δx . Коэффициент A первого слагаемого представляет собой производную $f'(x)$ функции в точке x .

Первой вариацией $\delta J[y, \delta y]$ функционала J в точке y называют предел

$$\delta J[y, \delta y] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[y + \alpha \delta y] - J[y]}{\alpha} = \left. \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0}. \quad (1.11)$$

Этот предел представляет собой функционал, который каждой вариации δy (при фиксированном y) ставит в соответствие число. Если этот функционал линеен (по δy), то его называют *слабым дифференциалом (дифференциалом Гато)* в точке y .

Замечание 1.2. В вариационном исчислении часто под первой вариацией понимают то, что мы назвали дифференциалом Гато. Другими словами, считают, что первая вариация функционала линейна относительно вариации функции.

Теорема 1.1. Если функционал $J[y]$ дифференцируем в точке y , то его дифференциал Гато в точке y существует и совпадает с дифференциалом Фреше.

◀ Выберем некоторую вариацию δy в точке y и вычислим предел

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[y + \alpha \delta y] - J[y]}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J_1[y, \alpha \delta y] + o[\alpha \delta y]}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha J_1[y, \delta y]}{\alpha} + 0 = J_1[y, \delta y]. \end{aligned}$$

Здесь второе равенство справедливо в силу дифференцируемости $J[y]$, третье — в силу линейности J_1 относительно δy . При этом следует учесть, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left| \frac{o(\alpha \delta y)}{\alpha} \right| = \|\delta y\| \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left| \frac{o(\alpha \delta y)}{\|\alpha \delta y\|} \right| = \|\delta y\| \cdot 0 = 0,$$

так как при $\alpha \rightarrow 0$

$$\|\alpha \delta y\| = |\alpha| \|\delta y\| \rightarrow 0.$$

Доказанное равенство показывает, что первая вариация $\delta J[y, \delta y]$ дифференцируемого функционала представляет собой функционал, линейный по δy . Поэтому, согласно определению,

этот функционал и есть дифференциал Гато, который оказался равным дифференциалу Фреше. ►

Утверждение, обратное теореме 1.1, неверно: дифференциал Гато может существовать и у недифференцируемого функционала. Чтобы показать это, обратим внимание на следующее. Понятия дифференциала Фреше и дифференциала Гато не связаны с конкретным видом нормированного пространства, и их можно рассматривать, например, в конечномерном линейном арифметическом пространстве. В этом случае функционал есть просто функция многих переменных, а дифференцируемость такого функционала совпадает с дифференцируемостью его как функции многих переменных [V]. Первая вариация функционала в конечномерном случае соответствует производной по направлению. Действительно, если задан функционал $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то вариацией аргумента $\mathbf{x}$ является произвольный вектор $\delta \mathbf{x}$. Если этот вектор имеет единичную норму $\|\delta \mathbf{x}\| = 1$, то значением первой вариации функционала на этом приращении будет

$$f_1[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \alpha \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}},$$

т.е. производная функции f по направлению $\mathbf{n} = \delta \mathbf{x}$. В общем случае

$$f_1[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}] = \|\delta \mathbf{x}\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{n} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\|\delta \mathbf{x}\|}$.

Линейность первой вариации относительно $\delta \mathbf{x}$ означает, что первая вариация представляется через скалярное произведение

$$f_1[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}] = (\mathbf{a}, \delta \mathbf{x}), \quad (1.12)$$

где $\mathbf{a}$ — некоторый вектор. Отметим, что для дифференцируемой функции f вектор $\mathbf{a}$ совпадает с градиентом этой функции.

Функция двух переменных

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2, (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & x_1 \neq x_2^2 \text{ или } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

имеет производную в точке $(0, 0)$ по любому направлению, равную нулю, и, следовательно, имеет в этой точке дифференциал Гато, так как производную по направлению можно представить в виде (1.12), если в качестве a взять нулевой вектор. В то же время эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$, а потому не дифференцируема в этой точке, т. е. не имеет дифференциала Фреше.

В вариационном исчислении важнейшими являются функционалы, заданные с помощью интегралов, например:

$$\int_a^b f(x, y, y') dx, \quad \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad \iint_D f(x, y, z'_x, z'_y) dx dy$$

и т. д. Такой функционал будем называть **интегральным функционалом**, а подынтегральную функцию соответствующего интеграла — **интегрантом**.

Выясним достаточные условия для существования сильного и слабого дифференциалов у функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (1.13)$$

заданного на нормированном пространстве $C^1[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_{C^1}$. Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных. Запишем приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[a, b]$, соответствующее некоторому приращению $\delta y(x)$ аргумента:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b (f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')) dx. \end{aligned}$$

Применим к подынтегральной функции формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b \left(f'_y(x, y, y') \delta y + f'_{y'}(x, y, y') \delta y' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f''_{yy}(x, y + \vartheta \delta y, y' + \vartheta \delta y') (\delta y)^2 + f''_{yy'}(x, y + \vartheta \delta y, y' + \vartheta \delta y') \delta y \delta y' + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y + \vartheta \delta y, y' + \vartheta \delta y') (\delta y')^2 \Big) dx, \quad (1.14)$$

где $\vartheta \in (0, 1)$, вообще говоря, зависит от переменного x .

Отметим, что первые два слагаемых подынтегральной функции в (1.14) представляют собой непрерывную функцию переменного x . Значит, оставшиеся слагаемые в совокупности образуют непрерывную функцию, которую можно интегрировать. Оценим соответствующий интеграл*:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \left(\frac{1}{2} f''_{yy} \delta y^2 + f''_{yy'} \delta y \delta y' + \frac{1}{2} f''_{y'y'} (\delta y')^2 \right) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{N}{2} \int_a^b (|\delta y|^2 + 2|\delta y| |\delta y'| + |\delta y'|^2) dx \leq 2N(b-a) \|\delta y\|_{C^1}^2 = o(\delta y). \end{aligned}$$

Здесь $N = \max_G \{ |f''_{yy}|, |f''_{yy'}|, |f''_{y'y'}| \}$.

Имеем $\delta y' dx = (\delta y)' dx = d(\delta y)$, тогда, интегрируя по частям

$$\begin{aligned} & \int_a^b f'_{y'}(x, y, y') \delta y' dx = \int_a^b f'_{y'}(x, y, y') d(\delta y) = \\ & = (f'_{y'}(x, y, y') \delta y) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (f'_{y'}(x, y, y')) \delta y dx, \end{aligned}$$

находим, что приращение функционала можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b \left(f'_{y'}(x, y, y') - \frac{d}{dx} f'_{y'}(x, y, y') \right) \delta y dx + \\ &+ (f'_{y'}(x, y, y') \delta y) \Big|_a^b + o(\delta y), \end{aligned} \quad (1.15)$$

т. е. как сумму функционала, линейного относительно δy (первые два слагаемых) и бесконечно малой высшего порядка относительно δy при $\delta y \rightarrow 0$ (третье слагаемое). Значит, диффе-

* Векторный аргумент функции f и ее производных не выходит за пределы некоторого замкнутого ограниченного множества G в $\mathbb{R}^3$. Поэтому из непрерывности функции f и ее производных следует их ограниченность на $G[V]$.

ренцируемость функционала доказана и найден его дифференциал Фреше, который можно представить так:

$$J_1[y, \delta y] = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx, \quad (1.16)$$

поскольку первые два слагаемых в (1.15) получены преобразованием интеграла (1.16) интегрированием по частям.

Для существования дифференциала Гато достаточными являются более слабые условия непрерывности функции f и ее частных производных f'_y и $f'_{y'}$. Действительно, вычисление первой вариации сводится к дифференцированию интеграла по параметру:

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx \Big|_{\alpha=0} = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx. \end{aligned}$$

Для законности такого дифференцирования достаточно непрерывности подынтегральной функции и ее частной производной по параметру [VI], что обеспечивается поставленными условиями. Полученная первая вариация является линейным функционалом относительно δy , т. е. представляет собой дифференциал Гато.

Говорят, что функционал $J[y]$, определенный на линейном пространстве $C^1[a, b]$, достигает **сильного (слабого) минимума** на функции (в точке) $y_* \in C^1[a, b]$ (или y_* доставляет соответствующий минимум функционалу $J[y]$), если найдется такая сильная (слабая) ε -окрестность функции $y_*(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполнено неравенство $J[y] \geq J[y_*]$. Если для любой функции из этой окрестности, отличной от $y_*(x)$, указанное неравенство является строгим, то такой минимум называют **строгим**. **Сильный (слабый) максимум** вводят аналогичным образом. Сильные (слабые) максимумы и минимумы объединяют под общим названием **сильный (слабый) экстремум**. Функцию $y_*(x)$, доставляющую сильный или слабый экстремум функционалу $J[y]$, будем называть **точкой** соответствующего **экстремума функционала**.

Поскольку всякая функция, принадлежащая слабой ε -окрестности функции $y_*(x)$, заведомо входит в ее же сильную ε -окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Действительно, пусть $y_*(x)$ есть точка сильного минимума функционала $J[y]$. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ для любой функции $y(x)$, для которой $\|y - y_*\|_C < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[y_*]$. Если $\|y - y_*\|_{C^1} < \varepsilon$, то также и $\|y - y_*\|_C < \varepsilon$. Поэтому неравенство $J[y] \geq J[y_*]$ верно для любой функции $y(x)$ из слабой ε -окрестности функции $y_*(x)$, т. е. $y_*(x)$ является точкой слабого минимума для $J[y]$.

Однако слабый экстремум функционала необязательно является его сильным экстремумом. Это объясняется тем, что функции, близкие по своим значениям (попадающие в сильную ε -окрестность), могут иметь значительные расхождения в производных, а это, в свою очередь, может повлиять на значения функционала.

Рассмотрим функционал

$$\int_a^b [(y')^2 - (y')^4] dx.$$

Функция $f(t) = t^2 - t^4$ при $t = 0$ имеет локальный минимум, равный нулю. Этот минимум является строгим на интервале $-1 < t < 1$. Значит, если функция $y(x) \in C^1[a, b]$ подчиняется неравенству $\|y\|_{C^1} < 1$, то интегрант нашего функционала на отрезке $[a, b]$ неотрицателен, а функционал имеет неотрицательное значение. Из этого следует, что функция $y_*(x) \equiv 0$ является слабым минимумом функционала. Нетрудно, однако, придумать функцию, которая удовлетворяет условию $\|y\|_C < \varepsilon$ для произвольного, наперед заданного $\varepsilon > 0$, но значение функционала на которой будет отрицательным (например, можно взять $y(x) = 0,5\varepsilon \sin(kx)$, выбрав подходящий параметр k). Следовательно, y_* не является сильным экстремумом функционала.

Отметим, что, как правило, нахождение слабых экстремумов функционала является более простой задачей по сравнению с нахождением сильных экстремумов. Это объясняется, в частности, тем, что функционалы, обычно рассматриваемые в вариационном исчислении, непрерывны относительно «слабой» нормы $\|\cdot\|_{C^1}$ пространства $C^1[a, b]$, но далеко не всегда

непрерывны относительно «сильной» нормы $\|\cdot\|_C$. Таким, например, является функционал, рассмотренный выше.

Замечание 1.3. Поиск экстремумов функционала базируется, как и в случае поиска экстремумов действительной функции действительного переменного, на различных необходимых и достаточных условиях. Из изложенного выше вытекает, что любое необходимое условие слабого экстремума является в то же время и необходимым условием сильного экстремума, а любое достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием и слабого экстремума. Поэтому доказываемая ниже теорема для слабых экстремумов названа необходимым условием экстремума функционала, так как может использоваться и для слабых, и для сильных экстремумов.

Теорема 1.2 (необходимое условие экстремума функционала). Если функционал (1.13) достигает слабого экстремума во внутренней точке $y_*(x)$ своей области определения, причем в этой точке существует дифференциал Гато, то этот дифференциал (первая вариация) в точке $y_*(x)$ обращается в нуль:

$$\delta J[y_*, \delta y] = 0. \quad (1.17)$$

◀ Пусть, например, функционал $J[y]$ на функции $y_*(x)$ достигает слабого минимума. Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = J[y_* + \alpha \delta y]$, имея в виду, что вариация δy фиксирована. Из условий теоремы вытекает, что эта функция имеет экстремум в точке $\alpha = 0$. Действительно, существует такое $\varepsilon > 0$, что в слабой ε -окрестности выполняется неравенство $J[y] \geq J[y_*]$. Если $y = y_* + \alpha \delta y$, то при $|\alpha| < \varepsilon / \|\delta y\|_{C^1}$ имеем

$$\|y - y_0\|_{C^1} = \|\alpha \delta y\|_{C^1} = |\alpha| \|\delta y\|_{C^1} < \varepsilon,$$

т.е. функция $y(x)$ попадает в слабую ε -окрестность функции $y_*(x)$. Следовательно, $J[y] \geq J[y_*]$, или $\varphi(\alpha) \geq \varphi(0)$.

Из существования дифференциала Гато функционала $J[y]$ в точке y_* следует дифференцируемость функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$. В самом деле, зафиксируем произвольную вариацию δy . Тогда существует предел

$$\varphi'_+(\alpha)|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J[y_* + \alpha \delta y] - J[y_*]}{\alpha} = \delta J[y_*, \delta y].$$

В силу линейности $\delta J[y_*, \delta y]$ по δy существует и производная

$$\begin{aligned}\varphi'_-(\alpha)|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow -0} \frac{J[y_* + \alpha \delta y] - J[y_*]}{\alpha} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{J[y_* - \beta \delta y] - J[y_*]}{-\beta} = - \lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{J[y_* + \beta(-\delta y)] - J[y_*]}{\beta} = \\ &= -\delta J[y_*, -\delta y] = \delta J[y_*, \delta y].\end{aligned}$$

Односторонние производные совпадают. Следовательно, существует производная $\varphi'(0)$ [II].

Так как $\varphi(\alpha)$ имеет минимум в точке $\alpha = 0$ и дифференцируема в этой точке, то $\varphi'(0) = 0$ (необходимое условие локального экстремума для функции одного переменного [II]). Но это равносильно тому, что $\delta J[y_*, \delta y] = 0$. Поскольку вариацию δy можно выбирать произвольно, заключаем, что дифференциал Гато равен нулю. ►

1.3. Основные леммы вариационного исчисления

Докажем несколько утверждений (часто называемых *основными леммами вариационного исчисления*), которые будем активно использовать в дальнейшем.

Лемма 1.1 (лемма Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для любой бесконечно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $\eta(x)$, для которой $\eta(a) = \eta(b) = 0$, выполнено равенство

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

◀ Допустим, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ функция $f(x)$ отлична от нуля. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $f(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ можно выбрать интервал (c, d) , окружающий точку x_0 , $x_0 \in (c, d) \subset [a, b]$, на котором функция $f(x)$ положительна.

Нетрудно показать, что функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

имеет производную любого порядка в каждой точке числовой оси. Поэтому функция $\eta(x) = \varphi(x-c)\varphi(d-x)$ бесконечно дифференцируема и при этом отлична от нуля только в интервале (c, d) . Значит,

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_c^d f(x)\eta(x)dx > 0,$$

так как подынтегральная функция непрерывна и положительна на (c, d) .

Итак, предположение, что $f(x)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке, ведет к нарушению условий леммы. Следовательно, если для функции $f(x)$ выполняются условия леммы, то $f(x) \equiv 0$. ►

Замечание 1.4. а. Назначение доказанной леммы — обеспечить достаточные условия интегрального типа, при выполнении которых заданная функция обращается в нуль. Она может формулироваться для различных классов *пробных функций* $\eta(x)$. При этом чем уже класс этих функций, тем сильнее утверждение леммы и тем проще проверка достаточных условий. Класс C^∞ , используемый в приведенной формулировке леммы, выбран из практических соображений.

б. Доказанная лемма легко обобщается на случай функций многих переменных. Например, в двумерном случае верно следующее утверждение. Если функция $f(x, y)$ двух действительных переменных непрерывна в ограниченной области $G \in \mathbb{R}^2$ и для любой функции $\eta(x, y)$, бесконечно дифференцируемой в области G , непрерывной в замыкании $\bar{G} = G + \partial G$ области и равной нулю на границе ∂G области G , верно равенство

$$\iint_G f(x, y)\eta(x, y)dx dy = 0,$$

то $f(x, y) = 0$ в G . Доказательство этого утверждения повторяет доказательство леммы, отличаясь лишь тем, что в качестве

пробной следует взять функцию $\eta(x, y) = \varphi(r^2 - x^2 - y^2)$, обращающуюся в нуль вне круга $x^2 + y^2 = r^2$.

Лемма 1.2 (лемма Дюбуа-Реймона). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и для любой бесконечно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $\eta(x)$, для которой $\eta(a) = \eta(b) = 0$, выполнено равенство

$$\int_a^b (f(x)\eta'(x) + g(x)\eta(x))dx = 0. \quad (1.18)$$

Тогда функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$f'(x) - g(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b]. \quad (1.19)$$

◀ Непрерывная функция $g(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, которая определяется с точностью до постоянной. Существует такая первообразная $G(x)$ функции $g(x)$, что

$$\int_a^b (f(x) - G(x))dx = 0. \quad (1.20)$$

Действительно, если $G_0(x)$ — некоторая фиксированная первообразная функции $g(x)$, то любая первообразная $G(x)$ может быть представлена в виде $G(x) = G_0(x) + C$. Подставляя это в равенство (1.20), получаем условие на постоянную C :

$$\int_a^b (f(x) - G_0(x))dx - \int_a^b C dx = 0.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - G_0(x))dx.$$

Итак, пусть $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$, удовлетворяющая равенству (1.20). Тогда для любой пробной функции $\eta(x) \in C^\infty[a, b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, имеем, согласно формуле интегрирования по частям,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g(x) \eta(x) dx &= \int_a^b G'(x) \eta(x) dx = \\
 &= G(x) \eta(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x) \eta'(x) dx = - \int_a^b G(x) \eta'(x) dx.
 \end{aligned}$$

Поэтому равенство (1.18) равносильно следующему:

$$\int_a^b (f(x) - G(x)) \eta'(x) dx = 0. \quad (1.21)$$

Рассмотрим произвольную пробную функцию $\eta(x)$, удовлетворяющую условиям леммы. Обозначим

$$C_\eta = \frac{1}{b-a} \int_a^b \eta(x) dx.$$

Функция

$$\zeta(x) = \int_a^x (\eta(\xi) - C_\eta) d\xi$$

является бесконечно дифференцируемой, и при этом $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$. Согласно условию леммы, для такой функции верно равенство (1.18) и, следовательно, равенство (1.21), т. е.

$$\int_a^b (f(x) - G(x)) \zeta'(x) dx = 0.$$

В силу соотношения $\zeta'(x) = \eta(x) - C_\eta$ получаем

$$\int_a^b (f(x) - G(x)) \eta(x) dx - C_\eta \int_a^b (f(x) - G(x)) dx = 0.$$

Следовательно, согласно (1.20),

$$\int_a^b (f(x) - G(x)) \eta(x) dx = 0.$$

Так как пробную функцию $\eta(x)$ выбирали произвольным образом, по лемме 1.1 Лагранжа заключаем, что $f(x) - G(x) \equiv 0$. Но функция $G(x)$ дифференцируема и $G'(x) = g(x)$. Поэтому и

функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) \equiv g(x)$. Так как $g(x)$ непрерывна, то $f(x)$ непрерывно дифференцируема. ►

1.4. Некоторые замечания о задачах вариационного исчисления

Приведенные выше примеры иллюстрируют тот круг задач, которые изучает вариационное исчисление. Можно сказать, что *задача вариационного исчисления* (или просто *вариационная задача*) — это задача поиска экстремума функционала, заданного на некотором множестве M функций, удовлетворяющих определенным ограничениям. К вариационным задачам также относят задачи поиска точек в области определения функционала, где выполняется необходимое условие экстремума функционала, т. е. первая вариация функционала обращается в нуль (такие точки называют *стационарными точками функционала*).

В вариационном исчислении трудность при нахождении экстремума может возникнуть вследствие того, что область определения рассматриваемого функционала не является замкнутым множеством. В этом случае задача может не иметь решения. Такая трудность, естественно, не исключается и в конечномерном случае, когда необходимо найти экстремум функции многих переменных. Но в бесконечномерном случае, когда область определения функционала есть бесконечномерное линейное пространство, условие замкнутости множества проверить гораздо труднее. Впрочем, вариационная задача может не иметь решения даже в том случае, когда область определения функционала является замкнутым множеством. В бесконечномерном нормированном пространстве не для всякого замкнутого ограниченного множества можно утверждать, что функция, непрерывная на этом множестве, ограничена и достигает максимального и минимального значений.

Рассмотрим вариационную задачу

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min$$

в классе функций, дважды непрерывно дифференцируемых на (a, b) , непрерывных на $[a, b]$, имеющих в концевых точках a

и b нулевые значения ($y(a) = y(b) = 0$) и вертикальную касательную ($y'(a) = y'(b) = \infty$). Это задача поиска кратчайшего пути из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$ при условии, что в конечных точках пути задано вертикальное направление движения. На рис. 1.6 видно, что функцию из рассматриваемого класса можно выбрать так, что длина ее графика будет сколь угодно

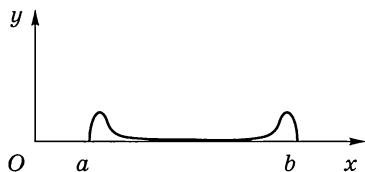


Рис. 1.6

мало отличаться от длины отрезка оси Ox , соединяющего точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$, который имеет наименьшую длину среди всех кривых, соединяющих его концы. Однако сам отрезок является графиком функции, тождественно равной нулю, которая не относится к множеству *допустимых функций*. Таким образом, функционал не достигает минимума на рассматриваемом множестве функций.

В вариационном исчислении существование решения задачи поиска экстремума требует отдельного доказательства, и это составляет существенную трудность при решении многих задач вариационного исчисления.

Как будет показано в 2, задача поиска стационарных точек некоторого функционала сводится к решению дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений (в зависимости от рассматриваемого функционала уравнения могут быть как обыкновенные, так и в частных производных). Например, вариационная задача

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

при некоторых предположениях сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения вида $y'' = \varphi(x, y, y')$ с дополнительными условиями $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ и к последующему анализу полученного решения. Задачу $y'' = \varphi(x, y, y')$, $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ в теории дифференциальных уравнений называют краевой [VIII].

Чтобы краевая задача для ОДУ n -го порядка была правильно поставлена, необходимо, чтобы количество краевых условий равнялось порядку уравнения n , так как общее решение ОДУ n -го порядка зависит от n произвольных постоянных.

Даже если задача поставлена правильно, решение может не существовать, а если существует, то может быть не единственным.

Пример 1.8. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & a < x < b; \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1.22)$$

Общее решение дифференциального уравнения в этой задаче имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Краевые условия приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \cos a + C_2 \sin a = y_a; \\ C_1 \cos b + C_2 \sin b = y_b. \end{cases}$$

Определитель матрицы этой СЛАУ равен:

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{vmatrix} = \cos a \sin b - \cos b \sin a = \sin(b - a).$$

Система совместна и имеет единственное решение, если $b - a \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $b - a = \pi$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} C_1 \cos a + C_2 \sin a = y_a; \\ C_1 \cos(a + \pi) + C_2 \sin(a + \pi) = y_b. \end{cases}$$

В силу формул приведения для тригонометрических функций второе уравнение системы эквивалентно уравнению

$$-C_1 \cos a - C_2 \sin a = y_b,$$

и мы видим, что решение СЛАУ существует лишь при $y_a = -y_b$. Если это равенство верно, СЛАУ будет иметь бесконечно много решений, так как второе уравнение системы будет следовать из первого, а первое уравнение имеет бесконечно много решений вида $C_1 = y_a \cos a + t \sin a$, $C_2 = y_a \sin a - t \cos a$, $t \in \mathbb{R}$.

Вопросы и задачи

1.1. Найдите расстояние между функциями $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x^3$ по норме пространства: а) $C[0, 1]$; б) $C^1[0, 1]$.

1.2. Покажите, что функционал

$$I[y] = \int_0^1 (y - y') dx,$$

определенный на $C^1[0, 1]$ с нормой $\|\cdot\|_{C^1}$, является непрерывным на функции $y_0(x) = x^3$.

1.3. Покажите, что функционал

$$I[y] = \int_0^1 (y')^2 dx,$$

определенный на $C^1[0, 1]$, разрывен на функции $y_0(x) \equiv 0$ в случае нормы $\|\cdot\|_C$, но непрерывен на этой функции в случае нормы $\|\cdot\|_{C^1}$.

1.4. Функционал

$$I[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

определенный на $C^1[0, \pi]$, исследуйте на непрерывность на функции $y_0(x) \equiv 0$ по норме: а) $\|\cdot\|_C$; б) $\|\cdot\|_{C^1}$.

1.5. Покажите, что функционал

$$I[y] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + y^2} dx,$$

определенный на пространстве $C[0, 1]$, непрерывен на функции $y_0(x) = x^2$ по норме $\|\cdot\|_C$.

1.6. Докажите, что любой линейный непрерывный функционал в нормированном пространстве является дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

1.7. Докажите, что функционал

$$J[y] = \int_a^b y^2 dx,$$

определенный в $C[a, b]$, является всюду дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

1.8. Проверьте, являются ли дифференцируемыми следующие функционалы:

а) $J[y] = y(a)$ в $C[a, b]$; б) $J[y] = y(a)$ в $C^1[a, b]$;

в) $J[y] = |y(a)|$ в $C[a, b]$; г) $J[y] = \sqrt{1+y'(a)}$ в $C^1[a, b]$.

1.9. Найдите первую вариацию функционала, определенного на нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых функций:

а) $I[y] = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+y^2} dx$; б) $I[y] = \int_{-1}^1 (y'e^y + xy^2) dx$;

в) $I[y] = \int_0^\pi y' \sin y dx$; г) $I[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + (y')^2) dx$.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЦАМИ

2.1. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (2.1)$$

определенного на множестве функций $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (2.2)$$

Предполагаем, что интегрант функционала $f(x, y, y')$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.

Сформулированную задачу называют *простейшей задачей вариационного исчисления*. Именно на этой задаче отрабатывались основные приемы данной дисциплины.

Первую вариацию функционала (2.1) при указанных условиях на функцию $f(x, y, y')$ можно записать в виде (1.16):

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx. \quad (2.3)$$

Здесь $\delta y \in C^1[a, b]$ и $\delta y'$ — допустимая вариация функции $y(x)$ и ее производная. При этом $\delta y|_a = \delta y|_b = 0$, поскольку условия (2.2) фиксируют значения допустимых функций на концах отрезка и, значит, вариация функции в этих точках должна иметь нулевое значение.

Теорема 2.1. Для того чтобы функция $y_*(x)$ доставляла слабый экстремум функционалу (2.1), *необходимо*, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y = 0. \quad (2.4)$$

◀ Используя необходимое условие экстремума для дифференцируемого функционала (см. теорему 1.2) и представление первой вариации функционала в виде (2.3), получаем

$$\int_a^b (f'_{y'} \delta y + f'_y \delta y') dx = 0.$$

Это соотношение верно для любой допустимой вариации δy , т. е. для функции $\delta y \in C^1[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. В частности, оно верно для любой бесконечно дифференцируемой функции, удовлетворяющей тем же краевым условиям. Поэтому, согласно лемме Дюбуа-Реймона, для любого $x \in [a, b]$ выполняется равенство (2.4). ▶

Согласно замечанию 1.3, уравнение (2.4) дает необходимое условие и для сильного экстремума функционала (2.1). Это уравнение называют *уравнением Эйлера* для функционала (2.1), а гладкие решения этого уравнения — *экстремальями* функционала. В дальнейшем для упрощения изложения мы под экстремалью будем понимать не только функцию $y(x)$, являющуюся решением уравнения Эйлера, но и график этой функции, т. е. кривую на плоскости xOy , которая описывается уравнением $y = y(x)$.

Поскольку условие (2.4) является необходимым, *точки экстремума* функционала следует искать среди экстремалей данного функционала. Это является обобщением ситуации для дифференцируемых функций одного переменного, точки экстремума которых находятся среди их стационарных точек [II].

Зачастую уравнение Эйлера способно дать исчерпывающий ответ на поставленную задачу об экстремуме функционала. Если из содержательного смысла задачи вытекает, что задача имеет решение, а функционал имеет лишь одну экстремаль, удовлетворяющую краевым условиям, то эта экстремаль и будет решением задачи.

Пример 2.1. Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^2 (x(y')^3 - 3y(y')^2) dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(0) = 4$, $y(2) = 6$.

Интегрант $f(x, y, y') = x(y')^3 - 3y(y')^2$ рассматриваемого функционала является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов (даже бесконечно дифференцируемой). Поэтому можно применить теорему 2.1. Поскольку

$$f'_{y'} = 3x(y')^2 - 6yy', \quad f'_y = -3(y')^2,$$

уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $6xy'y'' - 6yy'' = 0$, или $y''(xy' - y) = 0$. Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое распадается на два уравнения: $y'' = 0$ и $xy' - y = 0$. Общее решение первого из них имеет вид $y = C_1x + C_2$, а общее решение второго — $y = Cx$. Все функции только второго семейства $y = Cx$ входят в первое семейство. Поэтому все экстремали рассматриваемого функционала имеют вид $y = C_1x + C_2$.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из краевых условий. Полагая $x = 0$ и $x = 2$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 4, \\ C_2 \cdot 2 + C_2 = 6. \end{cases}$$

Из этой системы находим $C_1 = 1$, $C_2 = 4$. Итак, поставленным краевым условиям удовлетворяет лишь одна экстремаль рассматриваемого функционала: $y = x + 4$. #

Предполагая, что функция $y(x)$ является дважды дифференцируемой, и используя правило дифференцирования сложной функции, преобразуем первое слагаемое в левой части (2.4):

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = f''_{y'x} + f''_{y'y} y' + f''_{y'y} y''.$$

С учетом этого запишем уравнение Эйлера (2.4) в следующей форме:

$$f''_{y'y} y'' + f''_{y'y} y' + f''_{y'x} - f'_y = 0.$$

Видно, что если выполняется неравенство $f''_{yy'} \neq 0$, то уравнение Эйлера представляет собой ОДУ второго порядка, удовлетворяющее теореме Коши существования и единственности решения ОДУ. При $f''_{yy'} \equiv 0$ оно уже не является уравнением второго порядка; оно либо ОДУ первого порядка, либо алгебраическое, т. е. не содержащее производных неизвестной функции. Повторим, что эти умозаключения основаны на предположении, что решения уравнения Эйлера дважды дифференцируемы. Возникает вопрос: при каких условиях на функцию f это предположение выполняется?

Теорема 2.2. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (2.4). Если интегрант $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках плоскости xOy , в которых $f''_{yy'} \neq 0$, функция $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную. #

Уравнение Эйлера далеко не всегда интегрируется в квадратурах. Поэтому важно выявить такие случаи, когда интегрирование в квадратурах возможно. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Интегрант не зависит от y' .* В этом случае $f'_{y'} \equiv 0$ и уравнение Эйлера имеет вид $f'_y(x, y) = 0$, т. е. является алгебраическим уравнением относительно неизвестной функции $y(x)$. Решения этого уравнения, т. е. экстремали функционала, могут и не удовлетворять поставленным краевым условиям.

Пример 2.2. Найдём экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b y^3 dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$.

Уравнение Эйлера $3y^2 = 0$ рассматриваемого функционала имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$. Если хотя бы одно из чисел y_1 и y_2 отлично от нуля, то в множестве $C^1[a, b]$ функционал не имеет экстремалей, удовлетворяющих поставленным краевым условиям.

2. *Интегрант линейно зависит от y' .* Этот случай, включающий в себя и предыдущий, охватывает те функционалы,

интегранты которых удовлетворяют условию $f''_{yy'} \equiv 0$. Такие функционалы называют *вырожденными*. Если

$$f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y',$$

то уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{dQ}{dx} - P'_y - Q'_y y' = 0.$$

Раскрывая производную $\frac{dQ}{dx}$ по правилу дифференцирования сложной функции, получаем $Q'_x + Q'_y y' - P'_y - Q'_y y' = 0$, или $Q'_x - P'_y = 0$.

Это уравнение, как и в предыдущем случае, алгебраическое. Его решения могут не удовлетворять краевым условиям. Отметим, что если выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой *полный дифференциал*, то уравнение $P'_y - Q'_x = 0$ является тождеством относительно x и y . В этом случае любая функция $y(x) \in C^1[a, b]$ является решением уравнения $P'_y - Q'_x = 0$ и, следовательно, экстремалью функционала.

Пример 2.3. Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b (y^2 + yy') dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$.

Уравнение Эйлера $-2y = 0$ данного функционала имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$. Если одно из чисел y_1, y_2 ненулевое, экстремалей, удовлетворяющих заданным краевым условиям, нет.

3. *Интегрант зависит только от y'* . В этом случае он имеет вид $f(y')$, а уравнение Эйлера для функционала —

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0.$$

Нетрудно увидеть, что это уравнение допускает понижение порядка [VIII]: $f'_{y'} = C$. Мы получили алгебраическое уравнение относительно y' . Все его решения можно записать в виде $y' = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом,

экстремалими функционала с интегрантом рассматриваемого типа является семейство линейных функций $y = C_1x + C_2$ с произвольными постоянными C_1 и C_2 .

Пример 2.4. Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b (y' - y'^3) dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$.

Так как интегрант функционала зависит только от y' , то решениями уравнения Эйлера для этой задачи являются линейные функции $y(x) = C_1x + C_2$ (C_1 и C_2 — произвольные постоянные). Два краевых условия позволяют выбрать единственную функцию

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{b - a}(x - a) + y_1. \quad \#$$

4. *Интегрант не зависит от y .* Этот случай включает в себя предыдущий. Интегрант имеет вид $f(x, y')$, а уравнение Эйлера сводится к следующему:

$$\frac{d}{dx} f'_{y'}(x, y') = 0,$$

и оно, как и выше, допускает понижение порядка: $f'_{y'} = C_1$. Последнее уравнение есть ОДУ первого порядка или алгебраическое уравнение (например, в предыдущем случае).

Пример 2.5. Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 - 2xy') dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$.

Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx} (2y' + 2x) = 0$$

этого функционала после понижения порядка сводится к уравнению $y' + x = C_1$. Решая его, получаем семейство экстремалей $y(x) = C_1x + C_2 - x^2/2$. Постоянные C_1 и C_2 однозначно находятся из краевых условий при любых y_1 и y_2 .

5. *Интегрант не зависит явно от x* . В этом случае он имеет вид $f(y, y')$, а уравнение Эйлера при дополнительном предположении, что $f''_{yy'} \neq 0$ (см. теорему 2.2), сводится к следующему:

$$f''_{yy'} y' + f''_{y'y} y'' - f'_y = 0.$$

Умножив его на y' , получим (проверьте самостоятельно!)

$$\frac{d}{dx}(y' f'_{y'} - f) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае уравнение Эйлера допускает понижение порядка:

$$y' f'_{y'} - f = C_1.$$

Пример 2.6. Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b (yy' + y'^2) dx.$$

Уравнение Эйлера после понижения порядка сведется к уравнению первого порядка $y'(y + 2y') - yy' - y'^2 = C$, или $(y')^2 = C$. Отсюда $y' = \pm \sqrt{C} = C_1$, и экстремальными рассматриваемого функционала будут линейные функции $y(x) = C_1 x + C_2$.

Пример 2.7. Найдем экстремали функционала в задаче И. Бернулли о брахистохроме (см. пример 1.2):

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = y_B > 0.$$

В данном случае интегрант не зависит от x и является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в области $y > 0$ на плоскости xOy . В этой области можно использовать теорему 2.1, и мы заключаем, что уравнение Эйлера для рассматриваемого функционала допускает понижение порядка:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy} \sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и учтем константу $2g$ в постоянной C . Тогда

$$y(1+y'^2) = C_1 > 0.$$

Мы получили уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной [VIII]. Его удобно решать методом введения параметра. Положим $y' = \operatorname{ctg} \psi$. Тогда $1 + y'^2 = 1/\sin^2 \psi$ и

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} = C_1 \sin^2 \psi. \quad (2.5)$$

Мы выразили переменное y через параметр.

Равенство $y' = \operatorname{ctg} \psi$ означает, что $dx = \operatorname{tg} \psi dy$. Подставляем в это равенство выражение dy через $d\psi$, которое получается дифференцированием (2.5):

$$dx = \operatorname{tg} \psi C_1 \cdot 2 \sin \psi \cos \psi d\psi = 2C_1 \sin^2 \psi d\psi.$$

Интегрируя, выразим переменное x через параметр:

$$x = \tilde{C}_1(2\psi - \sin 2\psi) + C_2,$$

где $\tilde{C}_1 = C_1/2 > 0$.

Заменив параметр на $\vartheta = 2\psi$ и объединив выражения x и y через новый параметр, получим параметрические уравнения циклоид

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1(\vartheta - \sin \vartheta) + C_2; \\ y = \tilde{C}_1(1 - \cos \vartheta). \end{cases}$$

Эти уравнения описывают все экстремали функционала в области $y > 0$. Посмотрим, как из всего семейства указанных функций выделить те, которые удовлетворяют краевым условиям $y(0) = 0$, $y(b) = y_B$. Но при этом отметим, что точка $(0, 0)$ не входит в рассматриваемую область $y > 0$ на плоскости xOy и выделенные функции, строго говоря, нельзя считать экстремалими на всем отрезке $[0, b]$.

Условие $y(0) = 0$ равносильно двум условиям: $x(\vartheta) = 0$, $y(\vartheta) = 0$. Из второго получаем $\vartheta = 2n\pi$, $n \in N$, а из первого — $2n\pi\tilde{C}_1 + C_2 = 0$. Подставим в параметрические уравнения вместо C_2 найденное выражение, тогда

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1((\vartheta - 2n\pi) - \sin \vartheta); \\ y = \tilde{C}_1(1 - \cos \vartheta). \end{cases}$$

Заменяем параметр $\vartheta - 2n\pi = \Theta$ и учитываем периодичность тригонометрических функций:

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1(\Theta - \sin \Theta); \\ y = \tilde{C}_1(1 - \cos \Theta), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\Theta = 0$ соответствует начальной точке $x = 0$, $y = 0$.

Остается учесть второе краевое условие:

$$\begin{cases} b = \tilde{C}_1(\Theta - \sin \Theta); \\ y_B = \tilde{C}_1(1 - \cos \Theta). \end{cases} \quad (2.7)$$

Делим первое уравнение на второе (в предположении $y_B \neq 0$), избавляясь от неизвестной постоянной $\tilde{C}_1$:

$$\frac{\Theta - \sin \Theta}{1 - \cos \Theta} = \frac{b}{y_B} = A > 0. \quad (2.8)$$

Отметим, что для циклоид из рассматриваемого семейства точки, соответствующие значениям параметра $\Theta = 2n\pi$, являются точками возврата. Но экстремали не должны содержать таких точек. Поэтому в нашем случае параметр Θ должен меняться в пределах интервала $(0, 2\pi)$. Можно показать, что функция $y = \frac{\Theta - \sin \Theta}{1 - \cos \Theta}$ на этом интервале монотонно возрастает. Значит, уравнение (2.8) на данном интервале имеет единственное решение Θ_0 . Это решение позволяет определить постоянную $\tilde{C}_1$ по формуле $\tilde{C}_1 = \frac{y_B}{1 - \cos \Theta_0}$. Найденное значение $\tilde{C}_1$ выделяет из семейства экстремалей (2.6) ту единственную экстремаль, которая удовлетворяет краевым условиям.

Пример 2.8. Рассмотрим вариационную задачу

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

Уравнение Эйлера для функционала в поставленной задаче имеет вид $2y'' - 2y = 0$. Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решая которое находим единственную экстремаль, удовлетворяющую краевым условиям: $y(x) = e^x$.

Убедимся, что найденная экстремаль является точкой локального экстремума функционала и тем самым дает решение вариационной задачи. Вычислим приращение функционала в точке $y = e^x$ для произвольной допустимой вариации δy в нормированном пространстве $C^1[a, b]$, которая, напомним, должна удовлетворять условиям $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = \int_0^1 ((y + \delta y)^2 + (y' + \delta y')^2 - y^2 - y'^2) dx = \\ &= \int_0^1 (2y\delta y + (\delta y)^2 + 2y'\delta y' + (\delta y')^2) dx = \\ &= \int_0^1 (2e^x\delta y + (\delta y)^2 + 2e^x\delta y' + (\delta y')^2) dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^1 2e^x\delta y' dx = (2e^x\delta y)\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\delta y dx,$$

то

$$\Delta J = \int_0^1 ((\delta y)^2 + (\delta y')^2) dx > 0,$$

если $\|\delta y\|_{C^1} \neq 0$. Значит, на функции $y(x) = e^x$ заданный функционал достигает строгого слабого минимума.

2.2. Функционалы от нескольких функций

Пусть интегрант функционала зависит от двух функций переменного x , т. е. функционал имеет вид

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx, \quad (2.9)$$

где f — дважды непрерывно дифференцируемая функция пяти переменных.

В качестве области определения функционала рассмотрим пары функций y_1 и y_2 из класса $C^1[a, b]$, удовлетворяющие краевым условиям

$$y_1(a) = y_{11}, \quad y_1(b) = y_{12}, \quad y_2(a) = y_{21}, \quad y_2(b) = y_{22}. \quad (2.10)$$

Допустимые вариации δy_1 и δy_2 для функций y_1 и y_2 должны быть класса $C^1[a, b]$ и удовлетворять краевым условиям $\delta y_1(a) = \delta y_2(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(b) = 0$, так как допустимые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют на концах отрезка $[a, b]$ фиксированные значения. Для произвольных допустимых вариаций δy_1 и δy_2 положим

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = J[y_1 + \alpha_1 \delta y_1, y_2 + \alpha_2 \delta y_2].$$

Очевидно, что если пара функций y_1 и y_2 доставляет экстремум функционалу $J[y_1, y_2]$, то функция $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ двух переменных имеет экстремум в точке $(0, 0)$. В этом случае должны выполняться необходимые условия экстремума:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0.$$

Используя формулу Лейбница дифференцирования определенного интеграла по параметру [VI], получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} &= \int_a^b (f'_{y_1} \delta y_1 + f'_{y_1'} \delta y_1') dx = 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} &= \int_a^b (f'_{y_2} \delta y_2 + f'_{y_2'} \delta y_2') dx = 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения выполняются в том числе и для произвольных бесконечно дифференцируемых функций δy_1 и δy_2 с нуле-

выми значениями в точках a и b . Согласно лемме Дюбуа-Реймона, получаем следующие необходимые условия экстремума функционала:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f'_{y_1} - f'_{y_1} = 0; \\ \frac{d}{dx} f'_{y_2} - f'_{y_2} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Эти необходимые условия экстремума функционала нетрудно обобщить на случай интегранта, зависящего от n функций.

Теорема 2.3. Если функционал

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx, \quad (2.12)$$

где f — дважды непрерывно дифференцируемая функция, достигает экстремума на системе функций $y_1, \dots, y_n \in C^1[a, b]$, то эта система функций является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx} f'_{y_i} - f'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad \# \quad (2.13)$$

Любое гладкое решение системы уравнений (2.13) (*системы уравнений Эйлера*) называют *экстремальми* функционала (2.12). Как и выше, термином «экстремаль» мы будем называть не только систему функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, являющуюся решением системы уравнений Эйлера, но и кривую в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая описывается уравнениями $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, т. е. график вектор-функции.

Пример 2.9. Найдем экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (y'_1)^2 - (y'_2)^2) dx.$$

В соответствии с теоремой 2.3 записываем систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} 2y''_1 - 2y_2 + 4y_1 = 0; \\ -2y''_2 - 2y_1 = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из второго уравнения находим $y_1 = -y_2''$ и подставляем это выражение для y_1 в первое:

$$y_2^{IV} + 2y_2'' + y_2 = 0.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$y_2(x) = C_1 \sin x + C_2 x \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \cos x. \quad (2.15)$$

Значит,

$$\begin{aligned} y_1(x) = & -(C_1 + C_4) \sin x + (2C_2 - C_3) \cos x - \\ & - C_2 x \sin x - C_4 x \cos x. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15) и (2.16) описывают все экстремали рассматриваемого функционала.

2.3. Функционалы с производными высшего порядка

Пусть функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ непрерывно дифференцируема $n + 2$ раза. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (2.17)$$

на множестве функций $y(x) \in C^n[a, b]$, удовлетворяющих крайним условиям

$$\begin{cases} y(a) = y_{10}, & y'(a) = y_{11}, & \dots, & y^{(n-1)}(a) = y_{1,n-1}; \\ y(b) = y_{20}, & y'(b) = y_{21}, & \dots, & y^{(n-1)}(b) = y_{2,n-1}. \end{cases} \quad (2.18)$$

В этом случае *допустимой вариацией* является любая функция $\delta y \in C^n[a, b]$, удовлетворяющая однородным крайним условиям

$$\begin{cases} \delta y(a) = 0, & \delta y'(a) = 0, & \dots, & \delta y^{(n-1)}(a) = 0; \\ \delta y(b) = 0, & \delta y'(b) = 0, & \dots, & \delta y^{(n-1)}(b) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Пусть функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$. Выбрав произвольно допустимую вариацию δy и зафиксировав ее, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= J[y + \alpha \delta y] = \\ &= \int_a^b f(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y', y'' + \alpha \delta y'', \dots, y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}) dx.\end{aligned}$$

Здесь $\delta y^{(k)} = (\delta y)^{(k)}$ — k -я производная вариации δy .

Функция $\varphi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ имеет экстремум, и поскольку она дифференцируема в этой точке, то $\varphi'(\alpha) = 0$ при $\alpha = 0$ [II]. Но

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y', y'' + \alpha \delta y'', \dots, y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}) dx,$$

где частные производные функции f под интегралом справа вычисляются в точке

$$(x, y(x) + \alpha \delta y(x), y'(x) + \alpha \delta y'(x), \dots, y^{(n)}(x) + \alpha \delta y^{(n)}(x)).$$

Поэтому

$$\varphi'(0) = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y' + \dots + f'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx = 0. \quad (2.20)$$

Здесь частные производные функции f вычисляются в точке

$$(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)).$$

Предположим, что $y(x) \in C^{2n}[a, b]$. Тогда, используя интегрирование по частям и краевые условия, получаем

$$\begin{aligned}\int_a^b f'_{y'} \delta y' dx &= - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f'_{y'} \right) \delta y dx, \\ \int_a^b f'_{y''} \delta y'' dx &= \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} f'_{y''} \right) \delta y dx, \\ &\dots\dots\dots \\ \int_a^b f'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx &= (-1)^n \int_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n} f'_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.\end{aligned}$$

Подставляем эти соотношения в (2.20):

$$\int_a^b \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'_{y^{(n)}} \right) \delta y \, dx = 0.$$

Данное равенство верно, в частности, для любой бесконечно дифференцируемой функции $\delta y(x)$ с нулевыми значениями на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому, согласно лемме Лагранжа,

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'_{y^{(n)}} = 0,$$

откуда, меняя порядок слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'_{y^{(n)}} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f'_{y^{(n-1)}} + \dots + \\ & + (-1) \frac{d}{dx} f'_{y'} + f'_y = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) называют *уравнением Эйлера—Пуассона*, а его $2n$ раз непрерывно дифференцируемые решения — *экстремальми* функционала $J[y]$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.4. Если функционал $J[y]$ вида (2.17), определенный на множестве функций из $C^n[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.18), достигает экстремума на некоторой функции $y(x) \in C^n[a, b]$, то эта функция является экстремалью функционала $J[y]$.

Замечание 2.1. Теорема 2.4 в частном случае $n = 1$ отличается от доказанной ранее теоремы 2.1 тем, что на функцию $y(x)$, на которой функционал достигает экстремума, накладывается дополнительное требование гладкости $y(x) \in C^2[a, b]$. Ослабления требований в теореме 2.1 удается достичь с помощью леммы Дюбуа-Реймона, которая в доказательстве теоремы 2.4 не используется.

Пример 2.10. Найдём экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b \left((y''')^2 + y^2 - 2yx^3 \right) dx.$$

Запишем уравнение Эйлера — Пуассона:

$$-2y^{\text{VI}} + 2y - 2x^3 = 0.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью [VIII]. Решая его, получим

$$y(x) = x^3 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 e^{x/2} + C_4 e^{-x/2}) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \\ + (C_5 e^{x/2} + C_6 e^{-x/2}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Каждая функция этого семейства является экстремалью данного функционала.

2.4. Функционалы от функций многих переменных

Перейдем к обсуждению *функционалов*, определенных на множествах функций многих переменных. Рассмотрим, например, множество M функций $z(x, y)$ от двух переменных, которые дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$. Исследуем задачу об экстремуме функционала

$$J[z] = \iint_D f(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy, \quad (2.22)$$

где D — область, удовлетворяющая условию $(D \cup \partial D) \subset G$; f — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

В качестве области определения этого функционала возьмем подмножество тех функций из M , которые на границе области D имеют заданное значение:

$$z(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y). \quad (2.23)$$

Допустимыми вариациями в этом случае будут функции $\delta z(x, y) \in C^2(G)$, обращающиеся в нуль на границе ∂D области D .

Как и для функционала (2.1), *необходимое условие экстремума* можно записать в форме

$$\delta J[z, \delta z] = 0. \quad (2.24)$$

В данном случае *первая вариация*

$$\delta J[z, \delta z] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0}$$

функционала записывается в форме

$$\delta J[z, \delta z] = \iint_D (f'_z \delta z + f'_p \delta p + f'_q \delta q) dx dy,$$

где p и q обозначают соответственно z'_x и z'_y . Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} (f'_p \delta z) = \frac{\partial f'_p}{\partial x} \delta z + f'_p \delta p, \quad \frac{\partial}{\partial y} (f'_q \delta z) = \frac{\partial f'_q}{\partial y} \delta z + f'_q \delta q,$$

то

$$\begin{aligned} & \iint_D (f'_p \delta p + f'_q \delta q) dx dy = \\ & = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (f'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (f'_q \delta z) \right) dx dy - \iint_D \left(\frac{\partial f'_p}{\partial x} + \frac{\partial f'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \end{aligned}$$

Используя *формулу Грина*

$$\int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

получаем

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (f'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (f'_q \delta z) \right) dx dy = \int_{\partial D} \delta z (f'_p dy - f'_q dx) = 0,$$

так как $\delta z = 0$ на границе ∂D области D в силу фиксированных значений функции $z(x, y)$. Значит,

$$\iint_D (f'_p \delta p + f'_q \delta q) dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial f'_p}{\partial x} + \frac{\partial f'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy,$$

и необходимое условие экстремума принимает вид

$$\iint_D \left(f'_z - \frac{\partial f'_p}{\partial x} - \frac{\partial f'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy = 0.$$

Поскольку первый сомножитель под знаком интеграла непрерывен, а вариация произвольна, то, согласно замечанию 1.4, функция $z(x, y)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial f'_p}{\partial x} + \frac{\partial f'_q}{\partial y} - f'_z = 0, \quad (2.25)$$

которое называют **уравнением Остроградского**, а любое гладкое решение этого уравнения — **экстремалью** функционала (2.22).

Пример 2.11. Напишем уравнение Остроградского для **функционала Дирихле**

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint_D ((z'_x)^2 + (z'_y)^2) dx dy.$$

В этом случае $f(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2$. Поэтому $f'_p = 2p = 2z'_x$, $f'_q = 2q = 2z'_y$, $f'_z = 0$, и мы приходим к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, экстремальями функционала Дирихле являются гармонические в области D функции [XII].

2.5. Канонический вид уравнений Эйлера

Функционалу

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (2.26)$$

где $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ — *гладкая вектор-функция*, а функция f дважды непрерывно дифференцируема, отвечает *системе уравнений Эйлера*

$$\frac{d}{dx} f'_{y'_i} - f'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.27)$$

Эта система, вообще говоря, представляет собой систему ОДУ второго порядка. Такую систему можно свести к системе ОДУ первого порядка введением дополнительных переменных $z_i = y'_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $f'_{y'_i} \equiv f'_{z_i}$, и мы получаем следующую си-

стему $2n$ уравнений первого порядка, эквивалентную исходной системе (2.27):

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f'_{z_i} - f'_{y_i} = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{dy_i}{dx} = z_i, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Эта система ОДУ не является нормальной, и поэтому с ней неудобно работать. Пусть

$$p_i = f'_{y_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.29)$$

Определитель *матрицы Гессе* (матрицы частных производных второго порядка) *интегранта* f по переменным y'_i совпадает с якобианом

$$\frac{D(p_1, \dots, p_n)}{D(y'_1, \dots, y'_n)}.$$

Если этот определитель отличен от нуля, то, согласно теореме об обратной функции [V], система уравнений $p_i = f'_{y_i}$, $i = \overline{1, n}$, определяет совокупность старых переменных y'_i как функцию новых p_i :

$$y'_i = h_i(x, y, p), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.30)$$

Рассмотрим функцию

$$H(x, y, p) = -f(x, y, h(x, y, p)) + \sum_{i=1}^n h_i(x, y, p) p_i, \quad (2.31)$$

где $h = (h_1, \dots, h_n)$. Эту функцию называют *функцией Гамильтона* данного функционала (2.26), а переменные x, y, p , связанные со старыми переменными x, y, y' соотношениями (2.29) или (2.30), — *каноническими переменными* данного функционала.

Из определения функции Гамильтона следует, что

$$\begin{aligned} dH &= -df + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i = \\ &= -f'_x dx - \sum_{i=1}^n f'_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n f'_{y'_i} dy'_i + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dy_i. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В силу равенств (2.29) третье и четвертое слагаемые в правой части равенства (2.32) взаимно уничтожаются. Поэтому

$$dH = -f'_x dx - \sum_{i=1}^n f'_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (2.33)$$

Значит, для частных производных функции Гамильтона по ее переменным x, y, p справедливы следующие равенства:

$$H'_x = -f'_x, \quad H'_{y_i} = -f'_{y_i}, \quad H'_{p_i} = y'_i.$$

Отсюда $f'_{y_i} = -H'_{y_i}$, $y'_i = H'_{p_i}$. Так как, согласно введенным обозначениям, $f'_{z_i} = f'_{y_i} = p_i$ и $z_i = y'_i$, из системы ОДУ (2.28) получаем следующую нормальную систему ОДУ, эквивалентную системе уравнений Эйлера (2.27):

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Систему (2.34) называют *канонической формой уравнений Эйлера* функционала (2.26).

Как известно, *первым интегралом системы ОДУ* называют функцию, сохраняющую постоянное значение вдоль каждой *интегральной кривой* этой системы. Для того чтобы данная гладкая функция была первым интегралом системы ОДУ, необходимо и достаточно, чтобы полная производная этой функции в силу системы ОДУ тождественно равнялась нулю [VIII]. В некоторых частных случаях можно указать первые интегралы системы (2.34), а значит, и системы (2.28).

Пусть интегрант $f = f(y, y')$ не зависит от x явно. Тогда и функция Гамильтона не зависит от x явно. Значит,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n H'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n H'_{p_i} \frac{dp_i}{dx}, \quad (2.35)$$

так как $\frac{dH}{dx} \equiv 0$. Подставляя выражения для производных H'_{y_i} и H'_{p_i} из системы (2.34) в соотношение (2.35), получим, что $dH/dx \equiv 0$. Значит, вдоль каждой экстремали H постоянна.

Таким образом, если интегрант явно не зависит от независимого переменного x , то функция Гамильтона является первым интегралом системы уравнений Эйлера.

Замечание 2.2. В общем случае верно тождество

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

где слева стоит *полная производная функции* Гамильтона в силу системы (2.34).

Теперь поставим вопрос о том, при каких условиях данная функция $\Phi(y, p)$, не зависящая явно от x , является первым интегралом системы (2.34). Вычислим полную производную функции Φ по x в силу системы (2.34):

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum_{i=1}^n \left(\Phi'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + \Phi'_{p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\Phi'_{y_i} H'_{p_i} - \Phi'_{p_i} H'_{y_i} \right).$$

Выражение

$$[\Phi, H] = \sum_{i=1}^n \left(\Phi'_{y_i} H'_{p_i} - \Phi'_{p_i} H'_{y_i} \right)$$

называют *скобкой Пуассона* функций Φ и H . Таким образом,

$$\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, H],$$

и мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.5. Дифференцируемая функция $\Phi(y, p)$ является первым интегралом системы (2.34) тогда и только тогда, когда $[\Phi, H] = 0$.

2.6. Инвариантность формы представления уравнения Эйлера

Введем полезное понятие о *вариационной производной*. Рассмотрим некоторый функционал $J[y]$, определенный на требуемом (структурой интегранта) множестве функций $y(x)$, $x \in [a, b]$; допустимую вариацию $\delta y(x)$ считаем отличной от нуля

лишь в окрестности некоторой точки $a < x_0 < b$ (рис. 2.1).

Приращение функционала в точке $y(x)$:

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y].$$

Обозначим через ΔS площадь, ограниченную кривыми $y(x)$, $\tilde{y} = y(x) + \delta y(x)$, и вычислим

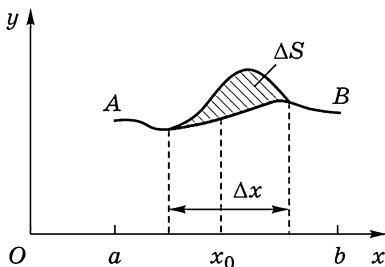


Рис. 2.1

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta S}.$$

Определение 2.1. Если вычисляемый предел существует, то его называют *вариационной производной* функционала $J[y]$ в точке $x = x_0$.

В литературе принято обозначение

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta S} = \left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{x=x_0}.$$

Выведена замечательная формула:

$$\frac{\delta J}{\delta y} = f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'}.$$

где $J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$.

Таким образом, левая часть уравнения Эйлера является вариационной производной функционала $J[y]$ на отрезке $x \in [a, b]$.

Теперь необходимое условие экстремума функционала можно сформулировать аналогично теореме Ферма: если дифференцируемый функционал достигает в точке $y^*(x)$ своего экстремума, то вариационная производная в этой точке равна нулю:

$$\left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{y=y^*} = 0.$$

Замечание 2.3. Из определения вариационной производной очевидно: если $\delta y(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и ограничивает площадь ΔS , то

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \left(\frac{\delta J}{\delta y} \right)_{x=x_0} + \varepsilon \Delta S,$$

здесь $\varepsilon \rightarrow 0$ при $|\delta y(x)| \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$.

Пусть на плоскости xOy введены криволинейные координаты (в общем случае) по формулам

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} : D = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

в рассматриваемой области изменения переменных. Это значит, что кривой $y = y(x)$ на плоскости xOy взаимно-однозначно соответствует кривая $v = v(u)$ на плоскости uOv .

При замене переменных $(x, y) \rightarrow (u, v)$ преобразуется и функционал

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b f(x, y, y') dx = J_1[v] = \\ &= \int_a^\beta f \left(x(u, v), y(u, v), \frac{y'_u + y'_v v'}{x'_u + x'_v v'} \right) (x'_u + x'_v v') du \equiv \int_a^\beta f_1(u, v, v') du, \end{aligned}$$

так как

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_u du + y'_v dv}{x'_u du + x'_v dv} = \frac{y'_u + y'_v v'}{x'_u + x'_v v'}.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Если $y^*(x) \in xOy$ является экстремалью функционала $J[y]$, то соответствующая ей (в результате преобразования координат) функция $v = v^*(u) \in uOv$ является экстремалью функционала $J_1[v]$, т. е. $v = v^*(u)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $J_1[v]$:

$$\frac{d}{du} f'_{1v'} - f'_{1v} = 0.$$

◀ Площади, ограниченные кривыми $y^*(x)$ и $y^*(x) + \delta y(x)$ (в плоскости xOy) и соответствующими кривыми $v^*(u)$ и $v^*(u) + \delta v(u)$ (в плоскости uOv), обозначим ΔS и $\Delta \sigma$.

Предел отношения этих площадей при $|\delta y| \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ равен модулю якобиана:

$$\lim_{\substack{|\delta y| \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta \sigma}{\Delta S} = |D| \neq 0.$$

Поэтому (из условия обращения вариационной производной в нуль на экстремальных) имеем:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta S} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta \sigma |D|} = 0;$$

в новых переменных:

$$\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta J_1}{\Delta \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\delta J_1}{\delta v} = f'_{1v} - \frac{d}{du} f'_{1v'} = 0.$$

Следовательно, свойство кривой «быть или не быть» экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат, в которых решается задача. ►

Пример 2.12. Найти экстремаль функционала

$$\begin{cases} J[r(\varphi)] = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi; \\ r(\varphi_0) = r_0, \quad r(\varphi_1) = r_1. \end{cases}$$

Заметим, что подынтегральное выражение есть дифференциальный элемент дуги

$$dS = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$$

поэтому в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow J[r(\varphi)] &= J_1[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \\ y(a) &= y_1, \quad y(b) = y_2. \end{aligned}$$

Так как интегрант функционала $J_1[y]$ явно от x не зависит, выписываем первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} f - y'f'_y &= C \Rightarrow C\sqrt{1+y'^2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= \sqrt{\frac{1}{C^2-1}} \equiv C_1 \Rightarrow y(x) = C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Используя формулы связи декартовой системы координат с полярной, получим

$$r \sin \varphi = C_1 r \cos \varphi + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим в силу краевых условий:

$$\begin{cases} C_1 r_0 \cos \varphi_0 + C_2 = r_0 \sin \varphi_0, \\ C_1 r_0 \cos \varphi_1 + C_2 = r_0 \sin \varphi_1. \end{cases}$$

Таким образом, при замене переменных в преобразованной краевой задаче нет необходимости вычислять новые пределы интегрирования и новые краевые условия. Вернувшись к «старым» переменным, для определения постоянных интегрирования используем «старые» краевые условия.

Пример 2.13. Найдём экстремаль функционала

$$\int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Исходя из инвариантности уравнения Эйлера, переходим к полярным координатам (r, φ) :

$$J[y] = \tilde{J}_1[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi.$$

Интегрант преобразованного функционала явно от φ не зависит. Запишем первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} r' \tilde{f}'_{r'} - \tilde{f} &= \frac{r^3}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = C_1 \Rightarrow r^3 = C_1 \sqrt{r^2 + r'^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1 r' &= r \sqrt{r^4 - C_1^2} \Rightarrow C_1 \frac{dr}{r \sqrt{r^4 - C_1^2}} = d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \arccos \frac{C_1}{r^2} = \varphi + \beta \quad (C_2 \equiv \beta) \Rightarrow r^2 \cos(2\varphi + \beta) = C_1.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, учитывая, что

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

получим

$$x^2 \cos \beta - 2xy \sin \beta - y^2 \cos \beta = C_1.$$

2.7. Простейшая задача в параметрической форме

В приведенных ранее задачах искомое решение представлялось в виде $y = y(x)$. При этом мы должны ограничивать рассмотрение простыми кривыми: прямые, параллельные оси Oy , пересекают искомую кривую $y = y(x)$ только в одной точке.

Это ограничение существенно сужает круг рассматриваемых задач. Кроме того, при задании кривой в виде $y = y(x)$ координаты x и y неравноправны и поэтому получаемые формулы несимметричны относительно x и y .

Переходим к параметрическому заданию кривых:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Известно, что одна и та же геометрическая кривая допускает бесчисленное множество параметрических представлений, получаемых посредством преобразования параметра t :

$$t = \chi(\tau) \Rightarrow x = \varphi[\chi(\tau)] = \varphi_1(\tau), \quad y = \psi[\chi(\tau)] = \psi_1(\tau).$$

При этом

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \chi'(\tau), \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \chi'(\tau).$$

Для взаимно-однозначной связи между параметрами t и τ достаточно, чтобы функция $\chi(\tau)$ была монотонной.

Пусть $\chi(\tau)$ возрастает, тогда при возрастании параметров t и τ обход дуги кривой происходит в одном и том же направлении. Считаем, что $\chi(\tau)$ имеет непрерывную положительную производную $\frac{dt}{d\tau} = \chi'(\tau) > 0$, чтобы существовала непрерывная производная обратной функции $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\chi'(\tau)}$.

Рассмотрим функционал простейшей задачи

$$J = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

После введения параметра t имеем:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \dot{x} dt.$$

Интегрант $\dot{x} f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ есть функция однородная первой степени относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$, так как, умножив на $k > 0$, получим:

$$k \dot{x} f\left(x, y, \frac{k \dot{y}}{k \dot{x}}\right) = k \dot{x} f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right).$$

Обратно, пусть дан функционал, взятый вдоль некоторой кривой γ :

$$J = \int_{\gamma} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

Если можно принять за параметр x , то

$$\begin{aligned} \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} &\Rightarrow f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f(x, y, 1, y') = \\ &= \tilde{f}(x, y, y') \Rightarrow \int_{\gamma} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \int_a^b \tilde{f}(x, y, y') dx. \end{aligned}$$

Таким образом, интегралы $\int_{\gamma} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$ при специальном

выборе параметра $x = t$ переходят в интегралы $\int_a^b \tilde{f}(x, y, y') dx$, изученные ранее.

С другой стороны, вводя в интегралы $\int_a^b \tilde{f}(x, y, y') dx$ параметрическое представление кривой, получаем функционалы, для интегрантов которых выполняется условие однородности. Из этого условия в силу теоремы Эйлера об однородных функциях (первой степени относительно $\dot{x}, \dot{y}$) имеем:

$$f = \dot{x}f'_x + \dot{y}f'_y.$$

Дифференцируем это равенство по $\dot{x}$, затем — по $\dot{y}$:

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_x + \dot{x}f''_{xx} + \dot{y}f''_{yx}, & f'_y &= \dot{x}f''_{xy} + f'_y + \dot{y}f''_{yy} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}f''_{xx} + \dot{y}f''_{yx} = 0, \\ \dot{x}f''_{xy} + \dot{y}f''_{yy} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу равенства смешанных производных ($f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая) получим

$$\begin{aligned} -f''_{yx} &= \frac{\dot{x}f''_{xx}}{\dot{y}} = \frac{\dot{y}f''_{yy}}{\dot{x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{f''_{xx}}{\dot{y}^2} &= -\frac{f''_{yx}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{f''_{yy}}{\dot{x}^2} \equiv -F_1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Итак, если интегрант $f(x, y, y')$ удовлетворяет условию однородности, то функционал

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

зависит только от вида кривой и не зависит от выбора ее параметрического представления.

Распространяем теорию, развитую для функционалов, вычисляемых на отрезке $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x, y, y') dx$$

на функционалы от кривых.

Говорят, что кривые, заданные в виде

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

принадлежат множеству $C_1[t_0, t_1]$, если $x(t), y(t) \in C_1$; при этом считаем, что $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, т. е. в каждой точке кривой определена касательная (угол с осью Ox $\varphi = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если $\dot{x} = 0$).

Кривая γ_1 находится в слабой окрестности кривой γ , если между точками этих кривых установлено взаимно-однозначное соответствие так, чтобы

1) расстояния между соответствующими точками не превосходили некоторого $\varepsilon > 0$;

2) углы между касательными, проведенными в соответствующих точках, различались не более, чем на $\varepsilon > 0$.

Далее распространяем понятия «слабый и сильный экстремумы» на функционалы от кривых:

$$J = \int_{\gamma} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Ставим задачу — найти экстремум функционала на гладких кривых, соединяющих две заданные точки на плоскости xOy :

$$J = \int_{\gamma} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \rightarrow \text{extr.}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. Если кривая, заданная параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, доставляет функционалу $J_1[\gamma]$ экстремум, то

1) $x(t), y(t)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} f'_x - f'_x = 0; \\ \frac{d}{dt} f'_y - f'_y = 0; \end{cases} \quad (2.37)$$

2) краевыми условиями для системы (2.37) являются условия прохождения экстремалей системы через заданные точки:

$$t = t_0 \Rightarrow x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0;$$

$$t = t_1 \Rightarrow x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1.$$

Однако уравнения (2.37) не являются независимыми.

Действительно, если для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеем

$$\delta J[\gamma] = 0,$$

то для γ_1 : $x = x[\varphi(t)]$, $y = y[\varphi(t)]$ ($t \rightarrow \varphi(t)$) также $\delta J[\gamma_1] = 0$, поскольку определенный интеграл инвариантен относительно замены переменной.

Таким образом, если кривая γ — экстремаль системы (2.37), то γ_1 также является экстремалью (2.37) в силу инвариантности уравнения Эйлера. Отсюда следует, что одну из функций — $x(t)$ или $y(t)$ — можно задать произвольно, после чего другую определить, интегрируя любое уравнение системы (2.37).

Итак, рассматриваем функционалы с интегрантами $f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, однородными первой степени относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$. По теореме Эйлера для однородных функций:

$$f = \dot{x}f'_x + \dot{y}f'_y.$$

Отсюда, дифференцируя по x , затем по y , получим

$$\begin{cases} f'_x = \dot{x}f''_{xx} + \dot{y}f''_{yx}; \\ f'_y = \dot{x}f''_{xy} + \dot{y}f''_{yy}, \end{cases}$$

Учитывая полученные соотношения, запишем подробные выражения уравнений Эйлера (2.37):

$$\begin{aligned} 1) \quad f'_x - \frac{d}{dt}f'_x &= (\dot{x}f''_{xx} + \dot{y}f''_{yx}) - (\dot{x}f''_{xx} + \dot{y}f''_{xy} + \ddot{x}f''_{x\dot{x}} + \dot{y}f''_{x\dot{y}}) = \\ &= \dot{y} \left(f''_{yx} - f''_{xy} - \ddot{x} \frac{f''_{x\dot{x}}}{\dot{y}} - \dot{y} \frac{f''_{x\dot{y}}}{\dot{y}} \right) = \\ &= \dot{y} \left(f''_{yx} - f''_{xy} - \ddot{x} \dot{y} \frac{f''_{x\dot{y}}}{\dot{y}^2} - \dot{y} \frac{f''_{x\dot{y}}}{\dot{y}^2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'_x - \frac{d}{dt}f'_x = \dot{y} (f''_{yx} - f''_{xy} - F_1(\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y})) = 0 \end{aligned}$$

в силу равенств (2.36);

$$2) \quad f'_y - \frac{d}{dt}f'_y = -\dot{x} (f''_{yx} - f''_{xy} - F_1(\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y})) = 0.$$

Из этих двух представлений, вследствие того что $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ одновременно в нуль не обращаются, имеем уравнение Эйлера в *форме Вейерштрасса*:

$$f''_{xy} - f''_{yx} - F_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y) = 0. \quad (2.38)$$

Отсюда получим формулу для кривизны искомой экстремали. Действительно, при параметрическом задании плоской кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ кривизна вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\left(\operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Из (2.38) имеем также

$$\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}y = \frac{f''_{xy} - f''_{yx}}{F_1} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{R} = \frac{f''_{xy} - f''_{yx}}{F_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (2.39)$$

Продemonстрируем приложения полученной формулы Вейерштрасса (2.39).

Пример 2.14. Пусть интегрант функционала имеет вид:

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = A(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Очевидно, что $f(\cdot)$ — однородная первой степени относительно $\dot{x}, \dot{y}$, дважды дифференцируемая функция.

Тогда соответствующий функционал

$$J = \int_{\gamma} A(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\gamma} A(x, y) dS.$$

Отметим, что подобный вид имеют функционалы в задачах Ферма (траектория луча света) и И. Бернулли (брахистохрона).

Это обстоятельство — аналогию между принципами Ферма (оптика) и Мопертюи (механика) — сформулировал и использовал Гамильтон для построения своей системы уравнений механики.

Считаем $A(x, y)$ положительной непрерывно дифференцируемой функцией.

Имеем:

$$f(\bullet) = A(x, y) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Rightarrow f''_{xy} = A'_x \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = A'_x \sin \alpha,$$

где α — угол между касательной к экстремали и осью Ox ;

$$f''_{yx} = A'_y \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = A'_y \cos \alpha;$$

$$f''_{xy} = \left(A \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)'_{\dot{y}} = - \frac{A \dot{x} \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Получим из (2.36) выражение функции $F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{f''_{xy}}{\dot{x} \dot{y}} = - \frac{A(x, y)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{1}{R} = - \frac{1}{A} (A'_y \cos \alpha - A'_x \sin \alpha). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Рассмотрим линии уровня поверхности $z = A(x, y)$ (рис. 2.2).
Имеем:

$$\text{grad } A = \frac{\partial A}{\partial n} n,$$

где n — единичная нормаль к линии уровня;

$$\begin{aligned} \varphi &= \angle(n, Ox) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial n} n &= \frac{\partial A}{\partial n} \cos \varphi \cdot i + \frac{\partial A}{\partial n} \sin \varphi \cdot j; \end{aligned}$$

с другой стороны,

$$\text{grad } A = \frac{\partial A}{\partial x} i + \frac{\partial A}{\partial y} j.$$

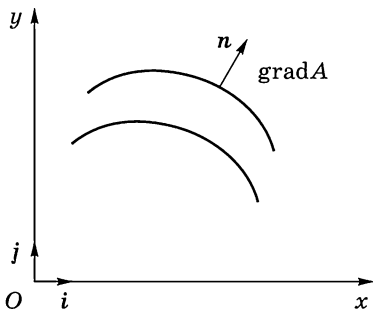


Рис. 2.2

Следовательно,

$$A'_x = \frac{\partial A}{\partial n} \cos \varphi, \quad A'_y = \frac{\partial A}{\partial n} \sin \varphi.$$

Тогда из (2.40) получим:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{R} = -\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \sin \varphi \cos \alpha - \frac{\partial A}{\partial n} \cos \varphi \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} \sin(\alpha - \varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln A \right) \sin(\alpha - \varphi). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Согласно принципу Ферма, траекторией луча света являются экстремали функционала

$$\int_{\gamma} \frac{dS}{v(x, y)},$$

где $v(x, y)$ — скорость света в оптически плотной среде.

Здесь $v(x, y) = \frac{1}{A(x, y)}$, поэтому из (2.41) получим выраже-

ние для кривизны траектории луча света:

$$\kappa = \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln v \right) \sin(\varphi - \alpha). \quad (2.42)$$

Если оптическая среда однородна и изотропна, то скорость света — постоянная величина v_0 . Тогда из (2.42) получим $\kappa = 0$, т. е. траектории световых лучей — прямые, исходящие из источника света.

Пример 2.15. Найти экстремали функционала

$$J[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2(\dot{x}y - y\dot{x}) \right] dt.$$

Нетрудно заметить, что интегрант является однородной функцией первого порядка относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Воспользуемся вейерштрассовой формой уравнения Эйлера и вычислим радиус кривизны возможной экстремали (см. (2.39)):

$$\frac{1}{R} = (f''_{x\dot{y}} - f''_{\dot{x}y}) / F_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}.$$

Поскольку

$$f''_{x\dot{y}} = a^2; \quad f''_{\dot{x}y} = -a^2; \quad F_1 = \frac{f''_{x\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2},$$

получим $1/R = 2a^2$, т. е. экстремали есть либо дуги окружностей с фиксированными концами, либо полные окружности, если $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

В некоторых случаях независимости функционала от представления кривой полезно перейти к виду $y = y(x)$.

Пример 2.16. Найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_{(0,0)}^{(1,2)} \frac{\dot{y}^2 - 3e^{\dot{y}/\dot{x}} \dot{x}^2}{\dot{x}} dt.$$

Обозначим $y' = \frac{dy}{dx}$ и преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 3e^{y'} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}} dt = \frac{(dy)^2 - 3e^{y'} (dx)^2}{dx} = (y'^2 - 3e^{y'}) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J[y] = \int_0^1 (y'^2 - 3e^{y'}) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

Для преобразованного функционала запишем уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (2y' - 3e^{y'}) &= 2y'' - 3e^{y'} y'' = y'' (2 - 3e^{y'}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_1 x + C_2 \quad \text{или} \quad y' = \ln \frac{2}{3} \Rightarrow y = \ln \frac{2}{3} x + C. \end{aligned}$$

Второе решение не позволит удовлетворить граничным условиям.

Первое решение дает: $y = 2x$.

Пример 2.17. Функционал задан в виде

$$J[y] = \int_{(-1,0)}^{(1,0)} \left(a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \dot{x}y \right) dt;$$

$$x = x(t), y = y(t), t_0 \leq t \leq t_1; a \geq 0.$$

Найти экстремали, проходящие через точки $A(-1, 0), B(1, 0) \in XOY$.

1. Решим задачу в представлении Вейерштрасса:

$$\frac{1}{r} = \frac{f''_{\dot{x}y} - f''_{\dot{y}x}}{F_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

После несложных вычислений получим:

$$f''_{\dot{x}y} = 1; f''_{\dot{y}x} = 0; F_1 = \frac{f''_{\dot{x}y}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{a}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3} \Rightarrow \frac{1}{r} = a \text{ — искомые экс-}$$

тремали — окружности, радиусы которых $r = 1/a$.

Так как окружности проходят через точки $A(-1, 0), B(1, 0)$, их центры располагаются на оси Oy .

2. Будем искать экстремаль в виде $y = y(x)$:

$$\left(a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \dot{x}y \right) dt = \left(a\sqrt{1 + y'^2} + y \right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J[y] = \int_{-1}^1 \left(a\sqrt{1 + y'^2} + y \right) dx \rightarrow \text{extr}, \\ y(-1) = 0; y(1) = 0. \end{cases}$$

Первый интеграл запишем в виде:

$$y'f'_{y'} - f = C_1 \Rightarrow 1 + y'^2 = \frac{a^2}{(C_1 + y)^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - (C_1 + y)^2}}{C_1 + y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + C_2)^2 + (y + C_1)^2 = a.$$

Используем граничные условия:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(-1)=0 \\ y(1)=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (-1+C_2)^2 + C_1^2 = a^2 \\ (1+C_2)^2 + C_1^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_2=0, \quad C_1=\pm\sqrt{a^2-1} \Rightarrow x^2 + \left(y \pm \sqrt{a^2-1}\right)^2 = a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве экстремалей получили окружности радиуса a , центры которых лежат на оси Oy .

2.8. Принцип Гамильтона. Интеграл энергии

Продemonстрируем некоторые приложения принципа Гамильтона к задачам механики.

Рассмотрим систему материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и координатами $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, n}$. Предполагаем отсутствие каких-либо связей, наложенных на точки системы. Кинетическая энергия такой системы равна

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

где $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ — производные по времени t .

Систему сил, действующих на точки m_i , считаем потенциальной, т. е. существует такая дифференцируемая (пусть дважды) функция координат $U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$, что компоненты силы, действующей на i -ю точку, выражаются в виде частных производных по соответствующим координатам:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Потенциальной энергией назовем функцию координат точек (x_i, y_i, z_i) , равную потенциалу системы, взятому с обратным знаком:

$$\Pi = -U.$$

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*

$$L = T + U = T - \Pi,$$

т. е. функция Лагранжа есть дважды дифференцируемая функция от скоростей и координат материальных точек механической системы.

Пусть система совершает движение за фиксированное время $(t_1 - t_0)$ из начального состояния $A(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$ в фиксированное состояние $B(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$.

Определение 2.2. Действием по Гамильтону называют функционал

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt.$$

Система из состояния $A(t_0)$ в состояние $B(t_1)$ может перейти по любой дуге $\widehat{AB} \in \mathbb{R}^{3n}$ — кинематически возможной траектории (т. е. согласной с наложенными связями, если они имеются).

Сформулируем *принцип Гамильтона* (1834 г.): истинное движение системы между двумя заданными конфигурациями A и B отличается от кинематически возможных движений, совершаемых за одно и то же время $(t_1 - t_0)$, тем, что на истинной траектории действие по Гамильтону стационарно:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0.$$

Таким образом, вариация функционала S равна нулю на действительной траектории.

Замечание 2.4. Можно привести многочисленные примеры, когда стационарность функционала S означает минимум действия по Гамильтону на действительной траектории.

Поэтому в литературе принцип Гамильтона часто называют *принципом наименьшего действия*.

Итак, постулируем принцип Гамильтона и ставим задачу вариационного исчисления:

$$\begin{cases} S(x, y, z) = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt \rightarrow \text{extr}, \\ t = t_0: x, y, z = x_0, y_0, z_0, \\ t = t_1: x, y, z = x_1, y_1, z_1. \end{cases}$$

Выписываем систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(T+U)'_{\dot{x}_i} - (T+U)'_{x_i} = 0; \\ \frac{d}{dt}(T+U)'_{\dot{y}_i} - (T+U)'_{y_i} = 0; \\ \frac{d}{dt}(T+U)'_{\dot{z}_i} - (T+U)'_{z_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Учитывая структуру каждой из функций T и U :

$$T = T(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i), \quad U = U(x_i, y_i, z_i),$$

из системы (2.43) получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i - U'_{x_i} = 0; \\ \frac{d}{dt} m_i \dot{y}_i - U'_{y_i} = 0; \\ \frac{d}{dt} m_i \dot{z}_i - U'_{z_i} = 0. \end{cases}$$

В силу связи компонент действующих сил с потенциалом U окончательно можно записать уравнения Ньютона движения системы n свободных материальных точек:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i.$$

Принцип Гамильтона справедлив и в том случае, когда на систему наложены голономные связи (даже в отсутствие потенциала действующих сил). Тогда допустимые траектории S должны быть кинематически возможными, и принцип стационарного действия приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

Продолжим рассмотрение системы n свободных точек:

$$T = T(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i), \quad U = U(x_i, y_i, z_i).$$

Как показано ранее, уравнения движения являются следствием принципа Гамильтона как необходимые условия экстремума функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt.$$

Вводим канонические переменные:

$$p_x^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad p_y^i = m\dot{y}_i, \quad p_z^i = m\dot{z}_i.$$

Здесь p_x^i , p_y^i , p_z^i представляют собой компоненты количества движения i -й материальной точки — импульсы.

Функция Гамильтона для интегранта функционала S

$$H = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i p_x^i + \dot{y}_i p_y^i + \dot{z}_i p_z^i) - L = 2T - T - U = T + \Pi$$

есть полная механическая энергия системы.

Пусть система консервативна, т. е. ее функция Лагранжа не зависит явно от времени (от независимого переменного).

В этом случае $H = \text{const}$ вдоль действительной траектории (экстремали), т. е. полная механическая энергия консервативной системы остается постоянной величиной при эволюциях механической системы.

Замечание 2.5. Принцип был изложен Гамильтоном в работах 1834–1835 годов для случая стационарных связей. Независимо от Гамильтона и в более общей форме (нестационарные связи) принцип сформулирован в 1849 году М.В. Остроградским. Поэтому в литературе этот принцип часто называют принципом Гамильтона — Остроградского.

Вопросы и задачи

2.1. Найдите все экстремали функционала $I[y]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

$$\text{а) } I[y] = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 - y^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$\text{б) } I[y] = \int_0^1 \left((y')^2 + 12xy \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{в) } I[y] = \int_{\pi}^{2\pi} \left(4(y')^2 - 7yy' - y^2 \right) dx, \quad y(\pi) = 0, \quad y(2\pi) = 0;$$

$$\text{г) } I[y] = \int_0^{\pi/8} \left(16y^2 + (y')^2 + 2y(\sin 2x + 16x) \right) dx, \quad y(0) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\pi}{8};$$

$$\text{д) } I[y] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(3x^2 y^2 + \cos y + y'(2x^3 y - x \sin y) \right) dx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$\text{е) } I[y] = \int_2^4 \left(x(y')^4 + 2y(y')^3 \right) dx, \quad y(2) = 1, \quad y(4) = 5;$$

$$\text{ж) } I[y] = \int_0^1 \left((y')^2 - x^6 y' - 2xy \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{6};$$

$$\text{з) } I[y] = \int_0^1 \operatorname{tg} y' dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2;$$

$$\text{и) } I[y] = \int_0^1 \left((y')^2 + \frac{2xy}{1+x^2} \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -2.$$

2.2. Среди плоских кривых, соединяющих две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , найдите ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади (см. пример 1.4).

2.3. Покажите, что функционал

$$I[y] = \int_a^b (p(x)y' + q(x)y + r(x)) dx,$$

где $p(x) \in C^1[a, b]$, $q(x), r(x) \in C[a, b]$, не имеет экстремумов.

2.4. Покажите, что для всякого дифференциального уравнения $y'' = \varphi(x, y, y')$ с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью $\varphi(x, y, y')$ можно найти такую функцию

$f(x, y, y')$, что решения этого уравнения* будут экстремалиями функционала $\int_a^b f(x, y, y') dx$.

2.5. Найдите функции $y_1(x), y_2(x) \in C^1[a, b]$, на которых может достигаться экстремум функционала при данных краевых условиях:

$$\text{а) } I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = -1;$$

$$\text{б) } I[y_1, y_2] = \int_1^3 (x(y_1')^2 (y_2')^2 + x y_1 y_2) dx, \quad y_1(1) = 1,$$

$$y_1(3) = \ln 3 + 1, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2(3) = 0;$$

$$\text{в) } I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 3 y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = 0,$$

$$y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = -1;$$

$$\text{г) } I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/4} (2 y_1 - 4 y_2^2 + (y_2')^2 - (y_1')^2) dx, \quad y_1(0) = 0,$$

$$y_1(\pi/4) = 1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi/4) = 1;$$

$$\text{д) } I[y_1, y_2] = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2 y_1) dx, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_1(1) = 3/2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = 1;$$

$$\text{е) } I[y_1, y_2] = \int_2^3 (x(y_1')^2 + (y_2')^2 + x y_1' y_2') dx, \quad y_1(2) = \ln 3,$$

$$y_1(3) = \ln 3, \quad y_2(2) = \ln 2, \quad y_2(3) = 0.$$

* См. Н.Н. Ахиезер.

2.6. Найдите все экстремали функционала, удовлетворяющие данным краевым условиям:

$$\text{а) } I[y] = \int_0^1 (120xy - y'') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$y'(1) = 6;$$

$$\text{б) } I[y] = \int_0^{\pi/2} \left((y'')^2 - y^2 + x^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi/2) = -1;$$

$$\text{в) } I[y] = \int_0^b \left((y'')^2 + (y')^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$y'(b) = 0;$$

$$\text{г) } I[y] = \int_0^1 \left((y'')^2 + y^2 - 2yx^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1;$$

$$\text{д) } I[y] = \int_0^1 \left((y''')^2 - (y'')^2 \right) dx, \quad y(0) = y''(0) = 0,$$

$$y(1) = y''(1) = \text{sh } 1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = \text{ch } 1;$$

$$\text{е) } I[y] = \int_0^1 (y''')^2 dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

$$y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12;$$

$$\text{ж) } I[y] = \int_0^{\pi} \left((y'')^2 - (y')^2 \right) dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$$

$$y(\pi) = y''(\pi) = \text{sh } \pi, \quad y'(\pi) = \text{ch } \pi + 1.$$

2.7. Напишите уравнение Остроградского для следующих функционалов:

$$\text{а) } J[z] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad D \subset \mathbb{R}^2;$$

$$\text{б) } J[u] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz,$$

$$D \subset \mathbb{R}^3.$$

2.8. Пусть функции $\Phi(x, y, p)$ и $H(x, y, p)$ таковы, что $\Phi'_x \neq 0$, $H'_x \neq 0$. Докажите, что если H — функция Гамильтона вариационной задачи, то вдоль любой интегральной кривой системы уравнений Эйлера выполняется равенство

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H].$$

2.9. Имеет ли смысл вариационная задача:

$$\begin{cases} J[y] = \int_a^b (y^2 + 2xy') dx \rightarrow \text{extr}; \\ y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2? \end{cases}$$

2.10. Дан функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2.$$

Покажите, что если добавить к интегранту полный дифференциал любой дифференцируемой функции $u = u(x, y)$, то уравнение Эйлера не изменится.

2.11. Найдите экстремали функционала

$$J[\gamma] = \int_a^b \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2(xy - \dot{x}y) \right] dt.$$

2.12. Найдите экстремали функционала

$$\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\dot{y}^2 - y^2 \dot{x}^2}{\dot{x}} dt,$$

перейдя к представлению кривой в виде $y = y(x)$.

2.13. Докажите, что функционал

$$J[y] = \int_0^1 (x^2 + y^4) dx, \quad y \in C[0, 1]$$

достигает на $y(x) \equiv 0$ строгого минимума.

3. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Наряду с рассмотренными вариационными задачами, в которых допустимые функции были определены на фиксированном отрезке $[a, b]$, причем концевые точки $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$ графика функции были закреплены, часто необходимо решать и иные задачи, в которых экстремум функционала, заданного интегралом, ищем среди функций, определенных на разных промежутках, причем значения этих функций на концах промежутка не являются фиксированными. Для таких задач можно использовать ранее полученные результаты (см. 2).

3.1. Задача с подвижными концами

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (3.1)$$

областью определения которого является класс функций $C^1[a, b]$. Она отличается от задач, рассмотренных ранее, тем, что на допустимые функции нет ограничений в виде краевых условий. С геометрической точки зрения такая задача состоит в определении кривой, являющейся графиком функции, концы которой расположены на вертикальных прямых $x = a$, $x = b$ (рис. 3.1) и для которой соответствующее значение функционала является экстремальным. Такого рода задачу будем называть *вариационной задачей с подвижными концами*.

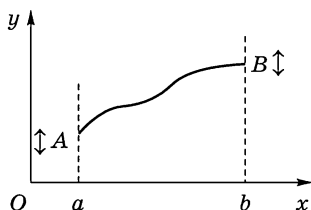


Рис. 3.1

Будем считать, что *интегрант* рассматриваемого функционала — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Отметим, что допустимой вариацией в данном случае является любая функция $\delta y(x) \in C^1[a, b]$. Как и выше, используя формулу Тейлора, убеждаемся, что первая вариация функционала (3.1) может быть представлена следующим образом (см. (2.3)):

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx. \quad (3.2)$$

Если функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то первая вариация функционала на этой функции равна нулю (см. теорему 1.2). Значит, для любой функции $\delta y \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx = 0. \quad (3.3)$$

Отметим, что это равенство верно в том числе и для бесконечно дифференцируемых функций с нулевыми значениями на концах отрезка $[a, b]$. Значит, согласно лемме Дюбуа-Реймона, функция $y(x)$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y = 0, \quad (3.4)$$

т. е. является экстремалью рассматриваемого функционала.

Однако условие (3.3) в задаче с подвижными концами сильнее условий леммы Дюбуа-Реймона и позволяет получить дополнительные необходимые условия на функцию, доставляющую экстремум функционалу. Если функционал $J[y]$ не является *вырожденным*, т. е. его интегрант удовлетворяет условию $f''_{yy'} \neq 0$, то, согласно теореме 2.2, экстремаль является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. В этом случае в силу правила интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y] &= \int_a^b \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right) dy dx + f'_{y'} \delta y \Big|_a^b = \\ &= \int_a^b \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right) dy dx + f'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - f'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интеграл в правой части (3.5) на экстремали обращается в нуль. Поэтому если $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то

$$f'_y|_{x=b} \delta y(b) - f'_y|_{x=a} \delta y(a) = 0. \quad (3.6)$$

Поскольку $\delta y(a)$ и $\delta y(b)$ в рассматриваемой задаче могут меняться совершенно независимо, заключаем, что последнее равенство равносильно следующим двум:

$$f'_y|_{x=b} = 0, \quad f'_y|_{x=a} = 0. \quad (3.7)$$

Итак, *точки экстремума* функционала $J[y]$ в задаче с подвижными концами удовлетворяют уравнению Эйлера (3.4) и, кроме того, двум дополнительным условиям (3.7), которые называют *естественными краевыми условиями*. Чтобы найти эти точки, нужно среди решений уравнения Эйлера (экстремалей функционала) выделить те, которые удовлетворяют естественным краевым условиям.

Для функционала вида (3.1) можно поставить и «смешанную» задачу, в которой, например, левый конец графика решения — точка $A(a, y_A)$ — является фиксированным, а правый конец свободно перемещается вдоль прямой $x = b$. В этом случае есть одно краевое условие, сужающее множество допустимых функций. Допустимая вариация должна удовлетворять условию $\delta y(a) = 0$, так как все допустимые функции имеют одинаковое значение при $x = a$. В равенстве (3.6) обнуляется одно слагаемое, и это равенство сводится к первому условию (3.7). Значит, среди экстремалей следует искать такие функции $y(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$y(a) = y_A, \quad f'_y|_{x=b} = 0. \quad (3.8)$$

Пример 3.1. Найдем экстремали функционала в следующей вариационной задаче с правым подвижным концом:

$$J[y] = \int_0^{\pi/4} ((y')^2 - y^2 + 4y \cos x) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0.$$

Данная постановка задачи означает, что среди экстремалей функционала нужно выделить те, которые удовлетворяют

поставленному краевому условию на левом конце и естественному краевому условию на правом конце.

Уравнение Эйлера рассматриваемого функционала имеет вид $y'' + y = 2 \cos x$. Его общее решение можно записать так:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x.$$

Из краевого условия на левом конце находим $C_1 = 0$. На правом конце естественное краевое условие имеет вид

$$(2y')\big|_{x=\pi/4} = 0,$$

или $y'(\pi/4) = 0$. Используя его, определяем постоянную C_2 : $C_2 = -1 - \frac{\pi}{4}$. Таким образом, поставленным условиям удовлетворяет единственная экстремаль функционала

$$y = \left(x - 1 - \frac{\pi}{4} \right) \sin x.$$

Пример 3.2. Найдём в вертикальной плоскости xOy кривую, скатываясь по которой без трения, тяжёлая точка достигнет данной вертикальной прямой за кратчайшее время. Предполагаем, что начальное положение точки — начало координат, а вертикальная прямая задается уравнением $x = b$ (рис. 3.2).

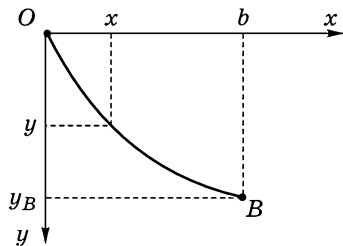


Рис. 3.2

Эту задачу можно трактовать как модификацию задачи о брахистохроне (см. пример 2.7). Отличие состоит в том, что правый конец искомой кривой пересекает прямую $x = b$ в некоторой, заранее не известной точке.

Экстремальми рассматриваемого функционала является семейство циклоид (см. (2.6)):

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 (\Theta - \sin \Theta); \\ y = \tilde{C}_1 (1 - \cos \Theta), \end{cases}$$

где значение $\Theta = 0$ параметра соответствует начальной точке $x = 0, y = 0$.

Чтобы определить $\tilde{C}_1$, воспользуемся вторым краевым условием (3.8):

$$f'_y|_{x=b} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} \Big|_{x=b} = 0.$$

Отсюда находим, что $y'(b) = 0$, т. е. правый конец искомой кривой пересекает вертикальную прямую под прямым углом.

Так как, согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически [II],

$$y' = \frac{f'_\Theta}{x'_\Theta} = \frac{\tilde{C}_1 \sin \Theta}{\tilde{C}_1 (1 - \cos \Theta)} = 0,$$

а параметр Θ может меняться лишь в пределах интервала $(0, 2\pi)$, то либо $\Theta = 0$, либо $\Theta = \pi$. Первое значение соответствует левому концу графика функции, поэтому для правого конца $\Theta = \pi$. Из условия $x(\Theta) = b$ получаем $\tilde{C}_1 \pi = b$, откуда $\tilde{C}_1 = b/\pi$. Таким образом, *необходимым условием экстремума функционала* удовлетворяет единственная функция, имеющая параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = \frac{b}{\pi}(\Theta - \sin \Theta); \\ y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos \Theta). \end{cases}$$

Как и в примере 2.7, мы пока не можем утверждать, что найденная функция действительно доставляет рассматриваемому функционалу наименьшее значение, т. е. движение по циклоиде происходит за наименьшее время.

3.2. Задача с подвижными границами

Задача с подвижными концами, рассмотренная выше, легко обобщается. Действительно, если вернуться на геометрическую точку зрения, то легко сформулировать вариационную задачу, в которой концы графика функции лежат не на вертикальных прямых, а на произвольных кривых или вообще не подчиняются каким-либо ограничениям, т. е. являются

свободными. Особенность подобных задач состоит в том, что область определения допустимых функций не фиксирована и меняется от функции к функции. Такие задачи мы объединим общим названием: *вариационные задачи с подвижными границами*.

Как корректно сформулировать задачу, если функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (3.9)$$

порождаемый дважды непрерывно дифференцируемой функцией f , рассматривается на множестве функций $y(x)$ с разными областями определения $[a, b]$? Отметим следующее. Если функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем в конечных точках существуют односторонние производные, то эту функцию можно продолжить на больший отрезок $[a_0, b_0]$ так, что построенная функция $\tilde{y}(x)$ будет непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a_0, b_0]$. Учитывая это, можно сформулировать задачу следующим образом: найти экстремум функционала

$$J[y, a, b] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

на классе функций $C^1[a_0, b_0]$ и при значениях параметров $a_0 \leq a \leq b \leq b_0$.

Нам удалось сформулировать вариационную задачу так, что областью определения функционала, как и ранее, является линейное пространство. Однако это пространство не является нормированным, так как «естественная» норма пространства $C^1[a_0, b_0]$ не отражает действительную степень близости функций, включая и конечные точки. Близость функций в данном случае можно задать при помощи расстояния. Для произвольных функций $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ с конечными точками $A(a, y(a))$, $B(b, y(b))$ и $\tilde{A}(\tilde{a}, y(\tilde{a}))$, $\tilde{B}(\tilde{b}, y(\tilde{b}))$ положим

$$\rho(\tilde{y}, y) = \max_T (|\tilde{y}(x) - y(x)| + |\tilde{y}'(x) - y'(x)|) + |A\tilde{A}| + |B\tilde{B}|,$$

где $T = [a, b] \cap [\tilde{a}, \tilde{b}]$ (рис. 3.3).

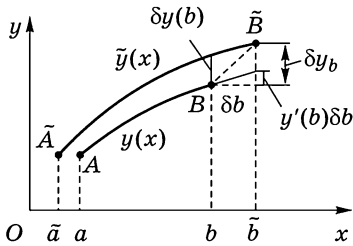


Рис. 3.3

Окрестностью функции $y(x)$ с концевыми точками $(a, y(a))$, $(b, y(b))$ в данном случае является множество функций $\tilde{y}(x)$ с концевыми точками $(\tilde{a}, \tilde{y}(\tilde{a}))$, $(\tilde{b}, \tilde{y}(\tilde{b}))$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\tilde{y}, y) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Несмотря на то что поставленная задача не вписывается в рамки теоремы 1.2 и мы не можем напрямую использовать введенные ранее понятия дифференциала Фреше или дифференциала Гато, основная схема получения необходимых условий экстремума функционала применима и в этом случае. Приращение функционала будет зависеть не только от вариации функции $\delta y = \tilde{y} - y$, но и от вариаций подвижных границ $\delta a = \tilde{a} - a$ и $\delta b = \tilde{b} - b$. Отметим, что если $\delta y, \delta a, \delta b$ — тройка допустимых вариаций для функционала $J[y, a, b]$, то существует такое достаточно малое число $\sigma > 0$, что при $|\alpha| < \sigma$ тройка вариаций $\alpha \delta y, \alpha \delta a, \alpha \delta b$ является допустимой. Следовательно, для фиксированной тройки $\delta y, \delta a, \delta b$ в окрестности точки $\alpha = 0$ определена функция

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha \delta y, a + \alpha \delta a, b + \alpha \delta b].$$

Если функция $y(x)$ является точкой экстремума функционала $J[y, a, b]$, то функция $\varphi(\alpha)$ будет иметь экстремум при $\alpha = 0$. Если при этом функция $\varphi(\alpha)$ дифференцируема в точке $\alpha = 0$, то, согласно необходимому условию экстремума для функции одного переменного, выполняется равенство $\varphi'(\alpha) = 0$.

Применим изложенную схему к функционалу $J[y, a, b]$ конкретного вида (3.9), предполагая, что интегрант f функционала — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Пусть функция $y(x)$ с концевыми точками $(a, y(a))$, $(b, y(b))$ доставляет экстремум функционалу $J[y, a, b]$. Запишем функцию $\varphi(\alpha)$, задавшись некоторыми вариациями $\delta y, \delta a, \delta b$:

$$\varphi(\alpha) = \int_{a+\alpha\delta a}^{b+\alpha\delta b} f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') dx.$$

Дифференцирование функции $\varphi(\alpha)$ — это дифференцирование интеграла по параметру, причем в данном случае от параметра

зависят и пределы интегрирования. При сделанных предположениях относительно интегранта функционала такое дифференцирование возможно, и мы имеем [VI]:

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) = & \int_{a+\alpha\delta a}^{b+\alpha\delta b} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') dx + \\ & + f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') \Big|_{b+\alpha\delta b} \delta b - f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') \Big|_{a+\alpha\delta a} \delta a, \end{aligned}$$

где $y = y(x)$, $\delta y = \delta y(x)$.

Значит,

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = & \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx + \\ & + f(x, y, y') \Big|_{x=b} \delta b - f(x, y, y') \Big|_{x=a} \delta a. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Первое слагаемое в (3.10) справа преобразуем, как и ранее (см. 3.1), с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx = \int_a^b \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right) \delta y dx + f'_{y'} \delta y \Big|_a^b. \quad (3.11)$$

Далее, полагая $\delta y_b = \tilde{y}(b + \delta b) - y(b)$, находим

$$\begin{aligned} \delta y_b &= \tilde{y}(b + \delta b) - \tilde{y}(b) + \tilde{y}(b) - y(b) \approx \\ &\approx \tilde{y}'(b) \delta b + \delta y(b) \approx y'(b) \delta b + \delta y(b). \end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассуждения для левого конца и выполнив в (3.11) соответствующие замены, из (3.10) получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = & \int_a^b \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right) \delta y dx + f'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y_b + \\ & + (f - f'_{y'} y') \Big|_{x=b} \delta b - f'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y_a - (f - f'_{y'} y') \Big|_{x=a} \delta a. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Получили формулу, в которую вариации δy , δa , δy_a , δb , δy_b входят линейно. Как и в случае задач с фиксированными концами, величину $\delta J[y, \delta y, \delta a, \delta y_a, \delta b, \delta y_b] = \varphi'(0)$ назовем *вариацией функционала* $J[y, a, b]$ в задаче с подвижными границами. Формула (3.12) вариации функционала как частные случаи содержит:

- формулу для первой вариации функционала в вариационной задаче с подвижными концами — при $\delta a = \delta b = 0$;
- формулу для первой вариации функционала в простейшей задаче вариационного исчисления — при $\delta y_a = \delta y_b = \delta a = \delta b = 0$.

По аналогии с выводом формулы (3.12) можно получить вывод формулы в более общем случае функционала, зависящего от нескольких функций, определенных на общем подвижном отрезке $[a, b]$:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (3.13)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^1[a, b]$, а функция $f(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема.

В этом случае для вариации функционала имеем

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y, \delta a, \delta y_a, \delta b, \delta y_b] = & \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(f'_{y_i} - \frac{d}{dx} f'_{y'_i} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^n f'_{y'_i} \delta y_{b,i} + \\ & + \left(f - \sum_{i=1}^n f'_{y'_i} y'_i \right) \Big|_{x=b} \delta b - \sum_{i=1}^n f'_{y'_i} \delta y_{a,i} - \left(f - \sum_{i=1}^n f'_{y'_i} y'_i \right) \Big|_{x=a} \delta a. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть функционал $J[y]$ определен на гладких функциях, концы графиков которых лежат на двух фиксированных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, определенных на $[a_0, b_0]$ (рис. 3.4). Пример вариационной задачи с такой областью определения функционала дает задача вычисления расстояния между двумя кривыми.

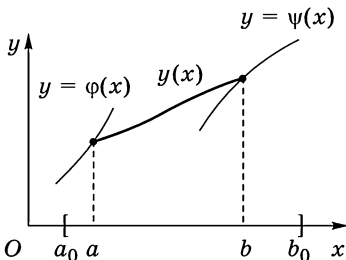


Рис. 3.4

Если некоторая функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то она является точкой экстремума среди всех функций, графики которых имеют с графиком $y(x)$ общие концевые точки. Значит, указанная функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, т. е. является экстремалью рассматриваемого функционала. Следо-

вательно, в общей формуле (3.12) для вариации функционала первое слагаемое равно нулю. Поэтому в данном случае необходимое условие экстремума принимает вид

$$f'_{y'}|_{x=b} \delta y_b + (f - f'_{y'} y')|_{x=b} \delta b - f'_{y'}|_{x=a} \delta y_a - (f - f'_{y'} y')|_{x=a} \delta a = 0.$$

Поскольку концы графиков допустимых функций лежат на фиксированных кривых, то

$$\delta y_b = \psi'(b) \delta b, \quad \delta y_a = \varphi'(a) \delta a.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y, \delta a, \delta b] &= (f + (\psi' - y') f'_{y'})|_{x=b} \delta b - \\ &- (f + (\varphi' - y') f'_{y'})|_{x=a} \delta a = 0. \end{aligned}$$

В силу независимости вариаций δa и δb

$$(f + (\psi' - y') f'_{y'})|_{x=b} = 0, \quad (f + (\varphi' - y') f'_{y'})|_{x=a} = 0, \quad (3.15)$$

что дает краевые условия в данной задаче.

Краевые условия (3.15) называют *условиями трансверсальности*. О кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям трансверсальности (3.15), говорят, что она трансверсальна кривым $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$.

Пример 3.3. Выясним геометрический смысл условий трансверсальности для часто встречающихся в приложениях функционалов вида

$$J[y] = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (3.16)$$

где $A(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция (см. примеры 1.1–1.5). Пусть этот функционал исследуется на экстремум в классе гладких функций, концы графиков которых лежат на кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы, $A(x, y) \neq 0$.

В данном случае $f(x, y, y') = A(x, y) \sqrt{1 + (y')^2}$ и

$$f'_{y'} = A(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{f y'}{1 + (y')^2}.$$

Поэтому (см. (3.15)):

$$f + f'_{y'}(\psi' - y') = f + \frac{fy'}{\sqrt{1+(y')^2}}(\psi' - y') = \frac{A}{\sqrt{1+(y')^2}}(1 + y'\psi') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + y'\psi' = 0. \quad (3.17)$$

Аналогично получим $1 + y'\phi' = 0$.

Видим, что для функционалов данного типа условия трансверсальности выражаются особенно просто: $y'(b) = -1/\psi'(b)$ в точке b и $y'(a) = -1/\phi'(a)$ в точке a .

Таким образом, условия трансверсальности экстремалей рассматриваемого функционала к кривым $y = \phi(x)$ и $y = \psi(x)$ в данной задаче с подвижными границами есть условия их ортогональности этим кривым.

3.3. Экстремали с угловыми точками

В вариационном исчислении есть задачи, в которых область определения функционала не может ограничиваться классом $C^1[a, b]$. Из самой постановки задачи может вытекать, что функция, доставляющая экстремум функционалу, в некоторых точках теряет дифференцируемость, и если она и имеет односторонние производные в такой точке, то эти производные различаются. К таким задачам относятся задачи на отражение и преломление экстремалей, являющиеся обобщением задач на отражение и преломление световых лучей.

Задача об отражении экстремалей. Эта задача ставится следующим образом. Найти кривую $y = y(x)$ (рис. 3.5), которая соединяет фиксированные точки $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$ и имеет одну угловую точку $C(c, y_C)$, расположенную на кривой $y = \phi(x)$, причем функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

В этом случае область определения функционала $J[y]$ есть множество функций, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ всюду, кроме, возможно, одной точки, являющейся угловой точкой, т. е.

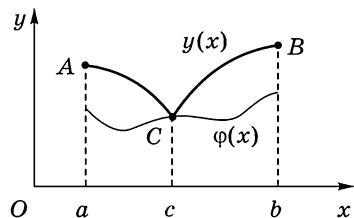


Рис. 3.5

в этой точке существуют односторонние производные. Отметим, что если функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, а ее угловая точка есть $(c, y(c))$, то сужения функции на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ являются экстремалими функционала. Действительно, зафиксировав точку c и значения функции на отрезке $[c, b]$, мы можем рассмотреть функционал

$$J_a[y] = \int_a^c f(x, y, y') dx$$

на классе функций $C^1[a, c]$, который отличается от исходного постоянным значением (значением интеграла по отрезку $[c, b]$) и достигает минимума на функции $y(x)$. Значит, функция $y(x)$ является решением уравнения Эйлера на отрезке $[a, c]$. Аналогичные рассуждения можно провести и для отрезка $[c, b]$.

Удобно представить функционал $J[y]$ в виде суммы двух интегралов:

$$J[y] = \int_a^c f(x, y, y') dx + \int_c^b f(x, y, y') dx = J_1[y] + J_2[y].$$

Тогда необходимое условие экстремума функционала принимает вид

$$\delta J_1[y, \delta y] + \delta J_2[y, \delta y] = 0.$$

По существу, мы имеем две вариационные задачи: первая — на отрезке $[a, c]$ с фиксированным левым концом и правым, движущимся вдоль кривой $y = \varphi(x)$; вторая — на отрезке $[c, b]$ с движущимся вдоль кривой левым концом и фиксированным правым. Мы можем на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ рассматривать только экстремали исследуемого функционала. В этом случае первые вариации функционалов $J_1[y]$ и $J_2[y]$ имеют вид (см. 3.2)

$$\delta J_1[y, \delta y] = \left(f + (\varphi' - y') f_{y'}' \right) \Big|_{c-0} \delta c,$$

$$\delta J_2[y, \delta y] = - \left(f + (\varphi' - y') f_{y'}' \right) \Big|_{c+0} \delta c.$$

Тогда необходимое условие экстремума $\delta J_1[y, \delta y] + \delta J_2[y, \delta y] = 0$ в силу произвольности δc принимает вид

$$\left(f + (\varphi' - y') f_{y'}' \right) \Big|_{c-0} - \left(f + (\varphi' - y') f_{y'}' \right) \Big|_{c+0} = 0,$$

или

$$(f + (\varphi' - y')f'_{y'})\Big|_{c-0} = (f + (\varphi' - y')f'_{y'})\Big|_{c+0}. \quad (3.18)$$

Условие (3.18) будем называть *условием отражения*.

Выясним физический смысл условия отражения для функционалов вида (3.16). Так как, согласно (3.17), при $\psi = \varphi$

$$f + f'_{y'}(\varphi' - y') = \frac{f \cdot (1 + y'\varphi')}{1 + (y')^2} = \frac{A \cdot (1 + y'\varphi')}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

то получаем (при $A(x, y) \neq 0$)

$$\frac{1 + y'\varphi'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Bigg|_{c-0} = \frac{1 + y'\varphi'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Bigg|_{c+0}. \quad (3.19)$$

Пусть β_1, β_2 — углы наклона односторонних касательных (слева и справа) к кривой $y = y(x)$ в точке C , α — угол наклона касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в той же точке (рис. 3.6). Тогда угол падения, т. е. острый угол между дугой AC и кривой $y = \varphi(x)$, равен $\pi - \beta_1 + \alpha$, а угол отражения, т. е. острый угол между дугой CB и кривой $y = \varphi(x)$, равен $\beta_2 - \alpha$. Так как

$$\operatorname{tg} \beta_1 = y'(c-0),$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = y'(c+0),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \varphi'(c),$$

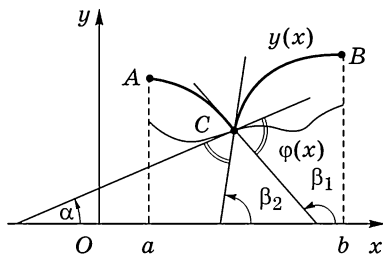


Рис. 3.6

условие (3.19) можно записать следующим образом:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1}{|\sec \beta_1|} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_2}{|\sec \beta_2|}.$$

Учитывая, что косинусы углов β_1 и β_2 имеют разные знаки (один из этих углов острый, а другой тупой), получаем

$$\cos \beta_1 (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1) + \cos \beta_2 (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_2) = 0,$$

или, после преобразования, —

$$\cos(\beta_1 - \alpha) + \cos(\beta_2 - \alpha) = 0.$$

Это равенство с учетом диапазона изменения рассматриваемых углов означает, что $\pi - \beta_1 + \alpha = \beta_2 - \alpha$, т. е. угол падения кривой $y = y(x)$ равен углу отражения.

Если луч света распространяется со скоростью $v(x, y)$ в неоднородной плоской среде, ограниченной кривой $y = \varphi(x)$, то время T , затраченное на прохождение луча из точки $A(a, y_A)$ в точку $B(b, y_B)$, выражается интегралом

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(x, y)} dx. \quad (3.20)$$

Свет распространяется так, что луч проходит от одной точки до другой за минимальное время. Мы имеем дело с вариационной задачей для функционала вида (3.16). Реальная траектория луча является решением вариационной задачи, и мы получаем подтверждение известного физического закона: угол падения луча света на отражающую поверхность равен углу отражения.

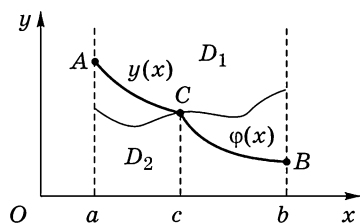


Рис. 3.7

Задача о преломлении экстремалей. Пусть в простейшей задаче вариационного исчисления (2.1), (2.2) концы графика допустимой функции $A(a, y_a)$ и $B(b, y_b)$ находятся по разные стороны от гладкой кривой $y = \varphi(x)$, которая разбивает полосу $\{(x, y): a \leq x \leq b\}$ на две области D_1 и D_2 (рис. 3.7), причем

$$f(x, y, y') = \begin{cases} f_1(x, y, y'), & (x, y) \in D_1; \\ f_2(x, y, y'), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где $f_1(x, y, y')$ и $f_2(x, y, y')$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

В этой задаче, как и в предыдущей, в качестве области определения функционала следует выбрать множество функций, у которых график в точках пересечения с кривой $y = \varphi(x)$ может иметь излом. Мы предполагаем, что допустимая функция непрерывна, а в указанных точках имеет конечные односторонние производные. Точки экстремума функционала нужно искать среди таких функций, которые на участках

гладкости являются экстремалами этого функционала. Точка $C(c, y_C)$ является подвижной, а ее координаты связаны соотношением $y_C = \varphi(c)$. Поэтому, как и в случае отражения экстремалей, имеем

$$\delta J = \left(f_1 + (\varphi' - y')(f_1)'_{y'} \right) \Big|_{c=0} \delta c - \left(f_2 + (\varphi' - y')(f_2)'_{y'} \right) \Big|_{c+0} \delta c.$$

Необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ на функциях указанного вида записывается следующим образом:

$$\left(f_1 + (\varphi' - y')(f_1)'_{y'} \right) \Big|_{c=0} = \left(f_2 + (\varphi' - y')(f_2)'_{y'} \right) \Big|_{c+0}. \quad (3.21)$$

Это *условие преломления*. В развернутом виде его можно записать так:

$$\begin{aligned} f_1(c, \varphi(c), y'(c-0)) + (\varphi'(c) - y'(c-0))(f_1)'_{y'}(c, \varphi(c), y'(c-0)) = \\ = f_2(c, \varphi(c), y'(c+0)) + (\varphi'(c) - y'(c+0))(f_2)'_{y'}(c, \varphi(c), y'(c+0)). \end{aligned}$$

Чтобы решить задачу о преломлении, нужно найти экстремали исследуемого функционала в областях D_1 и D_2 , решая два уравнения Эйлера для интегрантов f_1 и f_2 . Среди этих экстремалей в областях D_1 и D_2 надо выбрать те пары $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$y_1(a) = y_A, \quad y_1(c) = \varphi(c), \quad y_2(c) = \varphi(c), \quad y_2(b) = y_B$$

и условию преломления (3.21). Экстремум функционала может достигаться только на таких функциях.

Выясним физический смысл условия преломления, рассмотрев функционал вида (3.16), в котором функция $A(x, y)$ имеет линию разрыва $y = \varphi(x)$. Обозначив $A(x, y) = A_1(x, y)$ в D_1 и $A(x, y) = A_2(x, y)$ в D_2 и используя (3.17), можем записать условие преломления в виде

$$A_1(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \Big|_{c=0} = A_2(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \Big|_{c+0}.$$

Вводя, как и в случае отражения экстремалей, обозначения β_1 , β_2 , α и проводя аналогичные преобразования, получаем

$$\frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{A_2(c, \varphi(c))}{A_1(c, \varphi(c))},$$

или

$$\frac{\sin(\pi/2 - (\alpha - \beta_1))}{\sin(\pi/2 - (\alpha - \beta_2))} = \frac{A_2(c, \varphi(c))}{A_1(c, \varphi(c))}.$$

Распространение света описывается функционалом (3.20), для которого

$$A_1(x, y) = \frac{1}{v_1(x, y)}, \quad A_2(x, y) = \frac{1}{v_2(x, y)},$$

и условие преломления в этом случае преобразуется к следующему:

$$\frac{\sin(\pi/2 - (\alpha - \beta_1))}{\sin(\pi/2 - (\alpha - \beta_2))} = \frac{v_1(c, \varphi(c))}{v_2(c, \varphi(c))}.$$

Это соотношение представляет собой закон преломления света Снеллиуса, согласно которому отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей распространения света в двух средах.

В задачах на отражение и преломление экстремалей наличие точки излома у графика функции, на которой достигается экстремум, вытекает из постановки задачи. Но даже в задачах с гладким интегрантом в отсутствие каких-либо дополнительных условий функционал может не иметь экстремумов в классе непрерывно дифференцируемых функций, а решение вариационной задачи следует искать в более широком классе функций, например среди функций, графики которых могут иметь точки излома.

Пример 3.4. Исследуем на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^2 (y')^2 (1 - y')^2 dx \quad (3.22)$$

при краевых условиях $y(0) = 0$, $y(2) = 1$.

Так как интегрант неотрицателен, то $J[y] \geq 0$ на любой допустимой функции $y(x)$. Любая функция $y(x)$, для которой $J[y] = 0$, может рассматриваться как точка экстремума функционала, даже если она не является непрерывно дифференци-

руемой на отрезке $[0, 2]$. В качестве такой функции можно взять, например,

$$y_*(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Такая функция не является единственной. Подходит любая кусочно-линейная функция, производная которой принимает лишь два значения — 0 и 1 (за исключением одной или нескольких точек излома).

Если функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 2]$, то функция $y'(x)$ непрерывна на этом отрезке и поэтому не может принимать лишь два значения: 0 и 1. Следовательно, в интеграле (3.22) непрерывная неотрицательная подынтегральная функция отлична от нуля хотя бы в одной точке. Значит, для непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ имеем $J[y] > 0$. В то же время можно показать, что в любой окрестности функции $y_*(x)$ (по норме $\|\cdot\|_{C^1}$) имеются гладкие функции, значение функционала на которых в силу его непрерывности мало отличается от значения функционала на функции $y_*(x)$, т. е. от значения 0. Таким образом, значение 0 является точной нижней гранью значений функционала, и это значение не достигается в классе непрерывно дифференцируемых функций. #

Укажем условия, которым должны удовлетворять точки экстремума функционала (3.1), если его область определения — множество кусочно-гладких функций на отрезке $[a, b]$. Мы называем функцию *кусочно-гладкой* на промежутке T , если она непрерывна на этом промежутке, имеет на нем непрерывную производную всюду, кроме, возможно, конечно-го числа точек, в которых функция имеет конечные непрерывные односторонние производные. Во-первых, каждый гладкий участок функции, являющейся точкой экстремума, должен удовлетворять уравнению Эйлера (т. е. быть экстремалью). Во-вторых, исходя из необходимого условия экстремума функционала, можно заключить, что в каждой угловой точке x_* функции, являющейся точкой экстремума, выполняются следующие *условия Вейерштрасса — Эрдмана*:

$$(f - y'f'_y)|_{x_*-0} = (f - y'f'_y)|_{x_*+0}, \quad f'_y|_{x_*-0} = f'_y|_{x_*+0}.$$

Эти условия в совокупности с требованием непрерывности функции $y(x_* - 0) = y(x_* + 0)$ позволяют найти координаты угловых точек, если они есть.

Пример 3.5. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b ((y')^2 - y^2) dx$$

и условия Вейерштрасса — Эрдмана для него. Второе условие

$$f'_{y'}|_{c-0} = f'_{y'}|_{c+0}$$

принимает вид $2y'(c-0) = 2y'(c+0)$, т. е. означает равенство односторонних производных в любой точке. Значит, все точки экстремума функционала, даже в классе кусочно-гладких функций, не имеют угловых точек и являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Напомним, что условие $f''_{y'y'} \neq 0$ является достаточным для того, чтобы экстремали функционала были дважды дифференцируемыми (см. теорему 2.2). В этом случае экстремаль не имеет угловых точек, и рассмотренный функционал — тому пример (для него $f''_{y'y'} = 2$ для любых значений аргументов функции f).

3.4. Задача с подвижными границами в пространстве

Обобщим задачу для плоского случая: поставим задачу о поиске кривой с подвижными границами в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$J[y, z] = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx \rightarrow \text{extr},$$

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

при условии, что одна или обе точки $(a, y(a), z(a)); (b, y(b), z(b))$ подвижны, например, находятся на заданных кривых либо поверхностях.

Очевидно, что экстремум достигается только на интегральных кривых системы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f'_y - f'_y = 0; \\ \frac{d}{dx} f'_z - f'_z = 0. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как и в плоском случае, получим вариацию функционала в виде

$$\begin{aligned} \delta J[\delta y, \delta z, \delta a, \delta b] = & (f - y'f'_y - z'f'_z) \Big|_{x=b} \delta b + f'_y \Big|_{x=b} \delta y_b + f'_z \Big|_{x=b} \delta z_b - \\ & - (f - y'f'_y - z'f'_z) \Big|_{x=a} \delta a - f'_y \Big|_{x=a} \delta y_a - f'_z \Big|_{x=a} \delta z_a. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Возможны следующие варианты постановок:

1) правая конечная точка экстремали перемещается произвольно: вариации $\delta b, \delta y_b, \delta z_b$ — независимы, левый конец экстремали фиксирован:

$$x = a : y(a) = y_1, \quad z(a) = z_1 \Rightarrow \delta a = \delta y_a = \delta z_a = 0,$$

т. е. три последних слагаемых в (3.23) тождественно равны нулю.

Равенство вариации нулю примет вид

$$\delta J = (f - y'f'_y - z'f'_z) \Big|_{x=b} \delta b + f'_y \Big|_{x=b} \delta y_b + f'_z \Big|_{x=b} \delta z_b = 0,$$

и естественные условия в искомой точке $x = b$ можно записать в виде трех равенств:

$$\begin{aligned} (f - y'f'_y - z'f'_z) \Big|_{x=b} &= 0, \\ f'_y \Big|_{x=b} &= 0, \quad f'_z \Big|_{x=b} = 0. \end{aligned}$$

Этих равенств совместно с предварительными (геометрическими) условиями

$$y(a) = y_1, \quad z(a) = z_1$$

достаточно для определения пяти неизвестных: четырех произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 , от которых зависит общее решение системы ОДУ, и значения $x = b$;

2) правая конечная точка экстремали скользит по данной кривой $y = \varphi(x), z = \psi(x)$; левая точка фиксирована.

Тогда (по аналогии с плоским случаем)

$$\delta y_b = \varphi'(b)\delta b, \quad \delta z_b = \psi'(b)\delta b.$$

Из условия обращения первой вариации функционала в нуль получим условие *трансверсальности*:

$$\left(f + (\varphi' - y')f'_{y'} + (\psi' - z')f'_{z'} \right) \Big|_{x=b} = 0.$$

Кроме того, имеем геометрические связи:

$$y(b) = \varphi(b), \quad z(b) = \psi(b).$$

Этих условий вместе с двумя предварительными условиями в точке $x = a$ достаточно для нахождения нужной экстремали;

3) правый конец искомой экстремали скользит по заданной поверхности $z = \psi(x, y)$.

В этом случае в точке встречи экстремали с поверхностью $z = \psi(b, y(b))$ вариация $\delta z_b = \psi'_x \delta b + \psi'_y \delta y_b$, а вариация функционала

$$\begin{aligned} \delta J = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(f - y'f'_{y'} + (\psi'_x - z')f'_{z'} \right) \Big|_{x=b} \delta b + \left(f'_{y'} + \psi'_y f'_{z'} \right) \Big|_{x=b} \delta y_b = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности вариаций $\delta b, \delta y_b$ получаем два естественных условия

$$\begin{cases} \left(f - y'f'_{y'} + (\psi'_x - z')f'_{z'} \right) \Big|_{x=b} = 0; \\ \left(f'_{y'} + \psi'_y f'_{z'} \right) \Big|_{x=b} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Следует учесть, что точка $(b, y(b), z(b))$ принадлежит поверхности, поэтому

$$z(b) = \psi(b, y(b)).$$

Этих условий, вместе с условиями фиксированности экстремали в точке $x = a$, достаточно.

Пример 3.6. Выясним геометрический смысл естественных условий (3.24) для функционалов вида

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \, dx.$$

Из условий (3.24) имеем

$$f - y'f'_y + (\psi'_x - z')f'_{z'} = 0 \Rightarrow \frac{A + A\psi'_x z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \Big|_{x=b} = 0,$$

$$f'_y + \psi'_y f'_{z'} = 0 \Rightarrow A \frac{y' + \psi'_y z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \Big|_{x=b} = 0.$$

Пусть $A(x, y, z) \neq 0$, тогда полученные выше равенства упрощаются: $1 + \psi'_x z' = 0$, $y' + \psi'_y z' = 0$ в точке $x = b$ (точка встречи экстремали с поверхностью $\psi(x, y)$).

Отсюда (в точке $x = b$)

$$\frac{1}{\phi'_x} = \frac{y'}{\phi'_y} = \frac{z'}{(-1)},$$

т. е. векторы $\tau = \{1, y'_x, z'_x\}$ и $n = \{\psi'_x, \psi'_y, -1\}$ коллинеарны.

Вектор τ есть касательный вектор к кривой, заданной параметрически:

$$x = x, y = y(x), z = z(x);$$

вектор n — нормаль к поверхности

$$F(x, y, z) \equiv \psi(x, y) - z = 0.$$

Таким образом, искомая кривая (экстремаль) должна встретить поверхность ортогонально к ее касательной плоскости.

Пример 3.7. Определим расстояние от точки $A(1, 1, 1)$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, т. е., считая, что $x \equiv x$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, найти экстремаль вариационной задачи

$$J[y, z] = \int_{x_1}^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \rightarrow \text{extr}(\min).$$

Так как точка A находится во внешности сферы, координата $x_1 < 1$. Поэтому правый конец искомой экстремали фиксирован:

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = z(1) = 1, \quad (3.25)$$

а левый конец скользит по сфере, и в неизвестной точке встречи $(x_1, y(x_1), z(x_1))$ нужно поставить условия трансверсальности (см. условия (3.24)):

$$\begin{cases} (f - y'f'_{y'} + (\phi'_x - z')f'_{z'})|_{x=x_1} = 0; \\ (f'_{y'} + \psi'_y f'_{z'})|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Из уравнений Эйлера получаем экстремали

$$y = C_1 x + C_2,$$

$$z = C_3 x + C_4,$$

из условий (3.25): $C_1 + C_2 = 1$, $C_3 + C_4 = 1$.

Для краткости введем обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} = z_1.$$

Тогда условия (3.26) можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha - \frac{C_1^2}{\alpha} + \left(\frac{-x_1}{\beta} - C_3 \right) \frac{C_3}{\alpha} = 0; \\ \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_3}{\alpha} \frac{(-y_1)}{\beta} = 0, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{C_3 x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}} = 0 &\Rightarrow C_3 = \frac{z_1}{x_1}; \\ C_1 - \frac{C_3 y_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}} = 0 &\Rightarrow C_1 = \frac{C_3 y_1}{x_1} \Rightarrow C_1 = \frac{y_1}{x_1}. \end{aligned}$$

Имеем

$$C_1 x_1 = y_1 = C_1 x_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ и } C_1 = 1,$$

$$C_3 x_1 = z_1 = C_3 x_1 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0 \text{ и } C_3 = 1.$$

Экстремаль имеет вид $z = y = x$.

Отсюда найдем координаты точки встречи экстремали со сферой: $x_1 = y_1 = z_1 = 1/\sqrt{3}$.

Следовательно, искомое расстояние $d = \sqrt{3} - 1$.

Так как в задачах с рассмотренной структурой функционала экстремали ортогональны к поверхности в точке встречи, найдено действительно минимальное расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы.

Пример 3.8. Покажем следующее: если условие трансверсальности является условием ортогональности в задаче о поиске точки встречи, то интегрант функционала имеет вид (в частном случае, для плоской задачи):

$$f(x, y, y') = A(x, y) \sqrt{1 + y'^2}, \quad A(x, y) \neq 0.$$

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} f(x, y, y') - f'_y(\cdot)(y' - \varphi') &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + y'\varphi' &= 0 \quad \text{в точке встречи.} \end{aligned}$$

Тогда $\varphi' = -1/y'$ и условие трансверсальности можно записать так:

$$f - f'_y \left(\frac{1 + y'^2}{y'} \right) = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{y'}{1 + y'^2} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad (3.27)$$

Умножим (3.27) на dy' и проинтегрируем:

$$\int \frac{y' dy'}{1 + y'^2} = \int \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y'} dy' = \int \frac{d_y f}{f}.$$

В интеграле справа $d_y f$ обозначает частный дифференциал от искомой функции $f(x, y, y')$ по параметру y' . Известно, что по частному дифференциалу относительно некоторой переменной (в данном случае — $d_y f(x, y, y')$) функция $f(\cdot)$ восстанавливается с точностью до аддитивной функции, не содержащей этой переменной. В рассматриваемом случае — до аддитивной функции $C(x, y)$.

После интегрирования имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \ln(1+y'^2) &= \ln f(x, y, y') + \ln C(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} &= f(x, y, y') C(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y, y') &= \frac{1}{C(x, y)} \sqrt{1+y'^2} \equiv A(x, y) \sqrt{1+y'^2}.\end{aligned}$$

3.5. Задачи с односторонними вариациями

Поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned}J[y] &= \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \\ y(a) &= y_1, \quad y(b) = y_2,\end{aligned}\tag{3.28}$$

где $y(x) \in C_1[a, b]$; $f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих переменных.

На искомую экстремаль наложено дополнительное ограничение (рис. 3.8)

$$y(x) \geq \varphi(x).\tag{3.29}$$

Равенство $y = \varphi(x)$ определяет границу множества $(x, y) \in xOy$, внутрь которого искомое решение (3.28) попасть не имеет права.

Поэтому необходимые условия экстремума функционала должны быть скорректированы. Вспомним о том, что уравнения Эйлера в *простейшей задаче* выводились при условии свободного варьирования функции $y(x)$ в множестве допустимых функций, т. е. вариация $\delta y(x)$ могла быть как положительна, так и отрицательна.

При наличии геометрического ограничения (3.29) при выходе искомой экстремали на границу «запрещенной» области $y = \varphi(x)$ вариация $\delta y(x)$ должна быть строго положительной:

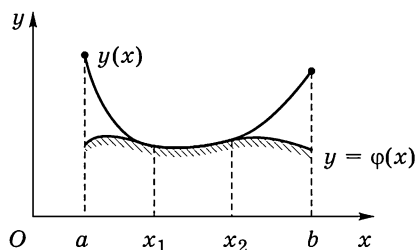


Рис. 3.8

$$\delta y(x) > 0, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Введем новое зависимое переменное $z(x)$:

$$y = z^2 + \varphi(x) \Rightarrow y' = 2zz' + \varphi'(x).$$

Тогда функционал принимает вид

$$J[z] = \int_a^b f(x, z^2 + \varphi(x), 2zz' + \varphi'(x)) dx = \int_a^b \Phi(x, z, z') dx.$$

Поставленная задача (3.28) преобразуется в задачу:

$$\begin{cases} J[z] = \int_a^b \Phi(x, z, z') dx \rightarrow \text{extr}, \\ z(a) = \sqrt{y(a) - \varphi(a)}, \quad z(b) = \sqrt{y(b) - \varphi(b)}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Здесь, очевидно, $(y(a) - \varphi(a))$ и $(y(b) - \varphi(b))$ неотрицательны в силу условия (3.29); знаки корней уточнять не будем.

В задаче (3.30) на функцию $z(x)$ ограничений не наложено, поэтому имеем *простейшую задачу* вариационного исчисления.

Следовательно,

$$\frac{d}{dx} \Phi'_{x'} - \Phi'_z = 0.$$

Вычисляем производные интегранта $\Phi(x, z, z')$:

$$\begin{aligned} \Phi'_z &= f'_y y'_z + f'_{y'} (y')'_z = 2zf'_y + 2z'f'_{y'}, \\ \Phi'_{z'} &= f'_{y'} (y')'_{z'} = 2zf'_{y'}, \\ \frac{d}{dx} \Phi'_{z'} &= 2z'f'_{y'} + 2z \frac{d}{dx} f'_{y'}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dx} \Phi'_{z'} - \Phi'_z = 2z \left(\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y \right) = 0. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) распадается на два уравнения: 1) $z = 0$, которому соответствует ограничение $y = \varphi(x)$; 2) уравнение Эйлера для функционала исходной задачи (3.28) $\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y = 0$.

Для полного решения задачи нужно найти условия сопряжения искомой экстремали с кривой $y = \varphi(x)$, если экстремаль выйдет за эту кривую.

Рассмотрим для определенности ситуацию, представленную на рис. 3.9. Экстремаль вышла за границу и течет по границе до точки B .

Тогда

$$J[y] = \int_a^{x_1} f(\cdot) dx + \int_{x_1}^b f(\cdot) dx.$$

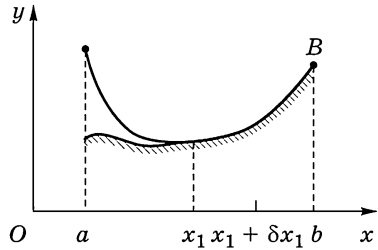


Рис. 3.9

Приращение функционала состоит из двух слагаемых:

$$x \in [a, x_1]: \Delta J_1 = \int_a^{x_1 + \delta x_1} f(\cdot) dx - \int_a^{x_1} f(\cdot) dx;$$

$$x \in [x_1, b], y = \varphi(x): \Delta J_2 = \int_{x_1 + \delta x_1}^b f(x, \varphi, \varphi') dx - \int_{x_1}^b f(x, \varphi, \varphi') dx =$$

$$= - \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx = -f(x_1, \varphi(x_1), \varphi'(x_1)) \delta x_1 + o(\delta x_1).$$

Вариация δJ функционала также распадается на два слагаемых:

1) δJ_1 , которое вычисляется как вариация функционала в задаче с левым фиксированным концом искомой экстремали и правым скользящим по кривой $y = \varphi(x)$:

$$\delta J_1 = (f - (y' - \varphi') f'_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1;$$

2) δJ_2 , которое соответствует течению экстремали по границе, из формулы для приращения ΔJ_2 запишем в виде

$$\delta J_2 = -f(x_1, \varphi(x_1), \varphi'(x_1)) \delta x_1.$$

В силу необходимого условия экстремума

$$\delta J_1 + \delta J_2 = 0.$$

С учетом произвольности δx_1 имеем

$$\left(f(x, y, y') - f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - (y' - \varphi') f'_{y'} \right) \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (3.32)$$

С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получим $(y(x_1) = \varphi(x_1))$:

$$f(x, y, y') - f(x, y, \varphi') = (y' - \varphi') f'_{y'}(x, y, q) \Big|_{x=x_1},$$

здесь $y'(x_1) < q < \varphi'(x_1)$ — «среднее» между $y'(x_1)$ и $\varphi'(x_1)$.

Подставляем найденную разность в (3.32):

$$(y' - \varphi') (f'_{y'}(x, y, q) - f'_{y'}(x, y, y')) \Big|_{x=x_1} = 0.$$

Еще раз применим теорему о среднем:

$$f'_{y'}(x, y, q) - f'_{y'}(x, y, y') = f''_{y'y'}(x, y, \tilde{q})(q - y'),$$

здесь $\tilde{q}$ — «среднее» между q и $y'(x_1)$.

В результате из (3.32):

$$(y' - \varphi')(q - y') f''_{y'y'}(x, y, \tilde{q}) = 0.$$

Пусть $f''_{y'y'}(\cdot) \neq 0$, что является достаточным условием существования y'' , тогда

$$y'(x_1) = \varphi'(x_1), \quad (3.33)$$

так как $q \neq y'(x_1)$ в силу теоремы о среднем.

Таким образом, график функции $y(x)$ в точке встречи с границей $y' = \varphi(x)$ касается границы.

Условие (3.33) является дополнительным уравнением для определения экстремали.

Например, в ситуации, подобной изображенной на рис. 3.9, задача будет иметь три подлежащих определению параметра: C_1 и C_2 — произвольные постоянные общего решения и точка встречи $x = x_1$.

Для их определения запишем три условия:

$$\begin{cases} y(a, C_1, C_2) = y_1, \\ y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1), \\ y'(x_1, C_1, C_2) = \varphi'(x_1). \end{cases} \quad (3.34)$$

Если ситуация подобна изображенной на рис. 3.8, то для полученного общего решения уравнения Эйлера $y = y(x, C_1, C_2)$ в области $x \in [x_2, b]$ нужно заново определить C_1 и C_2 , а также найти точку встречи $x = x_2$.

Для этого имеем (по аналогии с (3.34)):

$$\begin{cases} y(b, C_1, C_2) = y_2, \\ y(x_2, C_1, C_2) = \varphi(x_2), \\ y'(x_2, C_1, C_2) = \varphi'(x_2). \end{cases} \quad (3.35)$$

Однако может случиться, что искомая экстремаль ни в одной точке отрезка $[a, b]$ не встретится с границей, т. е. всюду $y = y(x, C_1, C_2) > \varphi(x)$.

Достаточным признаком этого является несовместность систем уравнений (3.34) и (3.35) в отдельности.

Чтобы рассмотреть все возможные ситуации, приведем элементарный пример.

Пример 3.9. Найти экстремали функционала в задаче

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2} dx \rightarrow \min, \quad y(-1) = y(1) = 1; \\ y(x) &\leq x^2 + a, \quad a \geq 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

т. е. требуется соединить две точки на плоскости xOy кривой наименьшей длины, не нарушая поставленного ограничения.

Решение уравнения Эйлера очевидно:

$$y^*(x) = C_1 x + C_2.$$

При определении произвольных постоянных возможны следующие ситуации:

а) $\varphi(x) = x^2 + 1$ (рис. 3.10, а).

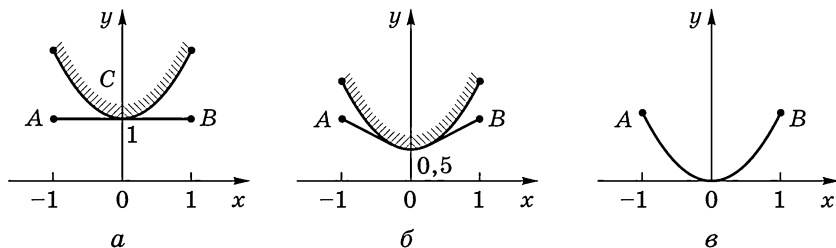


Рис. 3.10

Из (3.34) имеем систему алгебраических уравнений при $x \in [-1, x_1]$:

$$\begin{cases} y^*(-1, C_1, C_2) = 1, \\ y^*(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1), \\ y^{*'}(x_1, C_1, C_2) = \varphi'(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1^2 + 1, \\ C_1 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = 1 + 2x_1 \Rightarrow 2x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_1^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(x_1 + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ либо } x_1 = -2.$$

Второе решение должно быть отброшено, так как $x = [-1, 1]$. Следовательно, точка встречи экстремали с ограничительной кривой $x_2 = 0$.

Отсюда: $C_1 = 0, C_2 = 1 \Rightarrow y^*(x) = 1$.

Решением задачи при $x \in [-1, 0]$ является отрезок AC .

Такое же решение ($x_2 = 0, y^*(x) = 1$) получим и для правого полуинтервала $[0, 1]$ — отрезок CB .

Решение задачи есть отрезок AB ;

б) $\varphi(x) = x^2 + 0,5$ (рис. 3.10, б).

Из (3.34) при $x \in [-1, x_1]$ имеем:

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1^2 + 0,5, \\ C_1 = 2x_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1^2 + 0,5, \\ C_1 = 2x_1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{1,1} \approx -0,29, x_{1,2} \approx -1,71.$$

Следовательно, $x_1 = -0,29$, $C_1 = -0,58$, $C_2 = 0,42$ и участок экстремали при $x \in [-1, 0,29]$:

$$y^*(x) = -0,58x + 0,42.$$

Аналогичными действиями получим на полуинтервале $[x_2, 1]$:

$$\begin{aligned} x_2 = 0,29, C_1 = 0,58, C_2 = 0,42 &\Rightarrow \\ \Rightarrow y^*(x) = 0,58x + 0,42. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (3.36):

$$y^*(x) = \begin{cases} -0,58x + 0,42, & -1 \leq x < -0,29, \\ x^2 + 0,5, & -0,29 \leq x \leq 0,29, \\ 0,58x + 0,42, & 0,29 < x \leq 1; \end{cases}$$

в) $\varphi(x) = x^2$ (рис. 3.10, в).

Для определения x_1 получим уравнение $x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = -1$ — координата точки касания участка экстремали с ограничительной кривой.

Аналогично находим точку x_2 :

$$x_2^2 - 2x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Экстремалью (решением уравнения Эйлера) является кривая

$$y^*(x) = \begin{cases} -2x - 1, & 1 \leq x < 0, \\ 2x - 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Однако *решением* поставленной задачи (кривой минимальной длины) будет именно кривая $y = x^2$.

Вопросы и задачи

3.1. Запишите условия трансверсальности на правом конце в вариационной задаче

$$J[y] = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = \varphi(b),$$

функционал которой определен на множестве непрерывно дифференцируемых функций. Предполагается, что значения a , y_a фиксированы, $A(x, \varphi(x)) \neq 0$, а $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема.

3.2. Докажите общую формулу (3.14) вариации функционала, зависящего от нескольких функций, в задаче с подвижными границами.

3.3. Запишите условие трансверсальности на левом конце в вариационной задаче

$$I[y, z] = \int_a^b A(x, y, z) \sqrt{1 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dx \rightarrow \text{extr},$$

$$z(a) = \varphi(a, y(a)), \quad y(b) = y_b, \quad z(b) = z_b,$$

функционал которой определен на множестве кусочно-гладких функций, b , y_b , z_b фиксированы, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируема и $A(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$.

3.4. Выведите формулу для первой вариации функционала

$$I[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx$$

в задаче со свободными концами (предполагается, что $y \in C^2[a, b]$).

3.5. Получите условия трансверсальности на правом конце в вариационной задаче

$$I[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \rightarrow \text{extr},$$

$$y(a) = y_a, \quad z(a) = y_a, \quad z(b) = \varphi(b, y(b)),$$

функционал которой определен на множестве пар кусочно-гладких функций, a , y_a , z_a фиксированы.

3.6. Получите условия трансверсальности на правом конце в вариационной задаче

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(a) = y_a, \quad \varphi(b, y(b)) = 0,$$

функционал которой определен на множестве кусочно-гладких вектор-функций, $a, y_a \in \mathbb{R}^n$ фиксированы.

3.7. Найдите экстремали в следующих вариационных задачах с правым подвижным концом:

а) $\int_0^b (y')^2 dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(b) + b + 1 = 0;$

б) $\int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = b - 5;$

в) $\int_1^e (2y - x^2(y')^2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(1) = e;$

г) $\int_0^{\pi/4} ((y')^2 - y + 1) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0;$

д) $\int_0^b (yy' + (y')^2 + 1) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1, \quad y(b) = -3;$

е) $\int_0^b \sqrt{1+y} \sqrt{1+(y')^2} dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(b) + b + 1 = 0.$

3.8. Используя методы вариационного исчисления, найдите расстояние от начала координат до плоской кривой $x^2 y = 1$.

3.9. Используя методы вариационного исчисления, найдите кратчайшее расстояние между двумя кривыми на плоскости:

а) $y = x^2$ и $y = x - 5$; б) $y = x^2 + 2$ и $y = x$.

3.10. Выясните, имеет ли функционал задачи

$$J[y] = \int_a^b (2xy - y^2 - (y')^2) dx, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

экстремали с угловыми точками.

3.11. В вариационной задаче

$$J[y] = \int_a^b y^2 (1 - (y')^2) dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1$$

найдите экстремали функционала с угловыми точками.

3.12. Поставим пространственную задачу, аналогичную рассмотренной в примере 3.8: покажите, что если следствием уравнения трансверсальности является ортогональность экстремали к поверхности, то

$$f(x, y, z, y', z') = A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

3.13. Найдите расстояние от точки $A(0, 0, 4)$ до поверхности $z = x^2 + y^2$:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2.$$

3.14. Найдите расстояние между поверхностями

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

4. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

4.1. Основные типы задач на условный экстремум

Рассмотренные ранее задачи характеризовались тем, что их решения должны были удовлетворять некоторым условиям на границе области интегрирования (краевым условиям). Однако во многих важных приложениях вариационного исчисления на решение задачи накладываются некоторые дополнительные условия. В этой связи вспомним задачу Дидоны (см. пример 1.1). Контур (т. е. ремень из бычьей кожи), которым охватывался участок земли, имел вполне определенную длину. Это значит, что функция, дающая решение задачи Дидоны, должна удовлетворять не только краевым условиям, но и дополнительному условию: длина графика функции фиксирована. Приведем общую формулировку задачи, в которой на *допустимые функции* накладываются дополнительные условия — так называемые *условия связи*.

Пусть требуется найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (4.1)$$

который мы будем называть *целевым функционалом*, на множестве функций $y(x)$ из класса $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \quad (4.2)$$

и некоторым соотношениям (условиям связи), которые могут выражаться дифференциальными уравнениями

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k} \quad (k < n), \quad x \in [a, b], \quad (4.3)$$

или интегральными

$$\int_a^b h_i(x, y, y') dx = L_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.4)$$

Здесь везде предполагается, что функции $f, g_j, j = \overline{1, k}, h_i, i = \overline{1, s}$, дважды непрерывно дифференцируемы и краевые условия (4.2) не противоречат условиям связи (4.3).

Дифференциальные соотношения (4.3) называют *дифференциальными связями*, а соотношения (4.4) — *интегральными (изопериметрическими) связями*. Особо отметим частный случай, когда в соотношениях (4.3) функции g_j не зависят от y' . В вариационном исчислении такие связи называют *фазовыми ограничениями*, а в теоретической механике — *голономными связями*.

Сформулированная задача общего вида представляет собой *вариационную задачу на условный экстремум*. Частный случай задачи, в которой наложены только дифференциальные связи (4.3), а также различные ее модификации, отличающиеся краевыми условиями (иногда с дополнительными интегральными связями (4.4)), называют *задачей Лагранжа*. Эта задача была опубликована Ж.Л. Лагранжем в 1788 г. в его «Аналитической механике». Задачу (4.1), (4.2), (4.4) с интегральными связями называют изопериметрической задачей, рассматривая ее как обобщение классической задачи определения среди плоских фигур одинакового периметра (изопериметрических фигур) той, которая имеет наибольшую площадь (см. 4.4).

Отметим, что изопериметрическую задачу (4.1), (4.2), (4.4) можно свести к задаче Лагранжа, добавив новые функции

$$\psi_i(x) = \int_a^x h_i(x, y, y') dx, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.5)$$

Тогда вместо интегральных соотношений (4.4) получим дифференциальные соотношения

$$\psi'_i(x) = h_i(x, y, y'), \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.6)$$

При этом, согласно (4.4),

$$\psi_i(a) = 0, \quad \psi_i(b) = L_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.7)$$

Таким образом, изопериметрическая задача эквивалентна следующей задаче Лагранжа: найти систему $n + s$ функций $y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_s$, связанных соотношениями (4.6) и удовлетворяющих краевым условиям (4.2) для функций $y_i, i = \overline{1, n}$, и условиям (4.7) для функций $\psi_i, i = \overline{1, s}$, которая доставляет экстремум функционалу (4.1).

К задаче Лагранжа сводится и задача об экстремуме функционала, зависящего от высших производных. Для функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

нужно ввести новые функции

$$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n)}.$$

Тогда исходный функционал заменяется функционалом

$$J[y_0, y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_0, y_1, \dots, y_n) dx,$$

неизвестные функции в котором связаны уравнениями

$$\begin{cases} y'_0 = y_1, \\ y'_1 = y_2, \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n. \end{cases}$$

4.2. Необходимые условия в задаче Лагранжа

Задачи на условный экстремум встречаются и в конечномерных задачах, когда аргументы функции многих переменных, экстремум которой нужно найти, связаны некоторыми функциональными соотношениями. Для решения этих задач обычно используют метод множителей Лагранжа [V]. Этот

универсальный метод, основанный на введении множителей Лагранжа и составлении функции Лагранжа, применим и для функционалов.

Сформулируем *необходимые условия экстремума функционала* в задаче Лагранжа (4.1)–(4.3). Будем предполагать, что функции $g_j(x, y, y')$, $j = \overline{1, k}$, непрерывно дифференцируемы по переменным y' и ранг матрицы Якоби по этим переменным

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_k)}{\partial(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y'_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_k}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y'_n} \end{pmatrix}$$

максимален и равен k . Мы можем считать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y'_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y'_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_k}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y'_k} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.8)$$

так как при необходимости можно изменить соответствующим образом порядок переменных y_i и функций g_j .

Теорема 4.1. Если вектор-функция $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))$ из $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ является решением задачи (4.1)–(4.3) и при этом выполнено условие (4.8), то существуют такие функции $\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)$, что $y^*(x)$ является *экстремалью* функционала

$$I^*[y] = \int_a^b \left(f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right) dx. \quad \# \quad (4.9)$$

Функционал $I^*[y]$ будем называть **вспомогательным функционалом** задачи (4.1)–(4.3). Интегрант вспомогательного функционала, т. е. функцию

$$f^* = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j, \quad (4.10)$$

называют **функцией Лагранжа (лагранжианом)** задачи (4.1)–(4.3). В функцию Лагранжа входят левые части дифференциальных связей с коэффициентами $\lambda_j(x)$, которые называют **множителями Лагранжа**.

Будем называть **экстремалими задачи Лагранжа** экстремали функционала (4.1), удовлетворяющие краевым условиям (4.2) и **дифференциальным связям** (4.3) (в частности, **фазовым ограничениям**). Теорема 4.1 фактически утверждает, что все экстремали задачи Лагранжа содержатся в множестве экстремалей вспомогательного функционала $I^*[y]$. Значит, чтобы найти их, нужно из экстремалей вспомогательного функционала выбрать те, которые удовлетворяют условиям (4.2), (4.3). Другими словами, экстремали вспомогательного функционала, удовлетворяющие краевым условиям (4.2) и дифференциальным связям (4.3), являются экстремалими задачи Лагранжа.

Учитывая сказанное, из теоремы (4.1) легко получить **полную систему условий** для экстремалей задачи Лагранжа, т. е. систему, в которой количество неизвестных равно числу уравнений. Действительно, для $n + k$ неизвестных функций $y_i^*(x)$ ($i = \overline{1, n}$) и $\lambda_j(x)$ ($j = \overline{1, k}$) мы имеем n уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.11)$$

для функционала $I^*[y]$ и k условий связи (4.3). Среди решений этой системы выбирают те, которые удовлетворяют краевым условиям (4.2), причем эти условия не должны противоречить условиям связей.

Замечание 4.1. Иногда в качестве лагранжиана вместо функции (4.10) используют функцию вида

$$f^* = \lambda_0 f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j,$$

где $\lambda_0 = \text{const}$.

При этом полагают $\lambda_0 \geq 0$, если в задаче (4.1)–(4.3) ищется минимум, и $\lambda_0 \leq 0$, если ищется максимум. Добавление в лагранжиан еще одного множителя λ_0 на самом деле не оказывает существенного влияния, так как фактически равносильно умножению лагранжиана на некоторое число. Такое умножение, если $\lambda_0 \neq 0$, не изменяет множества решений системы уравнений Эйлера. А значение $\lambda_0 = 0$ есть вырожденный случай, в котором задача поиска экстремалей вспомогательного функционала теряет смысл, так как эти экстремали никак не будут связаны с *целевым функционалом*. #

Для иллюстрации задачи Лагранжа остановимся на двумерном случае ($n = 2$), когда задано одно фазовое ограничение ($k = 1$), т. е. будем решать задачу

$$J[y, z] = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (4.12)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad z(a) = z_a, \quad z(b) = z_b, \quad (4.13)$$

$$g(x, y, z) = 0. \quad (4.14)$$

Частным случаем этой задачи является *задача о геодезических линиях*, в которой требуется на заданной поверхности найти кривую наименьшей длины (см. пример 1.5).

В задаче (4.12)–(4.14) *допустимыми функциями* являются пары функций $y(x), z(x) \in C^1[a, b]$, для которых кривая $y = y(x), z = z(x)$ лежит на поверхности $g(x, y, z) = 0$. Мы предполагаем, что эта поверхность не имеет особых точек (т. е. $(g'_x)^2 + (g'_y)^2 + (g'_z)^2 \neq 0$). Теорема 4.1 в этом случае сводится к следующему.

Теорема 4.2. Если пара функций $y^*(x), z^*(x) \in C^1[a, b]$ является решением задачи (4.12)–(4.14), причем $(g'_y)^2 + (g'_z)^2 \neq 0$, то существует такая функция $\lambda(x)$, что пара функций $y^*(x), z^*(x)$ является экстремалью функционала

$$J^*[y, z] = \int_a^b (f(x, y, z, y', z') + \lambda g(x, y, z)) dx.$$

◀ Сначала рассмотрим частный случай, когда уравнение связи $g(x, y, z) = 0$ разрешимо относительно одной из переменных, например z . Тогда это уравнение равносильно уравнению $z = \varphi(x, y)$, где функция $\varphi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема, так как по предположению дважды непрерывно дифференцируема функция $g(x, y, z)$. Условие непротиворечивости уравнения связи крайевым условиям в данном случае означает, что $z_a = \varphi(a, y_a)$ и $z_b = \varphi(b, y_b)$.

Уравнение $z = \varphi(x, y)$ позволяет свести рассматриваемую задачу к задаче с одной неизвестной функцией. Действительно, если $y^*(x)$, $z^*(x)$ — решение задачи (4.12)–(4.14), то функция $y^*(x)$ является решением *простейшей задачи вариационного исчисления*

$$\int_a^b f(x, y, \varphi, y', \varphi'_x + \varphi'_y y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (4.15)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Поэтому, согласно теореме 2.1, функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала этой задачи, которое имеет вид

$$\frac{d}{dx} (f'_y + f'_z \varphi'_y) - f'_y - f'_z \varphi'_y - f'_z (\varphi''_{yx} + \varphi''_{yy} y') = 0. \quad (4.16)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f'_z \varphi'_y) &= \frac{d}{dx} (f'_z) \varphi'_y + f'_z \frac{d}{dx} (\varphi'_y) = \\ &= \frac{d}{dx} (f'_z) \varphi'_y + f'_z (\varphi''_{yx} + \varphi''_{yy} y'), \end{aligned}$$

то уравнение (4.16) равносильно следующему:

$$\frac{d}{dx} (f'_y) - f'_y - f'_z \varphi'_y + \frac{d}{dx} (f'_z) \varphi'_y = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx} (f'_y) - f'_y + \left(\frac{d}{dx} (f'_z) - f'_z \right) \varphi'_y = 0. \quad (4.17)$$

Частную производную ϕ'_y можно выразить через частные производные функции g следующим образом: $\phi'_y = -g'_y / g'_z$. Сделаем соответствующую замену в уравнении (4.17):

$$\frac{d}{dx}(f'_y) - f'_y - \left(\frac{d}{dx}(f'_z) - f'_z \right) \frac{g'_y}{g'_z} = 0. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) заменой

$$\lambda = \frac{1}{g'_z} \left(\frac{d}{dx}(f'_z) - f'_z \right)$$

приводится к виду

$$\frac{d}{dx}(f'_y) - f'_y - \lambda g'_y = 0, \quad (4.19)$$

а формулу замены можно записать так:

$$\frac{d}{dx}(f'_z) - f'_z - \lambda g'_z = 0. \quad (4.20)$$

Соотношения (4.19), (4.20) представляют собой уравнения Эйлера для вспомогательного функционала

$$I^*[y, z] = \int_a^b (f(x, y, z, y', z') + \lambda(x)g(x, y, z)) dx.$$

Итак, если $y^*(x)$, $z^*(x)$ есть решение задачи (4.12)–(4.14), то $y^*(x)$ является решением задачи (4.15), а следовательно, и уравнения (4.16). Но тогда пара функций $y^*(x)$ и $z^*(x) = \varphi(x, y^*(x))$ удовлетворяет системе уравнений (4.19), (4.20), т. е. системе уравнений Эйлера вспомогательного функционала. Теорема доказана в частном случае, когда уравнение связи $g(x, y, z) = 0$ разрешимо относительно переменного z .

Отметим, что доказательство теоремы 2.1, базирующееся на *лемме Дюбуа-Реймона*, которая в свою очередь опирается на *лемму Лагранжа*, в конечном счете использует только локальные вариации, т. е. вариации, малые по норме $\|\cdot\|_C$ и отличные от нуля лишь в малой окрестности заданной точки $x_0 \in [a, b]$. График такой вариации $\delta y(x)$ отличается от графика

ка варьируемой функции $y^*(x)$ лишь в малой окрестности точки $(x_0, y^*(x_0))$. Эту окрестность можно выбрать настолько малой, что в ней при $g'_z \neq 0$ уравнение $g(x, y, z) = 0$, согласно *теореме о неявной функции*, разрешимо относительно переменного z . Если в точке $(x_0, y^*(x_0), z^*(x_0))$ имеем $g'_z = 0$, то в этой точке и в некоторой ее окрестности $g'_y \neq 0$, так что мы можем уравнение $g(x, y, z) = 0$ разрешить относительно переменного y . ►

4.3. Необходимые условия в изопериметрической задаче

Как было показано в 4.1, *изопериметрическую задачу* можно свести к задаче Лагранжа. Основываясь на таком преобразовании, получим необходимые условия экстремума функционала для этой задачи.

Согласно (4.5)–(4.7), изопериметрическая задача (4.1), (4.2), (4.4) эквивалентна задаче Лагранжа с *целевым функционалом* (4.1), *дифференциальными связями* (4.6) и *краевыми условиями* (4.2), (4.7). Заметим, что в такой задаче ранг матрицы Якоби дифференциальных связей по переменным y_i максимален, так как, например,

$$\det \frac{\partial(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_s)}{\partial(\psi'_1, \dots, \psi'_s)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\tilde{g}_j(x, y, y', \Psi, \Psi') = h_j(x, y, y') - \psi'_j$, $j = \overline{1, s}$.

Следовательно, можно применить теорему 4.1.

Запишем *вспомогательный функционал*

$$\begin{aligned} I^*[y, \Psi] &= \int_a^b \left(f(x, y, y') + \sum_{j=1}^s \lambda_j (h_j(x, y, y') - \psi'_j) \right) dx = \\ &= \int_a^b \tilde{f}(x, y, y', \Psi, \Psi') dx, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)$,

$$\tilde{f}(x, y, y', \Psi, \Psi') = f(x, y, y') + \sum_{j=1}^s \lambda_j (h_j(x, y, y') - \Psi_j'),$$

и его уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \tilde{f}'_{\Psi_j} - \tilde{f}'_{\Psi_j} = 0, & j = \overline{1, s}; \\ \frac{d}{dx} \tilde{f}'_{y_j} - \tilde{f}'_{y_j} = 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Поскольку $\tilde{f}'_{\Psi_j} = 0$, $\tilde{f}'_{\Psi_j} = -\lambda_j$, получим

$$\frac{d}{dx} \lambda_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, s}.$$

Таким образом, в изопериметрической задаче множители Лагранжа постоянны, а оставшиеся уравнения системы (4.22) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.23)$$

где $f^* = f + \sum_{j=1}^s \lambda_j h_j$.

Система (4.23) является *системой уравнений Эйлера* для функционала

$$I^*[y] = \int_a^b \left(f + \sum_{j=1}^s \lambda_j h_j \right) dx, \quad (4.24)$$

и поэтому функции $y_1^*, \dots, y_n^*$, удовлетворяющие системе уравнений (4.22), являются экстремалами функционала (4.24). Интегрант функционала (4.24) называют *функцией Лагранжа* изопериметрической задачи.

Теорема 4.3. Если функции $y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)$ из $C^1[a, b]$ доставляют экстремум функционалу в задаче (4.1), (4.2), (4.4), то существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что функции $y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)$ являются экстремалами функционала (4.24). #

Теоремы 4.1 и 4.3 представляют собой обобщение правила множителей Лагранжа, применяемого для исследования функций многих переменных [V], на случай гладких бесконечномерных задач вариационного исчисления. Поэтому и в вариационном исчислении метод решения задачи Лагранжа и изопериметрической задачи, базирующийся на определении функций $\lambda_j(x)$ и коэффициентов λ_j , часто называют *методом множителей Лагранжа*. При этом экстремум, который нужно найти в указанных задачах, называют *условным экстремумом*. Уравнения (4.11) называют *уравнениями Эйлера задачи Лагранжа* (4.1)–(4.3), а уравнения (4.23) — *уравнениями Эйлера изопериметрической задачи* (4.1), (4.2), (4.4).

В заключение отметим, что в рассмотренных вариационных задачах на условный экстремум правило множителей Лагранжа распространяется и на условия трансверсальности (см. 3.1). Эти условия записываются так же, как и для задачи на безусловный экстремум, но при этом роль интегранта f играет функция Лагранжа соответствующей задачи.

Пример 4.1. Рассмотрим изопериметрическую задачу с правой подвижной границей

$$J[y] = \int_0^{x_2} (y')^2 dx \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^{x_2} 12y dx = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_2) - x_2 + 2 = 0.$$

Запишем функцию Лагранжа $f^* = (y')^2 + \lambda(12y)$. Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}(f^*)'_{y'} - (f^*)'_y = 0$$

для вспомогательного функционала будет иметь вид $y'' = 6\lambda$. Интегрируя его, получим

$$y = 3\lambda x^2 + C_1 x + C_2.$$

Из краевого условия $y(0) = 0$ имеем $C_2 = 0$. Чтобы найти оставшиеся неизвестные λ , C_1 , x_2 , составим систему из трех уравнений. Первое уравнение — это изопериметрическая связь, которая с учетом вида функции y такова:

$$\int_0^{x_2} 12(3\lambda x^2 + C_1 x) dx = 0. \quad (4.25)$$

Второе уравнение — это краевое условие на правом конце, принимающее вид

$$3\lambda x_2^2 + C_1 x_2 = x_2 - 2. \quad (4.26)$$

Наконец, третье уравнение — это условие трансверсальности на правом конце (см. 3.2)

$$(f^* + (\varphi' - y')(f^*)_{y'})\Big|_{x=x_2} = 0,$$

которое в данном случае при $f^* = (y')^2 + \lambda \cdot 12y$ и $\varphi(x) = x - 2$ имеет вид

$$((y')^2 + \lambda \cdot 12y + (1 - y') \cdot 2y')\Big|_{x=x_2} = 0. \quad (4.27)$$

Система трех уравнений (4.25)–(4.27) имеет два решения: $y = 0$ (для него $x_2 = 2$, $J = 0$) и $y = -3x^2 - 4x$ (для него $x_2 = -2$, $J = 32$).

4.4. Примеры задач на условный экстремум

Пример 4.2. Вернемся к задаче Дидоны (см. пример 1.1). Она представляет собой изопериметрическую задачу:

$$J[y] = \int_{-a}^a y dx \rightarrow \max, \quad y(-a) = 0, \quad y(a) = 0,$$

$$K[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = L \quad (L > 2a).$$

В соответствии с теоремой 4.3 составим вспомогательный функционал

$$J^*[y] = \int_{-a}^a \left(y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} \right) dx$$

и запишем для него уравнение Эйлера:

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) - 1 = 0.$$

Видно, что это уравнение допускает понижение порядка:

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - x = C_1,$$

или

$$\frac{\lambda^2 (y')^2}{1+(y')^2} = (x+C_1)^2.$$

Из этого уравнения найдем y' :

$$y' = \pm \frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2}}.$$

Решая это ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными, получаем

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2} + C_2,$$

что равносильно

$$(x+C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2.$$

Из краевых условий

$$(-a+C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2, \quad (a+C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2$$

находим:

$$C_1 = 0, \quad \lambda^2 = C_2^2 + a^2.$$

Таким образом, уравнение кривой сводится к следующему:

$$x^2 + (y-C_2)^2 = C_2^2 + a^2.$$

Длина дуги окружности может быть вычислена непосредственно, и мы получим еще одно уравнение*:

* При этом следует учесть, что из двух дуг окружности, соединяющих точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, графиком функции является только меньшая.

$$2\sqrt{C_2^2 + a^2} \arcsin \frac{a}{\sqrt{C_2^2 + a^2}} = L,$$

которое заменой

$$t = \frac{L}{2\sqrt{C_2^2 + a^2}}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

приводится к трансцендентному уравнению $L \sin t = 2at$. Решение этого уравнения на промежутке $(0, \pi/2]$ позволит определить постоянную C_2 при $L \leq \pi a$.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу выбора кривой наименьшей длины среди кривых на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, проходящих через две данные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) .

Предположим, что в качестве параметра кривой можно выбрать координату x (это возможно только при определенных положениях конечных точек). Тогда кривая описывается парой функций $y(x)$, $z(x)$, а длину кривой можно выразить интегралом

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx.$$

Мы приходим к вариационной задаче поиска минимума функционала $J[y, z]$ с краевыми условиями

$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = z_2 \quad (4.28)$$

и фазовым ограничением

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Запишем вспомогательный функционал

$$\tilde{J}[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x) (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \right] dx.$$

Два уравнения Эйлера для вспомогательного функционала и условие связи в совокупности составляют систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} - 2\lambda(x)y = 0; \\ \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} - 2\lambda(x)z = 0; \\ y^2 + z^2 + x^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$

Решение задачи следует искать среди решений этой системы, удовлетворяющих краевым условиям (4.28). Однако решить указанную систему весьма непросто.

4.5. Принцип взаимности в изопериметрических задачах

Постоянство множителей Лагранжа в изопериметрической задаче приводит к так называемому *принципу взаимности*, или *принципу двойственности*.

В изопериметрической задаче (4.1), (4.2), (4.4) мы искали экстремум функционала (4.1) при условии, что другие s функционалов принимают заданные значения L_j , $j = \overline{1, s}$. Заметим, что уравнение (4.24) для вспомогательного функционала в методе множителей Лагранжа не изменится, если подынтегральное выражение умножить на некоторое постоянное число μ_0 . Вводя обозначения

$$f_0 = f, \quad f_j = h_j, \quad \mu_j = \mu_0 \lambda_j, \quad j = \overline{1, s},$$

получаем

$$\mu_0 I^* = \int_a^b \sum_{j=0}^s \mu_j f_j dx.$$

В это выражение все функции f_j входят симметричным образом. Это означает, что в качестве подынтегральной функции целевого функционала можно выбрать любую из функций f_j , а остальные отнести к изопериметрическим связям. Другими словами, экстремали в задаче на экстремум, в которой интегрантом целевого функционала является функция f_0 , а остальные функции f_j отнесены к интегральным связям (задача А), совпадают с экстремалими в задаче на экстремум

(задача B), в которой интегрантом целевого функционала является функция f_m , а остальные функции f_j определяют изопериметрические условия

$$\int_a^b f_j(x, y, y')^2 dx = L_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, s.$$

При этом постоянная L_0 равна экстремальному значению функционала в задаче A , а остальные L_j те же, что и в интегральных связях (4.4). В качестве f_m можно выбрать любую из функций $f_1, \dots, f_s$.

Описанное совпадение экстремалей и называют принципом взаимности (принципом двойственности). Например, задача Дидоны (см. пример 4.2), состоящая в определении максимальной площади фигуры при заданном периметре, двойственна другой вариационной задаче, которая состоит в определении минимального периметра при заданной площади. Обе эти задачи имеют одни и те же экстремали, если максимум площади в первой задаче задается как ограничение во второй.

Можно показать, что дуга окружности $y^* = \sqrt{a^2 - x^2}$, найденная в примере 4.2 как экстремаль функционала

$$J[y] = \int_{-a}^a y dx$$

при заданной длине

$$K[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \pi a,$$

доставляет максимум этому функционалу, а $J[y^*] = \pi a^2/2$. Эта же функция $y^* = \sqrt{a^2 - x^2}$ доставляет минимум функционалу длины $K[y]$ при заданной площади $J[y] = \pi a^2/2$.

4.6. Задача Больца и задача Майера

Анализ вариационных задач в зависимости от типа уравнений связи (см. 4.1, 4.2) показывает, что задача Лагранжа является наиболее общей. Другие задачи либо представляют собой частные случаи задачи Лагранжа, либо сводятся к ней.

Проведем классификацию вариационных задач по типу *целевого функционала*. Задача (4.1)–(4.3) с *интегральным целевым функционалом*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

представляет собой, как уже говорилось, задачу Лагранжа. Если в задаче Лагранжа интегральный целевой функционал заменить *терминальным целевым функционалом*

$$T[y] = T(y(a), y(b)),$$

который определяется дважды непрерывно дифференцируемой функцией $T(y_1, y_2)$, то получим *задачу Майера*. Задачу со *смешанным целевым функционалом*

$$B[y] = J[y] + T[y]$$

называют *задачей Больца*. Во всех трех типах задач предполагается, что *условия связи* имеют вид (4.3), а краевые условия в самом общем виде записываются следующим образом:

$$\psi_i(a, y(a), b, y(b)) = 0, \quad i = \overline{1, s},$$

где количество s уравнений связано с размерностью n фазового пространства неравенством $s \leq 2n + 2$.

Иногда задачу со смешанным целевым функционалом без ограничений (т. е. без условий связи) называют *элементарной задачей Больца*.

Задача Больца, так же как и задача Майера, может быть сведена к задаче Лагранжа. Покажем это на примере задачи Больца для целевого функционала вида

$$B[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx + T(y(b)) \quad (4.29)$$

с *дифференциальными связями* (4.3) и краевыми условиями

$$y(a) = y^1. \quad (4.30)$$

Отрезок $[a, b]$ считаем фиксированным, а функцию $T(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемой.

Для рассматриваемой задачи

$$\frac{T(y(a))}{b-a} = \frac{T(y^1)}{b-a} = \text{const},$$

так как a, b, y^1 в данной задаче фиксированы. Учитывая это, терминальное слагаемое $T(y(b))$ в правой части (4.29) можно преобразовать к виду

$$T(y(b)) = \int_a^b \left[\frac{T(y(a))}{b-a} + \frac{d}{dx} T(y(x)) \right] dx.$$

Это позволяет переписать целевой функционал (4.29) в интегральной форме:

$$B[y] = \int_a^b \left[f(x, y, y') + \frac{T(y(a))}{b-a} + \frac{d}{dx} T(y(x)) \right] dx. \quad (4.31)$$

Видим, что задача Больца (4.29), (4.3), (4.30) эквивалентна задаче Лагранжа для функционала (4.31) с теми же условиями связи и краевыми условиями. Опираясь на эту эквивалентность, докажем следующее утверждение.

Теорема 4.4. Если допустимая функция $y^*(x) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ доставляет экстремум функционалу (4.29) с дифференциальными связями (4.3) и краевыми условиями (4.30), то существует система из k функций $\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)$, при которых $y^*(x)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_i} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $L = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$ — лагранжиан задачи (4.3), (4.29), (4.30),

и условиям трансверсальности

$$L'_{y'_i} \Big|_{x=b} = -T'_{y_i} \Big|_{x=b}, \quad i = \overline{1, n}.$$

◀ Пусть вектор-функция $y^*(x)$ есть точка экстремума в задаче Больца (4.29), (4.3), (4.30). Тогда эта функция является точкой экстремума и в задаче Лагранжа (4.31), (4.3), (4.30).

Применим к задаче Лагранжа теорему 4.1. Согласно этой теореме, найдутся такие функции $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, k}$, что $y^*(x)$ является точкой экстремума для вспомогательного функционала

$$B^* = \int_a^b \left(L + \frac{T(y^1)}{b-a} + \frac{d}{dx} T(y(x)) \right) dx, \quad (4.32)$$

где $L = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$.

Запишем систему уравнений Эйлера для функционала (4.32):

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y_i} - (f^*)'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.33)$$

где

$$f^* = L + \frac{T(y^1)}{b-a} + \frac{d}{dx} T(y(x)).$$

Преобразуем уравнения этой системы. Имеем

$$(f^*)'_{y_i} = L'_{y_i} + \frac{d}{dx} T'_{y_i}, \quad (f^*)'_{y_i} = L'_{y_i} + T'_{y_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.34)$$

Здесь при вычислении $(f^*)'_{y_i}$ использовано равенство

$$\frac{d}{dx} T(y(x)) = \sum_{i=1}^n T'_{y_i} y'_i.$$

Выражения для $(f^*)'_{y_i}$ и $(f^*)'_{y_i}$ подставим в уравнения системы (4.33):

$$L'_{y_i} - \frac{d}{dx} L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.35)$$

которые в совокупности с дифференциальными связями (4.3) составляют систему из $n + k$ уравнений относительно $n + k$ неизвестных функций $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, и $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, k}$. Остается записать условия трансверсальности на правом конце. Так как

b известно, а меняться может лишь значение $y(b)$, приходим к задаче с естественными краевыми условиями (см. 3.1)

$$(f^*)'_{y_i} \Big|_{x=b} = 0.$$

Учитывая (4.34), получаем

$$L'_{y_i} \Big|_{x=b} = -T'_{y_i} \Big|_{x=b}, \quad i = \overline{1, n}. \quad \blacktriangleright \quad (4.36)$$

Замечание 4.2. Для функционала вида

$$B[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx + \tilde{T}[y(a)] + T[y(b)]$$

в случае фиксированного отрезка $[a, b]$ и произвольных значений $y(a)$ и $y(b)$ (концы экстремали скользят по гиперплоскостям $x = a$ и $x = b$) к условиям трансверсальности на правом конце, т. е. при $x = b$, в теореме 4.4 следует добавить и условия трансверсальности на левом конце:

$$L'_{y_i} \Big|_{x=a} = \tilde{T}'_{y_i} \Big|_{x=a}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.37)$$

Замечание 4.3. Если в функционале (4.29) отсутствует интегральное слагаемое (т. е. рассматривается задача Майера),

то лагранжиан L в теореме 4.4 имеет вид $L = \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$.

Пример 4.4. Найдём экстремали функционала

$$B[y] = \int_1^2 x^2 (y')^2 dx - 2y(1) + y^2(2)$$

в классе функций $C^1[1, 2]$.

Это элементарная задача Больца без условий связи и краевых условий. В этом случае функция Лагранжа совпадает с интегрантом целевого функционала и имеет вид $L = f = x^2 (y')^2$. Запишем для заданного функционала уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx} (2x^2 y') = 0,$$

откуда $2x^2 y' = C = \text{const}$. Из этого уравнения найдём

$$y' = -\frac{C_1}{x^2},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Решая последнее уравнение и учитывая, что $x \in [1, 2]$, получаем общее решение уравнения Эйлера:

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2. \quad (4.38)$$

Чтобы определить постоянные C_1 и C_2 , используем условия трансверсальности (4.36) и (4.37):

$$2x^2 y'|_{x=2} = -2y|_{x=2}, \quad 2x^2 y'|_{x=1} = -2.$$

Подставляя в эти уравнения представление (4.38) и решая систему относительно C_1 и C_2 , получаем $C_1 = 1$, $C_2 = 1/2$.

Таким образом, рассматриваемый функционал имеет единственную экстремаль

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Вопросы и задачи

4.1. Определите гладкие функции, на которых может достигаться экстремум функционала в следующих вариационных задачах:

$$\text{а) } I[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 - zy') dx, \quad y = z + e^x, \quad y(0) = 2,$$

$$y(1) = e, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0;$$

$$\text{б) } I[y, z] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 + (z')^2 - 2z \cos x - 2y^2) dx, \quad y = z - 2 \sin x,$$

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z(0) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

$$\text{в)} \quad I[y, z] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 + (z')^2 - 2z' \sin x) dx, \quad y' = z - \cos x,$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad z(0) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{г)} \quad I[y, z] = \int_0^1 (2xy - (z')^2) dx, \quad y' - z + 2 = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$y(1) = \frac{1}{5}, \quad z(0) = 2, \quad z(1) = 3;$$

$$\text{д)} \quad I[y] = \int_0^{\pi} (y')^2 dx, \quad \int_0^{\pi} y^2 dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0;$$

$$\text{е)} \quad I[y, z] = \int_0^1 y' z' dx, \quad y(0) = y(1) = z(0) = 0, \quad z(1) = 1,$$

$$\int_0^1 xy dx = 0, \quad \int_0^1 xz dx = 0;$$

$$\text{ж)} \quad I[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx, \quad y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0,$$

$$\int_0^1 yz dx = -2;$$

$$\text{з)} \quad I[y, z] = \int_0^1 x(y - z) dx, \quad y(0) = z(0) = z(1) = 0, \quad y(1) = 2,$$

$$\int_0^1 y' z' dx = -\frac{4}{5}.$$

4.2. Найдите геодезические линии кругового цилиндра радиуса R .

4.3. Найдите кратчайшее расстояние между двумя точками $A(0, 2, 4)$ и $B(-1, \sqrt{3}, 2)$ на круговом цилиндре, ось которого совпадает с одной из координатных осей.

4.4. Для следующих вариационных задач укажите тип, к которому они относятся, и запишите полную систему необходимых условий экстремума функционала:

$$\text{а) } I[y] = \int_a^b f(x, y') dx + T[y(b)] \rightarrow \text{extr}, \quad g_j(x, y) = 0, \quad j = \overline{1, k}$$

($k < n$), $y(a) = y^a$, $a, b, y^a = (y_1^a, \dots, y_n^a)$ фиксированы;

$$\text{б) } I[y] = \int_a^b f(x, y) dx + T[y(a)] \rightarrow \text{extr}, \quad g_j(x, y') = 0, \quad j = \overline{1, k},$$

$y(b) = y^b$, $a, b, y^b = (y_1^b, \dots, y_n^b)$ фиксированы;

$\text{в) } T[y(a)] + \tilde{T}[y(b)] \rightarrow \text{extr}, \quad g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k} \quad (k < n),$
 a, b фиксированы.

4.5. Найдите экстремали следующих функционалов, определенных на множестве гладких функций:

$$\text{а) } I[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y) dx - y^2(1), \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } I[y] = \int_0^1 (y')^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1);$$

$$\text{в) } I[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2) dx - 2 \operatorname{sh} 1 \cdot y(1);$$

$$\text{г) } I[y] = \int_0^3 4(y')^2 y^2 dx + y^4(0) - 8y(3);$$

$$\text{д) } I[y] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

4.6. Обобщите утверждение и доказательство теоремы 4.2 на случай функционала, зависящего от n функций при k фазовых ограничениях.

5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Необходимое условие экстремума функционала состоит в том, что *первая вариация* этого функционала обращается в нуль. Это обобщает необходимое условие экстремума функции многих (в том числе одного) переменных. Достаточное условие экстремума функции многих переменных базируется на поведении второго дифференциала функции в исследуемой точке. Аналогичная ситуация и в вариационном исчислении: вводится понятие второй вариации, обобщающее понятие второго дифференциала; достаточные условия экстремума строятся на поведении этой вариации вблизи исследуемой экстремали.

Напомним, что в вариационном исчислении различают *сильный экстремум*, при котором рассматриваются произвольные непрерывные функции, и *слабый экстремум*, который формулируется в классе непрерывно дифференцируемых функций.

5.1. Слабый экстремум

Квадратичный функционал и вторая вариация. Отображение $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой паре x и y элементов линейного пространства E ставит в соответствие число $f(x, y)$, называют *билинейной формой*, если это отображение линейно по каждому аргументу, т. е. для любых значений аргументов выполняются равенства

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y),$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2).$$

В функциональном анализе, изучающем бесконечномерные линейные пространства, и, в частности, в вариационном ис-

числении билинейные формы принято называть *билинейными функционалами*. Если в билинейном функционале $J[y, z]$ приравнять аргументы, мы получим функцию $G[y] = J[y, y]$ на линейном пространстве, которую называют *квадратичным функционалом*. *Квадратичный функционал $G[y]$ положительно определен*, если $G[y] > 0$ при любом $y \neq 0$ и *неотрицательно определен*, если $G[y] \geq 0$ при любом $y \neq 0$.

Пример 5.1. В линейном пространстве $C[a, b]$ для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $A(x)$ функционал

$$J[y, z] = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx$$

является билинейным, а функционал

$$G[y] = J[y, y] = \int_a^b A(x)(y(x))^2 dx$$

является квадратичным. Функционал $G[y]$ положительно определен, если $A(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 5.2. В линейном пространстве $C^1[a, b]$ функционал

$$G[y] = \int_a^b (A(x)y^2 + 2B(x)yy' + C(x)(y')^2) dx,$$

где A, B, C — непрерывные функции, является квадратичным, так как он соответствует билинейному функционалу

$$J[y, z] = \int_a^b (A(x)yz + B(x)(yz' + y'z) + C(x)y'z') dx. \quad \#$$

Говорят, что *функционал $J[y]$, определенный на некотором нормированном пространстве, дважды дифференцируем в точке y* , если его приращение $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]$ представимо в виде

$$\Delta J = \delta J[y, \delta y] + \delta^2 J[y, \delta y] + o(\|\delta y\|^2), \quad (5.1)$$

где $\delta^2 J[y, \delta y]$ — квадратичный функционал по переменной δy , называемый *второй вариацией функционала $J[y]$ в точке y* , а $o(\|\delta y\|^2)/\|\delta y\|^2 \rightarrow 0$ при $\delta y \rightarrow 0$.

Если представление (5.1) для функционала $J[y]$ существует, то оно единственно и, значит, вторая вариация определена однозначно.

Теорема 5.1. Если функционал $J[y]$ в точке y дважды дифференцируем и имеет минимум (максимум), то $\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0$ ($\delta^2 J[y, \delta y] \leq 0$) при любом δy .

◀ Доказательство теоремы проведем лишь в случае минимума, так как для случая максимума доказательство аналогично.

Если функция y является точкой минимума функционала $J[y]$, то, согласно необходимому условию экстремума функционала, на функции y первая вариация функционала равна нулю: $\delta J[y, \delta y] = 0$. Поэтому представление (5.1) в этой точке имеет вид

$$\Delta J = \delta^2 J[y, \delta y] + o(\|\delta y\|^2) \geq 0.$$

Зафиксируем вариацию δy и рассмотрим приращение функционала, соответствующее вариации $t\delta y$, где t — положительное число. Для этого приращения верно неравенство

$$\delta^2 J[y, t\delta y] + o(\|t\delta y\|^2) = t^2 \delta^2 J[y, \delta y] + o(t^2 \|\delta y\|^2) \geq 0,$$

или

$$\frac{\delta^2 J[y, \delta y]}{\|\delta y\|^2} + \frac{o(\|t\delta y\|^2)}{\|t\delta y\|^2} \geq 0.$$

Первое слагаемое в последнем неравенстве не зависит от t , в то время как второе выбором достаточно малого t может быть сделано менее наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\delta^2 J[y, \delta y]}{\|\delta y\|^2} \geq -\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta^2 J[y, \delta y]}{\|\delta y\|^2} \geq 0$$

и

$$\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0.$$

Так как δy можно выбирать произвольно, заключаем, что квадратичный функционал $\delta^2 J[y, \delta y]$ неотрицательно определен: $\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0$. ►

Замечание 5.1. Неотрицательная определенность второй вариации является условием необходимым, но не достаточным для экстремума функционала. Это верно даже в случае функций одного переменного [II].

Говорят, что *квадратичный функционал* $G[y]$, определенный в нормированном пространстве, *сильно положителен*, если можно указать такое число $K > 0$, что для любого y выполняется неравенство $G[y] \geq K\|y\|^2$. В конечномерном случае квадратичный функционал представляет собой квадратичную форму, а сильная положительность квадратичного функционала равносильна его положительной определенности (в качестве K можно взять наименьшее из собственных значений матрицы квадратичной формы). Но в бесконечномерном случае это уже не так.

Теорема 5.2. Если y дважды дифференцируемого функционала $J[y]$, определенного в нормированном пространстве, первая вариация в точке y^* равна нулю, а вторая вариация в этой точке сильно положительна, то функционал $J[y]$ имеет в точке y^* минимум. #

Обсудим приведенные результаты в случае *простейшей задачи вариационного исчисления*. Вычислим вторую вариацию функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

заданного на множестве функций $y \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$. *Вариация функции* δy для такого функционала удовлетворяет однородным краевым условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Считаем, что интегрант f функционала $J[y]$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда, согласно формуле Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} J[y + \delta y] - J[y] &= \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b (f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2) dx + o(\|\delta y\|_{C^1}^2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $o(\|\delta y\|_{C^1}^2) / \|\delta y\|_{C^1}^2 \rightarrow 0$ при $\|\delta y\|_{C^1} \rightarrow 0$.

Представление (5.2) показывает, что

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2} \int_a^b \left(f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2 \right) dx. \quad (5.3)$$

Используя интегрирование по частям и краевые условия для вариации δy , получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f''_{yy'} \delta y \delta y' dx &= \int_a^b f''_{yy'} d((\delta y)^2) = \\ &= \left(f''_{yy'} (\delta y)^2 \right) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx = - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx, \end{aligned}$$

что позволяет записать соотношение (5.3) в следующем виде:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b \left(Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2 \right) dx, \quad (5.4)$$

где

$$Q = \frac{1}{2} \left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy'} \right), \quad P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}.$$

Замечание 5.2. Если мала функция $\delta y'$, то мала и δy , так как с учетом краевого условия $\delta y(a) = 0$

$$\delta y(x) = \int_a^x \delta y'(t) dt$$

и в силу теоремы об оценке интеграла

$$|\delta y(x)| \leq \int_a^x |\delta y'(t)| dt \leq \max_{[a,b]} |\delta y'(t)| (b-a).$$

Обратное неверно, так как малость функции не означает, что мала производная (пример: $h(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$). Это говорит о том, что в представлении (5.4) второй вариации основную роль играет слагаемое $P(\delta y')^2$. Знак второй вариации зависит от знака указанного слагаемого.

Теорема 5.3. Если квадратичный функционал

$$G[h] = \int_a^b (Q(x)h^2 + P(x)(h')^2) dx,$$

заданный на линейном пространстве функций $h \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих однородным краевым условиям $h(a) = h(b) = 0$, неотрицательно определен, а функция P непрерывна, то $P(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$.

◀ Предположим, что непрерывная функция $P(x)$ не является неотрицательной на всем отрезке $[a, b]$. Тогда можно выбрать точку $x_0 \in (a, b)$ и некоторую ее окрестность $(x_0 - \tau, x_0 + \tau) \in [a, b]$, в которой выполняется неравенство $P(x) \leq P(x_0)/2 < 0$. Если функция $h \in C^1[a, b]$ тождественно не равна нулю, но равна нулю вне интервала $(x_0 - \tau, x_0 + \tau)$, то

$$\int_a^b P(x)(h')^2 dx < 0,$$

так как функция h' непрерывна и отлична от нуля хотя бы в одной точке. Выберем функцию h указанного типа так, чтобы этот интеграл оставался отрицательным, а первое слагаемое Qh^2 в подынтегральном выражении функционала $G[h]$ давало как можно меньший интеграл. Пусть $h'(x) = 1$ при $x_0 + \delta/3 \leq x \leq x_0 + 2\delta/3$ при общем ограничении $|h'(x)| \leq 1$ (рис. 5.1).

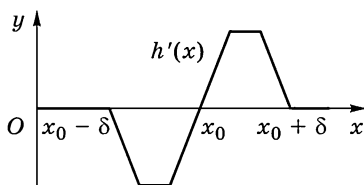


Рис. 5.1

Тогда

$$|h(x)| \leq \int_a^x |h'(t)| dt = \int_{x_0-\delta}^x |h'(t)| dt \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h'(t)| dt \leq 2\delta$$

и

$$\left| \int_a^b Qh^2 dx \right| \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |Q| h^2 dx \leq 8M\delta^3,$$

где M — максимальное значение функции Q на отрезке $[a, b]$.

Но в то же время

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)(h')^2 dx &= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} P(x)(h')^2 dx \leq \\ &\leq \int_{x_0+\delta/3}^{x_0+2\delta/3} P(x)(h')^2 dx \leq \int_{x_0+\delta/3}^{x_0+2\delta/3} \frac{P(x_0)}{2} dx = -C\delta, \end{aligned}$$

где $C = -P(x_0)/6 > 0$ не зависит от δ . В результате получаем, что $G[h] \leq -C\delta + 8M\delta^3$. Нетрудно увидеть, что независимо от значений M и C при достаточно малом δ будет выполняться неравенство $G[h] < 0$, которое противоречит условию теоремы. ►

Теорема 5.4. Если функционал $J[y]$ в простейшей задаче вариационного исчисления достигает на функции $y(x)$ минимума, то выполняется *условие Лежандра*

$$f''_{yy'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0. \quad (5.5)$$

◀ Согласно теореме 5.1, для точки экстремума y выполняется соотношение $\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0$, которое в силу представления (5.4) можно записать в виде

$$\int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx \geq 0.$$

Согласно теореме 5.3, $P(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$. Учитывая вид функции $P(x)$, получаем (5.5). ►

Итак, при исследовании функционала на экстремум важнейшую роль играет поведение его второй вариации, являющейся квадратичным функционалом. Рассмотрим квадратичный функционал (5.4) на функциях h , для которых $h(a) = h(b) = 0$. Как было показано, необходимым условием неотрицательной определенности этого функционала является неравенство $P(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$.

Запишем для функционала (5.4) уравнение Эйлера. В совокупности с краевыми условиями получим краевую задачу для ОДУ:

$$\frac{d}{dx}(Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (5.6)$$

Эта задача имеет очевидное решение $h(x) \equiv 0$, но могут существовать и нетривиальные решения.

Рассмотрим ненулевое решение $h(x)$ краевой задачи (5.6). Если точка $\tilde{x} \in (a, b]$ такова, что $h(\tilde{x}) = 0$, в то время как $h(x) \neq 0$ при $a < x < \tilde{x}$, то точку $\tilde{x}$ назовем *сопряженной* точке a . Итак, точки a и b сопряженные, если краевая задача (5.6) имеет решение, не обращающееся в нуль на (a, b) . Отсутствие на полуинтервале $(a, b]$ точек, сопряженных точке a , означает, что задача (5.6) не имеет ненулевых решений.

Теорема 5.5. Пусть функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $P(x) > 0$, $x \in [a, b]$. Тогда для положительной определенности функционала

$$\int_a^b (Qh^2 + P(h')^2) dx,$$

заданного на множестве функций $h \in C^1[a, b]$, для которых $h(a) = h(b) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы на этом отрезке не было точек, сопряженных точке a . #

Итак, чтобы проверить квадратичный функционал на положительную определенность, нужно исследовать краевую задачу (5.6) и выяснить, имеет ли она нетривиальные решения. Отсутствие нетривиальных решений означает, что квадратичный функционал положительно определен.

Вернемся к простейшей задаче вариационного исчисления

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (5.7)$$

где f — дважды дифференцируемая функция; $y \in C^1[a, b]$.

После выявления функций, удовлетворяющих необходимому условию экстремума функционала, т. е. экстремалей, дальнейшее исследование этих функций связано с анализом на них второй вариации

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx, \quad (5.8)$$

являющейся квадратичным функционалом. Здесь

$$P = P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)),$$

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2} \left(f''_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f''_{y'y}(x, y(x), y'(x)) \right).$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}(P\delta y') - Q\delta y = 0$$

квадратичного функционала $\delta^2 J[y, \delta y]$ (5.8) называют **уравнением Якоби** исходного функционала $J[y]$ задачи (5.7). Точку $\tilde{x} \in (a, b)$ называют **сопряженной** точке a в смысле функционала $J[y]$, если эта точка является сопряженной точке a в смысле квадратичного функционала $\delta^2 J[y, \delta y]$.

Теорема 5.6 (достаточные условия слабого минимума). Функция $y \in C^1[a, b]$ доставляет *слабый экстремум* функционалу $J[y]$ в простейшей задаче вариационного исчисления (5.7), если одновременно:

- 1) функция $y(x)$ является экстремалью функционала $J[y]$;
- 2) для этой функции выполняется **усиленное условие Лежандра**

$$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in (a, b);$$

3) на интервале (a, b) нет точек, сопряженных точке a в смысле функционала $J[y]$ (**усиленное условие Якоби**). #

Функционалы от нескольких функций. Все сказанное выше естественным образом переносится на общий случай функционалов, зависящих от нескольких функций. На линейном пространстве $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (5.9)$$

где функция f дважды непрерывно дифференцируема; $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$.

Если приращение $\Delta J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}]$ рассматриваемого функционала $J[\mathbf{y}]$, соответствующее вариации функции $\delta \mathbf{y} = (\delta y_1, \dots, \delta y_n)$, имеет вид

$$\Delta J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}] = J[\mathbf{y} + \delta \mathbf{y}] - J[\mathbf{y}] = \delta J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}] + \delta^2 J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}] + o(\|\delta \mathbf{y}\|_{C^1}^2),$$

где $\delta^2 J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}]$ — квадратичный функционал на пространстве вектор-функций $\delta \mathbf{y}$, то функционал $J[\mathbf{y}]$ будем называть дважды дифференцируемым, а функционал $\delta^2 J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}]$ — второй вариацией функционала $J[\mathbf{y}]$ в точке $\mathbf{y}$.

При фиксированных концах вариация $\delta \mathbf{y}$ должна удовлетворять условиям $\delta \mathbf{y}(a) = \delta \mathbf{y}(b) = 0$. Будем также считать, что интегрант f является дважды дифференцируемой функцией.

Используя, как и в одномерном случае, формулу Тейлора, получаем выражение для второй вариации функционала:

$$\delta^2 J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}] = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\delta \mathbf{y} f''_{yy} \delta \mathbf{y}^T + 2 \delta \mathbf{y}' f''_{y'y'} \delta \mathbf{y}^T + \delta \mathbf{y}' f''_{y'y'} (\delta \mathbf{y}')^T \right) dx,$$

где f''_{yy} , $f''_{y'y'}$, $f''_{y'y'}$ — матрицы Гессе интегранта f , отвечающие соответствующим переменным.

Как и в одномерном случае, можно применить правило интегрирования по частям. В результате получим

$$\delta^2 J[\mathbf{y}, \delta \mathbf{y}] = \int_a^b \left(\delta \mathbf{y}' P (\delta \mathbf{y}')^T + \delta \mathbf{y} Q \delta \mathbf{y}^T \right) dx, \quad (5.10)$$

где

$$P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y} \right).$$

В общем случае основную роль во второй вариации также играет слагаемое $\delta \mathbf{y}' P (\delta \mathbf{y}')^T$. Запишем систему уравнений Эйлера для квадратичного функционала, используя матричную запись:

$$\frac{d}{dx} (P(h')^T) - Q h^T = 0 \quad (5.11)$$

(в правой части уравнения стоит нулевой столбец соответствующей высоты). Систему (5.11) называют *системой Якоби* функционала $J[\mathbf{y}]$.

При фиксированной вектор-функции y элементы матриц P и Q в представлении (5.10) зависят только от x , так как они не зависят от компонент вектор-функции δy . Поэтому система Якоби (5.11) — это система линейных дифференциальных уравнений порядка не выше двух относительно компонент вектор-функции h , удовлетворяющая теореме существования и единственности в каждой точке x , для которой $\det P(x) \neq 0$.

Рассмотрим решения h_i системы (5.11), удовлетворяющие начальным условиям $h_i(a) = 0$, $h'(a) = e_i$, где $e_1, e_2, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (т. е. у вектора e_i отлична от нуля лишь i -я компонента, которая равна единице). Значения этих решений в точке x линейно независимы, если эта точка достаточно близка к точке a , т. е. $\Delta_h(x) = \det(h_1(x), \dots, h_n(x))^T \neq 0$. Здесь использована блочная структура записи:

$$\begin{pmatrix} h_1(x) \\ \dots \\ h_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & \dots & h_{1n}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & \dots & h_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & \dots & h_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

где $h_i(x) = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in})$.

Если точка $\tilde{x}$ такова, что $\Delta_h(\tilde{x}) = 0$, в то время как $\Delta_h(x) \neq 0$ при $a < x < \tilde{x}$, то точку $\tilde{x}$ назовем *сопряженной* точке a в смысле функционала $J[y]$.

Достаточные условия скалярного случая без изменений обобщаются на векторный случай.

Теорема 5.7. Пусть функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

где f — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определен на множестве вектор-функций $y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2.$$

Функция y^* доставляет минимум функционалу $J[y]$, если одновременно выполняется следующее:

- 1) функция y^* является экстремалью функционала $J[y]$;
- 2) функция y^* удовлетворяет усиленному условию Лежандра

$$f''_{yy'}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in (a, b)$$

(т. е. матрица $f''_{yy'}$ положительно определена при указанных значениях x);

3) отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных точке a в смысле функционала $J[y]$.

5.2. Условие Якоби

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dy$$

с дважды непрерывно дифференцируемым *интегрантом* f , определенный на линейном пространстве $C^1[a, b]$. Если функционал $J[y]$ не является вырожденным, множество его экстремалей, проходящих через фиксированную точку (a, y_a) , образует однопараметрическое семейство, при этом в качестве параметра можно взять угол наклона экстремали в точке (a, y_a) . Если это семейство заполняет сплошь некоторую область $D \subset \mathbb{R}^2$, причем через каждую точку области D проходит ровно одна экстремаль, то мы будем говорить, что в области D задано *поле экстремалей*.

Поле экстремалей, заданное в области D , позволяет в этой области определить функцию $p(x, y)$. Значением этой функции является значение тангенса угла наклона экстремали в точке (x, y) , т. е. $p(x, y)$ есть производная той экстремали $y(x)$, значение которой в точке x равно y . Функцию $p(x, y)$ называют *наклоном поля экстремалей*.

Рассмотрим экстремаль $y^*(x)$, проходящую через точку (a, y_a) . Будем говорить, что эта *экстремаль включена в поле*

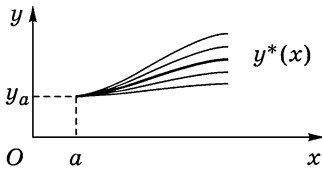


Рис. 5.2

экстремалей на отрезке $[a, b]$, если можно указать такую область $D \subset \mathbb{R}^2$, которая содержит график функции $y^*(x)$, $x \in (a, b]$, и в которой можно задать поле экстремалей рассматриваемого функционала (рис. 5.2).

Теорема 5.8 (условие Якоби). Для того чтобы экстремаль $y^*(x)$ функционала $J[y]$ можно было включить на отрезке $[a, b]$ в поле экстремалей, достаточно, чтобы на интервале (a, b) не было точек, сопряженных точке a в смысле функционала $J[y]$. #

Напомним, что отсутствие точек, сопряженных точке a , равносильно отсутствию у краевой задачи (5.6) нетривиальных решений.

Пример 5.3. Проверим выполнение условия Якоби для экстремалей функционала $J[y]$ в вариационной задаче

$$J[y] = \int_0^b ((y')^2 - y^2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Уравнение Эйлера рассматриваемого функционала имеет вид

$$\frac{d}{dx}(2y') - (-2y) = 0,$$

или $y'' + y = 0$. Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим поставленным краевым условиям, является функция $y(x) \equiv 0$. Вычисляем коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ для второй вариации функционала:

$$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'} = 1, \quad Q(x) = \frac{1}{2} \left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y} \right) = -1.$$

Краевая задача (5.6) для уравнения Якоби в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} h'' + h = 0, \\ h(0) = 0, \quad h(\tilde{x}) = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{x} \in (0, b]$.

Общее решение ОДУ в краевой задаче имеет вид

$$h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из краевого условия $h(0) = 0$ находим $C_1 = 0$. А второе краевое условие приводит к уравнению $C_2 \sin x = 0$, или, так как $h(x)$ должно быть нетривиальным, $\sin \tilde{x} = 0$.

Полученное уравнение имеет решения $\tilde{x} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Поставленная краевая задача не будет иметь нетривиальных решений, если ни одно из значений $k\pi$ не попадет на промежуток $(0, b]$, т. е. при $b < \pi$. Таким образом, условие Якоби для рассматриваемого функционала выполнено, если $b < \pi$, и не выполнено при $b \geq \pi$. При $b < \pi$ экстремаль $y^*(x) \equiv 0$ включается в поле экстремалей $y(x, C_2) = C_2 \sin x$ на отрезке $[0, b)$.

Обратим внимание на то, что экстремаль $y^*(x) \equiv 0$ доставляет слабый минимум функционалу в рассматриваемой задаче, так как выполняются все условия теоремы 5.6.

5.3. Инвариантный интеграл Гильберта

Пусть в простейшей задаче вариационного исчисления (5.7) экстремаль $y^*(x) \in C^1[a, b]$ включается в поле экстремалей, определенное в некоторой области D . Тогда в D определена функция $p(x, y)$ наклона поля экстремалей. Выберем такую допустимую функцию $y(x)$, график которой, за исключением начальной точки (a, y_a) , попадает в область D . Интеграл

$$\int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

задающий значение функционала $J[y]$ рассматриваемой вариационной задачи на функции $y(x)$, можно интерпретировать как криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma(y)} f(x, y, y') dx,$$

вычисляемый вдоль кривой $\Gamma(y)$, которая параметрически записывается в виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \\ y' = y'(t). \end{cases} \quad (5.12)$$

Поэтому приращение $\Delta J[y^*, \delta y]$ функционала $J[y]$ можно записать как разность криволинейных интегралов, соответствующих функциям y^* и $y = y^* + \delta y$:

$$\Delta J[y^*, \delta y] = \int_{\Gamma(y)} f(x, y, y') dx - \int_{\Gamma(y^*)} f(x, y, y') dx.$$

Криволинейный интеграл

$$G(y) = \int_{\Gamma(y)} [f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y))f'_{y'}(x, y, p(x, y))] dx,$$

где кривая $\Gamma(y)$ соответствует экстремали $y(x)$, график которой попадает в область D , называют *инвариантным интегралом Гильберта*.

Учитывая специфику кривой $\Gamma(y)$, которая параметрически описывается системой (5.12), подынтегральное выражение интеграла Гильберта можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & [f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y))f'_{y'}(x, y, p(x, y))] dx = \\ & = [f(x, y, p(x, y)) - p(x, y)f'_{y'}(x, y, p(x, y))] dx + \\ & + f'_{y'}(x, y, p(x, y)) dy = R(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

где

$$R(x, y) = f(x, y, p(x, y)) - p(x, y)f'_{y'}(x, y, p(x, y)),$$

$$Q(x, y) = f'_{y'}(x, y, p(x, y)).$$

Поэтому инвариантный интеграл Гильберта равен:

$$G(y) = \int_{\Gamma(y)} R(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (5.13)$$

Но в этой форме в интеграл не входит третья координата y' . Значит, его можно рассматривать как криволинейный

интеграл в плоскости xOy , взятый вдоль графика $\Gamma_0(y)$ функции $y(x)$:

$$G(y) = \int_{\Gamma_0(y)} R(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (5.14)$$

Отметим, что интеграл Гильберта, взятый вдоль экстремали, совпадает со значением функционала на этой экстремали:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma(y^*)} [f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y))f'_y(x, y, p(x, y))] dx = \\ & = \int_{\Gamma(y^*)} f(x, y, y') dx = \int_a^b f(x, y^*(x), (y^*)'(x)) dx = J[y^*], \end{aligned}$$

так как $p(x, y) = (y')'(x)$ на кривой $\Gamma(y^*)$.

Оказывается, что интеграл (5.14), как и (5.13), не зависит от пути интегрирования, т. е. подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно, область D , охватывающую график экстремали $y^*(x)$, можно считать односвязной. Поэтому подынтегральное выражение $R(x, y)dx + Q(x, y)dy$ будет полным дифференциалом, если $R'_y - Q'_x = 0$. Убедимся в выполнении этого равенства в каждой точке области D . Имеем

$$\begin{aligned} R'_y - Q'_x &= f'_y + f'_{y'}p'_y - p'_yf'_{y'} - p(f''_{y'y} + f''_{y'y'}p'_y) - \\ & - f''_{y'x} - f''_{y'y}p'_x = f'_y - f''_{y'x} - f''_{y'y}p - f''_{y'y'}(p'_x + pp'_y). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Предполагая, что функционал $J[y]$ не является вырожденным, раскроем уравнение Эйлера этого функционала:

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y = f''_{y'x} + f''_{y'y}y' + f''_{y'y'}y'' - f'_y = 0. \quad (5.16)$$

Отметим, что

$$p(x, y(x)) = y'(x) \quad (5.17)$$

для экстремали $y(x)$, откуда, дифференцируя, получаем

$$p'_x + p'_y y' = y''. \quad (5.18)$$

Соотношения (5.17) и (5.18) позволяют исключить из уравнения (5.16) производные y' и y'' :

$$f''_{yx} + f''_{yy}p + f''_{yy'}(p'_x + p'_y p) - f'_y = 0.$$

Полученное уравнение в совокупности с (5.15) приводит к тождеству $R'_y - Q'_x \equiv 0$.

5.4. Сильный экстремум

Итак, если в области D задано поле экстремалей, то инвариантный интеграл Гильберта не зависит от кривой, соединяющей в D точки (a, y_a) и (b, y_b) , а на экстремали $y = y^*(x)$, включенной в это поле, совпадает со значением функционала $J[y^*]$. Значит, изучая приращение функционала, соответствующее вариации δy , можно заменить значение функционала на экстремали значением интеграла Гильберта, взятого вдоль графика функции $y = y^* + \delta y$ (если δy достаточно мало по норме $\|\cdot\|_C$, то эта функция попадает в область D , в которой определено поле экстремалей). В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta J[y^*, \delta y] &= J[y] - J[y^*] = \int_{\Gamma(y)} f(x, y, y') dx - \int_{\Gamma(y^*)} f(x, y, y') dx = \\ &= \int_{\Gamma(y)} f(x, y, y') dx - G(y^*) = \int_{\Gamma(y)} f(x, y, y') dx - G(y) = \\ &= \int_{\Gamma(y)} (f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f'_y(x, y, p)) dx. \end{aligned}$$

Функцию

$$E(x, y, p, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f'_y(x, y, p),$$

являющуюся подынтегральной для последнего интеграла, называют *функцией Вейерштрасса*. С помощью этой функции приращение функционала можно записать следующим образом:

$$\Delta J[y^*, \delta y] = \int_{\Gamma(y)} E(x, y, p(x, y), y') dx,$$

где $y = y^* + \delta y$.

Отметим, что при $y = y^*(x)$, $y' = (y^*)'(x)$ (короче говоря, на экстремали) функция Вейерштрасса равна нулю, так как при этом $p(x, y^*(x)) = (y^*)'(x)$.

Функция Вейерштрасса позволяет анализировать приращение функционала. Если $E(x, y, p, y') \geq 0$ в окрестности графика данной функции $y^*(x)$, то эта функция — точка минимума функционала. Если же $E(x, y, p, y') \leq 0$ в окрестности графика данной функции $y^*(x)$, то $y^*(x)$ — точка максимума функционала.

Функция Вейерштрасса оказывается весьма эффективным инструментом исследования конкретных функций на экстремум для данного функционала. При этом такое исследование возможно с точки зрения как сильного экстремума, так и слабого экстремума. При исследовании на слабый экстремум фиксированной функции $y^*(x)$ необходимо проверить на знак функцию Вейерштрасса в точках, близких к точкам кривой $\Gamma(y^*)$, т. е. определить знак $E(x, y, p(x, y), y')$ для таких троек (x, y, y') , которые близки к тройке чисел $(x, y^*(x), (y^*)'(x))$. Если в таких точках $E(x, y, p(x, y), y')$ сохраняет знак, то функция $y^*(x)$ — слабый экстремум.

При исследовании вопроса, является ли функция $y^*(x)$ точкой сильного экстремума функционала, изучают знак функции Вейерштрасса для таких троек (x, y, y') , для которых y близко к $y^*(x)$. Функция Вейерштрасса должна сохранять свой знак при любых изменениях аргумента y' , так как величина $y'(x)$ не влияет на степень близости функций $y^*(x)$ и $y(x)$ по норме $\|\cdot\|_C$.

Известно*, что если функция Вейерштрасса, будучи непрерывной, в каких-либо точках $(x, y^*(x), p(x, y^*(x)), y')$ меняет знак, т. е. при некоторых значениях y' она положительна, а при некоторых — отрицательна, то $y^*(x)$ не является точкой экстремума функционала. Если такое изменение знака приходится на точки $(x, y^*(x), p(x, y^*(x)), (y^*)'(x))$, т. е. на точки графика исследуемой функции, то эта функция не доставляет и слабый экстремум.

Пример 5.4. Исследуем на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^b (y')^3 dx,$$

* См., например: Гельфанд И.М., Фомин С.В.

определенный на множестве функций $y \in C^1 [0, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $y(0) = 0$, $y(b) = y_b$ ($b > 0$, $y_b > 0$).

Уравнение Эйлера исследуемого функционала $J[y]$ имеет вид $(3(y')^2)' = 0$, или $y'y'' = 0$. Оно распадается на два дифференциальных уравнения $y' = 0$ и $y'' = 0$, которые несложно решить. Общее решение уравнения можно записать в виде $y = C_1x + C_2$. Выбрав среди экстремалей те, что удовлетворяют левому краевому условию $y(0) = 0$, получим однопараметрическое семейство $y(x, C) = Cx$ функций, из них единственная функция $y^*(x) = (y_b/b)x$ удовлетворяет и правому краевому условию.

Выясним, является ли функция $y^*(x)$ точкой экстремума для функционала $J[y]$. Отметим, что эта функция включается в поле экстремалей, так как через любую точку (x, y) из первого квадранта плоскости проходит единственная экстремаль семейства $y = Cx$. В качестве области D , в которой задано поле экстремалей, можно взять область $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$.

Через точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ из области D проходит экстремаль $y(x) = (\tilde{y}/\tilde{x})x$, для которой $y'(\tilde{x}) = \tilde{y}/\tilde{x}$. Значит, функция наклона поля экстремалей имеет вид $p(x, y) = y/x$. Составим функцию Вейерштрасса, учитывая вид интегранта $f(x, y, y') = (y')^3$:

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f'_{y'}(x, y, p) = \\ &= (y')^3 - p^3 - (y' - p)(3p^2) = (y' - p)((y')^2 + y'p + p^2 - 3p^2) = \\ &= (y' - p)^2(y' + 2p). \end{aligned}$$

Первый сомножитель $(y' - p)^2$ в функции Вейерштрасса на знак не влияет, так что нужно проверить на знак функцию $\varphi(x, y, y') = y' + 2p(x, y) = y' + 2y/x$. На исследуемой функции $y = (y_b/b)x$ имеем $\varphi(x, y, y') = (y_b/b) + 2(y_b/b) > 0$. Это же неравенство сохраняется и в ближайшей окрестности графика этой функции, например при $y > 0$ и $y' > 0$. Значит, функция $y^*(x)$ доставляет функционалу слабый экстремум. В то же время видно, что, каковы бы ни были x и y , выбором переменного y' можно придать как положительное, так и отрицательное значение функции Вейерштрасса. Следовательно, функция $y^*(x)$ не является точкой сильного экстремума функционала $J[y]$. #

Приведенный пример достаточно прост, и исследование функции Вейерштрасса не потребовало особых усилий. В более сложных случаях задача исследования функции Вейер-

штрасса может оказаться не такой элементарной. Тогда могут быть полезны другие, более простые достаточные условия, из которых вытекает знакопостоянство функции Вейерштрасса.

Если функция $f(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема, то к ней можно применить формулу Тейлора:

$$f(x, y, y') = f(x, y, p) + (y' - p)f'_{y'}(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2}f''_{y'y'}(z, y, q),$$

где $q = p + v(y' - p)$, $0 < v < 1$.

Значит,

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2}f''_{y'y'}(x, y, q),$$

и знак функции Вейерштрасса определяется значением $f''_{y'y'}$ в некоторой точке (x, y, q) .

Таким образом, если $f'_{y'y'} > 0$ всюду в области определения функции f , то функция Вейерштрасса сохраняет знак и любая экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, является точкой сильного экстремума функционала. В более сложных случаях необходимо проверять знак $f''_{y'y'}$ в таких точках (x, y, y') , для которых точка (x, y) близка к графику исследуемой функции $y^*(x)$, а y' произвольно. Если при указанных условиях $f''_{y'y'}$ сохраняет знак, то $y^*(x)$ является точкой сильного экстремума. Наконец, если $f''_{y'y'}$ сохраняет знак в точках (x, y, y') , близких к $(x, y^*(x), (y^*)'(x))$, т. е. для функций, близких к $y^*(x)$ по норме $\|\cdot\|_{C^1}$, то $y^*(x)$ будет точкой слабого экстремума функционала.

Условие

$$f''_{y'y'}(x, y, y') > 0 \quad \text{или} \quad f''_{y'y'}(x, y, y') < 0$$

знакопостоянства производной $f''_{y'y'}$ называют усиленным **условием Лежандра**.

Пример 5.5. Исследуем на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx,$$

определенный на множестве функций $y(x) \in C^1[0, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $y(0) = 0$, $y(b) = y_b$ ($b, y_b > 0$).

Рассматриваемый функционал отличается лишь постоянным множителем от функционала задачи о брахистохроне (см. пример 1.2). Его экстремали параметрически задаются в следующем виде (см. пример 2.7):

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1(\Theta - \sin \Theta); \\ y = \tilde{C}_1(1 - \cos \Theta), \end{cases} \quad (5.19)$$

причем, каковы бы ни были значения $b > 0$ и $y_b > 0$, через точку (b, y_b) проходит единственная экстремаль. Это значит, что в области $D = \{(x, y): x > 0, y > 0\}$ задано поле экстремалей, а любая экстремаль рассматриваемого семейства оказывается включенной в это поле. Однако записать функцию наклона аналитическим выражением не удастся, так как нужно решать трансцендентное уравнение. Но можно проверить усиленное условие Лежандра. Имеем

$$f'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}, \quad f''_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{(1+(y')^2)^3}} > 0.$$

Таким образом, единственная функция, которая параметрически задается системой (5.19) и удовлетворяет поставленным краевым условиям, доставляет сильный минимум рассматриваемому функционалу.

Вопросы и задачи

5.1. Проверьте, выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^b (e^{x^2} - 4y^2 + (y')^2) dx,$$

проходящей через точки $A(0, 0)$ и $B(b, 0)$. Предполагается, что $b \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

5.2. Покажите, что для функционала

$$J[y] = \int_a^b f(x, y') dx,$$

где f дважды непрерывно дифференцируема; $f''_{yy'} \neq 0$; $y(x) \in C^1[a, b]$, каждая экстремаль может быть включена в поле экстремалей.

5.3. Для следующих функционалов проверьте, включены ли экстремали, удовлетворяющие заданным краевым условиям, в поле экстремалей:

$$\text{а) } \int_0^1 ((y')^2 - y(y')^3) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = c \quad (c > 0);$$

$$\text{в) } \int_0^1 h(y) \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y(0) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (h(y) > 0);$$

$$\text{г) } \int_0^1 (6(y')^2 - (y')^4) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = c \quad (c > 0).$$

5.4. Докажите, что для функционала

$$J[y] = \int_0^{5\pi/4} (y^2 - (y')^2) dx$$

при краевых условиях $y(0) = 0$, $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$ экстремаль $y(x) \equiv 0$ не является точкой экстремума.

5.5. Исследуйте на экстремум следующие функционалы, определенные на множестве непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям:

$$\text{а) } \int_0^a ((y')^2 + 2yy' - 16y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0 \quad (a > 0);$$

$$\text{б) } \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/4} (4y^2 - (y')^2 + 8y) dx, \quad y(0) = -1, \quad y(\pi/4) = 0;$$

$$\text{г) } \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx, \quad y(0) = 1/3, \quad y(1) = (1/3)e^2;$$

$$\text{д) } \int_0^{\pi/4} (y^2 - (y')^2 + 6y \sin 2x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1;$$

$$\text{е) } \int_0^2 (y^2 + (y')^2 - 2xy) dx, \quad y(0)=0, \quad y(2) = 3.$$

5.6. Исследуйте на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^1 (x^2 + \varepsilon(y')^2 + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

в зависимости от значения параметра ε .

5.7. Покажите, что в вариационной задаче

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 - y(y')^3) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = y(1) = 0$$

экстремаль $y(x) \equiv 0$ доставляет слабый минимум функционалу $J[y]$. Доставляет ли эта экстремаль сильный минимум функционалу $J[y]$?

ЧАСТЬ II

Оптимальное управление

Лучшее — враг хорошего.

Народная поговорка

6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Аппарат классического вариационного исчисления при всей своей фундаментальности не позволяет найти решения целого ряда вариационных задач, важных в различных отраслях техники. Вторая часть книги посвящена методам решения вариационных задач неклассического типа. Начнем с описания основных классов таких задач, которые будем называть *задачами оптимального управления*.

6.1. Постановка задач оптимального управления

Задача 1. Управляемый объект (управляемая система) — это некоторая машина, модель, прибор, процесс, конструкция и т. п., снабженная «рулями». Манипулируя «рулями» (в допустимых пределах, т. е. с учетом имеющихся ресурсов управления), мы тем самым определяем поведение, движение объекта, управляем им.

Слово «руль» взято в кавычки, поскольку под «рулем» в данном случае понимается любой фактор, дающий нам возможность влиять на движение объекта. Так, у автомобиля два «руля»: «баранка» и акселератор, а ресурсы управления характеризуются максимально возможным углом поворота колес и мощностью двигателя. Если в качестве управляемого объекта рассматривать технологический процесс проведения химической реакции, то роль «рулей» могут играть состав ингредиентов, количество катализатора, поддерживаемая температура и другие факторы, от которых зависит течение реакции.

Будем считать, что управляемый объект нам дан, так что известны и ресурсы управления, и *закон движения*, установ-

ливающий для выбранного правила манипулирования «рулями» эволюцию состояния объекта. Речь идет только об объектах, движение которых (при заданных начальных условиях) вполне точно и однозначно определяется выбором положения «рулей» в каждый момент времени. Такие объекты называют **детерминированными**, при их изучении никакие «случайности» во внимание не принимаются.

Следует учитывать, что часто наши возможности управлять объектом лимитируются не только ресурсами управления, но и тем, что в процессе движения объект не должен попадать в состояние, физически недоступное или недопустимое с точки зрения конкретных условий эксплуатации объекта. Например, при работе электрической системы нельзя допускать перегрева мотора; осуществляя маневр судна, необходимо учитывать ширину фарватера и т. д. Подчеркнем, что такого рода ограничения на состояние объекта совершенно не зависят от свойств самого объекта и являются дополнительными, диктуются условиями конкретной задачи.

Имея дело с управляемым объектом, мы всегда стремимся так манипулировать «рулями», чтобы, исходя из определенного начального состояния, достичь некоторого желаемого состояния, т. е. реализовать стоящую перед нами **цель управления**. Если, скажем, речь идет о запуске спутника, то нужно рассчитать режим работы двигателей ракеты-носителя, который обеспечит доставку спутника на желаемую орбиту. Как начальное состояние объекта, так и цель управления зависят от рассматриваемой прикладной задачи.

Как правило, существует бесконечное число способов управлять объектом так, чтобы добиться желаемого результата. В связи с этим и возникает задача не просто как-то реализовать цель управления, а найти тот способ управления, который в определенном смысле является наилучшим, **оптимальным**. Конечно, для этого мы должны располагать **критерием качества**, позволяющим судить о том, какой способ управления лучше, а какой хуже. Этот критерий также свой в каждой конкретной задаче. Так, при управлении электроприводом естественно стараться обеспечить отработку искомых величин за минимальное время, расчет графика полета самолета из одного пункта в другой преследует достижение наименьшей себестоимости и т. д.

Такова в общих чертах **задача оптимального управления**. Перейдем к ее математическому описанию.

Задача 2. Будем рассматривать объект, состояние которого в фиксированный момент времени описывается набором из n чисел $x_1, \dots, x_n$ — **фазовых координат** (или фазовых переменных [VIII]). Эти числа удобно считать компонентами **фазового вектора (фазового состояния)** $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Таким образом, состояние объекта в каждый момент времени можно изобразить точкой (элементом) n -мерного **арифметического пространства** $\mathbb{R}^n$, называемого **фазовым пространством** объекта [VIII]. Например, в случае механического объекта с конечным числом степеней свободы фазовый вектор x составляют из обобщенных координат $q_1, \dots, q_k$ и обобщенных импульсов $p_1, \dots, p_k$.

Движение объекта проявляется в том, что его фазовые координаты меняются с течением времени t , т. е. фазовый вектор является вектор-функцией независимого переменного t . При движении объекта **фазовая (изображающая) точка** $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ описывает в фазовом пространстве кривую — **фазовую траекторию (фазовую кривую)**. Обычно фазовые координаты объекта являются «инерционными» переменными. Это значит, что они непрерывно зависят от времени.

Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано некоторое множество S , представляющее собой совокупность всех фазовых состояний, в которых управляемому объекту разрешается находиться. Тогда при движении объекта его состояние $x(t)$ в каждый момент времени t должно подчиняться условию

$$x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

которое называют **ограничением на фазовые координаты (фазовым ограничением)**. В ряде задач интерес вызывает случай, когда множество S замкнуто, а фазовая траектория может проходить по его границе.

Предположим, что положение имеющихся у управляемого объекта «рулей» описывается в каждый момент времени набором из r чисел $u_1, \dots, u_r$ — **управляющих параметров**, составляющих **вектор управления** $u = (u_1, \dots, u_r)^T$. Положение «рулей» объекта в каждый момент времени можно изобразить точкой r -мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^r$. Манипулирование «рулями» означает выбор вектор-функции $u(t)$, называемой **управлением (управляющим воздействием)**.

Существенным моментом, характеризующим управляемую систему, является описание *множества допустимых управлений*, т. е. совокупности таких функций $u(t)$, которые, исходя из реальных обстоятельств рассматриваемой задачи, разрешается выбирать в качестве управлений и среди которых мы будем в дальнейшем искать, например, оптимальное управление. Это множество задают, как правило, с помощью «геометрических» условий, накладываемых на возможные значения функции $u(t)$, и требований к ее функциональным свойствам.

В любом реальном объекте «рули» не могут занимать совершенно произвольные положения либо из-за конструктивных особенностей объекта и ограниченности ресурсов, либо из-за условий эксплуатации объекта, опасности нарушения его нормальной работы. Это значит, что в пространстве $\mathbb{R}^r$ управляющих параметров выделено некоторое множество U , называемое *областью управления*. В любой момент времени точка $u(t)$ должна принадлежать этому множеству. Иначе говоря, для любого t верно соотношение

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad (6.2)$$

называемое *ограничением на управление*. Самым типичным является случай, когда область управления U — ограниченное замкнутое множество (последнее означает, что, грубо говоря, «рули» могут занимать и свои «крайние» положения).

Помимо ограничения на значение управляющего вектора, в каждый момент времени необходимо также выяснить допустимый характер изменения этого вектора с течением времени. Обычно в качестве управлений рассматривают *кусочно-непрерывные вектор-функции*, т. е. вектор-функции, у которых каждая координатная функция $u_i(t)$ имеет на любом конечном интервале конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва первого рода [I]. Значение управления в точке разрыва не играет сколько-нибудь существенной роли в задачах управления. Но для определенности удобно считать, что оно совпадает с левосторонним пределом вектор-функции в точке разрыва:

$$u(\tau) = u(\tau - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau - 0} u(t).$$

Также будем считать, что управление $u(t)$ непрерывно на концах рассматриваемого отрезка $[t_1, t_2]$.

Если ограничение (6.2) на область значений управления выглядит достаточно естественно, то выбор в качестве управлений кусочно-непрерывных функций нуждается в пояснениях.

Наиболее реалистично выглядит требование, чтобы управление $u(t)$ было непрерывной функцией. Оно соответствует представлению о том, что управляющее воздействие, обладая определенной инерционностью, не может изменяться скачком. Но такое требование оказывается весьма неудобным. Как свидетельствуют даже простейшие примеры линейных задач (см. 7.4), в классе непрерывных функций решение задачи оптимального управления может не существовать. Кроме того, более внимательный анализ реальных управляемых объектов показывает, что почти всегда в качестве управляющих можно выбрать такие параметры, которые в пределах разумной точности можно считать безынерционными. Поэтому класс кусочно-непрерывных функций оказывается выгодным с теоретической точки зрения и приемлемым с точки зрения практических приложений.

Кусочно-непрерывные управления со значениями, попадающими в область управления U , будем называть *допустимыми*. В дальнейшем, говоря об управлениях, будем иметь в виду допустимые управления, не оговаривая это каждый раз.

Чтобы указать, как именно фазовая траектория объекта определяется по выбранному управлению, нужно иметь закон *движения объекта*, описывающий динамические свойства рассматриваемой управляемой системы. Будем предполагать, что закон движения представляет собой соотношение

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (6.3)$$

где $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$ — известная вектор-функция, конкретный вид которой определяется конструктивными особенностями объекта или условиями рассматриваемой задачи. Далее будем полагать, что функции $f_i(t, x, u)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по всей совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных x [V].

Объект, *математическая модель* которого задается системой уравнений (6.3), является управляемым, что выражается в следующем. Если выбрано (допустимое) управле-

ние $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, то подстановка его в (6.3) приводит к нормальной системе ОДУ [VIII], записанной в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)). \quad (6.4)$$

При заданных условиях на вектор-функцию f эта система удовлетворяет теореме существования и единственности для задачи Коши, т. е. при начальном условии $x(t_1) = x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$ она имеет решение, и притом единственное, в окрестности точки x^1 . Другими словами, при выбранном управляющем воздействии $u(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ движение объекта описывается вектор-функцией, которая представляет собой решение задачи Коши для системы ОДУ [VIII]. Очевидно, что движение объекта будет меняться в зависимости от управляющего воздействия. Решение системы (6.4) при заданном управлении $u(t)$, как и определяемую этим решением кривую в фазовом пространстве, называют *фазовой траекторией, соответствующей* этому управлению. Начальное условие x^1 в задачах оптимального управления часто называют *начальным состоянием*.

Заметим, что именно к виду (6.3) обычно сводятся уравнения движения для механических управляемых объектов с конечным числом степеней свободы. Далее везде под управляемым объектом будем понимать систему ОДУ вида (6.3).

Детерминированность управляемого объекта означает, что выбор управления $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, должен однозначно определять (при заданном начальном условии) траекторию $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Чтобы это было так, достаточно считать, что вектор-функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет ранее оговоренным условиям (непрерывность по совокупности переменных (t, x, u) , непрерывная дифференцируемость по совокупности переменных x).

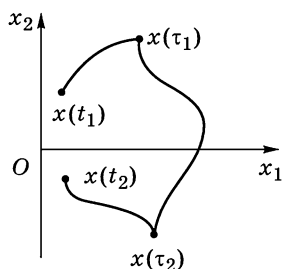


Рис. 6.1

Тогда на каждом участке непрерывности управления $u(t)$ система (6.4) удовлетворяет теореме существования и единственности для задачи Коши. В точках разрыва какой-либо из координатных функций управления надо производить стыковку решений системы (6.4), обеспечивающую непрерывность фазовой траектории. На рис. 6.1 показан пример

фазовой траектории на плоскости, которая отвечает управлению, имеющему разрывы первого рода в моменты времени τ_1 и τ_2 . Таким образом, траектория $\mathbf{x}(t)$ при кусочно-непрерывном управлении является непрерывной кривой, а ее производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ кусочно-непрерывна на рассматриваемом отрезке времени (такие кривые называют кусочно-гладкими [V]). Если $\mathbf{u}(t)$ — допустимое управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая фазовая траектория, удовлетворяющая ограничению (6.1), то пару функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ будем называть *допустимым процессом*.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию системы (6.3). Пусть в некоторый момент времени t управляемый объект находится в фазовом состоянии $\mathbf{x}(t)$. Вектор $\dot{\mathbf{x}}(t)$ представляет собой *вектор фазовой скорости* и является касательным вектором к кривой $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ в соответствующей точке. Если в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ построить при фиксированном $\mathbf{x}$ всевозможные векторы $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ для всевозможных допустимых управляющих воздействий $\mathbf{u}$ (момент времени t фиксирован), то получим, согласно (6.3), множество допустимых (возможных) фазовых скоростей в точке $\mathbf{x}$ (на рис. 6.2 пунктиром изображено множество концов всех таких векторов). Другими словами, выбор управляющего воздействия $\mathbf{u}(t) \in U$ в момент времени t , когда изображающая точка находится в состоянии $\mathbf{x}$, равнозначен выбору допустимой фазовой скорости, с которой изображающая точка выходит из этого состояния.

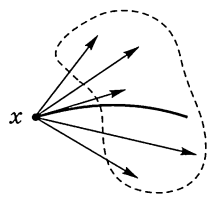


Рис. 6.2

Задача 3. При рассмотрении реальных управляемых объектов прежде всего возникает *задача управления* движением. Для ее формулирования нужно задать в фазовом пространстве некоторое множество M (цель управления) тех состояний, которые являются желательными. При этом должно быть выполнено включение $M \subset S$.

Говорят, что управление $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, переводит объект (6.3) из состояния $\mathbf{x}^1$ в состояние $\mathbf{x}^2$, если соответствующая этому допустимому управлению фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ (решение задачи Коши для системы (6.4) с начальным условием $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$) определена на том же отрезке времени $[t_1, t_2]$, удовлетворяет ограничению (6.1) и в момент времени t_2 попадает

в фазовое состояние x^2 (т. е. $x(t_2) = x^2$). Обратим внимание на то, что отрезок $[t_1, t_2]$ — это конечный промежуток числовой прямой. Если управление $u(t)$ переводит объект (6.3) из начального состояния x^1 в некоторое состояние $x^2 \in M$, то будем говорить, что управление $u(t)$ реализует цель управления M .

Задача управления движением состоит в том, чтобы найти какое-нибудь допустимое управление, реализующее цель. Другими словами, для объекта (6.3) требуется отыскать такую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ со значениями в U , определенную на отрезке $[t_1, t_2]$ (вообще говоря, t_2 заранее неизвестно), чтобы система (6.4) имела решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_1) = x^1$, ограничению (6.1) и конечному условию $x(t_2) \in M$. Следовательно, задача управления сводится к решению краевой задачи для системы n -го порядка (6.3) [VIII] при ограничениях (6.1) и (6.2). Однако общей теории решения подобных задач нет. Доказательство разрешимости задачи управления и фактическое отыскание управления, реализующего цель, наталкиваются на серьезные трудности.

Мы не будем рассматривать вопросы разрешимости задачи управления, предполагая, что цель управления, поставленная для изучаемого объекта, может быть реализована. Отметим, что во многих прикладных задачах разрешимость задачи управления вытекает «из физических соображений».

Задача 4. В задачах управления движением возникают различные по количеству и характеру краевые условия. Если множество M , характеризующее цель управления, совпадает со всем фазовым пространством $\mathbb{R}^n$, то такую задачу называют *задачей со свободным концом* траектории. В этом случае роль краевых играют начальные условия $x(t_1) = x^1$.

Более сложные задачи — так называемые *двухточечные задачи*, или *задачи с фиксированными концами*. Эти задачи в качестве краевых условий имеют как начальное $x(t_1) = x^1$, так и конечное $x(t_2) = x^2$. При этом *интервал времени управления* $t_2 - t_1$ может быть как заданным, так и подлежащим определению. В этом случае множество M цели управления состоит из единственной точки x^2 .

В классе *многоточечных задач управления* для нескольких фиксированных моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ заданы значения некоторых координат вектора состояния.

Наконец, в классе *задач с подвижными (скользящими) концами* требуется найти управление, переводящее объект из некоторого (заранее не известного) состояния x^1 , принадлежащего известному множеству M_1 , в некоторое состояние x^2 из известного множества M_2 . Часто эти множества представляют собой гиперповерхности в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если M_1 и M_2 вырождаются в точки, то приходим к задаче с закрепленными концами.

Задача 5. Предположим, что задача управления разрешима. Наиболее типичной является ситуация, когда задача управления имеет бесконечно много решений, т. е. существует бесконечно много управлений, реализующих цель, и все они с этой точки зрения совершенно равноправны. В таком случае может быть поставлена задача оптимального выбора: среди допустимых управлений выбрать такое, при котором управляемый процесс будет наилучшим в каком-то определенном смысле. Другими словами, если качество процесса оценивается некоторой числовой характеристикой, то задача заключается в том, чтобы выбором управления обеспечить ее максимальное или минимальное значение. Эту числовую характеристику называют *критерием качества*.

Значение критерия качества определяется управлением, динамикой управляемого процесса (временем управления, фазовой траекторией). Соответственно, критерий качества представляет собой *функционал* того или иного вида, и задача оптимального управления состоит в отыскании управлений, обеспечивающих минимум или максимум этого функционала. Случай, когда требуется максимизировать функционал, сводится к задаче минимизации заменой исходного функционала I функционалом $-I$. Поэтому данный случай отдельно не рассматривают.

Таким образом, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $u(t)$, реализующее цель, для которого функционал принимает наименьшее возможное значение. При этом управление $u(t)$ называют *оптимальным управлением*, соответствующую фазовую траекторию $x(t)$ — *оптимальной траекторией*, а процесс $(x(t), u(t))$ — оптимальным процессом.

Для управляемых процессов с законом движения (6.3) наиболее широко используют так называемые *интегральные критерии качества* — функционалы вида

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt. \quad (6.5)$$

К этому классу критериев относятся:

а) **критерий оптимального быстродействия** с подынтегральной функцией

$$f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1,$$

который сводится к представлению $I = t_2 - t_1$. Такой критерий используется в теории автоматического управления (в следящих системах) для выбора параметров, обеспечивающих наименьший по длительности процесс при отработке входного сигнала. Оптимальное управление в задачах с критерием оптимального быстродействия называют **управлением, оптимальным по быстродействию**;

б) **интегральный квадратичный критерий** с подынтегральной функцией

$$f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а среди коэффициентов α_i есть хотя бы один ненулевой. В представлении (6.5) могут рассматриваться как конечный ($t_2 < +\infty$), так и бесконечный ($t_2 = +\infty$) интервалы времени. Такой критерий дает косвенное представление о точности работы системы, рассматриваемой в фазовом пространстве. Его также используют в теории автоматического управления;

в) **энергетические критерии качества** с подынтегральными функциями

$$f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^r \delta_j^2 u_j^2 \quad \text{и} \quad f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^r \delta_j^2 |u_j|,$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, а среди коэффициентов δ_i есть хотя бы один ненулевой. Эти критерии характеризуют затраты энергии, например, в задачах ориентации спутника с помощью газореактивных двигателей;

г) **смешанный интегральный критерий** с подынтегральной функцией

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 + \sum_{j=1}^r \delta_j^2 u_j^2,$$

дающий отклонения по фазовым координатам «в среднем» и общие энергетические затраты.

Наряду с интегральными критериями качества в теории оптимального управления часто встречаются *терминальные функционалы*, т. е. функционалы вида $I = T(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2))$. К этому классу неинтегральных критериев относится, например, *критерий конечного состояния* $I = T(\mathbf{x}(t_1))$. Этот критерий обычно используют, когда систему необходимо привести в заданное конечное состояние $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ в момент времени t_2 с наименьшей ошибкой. В такой постановке критерий имеет вид

$$T(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)) = \sum_{i=1}^n (x_i(t_2) - a_i)^2 = \|\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{a}\|^2.$$

Задача 6. Неклассический характер задачи оптимального управления особенно ярко проявляется в случае поиска управления, оптимального по быстродействию, для системы (6.3), у которой правые части — линейные функции относительно $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ с постоянными коэффициентами, а множество U представляет собой замкнутый выпуклый многогранник, определяемый, например, неравенствами $|u_j(t)| \leq 1$, $j = \overline{1, r}$. Оказывается, что оптимальное управление осуществляется скачкообразной вектор-функцией $\mathbf{u}(t)$, у которой точка $\mathbf{u}(t)$ поочередно находится в вершинах многогранника U . Закон управления сводится к последовательности скачкообразных переходов от одной вершины к другой.

Эта линейная вариационная задача, играющая важную роль в технических приложениях, решена в 7.4. Классические методы для ее решения не применимы (см. 6.4). Указанный скачкообразный характер оптимального управления не позволяет ограничить класс допустимых управлений только непрерывными функциями. Если же ввести такое ограничение, задача станет неразрешимой. То же будет и в случае, если условиться, что множество управлений U — открытое множество.

Для отыскания оптимального управления можно использовать два подхода. Первый заключается в том, что оптимальное

управление строится как функция времени t . В результате получают **программное управление**, которое известно наперед на весь интервал времени и не зависит от возможного поведения системы. Система управляется без обратной связи (по разомкнутому циклу). С прикладной точки зрения такой подход несовершенен, так как подразумевает точное знание динамики объекта, но любая математическая модель движения объекта приближенна и не учитывает влияния всех внешних факторов.

Второй подход состоит в том, что оптимальное управление строится как функция фазовых координат. Такую функцию называют **синтезирующей функцией**, а задачу построения синтезирующей функции — **задачей синтеза оптимальных управлений** (см. 7.5). Этот подход ближе к практическим приложениям, так как при управлении учитывают текущее состояние системы (управление с обратной связью), но синтезировать управление значительно сложнее, чем строить программное управление. Однако можно сочетать оба подхода (например, в методе аналитического конструирования).

Проиллюстрируем, как ставится задача оптимального управления.

Пример 6.1. Рассмотрим математический маятник (т. е. груз малых размеров на невесомом стержне), который находится вблизи верхнего (неустойчивого) положения равновесия (рис. 6.3).

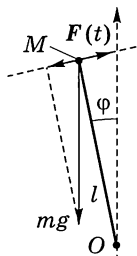


Рис. 6.3

Для простоты предположим, что трение отсутствует. Если угол φ отклонения маятника отсчитывать против хода часовой стрелки от направления на верхнее положение равновесия, то уравнение движения маятника имеет вид

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgl \sin \varphi,$$

где m — масса маятника; l — его длина; g — ускорение свободного падения.

Ограничиваясь областью, достаточно близкой к положению равновесия, мы можем заменить $\sin \varphi$ на φ , так как $\sin \varphi \approx \varphi$ при малых значениях φ . Введя обозначение $\omega^2 = g/l$, $\omega > 0$, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \omega^2\varphi = 0, \quad (6.6)$$

описывающее движение маятника при малых значениях φ , т. е. при $|\varphi| < \Phi$ для некоторого Φ (*уравнение линейного приближения*).

Известно (это, впрочем, очевидно), что верхнее положение равновесия маятника неустойчиво. Каково бы ни было начальное положение $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, отличное от положения равновесия ($\varphi = 0$, $\varphi' = 0$), маятник начинает движение, согласно дифференциальному уравнению, по закону

$$\varphi(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \quad (6.7)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Из соотношения (6.7) вытекает, что маятник в конечном счете удаляется от положения равновесия. Правда, следует отметить так называемое *лимитационное движение*, возникающее, например, в линейной модели (6.6) при $\dot{\varphi}_0 = -\omega\varphi_0$; при таком движении маятник приближается к положению равновесия с убывающей скоростью, но не достигает его ни за какой конечный промежуток времени.

Допустим теперь, что к маятнику приложена некоторая внешняя сила $F(t)$, линия действия которой в каждый момент времени t перпендикулярна оси маятника. Величину и направление силы можно выбирать по своему усмотрению, меняя во времени, но при этом должны соблюдаться ограничение $|F(t)| \leq F_0$, которое отражает лимиты на имеющиеся ресурсы, и требование, чтобы функция $F(t)$ была кусочно-непрерывной. Будем описывать силу положительной скалярной величиной F , когда сила направлена в сторону увеличения угла φ , и отрицательной, когда сила направлена в сторону уменьшения φ . Тогда уравнение линейного приближения вынужденного движения маятника будет таково:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \omega^2\varphi = f(t), \quad (6.8)$$

где $f(t) = F(t)/(ml)$.

Спрашивается: можно ли подобрать функцию $F(t)$ внешнего воздействия так, чтобы маятник из начального состояния $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ за конечное время достиг положения равновесия? Если

это возможно, то как привести маятник в верхнее положение равновесия за наименьшее время? Отметим, что ответ на эти вопросы связан с решением задачи Коши для дифференциального уравнения (6.8) второго порядка. Однако требуется не просто решить задачу Коши с заданными начальными условиями, а подобрать вид правой части уравнения так, чтобы решение соответствующей задачи Коши в некоторый конечный момент времени проходило через положение равновесия. При этом выбор правой части должен удовлетворять ограничениям (кусочная непрерывность $F(t)$ и неравенство $|F(t)| \leq F_0$). Пусть такая функция существует (что, конечно, совсем неочевидно), причем не единственная. Тогда возникает задача оптимального выбора, т. е. выбора такой функции, которая обеспечивает наименьшее время перехода из начального состояния в положение равновесия.

Используем ранее введенные обозначения. В каждый момент времени t состояние маятника описывается двумя параметрами (фазовыми координатами): углом отклонения $x_1 = \varphi$ и скоростью $\dot{\varphi} = x_2$. Значит, фазовое пространство рассматриваемого объекта является двумерным (представляет собой фазовую плоскость). Ограничение на фазовые координаты имеет вид

$$|x_1| \leq \Phi \quad (6.9)$$

и диктуется размерами области, в которой применима линейная модель движения маятника. Роль управляющего параметра играет «сила» f , введенная в (6.8). Обозначим этот параметр буквой u . Согласно условию задачи, область управления U описывается неравенством

$$|u| \leq f_0. \quad (6.10)$$

Множество допустимых управлений — это множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$, в каждый момент времени подчиняющихся ограничению (6.10).

Уравнение (6.8) в принятых обозначениях сводится к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 + u, \end{cases} \quad (6.11)$$

которая относится к законам движения управляемого объекта вида (6.3). Предполагаем, что в начальный момент времени $t = t_1 = 0$ задано начальное состояние объекта

(6.12)

а цель управления состоит из единственной точки на фазовой плоскости, соответствующей положению равновесия:

(6.13)

За критерий качества I берем, как условились, время. Нужно выяснить, какое допустимое управление переводит объект, описываемый системой (6.11), из начального состояния (6.12) в нужное состояние (6.13) за наименьшее время.

Решение поставленной задачи оптимального управления дано в 7.5 при дополнительных предположениях $\omega = 1$, $f_0 = 1$, которые несущественны, но упрощают выкладки. Вопрос о применимости линейной модели для описания реального объекта (маятника), т. е. вопрос об описании области (6.9), не обсуждается.

6.2. Задача Лагранжа в форме Понтрягина

Из предыдущего параграфа ясно, что задача оптимального управления очень близка в своей постановке задаче Лагранжа (см. 4). Поэтому мы начнем с обсуждения вариационных методов решения этой задачи.

Для задачи Лагранжа (см. 4.1)

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$$g_j(t, x, \dot{x}) = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (n < m), \quad (6.14)$$

рассмотрим частный случай, когда дифференциальные уравнения (6.14) разрешены относительно производных:

[illegible]

Переменные $x_1, \dots, x_n$, соответствующие производным в левой части системы (6.15), можно рассматривать как *фазовые переменные*, а остальные $x_{n+1}, \dots, x_m$ — как *управления*. Для управлений введем обозначения u_j , $j = \overline{1, r}$, где $r = m - n$. В таких задачах принято независимую переменную обозначать буквой t (она ассоциируется с временем), а не x , как в классическом вариационном исчислении. Введенное деление переменных на фазовые переменные и управления позволяет записать *дифференциальные связи* (6.15) в виде

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (6.16)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T$; $f = (f^1, \dots, f^n)^T$; $\dot{x} \equiv x'_t$.

Будем рассматривать задачи, в которых *целевой функционал* с учетом введенных обозначений имеет вид

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x, u) dt. \quad (6.17)$$

Заметим, что он является *вырожденным функционалом*, так как его *интегрант* $f^0(t, x, u)$ не зависит от производных искомых функций. Предполагается, что отрезок $[t_1, t_2]$ фиксирован и на его концах поставлены следующие краевые условия:

$$\Psi(x(t_1)) = 0, \quad \Theta(x(t_2)) = 0, \quad (6.18)$$

где $\Psi = (\psi^1, \dots, \psi^s)^T$, $\Theta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^l)^T$, $s, l \leq n$.

Задачу (6.16)–(6.18) называют *задачей Лагранжа в форме Понтрягина*. Считаем, что все функции $f^i (i = \overline{0, n})$, а также функции Ψ , Θ дважды непрерывно дифференцируемы, $x(t) \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, $u(t) \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^r)$. В такой постановке задача Лагранжа отличается от задач оптимального управления только классом *допустимых функций* (в задачах оптимального управления *фазовые траектории* $x(t)$ кусочно-гладкие, а управления $u(t)$ кусочно-непрерывные), а также отсутствием *ограничений на фазовые координаты и управления*.

Для решения задачи (6.16)–(6.18) применим подход Лагранжа, основанный на введении множителей Лагранжа

и уже использовавшийся ранее (см. 4.2). Составим вспомогательный функционал задачи (6.16)–(6.18):

$$I^*[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \mu^T \Psi(x(t_1)) + v^T \Theta(x(t_2)). \quad (6.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(t, x, \dot{x}, u) &= f^0(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) (\dot{x}_i - f^i(t, x, u)) = \\ &= f^0 + \lambda^T (x - f) \end{aligned} \quad (6.20)$$

— лагранжиан задачи; $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)^T$, $v = (v_1, \dots, v_l)^T$ — множители Лагранжа. Множители $\lambda_i(t)$ учитывают дифференциальные связи (6.16) (как и в 4.2), а множители μ_i , v_i — ограничения вида (6.18).

Теорему 4.1 можно обобщить на случай краевых условий вида (6.18). Такое обобщение означает, что экстремали задачи Лагранжа (6.16)–(6.18) являются экстремалими вспомогательного функционала $I^*[x, u]$. Чтобы найти экстремали задачи Лагранжа, нужно из экстремалей вспомогательного функционала выбрать те, которые удовлетворяют краевым условиям (6.18) и дифференциальным связям (6.16). Иначе говоря, экстремали вспомогательного функционала, удовлетворяющие краевым условиям и дифференциальным связям, являются экстремалими задачи Лагранжа.

Выпишем, имея в виду сказанное, уравнения для экстремалей задачи (6.16)–(6.18). Уравнения Эйлера вспомогательного функционала с учетом разделения переменных на фазовые переменные и управления имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} - L'_{x_i} = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{d}{dt} L'_{\dot{u}_j} - L'_{u_j} = 0, & j = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (6.21)$$

или для данного вида лагранжиана (6.20)

$$\dot{\lambda}_i = (f^0)'_{x_i} - \lambda^T f'_{x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.22)$$

$$(f^0)'_{u_j} - \lambda^T f'_{u_j} = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (6.23)$$

где $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T$. Уравнения (6.23) алгебраические, так как производные $\dot{y}$ не входят в лагранжиан. К системе (6.22), (6.23) нужно добавить условия трансверсальности на левом и правом концах (см. замечание 4.2):

$$\begin{cases} L'_{\dot{x}_i} \big|_{t=t_1} = \mu^T \Psi'_{x_i} \big|_{t=t_1}, & i = \overline{1, n}; \\ L'_{\dot{u}_j} \big|_{t=t_1} = \mu^T \Psi'_{u_j} \big|_{t=t_1}, & j = \overline{1, r}; \\ L'_{\dot{x}_i} \big|_{t=t_2} = -v^T \Theta'_{x_i} \big|_{t=t_2}, & i = \overline{1, n}; \\ L'_{\dot{u}_j} \big|_{t=t_2} = -v^T \Theta'_{u_j} \big|_{t=t_2}, & j = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (6.24)$$

из которых лишь первая и третья группы уравнений не являются тривиальными. Они дают соотношения

$$\lambda_i(t_1) = \mu^T \Psi'_{x_i}(x(t)) \big|_{t=t_1}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (6.25)$$

$$\lambda_i(t_2) = -v^T \Theta'_{x_i}(x(t)) \big|_{t=t_2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.26)$$

Чтобы определить экстремали задачи Лагранжа (6.16)–(6.18) в форме Понтрягина, нужно к системе уравнений (6.22)–(6.26) добавить уравнения дифференциальных связей (6.16) и краевые условия (6.18). В результате получим систему $2n + r$ уравнений, среди которых $2n$ уравнений — дифференциальные первого порядка (уравнения (6.16) и (6.22)) и r уравнений — алгебраические (уравнения (6.23)). Решение этой системы зависит от $2n$ постоянных интегрирования и $s + l$ неопределенных множителей Лагранжа μ_i и v_i . Для определения всех $2n + s + l$ неизвестных имеются $2n$ условий трансверсальности (6.25), (6.26) и $s + l$ краевых условий (6.18).

Рассмотрим другой случай, заменив в задаче (6.16)–(6.18) интегральный функционал (6.17) смешанным целевым функционалом

$$B[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x, u) dt + \tilde{T}[x(t_1)] + T[x(t_2)]. \quad (6.27)$$

Эту задачу часто также называют задачей Лагранжа в форме Понтрягина. Вспомогательный функционал для нее будет иметь вид

$$B^*[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \mu^T \Psi(x(t_1)) + v^T \Theta(x(t_2)) + \tilde{T}[x(t_1)] + T[x(t_2)]$$

с тем же лагранжианом, что и в предыдущей задаче. Поэтому уравнения Эйлера будут такими же, как и в предыдущей задаче, т. е. будут иметь вид (6.22), (6.23). Условия трансверсальности изменятся за счет терминальных слагаемых функционала $B[x, u]$:

$$\lambda_i(t_1) = (\mu^T \Psi'_{x_i}(x(t)) + \tilde{T}'_{x_i}[x(t)]) \Big|_{t=t_1}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\lambda_i(t_2) = - (v^T \Theta'_{x_i}(x(t)) + T'_{x_i}[x(t)]) \Big|_{t=t_2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если же ограничений (6.18) нет, то получаем задачу (6.16), (6.21) со свободными концами — третью формулировку задачи Лагранжа в форме Понтрягина. Условия трансверсальности в этой задаче имеют вид

$$\lambda_i(t_1) = \tilde{T}'_{x_i}[x(t)] \Big|_{t=t_1}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\lambda_i(t_2) = -T'_{x_i}[x(t)] \Big|_{t=t_2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Мы рассмотрели три задачи, в которых отрезок $[t_1, t_2]$ фиксирован. Однако подход Лагранжа позволяет получить необходимые условия в задаче Лагранжа в форме Понтрягина и в случае переменных концов t_1 и t_2 . Рассмотрим это на примере первой из ранее сформулированных задач — задачи (6.16)–(6.18). Оказывается, что и при изменяющихся концах t_1 и t_2 экстремали задачи Лагранжа являются экстремалими вспомогательного функционала (6.19). Но при этом вспомогательный функционал (6.19) зависит не только от функций $x(t)$ и $u(t)$, но и от переменных t_1 и t_2 , т. е. имеет вид

$$I^*[x, u, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \mu^T \Psi(x(t_1)) + v^T \Theta(x(t_2)). \quad (6.28)$$

Найдем вариацию функционала $I^*[x, u, t_1, t_2]$, повторяя рассуждения из 3.2. Зафиксировав допустимые вариации $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, δt_1 , δt_2 , составим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = & \int_{t_1 + \alpha \delta t_1}^{t_2 + \alpha \delta t_2} L(t, x + \alpha \delta x, \dot{x} + \alpha \delta \dot{x}, u + \alpha \delta u) dt + \\ & + \mu^T \Psi[x^1 + \alpha \delta x^1] + v^T \Theta[x^2 + \alpha \delta x^2], \end{aligned}$$

где $x^1 = x(t_1)$; $x^2 = x(t_2)$; $\delta x^1 = (\delta x_1^1, \dots, \delta x_n^1)^T$; $\delta x^2 = (\delta x_1^2, \dots, \delta x_n^2)^T$.

Согласно определению вариации функционала,

$$\begin{aligned} \delta I[x, u, t_1, t_2, \delta x, \delta u, \delta t_1, \delta t_2, \delta x^1, \delta x^2] &= \varphi'(0) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(L'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^r L'_{u_j} \delta u_j dt + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(L'_{\dot{x}_i} + v^T \Theta'_{x_i} \right) \bigg|_{t=t_2} \delta x_i^1 - \sum_{i=1}^n \left(L'_{\dot{x}_i} + \mu^T \Psi'_{x_i} \right) \bigg|_{t=t_1} \delta x_i^1 + \\ &+ \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i L'_{\dot{x}_i} \right) \bigg|_{t=t_2} \delta t_2 - \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i L'_{\dot{x}_i} \right) \bigg|_{t=t_1} \delta t_1. \end{aligned}$$

Приравнявая вариацию к нулю, получаем необходимые условия экстремума для функционала вида (6.28). При этом системы уравнений (6.21) и (6.24) дополняются уравнениями

$$\begin{aligned} \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i L'_{\dot{x}_i} \right) \bigg|_{t=t_1} &= 0; \\ \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i L'_{\dot{x}_i} \right) \bigg|_{t=t_2} &= 0. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Значит, экстремали функционала (6.28) удовлетворяют тем же уравнениям, что и экстремали функционала (6.19). Но кроме того, они подчиняются и дополнительным условиям (6.29), которые можно рассматривать как замену условий фиксированных концов.

Чтобы теперь определить экстремали задачи Лагранжа (6.16)–(6.18) в случае переменных концов t_1 и t_2 , нужно к системе условий (6.22), (6.23), (6.25), (6.26) и (6.29) добавить уравнение дифференциальных связей (6.16) и краевые условия (6.18). При этом, учитывая соотношения $L'_{\dot{x}_i} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, уравнения (6.29) можно преобразовать к виду

$$L(x(t_k), \dot{x}(t_k), u(t_k)) - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t_k) \lambda_i(t_k) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6.30)$$

Это соотношение и есть то недостающее условие, которое позволяет определить параметры t_1 и t_2 .

Для дальнейшего обсуждения задачи Лагранжа в форме Понтрягина нам удобно использовать каноническую форму уравнений Эйлера, которые в задаче Лагранжа (4.1)–(4.3) имеют вид (4.11). Введем *канонические переменные*

$$p_i = (f^*)'_{y'_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.31)$$

где $f^* = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$ — лагранжиан задачи, и запишем функцию

Гамильтона

$$H(x, y, p) = -f^* + \sum_{i=1}^n y'_i p_i,$$

в которой переменные y'_i находятся из системы уравнений (6.31). Уравнения Эйлера (4.11) эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dx} = -H'_{y_i}, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{dy_i}{dx} = H'_{p_i}, & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Вернемся к задаче (6.16)–(6.18). Ее лагранжиан имеет вид

$$L = f^0(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) (\dot{x}_i - f^i(t, x, u)).$$

Поэтому

$$p_i = L_{\dot{x}_i} = \lambda_i,$$

$$H(t, x, p, u) = -L + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i p_i = \sum_{i=1}^n p_i f^i - f^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.32)$$

Функцию Гамильтона H для задачи Лагранжа в форме Понтрягина часто называют *функцией Понтрягина*.

В канонических переменных дифференциальные связи (6.16) и уравнения Эйлера (6.22) можно записать в виде нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = H'_{p_i}, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{dp_i}{dt} = -H'_{x_i}, & i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (6.33)$$

которую называют *гамильтоновой системой*.

Чтобы получить *полную систему условий*, к (6.33) нужно добавить вторую группу уравнений Эйлера — алгебраические уравнения (6.23), которые с учетом (6.32) можно преобразовать к виду

$$H'_{u_j} = 0, \quad j = \overline{1, r}. \quad (6.34)$$

Кроме того, нужно добавить краевые условия (6.18) и условия трансверсальности (6.25), (6.26), которые в канонических переменных имеют вид

$$p_i(t_1) = \mu^T \Psi'_{x_i}(x(t_1)) \Big|_{t=t_1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.35)$$

$$p_i(t_2) = -v^T \Theta'_{x_i}(x(t)) \Big|_{t=t_2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.36)$$

Итак, метод Лагранжа, широко используемый в решении вариационных задач, позволяет получить необходимые условия экстремума для задачи Лагранжа в форме Понтрягина.

Эти условия дают возможность найти решение задачи в классе гладких функций $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и непрерывных функций $u_j(t)$, $j = \overline{1, r}$. Подвести итог раздела можно так: если функции, входящие в постановку экстремальной задачи, обла-

дают достаточной гладкостью, то для решения задачи можно использовать подход, основанный на введении множителей Лагранжа.

6.3. Некоторые задачи с ограничениями в классическом вариационном исчислении

Для задач оптимального управления характерно наличие ограничений на допустимые функции, т. е. фазовых ограничений и ограничений на управление. Некоторые задачи с такими ограничениями удастся решать с помощью методов вариационного исчисления.

Рассмотрим задачу

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (6.37)$$

с дважды непрерывно дифференцируемым интегрантом f в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$y(x) \geq \varphi(x), \quad x \in [x_1, x_2], \quad (6.38)$$

где $\varphi \in C^1[x_1, x_2]$.

Введением функции $u(x) = y'(x)$ эту задачу можно свести к задаче Лагранжа в форме Понтрягина с фазовыми ограничениями (6.38):

$$I[y, u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, u) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y' = u.$$

Однако для наглядности вариационного подхода остановимся на исходной формулировке (6.37), (6.38).

Равенство $y = \varphi(x)$ определяет границу множества, внутри которого не могут находиться значения функции, доставляющей экстремум функционалу (рис. 6.4). Наличие ограничений (6.38) приводит к необходимости некоторой

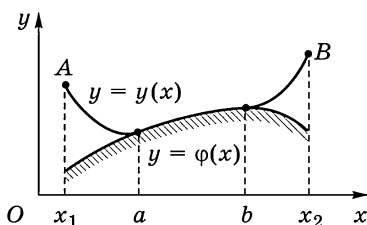


Рис. 6.4

корректировки вывода необходимых условий экстремума функционала.

Основное условие — *уравнение Эйлера* — выводилось в предположении, что функции могут свободно варьироваться, т. е. если y — допустимая функция, то допустимыми являются также любые функции $y + \delta y$ при δy , достаточно малых по норме. Для вариаций функции $y(x)$, удовлетворяющих неравенству $\delta y > 0$ на отрезке $[x_1, x_2]$, допустимыми функциями являются и функция $y + \delta y$, и функция $y - \delta y$. При наличии ограничений (6.38) в случае функции $y(x)$, выходящей на границу множества возможных значений (см. рис. 6.4), допустимой является любая функция $y(x) + \delta y(x)$ при $\delta y(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, но функция $y(x) - \delta y(x)$ уже не будет допустимой, так как будет принимать значения, не удовлетворяющие ограничениям. Значит, при наличии ограничений указанного типа вместо произвольной вариации надо рассмотреть односторонние вариации, которые определяются функциями $\delta y(x)$ одного знака на интервале (a, b) . Такие вариации позволяют получить решение задачи в случае, когда экстремум достигается на функции, не являющейся экстремалью.

Заменим в задаче (6.37), (6.38) зависимое переменное y на переменное z согласно уравнению $y = z^2 + \varphi(x)$. Тогда $y' = 2zz' + \varphi'(x)$ и функционал относительно z принимает вид

$$J[z] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, z^2 + \varphi(x), 2zz' + \varphi'(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, z, z') dx.$$

Функция $z(x)$ уже не подчиняется каким-либо ограничениям, а границе области в исходной задаче соответствует $z = 0$.

Так как в задаче для функции $z(x)$ ограничений нет, эта функция, будучи точкой экстремума функционала, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx} \Phi'_{z'} - \Phi'_z = 0.$$

Но

$$\Phi'_z = f'_y y'_z + f'_{y'} (y')'_z = 2zf'_y + 2z'f'_{y'},$$

$$\Phi'_{z'} = f'_{y'} (y')'_{z'} = 2zf'_{y'},$$

$$\frac{d}{dx} \Phi'_{z'} = 2z'f'_{y'} + 2z \frac{d}{dx} f'_{y'}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx} \Phi'_{z'} - \Phi'_z = 2z \frac{d}{dx} f'_{y'} - 2z f'_y.$$

Уравнение Эйлера для переменного z сводится к следующему уравнению для переменного y :

$$2z \left(\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y \right) = 0,$$

т. е. распадается на два уравнения: первое — $z = 0$, которому удовлетворяет функция $y = \varphi(x)$; второе — уравнение Эйлера для исходного функционала (6.37).

Итак, экстремум функционала (6.36) при наличии ограничений (6.38) может достигаться на функциях, график которых состоит из участков границы множества допустимых значений и дуг экстремалей (в частном случае участок границы может стянуться в точку).

Для полного решения задачи нужно также найти условия сопряжения участков экстремалей с участками границы множества допустимых значений. Пусть экстремум функционала (6.37) достигается на составной функции $y(x)$ и точка a есть точка сопряжения экстремали с функцией $y = \varphi(x)$, график которой ограничивает множество допустимых значений (рис. 6.5). Для определенности считаем, что экстремали соответствует участок слева от точки a . Тогда

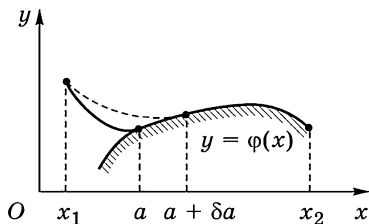


Рис. 6.5

$$I[y] = \int_{x_1}^a f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^{x_2} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx.$$

Приращение функционала, соответствующее вариации $\delta y(x)$, будет состоять из двух частей: приращения на экстремали

$$\Delta I_1 = \int_{x_1}^{a+\delta a} f(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_1}^a f(x, y, y') dx$$

и приращения на участке функции $y = \varphi(x)$

$$\begin{aligned}\Delta I_2 &= \int_{a+\delta a}^{x_2} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx - \int_a^{x_2} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx = \\ &= - \int_a^{a+\delta a} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx = -f(a, \varphi(a), \varphi'(a))\delta a + o(\delta a).\end{aligned}$$

Вариация функционала также распадается на два слагаемых, соответствующих вариации экстремали и пограничной функции. Слагаемое δI_1 , соответствующее экстремали, можно вычислить по обычной формуле вариации с подвижным правым концом, перемещающимся вдоль кривой $y = \varphi(x)$ (см. 3.2):

$$\delta I_1 = (f - (y' - \varphi')f'_{y'})\Big|_{x=a} \delta a,$$

а слагаемое δI_2 , соответствующее пограничной функции, равно:

$$\delta I_2 = -f(a, \varphi(a), \varphi'(a))\delta a.$$

Так как на функции $y(x)$ достигается экстремум, то сумма $\delta I_1 + \delta I_2$ должна равняться нулю, откуда в силу произвольности δa и с учетом равенства $y(a) = \varphi(a)$ получаем

$$(f(x, y, y') - f(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')f'_{y'})\Big|_{x=a} = 0. \quad (6.39)$$

Преобразуем разность $(f(x, y, y') - f(x, y, \varphi'))\Big|_{x=a}$ с помощью теоремы (формулы) Лагранжа [II]:

$$(f(x, y, y') - f(x, y, \varphi'))\Big|_{x=a} = (y' - \varphi')f'_{y'}(x, y, q)\Big|_{x=a},$$

где q — некоторое число между $\varphi'(a)$ и $y'(a)$.

Подставляя преобразованное выражение в (6.39), получаем

$$((y' - \varphi')(f'_{y'}(x, y, q) - f'_{y'}(x, y, y')))\Big|_{x=a} = 0.$$

Снова применим теорему Лагранжа:

$$((y' - \varphi')(q - y')f''_{y'y'}(x, y, q_1))\Big|_{x=a} = 0, \quad (6.40)$$

где q_1 — некоторое число между q и $y'(a)$.

Если $f''_{y'y'}(a, y(a), q) \neq 0$ для значений q между $y'(a)$ и $\varphi'(a)$, то из равенства (6.40) вытекает, что $y'(a) = \varphi'(a)$, так как ра-

венство $q = y'(a)$ в силу теоремы Лагранжа невозможно при $y'(a) \neq \varphi'(a)$.

Таким образом, при достаточно общих предположениях об интегранте функционала ($f''_{yy'}(x, \varphi(x), q) \neq 0$ при любом q) график функции $y(x)$ в точках сопряжения касается графика функции $\varphi(x)$, или, другими словами, производная функции $y(x)$ должна быть непрерывной.

Условие непрерывности производной функции дает дополнительные уравнения, необходимые для определения экстремалей. Пусть, например, решается задача (6.37), (6.38) в классе функций $y(x) \in C^1[x_1, x_2]$ с фиксированными значениями на концах $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Предположим, что график искомого решения включает в себя один участок границы $y = \varphi(x)$ (см. рис. 6.4). Если найдено общее решение уравнения Эйлера и тем самым получено уравнение семейства экстремалей для функционала задачи, то для построения решения нужно определить:

- абсциссы a и b точек сопряжения графиков экстремалей с границей множества допустимых значений;
- две постоянные интегрирования на левом участке, соответствующем экстремали;
- две постоянные интегрирования на правом участке, соответствующем экстремали.

Всего имеются шесть неизвестных, для определения которых нужны шесть уравнений. Два уравнения — это краевые условия $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Два уравнения вытекают из непрерывности искомой функции в точках сопряжения: $y(a) = \varphi(a)$, $y'(b) = \varphi'(b)$. И два уравнения — это условия непрерывности производной функции $y(x)$ в точках сопряжения: $y'(a) = \varphi'(a)$, $y'(b) = \varphi'(b)$.

Пример 6.2. Найдём кривую наименьшей длины, соединяющую точки $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$ и не заходящую внутрь круга D (рис. 6.6).

Формально ограничение в поставленной задаче не относится к тому типу ограничения (6.38), которое мы рассмотрели. Однако отметим, что в приведенных выше

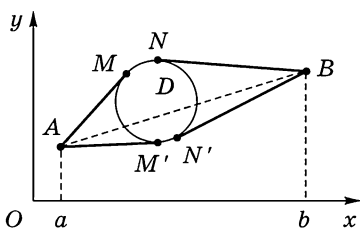


Рис. 6.6

рассуждениях, главным в которых был анализ точек сопряжения, используются только локальные свойства функции $\varphi(x)$. Поэтому все полученные результаты будут верны и в данной задаче.

В поставленной задаче в предположении, что искомая кривая является графиком функции, функционал можно записать следующим образом:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Так как интегрант рассматриваемого функционала зависит только от y' , его экстремальными являются прямые $y = C_1x + C_2$ (это, впрочем, очевидно). Если круг D не пересекается с отрезком AB , то решение задачи — функция, графиком которой является указанный отрезок AB . Если же круг D пересекается с отрезком AB , то решение задачи следует искать в виде кривой, составленной из отрезков, сопряженных с дугой окружности ∂D , ограничивающей круг D . Поскольку $f''_{yy'} = (1 + (y')^2)^{-3/2} \neq 0$, кривая должна быть гладкой в точках сопряжения, т. е. отрезки, стыкующиеся с дугой окружности ∂D , являются отрезками касательных к этой окружности (см. рис. 6.6). Имеются два кандидата в кривые наименьшей длины: один — кривая, расположенная выше отрезка AB (кривая $AMNB$), другой — ниже (кривая $AM'N'B$). Выбор из двух кандидатов зависит от расположения центра круга D по отношению к отрезку AB : центр и искомая кривая наименьшей длины располагаются по разные стороны от прямой AB . Отметим, что обе кривые соответствуют двум точкам минимума рассматриваемого функционала, определенного на множестве кусочно-гладких функций, графики которых не пересекают круг D .

Эта задача была решена в 1871 г. английским математиком И. Тодхантером. #

Метод, примененный нами в задаче с ограничениями на значения допустимых функций, можно использовать и в задачах другого рода — задачах с управлением. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x, u) dt \quad (6.41)$$

в классе непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2,$$

и в классе непрерывных функций $u(t)$ (управлений), подчиняющихся ограничению

$$u(t) \leq k, \quad k = \text{const}. \quad (6.42)$$

Предложенная задача может быть сведена к задаче с ограничениями в виде равенств. Для этого нужно ввести вспомогательную функцию $z(t)$ по формуле

$$z^2 = k - u$$

и заменить ограничение (6.42) эквивалентным ему ограничением

$$z^2 + u - k = 0. \quad (6.43)$$

Тогда исходная задача будет эквивалентна задаче Лагранжа с целевым функционалом

$$I[x, u, z] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x, u) dt$$

и уравнением связи (6.43) (см. 4.1).

Этот подход может использоваться и в случае, когда вместо ограничения (6.42) в задаче ставится ограничение в виде двойного неравенства

$$k_1 \leq u(t) \leq k_2. \quad (6.44)$$

Введя вспомогательную функцию z , такое ограничение можно заменить эквивалентным ограничением в виде равенства

$$(u - k_1)(k_2 - u) - z^2 = 0.$$

Рассмотренный подход фактически исчерпывает возможности классического вариационного исчисления в задачах с ограничениями, приводящими к поиску экстремума в замкнутой области. Успех здесь в основном определяется тем, удастся ли с помощью некоторых искусственных приемов заменить в ограничениях неравенства равенствами. Иногда способ такой замены подсказывается самой постановкой задачи. Но даже если такое преобразование в задаче удалось осуществить, преобразованная задача может не иметь ре-

шения в классе гладких (и даже непрерывных) функций. Показательной в этом смысле является линейная задача, к изучению которой мы переходим.

6.4. Линейные задачи оптимального управления

Среди *управляемых систем*, пожалуй, самое широкое применение в различных областях техники находят так называемые *линейные управляемые системы*, т. е. *автономные системы* с линейным законом движения

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.45)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T$; $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ik})$ — числовые матрицы типов $n \times n$ и $n \times r$ соответственно.

Наиболее популярной в классе линейных управляемых систем является *задача оптимального быстрогодействия*, т. е. задача оптимального управления, в которой в качестве целевого функционала взято время достижения системой некоторого состояния $x(t_2) = x^2$. Это иллюстрируют системы автоматического управления, которые поддерживают заданный режим (или заданное движение) объекта, преодолевая действие различного рода возмущающих сил. Для таких систем обычно составляют *уравнения возмущенного движения* [VIII] вида

$$\dot{x} = f(x, u),$$

в которых *фазовые координаты* x_i представляют собой отклонения координат объекта от их значений в заданном режиме (*возмущения*), причем в начальный момент времени t_1 полагают, что

$$x(t_1) = x^1 \neq 0. \quad (6.46)$$

Задачей системы управления является обеспечение таких управляющих воздействий, которые в кратчайший срок возвращают систему в заданный режим, т. е.

$$x(t_2) = 0. \quad (6.47)$$

Так как отклонения системы от установившегося режима обычно малы, то правые части уравнений возмущенного дви-

жения можно приближенно заменить линейными выражениями, используя формулу Тейлора. Полученные линейные уравнения вида (6.45) обычно называют *уравнениями первого приближения* [VIII] для возмущенного движения.

Рассмотрим частный случай системы (6.45), когда управление одно, т. е. $u(t) \equiv u(t)$ — скалярная функция, $r = 1$. Такая система имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + b_1 u; \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j + b_n u. \end{array} \right. \quad (6.48)$$

В качестве целевого функционала возьмем время $\underline{t_2}$ достижения системой положения равновесия $x_i(t_2) = 0$, $i = \overline{1, n}$, т. е.

$$I[\mathbf{x}, u] = \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow \min, \quad (6.49)$$

а на управление $u(t)$ наложим ограничение

$$|u| \leq 1. \quad (6.50)$$

Попробуем с помощью вариационных методов решить *линейную задачу оптимального управления*, которая определяется соотношениями (6.46)–(6.50). Полагаем, что $\mathbf{x}(t) \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, $u(t) \in C[t_1, t_2]$.

Задача (6.46)–(6.50) является частным случаем задачи (6.41), (6.44). Как было установлено (см. 6.3), экстремум может достигаться лишь на функциях, составленных из участков экстремалей и участков границы области управления (6.50). Чтобы найти экстремали задачи, являющейся задачей Лагранжа в форме Понтрягина, запишем лагранжиан

$$L(x, \dot{x}, u) = 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \left(\dot{x}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i u \right).$$

Необходимое условие экстремума вне границы области (6.50) есть уравнения Эйлера (6.22), (6.23). В линейном случае система (6.22) преобразуется к виду

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda_1 a_{1i} - \lambda_2 a_{2i} - \dots - \lambda_n a_{ni}, \quad i = \overline{1, n},$$

в матричной форме она имеет вид $\dot{\lambda} = -A^T \lambda$, или

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T A, \quad (6.51)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$; $A = (a_{ij})$ — матрица системы (6.48) типа $n \times n$.

Второе уравнение (6.23) примет вид

$$L'_u = -\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) b_i = 0,$$

или

$$\lambda(t)^T B = 0, \quad (6.52)$$

где $B = (b_1, \dots, b_n)^T$ — столбец коэффициентов при управлении u в (6.48).

Продифференцируем равенство (6.52):

$$\dot{\lambda}^T B = 0. \quad (6.53)$$

Исключим из этого равенства $\dot{\lambda}^T$, используя соотношение (6.51) и свойства операции транспонирования. В результате получим

$$\lambda^T A B = 0. \quad (6.54)$$

Снова продифференцируем (6.54) и затем исключим $\dot{\lambda}^T$, используя (6.51). Получим

$$\lambda^T A^2 B = 0.$$

Повторив операцию дифференцирования $n - 1$ раз, а затем исключив $\dot{\lambda}^T$, приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно λ^T :

$$\begin{cases} \lambda^T B = 0; \\ \lambda^T A B = 0; \\ \lambda^T A^2 B = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda^T A^{n-1} B = 0. \end{cases} \quad (6.55)$$

Эта система имеет единственное нулевое решение в том случае, когда ранг матрицы системы равен количеству неизвестных n , т. е.

$$\text{Rg}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (6.56)$$

Случай, когда выполняется соотношение (6.56), является основным в теории линейных управляемых систем (без фазовых ограничений). Это соотношение — необходимое и достаточное условие *управляемости* такой системы. Систему называют *управляемой*^{*}, если для любых начального и конечного состояний системы существует хотя бы один допустимый процесс, переводящий систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Свойство управляемости системы означает, что задача управления для этой системы имеет решение при любых краевых условиях.

Таким образом, в случае выполнения соотношения (6.56) уравнение Эйлера имеет единственное решение $\lambda(t) \equiv 0$. Этому решению соответствует лагранжиан $L(x, \dot{x}, u) = 1$, который совпадает с лагранжианом задачи, получающейся из исходной отбрасыванием дифференциальных связей (6.48). Однако линейная задача (6.46)–(6.50) без дифференциальных связей (6.48) бессодержательна и экстремалей не имеет.

Но если экстремалей не существует, то экстремум может достигаться лишь на функции, график которой целиком находится на границе области, т. е. либо $u = 1$, либо $u = -1$. Таким образом, или оптимальное решение соответствует постоянному управлению, или его можно найти, только если считать допустимыми разрывные управления $u(t)$ (далее мы покажем, что задача имеет решение в классе кусочно-непрерывных управлений). Как видим, вариационные методы, работающие в классе непрерывных функций, в случае линейной задачи не позволяют, вообще говоря, найти решение. Расширение класса допустимых функций требует изменить и методы решения задач.

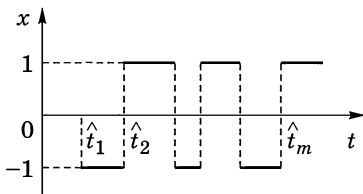


Рис. 6.7

^{*} В литературе термин «управляемая система» имеет различное толкование.

Даже если рассматривать кусочно-непрерывные управления и использовать напрашивающееся допущение, что оптимальное управление принимает лишь два значения ± 1 , мы решения задачи все-таки не получим. Чтобы полностью определить кусочно-постоянное управление $u(t)$, нужно указать точки $\hat{t}_k$, в которых управление меняет значение на противоположное (рис. 6.7).

6.5. Обсуждение методов вариационного исчисления

Из изложенного в 6.3 и 6.4 ясно, что применение методов вариационного исчисления в задачах оптимального управления приводит к различного рода трудностям. Проанализируем причины этих трудностей.

Задача Лагранжа в форме Понтрягина наиболее близка к задаче оптимального управления. С помощью метода Лагранжа для нее удалось получить полную систему необходимых условий и тем самым решить задачу в классе гладких функций $x(t)$ и непрерывных управлений $u(t)$. Но при этом уравнения Эйлера для управлений вырождаются в алгебраические соотношения ((6.23) или (6.34)). Эти алгебраические соотношения представляют собой необходимые условия экстремума функционала и могут и не иметь решений, как, например, в линейных задачах. В этом случае задача оказывается неразрешимой: функционал не достигает экстремумов в рассматриваемом классе функций.

Что может дать расширение класса допустимых функций? В связи с этим интересно сравнить задачу Лагранжа и задачу оптимального управления в случае, когда в последней нет ограничений на управление и фазовые координаты, т. е. когда $U = \mathbb{R}^r$ и $S = \mathbb{R}^n$. Тогда каждый допустимый процесс $(x(t), u(t))$ задачи Лагранжа является таковым и для задачи оптимального управления.

Обозначим через Λ функционал (6.17) в задаче Лагранжа (6.16)–(6.18), т. е. $\Lambda[x, u] = I[x, u]$, $x \in C^1[t_1, t_2]$, $u \in C[t_1, t_2]$, а через O — этот же функционал в задаче оптимального управления*: $O[x, u] = I[x, u]$, $x \in C[t_1, t_2]$, $u \in KC[t_1, t_2]$. Очевидно,

* Обозначение $KC[t_1, t_2]$ относится к классу функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[t_1, t_2]$.

что функционал Λ является *сужением* функционала O . Пусть в обеих задачах ищется наименьшее значение целевого функционала по всему классу допустимых управляемых процессов, т. е. не локальный, а глобальный минимум. Так как Λ есть сужение O , то $\inf \Lambda[x, u] \geq \inf O[x, u]$. При определенных дополнительных предположениях относительно функций $f^i (i = \overline{0, n})$, Θ , Ψ , достаточно естественных в постановке задачи, можно утверждать, что на самом деле $\inf \Lambda[x, u] = \inf O[x, u]$. Например, в простейшем случае дифференциальных связей $\dot{x} = u$ указанное равенство будет выполняться, если лагранжиан задачи непрерывен по совокупности переменных*.

Если в рассматриваемой задаче $\inf \Lambda[x, u] > \inf O[x, u]$, то очевидно, что существование решения в одной задаче не связано с существованием решения в другой. Если $\inf \Lambda[x, u] = \inf O[x, u]$, то возможна одна из трех ситуаций:

а) задача Лагранжа имеет решение. Тогда это решение одновременно является решением и задачи оптимального управления (правда, возможно, не единственным), так как решение задачи Лагранжа является допустимым процессом для задачи оптимального управления, дающим минимальное значение целевого функционала;

б) задача Лагранжа не имеет решения, а задача оптимального управления имеет, т. е. точная нижняя грань значений функционала достигается на управляемом процессе, в котором либо $x(t)$ не является непрерывно дифференцируемой, либо $u(t)$ не является непрерывной;

в) ни задача Лагранжа, ни задача оптимального управления не имеют решения, т. е. точная нижняя грань значений целевого функционала не достигается и на более широком классе допустимых процессов.

Пример 6.3. Проиллюстрируем ситуацию б):

$$I[x, u] = \int_0^1 (1 - u^2)^2 dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Точная нижняя грань значений функционала достигается на кусочно-гладкой функции $x^*(t)$ с соответствующим ей оптимальным управлением $u^*(t)$:

* Доказательство см. в книге: Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.

$$x^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ 1-t, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \quad u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

В классе гладких функций точная нижняя грань функционала, равная нулю, не достигается, так как нулевое значение функционала возможно лишь при $u(t) \equiv 1$ или при $u(t) \equiv -1$. Но при этом $x(t) = \pm t + C$, что противоречит краевым условиям.

В этой задаче переход от класса гладких к классу кусочно-гладких функций означает переход от задачи Лагранжа к задаче оптимального управления. Заметим, что в рассматриваемом случае $\inf \Lambda = \inf O = 0$. Действительно, так как значения целевого функционала неотрицательны, то в силу неравенства $\inf \Lambda \geq \inf O$ достаточно показать, что $\inf \Lambda = 0$. Рассмотрим последовательность кусочно-гладких управлений

$$u_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ n\left(\frac{1}{2} - t\right), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ -1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad n = 2, 3, \dots$$

Каждому из этих управлений соответствует допустимая функция $x_n(t) = \int_0^t u_n(t) dt$, которая удовлетворяет условию $x_n(1) = 0$ в силу симметричности графика функции $u_n(t)$ относительно точки $(1/2, 0)$. При этом

$$I_n = I[x_n, u_n] = \int_0^1 (1 - u_n^2)^2 dt = \int_{1/2 - 1/n}^{1/2 + 1/n} \left(1 - n^2 \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right)^2 dt \leq \frac{2}{n}.$$

Таким образом, $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 6.4. Ситуацию в) иллюстрирует пример Больца:

$$I[x, u] = \int_0^1 \left((1 - u^2)^2 + x^2 \right) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

В этой задаче решения не существует. Действительно, точная нижняя грань значений функционала в классе кусочно-гладких функций равна нулю, так как значения целевого функционала неотрицательны, а нулевое значение достигается в пределе по следующей последовательности кусочно-гладких функций (рис. 6.8):

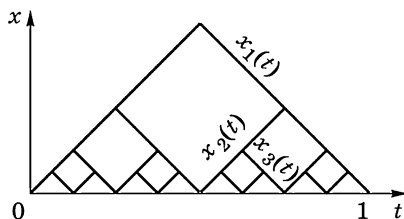


Рис. 6.8

$$x_n(t) = \int_0^t \operatorname{sign} \sin 2\pi n \tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Последовательность функций $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к нулю, при этом $u_n^2(t) = \dot{x}_n^2(t) = 1$ всюду на $[0, 1]$, кроме конечного числа точек. Значит,

$$I[x_n, u_n] = \int_0^1 \left((1 - u_n^2(t))^2 + x_n^2(t) \right) dt = \int_0^1 x_n^2(t) dt \rightarrow 0.$$

Однако нулевое значение не достигается функционалом ни на одной кусочно-гладкой функции. Для $x(t) \equiv 0$ $u(t) \equiv 0$ и $I[x, u] = 1$. А если $x(t) \neq 0$ хотя бы в одной точке, то в силу непрерывности этой функции

$$I[x, u] \geq \int_0^1 x^2(t) dt > 0. \quad \#$$

Мы сравнили задачу Лагранжа и задачу оптимального управления с точки зрения глобального экстремума целевого функционала. Чтобы провести такое сравнение для локальных экстремумов, нужно ввести соответствующее понятие для задачи оптимального управления.

Допустимый процесс $(x^*(t), u^*(t))$ будем называть *локально оптимальным* в задаче с фиксированным отрезком $[t_1, t_2]$, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого процесса $(x(t), u(t))$, удовлетворяющего условию

$$|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (6.57)$$

верно неравенство

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] \geq I[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*].$$

Если отрезок $[t_1, t_2]$ не является фиксированным, то каждому допустимому процессу соответствуют свои моменты времени t_1 и t_2 . В этом случае локально оптимальным процессом будем называть допустимый процесс $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ с промежутком времени $[t_1^*, t_2^*]$, для которого найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого процесса $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ с промежутком времени $[t_1, t_2]$, удовлетворяющего условиям

$$|t_1^* - t_1| < \varepsilon, \quad |t_2^* - t_2| < \varepsilon, \quad |\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon \quad \text{при } t \in [t_1, t_2] \cap [t_1^*, t_2^*],$$

выполнено неравенство

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] \geq I[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*].$$

Отметим, что в задаче Лагранжа, как и в любой другой задаче вариационного исчисления, различают сильный экстремум и слабый экстремум. Точка слабого экстремума $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ доставляет экстремум целевому функционалу среди всех допустимых процессов $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, для которых $\mathbf{x}(t)$ попадает в некоторую *слабую ε -окрестность* $\mathbf{x}^*(t)$, а $\mathbf{u}(t)$ — в некоторую *сильную ε -окрестность* $\mathbf{u}^*(t)$. Локально оптимальный процесс в задаче оптимального управления ограничивает сравнение некоторой сильной окрестностью $\mathbf{x}^*(t)$, а на управления ограничения не накладываются вообще. Это соответствует сильному экстремуму в задаче Лагранжа. Поэтому могут возникать ситуации, когда локальное решение задачи Лагранжа не является *оптимальным процессом* соответствующей задачи оптимального управления. Если же в задаче оптимального управления найден оптимальный процесс с непрерывным управлением, то (в рамках предположений относительно функций, входящих в задачу) этот процесс будет являться *сильным минимумом* в задаче Лагранжа, т. е. давать ее локальное решение.

Итак, задача оптимального управления является в указанном смысле расширением задачи вариационного исчисления. Однако если область U допустимых управлений открыта, то ничего нового в действительности мы не получим. По-настоящему новой задача оптимального управления становится, если

в ней присутствуют ограничения в виде нестрогих неравенств (например, $|u_j| \leq M$, $j = \overline{1, r}$), когда область управления U является замкнутой. Именно этот дополнительный элемент делает задачу оптимального управления существенно отличной от вариационной и приводит к необходимости нового подхода к ее решению, связанного с изменением понятия допустимой вариации. Не углубляясь в детали такого подхода (об этом речь далее), отметим лишь очевидные факты, вытекающие из замкнутости области управления.

Вернемся к задаче Лагранжа (6.16)–(6.18). Введение множителей Лагранжа позволяет рассматривать переменные *вспомогательного функционала* (6.19) как независимые (множители Лагранжа при этом считаем фиксированными функциями). При таком подходе задаче об экстремуме функционала $I^*[x, u]$ можно поставить в соответствие две задачи:

$$\begin{cases} I^*[x, u^*] \rightarrow \text{extr}, \\ I^*[x^*, u] \rightarrow \text{extr}. \end{cases} \quad (6.58)$$

Другими словами, если $x^*(t), u^*(t)$ — решение задачи $I^*[x, u] \rightarrow \text{extr}$, то $x^*(t)$ — решение первой задачи в (6.58), а $u^*(t)$ — второй. Поэтому можно объединить необходимые условия двух этих задач, чтобы получить необходимые условия в задаче об экстремуме функционала $I^*[x, u]$.

Однако в рамках задачи оптимального управления с замкнутой областью управления U система необходимых условий (6.23) уже не является полной, так как не учтено ограничение $u(t) \in U$ (множители Лагранжа позволяют учесть ограничения только в виде равенств). Изменяется характер второй из двух задач (6.58). Она формулируется так:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^*, \dot{x}^*, u) dt \rightarrow \min, \\ & u \in KC[t_1, t_2], \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Необходимое и достаточное условие экстремума в данной задаче состоит в следующем. Кусочно-непрерывная функция $u^*(t)$ со значениями в замкнутой области U доставляет минимум в задаче (6.59) тогда и только тогда, когда всюду

на отрезке $[t_1, t_2]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$, выполнено соотношение

$$\min_{\substack{u \in KC[t_1, t_2] \\ u(t) \in U}} L(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), u(t)) = L(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), u(t)).$$

В канонических переменных то же соотношение выглядит следующим образом:

$$\min_{\substack{u \in KC[t_1, t_2] \\ u(t) \in U}} H(t, x^*(t), p^*(t), u(t)) = H(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)). \quad (6.60)$$

Для получения полной системы условий к (6.60) нужно добавить необходимые условия экстремума для задачи

$$I^*[x, u^*] \rightarrow \min, \quad x \in C[t_1, t_2],$$

которые в канонических переменных имеют вид (6.33).

Условия (6.33) и (6.60) фактически представляют собой основные соотношения в *принципе максимума Понтрягина*. Полная формулировка этого принципа будет изложена далее (см. 7).

Если на управление $u(t)$ нет никаких ограничений, то необходимым условием максимума *функции Понтрягина* H является обращение в нуль производных этой функции по управлениям, что и отражено в уравнениях (6.34). Но если на управление u наложены нестрогие ограничения (т. е. U замкнуто), то максимум функции Понтрягина может достигаться как внутри U (тогда выполняются равенства (6.34)), так и с выходом на границу. Это значит, что уравнения (6.34) в случае замкнутой области U следует заменить более общим условием — условием максимума функции H по управлениям. Именно эта идея, высказанная в 1956 г. Л.С. Понтрягиным*, и послужила основой всех дальнейших работ, связанных с развитием принципа максимума. Обоснование этой идеи было дано много позже**.

* См.: Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.

** См.: Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.

Вопросы и задачи

6.1. Запишите полную систему необходимых условий для задачи Лагранжа в форме Понтрягина с подвижными концами t_1 и t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n x_i^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x} = \varphi(x) + G(x)u, \quad x(t_1) = x^1, \quad x(t_2) = x^2.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T$; $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$; $G(x)$ — матрица типа $n \times r$; x^1, x^2 — известные векторы начального и конечного состояний.

6.2. Найдите экстремали в следующих задачах Лагранжа:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 1;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} u^2 dt + [x_1(0)]^2 \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u;$$

$$\text{в) } \int_0^1 u^2 dt + [x_2(0)]^2 \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u, \quad x_1(0) = 1;$$

$$\text{г) } \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(1) = 1.$$

6.3. Найдите кратчайший путь между точками $A(-3, 0)$ и $B(3, 2)$ на плоскости при условии, что вдоль этого пути выполняется неравенство $x^2 + y^2 \geq 4$.

7. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В 1956 году Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкредидзе и Е.Ф. Мищенко предложили метод, который обобщил методы классического вариационного исчисления в случае задач, в которых управляющие воздействия описываются кусочно-непрерывными функциями, а множество значений этих функций принадлежит замкнутому ограниченному множеству. В основу этого метода был положен так называемый *принцип максимума*.

Принцип максимума дает необходимые условия оптимальности, которые позволяют выделить из множества допустимых процессов некоторое подмножество процессов, «подозрительных» на оптимальность. В этом смысле метод решения задач оптимального управления на основе принципа максимума аналогичен методам исследования функций одного или нескольких переменных, при которых отбираются точки, удовлетворяющие необходимым условиям, а затем каждая из отобранных точек анализируется, например, с помощью достаточных условий. В рамках теории оптимального управления необходимые условия хороши тогда, когда с их помощью удастся выделить небольшое количество процессов, которые могут быть *оптимальными*. Принцип максимума для широкого круга задач дает возможность определить единственную траекторию, которая может быть оптимальной. Если в конкретной задаче из каких-либо соображений (например, из содержательного смысла этой задачи) известно, что оптимальное управление существует, то выделение единственной траектории, «подозрительной» на оптимальность, дает решение задачи.

Первое доказательство принципа максимума дал Р.В. Гамкредидзе для линейных задач оптимального управления. Он построил полную теорию линейных систем управления и до-

казал достаточность принципа максимума для таких систем. Таким образом, для линейных задач оптимального управления принцип максимума — необходимое и достаточное условие оптимальности.

В общем нелинейном случае принцип максимума доказал В.Г. Болтянский, который построил и основы нелинейной теории оптимального управления.

7.1. Автономная система управления.

Формулировка принципа максимума

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума для задачи оптимального управления в предположении, что фазовые ограничения отсутствуют, т. е. для системы с законом движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (7.1)$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ может принимать любые значения из $\mathbb{R}^n$.

Считаем, что на вектор управления $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ наложены ограничения

$$\mathbf{u} \in KC[t_1, t_2], \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (7.2)$$

где U — произвольное множество в $\mathbb{R}^r$ (в частности, оно может быть замкнутым и ограниченным), а вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (f^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^T$ непрерывна по совокупности всех переменных и непрерывно дифференцируема по части переменных $\mathbf{x}$ [V].

Как и раньше, управления, удовлетворяющие (7.2), будем называть *допустимыми*, а пару $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, в которой $\mathbf{x}(t)$ есть решение системы (7.1) при заданном $\mathbf{u}(t)$, — *допустимым процессом*.

Зададим следующие краевые условия:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T, \quad \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^T. \quad (7.3)$$

Требуется найти такое допустимое управление $\mathbf{u}(t)$, которое переводит систему (объект) из фазового состояния $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ в фазовое состояние $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}^2$, причем соответствующий допустимый процесс $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ доставляет минимум функционалу

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (7.4)$$

где функция f^0 удовлетворяет тем же условиям, что и вектор-функция f .

Считаем, что интервал времени управления $t_2 - t_1$ произвольный. Это означает, что каждому допустимому процессу, при котором система переходит из состояния x^1 в состояние x^2 , соответствуют свои моменты времени t_1 и t_2 .

Поставленная таким образом задача — это *задача с фиксированными концами* (точки x^1 и x^2 фиксированы) и *свободным временем*. Как и ранее, управление $u^*(t)$, дающее решение поставленной задачи, будем называть *оптимальным управлением*, соответствующую траекторию $x^*(t)$ — *оптимальной траекторией*, а процесс $(x^*(t), u^*(t))$ — *оптимальным процессом*.

Экстремальная задача (7.1)–(7.4) по форме похожа на задачу Лагранжа (6.16)–(6.18), но отличается от нее наличием ограничения на управление $u(t) \in U$ и расширением класса допустимых функций. При этом не требуется, чтобы существовали частные производные функций $f^0, \dots, f^n$ по переменным u_j .

Остановимся на некоторых простейших свойствах оптимальных управлений и траекторий, непосредственно вытекающих из постановки задачи. Прежде всего из автономности системы (7.1) и интегранта функционала (7.4) следует, что свойства управлений не изменяются при сдвиге вдоль оси t (рис. 7.1). Другими словами, если управление $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, переводит систему из состояния x^1 в состояние x^2 , а целевой функционал на соответствующем допустимом процессе принимает значение I , то при любом h управление $u(t - h)$, $t \in$

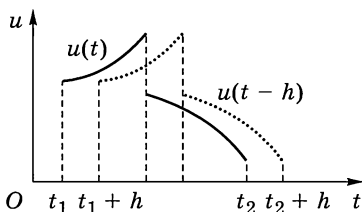


Рис. 7.1

$\in [t_1 + h, t_2 + h]$ также переводит систему из состояния x^1 в состояние x^2 , а целевой функционал при этом также будет иметь значение I . Следовательно, решение задачи не единственно. Но мы можем из оптимальных управлений выбирать такое, для которого t_1 имеет фиксированное положение,

а точка t_2 свободно перемещается по оси времени. Далее будем считать, что t_1 фиксировано, а t_2 свободно меняется.

Пусть $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ — конечный набор точек фазового пространства, для которых существует набор таких управлений $u_2(t), \dots, u_k(t)$, что управление $u_i(t)$ переводит систему из состояния $\mathbf{x}^{i-1}$ в состояние $\mathbf{x}^i$ и дает целевому функционалу значение I_i , $i = \overline{2, k}$. Тогда существует управление $u(t)$, переводящее систему из состояния $\mathbf{x}^1$ в состояние $\mathbf{x}^k$ и дающее целевому функционалу значение $I = I_2 + \dots + I_k$. Действительно, поскольку управления можно сдвигать вдоль оси времени, то будем считать, что интервалы времени управлений $u_i(t)$ прижимают друг к другу, поэтому управление $u_i(t)$, $i = \overline{2, k}$, задано на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, причем $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ (рис. 7.2). Тогда управление $u(t)$, на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ совпадающее с $u_i(t)$ и в целом заданное на отрезке $[t_1, t_k]$, переводит систему из состояния $\mathbf{x}^1$ в состояние $\mathbf{x}^k$ и придает функционалу значение $I_2 + \dots + I_k$. Отметим, что указанная операция «объединения» управлений невозможна в классе непрерывных управлений, так как в точках стыка t_i объединенное управление $u(t)$ может иметь точки разрыва первого рода (см. рис. 7.2).

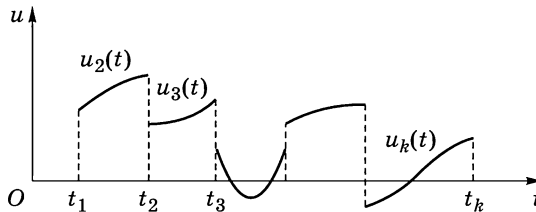


Рис. 7.2

Если $u^*(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, — оптимальное управление, то любой его участок $[\tau_1, \tau_2]$, $t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2$, также является оптимальным управлением. То же верно для оптимальных траекторий. Пусть $\mathbf{x}^*(t)$ — соответствующая $u^*(t)$ оптимальная траектория, $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^*(t_2) = \mathbf{x}^2$. Рассмотрим произвольный участок $[\tau_1, \tau_2] \subset [t_1, t_2]$, и пусть $\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^*(\tau_1)$, $\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^*(\tau_2)$. Утверждается, что интеграл

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f^0(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) dt$$

имеет наименьшее значение среди всех допустимых управлений, переводящих систему из положения $\mathbf{x}^3$ в положение $\mathbf{x}^4$. Пусть значения целевого функционала для управления $\mathbf{x}^*(t)$ на участках $[t_1, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, t_2]$ есть соответственно I_1, I_2, I_3 . Тогда управление $\mathbf{u}^*(t)$ на всем отрезке $[t_1, t_2]$ придает целевому функционалу значение $I = I_1 + I_2 + I_3$. Если управление $\mathbf{u}^*(t)$ не является оптимальным на $[\tau_1, \tau_2]$, то существует управление $\mathbf{v}(t)$, переводящее систему из положения $\mathbf{x}^3$ в положение $\mathbf{x}^4$ и придающее целевому функционалу значение $I_v < I_2$. Но тогда управление, составленное из управления $\mathbf{u}$ на участках $[t_1, \tau_1]$, $[\tau_2, t_2]$ и управления $\mathbf{v}(t)$ на участке $[\tau_1, \tau_2]$, переводит систему из положения $\mathbf{x}^1$ в положение $\mathbf{x}^2$ и придает целевому функционалу значение $I_1 + I_v + I_3 < I$, т. е. $\mathbf{u}^*(t)$ не является оптимальным управлением. Аналогичные рассуждения можно провести для фазовых траекторий.

Перейдем теперь к основным соотношениям, необходимым для того, чтобы сформулировать принцип максимума. Включим фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ в $(n + 1)$ -мерное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, присоединив к координатам $x_1, \dots, x_n$ дополнительную координату x_0 . При этом потребуем, чтобы функция $x_0(t)$ удовлетворяла соотношению

$$x_0(t) = \int_{t_1}^t f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt.$$

Тогда функция $x_0(t)$ будет решением уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Присоединим это уравнение к системе (7.1):

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (7.5)$$

где $\hat{\mathbf{x}} = (x_0, \mathbf{x})^T = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$; $\hat{\mathbf{f}} = (f^0, f^1, \dots, f^n)^T$.

Заметим, что правые части системы (7.5) не зависят от x_0 .

Целевой функционал I (7.4) рассматриваемой задачи теперь можно записать в виде $I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = x_0(t_2)$, т. е. он оказался равным конечному значению координаты x_0 . Задача тем са-

мым свелась к выбору такого допустимого управления $u(t)$, которое осуществляет переход точки $\hat{x}(t)$ в $(n+1)$ -мерном пространстве из положения $\hat{x}^1 = (0, x^1)^T$ в ближайшую точку $\hat{x}^2 = (x_0^2, x^2)^T$ на прямой, параллельной оси Ox_0 и проходящей через точку $(0, x^2)$ (ближайшая точка в смысле минимума координаты x_0 , рис. 7.3).

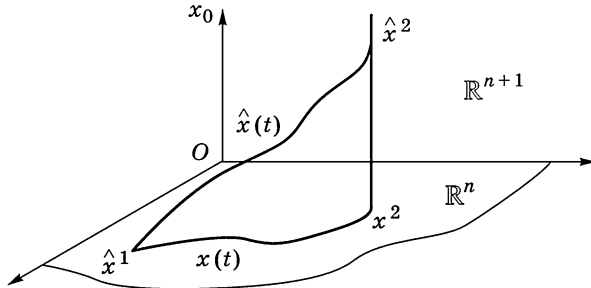


Рис. 7.3

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x_i} \psi_\alpha, \quad i = \overline{0, n}, \quad (7.6)$$

относительно неизвестных функций $\psi_i(t)$. Эту систему иногда называют *сопряженной системой* к системе (7.5), а переменные ψ_i — *сопряженными переменными*.

Если $u(t)$ — некоторое допустимое управление, $x(t)$ — соответствующая этому управлению фазовая траектория, то, подставляя эти функции в правые части уравнений (7.6), получим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с известными кусочно-непрерывными коэффициентами. Поэтому при любых начальных условиях эта система имеет единственное решение [VIII]. Так как функции $f^\alpha(x, u)$, $\alpha = \overline{0, n}$, не зависят от x_0 , то первое уравнение системы (7.6) имеет простой вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

из него получаем $\psi_0 = \text{const}$.

Составим *функцию Понтрягина*

$$H(\hat{\Psi}, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u) = (\hat{\Psi}, \hat{f}(x, u)), \quad (7.7)$$

где $\hat{\Psi} = (\psi_0, \dots, \psi_n)^T$ — вектор сопряженных переменных.

При фиксированных значениях $\hat{\Psi}$ и x функция Понтрягина есть функция от $u \in U$. Точную верхнюю грань значений этой функции обозначим через $M(\hat{\Psi}, x)$:

$$M(\hat{\Psi}, x) = \sup_{u \in U} H(\hat{\Psi}, x, u).$$

Если точная верхняя грань значений непрерывной функции H достигается в некоторой точке области управления U , то $M(\hat{\Psi}, x)$ является максимумом значений функции H при фиксированных $\hat{\Psi}$ и x .

Теорема 7.1 (принцип максимума). Если управление $u^*(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и соответствующая ему фазовая траектория $x^*(t)$ оптимальны, то найдется такая ненулевая вектор-функция $\hat{\Psi}^*(t)$, соответствующая функциям $x^*(t)$ и $u^*(t)$ (т. е. удовлетворяющая сопряженной системе (7.6) при подстановке в нее $x^*(t)$ и $u^*(t)$), что:

1° при каждом значении $t \in [t_1, t_2]$ функция $H(\hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u)$ от переменных u достигает максимума в точке $u = u^*(t)$:

$$H(\hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u^*(t)) = M(\hat{\Psi}^*(t), x^*(t));$$

2° в конечный момент времени t_2 выполнены соотношения

$$\psi_0^*(t_2) \leq 0, \quad M(\hat{\Psi}^*(t_2), x^*(t_2)) = 0. \quad \#$$

В заключение отметим, что системы (7.5) и (7.6) с помощью функции Понтрягина могут быть записаны как гамильтонова система следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, & i = \overline{0, n}; \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (7.8)$$

Очевидно, что если вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет системе (7.1), то она удовлетворяет и первой подсистеме в системе (7.8), поскольку все уравнения, кроме первого, в этой подсистеме как раз и образуют систему (7.1).

Замечание 7.1. Если $\hat{\Psi}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяют системе (7.8) и условию 1°, то функции $\psi_0(t)$ и $M(\hat{\Psi}(t), \mathbf{x}(t))$ переменного t являются постоянными. Действительно, как уже было отмечено, из системы (7.6) следует, что $\psi_0 = \text{const}$. Покажем, что функция $M(\hat{\Psi}(t), \mathbf{x}(t))$ постоянна, предполагая, что она имеет производную*, которую можно вычислять по правилу дифференцирования сложной функции. Зафиксируем $\hat{\Psi}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ и рассмотрим функцию $M(\hat{\Psi}(t), \mathbf{x}(t))$ переменного t . Вычислим производную этой функции в силу системы (7.8):

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial M}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{j=0}^n \frac{\partial M}{\partial \psi_j} \frac{d\psi_j}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial M}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial M}{\partial \psi_j} \frac{\partial H}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

При дифференцировании учтено, что функции $H(\hat{\Psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $M(\hat{\Psi}, \mathbf{x})$ не зависят от x_0 . Так как

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial M}{\partial \psi_j} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j},$$

то из (7.9) получаем

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0.$$

Из условия постоянства функций $\psi_0(t)$ и $M(\hat{\Psi}(t), \mathbf{x}(t))$ следует, что условие 2° в теореме (7.1) можно проверять в любой момент времени $t \in [t_1, t_2]$.

* Доказательство существования у функции $M(\hat{\Psi}(t), \mathbf{x}(t))$ производной почти всюду см.: Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.

7.2. Обсуждение принципа максимума

Остановимся на достаточности соотношений принципа максимума для решения поставленной задачи оптимального управления. Набор условий теоремы 7.1 в некотором смысле является полным. Он позволяет из всех траекторий, проходящих через две заданные точки x^1 и x^2 , выделить отдельные (или одну) траектории, среди которых находится оптимальная траектория, если, конечно, она существует.

Действительно, вся совокупность траекторий определяется $2n + 1$ дифференциальными уравнениями (7.8) (если опустить первое уравнение $\frac{dx_0}{dt} = f^0(x, u)$) и r алгебраическими уравнениями, которые дает условие 1° теоремы 7.1. Например, если максимум функции H достигается во внутренней точке, то необходимым является обращение в нуль r частных производных. Если максимум достигается на $(r - 1)$ -мерной поверхности, лежащей на границе области управления U , то по методу Лагранжа для поиска условного экстремума функции многих переменных $[V]$ получаем r уравнений, приравнявая нулю частные производные функции Лагранжа, и одно уравнение связи при дополнительном неизвестном — множителе Лагранжа. После исключения множителя Лагранжа остается r алгебраических уравнений. Аналогичен общий случай, когда максимум достигается на k -мерной поверхности, расположенной на границе U .

Итак, всего имеется $2n + 1 + r$ уравнений, связывающих $2n + 1 + r$ переменных $\hat{\Psi}, x, u$. Так как из этих соотношений r — алгебраические уравнения, решения зависят от $2n + 1$ параметров — начальных условий. Один из параметров является несущественным, поскольку функция H однородна относительно переменных ψ_α , а все функции $\psi_\alpha(t)$ определены лишь с точностью до общего множителя. Кроме того, один из параметров определяется условием в момент времени t_1 (или в любой другой момент):

$$\max_{u \in U} H(\hat{\Psi}(t), x(t_1), u) = 0.$$

Таким образом, все многообразие решений зависит от $2n - 1$ параметров. Время t_2 также является параметром. Сле-

довательно, искомая оптимальная траектория, если она существует, определяется $2n$ параметрами. Чтобы определить эти параметры, мы имеем n начальных условий $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ и n конечных условий $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}^2$. Значит, есть полная система условий, которая позволяет найти одну или несколько потенциально оптимальных траекторий.

Однако пока нельзя утверждать, что траектории, найденные в результате решения упомянутой системы соотношений, являются оптимальными: использованные условия являются необходимыми, но недостаточными. Требуется проверка найденных траекторий на оптимальность. В простейшем случае, когда выявлена только одна траектория, а из каких-либо соображений известно, что оптимум существует, можно утверждать, что найденная траектория и есть оптимальная.

Если принципу максимума удовлетворяют несколько траекторий, то для выявления среди них оптимальной нужны дополнительные условия. Иногда удастся отделить посторонние траектории, сравнивая значения целевого функционала. Заметим при этом, что оптимальная траектория может быть не единственной, а отброшенные траектории, не являясь оптимальными, могут оказаться локально оптимальными.

Сравним принцип максимума с условиями оптимальности, вытекающими из классического вариационного исчисления. Для этого вернемся к задаче Лагранжа в форме Понтрягина (6.16)–(6.18). Остановимся на частном случае, когда правые части уравнений (6.16) и интегрант целевого функционала (6.17) не зависят от t , правый конец t_2 отрезка $[t_1, t_2]$ свободен, а краевые условия (6.18) имеют вид (7.3), т. е.

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}^1, \\ \Theta(\mathbf{x}(t_2)) = \mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}^2. \end{cases} \quad (7.10)$$

В этом случае задача (6.16)–(6.18) преобразуется к виду (7.1), (7.3), (7.4).

Запишем вспомогательный функционал (6.19). С учетом (7.10) имеем

$$I^*[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \sum_{i=1}^n (x_i(t_1) - x_i^1) \mu_i + \sum_{i=1}^n (x_i(t_2) - x_i^2) \nu_i, \quad (7.11)$$

где $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda^T (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$.

В канонических переменных необходимые условия оптимальности, полученные с помощью метода Лагранжа, имеют вид (6.33), (6.34). К ним следует добавить условия трансверсальности (6.35), (6.36):

$$p_i(t_1) = \mu_i, \quad p_i(t_2) = -v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.12)$$

и, учитывая свободное изменение t_2 , соотношение (6.30) для $k = 2$, которое с учетом равенств $p_i = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$ (см. (6.32)), в канонических переменных принимает вид

$$L(x(t_2), \dot{x}(t_2), u(t_2)) - \sum_{i=1}^n p_i(t_2) \dot{x}_i(t_2) = 0,$$

где $(x(t), u(t))$ — точка экстремума функционала.

Переходя по формулам (6.32) к функции Понтрягина H , находим

$$H(x(t_2), p(t_2), u(t_2)) = 0. \quad (7.13)$$

Здесь $p(t)$ — вектор канонических переменных, соответствующих точке экстремума $(x(t), u(t))$.

Соотношения (6.33), (6.34), (7.12), (7.13) представляют собой необходимые условия экстремума функционала в задаче Лагранжа, полученные вариационными методами. Отметим, что в рамках рассматриваемой задачи условия (7.12) являются бессодержательными и для полного решения задачи (7.1), (7.3), (7.4) достаточно систему дифференциальных уравнений первого порядка (6.33) относительно $2n$ неизвестных функций дополнить $2n$ краевыми условиями (7.3). Таким образом, получаем полную систему необходимых условий (6.33), (6.34), (7.3), (7.13) для решения задачи Лагранжа в форме Понтрягина с дифференциальной связью (7.1) и целевым функционалом (7.4).

Сравним эти условия с условиями принципа максимума в рамках теории оптимального управления. Очевидно, что функция Понтрягина (6.32) совпадает с аналогичной функцией (7.7), если в последней положить $\psi_0 = -1$. Это всегда можно сделать согласно условию 2° теоремы 7.1, поскольку сопряженные переменные, как уже было отмечено, определены лишь с точностью до общего множителя, а значение $\psi_0 = 0$ соответствует вырожденной задаче, в которой поиск экстремума теряет смысл, ибо построение решения никак не зависит

от целевого функционала. С учетом этого система (6.33) полностью эквивалентна системе (7.8), если в последней отбросить два очевидных уравнения $\frac{dx_0}{dt} = f^0(x, u)$ и $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$. Вектор сопряженных переменных $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ имеет здесь тот же смысл, что и канонические переменные $p = (p_1, \dots, p_n)^T$.

Указанное совпадение уравнений для фазовых координат полностью соответствует выводам в 6.5. В рассматриваемой задаче оптимального управления отсутствуют фазовые ограничения, а фазовые координаты $x_i(t)$ описываются непрерывными функциями. Поэтому для них естественно ожидать выполнения уравнений Эйлера, даже если управляющие воздействия достигают ограничений и претерпевают разрывы. В последнем случае координаты могут иметь угловые точки, а уравнения Эйлера должны выполняться на каждой из дуг экстремали.

Сходство уравнений для фазовых координат не распространяется на управления. В вариационной задаче (задаче Лагранжа) управления не ограничиваются и описываются непрерывными функциями. Поэтому гамильтонова система (6.33) до полной расширяется системой (6.34), которая также является эйлеровой. Уравнения (6.34) представляют собой необходимые условия максимума для функции Понтрягина H . В задачах оптимального управления функции $u_j(t)$, вообще говоря, разрывны и могут достигать ограничений на управления. Поэтому уравнения Эйлера (6.34) не применимы. Однако условие максимума функции Понтрягина как необходимое условие оптимальности сохраняется и в этом случае. При этом условие 2° теоремы 7.1 согласуется с условием (7.13) на правом конце, которое получено вариационными методами.

Таким образом, условие максимизации функции Понтрягина в принципе максимума является более общим по сравнению с уравнениями Эйлера. Очевидно, что в случае, когда область управления U есть открытое множество (тогда условие (6.34) необходимо для максимума функции H), из принципа максимума следуют условия оптимальности (6.33), (6.34), полученные методами классического вариационного исчисления.

Итак, принцип максимума выглядит, по крайней мере, достаточно закономерной гипотезой, непосредственно вытекающей из задач вариационного исчисления. Однако, несмотря

на то что эта гипотеза почти очевидна, она долгое время не была обоснована. Дело в том, что при выводе необходимых условий принципа максимума в соответствии с определением оптимального процесса приходится сравнивать не только близкие одно к другому управления. В этом отличие данных условий от условий классического вариационного исчисления, в этом их сила и сложность в обосновании. Коснемся основной идеи доказательства*.

Сначала принцип максимума был доказан для линейных систем. Идея этого доказательства следующая. Пусть некоторое оптимальное управление переводит точку x^1 в точку x^2 . Если вместо оптимального управления взять другое допустимое управление на том же отрезке $[t_1, t_2]$, то точка x^1 перейдет в некоторую точку $x(t_2)$. В силу свойства линейности совокупность всех построенных таким образом точек $x(t_2)$ образует выпуклое множество M . Из оптимальности исходного управления вытекает, что точка x^2 лежит на границе этого множества. Через любую граничную точку, в том числе и через точку x^2 , выпуклого множества M можно провести так называемую опорную гиперплоскость, т. е. гиперплоскость, которая проходит через эту граничную точку так, что множество M целиком лежит по одну сторону от этой гиперплоскости. Вектор Ψ , ортогональный к этой плоскости и направленный во внешнюю сторону множества M , и является тем вектором, который используется при построении функции H .

Для нелинейной системы множество всех точек $x(t_2)$, получаемых с помощью всевозможных допустимых управлений, не является выпуклым. Использование линеаризации невозможно, так как она позволяет сравнивать лишь близкие управления, а это не соответствует характеру задач оптимального управления. Успех определил выбор класса управлений для сравнения с оптимальным. При построении этого класса использовались так называемые вариации Макшейна (игольчатые вариации). При таких вариациях управление изменяется на небольшом промежутке времени. В пределе этот промежуток стягивается в точку, но изменение управления остается конечным. Таким образом, с игольчатыми вариациями в рассмотрение вводятся управления с разрывами первого рода.

* Полное доказательство принципа максимума см. в книге: Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.

С помощью нескольких игольчатых вариаций строится допустимое управление, отклоняющееся от оптимального лишь на конечном числе малых интервалов времени. Несмотря на конечность изменения управления в каждом таком интервале, общее изменение функционала будет малым, так как мало время изменения управления. Если такое изменение берется относительно оптимального управления, приращение целевого функционала будет неотрицательным. Следовательно, хотя множество точек $\mathbf{x}(t_2)$, получаемых по всевозможным управлениям, и не является выпуклым, некоторое его подмножество выпукло, так что возникает возможность построения опорной гиперплоскости и ортогонального к ней вектора.

7.3. Задача быстрогодействия

Частным случаем функционала вида (7.4) является функционал

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1, \quad (7.14)$$

который приводит к задаче оптимального быстрогодействия. Здесь $f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$, и функция H имеет вид

$$H = \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Первое слагаемое не зависит от $\mathbf{u}$, поэтому максимум функции H по $\mathbf{u}$ реализуется одновременно с максимумом функции

$$\widehat{H}(\Psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Отбрасывая первые уравнения систем (7.8), соответствующие $i = 0$ ($\dot{x}_0 = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\psi_0 = 0$), перепишем гамильтонову систему в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \widehat{H}_{\psi_i}, & i = \overline{0, n}; \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\widehat{H}_{x_i}, & i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (7.15)$$

Так как $\widehat{H} = H - \psi_0$, то

$$\widehat{M}(\Psi, x) = \sup_{u \in U} \widehat{H}(\Psi, x, u) = M(\widehat{\Psi}, x) - \psi_0.$$

Значит, из условий $\psi_0 \leq 0$ и $M(\widehat{\Psi}, x) = 0$ следует, что $\widehat{M}(\Psi, x) \geq 0$. Предположим теперь, что функции $\psi_1^*(t), \dots, \psi_n^*(t)$, существование которых утверждает теорема 7.1, в некоторый момент времени $\hat{t}$ обращаются в нуль: $\Psi^*(\hat{t}) = 0$. Тогда $\widehat{H}(\Psi^*(\hat{t}), x^*(\hat{t}), u^*(\hat{t})) = 0$, отсюда $H(\widehat{\Psi}^*(\hat{t}), x^*(\hat{t}), u^*(\hat{t})) = \psi_0^*(\hat{t})$. Из условий $M(\widehat{\Psi}^*, x^*) = 0$ и $M(\widehat{\Psi}^*(\hat{t}), x^*(\hat{t})) = \text{const}$ (см. замечание 7.1) получаем $\psi_0^*(\hat{t}) = 0$. А это противоречит теореме 7.1, так как $\widehat{\Psi}^*(\hat{t}) = 0$ и, следовательно, функция $\Psi^*(\hat{t})$ тождественно равна нулю как решение линейной системы дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. Значит, и вектор-функция $\Psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \dots, \psi_n^*(t))$, и вектор-функция $\widehat{\Psi}^*(t) = (\psi_0^*(t), \Psi^*(t))$ не обращаются в нуль ни в одной точке отрезка $[t_1, t_2]$.

Итак, из теоремы 7.1 вытекают следующие необходимые условия оптимальности по быстродействию.

Теорема 7.2. Если $(x^*(t), u^*(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, — оптимальный процесс, то найдется ненулевое частное решение $\Psi^*(t)$ сопряженной системы

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n (f^\alpha)'_{x_i}(x^*(t), u^*(t)) \psi_\alpha(t), \quad i = \overline{1, n},$$

такое, что:

1° при каждом значении $t \in [t_1, t_2]$ функция $\widehat{H}(\Psi^*(t), x^*(t), u)$ переменного u достигает в точке $u = u^*(t)$ максимума:

$$\widehat{H}(\Psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \widehat{M}(\Psi^*(t), x^*(t));$$

2° в конечный момент времени t_2 выполняется соотношение $\widehat{M}(\Psi^*(t_2), x^*(t_2)) \geq 0$. #

Замечание 7.2. Как и в случае теоремы 7.1, проверку условия 2° можно проводить в любой момент времени $t \in [t_1, t_2]$.

Пример 7.1. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad (7.16)$$

с областью управления

$$U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad (7.17)$$

начальным состоянием

$$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0 \quad (7.18)$$

и конечным состоянием

$$x_1(t_2) = 0, \quad x_2(t_2) = -4. \quad (7.19)$$

Запишем для поставленной задачи функцию $\hat{H}$:

$$\hat{H}(\Psi, \mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha} f^{\alpha}(\mathbf{x}, u) = \psi_1(x_2 + 1) + \psi_2(-x_1 + u). \quad (7.20)$$

Для сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2 с учетом (7.8) получаем систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \quad (7.21)$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $u^*(t)$ должно доставлять максимум функции $\hat{H}$. Из (7.20) с учетом (7.17) имеем

$$\hat{M}(\Psi^*, \mathbf{x}^*) = \max_u \hat{H}(\Psi^*, \mathbf{x}^*, u) = \psi_1^*(x_2^* + 1) - \psi_2^* x_1^* + \psi_2^* \operatorname{sign} \psi_2^*,$$

причем $u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2^*(t)$.

Найдем $\psi_2^*(t)$. Из (7.21) получаем $\ddot{\psi}_2 + \psi_2 = 0$. Интегрирование этого уравнения дает [VIII]

$$\psi_2^* = C_1 \sin(t - C_2), \quad (7.22)$$

где $C_1 > 0$, C_2 — постоянные интегрирования.

Значит, оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2^*(t) = \operatorname{sign} \sin(t - C_2). \quad (7.23)$$

Из представления (7.23) вытекает следующее:

1) при оптимальном процессе управление в любой момент времени принимает одно из своих предельных значений: 1 или -1 ;

2) переход от одного значения к другому, или, как говорят, **переключение**, происходит через интервал времени, равный π . Исключение может составлять только первый участок движения: первое переключение определяется значением постоянной C_2 и может произойти через интервал времени, меньший π .

Эти выводы фактически исчерпывают ту информацию, которую можно получить о структуре оптимального управления из принципа максимума. Для полного решения задачи необходимо найти постоянные C_1 и C_2 , а для этого нужны, например, начальные условия для функции $\Psi(t)$. Но эти условия не могут задаваться произвольно, так как однозначно определяют функцию $\psi_2(t)$, следовательно, управление $u(t) = \text{sign} \psi_2(t)$ и фазовую траекторию $x(t)$. Но процесс $(x(t), u(t))$ должен удовлетворять краевым условиям задачи, которые еще не были учтены. Тогда начальные условия для $\Psi(t)$ должны вытекать из краевых условий задачи.

Завершить решение задачи можно следующим образом. Найдем совокупность траекторий, соответствующих постоянным управлениям, равным предельным значениям ± 1 . Очевидно, что искомая траектория состоит из дуг траекторий, отвечающих данным постоянным управлениям. При этом дуги траекторий стыкуются так, чтобы удовлетворялись краевые условия (7.18), (7.19). Тогда все параметры оптимального процесса будут полностью определены.

Итак, найдем траектории, соответствующие управлению $u = 1$. Для этого в систему (7.16) подставим $u = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1. \end{cases} \quad (7.24)$$

Полученную систему записываем в симметричной форме [VIII]:

$$\frac{dx_1}{x_2 + 1} = \frac{dx_2}{-x_1 + 1},$$

или $(-x_1 + 1)dx_1 = (x_2 + 1)dx_2$. Интегрируя, приходим к уравнениям окружностей с центром в точке $O_1(1, -1)$:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = R^2. \quad (7.25)$$

Движение фазовой точки вдоль любой из этих окружностей происходит по часовой стрелке, поскольку именно так направлен вектор фазовой скорости $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2 + 1, -x_1 + 1)$. При этом движение происходит с постоянной угловой скоростью, равной единице, так как угловая скорость ω и линейная скорость v при движении по окружности радиуса R связаны соотношением

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}{R}.$$

Значит, полный оборот совершается за время 2π , а за время π фазовая точка пройдет половину окружности.

Аналогичным образом выглядит семейство интегральных кривых системы (7.16) при $u = -1$. Это окружности с центром в точке $O_2(-1, -1)$:

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = \tilde{R}^2. \quad (7.26)$$

Движение и в этом случае совершается по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью, равной 1.

Искомая траектория строится из дуг окружностей (7.25), (7.26). Обратимся к начальным условиям (7.18). Отметим, что через данную точку проходят только две окружности, одна из первого семейства, другая — из второго. Для заданной начальной точки — начала координат — первая окружность описывается уравнением

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2, \quad (7.27)$$

а вторая — уравнением

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2. \quad (7.28)$$

Фазовая точка может начать движение из начала координат только по одной из этих окружностей (рис. 7.4).

Предположим, что стартовое управление равно -1 и оптимальная траектория на начальном отрезке времени идет по окружности (7.28). В некоторый момент времени $t_0 = C_2 + \pi \in (0, \pi]$ в соответствующей этому моменту времени точке P_1 на полуокружности OA (рис. 7.5) происходит переключение управления, и движение продолжается по дуге другой окружности, относящейся к семейству (7.25). По этой, второй окружности фазовая точка пройдет пол-оборота, и если она не достигнет за это время конечной точки, то ровно через пол-оборота

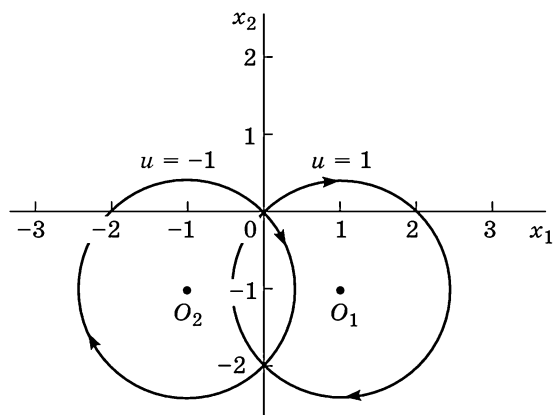


Рис. 7.4

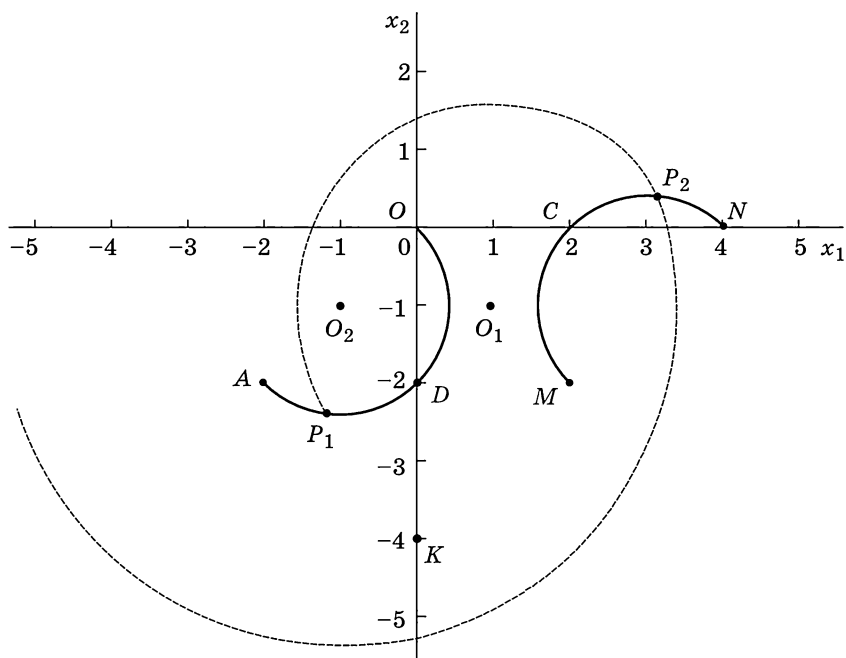


Рис. 7.5

снова произойдет переключение управления в момент времени $t_0 + \pi$, соответствующий фазовой точке P_2 , и фазовая точка продолжит движение по дуге окружности из семейства (7.26). Так как переключение происходит через пол-оборота, то точка P_2 является симметричной точке P_1 относительно центра O_1 . Значит, P_2 находится на полуокружности MN ,

симметричной полуокружности OA относительно O_1 , т. е. на половине окружности

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2.$$

Из построения видно, что дуга P_1P_2 , какой бы ни была точка P_1 на дуге OA , не проходит через конечную точку $K(0, -4)$, так как наименьшее значение ординаты точки на этой дуге равно $-1 - \sqrt{2} > -4$. Поэтому конечный участок траектории не может лежать на дуге P_1P_2 . Фазовая точка достигнет P_2 , и произойдет переключение управления, после которого фазовая точка начнет движение по дуге окружности из семейства (7.26). Окружность

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 10, \quad (7.29)$$

которая относится к этому семейству, пересекает дугу MN и проходит через точку $K(0, -4)$. Поэтому, если переключение произошло в соответствующей точке дуги MN , то, двигаясь по этой окружности, фазовая точка попадет в конечную точку K .

Обратим внимание на то, что если после второго переключения движение пойдет по дуге окружности, отличной от (7.29), то далее фазовая точка пройдет мимо конечной точки K , а при последующих переключениях траектория разворачивается по спирали и фазовая точка уже никогда не попадет в нужную точку K : при каждом переключении радиус окружности возрастает и уже после третьего переключения будет превышать $\sqrt{10}$ — расстояние от каждой из точек O_1, O_2 до точки K .

Итак, если стартовое управление равно -1 , то искомая траектория должна содержать дугу окружности (7.29) и точку P_2 переключения на дуге MN . Оказывается, что окружность (7.29) пересекает дугу MN в двух точках: $M(2, -2)$ и $C(2, 0)$ (см. рис. 7.5). Каждой из них соответствует траектория, удовлетворяющая первому условию принципа максимума, т. е. управление, соответствующее такой траектории, доставляет максимум функции $\hat{H}$. Отметим, что если $P_2 = M$, то P_1 , будучи симметричной P_2 относительно O_1 , совпадает с началом координат. Это означает, что первое переключение происходит в стартовый момент времени. Другими словами, эта траектория соответствует стартовому управлению $u = 1$, а наше исходное предположение, что стартовое управление равно -1 , на самом деле не является существенным. Указанная траектория факти-

чески содержит не три, а две дуги окружности, так как дуга первой окружности выродилась в точку.

Второй вариант с переключением в точке C содержит три дуги. Первое переключение происходит в точке $D(0, -2)$. Дальнейшее движение от D к C идет по дуге окружности

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2,$$

на которой лежит начало координат, т. е. в процессе перемещения от D к C фазовая точка возвращается в начало координат. Значит, на самом деле есть еще одна, третья траектория, которая представляет собой участок второй траектории от начала координат до точки переключения в точке C и далее до точки K . Эта траектория также удовлетворяет первому условию принципа максимума, но в отличие от первых двух соответствует начальному управлению $u = 1$. Очевидно, что время движения по третьей траектории заведомо меньше времени движения по второй траектории, потому что какое-то время затрачивается на движение по петле. Поэтому далее вторую траекторию можно не рассматривать. Анализ случая с начальным управлением $u = 1$ показывает, что других траекторий, удовлетворяющих первому условию принципа максимума и заданным краевым условиям, нет.

Итак, использование принципа максимума выявило две траектории, которые удовлетворяют краевым условиям поставленной задачи. Первая $x^*(t)$ заключается в движении по дуге OM окружности (7.27) и в следующем за переключением движении по дуге MK окружности (7.29). Вторая траектория $x^{**}(t)$ представляет собой движение по дуге OC окружности (7.27) с переходом на дугу CK окружности (7.29) (рис. 7.6). Поскольку движение по окружностям происходит с постоянной угловой скоростью, равной 1, время, затрачиваемое на движение по общим участкам двух траекторий, одинаково. Время прохождения от точки C до точки M по дуге окружности с центром O_1 отлично от времени прохождения от C до M по дуге окружности с центром O_2 . Наилучший вариант соответствует дуге, имеющей наименьшее угловое расстояние. На рис. 7.6 видно, что это дуга окружности с центром O_2 , так как угол CO_2M меньше угла CO_1M . Таким образом, траектория $x^{**}(t)$ более предпочтительна. Тот же вывод можно сделать, используя условие 2° принципа максимума.

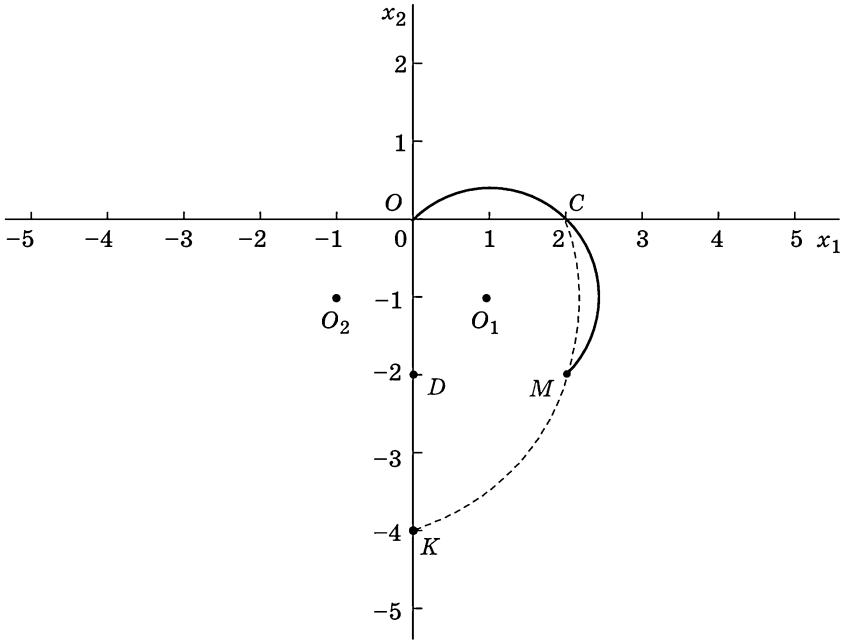


Рис. 7.6

Проверим выполнение условия 2° теоремы 7.2 для траекторий $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}^{**}(t)$. Это условие на самом деле можно проверять в любой момент времени, и в данном случае в качестве такого момента удобнее всего взять начальный. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{M}(\Psi^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1)) &= \psi_1^*(t_1)(x_2^*(t_1) + 1) - \\ &- \psi_2^*(t_1)x_1^*(t_1) + |\psi_2^*(t_1)| = \psi_1^*(t_1) + |\psi_2^*(t_1)|. \end{aligned}$$

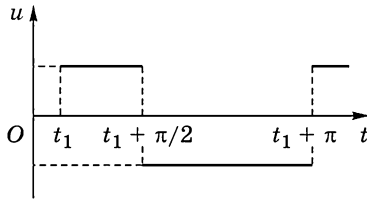
Учитывая, что, согласно (7.21), $\psi_1^* = -\dot{\psi}_2^*$, и используя (7.22), получаем

$$\widehat{M}(\Psi^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1)) = -C_1 \cos(t_1 - C_2) + C_1 |\sin(t_1 - C_2)|.$$

Точка переключения C траектории $\mathbf{x}^{**}(t)$ соответствует моменту времени $t = t_1 + \pi/2$, так как угловая длина дуги OC окружности (7.27) равна $\pi/2$ (угол OO_1C равен 90°). В то же время, согласно (7.23), переключение с $u = 1$ на $u = -1$ происходит при $t - C_2 = (2k + 1)\pi$, т. е. можно считать, что $C_2 = t_1 - \pi/2$. Тогда $\widehat{M} = C_1 > 0$, значит, условие 2° теоремы 7.2 выполнено.

Для траектории $x^*(t)$ точка переключения M соответствует моменту времени $t = t_1 + \pi$. В этом случае $C_2 = t_1$ и $\widehat{M} = -C_1 > 0$. Условие 2° теоремы 7.2 нарушено.

Найдем время движения по траектории $x^{**}(t)$. Для этого нужно подсчитать угловые длины двух дуг окружностей. Дуга OC , как уже отмечалось, имеет угловую длину $\pi/2$. Дуга



CK окружности (7.29) также имеет угловую длину $\pi/2$: эта длина измеряется углом между векторами $\overline{O_2C}$ и $\overline{O_2K}$, а они, как нетрудно увидеть, ортогональны. Значит, общее время равно:

Рис. 7.7

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Движению по траектории $x^{**}(t)$ соответствует управление

$$u^{**}(t) = \operatorname{sign} \sin \left(t - t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sign} \cos(t - t_1) \quad (\text{рис. 7.7}).$$

Задача (7.16)–(7.19) имеет единственный *допустимый процесс* $(x^{**}(t), u^{**}(t))$, удовлетворяющий принципу максимума.

Однако нельзя утверждать, что этот процесс на самом деле оптимален. Такое утверждение обоснованно, если известно, что поставленная задача имеет решение. #

Приведенный пример показывает, какие трудности возникают в случае применения метода, базирующегося на принципе максимума. Главная трудность состоит в том, что при использовании принципа максимума возникает краевая задача для системы ОДУ (7.15), причем краевые условия задаются только для фазовых переменных. Отсутствие краевых условий для функции $\Psi(t)$ существенно усложняет задачу. Ясно, что оптимальное управление и оптимальная траектория, выходящая из точки x^1 , зависят от начального вектора $\Psi(t_1)$, но, к сожалению, условия максимума для функции $\widehat{H}$ явно не указывают, как выбирать этот вектор. Численный поиск начального условия для $\Psi(t)$ можно организовывать, опираясь на условие 2° теоремы 7.2. Однако одного этого условия недостаточно, чтобы организовать сходящийся итерационный процесс последовательного уточнения вектора $\Psi(t_1)$.

Успех аналитического решения задачи, рассмотренной в примере 7.1, во многом объясняется тем, что система (7.16) линейна. Именно в линейных задачах проявляются преимущества принципа максимума.

7.4. Линейная задача оптимального быстродействия

Вернемся к линейной задаче оптимального быстродействия (см. 6.4), к которой неприменимы методы классического вариационного исчисления. Проанализируем эту задачу, используя принцип максимума. Но прежде всего уточним ее постановку.

Пусть закон движения рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (7.30)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T \in \mathbb{R}^r$; $A = (a_{ij})$ — числовая квадратная матрица порядка n ; $B = (b_{ik})$ — числовая матрица типа $n \times r$.

В качестве области управления U рассмотрим множество, описываемое системой нестрогих неравенств

$$\sum_{j=0}^r \alpha_{ij} u_j \leq \beta_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad (7.31)$$

и представляющее собой замкнутый ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^r$. В качестве целевого функционала возьмем время перехода объекта из положения x^1 в положение x^2 , т. е. $I = t_2 - t_1$. Кроме того, предположим (не оговаривая это каждый раз), что многогранник U удовлетворяет *условию общности положения* по отношению к системе (7.30), т. е. для любого вектора $v \in \mathbb{R}^r$, параллельного какому-либо ребру многогранника U , система векторов

$$Bv, ABv, \dots, A^{n-1}Bv \quad (7.32)$$

линейно независима.

Напомним, что система векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ в $\mathbb{R}^r$ линейно независима тогда и только тогда, когда матрица, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов, не вырождена:

$$\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

Пример 7.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u_1, \end{cases}$$

для которой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

многогранник U описывается неравенствами $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$ и на плоскости u_1Ou_2 представляет собой квадрат. Проверим для этого многогранника (многоугольника) условие общности положения по отношению к заданной системе.

Поскольку четыре ребра квадрата U разделяются на две пары параллельных ребер, для проверки общности нужно рассмотреть только два вектора: $v_1 = (1, 0)^T$ и $v_2 = (0, 1)^T$. Для первого имеем

$$Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ABv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

то система векторов Bv_1 , ABv_1 , A^2Bv_1 линейно независима. Аналогично для второго вектора v_2 получаем

$$Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ABv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то и система векторов Bv_2 , ABv_2 , A^2Bv_2 линейно независима.

Таким образом, заданный многогранник удовлетворяет условию общности положения относительно заданной системы дифференциальных уравнений. #

Для линейной задачи оптимального быстродействия (7.30), (7.31) запишем функцию Понтрягина $\widehat{H}(\Psi, x, u)$:

$$\widehat{H} = \Psi^T A x + \Psi^T B u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_i a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r \psi_k b_{kl} u_l. \quad (7.33)$$

Сопряженная система в данном случае имеет вид

$$\frac{d\psi_j}{dt} = - \sum_{i=1}^n a_{ij} \psi_i, \quad j = \overline{1, n},$$

или в векторной форме

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A^T \Psi. \quad (7.34)$$

Согласно (7.33), функция $\widehat{H}$, как функция переменного u , достигает максимума одновременно с функцией $F(u) = \Psi^T B u$. Обозначим через $P(\Psi)$ максимум функции $F(u)$ на множестве U . Из теоремы 7.2 следует, что если $u^*(t)$ — оптимальное управление, то найдется такое ненулевое решение $\Psi^*(t)$ системы (7.34), что

$$(\Psi^*(t))^T B u^*(t) = P(\Psi^*(t)). \quad (7.35)$$

Так как система (7.34) с постоянными коэффициентами не содержит неизвестных функций $x(t)$, $u(t)$, то все ее решения можно найти, после чего легко определить соответствующие управления $u^*(t)$ как решения уравнения (7.35). Решение последнего сводится к поиску наибольшего значения линейной функции $F(u)$ на замкнутом ограниченном множестве U . Правда, возникает вопрос, имеет ли задача поиска u , при котором $F(u)$ максимально на U , единственное решение. Ответ на это дает следующее утверждение.

Теорема 7.3. Для любого нетривиального решения $\Psi(t)$ системы (7.34) соотношение (7.35) однозначно определяет управление $u(t)$, причем это управление кусочно-постоянно, а значениями управления в точках непрерывности являются вершины многогранника U .

◄ Пусть $\Psi(t)$ — произвольное нетривиальное решение системы (7.34). Так как функция $\Phi(t, u) = \Psi(t)^T B u$ линейна по u , то она имеет максимум на границе многогранника U [XIV]. При этом максимум может достигаться либо в вершине многогранника, либо во всех точках некоторой грани. Покажем, что в силу общности положения многогранника последняя ситуация реализуется лишь для конечного числа значений времени t .

Предположим, что для некоторого бесконечного множества $M \subset [t_1, t_2]$ при $t \in M$ функция $\Phi(t, u)$ достигает максимума на целой грани Γ_t многогранника U . Тогда при $u \in \Gamma_t$ она постоянна. Поскольку множество M бесконечно, а количество граней U конечно, в M можно выделить бесконечное подмножество M_Γ значений, которым соответствует одна грань Γ многогранника U .

Пусть u_0 и u_1 — концы ребра грани Γ_t . Тогда вектор $v = u_1 - u_0$ определяет направление этого ребра. При этом для $t \in M_\Gamma$

$$\begin{aligned}\Psi(t)^T B v &= \Psi(t)^T B(u_1 - u_0) = \\ &= \Psi(t)^T B u_1 - \Psi(t)^T B u_0 = \Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_0) = 0.\end{aligned}$$

Итак, функция $\Psi^T B v$ при $t \in M_\Gamma$ обращается в нуль. Матрица B является числовой, и мы можем считать вектор v также постоянным, так как он один и тот же для всех $t \in M_\Gamma$. А теперь отметим следующее. Поскольку функции являются решениями линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, они представляют собой аналитические функции [X]: в этом контексте t можно рассматривать как комплексный аргумент, и аналитичность будет иметь место во всей комплексной плоскости. Значит, и функция $\Psi^T B v$ является аналитической. Но так как она обращается в нуль на бесконечном подмноестве M отрезка $[t_1, t_2]$, то, согласно теореме единственности [X], $\Psi^T B v = 0$ при любом t .

Последовательно дифференцируя тождество $\Psi^T B v = 0$ по t в силу системы (7.34), получаем

$$\begin{aligned}(A^T \Psi(t))^T B v &= 0, \\ ((A^T)^2 \Psi(t))^T B v &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ ((A^T)^{n-1} \Psi(t))^T B v &= 0,\end{aligned}$$

или, учитывая известное матричное тождество $(AB)^T = B^T A^T$,

$$\begin{cases} \Psi(t)^T Bv = 0, \\ \Psi(t)^T ABv = 0, \\ \Psi(t)^T A^2 Bv = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Psi(t)^T A^{n-1} Bv = 0. \end{cases} \quad (7.36)$$

Так как, по предположению, выполняется условие общности положения многогранника U , система векторов $Bv, ABv, \dots, A^{n-1}Bv$ линейно независима, а потому образует базис в $\mathbb{R}^n$. Из соотношений (7.36) вытекает, что при любом t вектор $\Psi(t)$ ортогонален каждому вектору базиса, а потому равен нулю. Это противоречит предположению о том, что решение $\Psi(t)$ системы (7.34) нетривиально.

Итак, противоречие показывает, что для всех t , кроме разве лишь конечного числа, функция $\Phi(t, u)$ достигает максимума только в одной точке — вершине многогранника. Значит, всюду, кроме конечного числа точек, определено однозначно управление $u(t)$.

Выколов конечное число точек неоднозначной разрешимости уравнения (7.34), мы тем самым разобьем отрезок $[t_1, t_2]$ на конечное число частичных интервалов. Выберем один из таких интервалов $\Delta = (\tau_1, \tau_2)$. Пусть $u_1, \dots, u_s$ — вершины многогранника U . Тогда Δ разделится на s непересекающихся множеств $M_1, M_2, \dots, M_s$, где M_i — множество значений $t \in \Delta$, в которых максимум $\Phi(t, u)$ достигается в вершине u_i . Оказывается, что все множества M_i являются открытыми (см. ниже). Но интервал Δ можно представить как объединение открытых непересекающихся множеств только в том случае, когда лишь одно из этих множеств непусто. Отсюда следует, что на интервале Δ функция $u(t)$ постоянна, а потому непрерывна.

Покажем, что множество M_i открытое, т. е. если $\tau_0 \in M_i$, то и целая окрестность τ_0 также принадлежит M_i . Другими словами, если в точке τ_0 функция $\Phi(t, u)$ достигает максимума в вершине u_i , то и при всех t , достаточно близких к τ_0 , функция $\Phi(t, u)$ достигает максимума в вершине u_i . Итак, при $j \neq i$ имеем $\Phi(\tau_0, u_j) < \Phi(\tau_0, u_i) = P(\Psi(\tau_0))$. Функция $\Phi(t, u) = \Psi(t)^T Bv$ непрерывна по t . Поэтому конечный набор неравенств $\Phi(t, u_j) < \Phi(t, u_i)$, $j \neq i$, выполняющихся в точке $t = \tau_0$, останется в силе

и в некоторой окрестности точки τ_0 . Но это как раз и значит, что точка максимума функции остается неизменной в некоторой окрестности τ_0 . ►

Согласно доказанной теореме, каждое оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией со значениями в вершинах многогранника U . Точки разрыва соответствуют смене значения управления, и мы будем называть их *точками переключения*. Если τ — точка переключения, то слева от нее управление имеет одно значение, скажем u_i , а справа другое — u_j . В этом случае говорят, что в τ происходит переключение оптимального управления $u^*(t)$ из вершины u_i в вершину u_j .

Теорему 7.3 можно было бы охарактеризовать как теорему о конечности числа переключений. В каждой конкретной ситуации число переключений зависит от закона движения (7.30), вида области управления (многогранника) U и краевых условий x^1, x^2 . Оказывается, что есть класс линейных задач, в которых при любых краевых условиях можно указать оценку сверху для числа переключений. Характерным признаком этих задач является отсутствие комплексных корней у характеристического уравнения матрицы A . Об этом говорит следующая теорема, в первоначальном виде доказанная А.А. Фельдбаумом.

В своей формулировке мы ограничимся лишь частным случаем многогранника — *r -мерным параллелепипедом*, т. е. множеством в $\mathbb{R}^r$ вида

$$U = \{u = (u_1, \dots, u_r) : \alpha_k \leq u_k \leq \beta_k, k = \overline{1, r}\}. \quad (7.37)$$

При такой структуре области управления каждое отдельное управление u_k представляет собой самостоятельный параметр, область изменения которого не зависит от значений других управлений. По-прежнему предполагаем выполненным условие общности положения.

Теорема 7.4. Если U — параллелепипед (7.37), а все корни характеристического уравнения матрицы A в законе движения (7.30) действительны, то у любого решения $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ уравнения (7.35) каждая из координатных функций $u_k(t)$ кусочно-постоянна и имеет не более $n-1$ переключений (n — порядок системы (7.30)).

◀ Пусть $u(t)$ — решение уравнения (7.35), т. е. в каждый момент t вектор $u(t)$ доставляет максимум функции $\Phi(t, u) = \Psi(t)^T B u$. Согласно теореме 7.3, для любой нетривиальной функции $\Psi(t)$ такое решение существует и единственно. Функцию $\Phi(t, u)$ можно записать следующим образом:

$$\Phi(t, u) = \Psi(t)^T B u = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t) \right) u_k, \quad (7.38)$$

где $\Psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T$; $B = (b_{ik})$.

Так как область изменения каждой из переменных u_i не зависит от остальных, функция Φ достигает максимума при фиксированном t в том и только в том случае, когда максимум достигает каждое слагаемое $\left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t) \right) u_k$ в (7.38). Но это слагаемое достигает максимума при $u_k = \alpha_k$ в случае отрицательного коэффициента при нем и при $u_k = \beta_k$ в случае положительного коэффициента. Таким образом, компоненты вектора u , доставляющего максимум функции Φ , определяются соотношениями

$$u_k = \begin{cases} \alpha_k, & \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t) < 0; \\ \beta_k, & \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t) > 0. \end{cases}$$

Функция $\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t)$ как *функция комплексного переменного t является аналитической функцией*. Выбрав единичный вектор $v = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ (единица стоит на k -м месте), направленный вдоль k -го ребра многогранника (7.37), получим

$$\Psi(t)^T B v = \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t).$$

Предположим, что сумма $\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t)$ тождественно равна нулю.

Тогда с помощью рассуждений, аналогичных тем, что приведены в доказательстве теоремы 7.3, заключаем, что $\Psi(t) \equiv 0$,

а это противоречит предположению о том, что вектор $\Psi^*(t)$ ненулевой. Значит, $\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t)$ непостоянна и, будучи аналити-

ческой, может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек. Нам нужно показать, что число нулей этой функции не превосходит $n-1$, поскольку каждый такой нуль соответствует неоднозначности $u^*(t)$ и является точкой переключения.

Коэффициенты b_{ik} могут иметь произвольные значения, поэтому фактически надо доказывать: любая линейная комбинация функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ имеет не более чем $n-1$ действительный нуль. Согласно структуре общего решения линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами, каждая из функций $\psi_i(t)$, в совокупности составляющих решение системы (7.34), имеет вид

$$f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad (7.39)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — совокупность всех различных действительных корней характеристического уравнения матрицы $-A^T$; $f_1(t), \dots, f_m(t)$ — многочлены, причем степень многочлена $f_i(t)$ меньше кратности r_i корня λ_i [VIII].

Любая линейная комбинация функций $\psi_i(t)$ также имеет вид (7.39). Согласно лемме, изложенной ниже, общее число действительных нулей функции вида (7.39) не превосходит

$$\begin{aligned} & (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_m - 1) + m - 1 = \\ & = (r_1 + r_2 + \dots + r_m) - 1 = n - 1. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Лемма 7.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — действительные попарно различные числа, $f_1(t), \dots, f_m(t)$ — многочлены с действительными коэффициентами, имеющие степени $k_1, \dots, k_m$ соответственно. Тогда функция (7.39) имеет не более чем $k_1 + \dots + k_m + m - 1$ действительных корней*. #

В приведенных выше теоремах речь шла о структуре оптимального управления в линейных задачах оптимального быстродействия. Для этих задач принцип максимума позволяет не только определить вид оптимальных управлений, но и получить условия единственности оптимального управления.

* Доказательство леммы см. в книге: Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.

Управление $u(t)$ называют *экстремальным управлением*, если оно удовлетворяет принципу максимума. Для линейной задачи оптимального быстродействия с областью управления в виде многогранника управление $u(t)$ является экстремальным, если существует такое нетривиальное решение $\Psi(t)$ системы (7.34), что для него будет выполняться соотношение (7.35). Это соотношение равносильно условию 1° теоремы 7.2, а условие 2° этой теоремы, как показано ниже, выполняется автоматически. Ясно, что всякое оптимальное управление является экстремальным. Поэтому, чтобы найти оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x^1 в положение x^2 , нужно найти все экстремальные управления с теми же краевыми условиями, а затем среди них выбрать то, которое осуществляет перевод за наименьшее время. Возникает вопрос: могут ли существовать несколько экстремальных управлений, переводящих фазовую точку из положения x^1 в положение x^2 ? Вообще говоря, да. Но если начало координат в пространстве управлений является внутренней точкой многогранника U , то экстремальное управление единственно.

Теорема 7.5. Пусть в пространстве управлений начало координат 0 есть внутренняя точка многогранника U . Если $u(t)$ и $\hat{u}(t)$ — два экстремальных управления, переводящие фазовую точку из положения x^1 в положение $x^2 = 0$ за время $t_2 - t_1$ и $\hat{t}_2 - t_1$ соответственно, то $t_2 = \hat{t}_2$ и $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

◀ Получим формулу для частного решения системы (7.30) при произвольном управлении $u(t)$ и начальном условии $x(t_1) = x^1$. Для этого обозначим через $\varphi^1(t)$, $\varphi^2(t)$, ..., $\varphi^n(t)$ фундаментальную систему решений однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

которая определяется начальными условиями

$$\varphi_j^i(t_1) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $\varphi^i = (\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_n^i)^\tau$, а через $\Psi^1(t)$, $\Psi^2(t)$, ..., $\Psi^n(t)$ — фундаментальную систему решений однородной системы (7.34) с аналогичными начальными условиями:

$$\psi_j^i(t_1) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для всех t имеет место соотношение

$$(\Psi^j(t), \varphi^i(t)) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7.40)$$

Действительно, это условие в силу выбора начальных условий выполнено при $t = t_1$. Далее

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Psi^j(t), \varphi^i(t)) &= \left(\frac{d}{dt}(\Psi^j(t), \varphi^i(t)) \right) + \left(\Psi^j(t), \frac{d}{dt}\varphi^i(t) \right) = \\ &= (-A^T \Psi^j(t), \varphi^i(t)) + (\Psi^j(t), A\varphi^i(t)) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $(\Psi^j(t), \varphi^i(t))$ постоянна и ее значение при любом t совпадает со значением при $t = t_1$.

В соответствии с методом Лагранжа вариации постоянных [VIII] общее решение системы (7.30) можно искать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) \varphi_k(t).$$

Подставляя это выражение в систему (7.30), получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k(t)}{dt} \varphi_k(t) = B\mathbf{u}(t).$$

Умножаем последнее уравнение скалярно на $\Psi^j(t)$ и учитываем (7.40):

$$\frac{dC_j(t)}{dt} = (\Psi^j(t), B\mathbf{u}(t)).$$

Решение системы (7.30) с произвольным управлением $\mathbf{u}(t)$ и начальным условием $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ теперь можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n \varphi^k(t) \left(x_k^1 + \int_{t_1}^t (\Psi^k(\tau), B\mathbf{u}(\tau) d\tau) \right). \quad (7.41)$$

Обозначим через $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ траектории, соответствующие управлениям $u(t)$ и $\hat{u}(t)$ и выходящие из точки x^1 в момент времени t_1 . По условиям теоремы $x(t_2) = \hat{x}(\hat{t}_2) = 0$, или, согласно (7.41),

$$\sum_{k=1}^n \varphi^k(t_2) \left(x_k^1 + \int_{t_1}^{t_2} (\Psi^k(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi^k(\hat{t}_2) \left(x_k^1 + \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi^k(\tau), B\hat{u}(\tau)) d\tau \right) = 0.$$

Так как векторы $\varphi^i(t)$, $i = \overline{1, n}$, линейно независимы, из последних двух соотношений вытекает, что

$$-x_k^1 = \int_{t_1}^{t_2} (\Psi^k(\tau), Bu(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi^k(\tau), B\hat{u}(\tau)) d\tau. \quad (7.42)$$

Пусть $t_2 > \hat{t}_2$ и $\Psi(t)$ — решение сопряженной системы (7.34), для которого на отрезке $[t_1, t_2]$ выполняется соотношение

$$(\Psi(t), Bu(t)) = P(\Psi(t)), \quad (7.43)$$

определяющее функцию $u(t)$. Разложим функцию $\Psi(t)$ по базису $\Psi^1(t), \dots, \Psi^n(t)$:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^n A_k \Psi^k(t).$$

Умножая (7.42) на A_k и суммируя по k , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi(\tau), B\hat{u}(\tau)) d\tau. \quad (7.44)$$

Заметим, что для любого решения $\Psi(t)$ сопряженной системы (7.34) справедливо неравенство

$$P(\Psi(t)) \geq 0. \quad (7.45)$$

Действительно

$$(\Psi, Bu) = (B^T \Psi, u).$$

Поэтому

$$P(\Psi(t)) = \max_{u \in U} (\Psi(t), Bu) = \max_{u \in U} (B^T \Psi(t), u).$$

Поскольку начало координат является внутренней точкой многогранника U , то функция $F(t, u) = (B^T \Psi(t), u)$ при фиксированном t может принимать как положительные, так и отрицательные значения либо тождественно равняться нулю. Если она не тождественный нуль, то $P(\Psi(t)) > 0$, а в противном случае $P(\Psi(t)) = 0$.

Учитывая (7.43), (7.45) и предположение $t_2 > \hat{t}_2$, из (7.44) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau &= \int_{t_1}^{\hat{t}_2} P(\Psi(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} P(\Psi(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi(\tau), B\hat{u}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Итак

$$\int_{t_1}^{\hat{t}_2} P(\Psi(\tau)) d\tau \leq \int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi(\tau), B\hat{u}(\tau)) d\tau. \quad (7.46)$$

Согласно определению, $P(\Psi(t)) = \max_{u \in U} (\Psi(t), Bu)$. Поэтому

$$(\Psi(t), Bu(t)) = P(\Psi(t)) \geq (\Psi(t), B\hat{u}(t)), \quad t \in [t_1, \hat{t}_2].$$

Значит, с учетом (7.46) имеем

$$(\Psi(t), Bu(t)) = (\Psi(t), B\hat{u}(t)), \quad t \in [t_1, \hat{t}_2].$$

Но тогда в силу теоремы 7.3 оба управления $u(t)$ и $\hat{u}(t)$, удовлетворяющие (7.35) с одной и той же функцией $\Psi(t)$, тождественно равны: $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in [t_1, \hat{t}_2]$.

Из совпадения управлений и равенства (7.44) следует, что

$$\int_{t_1}^{\hat{t}_2} (\Psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau = 0,$$

или

$$\int_{t_1}^{\hat{t}_2} P(\Psi(\tau)) d\tau = 0. \quad (7.47)$$

Рассмотрим равенство $P(\Psi(\tau)) = 0$. Выполнение этого равенства, как отмечено выше, означает, что при фиксированном t функция $F(t, u)$ тождественно равна нулю. Если предположить, что равенство $P(\Psi(\tau)) = 0$ выполняется на некотором бесконечном множестве значений t , то, как и в доказательстве теоремы 7.3, можно показать, что аналитическая функция $\Psi(t)$ тождественно равна нулю. А это противоречит принципу максимума. Поэтому указанное равенство может быть верным лишь для конечного числа значений t . Но тогда равенство (7.47) при условии (7.45) может выполняться только при $t_2 = \hat{t}_2$. ►

До сих пор мы пользовались лишь условием 1° теоремы 7.2. Покажем, что в рамках предположений теоремы 7.5 условие 2° теоремы 7.2 выполняется автоматически:

$$\begin{aligned} M(\Psi(t_2), x(t_2)) &= H(\Psi(t_2), x(t_2), u(t_2)) = \\ &= (\Psi(t_2), Ax(t_2)) + (\Psi(t_2), Bu(t_2)) = P(\Psi(t_2)) \geq 0, \end{aligned}$$

так как $x(t_2) = x^2 = 0$.

В заключение сформулируем теорему существования для линейных систем оптимального быстрогодействия (условие общности положения многогранника U считается выполненным).

Теорема 7.6*. Если существует хотя бы одно управление, переводящее фазовую точку системы (7.30) из положения x^1 в положение x^2 , то существует и оптимальное по быстроддействию управление, также переводящее фазовую точку из x^1 в x^2 . #

Задача управления состоит в построении допустимого управления, реализующего цель. В рамках сформулированной теоремы целью является состояние x^2 . Поэтому теорему 7.6

* Доказательство теоремы см. в книге: Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.

можно было бы сформулировать так: если для линейной системы решена задача управления, то для нее можно построить управление, оптимальное по быстродействию.

Итак, теорема 7.6 утверждает, что оптимальное решение в линейной задаче быстродействия существует. Любое оптимальное решение является экстремальным, а по теореме 7.5 экстремальное управление единственно. Следовательно, в рамках теоремы 7.5 существует единственное экстремальное управление, которое является оптимальным. В этом случае принцип максимума является не только необходимым условием оптимальности, но и достаточным. С его помощью линейная задача быстродействия может быть решена полностью.

7.5. Задача синтеза управления

Выше, применяя *принцип максимума*, мы отыскивали *оптимальное управление* в виде функции времени t . Такое управление называют *программным управлением*. Однако во многих случаях удобнее управление рассматривать как функцию текущего состояния системы, т. е. как функцию фазовых координат. Это позволяет при построении управления учитывать возмущенное движение. Отклонение состояния системы от расчетного фиксируется и учитывается в последующем управлении.

Можно представить некоторый технический объект, который снабжен прибором, фиксирующим его текущее состояние путем измерения фазовых координат, и исполнительным механизмом, который по текущим фазовым координатам x реализует управление $u(x)$. В этой ситуации мы имеем систему с обратной связью

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x).$$

Фазовая траектория такого управляемого объекта зависит от выбора функции $u(x)$, которую называют *синтезирующей функцией* (или *обратной связью*). Определение синтезирующей функции, позволяющей реализовывать *цель управления*, называют *синтезом управления*.

Синтез оптимального управления в линейных системах осуществлялся задолго до появления принципа максимума.

Одним из первых среди советских ученых результаты в этой области получил А.А. Фельдбаум, который ввел общее понятие оптимального процесса в n -мерном фазовом пространстве^{*}. Впоследствии он разработал метод фазового пространства, с помощью которого была решена задача синтеза управления для линейных систем второго порядка с одним управляющим параметром и с действительными собственными значениями матрицы системы^{**}. Позже эта задача была решена для систем второго порядка с комплексными собственными значениями. Появление принципа максимума упростило процедуру решения задачи. Использование этого принципа позволило решить задачу для систем второго порядка с двумя управляющими параметрами.

Отметим, что сама постановка задачи синтеза и методы ее решения характерны для теории оптимального управления и гораздо хуже согласуются с методами вариационного исчисления. В этом разделе мы обсудим некоторые задачи, относящиеся к задачам синтеза.

Быстрейшая остановка движущейся точки в заданном месте. Пусть материальная точка движется по инерции вдоль прямой. Задача состоит в том, чтобы наискорейшим образом остановить движение этой точки в заданном месте, которое мы примем за начало координат на прямой, с помощью ограниченной по величине силы.

Закон движения рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u.$$

В качестве *области управления* возьмем $U = \{u : |u| \leq 1\}$.

Преобразуем уравнение движения второго порядка введением дополнительных координат в систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (7.48)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$.

Мы имеем дело с задачей быстрейшего попадания в начало координат $x^2 = (0, 0)^T$ из заданного *начального состояния*

^{*} См.: Фельдбаум А.А. (1953 г.)

^{**} См.: Фельдбаум А.А. (1955 г.)

$\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)^T$. Функция Понтрягина $\widehat{H}$ для этой задачи имеет вид

$$\widehat{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Учитывая ограничение $|u| \leq 1$ на управление, получаем

$$\max_{|u| \leq 1} \widehat{H}(\Psi, \mathbf{x}, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 \operatorname{sign} \psi_2.$$

Согласно теореме 7.3, экстремальное управление $u^*(t)$ имеет вид

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t). \quad (7.49)$$

Из сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}$$

находим $\psi_1(t) = C_1$, $\psi_2(t) = C_2 - C_1 t$, где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Значит, экстремальное управление

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign}(C_2 - C_1 t)$$

является кусочно-постоянной функцией с двумя значениями 1 и -1 , имеющей не более одного переключения, так как линейная функция $C_2 - C_1 t$ на отрезке $[t_1, t_2]$ меняет знак не более одного раза (это полностью согласуется с теоремой 7.3).

Для интервала времени, на котором $u = 1$, имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 1. \end{cases}$$

Записав систему в симметричной форме [VIII]

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{1} = dt,$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными $dx_1 = x_2 dx_2$. Его интегрирование дает

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + S. \quad (7.50)$$

Аналогично поступаем в случае $u = -1$. Система в симметричной форме имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-1} = dt,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + \tilde{S}. \quad (7.51)$$

Семейство *фазовых кривых* для рассмотренных случаев показано на рис. 7.8, *а* ($u = 1$) и *б* ($u = -1$). Так как для первой системы $dt = dx_2$, то движение по параболам в случае $u = 1$ происходит снизу вверх. Для второй системы $dt = -dx_2$ и движение по параболам при $u = -1$ направлено сверху вниз.

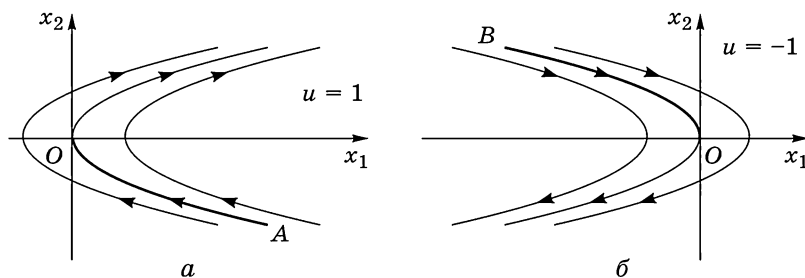


Рис. 7.8

Нас интересуют те дуги парабол, которые приводят в начало координат. Учитывая направление движения, заключаем, что такими дугами могут быть дуга OA параболы $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ (см. рис. 7.8, *а*) либо дуга OB параболы $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ (см. рис. 7.8, *б*).

Управление $u^*(t)$ имеет не более одного переключения и максимум два интервала постоянства. На первом интервале постоянства нужно выбрать такое из двух значений 1 или -1 , которое привело бы *фазовую точку* из начального положения x^1 на одну из дуг OA или OB . На дугу OA , соответствующую управлению $u = 1$, можно попасть по траекториям с $u = -1$, т. е. двигаясь сверху вниз. А на дугу OB можно попасть лишь при движении снизу вверх (рис. 7.9). Таким образом, плоскость разделяется на две области.

Если x^1 расположена выше кривой AOB , то, двигаясь сверху вниз по кривым семейства (7.51), мы выходим на дугу OA

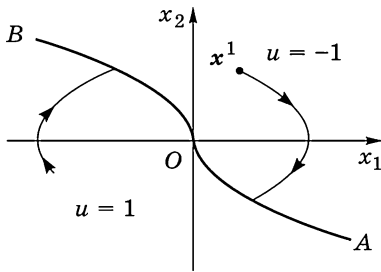


Рис. 7.9

и по этой дуге после переключения попадаем в начало координат. Если же x^1 расположена ниже кривой AOB , то начальное движение снизу вверх по кривой семейства (7.50) выводит фазовую точку на дугу OB , по которой после переключения фазовая точка попадает в начало координат. Наконец, отметим ситу-

ацию, когда начальное положение x^1 оказывается на кривой AOB . В этом случае переход в начало координат не требует переключения.

Как видим, для любого начального состояния x^1 существует ровно одна экстремальная траектория, ведущая в начало координат (что согласуется с теоремой 7.5). Если оптимальная траектория существует, то она совпадает с экстремальной, т. е. построенная нами траектория обеспечит наименьшее время движения. Существование оптимальной траектории вытекает из теоремы 7.6. Эта теорема показывает, что в рассматриваемой задаче при любых начальных условиях x^1 оптимальная траектория существует, так как существует хотя бы одно управление, реализующее цель. Итак, найденные траектории оптимальны по быстродействию, и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, нет.

Как построить в решенной задаче синтезирующую функцию? Поскольку для оптимального движения в каждый момент времени нужно выбирать между двумя значениями 1 и -1 , то *оптимальное по быстродействию управление* равно:

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \text{ ниже } AOB \text{ или на } OA; \\ -1, & (x_1, x_2) \text{ выше } AOB \text{ или на } OB. \end{cases}$$

Тогда система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u^*(x_1, x_2) \end{cases}$$

при любых начальных условиях в качестве решения дает оптимальную траекторию. Нам удалось решить задачу синтеза для рассматриваемой системы. Отметим, что кривую AOB называют *линией переключений*.

Приведение маятника в верхнее положение равновесия.

Применим принцип максимума к задаче о приведении математического маятника в верхнее положение равновесия (см. 6.1). Эта задача сводится к задаче наискорейшего перехода в начало координат с законом движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 + u, \end{cases}$$

начальными условиями $x^1 = (\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ и ограничением на управление $|u| \leq f_0$. Для упрощения выкладок будем считать, что $\omega^2 = 1$, $f_0 = 1$.

Запишем функцию $\hat{H}$:

$$\hat{H}(\Psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (x_1 + u).$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Несложно найти ее общее решение [VIII]:

$$\psi_1(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \psi_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, не равные нулю одновременно (Ψ не должно быть тривиальным решением).

Из условия максимума для функции $\hat{H}$ находим управление:

$$u^*(t) = \text{sign} \psi_2(t).$$

Управление оказывается кусочно-постоянной функцией, а так как функция $\psi_2(t)$ имеет не более одного нуля, то управление имеет лишь одно переключение и два интервала постоянства значения. Для интервала, на котором $u = 1$, запишем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 1, \end{cases}$$

из которой получаем уравнение с разделяющимися переменными $(x_1 + 1)dx_1 = x_2 dx_2$. После интегрирования:

$$(x_1 + 1)^2 - x_2^2 = S_1,$$

где S_1 — произвольная постоянная.

Это семейство гипербол с единым центром в точке $(-1, 0)$. Так как $dt = dx_1/x_2$, движение по гиперболам будет слева направо в верхней полуплоскости $x_2 > 0$ и справа налево в нижней (рис. 7.10, а).

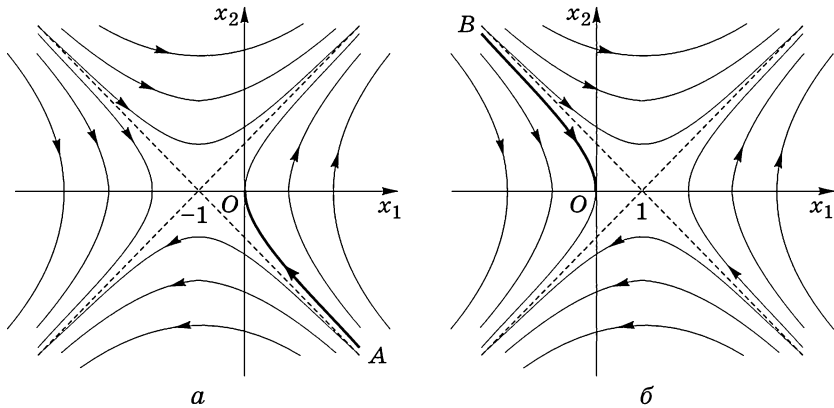


Рис. 7.10

Для интервала времени, на котором $u = -1$, поступаем аналогично и приходим к другому семейству гипербол с центром в точке $(1, 0)$:

$$(x_1 - 1)^2 - x_2^2 = S_2.$$

Движение по этим гиперболам будет слева направо в верхней полуплоскости и справа налево в нижней (рис. 7.10, б).

Как и ранее, нас интересуют дуги тех гипербол, которые приводят в начало координат. Это дуга OA гиперболы $(x_1 + 1)^2 - x_2^2 = 1$ и дуга OB гиперболы $(x_1 - 1)^2 - x_2^2 = 1$. Так как управление кусочно-постоянно и имеет не более одного переключения, то оно имеет не более двух интервалов постоянства, а соответствующая фазовая траектория имеет не более двух дуг гипербол, причем вторая дуга (может быть, единственная) есть часть дуги OA , если переключение с -1 на 1 , или часть дуги OB , если переключение с 1 на -1 . Первая дуга траектории должна привести фазовую точку из начального положения равновесия на дугу OA при управлении $u = -1$ или на дугу OB при управлении $u = 1$. Состыкованная из двух дуг траектория будет оптимальной.

Анализ изображений на рис. 7.10 показывает, что на плоскости x_1Ox_2 выделяется область Q , которая представляет собой полосу между прямыми $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1 + x_2 = 1$, не содержащую указанных прямых (рис. 7.11). Если точка x^1 находится в этой области, то по некоторой гиперболе из этой точки можно перейти

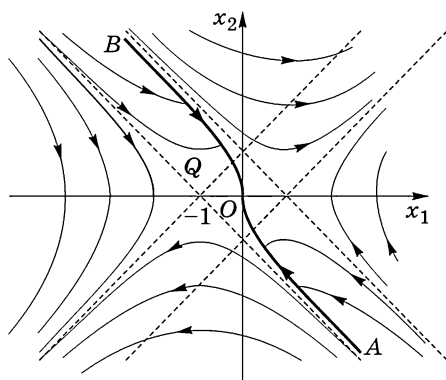


Рис. 7.11

на кривую AOB , и в результате для такого начального состояния оптимальная траектория существует. Если же точка x^1 находится вне области Q , то попасть на кривую AOB не удастся, так что для такого положения оптимального решения не существует. Учитывая это, область Q можно назвать **областью управляемости** данной системы. Напомним, что, согласно теореме 7.6, оптимальная траектория существует, если существует хотя бы одна допустимая траектория, переводящая фазовую точку из заданного положения в начало координат. Отсутствие оптимальной траектории для начального положения фазовой точки вне области Q на самом деле свидетельствует о том, что из точек вне Q вообще ни при каком допустимом управлении попасть в начало координат нельзя. Теорема 7.6 говорит о том, что задачу поиска оптимального управления имеет смысл решать только в области управляемости объекта.

Итак, из любого состояния $x^1 \in Q$ можно наискорейшим образом попасть в начало координат. Оптимальная траектория состоит из двух участков, на которых управление постоянно. Как и в предыдущей задаче, здесь можно записать синтезирующую функцию:

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in Q \text{ ниже } AOB \text{ или на } OA; \\ -1, & (x_1, x_2) \in Q \text{ выше } AOB \text{ или на } OB. \end{cases}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$

которое переводит фазовую точку из некоторого, заранее неизвестного, положения x^1 на r_1 -мерном многообразии M_1 ($r_1 < n$) в некоторое положение x^2 на r_2 -мерном многообразии M_2 ($r_2 < n$) и при этом придает функционалу

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(x, u) dt$$

минимальное значение.

Ранее рассмотренную задачу оптимального управления с *фиксированными концами* можно интерпретировать как частный случай этой задачи при $r_1 = r_2 = 0$, т. е. когда многообразия M_1 и M_2 вырождаются в точку. Возможен и промежуточный вариант, когда лишь одно из этих многообразий вырождается в точку, и тогда в задаче один конец фиксированный, а другой подвижный.

Как и в классическом вариационном исчислении, управление, оптимальное в задаче с подвижными концами, является оптимальным и в задаче с фиксированными концами. Поэтому принцип максимума (см. теоремы 7.1 и 7.2), рассмотренный нами для задачи с фиксированными концами, дает необходимые условия и в этой задаче, имеющей более общую постановку. Но отсутствие уравнений, указывающих начальное и конечное состояния, приводит к тому, что система необходимых условий перестает быть полной. Недостающие уравнения, как и в вариационном исчислении, получают из условий трансверсальности. Будем говорить, что вектор сопряженных переменных $\hat{\Psi}(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$, существование которого утверждается в принципе максимума, удовлетворяет *условию трансверсальности* на левом конце траектории $x(t)$, если вектор $\Psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \dots, \psi_n(t_1))$ ортогонален касательной плоскости к многообразию M_1 в точке $x(t_1)$, т. е.

$$(\Psi(t_1), z) = 0, \tag{7.53}$$

где z — произвольный вектор, лежащий в касательной плоскости.

Аналогично формулируется условие на правом конце.

Условие трансверсальности на левом конце равносильно ортогональности $\Psi(t_1)$ каждому из r_1 векторов базиса в касательной плоскости, т. е. дает r_1 уравнений. В совокупности с условием принадлежности точки $x(t_1)$ многообразию M_1 (это условие определяется $n - r_1$ уравнениями) мы имеем ровно n уравнений, как и в задаче с фиксированным левым концом. Аналогичная ситуация возникает и на правом конце.

Теорема 7.7. Если $(x^*(t), u^*(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, — оптимальный процесс в задаче с подвижными концами $x(t_1) \in M_1$, $x(t_2) \in M_2$, то ненулевая вектор-функция $\hat{\Psi}^*(t)$, существующая согласно теореме 7.1, удовлетворяет на каждом из концов траектории условиям трансверсальности. #

Замечание 7.3. В случае задачи оптимального быстрогодействия с подвижными концами в сформулированном утверждении ссылку на теорему 7.1 нужно заменить ссылкой на теорему 7.2.

Отметим частный случай задачи с подвижными концами, когда, например, правый конец траектории свободен (это означает, что $M_2 = \mathbb{R}^n$). Тогда условия трансверсальности сводятся к соотношению $\Psi(t_2) = (\psi_1(t_2), \dots, \psi_n(t_2)) = 0$. Полный вектор сопряженных переменных $\hat{\Psi}(t_2) = (\psi_0(t_2), \Psi(t_2))$ определяется с точностью до произвольной постоянной. Поэтому в данном случае можно полагать $\psi_0(t_2) = -1$ (согласно принципу максимума, $\psi_0 \leq 0$) и $\Psi(t_2) = (-1, 0, \dots, 0)$. Это облегчает применение принципа максимума, так как обеспечивает недостающее начальное условие для вектора сопряженных переменных. Как отмечено выше (см. 7.3), именно отсутствие краевых условий для сопряженных переменных — главная трудность в использовании принципа максимума. Как видим, в задачах с подвижными (и, в частности, со свободными) концами можно ожидать, что процедура решения будет более простой.

Пример 7.3. Вернемся к задаче о быстрейшей остановке движущейся точки в заданном месте (см. 7.5) и изменим ее постановку. Потребуем, чтобы точка не останавливалась в начале координат, а достигала его за наименьшее время. Значение скорости в конечный момент времени нас теперь не интересует.

В фазовых координатах $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ закон движения системы имеет вид (7.48)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Начальное состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ считаем заданным, а про конечное состояние $\mathbf{x}(t_2)$ известно лишь, что оно находится на оси Ox_2 , так как $x_1(t_2) = 0$. Пусть $|u| \leq 1$ — ограничение на управление.

Итак, поставлена задача с правым подвижным концом. Многообразие M_2 описывается уравнением $x_1 = 0$. Это одномерное многообразие, в каждой его точке касательное пространство одномерно, а любой касательный вектор в точке $(0, x_2)$ имеет вид $\mathbf{z} = (0, \zeta_2)$, $\zeta_2 \in \mathbb{R}$. Условие трансверсальности на правом конце можно записать следующим образом:

$$0 \cdot \psi_1(t_2) + \zeta_2 \psi_2(t_2) = 0,$$

откуда $\psi_2(t_2) = 0$. Функция $\hat{H}$ и сопряженная система имеют тот же вид, что и выше (см. 7.5). Поэтому функция $\psi_2(t)$ линейна. Из условия $\psi_2(t_2) = 0$ следует, что она на интервале (t_1, t_2) сохраняет знак. Значит, оптимальное управление $u^*(t) = \text{sign} \psi_2(t)$ не имеет *переключений* и постоянно в течение всего движения, т. е. или $u^*(t) \equiv 1$, или $u^*(t) \equiv -1$. Материальная точка движется по параболе семейства (7.50) в первом случае и по (7.51) — во втором.

Пусть точка $\mathbf{x}^1$ начального состояния находится в правой полуплоскости $x_1 > 0$. Через эту точку проходят две траектории, удовлетворяющие первому условию принципа максимума — по одной из каждого семейства траекторий. По параболе семейства (7.50) движение направлено снизу вверх. Если точка $\mathbf{x}^1$ расположена выше дуги OA параболы семейства (7.50), проходящей через начало координат (рис. 7.12), то по параболе семейства (7.50) точка не достигает оси Ox_2 , так что оптимальным может быть только движение по параболе семейства (7.51). Если же точка $\mathbf{x}^1$ расположена на дуге OA или ниже, то достичь оси Ox_2 можно по любой из двух парабол. Однако из этих двух траекторий только одна удовлетворяет второму условию принципа максимума. Покажем это. Для

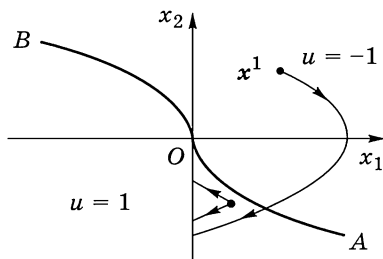


Рис. 7.12

задачи оптимального быстрогодействия второе условие принципа Понтрягина выглядит следующим образом:

$$\widehat{M}(\Psi^*(t_2), x^*(t_2)) \geq 0.$$

Учитывая, что в нашем случае

$$\widehat{M}(\Psi^*(t_2), x^*(t_2)) = \psi_1^*(t_2)x_2^*(t_2) + |\psi_2^*(t_2)|$$

и $\psi_2^*(t_2) = 0$, получаем $\psi_1^*(t_2)x_2^*(t_2) \geq 0$, или, согласно виду решения сопряженной системы ($\psi_1^* = C_1 = \text{const}$), $C_1 x_2^*(t_2) \geq 0$. Из построений следует (см. рис. 7.12), что в случае, когда начальная точка x^1 расположена в правой полуплоскости, выполняется неравенство $x_2^*(t_2) \leq 0$. Поэтому $C_1 \leq 0$. Равенство $C_1 = 0$ невозможно, так как тогда $\psi_2^* = C_2 = \text{const}$ и в силу условия $\psi_2^*(t_2) = 0$ решение Ψ является тривиальным. Остается случай $C_1 < 0$. Из решения сопряженной системы имеем $\psi_2^*(t) = C_2 - C_1 t$. Так как $C_1 < 0$ и $\psi_2^*(t_2) = C_2 - C_1 t_2 = 0$, то $\psi_2^*(t) \leq 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Следовательно, единственное допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума, имеет вид $u^*(t) = \text{sign} \psi_2^*(t) = -1$.

Таким образом, если x^1 находится правее оси Ox_2 , то оптимальным будет управление $u^*(t) \equiv -1$. Аналогично рассуждая, заключаем, что при начальном состоянии левее оси Ox_2 оптимальным будет управление $u^*(t) \equiv 1$. Конечно, рассмотренная задача элементарна и не имеет большого практического значения. Ответ в ней просматривается в содержательной постановке задачи: чтобы из пункта A попасть в пункт B за кратчайшее время, нужно двигаться с максимально возможным ускорением. Жми на педаль — и все!

Найденное решение позволяет определить *синтезирующую функцию*:

$$u(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{|x_1|} = \begin{cases} 1, & x_1 < 0; \\ -1, & x_1 > 0. \end{cases}$$

7.7. Неавтономные системы

В общем случае неавтономной системы правая часть закона движения и подынтегральная функция целевого функционала зависят явно от времени t , т. е. закон движения имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (7.54)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$, а целевой функционал записывается следующим образом:

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (7.55)$$

Как и выше, считаем, что функции $f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = (f^1, \dots, f^n)^T$ непрерывно дифференцируемы по части переменных $\mathbf{x}$. Также полагаем, что момент времени t_1 прохождения через точку начального состояния $\mathbf{x}^1$ известен, а момент времени t_2 прохождения через конечную точку $\mathbf{x}^2$ не задан и должен быть найден. Область управления U не зависит от времени.

Как и в случае систем ОДУ, поставленная задача может быть сведена к автономной задаче введением дополнительного переменного x_{n+1} . К закону движения добавим уравнение $\dot{x}_{n+1} = 1$, а к начальным условиям — соотношение $x_{n+1}(t_1) = t_1$. Эти два условия равносильны тождеству $x_{n+1}(t) \equiv t$. Теперь в расширенном составе фазовых переменных система (7.54) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f^1(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ \dot{x}_2 = f^2(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n+1} = f^{n+1}(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{cases} \quad (7.56)$$

а функционал $I[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ — вид

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \quad (7.57)$$

где $f^{n+1} \equiv 1$.

Мы преобразовали неавтономную n -мерную задачу в автономную, но с расширенным фазовым пространством. В новой задаче требуется найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $(t_1, x_1^1, \dots, x_n^1)$ расширенного фазового пространства с некоторой прямой, проходящей через точку $(0, x_1^2, \dots, x_n^2)$ параллельно оси Ox_{n+1} (конечное значение t_2 переменного x_{n+1} нам не известно). Таким образом, преобразованная задача — это задача с фиксированным левым и подвижным правым концами.

Если в задаче оптимального управления (7.54), (7.55), (7.2), (7.3) (в частности, в задаче (7.1)–(7.4)) известны и начальный момент времени t_1 , и конечный момент времени t_2 , то такую задачу называют *задачей с фиксированным временем*. Преобразование такой задачи введением дополнительного переменного приводит к задаче с фиксированными концами в следующей формулировке. Требуется найти управление $u(t)$, которое переводит фазовую точку системы (7.56) из положения $(t_1, x_1^1, \dots, x_n^1)$ в момент времени t_1 в положение $(t_2, x_1^2, \dots, x_n^2)$ в момент времени t_2 , причем функционал (7.57) принимает наименьшее значение. Мы можем не считать фиксированным момент времени t_2 попадания в точку (x^2, t_2) , так как в силу тождества $x_{n+1} \equiv t$ попадание в точку (x^2, t_2) может произойти только в момент времени t_2 . С учетом этого мы можем к данной задаче применить теорему 7.1. Согласно этой теореме, для получения необходимых условий экстремума функционала мы должны составить функцию Понтрягина

$$H^* = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x_{n+1}, x, u) + \psi_{n+1} = H + \psi_{n+1}, \quad (7.58)$$

где

$$H(t, \hat{\Psi}, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(t, x, u)$$

— прежнее выражение функции Понтрягина, не учитывающее дополнительную, $(n+1)$ -ю переменную, в котором за этой переменной оставлено старое обозначение t . Сопряженная система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, & i = \overline{0, n}; \\ \dot{\psi}_{n+1} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{cases} \quad (7.59)$$

Соотношения в условиях 1° и 2° теоремы 7.1 принимают вид

$$H(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u^*(t)) + \psi_{n+1}^*(t) = M(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t)) + \psi_{n+1}^*(t),$$

$$\psi_0^*(t_2) \leq 0, \quad M(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t)) + \psi_{n+1}^*(t) \equiv 0. \quad (7.60)$$

Сократим первое условие на $\psi_{n+1}^*(t)$:

$$H(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u^*(t)) = M(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t)). \quad (7.61)$$

Если бы функции $\psi_0^*(t), \psi_1^*(t), \dots, \psi_n^*(t)$ в некоторый момент времени t_0 обращались в нуль, то мы имели бы

$$H(t_0, \hat{\Psi}^*(t_0), x^*(t_0), u^*(t_0)) = 0,$$

откуда, согласно (7.60) и (7.61), $\psi_{n+1}^*(t_0) = 0$. Но тогда $\psi_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{0, n+1}$, как решение линейной системы дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. А это противоречит теореме 7.1. Таким образом, $\hat{\Psi}^*(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$ есть ненулевое решение системы (7.59). Это позволяет уменьшить размерность задачи и не рассматривать функцию ψ_{n+1} и второе из соотношений (7.60). Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 7.8. Пусть $(x^*(t), u^*(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, — оптимальный процесс для задачи с фиксированным временем. Тогда существует ненулевая вектор-функция $\hat{\Psi}^*(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$, соответствующая этому процессу, такая, что:

1° для любого $t \in [t_1, t_2]$ функция $H(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u)$ переменного u достигает при $u = u^*(t)$ максимума

$$H(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t), u) = M(t, \hat{\Psi}^*(t), x^*(t));$$

$$2^\circ \psi_0(t) \leq 0, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad \#$$

Как и выше, $\psi_0 = \text{const}$. Поэтому условие 2° теоремы достаточно проверить в какой-то одной точке отрезка.

Эта теорема в такой же степени позволяет решить задачу с фиксированным временем, в какой теорема 7.2 — *задачу со свободным временем*. Уменьшение количества условий на одно (отсутствует условие $M(t, \hat{\Psi}^*(t_2), x^*(t_2)) = 0$) компенсируется уменьшением количества неизвестных на одно (задан момент времени t_2).

Обратимся к случаю, когда при фиксированном моменте времени t_2 правый конец свободен. Это задача о том, как из данного положения x^1 за данное время $t_2 - t_1$ пройти по траек-

тории с произвольным конечным положением при минимуме данного функционала. Условия трансверсальности тогда имеют вид $\psi_1(t_2) = \psi_2(t_2) = \dots = \psi_n(t_2) = 0$. Следовательно, $\psi_0 \neq 0$, и мы можем принять $\psi_0 = -1$. Тогда при $t = t_2$ должно выполняться условие

$$\hat{\Psi}(t_2) = (-1, 0, \dots, 0). \quad (7.62)$$

Для рассматриваемого случая необходимое условие оптимальности состоит в том, что функция H достигает максимума при любом t на *оптимальном управлении* $u(t)$ и выполняется (7.62).

Отметим, что в задаче с фиксированным временем и свободным правым концом часто целевой функционал является не *интегральным*, а *смешанным*:

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x, u) dt + T[x(t_2)]. \quad (7.63)$$

В этом случае смешанный функционал необходимо преобразовать в интегральную форму (см. 4.5):

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} \left(f^0(t, x, u) dt + \frac{T[x(t_1)]}{t_2 - t_1} + \frac{d}{dt} T[x(t)] \right) dt. \quad (7.64)$$

Пример 7.4. Рассмотрим систему с законом движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u. \end{cases} \quad (7.65)$$

Пусть даны: ограничение на управление $-1/2 \leq u \leq 1$, начальное состояние $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$ в момент времени $t_1 = 0$, целевой функционал

$$I[x_1, x_2, u] = \int_0^{t_2} u dt + x_2(t_2), \quad (7.66)$$

где известно, что $t_2 = 2\pi$.

Поставленная задача — это задача с фиксированным временем и свободным правым концом, функционал в этой задаче смешанный. Преобразуем функционал в интегральный согласно (7.64):

$$I[x_1, x_2, u] = \int_0^{t_2} \left(u + \frac{x_2(0)}{t_2} + \frac{dx_2(t)}{dt} \right) dt. \quad (7.67)$$

Третье слагаемое в подынтегральной функции можно заметить, используя закон движения:

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2u.$$

С учетом краевых условий и заданного конечного времени $t_2 = 2\pi$ приходим к следующему виду целевого функционала:

$$I[x_1, x_2, u] = \int_0^{2\pi} \left(3u + \frac{1}{2\pi} - x_1 \right) dt = \int_0^{2\pi} (3u - x_1) dt + 1. \quad (7.68)$$

Появившееся постоянное слагаемое 1 никак не влияет на выбор оптимального решения, и его можно отбросить, заменив исходный функционал другим:

$$\tilde{I}[x_1, x_2, u] = \int_0^{2\pi} (3u - x_1) dt.$$

К данной задаче применима теорема 7.8. Запишем функцию Понтрягина:

$$\begin{aligned} H &= \psi_0(3u - x_1) + \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_1 + 2u) = \\ &= (-\psi_0 - \psi_2)x_1 + \psi_1 x_2 + (3\psi_0 + 2\psi_2)u. \end{aligned}$$

Эта функция является линейной по управлению u и поэтому достигает максимального значения либо при $u = -1/2$, либо при $u = 1$ в зависимости от знака выражения $3\psi_0 + 2\psi_2$, т. е.

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & 3\psi_0(t) + 2\psi_2(t) < 0; \\ 1, & 3\psi_0(t) + 2\psi_2(t) > 0. \end{cases} \quad (7.69)$$

Запишем систему для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = \psi_0 + \psi_2; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \quad (7.70)$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} \psi_0(t) = C_3; \\ \psi_1(t) = -C_1 \cos t + C_2 \sin t; \\ \psi_2(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t - C_3, \end{cases}$$

а учитывая краевые условия $\psi_0(2\pi) = -1$, $\psi_1(2\pi) = \psi_2(2\pi) = 0$ для сопряженных переменных на правом конце, находим $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, $C_3 = -1$, т. е.

$$\psi_0 = -1, \quad \psi_1 = -\sin t, \quad \psi_2 = 1 - \cos t.$$

Итак, $3\psi_0 + 2\psi_2 = -1 - 2\cos t$, и мы можем записать *экстремальное управление*, анализируя знаки функции $-1 - 2\cos t$ (рис. 7.13):

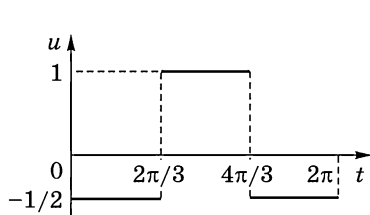


Рис. 7.13

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi; \\ 1, & \frac{2}{3}\pi < t \leq \frac{4}{3}\pi; \\ -\frac{1}{2}, & \frac{4}{3}\pi < t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (7.71)$$

Поскольку найдено лишь одно управление, удовлетворяющее принципу максимума, оно и будет оптимальным при условии, что оптимальное управление в данной задаче существует. Определим экстремальную траекторию, соответствующую найденному управлению. Для этого необходимо решить систему (7.65) при двух возможных значениях u . На промежутке $\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$ при $u = -1/2$ имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1, \end{cases} \quad (7.72)$$

решая которую, получим

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1, \quad x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \quad (7.73)$$

Из начальных условий $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$ определяем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . С учетом этих постоянных имеем

$$x_1(t) = \sin t - 1, \quad x_2(t) = \cos t. \quad (7.74)$$

Очевидно, что при движении по найденной траектории в момент времени $t = \frac{2}{3}\pi$ фазовая точка будет находиться в состоянии

$$x_1\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \quad x_2\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

На промежутке $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ оптимальная траектория определяется системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2, \quad x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \quad (7.75)$$

Подставляя в общее решение найденные значения x_1 , x_2 при $t = \frac{2}{3}\pi$, получим систему относительно неизвестных постоянных

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + 2, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2.$$

Решая эту систему, находим $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

на промежутке $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ оптимальной будет траектория

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{2} \cos t + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \sin t + 2; \\ x_2(t) = -\frac{3}{2} \sin t + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cos t. \end{cases} \quad (7.76)$$

На промежутке $\left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right]$ оптимальная траектория удовлетворяет той же системе (7.72), что и на первом участке, и, следовательно, имеет вид (7.73). Согласно (7.76), при $t = \frac{4}{3}\pi$ имеем

$$x_1\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{7 - \sqrt{3}}{2}, \quad x_2\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Как и выше, составляем систему относительно неизвестных постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} \frac{7-\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - 1; \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C_1 = 0$, $C_2 = 1 - 3\sqrt{3}$. Таким образом, последний участок траектории описывается системой

$$x_1(t) = (1 - 3\sqrt{3})\sin t - 1, \quad x_2(t) = (1 - 3\sqrt{3})\cos t. \quad (7.77)$$

Из соотношений (7.74), (7.76), (7.77) следует, что оптимальная траектория состоит из дуг трех окружностей (рис. 7.14).

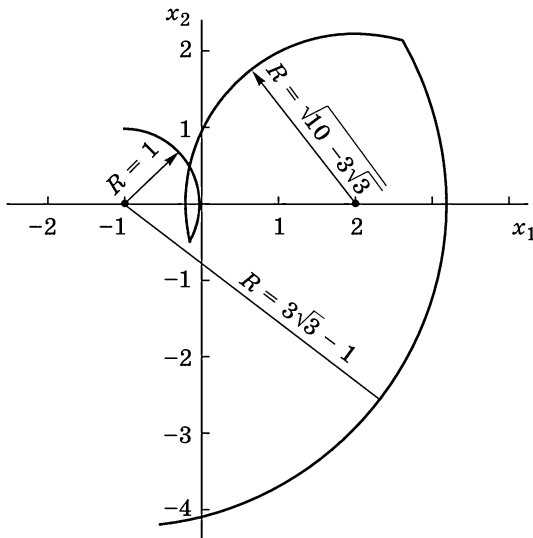


Рис. 7.14

На первом участке $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ оптимальная фазовая кривая описывается уравнением

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1,$$

на втором участке $\frac{2}{3}\pi < t \leq \frac{4}{3}\pi$ — уравнением

$$(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 10 - 3\sqrt{3},$$

на третьем участке $\frac{4}{3}\pi < t \leq 2\pi$ — уравнением

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = (1 - 3\sqrt{3})^2.$$

Движение по дугам фазовой кривой осуществляется согласно направлению вектора фазовой скорости, т. е. по часовой стрелке.

7.8. Понятие особого управления

Принцип максимума Понтрягина не позволяет однозначно выделить оптимальное управление, если максимум функции Понтрягина H по управлению достигается более чем в одной точке на целом промежутке времени. В большинстве случаев подобная ситуация говорит о наличии особых управлений.

На практике нередко встречаются задачи оптимального управления, в которых функция Понтрягина линейно зависит от всех управлений или хотя бы от некоторых из них. Таковы, например, линейные задачи оптимального быстрогодействия. В примерах линейных задач, рассмотренных выше (см. 7.5), коэффициент при управлении зависел только от решения сопряженной системы и мог обращаться в нуль лишь в изолированные моменты времени. Благодаря этому оптимальное управление однозначно определялось из условия максимума функции Понтрягина. Эта ситуация типична для линейных задач оптимального управления.

Однако в нелинейных задачах оптимального управления (например, если функция Понтрягина является нелинейной по одной или нескольким фазовым переменным) возможна ситуация, когда на оптимальной траектории коэффициент при одной из компонент вектора управления u обращается в нуль на целом промежутке времени, и тогда условие максимума функции H по управлению не позволяет однозначно определить оптимальное управление.

Пример 7.5. Рассмотрим задачу оптимального управления с законом движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (7.78)$$

целевым функционалом

$$I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} (x_2)^2 dt,$$

краевыми условиями

$$x_1(t_1) = x_1^1, \quad x_2(t_1) = x_2^1, \quad x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0 \quad (7.79)$$

и ограничением на управление $|u| \leq 1$. Начальный момент времени t_1 считаем фиксированным.

Поставленная задача отличается от рассмотренной в 7.5 лишь целевым функционалом. Посмотрим, к чему это приводит. Составляем функцию Понтрягина

$$H = \psi_0(x_2)^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$$

и записываем сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -2\psi_0 x_2 - \psi_1. \end{cases} \quad (7.80)$$

В каждой точке t , в которой $\psi_2(t) \neq 0$, функция Понтрягина имеет по управлению единственную точку максимума, и в этом случае $u^*(t) = \sin \psi_2(t)$, т. е. ситуация здесь такая же, как и в задаче оптимального быстрогодействия (см. 7.5). Значит, на интервалах времени, на которых $\psi_2(t) \neq 0$, оптимальные фазовые кривые являются дугами парабол вида (7.50) или (7.51). Однако возможна ситуация, когда $\psi_2(t) = 0$ на некотором отрезке $[t', t''] \subset [t_1, t_2]$. Покажем это.

Из первых двух уравнений системы (7.80) имеем $\psi_0(t) = C_0 = \text{const}$, $\psi_1(t) = C_1 = \text{const}$. Подставляем найденные функции в третье уравнение:

$$\dot{\psi}_2 = -C_1 - 2C_0 x_2. \quad (7.81)$$

Предположим, что принципу максимума удовлетворяет траектория $x^*(t)$, на которой $x_2(t') = 0$ для некоторого момента

времени $t' \in [t_1, t_2]$. Такую траекторию можно построить из дуг парабол семейств (7.50) и (7.51). Если этой траектории соответствует вектор сопряженных переменных $\Psi(t')$ с $\psi_1(t') = C_1 = 0$ и $\psi_2(t') = 0$, то в точке t' выполнены соотношения [VIII]:

$$\dot{\psi}_2(t') = 0, \quad \psi_2(t') = 0.$$

Это и может означать существование отрезка $[t', t'']$, на котором $\psi_2(t) = 0$. #

Ситуация, представленная в примере, получила название *особого режима*. Опишем ее в общем случае.

Рассмотрим автономную задачу оптимального управления (7.1)–(7.4), в которой функция Понтрягина H линейна по части компонент управляющего вектора. Выделим из этих компонент группу из r_1 управлений и обозначим ее через u , а остальные $r_2 = r - r_1$ управлений соберем в вектор v , он может включать и часть управлений, по которым функция H линейна. Удобство такого разделения управлений будет видно ниже при формулировании определений. При таких обозначениях закон движения системы можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = f(x, u, v),$$

а функцию Понтрягина — в виде

$$H(\hat{\Psi}, x, u, v) = \sum_{i=1}^{r_1} a_i(\hat{\Psi}, x, v) u_i + a_0(\hat{\Psi}, x, v).$$

Так как

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = a_i(\hat{\Psi}, x, v), \quad i = \overline{1, r_1}, \quad (7.82)$$

то, вводя обозначение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_{r_1}} \right),$$

запишем функцию H в виде

$$H = \frac{\partial H}{\partial u} u + a_0.$$

Предположим, что область управления задачи есть декартово произведение $U \times V$, где $U \subset \mathbb{R}^{r_1}$ — область допустимых значений вектора u , а $V \subset \mathbb{R}^{r_2}$ — область допустимых значений вектора v .

Пусть процесс $(x(t), u(t), v(t))$ совместно с решением $\hat{\Psi}(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$ сопряженной системы

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (7.83)$$

удовлетворяет принципу максимума и при этом во всех точках некоторого промежутка $[t', t''] \subset [t_1, t_2]$ выполняется равенство

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\hat{\Psi}(t), x(t), v(t)) = 0, \quad (7.84)$$

или, учитывая (7.82),

$$a(\hat{\Psi}(t), x(t), v(t)) = 0, \quad (7.85)$$

где $a = (a_1, \dots, a_{r_1})$. В этом случае вектор управлений $u(t)$ называют *особым управлением* в промежутке $[t', t'']$, процесс $(x(t), u(t), v(t))$ — *особым режимом*, траекторию $x(t)$ — траекторией особого режима, а промежуток времени $[t', t'']$ — *участком особого управления (режима)*.

Из формулы (7.85) вытекает, что на участке особого режима

$$H(\hat{\Psi}(t), x(t), u, v) = H(\hat{\Psi}(t), x(t), v),$$

т. е. функция Понтрягина не зависит от u и условие максимума по u не дает никакой информации о конкретных значениях управлений в этом векторе.

Поскольку на участке особого режима верно тождество (7.84), то $\frac{\partial H}{\partial u}$ как вектор-функция времени тождественно равна нулю, а потому равна нулю и ее производная по времени. Значит, вектор-функции $\hat{\Psi}(t), x(t), u(t)$ могут принимать только такие значения, которые удовлетворяют соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad (7.86)$$

в котором производная по времени есть полная производная в силу систем (7.1) и (7.83). Если левая часть этого равенства не зависит от u , то для определения особого управления можно взять следующую производную и приравнять нулю:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0,$$

и т. д. Эти соотношения совместно с условием (7.84) позволяют выделить все особые режимы.

Пример 7.6. Продолжим обсуждение задачи из примера 7.5 и найдем в этой задаче особые режимы. Так как

$$H(\hat{\Psi}, x, u) = \psi_0 x_2^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u,$$

то $\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2$, и производные по времени этой функции в силу систем (7.78) и (7.80) равны

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -\psi_1 - 2\psi_0 x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -2\psi_0 u.$$

Поэтому на участке особого режима должны выполняться равенства

$$\psi_2(t) = 0, \quad -\psi_1(t) - 2\psi_0(t)x_2(t) = 0, \quad -2\psi_0(t)u(t) = 0,$$

или с учетом $\psi_0(t) \equiv C_0$, $\psi_1(t) \equiv C_1$, что следует из сопряженной системы,

$$\psi_2(t) = 0, \quad C_1 + 2C_0 x_2(t) = 0, \quad u(t) = 0. \quad (7.87)$$

Согласно условию 2° теоремы 7.1,

$$\max_{|u| \leq 1} H(\hat{\Psi}(t), x(t), u) = M(\hat{\Psi}(t), x(t)) = 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Значит, на участке особого режима выполняется равенство

$$\psi_0(t)x_2^2(t) + \psi_1(t)x_2(t) = 0,$$

или с учетом $\psi_0(t) \equiv C_0$, $\psi_1(t) \equiv C_1$

$$C_0 x_2^2(t) + C_1 x_2(t) = 0. \quad (7.88)$$

Из условия $\hat{\Psi}(t) \neq 0$ следует, что C_0 и C_1 одновременно не обращаются в нуль. Тогда, согласно (7.87) и (7.88), на участке особого режима

$$C_1 = 0, \quad x_2(t) \equiv 0. \quad (7.89)$$

Из системы (7.78) вытекает, что $\dot{x}_1(t) \equiv 0$. Поэтому $x_1(t) = \text{const}$, $t \in [t', t'']$.

Итак, на участке особого управления обе фазовые координаты остаются постоянными. Фазовая точка на таком участке, попадая на ось Ox_1 , остается на этой оси неподвижной на весь период особого режима. Фазовой траектории особого режима соответствует единственная точка на указанной оси. Обратим внимание, что такое «стояние» в точке оси не влияет на значение целевого функционала, так как в течение всего времени особого режима подынтегральная функция x_2^2 целевого функционала равна нулю.

Теперь мы можем полностью описать все допустимые процессы, удовлетворяющие принципу максимума. Оптимальное управление может принимать лишь значения 1 и -1 на обычных (не особых) участках, а также значение 0 на участке особого режима. Если, двигаясь по оптимальной траектории, мы достигнем оси Ox_1 (тогда $x_2 = 0$), то в достигнутой точке можем устроить стоянку, причем любой длительности, так как участок особого режима может быть произвольным. Эта стоянка и ее длительность не отразятся на значении целевого функционала. Для описанного процесса существует ненулевой сопряженный вектор $\hat{\Psi}(t)$, удовлетворяющий принципу максимума.

Выясним, сколько нулей может иметь функция $\psi_2(t)$, для чего используем второе соотношение в условии 2° теоремы 7.1. Согласно этому соотношению, $\psi_0 \leq 0$ и, значит, $C_0 \leq 0$. Из равенств

$$\dot{x}_2 = u = \text{sign } \psi_2(t), \quad \dot{\psi}_2 = -C_1 - 2C_0 x_2$$

вытекает, что

$$\ddot{\psi}_2 + 2C_0 \text{sign } \psi_2 = 0. \quad (7.90)$$

Покажем, что при $C_0 \leq 0$ решение такого уравнения может менять знак при $t \in [t_1, t_2]$ не более одного раза. Предположим,

что $\psi_2(t)$ обращается в нуль в точках t', t'' . Умножим уравнение (7.90) на $\psi_2(t)$, учтем, что

$$\psi_2 \ddot{\psi}_2 = \frac{d}{dt}(\psi_2 \dot{\psi}_2) - (\dot{\psi}_2)^2,$$

и проинтегрируем уравнение (7.90) на отрезке $[t', t'']$:

$$-\int_{t'}^{t''} (\dot{\psi}_2)^2 dt + 2C_0 \int_{t'}^{t''} |\psi_2(t)| dt = 0. \quad (7.91)$$

При $C_0 \leq 0$ в левой части полученного равенства — сумма двух неположительных слагаемых. Поэтому равенство верно, когда каждое из этих слагаемых равно нулю, и мы приходим к выводу, что $\psi_2(t) = 0$ на всем отрезке $[t', t'']$.

Итак, функция $\psi_2(t)$ обращается в нуль либо в единственной изолированной точке, либо на одном отрезке $[t', t'']$. Так как $u^*(t) = \text{sign} \psi_2(t)$, то управление $u^*(t)$ имеет не более одной перемены знака. Такое управление относится к одному из двух следующих типов:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t_1 < t < t'; \\ 0, & t' < t < t''; \\ -1, & t'' < t < t_2, \end{cases}$$

или

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t_1 < t < t'; \\ 0, & t' < t < t''; \\ 1, & t'' < t < t_2. \end{cases}$$

Значение t' соответствует моменту времени, когда $x_2(t)$ обращается в нуль, а значение t'' — любое на отрезке $[t', t_2]$.

Теперь уже не составляет труда найти оптимальное управление и оптимальные траектории для конкретных начальных условий (x_1^1, x_2^1) . Наличие участка особого управления не изменит вид фазовых кривых, так как на таком участке фазовая точка не перемещается, а стоит на месте. Фазовые кривые будут те же, что и на рис. 7.9 (см. 7.5). Но оптимальным фазовым кривым, пересекающим ось Ox_1 , соответствует бесконечно много оптимальных процессов, каждый из которых

получается «вклеиванием» участка особого управления в момент достижения указанной оси. Длина участка может быть произвольной. Такое «вклеивание» не меняет значение целевого функционала. Существование особого режима приводит к тому, что рассматриваемая задача при некоторых краевых условиях имеет бесконечно много решений.

Понятие особого управления впервые ввел Л.И. Розоноэр*, и это послужило началом целого направления в теории оптимального управления.

Вопросы и задачи

7.1. Решите следующие задачи оптимального быстродействия:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0, \quad x_1(t_2) = -1, \quad x_2(t_2) = 0,$$

$$|u| \leq 1;$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0, \quad x_1(t_2) = -2, \quad x_2(t_2) = 0,$$

$$|u| \leq 2;$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 4, \quad x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0;$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases} \quad x_1(t_1) = x_2(t_1) = 2, \quad x_1(t_2) = 6, \quad x_2(t_2) = -2,$$

$$|u_1| \leq 2, \quad |u_2| \leq 2;$$

$$\text{д) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases} \quad x_1(t_1) = -2, \quad x_2(t_1) = 2, \quad x_1(t_2) = 2,$$

$$x_2(t_2) = -10, \quad |u_1| \leq 2, \quad |u_2| \leq 2.$$

* См.: Розоноэр Л.И. (1959 г.), а также: Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.

7.2. Решите задачу оптимального быстрогодействия с правым подвижным концом

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(t_1) = 4, \quad x_2(t_1) = -3,$$

$$[x_1(t_2)]^2 + [x_2(t_2)]^2 = 4, \quad |u| \leq 1.$$

7.3. Решите следующие задачи оптимального управления с фиксированным временем:

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} x \sin t \, dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(\pi) = x(-\pi) = 0, \quad |u| \leq 1;$$

$$\text{б) } \int_0^4 (u^2 + x) \, dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(4) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

7.4. С помощью принципа максимума запишите полную систему необходимых условий в следующих задачах оптимального управления ($x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, T$ заданы):

$$\text{а) } \int_0^T u \, dt + [x_2(T)]^2 \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u, \end{cases} \quad x_1(0) = x_1^1,$$

$$x_2(0) = x_2^1, \quad |u| \leq 1;$$

$$\text{б) } \int_0^T u \, dt + [x_1(0)]^2 \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(T) = x_1^2,$$

$$x_2(T) = x_2^2, \quad |u| \leq 1.$$

7.5. Исследуйте на наличие особого режима задачу оптимального управления (x_1^1, x_2^1, t_2 заданы):

$$\int_0^{t_2} (x_1)^2 \, dt \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = -u, \end{cases} \quad x_1(0) = x_1^1, \quad x_2(0) = x_2^1,$$

$$x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

7.6. В задаче о быстрой остановке движущейся точки в заданном месте вычислите минимальное время движения из произвольной точки $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)^T$ в начало координат $\mathbf{x}^2 = (0, 0)^T$.

7.7. Найдите оптимальное управление $u^*(t)$, оптимальную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$ и время T в задаче

$$\int_0^T (1 + |u|) dt \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x_1(0) = 12,$$

$$x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

7.8. Найдите оптимальное управление $u^*(t)$ и оптимальную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$ в следующих задачах оптимального управления:

$$\text{а) } \int_0^1 x_1 dt \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x_1(0) + x_1(1) = 0,$$

$$x_2(0) + x_2(1) = 0, \quad |u| \leq 2;$$

$$\text{б) } x_2(\pi) \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \leq 1,$$

$$t \in [0, 2\pi].$$

8. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одновременно с принципом максимума Понтрягина и независимо от него в теории оптимального управления коллективом американских ученых во главе с Р. Беллманом был разработан *метод динамического программирования*. Этот метод более универсален, чем метод, использующий принцип максимума. Он был разработан для нужд оптимального управления процессами более общего характера, чем процессы, описываемые системами дифференциальных уравнений, и позволяет решать большой круг задач оптимального управления дискретными системами, т. е. системами, которые описываются разностными уравнениями. В этой главе мы обсудим основные идеи динамического программирования.

8.1. Принцип оптимальности

В основе метода динамического программирования лежит сформулированный Р. Беллманом *принцип оптимальности*. Этот принцип верен для тех систем, последующее движение которых полностью определяется их состоянием в текущий момент времени. К таким системам относятся, например, управляемые системы, т. е. системы, которые описываются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (8.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $f = (f_1, \dots, f_n)^T$; $u = (u_1, \dots, u_r)^T$.

Состояние такой системы описывается точкой x фазового пространства, а движение — это некоторая траектория $x(t)$ в фазовом пространстве (фазовая траектория). Принцип опти-

мальности также распространяется на дискретные системы, которые описываются конечно-разностными уравнениями. В таких системах роль времени играет дискретный параметр.

Принцип оптимальности отражает важнейшие особенности задач оптимального управления. Его суть можно объяснять по-разному. Ввиду его важности приведем несколько формулировок.

Первая формулировка. Если управление оптимально, то, каковы бы ни были первоначальное состояние системы и управление системой в начальный момент времени, последующее управление оптимально относительно состояния, которое система примет в результате начального управления.

Указанное свойство — одно из основных для процессов марковского типа, т. е. процессов, будущее поведение которых полностью определяется состоянием и управлением в настоящее время.

Вторая формулировка. Оптимальное управление в любой момент времени не зависит от предыстории системы и определяется только состоянием системы в этот момент и целью управления.

Под целью управления в данном случае понимается требование, которому должна удовлетворять система, такая, что ее движение определяется управлением. Это может быть приведение системы в заданное состояние или обеспечение определенных условий движения в течение заданного периода времени.

Еще один вариант принципа оптимальности дадим для задачи оптимального управления с фиксированным временем и свободным правым концом. Пусть закон движения описывается автономной системой дифференциальных уравнений (8.1), причем заданы начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени, а также начальное состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$. Целевой функционал определим следующим образом:

$$I[\mathbf{x}, u] = \int_{t_1}^{t_2} f^0(\mathbf{x}, u) dt. \quad (8.2)$$

Третья формулировка. Начиная с любого момента времени $t' \in [t_1, t_2]$ участок оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, от точки $\mathbf{x}^*(t')$ до точки $\mathbf{x}^*(t_2)$ также является оптимальной траекторией (рис. 8.1).

Другими словами, каково бы ни было положение точки $x^*(t')$ на оптимальной фазовой траектории, ее участок от точки $x^*(t')$ (участок 2 на рис. 8.1) тоже является оптимальной траекторией. Что же касается участка 1 оптимальной траектории до точки $x^*(t')$, то можно утверждать, что этот участ-

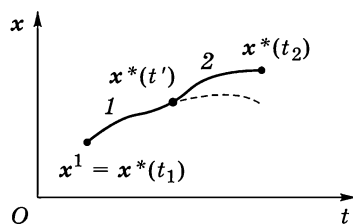


Рис. 8.1

ток есть оптимальная траектория, когда точка $x^*(t') = x'$ является фиксированной (как, например, в *многоточечных задачах управления*), т. е. когда по условию задачи допустимая траектория обязательно должна проходить через точку x' . Если же задана только начальная точка $x^*(t_1) = x^1$, то участок 1 оптимальной траектории сам по себе может и не быть оптимальной траекторией, т. е. может не доставлять максимум функционалу

$$J_1[x, u] = \int_{t_1}^{t'} f^0(x, u) dt$$

в задаче со свободным правым концом.

Таким образом, важно иметь в виду, что принцип оптимальности относится к последующему за данным состоянием движению системы, но может нарушаться для движения, предшествующего данному состоянию.

Принцип оптимальности в третьей формулировке для некоторого класса задач уже обсуждался в качестве свойства оптимальных траекторий (см. 7.1). Отметим еще одну особенность оптимального управления, вытекающую из принципа оптимальности: выбор оптимального управления определяется лишь состоянием системы в текущий момент времени. Если в какой-то период времени управление было неоптимальным, то последствия этого в будущем исправить уже нельзя.

Пример 8.1. Рассмотрим простейший вариант дискретной задачи распределения ресурсов и покажем, как можно использовать принцип оптимальности. Производственно-экономический процесс состоит в следующем. Некоторая начальная сумма денег $s = x_1$ затрачивается на приобретение оборудова-

ния двух типов A и B , с помощью которого организуется производство. Пусть на оборудование типа A выделена сумма u_1 , $0 \leq u_1 \leq x_1$, тогда за определенное время его эксплуатации будет получен экономический эффект $g(u_1)$. Оставшаяся сумма $x_1 - u_1$ будет израсходована на приобретение оборудования типа B , которое за тот же период времени даст экономический эффект $h(x_1 - u_1)$. К концу срока эксплуатации суммарный экономический эффект составит

$$R_1(x_1, u_1) = g(u_1) + h(x_1 - u_1).$$

По истечении срока эксплуатации оборудование реализуют, за оборудование типа A выручат сумму au_1 , $0 < a < 1$, а за оборудование типа B — сумму $b(x_1 - u_1)$, $0 < b < 1$. Этим завершится первый цикл производства. Вырученную от продажи оборудования сумму

$$x_2 = au_1 + b(x_1 - u_1)$$

используют как стартовую для организации второго цикла производства. Из нее на оборудование типа A выделяют сумму u_2 , $0 \leq u_2 \leq x_2$, а на оставшуюся сумму $x_2 - u_2$ приобретут оборудование типа B . Следующий цикл эксплуатации оборудования даст экономический эффект $g(u_2) + h(x_2 - u_2)$ и остаточную сумму $x_3 = au_2 + b(x_2 - u_2)$ за проданное оборудование. Описанный цикл производства многократно повторяется.

Считая известными функции $g(\xi)$, $h(\xi)$ и постоянные s , a , b , найдем такую стратегию распределения средств при покупке оборудования типов A и B , чтобы обеспечить наибольший экономический эффект за фиксированное количество n производственных циклов. Другими словами, надо так выбрать значения $u_1, \dots, u_n$ в допустимых пределах, чтобы получить максимум величины

$$R_n(s, u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n (g(u_k) + h(x_k - u_k)), \quad (8.3)$$

где $x_1 = s$, $x_{m+1} = au_m + b(x_m - u_m)$, $0 \leq u_m \leq x_m$, $m = \overline{1, n}$.

Мы пришли к дискретной задаче оптимального управления. Параметры $u_1, u_2, \dots, u_n$, которые нужно определить, решая задачу, есть управление, неравенства $0 \leq u_m \leq x_m$, $m = \overline{1, n}$, описывают область допустимого управления, а сум-

марная величина (8.3) есть целевой функционал. Отметим, что для планирования процесса на k -м цикле необходимо знать лишь величину x_k и число $n - k$ оставшихся циклов. Процесс планирования в предыдущие циклы никак не влияет на планирование в текущем цикле, т. е. «история» процесса не важна. Основным интерес в этой задаче представляет не значение максимального экономического эффекта, а процедура его достижения, или, другими словами, оптимальная стратегия распределения средств.

Принцип оптимальности предполагает использование хорошо известного приема, состоящего в планировании от конца к началу. Рассматривая последний n -й цикл, найдем значение оптимального управления u_n как функцию состояния процесса на начало данного цикла, что позволит распределять средства на этом цикле в зависимости от их количества x_n . Затем, используя оптимум последнего цикла, найдем оптимальную стратегию на двух последних циклах как функцию состояния процесса на начало предпоследнего цикла. Для этого достаточно найти u_{n-1} как функцию x_{n-1} . Процедуру повторяем для трех последних циклов, четырех и так далее до тех пор, пока не охватим все циклы. На последнем шаге, найдя u_1 как функцию x_1 и зная фактическое значение $x_1 = s$, мы сможем вычислить всю серию значений $u_1, u_2, \dots, u_n$, т. е. определить оптимальную стратегию.

Итак, на n -м цикле в зависимости от x_n максимальный экономический эффект равен:

$$r_n(x_n) = \max_{0 \leq u_n \leq x_n} (g(u_n) + h(x_n - u_n)),$$

а значение $u_n^*(x_n)$, на котором достигается этот максимум, является искомым оптимальным значением в зависимости от x_n . Считая, что на последнем цикле $u_n = u_n^*(x_n)$ и достигаемый экономический эффект равен $r_n(x_n)$, ищем максимум:

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_{n-1}) &= \max_{0 \leq u_{n-1} \leq x_{n-1}} [g(u_{n-1}) + h(x_{n-1} - u_{n-1}) + r_n(x_n)] = \\ &= \max_{0 \leq u_{n-1} \leq x_{n-1}} [g(u_{n-1}) + h(x_{n-1} - u_{n-1}) + r_n(au_{n-1} + b(x_{n-1} - u_{n-1}))]. \end{aligned}$$

Найденный максимум $r_{n-1}(x_{n-1})$ и соответствующее значение u_{n-1}^* , при котором он достигается, позволяют перейти к следующему этапу.

Продолжая продвигаться к началу процесса, мы на k -м этапе ищем максимальный экономический эффект $r_m(x_m)$, $m = n - k + 1$, за последние k производственных циклов в зависимости от средств x_m на начало m -го цикла по формуле

$$r_m(x_m) = \max_{0 \leq u_m \leq x_m} \left[g(u_m) + h(x_m - u_m) + r_{m+1}(au_m + b(x_m - u_m)) \right], \quad m = n - k + 1, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) — это *рекуррентное соотношение Беллмана* для рассматриваемой задачи. Оно сводит задачу оптимизации на k последних циклах к оптимизации на первом из них с учетом уже найденной оптимизации на $k - 1$ последних циклах. Величина $r_1(x_1)$ представляет собой суммарный экономический эффект за все n производственных циклов в зависимости от стартового значения x_1 . Задача отыскания максимума функции n переменных с очень сложной зависимостью свелась к n последовательным задачам поиска максимума функции одного переменного.

Изложенный метод решения дискретных задач оптимального управления можно использовать в непрерывных задачах оптимального управления, но для этого непрерывную задачу нужно заменить близкой ей дискретной задачей (эту замену называют дискретизацией исходной задачи). Пусть система имеет закон движения

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (8.5)$$

и задано начальное состояние $x(0) = x^0$ системы. Для управления $u(t)$ (как и выше, это кусочно-непрерывная функция) введем ограничение $|u| \leq 1$. Время движения $T = t_2 - t_1$ считаем фиксированным. Так как система автономна, можно принять, что $t_1 = 0$. В качестве целевого функционала возьмем

$$I[x, u] = \int_0^T f^0(x, u) dt. \quad (8.6)$$

Для замены поставленной непрерывной задачи оптимального управления близкой ей дискретной выберем некоторое натуральное число N и разобьем отрезок $[0, T]$ на N участков одинаковой длины $\delta = T/N$. Будем искать значения функций лишь в дискретные моменты времени $t = k\delta$, $k = \overline{0, N}$. Вместо

$x(k\delta)$ и $u(k\delta)$ будем писать x_k и u_k соответственно. Дифференциальное уравнение (8.5) заменим разностным, аппроксимируя первую производную в дискретные моменты времени согласно формуле

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta}.$$

В результате получим

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k)\delta, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (8.7)$$

Заменим также целевой функционал (8.6) интегрального типа соответствующей интегральной суммой

$$I(x^0, \dots, x_{N-1}, u_0, \dots, u_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} f^0(x_k, u_k)\delta. \quad (8.8)$$

Итак, мы пришли к дискретной задаче, в которой нужно найти такое управление $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, которое удовлетворяет ограничению $|u_k| \leq 1$, $k = \overline{0, N-1}$, и минимизирует функционал (8.8) при начальном условии $x_0 = x^0$. Эта задача тем лучше аппроксимирует исходную задачу (8.5), (8.6), чем больше число N .

Так как функционал (8.8) рассматривается только при значениях x_k и u_k , удовлетворяющих закону движения (8.7), мы можем опустить в его аргументах $x_1, \dots, x_{N-1}$, т. е. будем писать $I(x^0, u_0, \dots, u_{N-1})$. Положим, что

$$I_{N-m}(x_{N-m}, \dots, u_{N-m}, \dots, u_{N-1}) = \sum_{k=N-m}^{N-1} f^0(x_k, u_k)\delta, \quad m = \overline{1, N},$$

где $x_{N-m+1}, \dots, x_{N-1}$ определяются согласно рекуррентным формулам (8.7).

Другими словами, I_{N-m} — это часть интегральной суммы в представлении целевого функционала (8.8), относящаяся к моментам времени $t = k\delta$, $k = \overline{N-m, N-1}$, и вычисленная в зависимости от состояния x_{N-m} системы в момент времени $t = (N-m)\delta$.

Обозначим

$$\mu_{N-m}(x_{N-m}) = \min_{|u_{N-m}| \leq 1} I_{N-m}(x_{N-m}, u_{N-m}, \dots, u_{N-1}).$$

Применим описанный выше прием оптимизации от конца к началу в рассматриваемой дискретной задаче. Согласно принципу оптимальности, управляющее воздействие u_{N-1}^* должно быть выбрано так, что

$$\mu_{N-1}(x_{N-1}) = I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}^*) = \min_{|u_{N-1}| \leq 1} I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}).$$

Для простоты считаем, что указанный минимум достигается в единственной точке и значение u_{N-1}^* определено однозначно, т. е. тем самым определена функция $u_{N-1}^*(x_{N-1})$.

На следующем этапе рассматриваем оптимизацию I_{N-2} , захватывая два отрезка времени от $(N-2)\delta$ до $N\delta$. Так как

$$I_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1}) = f^0(x_{N-2}, u_{N-2})\delta + I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}),$$

задача сводится к определению u_{N-2}^* , для которого

$$\begin{aligned} \mu_{N-2}(x_{N-2}) &= I_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}^*, u_{N-1}^*) = \\ &= \min_{|u_{N-2}| \leq 1} \left[f^0(x_{N-2}, u_{N-2})\delta + I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}^*) \right], \end{aligned}$$

где x_{N-1} выражается через x_{N-2} и u_{N-2} согласно закону движения (8.7) при $k = N-2$, а $u_{N-1}^* = u_{N-1}^*(x_{N-1})$.

Тем самым найдено оптимальное управление на двух последних отрезках времени в зависимости от того, какое состояние x_{N-2} получит система на момент времени $(N-2)\delta$.

Повторяем процедуру, последовательно добавляя частичные отрезки времени. На k -м этапе нам необходимо определить оптимальное управление u_{N-k}^* из условия

$$\begin{aligned} \mu_{N-k}(x_{N-k}) &= I_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}^*, u_{N-k+1}^*, \dots, u_{N-1}^*) = \\ &= \min_{|u_{N-k}| \leq 1} \left[f^0(x_{N-k}, u_{N-k}) + \right. \\ &\quad \left. + I_{N-k+1}(x_{N-k+1}, u_{N-k+1}^*, \dots, u_{N-1}^*) \right], \quad k = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где значение x_{N-k+1} выражается через x_{N-k} и u_{N-k} , согласно (8.7), следующим образом:

$$u_{N-k+1} = x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k})\delta.$$

Определив на последнем этапе $\mu_0(x_0)$ и управление u_0^* , можно по известному начальному состоянию $x_0 = x^0$ найти последовательно $x_1, u_1^*, \dots, x_{N-1}, u_{N-1}^*$. Значение $\mu_0(x^0)$ минимизирует функционал (8.8). Соотношения (8.9) представляют собой *рекуррентные соотношения Беллмана* для данной задачи.

Приведенный алгоритм решения задачи оптимального управления (алгоритм динамического программирования) можно перенести на общий случай задачи оптимального управления с векторным законом движения (8.1). При этом на каждом шаге нужно будет искать минимум функции r переменных, зависящей от r -мерного вектора управления. Это приводит к существенному возрастанию объема обрабатываемой информации. Р. Беллман* предложил некоторые способы преодоления подобных трудностей.

8.2. Уравнение Беллмана

Хотя метод динамического программирования ориентирован на решение дискретных задач оптимального управления, его идею, которая на основе принципа оптимальности дает рекуррентные соотношения, можно использовать при изучении непрерывных задач. Непрерывные задачи также подчиняются принципу оптимальности. Поэтому для них можно получить уравнение, аналогичное рекуррентным соотношениям Беллмана.

Пусть система имеет закон движения (8.1), критерий оптимальности задается целевым функционалом

$$I[x, u] = \int_0^T f^0(x, u) dt, \quad (8.10)$$

где $f^0(x, u)$ — непрерывная функция по совокупности аргументов, а начальное состояние равно:

$$x(0) = x^0. \quad (8.11)$$

Время движения T известно, а конечное состояние $x(T)$ — нет. Мы имеем задачу с фиксированным временем и свободным правым концом.

* См.: Беллман Р., Дрейфус С.

Пусть $\mathbf{x}^*(t)$, $t \in [0, T]$, — *оптимальная траектория*, соответствующая *оптимальному управлению* $\mathbf{u}^*(t)$. Выберем некоторый момент времени $\tau \in [0, T]$ и соответствующую точку $\xi = \mathbf{x}^*(\tau)$ на оптимальной траектории. Согласно принципу оптимальности, участок траектории $\mathbf{x}^*(t)$ от точки ξ до точки $\mathbf{x}^*(T)$ является оптимальной траекторией. Это значит, что данный участок доставляет наименьшее значение функционалу

$$I_\tau[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{\tau}^T f^0(x, u) dt$$

среди всех допустимых процессов $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ на отрезке времени $[\tau, T]$ с начальным состоянием $\mathbf{x}(\tau) = \xi$.

Положим

$$\mu(\xi, \tau) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq T)}} \int_{\tau}^T f^0(x, u) dt.$$

Тогда при $\xi = \mathbf{x}^0$ и $\tau = 0$ мы получим величину $\mu(\mathbf{x}^0, 0)$, представляющую собой наименьшее значение функционала (8.10).

Предположим, что для любой точки ξ фазового пространства и любого момента времени $\tau \in [0, T]$ существует оптимальная траектория (т. е. доставляющая наименьшее значение функционалу $I_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u})$) с начальным условием $\mathbf{x}(\tau) = \xi$. Тем самым функция $\mu(\xi, T)$ определена всюду на декартовом произведении $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. Обозначив аргументы этой функции через $\mathbf{x}$ и t , будем называть $\mu(\mathbf{x}, t)$ *функцией Беллмана*.

Согласно данному определению, функция Беллмана в точке $(\mathbf{x}, t)$, $0 \leq t \leq T$, равна наименьшему значению функционала $I_t[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ на всех допустимых процессах с начальным состоянием $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$.

Пусть $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$, $0 \leq t \leq T$, — оптимальный процесс и оптимальная траектория $\mathbf{x}^*(t)$ удовлетворяет начальному условию $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}^0$. Тогда

$$\mu(\mathbf{x}^0, 0) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ (0 \leq t \leq T)}} \int_0^T f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt = \int_0^T f^0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt.$$

Для произвольного момента времени $\tau \in [0, T]$ участок оптимальной траектории от точки $\mathbf{x}^*(\tau)$ до точки $\mathbf{x}^*(T)$ сам

по себе, согласно принципу оптимальности, является оптимальным, т. е.

$$\mu(x^*(\tau), \tau) = \min_{\substack{u(t) \in U \\ (0 \leq t \leq T)}} \int_{\tau}^T f^0(x(t), u(t)) dt = \int_{\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt.$$

Рассмотрим приращение $\Delta\tau$ и соответствующий этому приращению момент времени $\tau + \Delta\tau$. В силу аддитивности определенного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \mu(x^*(\tau), \tau) &= \int_{\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt = \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + \int_{\tau+\Delta\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Согласно принципу оптимальности, участок оптимальной траектории от точки $x^*(\tau + \Delta\tau)$ до точки $x^*(T)$ сам является оптимальной траекторией, т. е.

$$\begin{aligned} &\int_{\tau+\Delta\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt = \\ &= \min_{\substack{u(t) \in U \\ (\tau+\Delta\tau \leq t \leq T)}} \int_{\tau+\Delta\tau}^T f^0(x(t), u(t)) dt = \mu(x^*(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau). \end{aligned}$$

Учитывая последнее равенство, соотношение (8.12) можно преобразовать к виду

$$\mu(x^*(\tau), \tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + \mu(x^*(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau). \quad (8.13)$$

Второе слагаемое в (8.13) зависит от состояния системы $x^*(\tau + \Delta\tau)$. В это состояние, в свою очередь, система попала под действием управления $u^*(t)$, действовавшего на интервале времени $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Следовательно, значение $\mu(x^*(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ определяется выбором управления на отрезке $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Чтобы представить это, рассмотрим различные допустимые управления $u(t)$ на отрезке $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Им будет соответствовать пу-

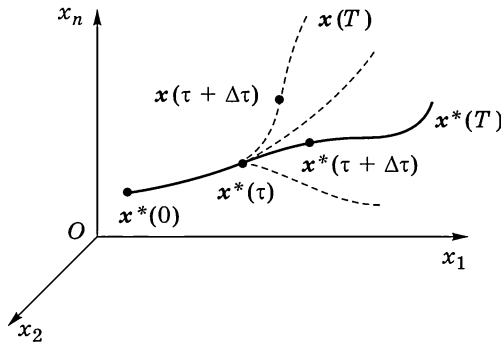


Рис. 8.2

чок траекторий $\mathbf{x}(t)$, исходящих из точки $\mathbf{x}^*(\tau)$ на оптимальной траектории (рис. 8.2).

На каждой траектории из этого пучка фазовая точка займет в момент времени $\tau + \Delta\tau$ некоторое положение $\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau)$. Выберем управление $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $[\tau + \Delta\tau, T]$ так, чтобы траектория $\mathbf{x}(t)$ на этом участке была оптимальной, т. е. выбранное управление обеспечивало минимум функционалу

$$I_{\tau+\Delta\tau}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{\tau+\Delta\tau}^T f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt. \quad (8.14)$$

Такой выбор управления определяет продолжение каждой траектории рассматриваемого пучка (см. рис. 8.2). При этом минимальные значения функционала $I_{\tau+\Delta\tau}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ вдоль траекторий пучка различны и зависят от точки $\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau)$:

$$\min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ (\tau+\Delta\tau \leq t \leq T)}} \int_{\tau+\Delta\tau}^T f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt = \mu(\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau).$$

Положение точки $\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau)$ определяется выбором управления $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Поэтому значение $\mu(\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ зависит от управления $\mathbf{u}(t)$, $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$.

Рассмотрим значения функционала $I_\tau[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ на траекториях пучка, построенного выше. Учитывая, что участок каждой траектории $\mathbf{x}(t)$ пучка от точки $\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau)$ до точки $\mathbf{x}(T)$ оптимален, т. е. доставляет наименьшее значение функционалу $I_{\tau+\Delta\tau}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$, получаем

$$I_\tau[x, u] = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f^0(x(t), u(t)) dt + \mu(x(\tau+\Delta\tau), \tau+\Delta\tau). \quad (8.15)$$

Выберем минимальное из значений $I_\tau[x, u]$. Так как оба слагаемых в (8.15) справа зависят только от выбора управления $u(t)$ на интервале $[\tau, \tau+\Delta\tau]$, то и минимальное значение I_τ^* определяется выбором управления на этом интервале, т. е.

$$I_\tau^* = \min_{\substack{u(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq \tau+\Delta\tau)}} I_\tau[x, u].$$

Построенный пучок траекторий является подмножеством более широкого множества всех допустимых функций, на которых и находим наименьшее значение функционала I_τ . Поэтому верно неравенство

$$I_\tau^* \geq \min_{\substack{u(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq T)}} I_\tau[x, u] = I_\tau[x^*, u^*] = \mu(x^*(\tau), \tau). \quad (8.16)$$

Но оптимальная траектория $x^*(t)$ содержится в пучке. Поэтому в неравенстве (8.16) на самом деле имеет место равенство, т. е.

$$\min_{\substack{u(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq \tau+\Delta\tau)}} I_\tau[x, u] = \mu(x^*(\tau), \tau),$$

откуда с учетом (8.15) получаем

$$\begin{aligned} \mu(x^*(\tau), \tau) &= \\ &= \min_{\substack{u(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq \tau+\Delta\tau)}} \left[\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f^0(x(t), u(t)) dt + \mu(x(\tau+\Delta\tau), \tau+\Delta\tau) \right]. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Заметим, что в соответствии с (8.1)

$$\begin{aligned} x(\tau+\Delta\tau) &= x(\tau) + \dot{x}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = \\ &= x(\tau) + f(x(\tau), u(\tau))\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Предположим, что функция Беллмана $\mu(x, t)$ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Тогда, согласно (8.18), имеем

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) &= \mu(\mathbf{x}(\tau), \tau) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{d\mu}{dx_i} \bigg|_{(\mathbf{x}(\tau), \tau)} f^i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \Delta\tau + \frac{d\mu}{dt} \bigg|_{(\mathbf{x}(\tau), \tau)} \Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Введем обозначение

$$(\text{grad} \mu, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} f^i$$

и перепишем (8.19) в виде

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) &= \mu(\mathbf{x}(\tau), \tau) + \\ &+ \left(\text{grad} \mu|_{(\mathbf{x}(\tau), \tau)}, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \right) \Delta\tau + \frac{d\mu}{dt} \bigg|_{(\mathbf{x}(\tau), \tau)} \Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Учитывая последнее соотношение, а также то, что для траекторий $\mathbf{x}(t)$ пучка имеет место равенство $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}^*(\tau)$, перепишем равенство (8.17) в виде

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}^*(\tau), \tau) &= \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau)}} \left[\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \right. \\ &+ \mu(\mathbf{x}^*(\tau), \tau) + \left(\text{grad} \mu|_{(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)}, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \right) \Delta\tau + \\ &\left. + \frac{\partial \mu}{\partial t} \bigg|_{(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)} \Delta\tau + o(\Delta\tau) \right]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Согласно определению, функция $\mu(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)$ получена в результате минимизации функционала $I_{\tau}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ по всем допустимым управлениям $\mathbf{u}(t)$, $t \in [\tau, T]$, т. е. эта функция уже не зависит от $\mathbf{u}$. Поэтому слагаемые $\mu(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)$ и $\frac{\partial \mu}{\partial t}(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)$ в правой части равенства (8.20) можно вынести за знак минимума. После сокращений получим

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \mu}{\partial t} \bigg|_{(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)} \Delta\tau &= \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ (\tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau)}} \left[\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \right. \\ &\left. + \left(\text{grad} \mu|_{(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)}, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \right) \Delta\tau + o(\Delta\tau) \right]. \end{aligned}$$

Предположим, что $u(t)$ непрерывна на отрезке $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Тогда, разделив это равенство на $\Delta\tau$ и перейдя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$ (при этом $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = 0$), приходим к *уравнению Беллмана*

$$-\frac{\partial \mu}{\partial t} \Big|_{(x^*(\tau), \tau)} = \min_{u(\tau) \in U} \left[f^0(x^*(\tau), u(\tau)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \Big|_{(x^*(\tau), \tau)} f^i(x^*(\tau), u(\tau)) \right], \quad (8.21)$$

или

$$-\frac{\partial \mu}{\partial t} = \min_{u(\tau) \in U} \left[f^0(x(\tau), u(\tau)) + (\text{grad } \mu, f(x(\tau), u(\tau))) \right], \quad (8.22)$$

где для удобства оптимальная траектория обозначена просто $x(t)$.

К уравнению Беллмана можно добавить краевые условия

$$\mu(x, T) = 0, \quad (8.23)$$

вытекающие непосредственно из определения функции Беллмана.

Функция $\mu(x, t)$ в данном случае играет ту же роль, что и функция $\mu_{N-m}(x_{N-m})$ в дискретном варианте динамического программирования, а уравнение Беллмана аналогично рекуррентным соотношениям Беллмана.

Уравнение Беллмана представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $\mu(x, t)$. Но это уравнение не является линейным из-за наличия в выражении (8.22) операции минимизации. Эта операция фактически означает подстановку в уравнение значения u^* , на котором достигается минимум и которое меняется в зависимости от значений x и $\text{grad } \mu$, т. е. фактически является нелинейной функцией этих переменных.

Уравнение Беллмана можно использовать для решения задачи (8.1), (8.10), (8.11) следующим образом. Если сделанные выше предположения выполняются и $\mu^*(x, t)$ — решение задачи (8.22), (8.23), то сразу же получаем наименьшее значение целевого функционала (оно равно $\mu^*(x^0, 0)$). Чтобы

найти оптимальную траекторию, нужно определить оптимальное управление u^* как функцию текущего положения и градиента $\text{grad } \mu^*$: $u = \tilde{u}(x, \text{grad } \mu^*)$. В результате из закона движения при $u = \tilde{u}(x, \text{grad } \mu^*)$ с начальными условиями $x(0) = x^0$ мы получаем задачу Коши, решением которой и будет оптимальная траектория. Зная оптимальную траекторию, мы уже можем найти оптимальное управление как функцию времени: $u^*(t) = \tilde{u}(x^*(t), \text{grad } \mu^*(x(t), (t)))$.

Рассмотрим другую задачу, а именно добавим к условиям (8.1), (8.10), (8.11) условие закрепления на правом конце

$$x(T) = x_T, \quad (8.24)$$

где значение x_T задано, а T заранее не известно.

В этом случае функция Беллмана зависит только от текущего состояния x : $\mu = \mu(x)$. Действительно, по определению

$$\mu[x, \tau] = \int_{\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt.$$

Но, согласно свойствам автономного процесса, значение интеграла

$$\int_{\tau}^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt$$

при фиксированных $x^*(t)$ и $u^*(t)$ зависит только от длины $T - \tau$ интервала интегрирования, который можно определить из автономной системы (8.1), зная точки $x^* = x^*(\tau)$ и $x^*(T)$ на траектории. Значит, $T - \tau$ есть функция от этих двух точек, а μ явно не зависит от t . Для задачи (8.1), (8.10), (8.11), (8.24) с помощью аналогичных рассуждений можно получить уравнение Беллмана, которое в этом случае имеет вид

$$\min_{u(\tau) \in U} [f^0(x(\tau), u(\tau)) + (\text{grad } \mu, f(x(\tau), u(\tau)))] = 0.$$

Практическая реализация предложенного метода наталкивается на определенные трудности. Например, вид правой части уравнения Беллмана нельзя назвать простым, так как туда входит операция взятия минимума. Но самая главная трудность состоит в том, что функция $\mu(x, t)$ может не быть всюду дифференцируемой (например, для линейных систем

дифференцируемость нарушается в точках, принадлежащих *линии переключения*). Однако дифференцируемость функции Беллмана — одно из предположений, на которые опирался вывод уравнения Беллмана.

Пример 8.2. Рассмотрим задачу оптимальной одноосной стабилизации космического аппарата с помощью маховика*.

Пусть космический аппарат, управляемый гироскопом-маховиком, имеет одну степень свободы, связанную с угловым движением аппарата вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс. Обозначим через φ угол отклонения аппарата от заданного направления, а через ω угловую скорость вращения маховика относительно аппарата. Тогда при определенных допущениях движение системы космический аппарат — маховик относительно неподвижной оси можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} (I_a + I_m)\ddot{\varphi} + I_m\dot{\omega} = 0; \\ I_m(\dot{\omega} + \ddot{\varphi}) = -m, \end{cases} \quad (8.25)$$

где I_a , I_m — моменты инерции соответственно аппарата и маховика относительно неподвижной оси; m — момент двигателя маховика.

К системе (8.25) следует добавить уравнение электрического двигателя маховика. Если это двигатель постоянного тока, то при некоторых допущениях момент m , развиваемый двигателем, может быть выражен уравнением

$$m = k(u + l\omega), \quad (8.26)$$

где k и l — постоянные, характеризующие данный двигатель; u — управляющее напряжение.

Будем считать, что на управление u нет никаких ограничений.

Система (8.25) совместно с уравнением (8.26) приводится к уравнению

$$I_a\ddot{\varphi} = k(u - c\dot{\varphi}).$$

Коэффициент c определяется из условия, что момент количества движения всей системы космический аппарат — маховик равен нулю:

$$(I_a + I_m)\dot{\varphi} + I_m\omega = 0.$$

* См.: 8.5, а также: Летов А.М.

Отсюда

$$\omega = -\frac{I_a + I_M}{I_M} \dot{\phi}, \quad c = \frac{I_a + I_M}{I_M} l.$$

Введя фазовые переменные $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, получим стандартную форму уравнений движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bu, \end{cases} \quad (8.27)$$

где $a = -\frac{kc}{I_a}$; $b = \frac{k}{I_a}$.

Зададим начальное состояние системы $x(0) = x^0$. В качестве целевого функционала выберем

$$I[x, u] = \int_0^{+\infty} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \beta u^2) dt, \quad (8.28)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим задачу нахождения управления, переводящего систему из начального состояния x^0 в конечное $x(\infty) = 0$ и доставляющего минимум целевому функционалу (8.28). Сформулированная задача — один из вариантов задачи оптимальной стабилизации (см. 8.5).

Эту задачу можно интерпретировать как задачу с фиксированными концами и фиксированным временем процесса $T = \infty$. Задача автономна, и функция Беллмана зависит только от состояния x . Уравнение Беллмана в данном случае имеет вид

$$\min_u \left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \beta u^2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} (ax_2 + bu) \right) = 0. \quad (8.29)$$

Поскольку на управление u нет ограничений, для определения значения $\tilde{u}$, при котором достигается указанный минимум, приравняем нулю производную по u выражения в скобках. Получим

$$\tilde{u} = -\frac{b}{2\beta} \frac{\partial \mu}{\partial x_2}. \quad (8.30)$$

Подставив найденную функцию в уравнение (8.29), получим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + x_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \alpha x_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} - \frac{b^2}{4\beta} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (8.31)$$

Краевые условия для функции Беллмана $\mu(\mathbf{x}(\infty)) = \mathbf{0}$ с учетом конечного состояния $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ принимают вид $\mu(\mathbf{0}) = 0$. Решение будем искать в виде квадратичной формы

$$\mu(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 \quad (8.32)$$

с неизвестными коэффициентами.

Подставим (8.32) в дифференциальное уравнение (8.31) и, пользуясь независимостью переменных x_1, x_2 , приравняем нулю коэффициенты при различных произведениях переменных. Из системы трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C получим

$$A = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 \alpha_1 \beta + b^2 \alpha_2 \alpha_1 + 2b \alpha_1 \sqrt{\alpha_1 \beta}}, \quad B = \frac{\sqrt{\alpha_1 \beta}}{b},$$

$$C = \frac{\alpha \beta + \sqrt{a^2 \beta^2 + b^2 \beta \alpha_2 + 2b \beta \sqrt{\alpha_1 \beta}}}{b^2}.$$

Если теперь для найденной функции μ вычислить $\frac{\partial \mu}{\partial x_2}$ и воспользоваться формулой (8.30), то мы получим явное выражение для оптимального управления:

$$u^* = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}} x_1 - \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + \frac{b^2 \alpha_2}{\beta} + 2b \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}}}{b} \right) x_2.$$

Оптимальное управление найдено в зависимости от фазовых координат, т. е. решена задача синтеза. Отметим, что синтезирующая функция линейна.

8.3. Уравнение Беллмана в задаче быстрогодействия

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия с законом движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U, \quad (8.33)$$

начальным состоянием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^1$ и конечным состоянием $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^2$.

Для этой задачи с фиксированными концами и свободным временем T процесса функция Беллмана зависит только от текущего состояния: $\mu = \mu(\mathbf{x})$. Если допустить, что выполнены оба предположения (см. 8.2) о функции μ , то необходимое условие оптимальности сведется к уравнению Беллмана

$$\min_{\mathbf{u} \in U} (1 + (\text{grad} \mu, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))) = 0,$$

или

$$\min_{\mathbf{u} \in U} (\text{grad} \mu, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = -1. \quad (8.34)$$

Краевое условие имеет вид $\mu(\mathbf{x}^2) = 0$.

Очевидно, что если $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ — оптимальный процесс с временем T , то на отрезке $[0, T]$ выполняется тождество

$$(\text{grad} \mu(\mathbf{x}^*(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))) \equiv -1. \quad (8.35)$$

Функция $\mu(\mathbf{x})$ имеет в этом случае простой смысл: ее значение в точке $\mathbf{x}$ равно времени оптимального по быстроддействию перехода фазовой точки из положения $\mathbf{x}$ в фиксированное положение $\mathbf{x}^2$. Наглядную геометрическую интерпретацию допускает и уравнение Беллмана. Пусть объект находится в состоянии $\hat{\mathbf{x}}$. Рассмотрим в фазовом пространстве поверхность уровня $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\hat{\mathbf{x}}) = \text{const}$, проходящую через точку $\hat{\mathbf{x}}$. Эта поверхность представляет собой множество всех точек, из которых фазовая точка переходит в точку $\mathbf{x}^2$ за одно и то же время $\mu(\hat{\mathbf{x}})$. Из соотношения (8.34) следует, что

$$\max_{\mathbf{u} \in U} (-\text{grad} \mu(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})) = -1.$$

Воспользуемся тем, что максимум в левой части равенства достигается при значении $u = u^*$ оптимального управления, соответствующем состоянию $\hat{x}$. Это означает, что «оптимальный вектор фазовой скорости» $f(\hat{x}, u^*)$ образует с вектором $-\text{grad} \mu(\hat{x})$ острый угол (оптимальный вектор направлен в сторону убывания функции μ). Другими словами, фазовая точка $x(t)$ на оптимальной траектории перемещается в сторону поверхности уровня функции μ с меньшим временем перехода $\mu(\hat{x})$.

Отметим, что минимизация по u выражения в левой части (8.34) позволяет определить оптимальное управление u^* как функцию от $\text{grad} \mu$. При подстановке указанного значения u^* в тождество (8.35) получим не содержащее u уравнение в частных производных первого порядка. Решение этого уравнения должно удовлетворять краевому условию $\mu(x^2) = 0$. Если это решение удастся найти, то будет решена задача синтеза, так как будет найдена *синтезирующая функция*, или, другими словами, оптимальное управление как функция фазовых координат $u = u^*(x)$. К сожалению, получить решение уравнения (8.35) удастся лишь в простейших случаях.

Пример 8.3. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия с законом движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

с ограничением $|u| \leq 1$ на скалярное управление $u(t)$, с переходом из начального состояния $x = (x_1, x_2)^T$ в начало координат (см. 7.5).

В этом случае уравнение Беллмана имеет вид

$$\min_{|u| \leq 1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} u \right) = -1, \quad (8.36)$$

а краевое условие таково:

$$\mu(0, 0) = 0. \quad (8.37)$$

Предположим, что функция μ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по x_1 и x_2 . Поскольку из постановки задачи выполнение этих условий не следует, дальнейшее решение носит эвристический характер.

Из уравнения (8.36) вытекает, что оптимальным является управление

$$u^* = -\text{sign} \frac{\partial \mu}{\partial x_2}. \quad (8.38)$$

Учтем это в уравнении Беллмана:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right| + 1 = 0. \quad (8.39)$$

Согласно (8.38), оптимальное управление u^* может принимать значения 1 и -1 . Рассмотрим на фазовой плоскости область L_{-1} , в которой $u^* = -1$, и область L_1 , в которой $u^* = 1$.

В области L_{-1} уравнение (8.39) имеет вид

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + 1 = 0, \quad (8.40)$$

а в области L_1 —

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + 1 = 0. \quad (8.41)$$

Решение неоднородного уравнения (8.40) будем искать в неявном виде $V(\mu, x_1, x_2) = 0$ [VIII]. Используя правило дифференцирования неявно заданной функции [V], находим

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial \mu}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial \mu}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8.40), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

Записываем уравнение характеристик [VIII]:

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-1} = \frac{d\mu}{-1}. \quad (8.42)$$

Отсюда, решая уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx_2}{-1} = \frac{dx_1}{x_2},$$

находим уравнение для оптимальных фазовых кривых в области L_{-1} (т. е. при $u^* = -1$):

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} = C_1, \quad (8.43)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Это уравнение дает *первый интеграл* системы (8.42):

$$\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2^2}{2}.$$

Несложно найти еще один первый интеграл, так как в этой системе еще одно уравнение имеет разделяющиеся переменные:

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \mu - x_2.$$

Зная два первых интеграла, мы можем записать общее решение уравнения в частных производных:

$$\Phi\left(\mu - x_2, x_1 + \frac{x_2^2}{2}\right) = 0,$$

где $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Предположим, что уравнение $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ можно разрешить относительно первого аргумента в виде $\varphi_1 = H(\varphi_2)$. Тогда мы можем записать

$$\mu = x_2 + H\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2}\right). \quad (8.44)$$

Это выражение для функции Беллмана в области L_{-1} .

Аналогично рассматривается ситуация в области L_1 . Мы получаем уравнение оптимальных фазовых кривых

$$x_1 - \frac{x_2^2}{2} = c_2 = \text{const} \quad (8.45)$$

и выражение для функции Беллмана в виде

$$\mu = -x_2 + \Theta \left(-x_1 + \frac{x_2^2}{2} \right). \quad (8.46)$$

Формулы (8.44) и (8.46) дают лишь представление о структуре решения уравнения Беллмана, так как в них входит неизвестная функция. Но, зная уравнения (8.43), (8.45) для оптимальных фазовых кривых, мы можем найти и функцию Беллмана. Для этого на плоскости $x_1 O x_2$ строим оптимальную траекторию, составляя ее из дуг двух парабол из семейств (8.43), (8.45), как это делалось ранее (см. 7.5). Построенная

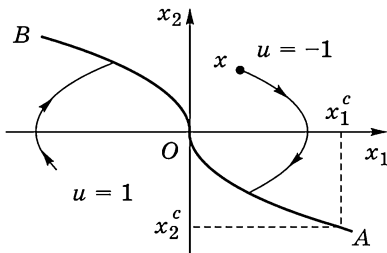


Рис. 8.3

траектория должна соединять начальную точку x с началом координат (рис. 8.3). Теперь можно вычислить время движения вдоль построенной оптимальной траектории и получить конкретный вид функции Беллмана (см. задачу 7.6). Для точки x выше линии переключения AOB имеем

$$\mu(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{2}} + x_2, \quad (8.47)$$

а для точки x ниже линии переключения —

$$\mu(x_1, x_2) = 2\sqrt{-x_1 + \frac{x_2^2}{2}} - x_2. \quad (8.48)$$

Функции (8.47) и (8.48) являются решениями уравнений (8.40) и (8.41) соответственно.

Покажем, что ни в одной точке линии переключения AOB функция Беллмана $\mu(x_1, x_2)$ не имеет частных производных.

Возьмем на дуге OA произвольную точку $C(x_1^c, x_2^c)$, т. е.

$x_1^c = \frac{1}{2}(x_2^c)^2$. Так как функция μ выше линии AOB (или правее, что то же самое) задается формулой (8.47), то для вычисления правосторонней производной по x_1 мы должны использовать именно эту формулу:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1}(x_1^c + 0, x_2^c) = \frac{1}{\sqrt{x_1^c + \frac{(x_2^c)^2}{2}}} = -\frac{1}{x_2^c}.$$

А левосторонняя производная вычисляется с использованием представления (8.48). Но при этом

$$\mu(x_1, x_2^c) = 2\sqrt{-x_1 + \frac{(x_2^c)^2}{2}} - x_2^c = 2\sqrt{x_1^c - x_1} - x_2^c,$$

и мы видим, что левосторонней конечной производной в точке $x_1 = x_1^c$ не существует, так как функция $y = \sqrt{x}$ не дифференцируема в точке 0. Можно так же показать, что частная производная по x_2 имеет в точках линии переключения аналогичный разрыв.

Приведенный пример демонстрирует, что условия Беллмана о существовании у функции Беллмана непрерывных частных производных нарушаются даже в простейших ситуациях. Поэтому вопрос о применимости метода динамического программирования к задачам оптимального управления с ограничениями на управление требует дополнительного обоснования.

8.4. Связь метода динамического программирования с принципом максимума

В 8.2 уравнение Беллмана получено как необходимое условие оптимальности управления и, значит, в определенном смысле перекликается с *принципом максимума*. Покажем, каким образом на основе метода динамического программирования можно получить условия принципа максимума.

Рассмотрим задачу оптимального управления с законом движения (8.1), целевым функционалом (8.10), фиксированными начальным (8.11) и конечным (8.24) состояниями. Время T процесса считаем неизвестным. В качестве вектора $u(t)$ управлений выбираем кусочно-непрерывные вектор-функции со значениями из области управления $U \in \mathbb{R}^r$, являющейся замкнутым выпуклым множеством.

Согласно принципу динамического управления Беллмана, для оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$ найдется такое решение $\mu(x)$ уравнения Беллмана

$$\min_{u(\tau) \in U} \left[f^0(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} f^i(x, u) \right] = 0, \quad (8.49)$$

что $u^*(t) = \tilde{u}(x^*(t), \text{grad} \mu(x^*(t)))$, где $\tilde{u}(x, \text{grad} \mu)$ — значение, при котором достигается минимум. Покажем, что из уравнения (8.49) следует существование некоторого вектора Ψ , который удовлетворяет соотношениям принципа максимума.

Пусть $\mu(x)$ — функция Беллмана, которая соответствует оптимальному процессу $(x^*(t), u^*(t))$. Введем следующие обозначения:

$$x_0 = \int_0^t f^0(x, u) dt, \quad \tilde{x} = (x_0, x), \quad \tilde{\mu}(\tilde{x}) = x_0 + \mu(x).$$

Используя эти обозначения, преобразуем уравнение Беллмана:

$$\min_{u \in U} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{\mu}(\tilde{x})}{\partial x_i} f^i(x, u) \right) = 0,$$

или с учетом очевидного тождества $-\min F = \max(-F)$:

$$\min_{u \in U} \left(- \sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{\mu}(\tilde{x})}{\partial x_i} f^i(x, u) \right) = 0. \quad (8.50)$$

Отметим, что функции $f^i(x, u)$ не зависят от x_0 . Введем обозначения

$$\psi_i = - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (8.51)$$

Полагая

$$H(\hat{\Psi}, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u) = (\hat{\Psi}, \hat{f}(x, u)),$$

где $\hat{\Psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)^T$; $\hat{f} = (f^0, f^1, \dots, f^n)^T$, можно записать уравнение Беллмана в следующем виде:

$$\max_{u \in U} (\hat{\Psi}, f) = \max_{u \in U} H(\hat{\Psi}, x, u) = 0.$$

Введенные нами сопряженные переменные ψ_i и функция Понтрягина H (ср. с (7.7)) получены пока чисто формальным преобразованием из уравнения Беллмана. Покажем, что $\hat{\Psi}$ удовлетворяет сопряженной системе

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (8.52)$$

Потребуем, чтобы функция Беллмана $\mu(x)$ имела непрерывные производные второго порядка. Тогда функция

$$g(\tilde{x}, u) = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i}(\tilde{x}) f^i(x, u) \right) \quad (8.53)$$

имеет непрерывные производные первого порядка.

Оказывается, что для оптимального процесса $(x(t), u(t))$ при фиксированном $t \in [0, T]$ функция $g(\tilde{x}, u(t))$ переменного $\tilde{x}$ достигает в точке $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ максимального значения, равного нулю. Это следует из уравнения Беллмана (8.50). При этом под равенством $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ мы понимаем выполнение двух соотношений:

$$x = x(t), \quad x_0 = \int_0^t f^0(x(t), u(t)) dt.$$

Так как функция $g(\tilde{x}, u(t))$ достигает максимума в точке $\tilde{x}(t)$, то

$$\left. \frac{\partial g(\tilde{x}, u)}{\partial x_k} \right|_{\substack{\tilde{x}=\tilde{x}(t) \\ u=u(t)}} = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad t \in [0, T]. \quad (8.54)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial^2 \tilde{\mu}}{\partial x_i \partial x_k} f^i - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} \right), \quad k = \overline{0, n},$$

из (8.54) получаем соотношение

$$\sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial^2 \tilde{\mu}(\tilde{x})}{\partial x_i \partial x_k} f^i(x, u) \right) = - \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}(\tilde{x})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f^i(x, u)}{\partial x_k}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (8.55)$$

которое выполняется на оптимальном процессе $(x(t), u(t))$.

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial^2 \tilde{\mu}}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial^2 \tilde{\mu}}{\partial x_i \partial x_k} \right) f^i(x, u),$$

то соотношение (8.55) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_k} \right) = - \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x_k}, \quad k = \overline{0, n},$$

или с учетом обозначений (8.51)

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{\partial f^i}{\partial x_k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Итак,

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Уравнения (8.52) были получены в предположении, что функция Беллмана μ имеет непрерывные производные второго порядка. Это, конечно, не всегда так. Поэтому проведенные рассуждения носят иллюстративный характер и не могут всерьез рассматриваться как обоснования принципа максимума. Скорее они говорят о том, что принцип максимума и принцип динамического программирования имеют пересекающиеся «сферы влияния». При отсутствии ограничений на управление, когда все функции являются гладкими, оба принципа работают. Но каждый принцип имеет область, в которой соперник конкурировать не может: уравнение Беллмана получено при дополнительных предположениях, а принцип максимума хуже приспособлен для решения задач дискретного характера.

8.5. Оптимальная стабилизация

Пусть для исходной системы

$$\dot{y} = f(t, y, u) \tag{8.56}$$

при заданном управлении $u = u(t)$ и заданном начальном условии $y(t_1) = y^1$ построена траектория $y = \varphi(t)$, т. е. решена со-

ответствующая задача Коши. Такое движение назовем *невозмущенным движением*. Рассмотрим еще одно управление $u = v(t)$ и соответствующую этому управлению траекторию $y = \psi(t)$, которую назовем *возмущенным движением*.

Задача стабилизации невозмущенного движения $y = \varphi(t)$ состоит в выборе такой поправки $\Delta u(t) = v(t) - u(t)$, при которой движение $\psi(t)$ устойчиво.

Положим $x(t) = \psi(t) - \varphi(t)$ и вместе с $u(t)$ подставим в уравнения движения (8.56):

$$\dot{x} = \psi - \dot{\varphi} = f(t, \varphi + x, u + \Delta u) - f(t, \varphi, u).$$

Считая траекторию $\varphi(t)$ и управление $u(t)$ фиксированными, получаем уравнения

$$\dot{x} = F(t, x, \Delta u), \quad (8.57)$$

которые называют *уравнениями возмущенного движения*.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) все компоненты вектора состояния x в любой момент времени известны;

2) по траектории $x(t)$ можно восстановить *вектор управления* $\Delta u(t)$, который можно рассматривать как функцию времени и текущего состояния $\Delta u(t, x)$;

3) управление $\Delta u(t, x)$ должно обеспечивать асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$;

4) $\Delta u(t, 0) \equiv 0$;

5) вектор-функция $u(t, x)$ определена и непрерывна в области $D: t \geq 0, |x_j| < L, j = \overline{1, n}$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

6) правые части уравнений (8.57) удовлетворяют условиям теоремы Коши о существовании и единственности решения системы ОДУ [VIII] при любых начальных условиях в области D ;

7) на вектор управления u нет ограничений, т. е. его компоненты могут принимать любые сколь угодно большие значения, вектор-функция $F(t, x, u)$ определена при любом значении u .

Задача оптимальной стабилизации невозмущенного движения состоит в следующем. Пусть выбран критерий качества стабилизации, который может отражать такие требования к процессу стабилизации, как его монотонность, минимизация объема используемых ресурсов и т. п. Этот критерий будем представлять как некоторый функционал вида

$$I[\mathbf{x}, \Delta u] = \int_{t_1}^{+\infty} F^0(t, \mathbf{x}, \Delta u) dt. \quad (8.58)$$

Требуется найти такое управление $\Delta u = u^*(t, \mathbf{x})$, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ в силу уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \Delta u(t, \mathbf{x}))$$

и которое среди всех управлений, также обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного движения, придает целевому функционалу (8.58) наименьшее значение. Следовательно, для любого управления $\Delta u(t, \mathbf{x})$, решающего задачу стабилизации, неравенство

$$I[\mathbf{x}^*, \Delta u^*] \leq I[\mathbf{x}, \Delta u] \quad (8.59)$$

выполняется при любых начальных условиях из области

$$D_\varepsilon = \{(t, x_1, \dots, x_n): t \geq 0, |x_j| \leq \varepsilon, j = \overline{1, n}\},$$

где $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ — траектории системы при заданных начальных условиях и управлениях Δu^* и Δu соответственно.

Начальные условия $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ играют роль начального возмущения, а асимптотическая устойчивость означает, что начальное возмущение в процессе движения компенсируется за счет управления. Если неравенство (8.59) выполняется при любых, необязательно малых, начальных возмущениях, то говорят об *оптимальной стабилизации в целом*.

Задача оптимальной стабилизации — это задача оптимального управления для системы с законом движения (8.57), целевым функционалом (8.58), фиксированным временем процесса $T = \infty$, фиксированным левым концом $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ и фиксированным правым концом $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$. Ее можно полностью решить в случае, когда управление скалярно ($u = u \in \mathbb{R}$), уравнения возмущенного движения являются линейными автономными, т. е. имеют вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta u$ (матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ постоянны), а интегрант целевого функционала $F^0(t, \mathbf{x}, \Delta u)$ есть квадратичная форма с постоянной симметрической матрицей $\mathbf{N}$ и константой q :

$$F^0(t, \mathbf{x}, \Delta u) = \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} + q(\Delta u)^2.$$

Решение задачи в этом частном случае составляет основное содержание метода аналитического конструирования регулятора*. Оно строится с помощью метода динамического программирования Беллмана.

Так как эта задача представляет собой автономную задачу оптимального управления с фиксированными концами, функция Беллмана зависит только от фазовых координат: $\mu = \mu(\mathbf{x})$. Уравнение Беллмана в данном случае имеет вид

$$\min_{\Delta u} [\mathbf{x}^T N \mathbf{x} + q \Delta u^2 + (\text{grad } \mu, A \mathbf{x} + B \Delta u)] = 0. \quad (8.60)$$

Здесь оно используется как достаточное условие оптимальности**. Из уравнения (8.60) получаем управление Δu^* , доставляющее минимум левой части:

$$\Delta u^* = -\frac{1}{2q} (\text{grad } \mu, B). \quad (8.61)$$

Подставив найденное управление Δu^* в уравнение (8.60), имеем нелинейное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции Беллмана $\mu(\mathbf{x})$

$$\mathbf{x}^T N \mathbf{x} + (\text{grad } \mu, A \mathbf{x}) - \frac{1}{4q} (\text{grad } \mu, B)^2 = 0 \quad (8.62)$$

с краевым условием

$$\mu(\mathbf{x}(\infty)) = \mu(\mathbf{0}) = 0.$$

Решение уравнения (8.62) следует искать в виде квадратичной формы $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ с неизвестной симметрической матрицей P порядка n (неизвестных элементов $n(n+1)/2$). Подставив это представление в уравнение, получим

$$\mathbf{x}^T \left(N + 2PA - \frac{1}{q} P B B^T P \right) \mathbf{x} = 0,$$

откуда вытекает матричное уравнение***

$$N + 2PA - \frac{1}{q} P B B^T P = 0.$$

* См.: Летов А.М.

** По поводу обоснования уравнения Беллмана как необходимого и достаточного условия оптимальности см.: Болтянский В.Г. (1964 г.)

*** Уравнение такого типа в литературе называют матричным уравнением Риккати.

Решив это матричное уравнение, мы можем найти функцию Беллмана, а затем управление Δu^* как функцию фазовых координат:

$$\Delta u^* = -\frac{1}{q} B^T P x.$$

Таким образом, метод аналитического конструирования позволяет решить задачу синтеза, при этом синтезирующая функция линейна.

Приведенный пример использования уравнения Беллмана — один из немногих, так как решить его удастся редко. В этой связи упомянем линейные автономные системы с критерием обобщенной работы*.

Вопросы и задачи

8.1. Используя метод динамического программирования, решите задачу оптимального быстродействия

$$\dot{x} = ax + u, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

8.2. Составьте уравнение Беллмана в задачах оптимального управления а) и б). Учитывая вид области управления U , запишите соответствующее уравнение в частных производных для функции Беллмана (x_1^1, x_2^1, T заданы).

$$\text{а) } \int_0^T f^0(t, x_1, x_2) dt \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = u x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = u^2, \end{cases} \quad x_1(0) = x_1^1,$$

$$x_2(0) = x_2^1;$$

$$\text{б) } \int_0^T f^0(t, x_1, x_2) dt \rightarrow \min, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = u_2, \end{cases} \quad x_1(0) = x_1^1,$$

$$x_2(0) = x_2^1, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1.$$

8.3. Составьте уравнение Беллмана для линейной задачи оптимального быстродействия с законом движения (7.30) и областью управления U вида (7.37). Запишите соответствующее уравнение в частных производных для функции Беллмана.

* См.: Красовский А.А.

ЧАСТЬ III

Прямые методы вариационного исчисления

*...Часто бывает очень трудно найти выражение,
которое было бы максимумом или минимумом.*

Леонард Эйлер

9. ФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Первые две части книги посвящены изучению задач, связанных с поиском *экстремума функционала*, определенного на некотором множестве функций. Как мы видели, во многих случаях решение такой задачи сводится к решению системы ОДУ или уравнений в частных производных. Систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как *операторное уравнение*. Таким образом, задача поиска экстремума функционала сводится (при определенных ограничениях) к решению некоторого операторного уравнения. Это аналогично тому, что задача поиска минимума функции многих переменных с помощью необходимого условия экстремума может быть сведена к задаче решения системы нелинейных уравнений.

Однако есть и обратная задача: решение системы дифференциальных уравнений заменить решением некоторой вариационной проблемы.

Построение математических моделей на основе вариационных задач в современной науке используется весьма широко. Это объясняется тем обстоятельством, что многие фундаментальные принципы в самых различных предметных областях наиболее естественно формулируются как вариационные принципы. Достаточно в этой связи упомянуть закон сохранения энергии, который сформулирован как равенство нулю вариации функционала энергии системы.

Сведение вариационной задачи (т. е. задачи поиска либо точек экстремума функционала, либо его стационарных точек) к операторному уравнению — далеко не всегда хороший способ решения задачи. Это обстоятельство привело к разработке ряда методов, в которых решение вариационной задачи можно найти без использования систем дифференциальных уравне-

ний. Такие методы решения вариационных задач называют **прямыми методами**. Эти методы, как правило, сводятся к построению последовательности приближений к точному решению задачи, а каждое приближение находится как решение системы функциональных уравнений, в которую не входят производные неизвестных функций. Зачастую система функциональных уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а решение СЛАУ найти существенно проще, чем решение операторного уравнения.

9.1. Операторное уравнение

Любое отображение $A: D(A) \rightarrow R(A)$ из некоторого множества $D(A)$ функций в некоторое множество $R(A)$ функций называют **оператором**.

Во многих случаях в качестве *математической модели* исследуемого объекта, описываемого векторной функцией u , можно рассматривать уравнение вида

$$A(u) = f, \quad u \in D(A), \quad (9.1)$$

содержащее оператор A с некоторой *областью определения* $D(A)$. Этот оператор отражает свойства объекта и действует на искомую функцию u (вообще говоря, векторную) и заданную функцию f (в общем случае тоже векторную), характеризующую внешнее воздействие на этот объект.

Мы ограничимся случаем, когда область определения $D(A)$ оператора A является подмножеством некоторого линейного пространства. Линейное пространство, как правило бесконечномерное, элементами которого являются функции, часто называют **функциональным пространством**. Функциональное пространство наделяют какой-либо структурой, позволяющей оперировать с понятием непрерывности. В частности, функциональное пространство может быть нормированным (определена норма) или евклидовым (задано скалярное произведение). Евклидово пространство можно рассматривать как частный случай нормированного пространства, поскольку скалярное произведение естественным образом индуцирует норму, называемую *евклидовой нормой*. В нормированных пространствах можно рассматривать сходящиеся последова-

тельности [IX]. Критерий Коши верен не для всякого нормированного пространства, т. е. в нормированном пространстве могут существовать *фундаментальные последовательности*, не имеющие предела. Если в данном нормированном (евклидовом с евклидовой нормой) пространстве любая фундаментальная последовательность сходится, то такое пространство называют *полным*. Полное бесконечномерное евклидово пространство традиционно называют гильбертовым*.

Пример 9.1. Множество $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых с квадратом на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx. \quad (9.2)$$

Элементами этого пространства являются функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечен *интеграл Лебега*

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (9.3)$$

(в скалярном произведении также предполагается интеграл Лебега). Интеграл (9.3) определяет евклидову норму $\|f\| = \|f\|_2$ в этом пространстве, сходимость по которой называют *сходимостью в среднем квадратичном*.

Пример 9.2. Рассмотрим множество $L_2(\Omega, \sigma)$ функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на измеримом множестве $\Omega \in \mathbb{R}^n$, для которых конечен интеграл Лебега

$$\|f\|_{2,\sigma} = \int_{\Omega} |f(x)|^2 \sigma(x) dx,$$

где σ — неотрицательная *измеримая* на Ω *функция*.

* Давид Гильберт (1862–1943) — великий немецкий математик, оказавший большое влияние на развитие современной математики. Внес значительный вклад в развитие как функционального анализа, так и вариационного исчисления. Положил начало развитию прямых методов в вариационном исчислении.

Это множество представляет собой гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом и весом σ . Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\sigma(x)dx. \quad (9.4)$$

Отметим, что в функциональных пространствах, в которых скалярное произведение вводится с помощью интеграла Лебега, считают равными любые функции f и g , для которых множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ есть *множество (лебеговой) меры нуль*. Это гарантирует выполнение аксиомы скалярного произведения (и, соответственно, нормы), согласно которой $(f, f) = 0$ только для нулевого элемента линейного пространства.

Пример 9.3. Гильбертовым также является линейное пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$ векторных функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} (f(x), f(x)) dx.$$

Здесь (x, y) обозначает стандартное скалярное произведение векторов x и y m -мерного евклидова арифметического пространства. Скалярное произведение в $L_2^{(m)}(\Omega)$ определяется формулой

$$(f, g) = \int_{\Omega} (f(x), g(x)) dx. \quad \#$$

Если бесконечномерное нормированное пространство $\mathcal{L}$ не является полным, то его можно пополнить, т. е. построить такое полное нормированное пространство $\tilde{\mathcal{L}}$, которое включает в себя нормированное пространство $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{L}$ является множеством, всюду плотным в $\tilde{\mathcal{L}}$. Расширение нормированного (евклидова) пространства $\mathcal{L}$ до полного $\tilde{\mathcal{L}}$ называют *пополнением нормированного (евклидова) пространства $\mathcal{L}$* .

Пример 9.4. Рассмотрим линейное пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Введем в этом пространстве скалярное произведение согласно формуле

$$(f, g) = \int_a^b (f(x), g(x)) dx. \quad (9.5)$$

Получим евклидово пространство [IV]. Однако это пространство не является полным, и потому оно не гильбертово. Действительно, рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}; \\ nx, & -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n}; \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Эта функциональная последовательность сходится на отрезке $[-1, 1]$ поточечно к функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(т. е. $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in [-1, 1]$).

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_{-1}^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 dx = 2 \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx = \frac{2}{3n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Значит, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ по норме, порожденной введенным скалярным произведением. Нетрудно, однако, заметить, что функция $\varphi(x)$ не является непрерывной на $[-1, 1]$ и не станет непрерывной, даже если ее изменить на множестве меры нуль, так как она имеет точку разрыва первого рода.

Линейное пространство $C[-1, 1]$ с заданным на нем скалярным произведением представляет собой *линейное многообразие* в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$, т. е. множество, замкнутое относительно линейных операций, но не замкнутое в топологическом смысле, так как содержит не все свои предельные точки (например, описанную функцию $\varphi(x)$).

Можно показать, что для произвольного отрезка $[a, b]$ множество $C[a, b]$ всюду плотно в $L_2[a, b]$, а значит, любая функция из $L_2[a, b]$ является пределом сходящейся в среднем квадратичном последовательности непрерывных функций. Таким образом, при рассматриваемом скалярном произведении пополнением $C[a, b]$ является $L_2[a, b]$.

Пример 9.5. Множество $C^m(\Omega)$ функций, m раз непрерывно дифференцируемых на замкнутом ограниченном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, относительно скалярного произведения (9.5) также является нормированным, но не полным пространством. Пополнением этого пространства является $L_2(\Omega)$. #

Говорят, что *оператор A действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$* , если и область определения $D(A)$, и область значений $R(A)$ этого оператора являются подмножествами в $\mathcal{L}$. Пусть $D(A)$ — линейное многообразие в $\mathcal{L}$. Оператор A называют *линейным оператором*, если

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$$

для любых элементов $u, v \in D(A)$ и любых чисел α, β . В частном случае, когда линейное пространство $\mathcal{L}$ конечномерное, а $D(A) = \mathcal{L}$, приведенное определение равносильно определению линейного оператора в конечномерном пространстве [IV]. В конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ любой линейный оператор A с областью определения $D(A)$ можно продолжить на все линейное пространство $\mathcal{L}$, т. е. построить такой оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = \mathcal{L}$, который на $D(A)$ совпадает с A . В бесконечномерном случае это уже неверно.

Пусть A — оператор, действующий в нормированном пространстве $\mathcal{L}$. Уравнение

$$A(u) = f,$$

где $f \in \mathcal{L}$ — заданный элемент нормированного пространства $\mathcal{L}$, называют *операторным уравнением*.

Пример 9.6. Если $\mathcal{L}$ — конечномерное линейное пространство, а A — линейный оператор с областью определения $D(A) = \mathcal{L}$, то операторное уравнение $Au = f$ в координатной записи в некотором базисе линейного пространства представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Если нелинейный оператор A действует в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, то в координатной записи получаем систему нелинейных функциональных уравнений.

Пример 9.7. Рассмотрим краевую задачу для ОДУ

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + cu(x) = 1, \quad x \in [0, 1], \quad c \in \mathbb{R},$$

с краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$. Дифференциальное уравнение этой задачи можно интерпретировать как операторное уравнение, определяемое линейным оператором

$$Au = -u'' + cu. \quad (9.6)$$

В качестве области определения этого оператора можно выбрать множество $C^2[0, 1]$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, являющееся линейным многообразием в нормированном пространстве $C[0, 1]$ с нормой $\|\cdot\|_C$, причем всюду плотным в $C[0, 1]$. Но тогда найденные решения операторного уравнения придется проверять на соответствие краевым условиям. Поэтому в данном случае в качестве области определения оператора удобнее выбрать множество $C_0^2[0, 1]$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих краевым условиям. Так как заданные краевые условия однородны, указанное множество является линейным многообразием в $C[0, 1]$.

Линейный оператор A представляет собой частный случай линейного дифференциального оператора, поскольку в него входит операция дифференцирования. Обозначив через M_c линейный оператор умножения на число c (т. е. $M_c u = cu$), мы можем записать линейный оператор A в виде

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + M_c,$$

где $\frac{d^2}{dx^2}$ — общепринятое обозначение оператора двойного дифференцирования.

Пример 9.8. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (9.7)$$

с краевым условием

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (9.8)$$

где Δ — оператор Лапласа; $V \subset \mathbb{R}^3$ — заданная область; $f(\mathbf{x})$ — заданная функция, непрерывная в области V ; $g(\mathbf{x})$ — заданная функция, определенная на поверхности S , ограничивающей V .

Как и в предыдущем примере, мы имеем дело с линейным дифференциальным оператором $A = -\Delta$. В качестве области определения оператора A можно взять множество $C^2(V) \cap C(\bar{V})$ функций, непрерывно дифференцируемых в области V и непрерывных на ее замыкании $\bar{V} = V \cup S$. Рассматриваемое множество является линейным многообразием в нормированном пространстве $C(\bar{V})$. Однако если в качестве области определения оператора A взять множество функций из $C^2(V) \cap C(\bar{V})$, удовлетворяющих заданным краевым условиям, то оператор теряет свойство линейности, так как при неоднородных краевых условиях указанное множество не будет линейным многообразием. В самом деле, пусть функции $u, v \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$ удовлетворяют условию (9.8), т. е. $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$, но их линейная комбинация $w = \alpha u + \beta v$ при произвольных значениях $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ уже не удовлетворяет этому условию, поскольку $w(\mathbf{x}) = (\alpha + \beta)g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$.

Отмеченное обстоятельство объясняет, почему, решая подобные краевые задачи, обычно стремятся преобразовать их так, чтобы получить однородные краевые условия.

Пример 9.9. Рассмотрим нелинейную краевую задачу с операторным уравнением

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(u) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (9.9)$$

и краевыми условиями

$$u(a) = \tilde{\alpha}, \quad u'(b) + s(u(b)) = \tilde{\beta}, \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}, \quad (9.10)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций. Предположим, что функция $f(x)$ в правой части уравнения (9.9) и функция $q(u)$ в его левой части являются непрерывными в своей области определения. В качестве области определения оператора возьмем множество функций $u(x) \in C^2[a, b]$, для которых выполняются краевые условия (9.10), причем функция $s(u(x))$ во втором краевом условии непрерывна. #

Пусть линейный оператор A действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и его область определения $D(A)$ является множеством, всюду плотным в $\mathcal{H}$. Если для произвольных элементов $u, v \in D(A)$ выполнено равенство

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (9.11)$$

то оператор A называют *симметрическим оператором*.

Напомним, что в случае конечномерного евклидова пространства оператор, удовлетворяющий соотношению (9.11), называют *самосопряженным*. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является симметрической. Поэтому понятие симметрического оператора можно трактовать как обобщение понятия самосопряженного оператора в конечномерном евклидовом пространстве. Отметим, что условие симметричности оператора в гильбертовом пространстве зависит не только от вида этого оператора (т. е. от формулы, которой он описан), но и от его области определения. Расширение области определения может привести к потере условия симметричности.

Линейный оператор A называют *положительным оператором*^{*}, если

$$(Au, u) > 0, \quad u \in D(A), \quad \|u\| \neq 0.$$

Для положительного оператора A из равенства $(Au, u) = 0$ следует равенство $\|u\| = 0$, или $u = 0$.

Симметрический оператор A называют *положительно определенным оператором*, если для некоторого числа $\gamma > 0$ верно неравенство

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad u \in D(A). \quad (9.12)$$

^{*} Обычно термин «положительный» распространяют только на симметрические операторы, но для дальнейшего изложения удобно рассматривать эти два понятия независимо.

Положительно определенный оператор является положительным, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже в случае, когда положительный оператор одновременно является и симметрическим.

Пример 9.10. Убедимся, что линейный дифференциальный оператор A , рассмотренный в примере 9.7 и определенный на линейном многообразии $D(A) = C_0^2[0, 1]$, является симметрическим. Действительно, для произвольных функций $u(x), v(x) \in C_0^2[0, 1]$ последовательным интегрированием по частям с учетом краевых условий $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^1 (-u''(x) + cu(x))v(x)dx = \\ &= -u'(x)v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + c \int_0^1 u(x)v(x)dx = \\ &= u(x)v'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u(x)v''(x)dx + c \int_0^1 u(x)v(x)dx = \\ &= \int_0^1 u(x)(-v''(x) + cv(x))dx = (u, Av). \end{aligned}$$

Если считать, что областью определения рассматриваемого оператора A является линейное многообразие $C^2[0, 1]$, то этот оператор уже не будет симметрическим, так как, повторяя те же выкладки, получим

$$(Au, v) = (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))\Big|_0^1 + (u, Av). \quad (9.13)$$

Отсюда заключаем, что $(Au, v) \neq (u, Av)$ для некоторых функций u и v из $C^2[0, 1]$.

При $c \geq 0$ рассматриваемый линейный оператор (с областью определения $C_0^2[0, 1]$) является и положительным, так как для произвольной функции $u(x) \in C_0^2[0, 1]$ с учетом краевых условий $u(0) = u(1) = 0$ интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}
(Au, u) &= \int_0^1 (-u''(x) + cu(x))u(x)dx = \\
&= -u'(x)u(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (u'(x))^2 dx + c \int_0^1 u^2(x)dx = \\
&= \int_0^1 (u'(x))^2 dx + c\|u\|_{L_2}^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

В случае $c > 0$ равенство $(Au, u) = 0$ возможно лишь при $\|u\|_{L_2}^2 = 0$, откуда следует, что $u(x)$ есть нулевой элемент гильбертова пространства $L_2[0, 1]$. Если $c = 0$, то из равенства $(Au, u) = 0$ следует, что $u'(x) \equiv 0$ в интервале $(0, 1)$. Значит, в этом интервале $u(x) = C = \text{const}$, а в силу однородных краевых условий $C = 0$ и $u(x) \equiv 0$.

При $c > 0$ оператор A является и положительно определенным, так как, согласно (9.14),

$$(Au, u) \geq c\|u\|_{L_2}^2.$$

Пример 9.11. Рассмотрим линейный оператор $A = -\Delta$ из примера 9.8. Используя *вторую формулу Грина*

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_S (u\nabla v - v\nabla u) \mathbf{n} dS,$$

верную для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \in C^2(V)$, получаем

$$\begin{aligned}
(Au, v) - (u, Av) &= \int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \\
&= \int_S (u\nabla v - v\nabla u) \mathbf{n} dS,
\end{aligned} \tag{9.15}$$

где ∇ — оператор Гамильтона; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к кусочно-гладкой поверхности S , ограничивающей пространственную область V .

Отметим, что ∇u равно градиенту действительной функции u , а $(\nabla u) \mathbf{n} = \partial u / \partial n$ — производной этой функции по направлению n внешней нормали к S .

Из (9.15) следует, что равенство $(Au, v) = (u, Av)$ не выполняется для произвольных функций u и v , т. е. оператор $A = -\Delta$ с областью определения $C^2(V) \cap C(\bar{V})$ не является симметрическим. Но если ограничить действие оператора только на функции, удовлетворяющие однородным краевым условиям, положив в (9.8) $g(x) \equiv 0$ на S , то интеграл в правой части (9.15) обратится в нуль, а оператор A станет симметрическим.

Согласно *первой формуле Грина*

$$\int_S v(\nabla u) n dS = \int_V (v \Delta u + \nabla u \nabla v) dV,$$

находим

$$(Au, u) = - \int_V u \Delta u dV = - \int_S u(\nabla u) n dS + \int_V (\nabla u)^2 dV. \quad (9.16)$$

Видим, что при однородных краевых условиях (т. е. при $g(x) \equiv 0$) оператор A будет положительным, если его действие ограничить на функции $u \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$, удовлетворяющие этим краевым условиям. Действительно, согласно (9.16),

$$(Au, u) = \int_V (\nabla u)^2 dV \geq 0.$$

Из равенства $(Au, u) = 0$ следует равенство $\nabla u \equiv 0$. Но тогда $u = \text{const}$, а с учетом однородных краевых условий $u \equiv 0$. Можно показать, что при однородных краевых условиях оператор A будет и положительно определенным [XIII].

Однако оператор A не является положительным, а значит, и положительно определенным, если в качестве его области определения рассматривать все линейное многообразие $C^2(V) \cap C(\bar{V})$. Оказывается, что в этом случае существуют такие функции u , для которых поверхностный интеграл в правой части (9.16) больше тройного интеграла. #

Рассмотрим операторное уравнение $Au = f$, для которого оператор A является линейным.

Теорема 9.1. Если оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является положительным, а уравнение $Au = f$ имеет решение, то это решение единственное.

◀ Пусть одновременно $Au_1 = f$ и $Au_2 = f$. Тогда, обозначив $u = u_1 - u_2$, получим

$$Au = A(u_1 - u_2) = Au_1 - Au_2 = f - f = 0.$$

Следовательно, $(Au, u) = (0, u) = 0$. В силу положительности оператора A заключаем, что $u = 0$ и $u_1 = u_2$. Таким образом, любые два решения уравнения $Au = f$ совпадают. ►

Теорема 9.2 (теорема о квадратичном функционале). Если A — симметрический положительный оператор с областью определения $D(A)$, а $u_0 \in D(A)$ — решение уравнения $Au = f$, то это решение доставляет наименьшее значение квадратичному функционалу

$$J[u] = (Au, u) - 2(u, f).$$

Наоборот, если элемент $u_0 \in D(A)$ доставляет наименьшее значение функционалу $J[u]$, то этот элемент является решением уравнения $Au = f$.

◀ Пусть $Au_0 = f$. Тогда для любого элемента $u \in D(A)$

$$\begin{aligned} J[u] &= (Au, u) - 2(f, u) = (Au, u) - 2(Au_0, u) + \\ &+ (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0) = (A(u - u_0), u - u_0) - \\ &- (Au_0, u_0) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) - (Au_0, u_0), \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $\tilde{u} = u - u_0$. Видно, что функционал достигает своего наименьшего значения $J[u_0] = -(Au_0, u_0)$ при $(A\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$, т. е. при $u = u_0 \in D(A)$.

Пусть теперь элемент $u_0 \in D(A)$ доставляет наименьшее значение функционалу $J[u]$. Выберем произвольный элемент $\Delta u \in D(A)$ так, чтобы $u = u_0 + \Delta u \in D(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} J[u] - J[u_0] &= J[u_0 + \Delta u] - J[u_0] = \\ &= (A(u_0 + \Delta u), u_0 + \Delta u) - 2(f, u_0 + \Delta u) - (Au_0, u_0) + \\ &+ 2(f, u_0) = (A\Delta u, \Delta u) + 2(Au_0 - f, \Delta u) \geq 0. \end{aligned}$$

Записанное неравенство верно для любого элемента Δu . Выбрав $\Delta u = tv$, где элемент $v \in D(A)$ фиксирован, а $t \in \mathbb{R}$ принимает произвольные значения, получим

$$t^2(Av, v) + 2t(Au_0 - f, v) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Но это неравенство верно для любого $t \in \mathbb{R}$ только в том случае, когда $(Au_0 - f, v) = 0$. Так как элемент $v \in D(A)$ произволен, то заключаем, что $Au_0 - f = 0$, или $Au_0 = f$. ►

Теорема о квадратичном функционале устанавливает связь между операторным уравнением и некоторой вариационной задачей. Вместо того чтобы решать операторное уравнение, можно искать наименьшее значение соответствующего функционала. Однако недостаток указанной теоремы состоит в том, что далеко не всегда удастся поставить математическую задачу так, чтобы это было операторное уравнение с симметрическим положительным оператором. Круг таких задач весьма ограничен. Поэтому важно установить и другие условия, при которых возможен переход от операторного уравнения к поиску наименьшего значения соответствующего функционала и которые не содержат требования симметричности или положительности оператора. Если прикладная задача, сводящаяся к решению операторного уравнения, допускает указанный переход к некоторой вариационной задаче, то последнюю мы будем называть *вариационной формулировкой исходной прикладной задачи*.

9.2. Вариационное уравнение

Вернемся к операторному уравнению $Au = f$ с оператором A , действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Допустим, что область определения $D(A)$ этого оператора есть всюду плотное множество в $\mathcal{H}$. Рассмотрим уравнение вида

$$F(u, \delta u) = 0, \tag{9.18}$$

определяемое некоторым функционалом $F[u, \delta u]$ с областью определения $D(F) = D_u \times D_{\delta u}$, где $D(A) \subset D_u \subset \mathcal{H}$, $D_{\delta u} \subset \mathcal{H}$. Если это уравнение эквивалентно операторному уравнению $Au = f$, то его называют *вариационным уравнением*, соответствующим этому операторному уравнению. Условие равносильности уравнений $Au = f$ и $F[u, \delta u] = 0$ означает, что любое

решение операторного уравнения удовлетворяет вариационному уравнению при любой вариации $\delta u \in D_{\delta u}$, а любой элемент $u \in D(A)$, превращающий вариационное уравнение в тождество, есть решение операторного уравнения.

Вариационное уравнение называют **голономным**, если его левая часть является первой вариацией $\delta J[u, \delta u]$ некоторого функционала $J[u]$ с областью определения $D(J) = D_u$. Если такой функционал $J[u]$ удастся найти, то операторное уравнение $Au = f$ будет равносильно уравнению $\delta J[u, \delta u] = 0$, т. е. решение операторного уравнения равносильно поиску стационарных точек функционала $J[u]$. Таким образом, переход к *вариационной формулировке прикладной задачи* может быть реализован построением голономного вариационного уравнения.

В некоторых ситуациях голономное вариационное уравнение, эквивалентное операторному, построить не удастся, но можно построить такое вариационное уравнение, которое среди своих решений содержит все решения операторного уравнения. Тогда, решив построенное вариационное уравнение, нужно выделить среди найденных решений те, которые имеют отношение к операторному уравнению.

В качестве вариационного уравнения, соответствующего операторному уравнению $Au = f$, можно взять следующее:

$$(Au - f, \delta u) = 0, \quad \delta u \in D_{\delta u} \subset \mathcal{H}, \quad (9.19)$$

где $D_{\delta u}$ всюду плотно в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Нетрудно убедиться, что все решения операторного уравнения удовлетворяют уравнению (9.19). Верно и обратное. Если для заданного элемента $u \in D(A)$ равенство (9.19) выполняется для всех элементов δu из всюду плотного в $\mathcal{H}$ множества, то $Au - f = 0$ [IX]. В этом случае u является решением операторного уравнения $Au = f$.

Выясним, при каких условиях вариационное уравнение (9.19), соответствующее линейному оператору A , является голономным, т. е. его левая часть представляет собой первую вариацию некоторого функционала $J[u]$. Сначала разберемся, как ответ на этот вопрос выглядит в конечномерном случае. Пусть A — линейный оператор в N -мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. В некотором ортонормированном базисе действие этого оператора сводится к умножению столбца координат

$u_1, u_2, \dots, u_N$ вектора $\mathbf{u}$ на некоторую квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, а уравнение (9.19) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{kj} u_j - f_k \right) \delta u_k = 0. \quad (9.20)$$

В данном случае вариационное уравнение голономное тогда и только тогда, когда левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $J(u_1, \dots, u_N)$ многих переменных. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \left(\sum_{j=1}^N a_{kj} u_j - f_k \right) = \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{j=1}^N a_{mj} u_j - f_m \right), \quad k, m = \overline{1, N},$$

или

$$a_{km} = a_{mk}, \quad k, m = \overline{1, N}.$$

Итак, условие голономности вариационного уравнения (9.19) равносильно условию, что матрица оператора A в ортонормированном базисе симметрическая. Но последнее означает, что оператор A является самосопряженным. Нетрудно показать, что в случае самосопряженного оператора A в качестве функционала J можно взять $J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \mathbf{f})$.

Перейдем к бесконечномерному случаю. Естественно предположить, что в гильбертовом пространстве голономность вариационного уравнения для линейного оператора также связана с условием симметричности данного оператора. Убедимся в этом. Предположим, что для заданного линейного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, имеющего всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $D(A)$, существует функционал $J[\mathbf{u}]$, для которого $\delta J[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] = (A\mathbf{u} - \mathbf{f}, \delta \mathbf{u})$. Выбрав произвольные функции $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in D(A)$, рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha, \beta) = J[\mathbf{u} + \alpha \mathbf{h} + \beta \mathbf{g}], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (9.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(\alpha, \beta) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - \varphi(\alpha, \beta)}{\Delta\alpha} = \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{J[\mathbf{u} + (\alpha + \Delta\alpha)\mathbf{h} + \beta\mathbf{g}] - J[\mathbf{u} + \alpha\mathbf{h} + \beta\mathbf{g}]}{\Delta\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta J[u + \alpha h + \beta g, h] = (A(u + \alpha h + \beta g) - f, h) = \\
&= (A(u + \alpha h) - f, h) + \beta (Ag, h).
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Мы видим, что функция $\varphi'_\alpha(\alpha, \beta)$ дифференцируема по параметру β и

$$\varphi''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = (Ag, h).$$

Аналогично можно показать, что существует вторая смешанная производная

$$\varphi''_{\beta\alpha}(\alpha, \beta) = (Ah, g).$$

Две смешанные производные $\varphi''_{\alpha\beta}$ и $\varphi''_{\beta\alpha}$ существуют и непрерывны (они попросту постоянны). Поэтому они равны: $\varphi''_{\alpha\beta} = \varphi''_{\beta\alpha}$. Следовательно, для любых функций $h, g \in D(A)$ выполняется равенство

$$(Ag, h) = (Ah, g) = (g, Ah),$$

т. е. оператор A , имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения, является симметрическим. Нетрудно показать, что если оператор A симметрический, то левая часть вариационного уравнения (9.19) представляет собой первую вариацию функционала $J[u] = \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
J[u + t\delta u] - J[u] &= \frac{1}{2}(A(u + t\delta u), u + t\delta u) - \\
&- (f, u + t\delta u) - \frac{1}{2}(Au, u) + (f, u) = \\
&= \frac{1}{2}(t(Au, \delta u) + t(A\delta u, u) + t^2(A\delta u, \delta u)) - t(f, \delta u) = \\
&= (Au - f, \delta u)t + (A\delta u, \delta u)\frac{t^2}{2},
\end{aligned}$$

откуда $\delta J[u, \delta u] = (Au - f, \delta u)$.

Замечание 9.1. Мы рассмотрели случай операторного уравнения $Au = f$ с линейным оператором A . Однако вариационное уравнение (9.19) можно использовать и в нелинейном случае,

но условия голономности вариационного уравнения в нелинейном случае более сложные, а восстановление функционала по голономному уравнению требует значительных усилий.

9.3. Примеры построения функционала по вариационному уравнению

В 9.2 показано, что квадратичный функционал вида

$$J_s[u] = (Au, u) - 2(f, u), \quad (9.23)$$

соответствующий операторному уравнению $Au = f$, где оператор A действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, можно построить в случае, когда оператор A симметрический. Если этот оператор положительный и уравнение $Au = f$ имеет решение $u_0 \in D(A)$, то данное решение единственное (см. теорему 9.1). Если же оператор A и симметрический, и положительный, а уравнение $Au = f$ имеет решение u_0 , то, согласно теореме 9.2, функционал $J_s[u]$ (9.23) достигает на этом решении своего наименьшего значения $J_s[u_0] = -(Au_0, u_0)$.

Из примеров 9.10 и 9.11 видно, что симметричность и положительность оператора, рассматриваемого на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям конкретной краевой задачи, существенным образом зависит от вида этих условий. В краевых задачах прикладного характера эти условия обычно неоднородны, и поэтому на таком множестве функций свойства симметричности и положительности оператора утрачиваются. Тем не менее и в такой ситуации в некоторых случаях можно построить функционал, соответствующий операторному уравнению краевой задачи, если использовать вариационное уравнение, равносильное этому операторному уравнению. Поясним данную процедуру на конкретных примерах.

Пример 9.12. Рассмотрим краевую задачу для ОДУ

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + cu(x) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (9.24)$$

с краевыми условиями

$$u'(0) - \alpha u(0) = \tilde{\alpha}, \quad u'(1) + \beta u(1) = \tilde{\beta}, \quad (9.25)$$

где $c, \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$; $f(x) \in C[0, 1]$.

Как и в примере 9.10, можно показать, что в случае однородных краевых условий ($\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$) линейный оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2} + M_c$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, будет симметрическим, если в качестве его области определения взять всюду плотное в $L_2[0, 1]$ множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих таким краевым условиям. Действительно, для произвольных функций $u, v \in C^2[0, 1]$, удовлетворяющих (9.25), последовательным интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^1 (-u''(x) + cu(x))v(x) dx = \\ &= (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))\Big|_0^1 + (u, Av) = \\ &= u(1)(\tilde{\beta} - \beta v(1)) - v(1)(\tilde{\beta} - \beta u(1)) - \\ &- u(0)(\tilde{\alpha} + \alpha v(0)) + v(0)(\tilde{\alpha} + \alpha u(0)) + (u, Av) = \\ &= \tilde{\beta}(u(1) - v(1)) - \tilde{\alpha}(u(0) - v(0)) + (u, Av). \end{aligned}$$

Таким образом, при однородных краевых условиях ($\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$) оператор A является симметрическим: $(Au, v) = (u, Av)$. Но в общем случае этот оператор перестает быть симметрическим (он даже не является линейным).

Построим вариационное уравнение $(Au - f, \delta u) = 0$ вида (9.19). Согласно выражению для оператора в (9.24), получим

$$(Au - f, \delta u) = \int_0^1 (-u''(x) + cu(x) - f(x))\delta u(x) dx = 0. \quad (9.26)$$

Интегрируем по частям с учетом краевых условий (9.25):

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (-u''(x) + cu(x) - f(x))\delta u(x) dx = \\ &= -u'(x)\delta u(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)\delta u'(x) dx + \int_0^1 (cu(x) - f(x))\delta u(x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\tilde{\beta} - \beta u(1))\delta u(1) + (\tilde{\alpha} + \alpha u(0))\delta u(0) + \int_0^1 u'(x)\delta u'(x)dx + \\
&+ \int_0^1 (cu(x) - f(x))\delta u(x)dx.
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Учитывая общий вид первой вариации функционала интегрального вида (3.3), можем записать:

$$\delta \int_0^1 \frac{(u'(x))^2}{2} dx = \int_0^1 u'(x)\delta u'(x)dx, \quad u \in C^1[0,1], \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned}
&\delta \int_0^1 \left(\frac{cu^2(x)}{2} - f(x)u(x) \right) dx = \\
&= \int_0^1 (cu(x) - f(x))\delta u(x)dx, \quad u \in L_2[0,1].
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Для терминального функционала $T[u] = u^2(a)$ (a фиксировано) непосредственным подсчетом находим

$$\begin{aligned}
\Delta T[u] &= T[u + \delta u] - T[u] = \\
&= (u(a) + \delta u(a))^2 - u^2(a) = 2u(a)\delta u(a) + (\delta u(a))^2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\delta T[u, \delta u] = 2u(a)\delta u(a). \tag{9.30}$$

Приведенные представления первых вариаций функционалов показывают, что правую часть (9.27) можно записать так:

$$\begin{aligned}
(Au - f, \delta u) &= \delta \left(\tilde{\alpha}u(0) - \tilde{\beta}u(1) + \frac{\alpha u^2(0) + \beta u^2(1)}{2} \right) + \\
&+ \delta \int_0^1 \left(\frac{(u'(x))^2 + c(u(x))^2}{2} - f(x)u(x) \right) dx.
\end{aligned}$$

Это выражение является первой вариацией функционала

$$J[u] = \tilde{\alpha}u(0) - \tilde{\beta}u(1) + \frac{\alpha u^2(0) + \beta u^2(1)}{2} + \int_0^1 \left(\frac{(u')^2 + cu^2}{2} - fu \right) dx.$$

В качестве области определения $D(J)$ функционала $J[u]$ можно взять $D(J) = C^1[0, 1]$. Из (9.26) следует, что каждое решение рассматриваемой краевой задачи является стационарной точкой этого функционала.

Аналогично можно построить функционал

$$J[u] = \frac{\tilde{\alpha}p(a)u(a)}{\alpha_1} - \frac{\tilde{\beta}p(b)u(b)}{\beta_1} + \frac{\alpha p(a)u^2(a)}{2\alpha_1} + \frac{\beta p(b)u^2(b)}{2\beta_1} + \int_a^b \left(\frac{p(x)(u'(x))^2 + c(x)(u(x))^2}{2} - f(x)u(x) \right) dx \quad (9.31)$$

с областью определения $D(J) = C^1[a, b]$, стационарной точкой которого является решение краевой задачи для операторного уравнения

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (9.32)$$

с краевыми условиями

$$\alpha_1 u'(a) - \alpha u(a) = \tilde{\alpha}, \quad \beta_1 u'(b) + \beta u(b) = \tilde{\beta}, \quad (9.33)$$

где $c, f \in C[a, b]$; $p \in C^1[a, b]$; $p(a)p(b) \neq 0$; $\alpha, \alpha_1, \tilde{\alpha}, \beta, \beta_1, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$; $\alpha_1\beta_1 \neq 0$. Убедимся в этом следующим образом. Используя представления (9.28)–(9.30), находим вариацию функционала (9.31):

$$\begin{aligned} \delta J[u, \delta u] &= \frac{\tilde{\alpha}p(a)\delta u(a)}{\alpha_1} - \frac{\tilde{\beta}p(b)\delta u(b)}{\beta_1} + \\ &+ \frac{\alpha p(a)u(a)\delta u(a)}{\alpha_1} + \frac{\beta p(b)u(b)\delta u(b)}{\beta_1} + \int_a^b p(x)u'(x)\delta u'(x)dx + \\ &+ \int_a^b (c(x)u(x) - f(x))\delta u(x)dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части этого равенства преобразуем интегрированием по частям:

$$\int_a^b p(x)u'(x)\delta u'(x)dx = p(x)u'(x)\delta u(x)\Big|_a^b - \int_a^b (p(x)u'(x))' \delta u(x)dx,$$

и после подстановки преобразованного интеграла в выражение для $\delta J[u, \delta u]$ получим

$$\begin{aligned} \delta J[u, \delta u] &= \frac{\tilde{\alpha}\delta u(a)}{\alpha_1} - \frac{\tilde{\beta}\delta u(b)}{\beta_1} + \\ &+ \frac{\alpha u(a)\delta u(a)}{\alpha_1} + \frac{\beta u(b)\delta u(b)}{\beta_1} + p(x)u'(x)\delta u(x)\Big|_a^b - \\ &- \int_a^b (p(x)u'(x))' \delta u(x)dx + \int_a^b (c(x)u(x) - f(x))\delta u(x)dx = \\ &= p(a)\frac{\tilde{\alpha} + \alpha u(a) - \alpha_1 u'(a)}{\alpha_1} \delta u(a) - p(b)\frac{\tilde{\beta} - \beta u(b) - \beta_1 u'(b)}{\beta_1} \delta u(b) + \\ &+ \int_a^b \left(-(p(x)u'(x))' + c(x)u(x) - f(x) \right) \delta u(x)dx. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Если некоторая функция $u_0(x) \in C^2[a, b]$ является решением краевой задачи (9.32), (9.33), то эта функция обращает правую часть (9.34) в нуль, т. е. будет стационарной точкой функционала (9.31).

Пример 9.13. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (9.35)$$

где $V \in \mathbb{R}^3$ — пространственная область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S ; $f(\mathbf{x}) \in C(V)$ (см. примеры 9.8 и 9.11).

Краевые условия задачи определим следующим образом. На участках S_g поверхности S известны значения искомой функции $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_g, \quad (9.36)$$

а на остальных участках $S_h = S \setminus S_g$ краевое условие имеет вид

$$\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \alpha u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_h, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (9.37)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, а $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке $\mathbf{x}$.

Предполагаем, что $g(\mathbf{x}) \in C(S_g)$ и $h(\mathbf{x}) \in C(S_h)$. #

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $A = -\Delta$, область определения $D(A)$ которого состоит из функций $u(\mathbf{x})$ линейного многообразия $\mathcal{L}_V = C^2(V) \cap C(V \cup S_g) \cap C^1(V \cup S_h)$, удовлетворяющих краевым условиям (9.36) и (9.37). Область определения оператора всюду плотна в гильбертовом пространстве $L_2(\bar{V})$, а если g и h тождественно равны нулю, является линейным многообразием в $L_2(\bar{V})$. В этом случае оператор A — симметрический. Для произвольных функций u и v из области определения оператора, используя равенство (9.15), получаем

$$\begin{aligned} (Au, v) - (u, Av) &= \int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_S (u\nabla v - v\nabla u) \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{S_g} g(\nabla v - \nabla u) \mathbf{n} dS + \int_{S_h} h(u - v) dS = 0. \end{aligned}$$

В общем случае для вариационного уравнения, соответствующего заданной краевой задаче, имеем

$$(Au - f, \delta u) = \int_V (-\Delta u - f) \delta u dV = 0. \quad (9.38)$$

Используя первую формулу Грина и краевые условия, учитывая представления

$$\delta \int_V \frac{(\nabla u)^2}{2} dV = \int_V \nabla u \delta \nabla u dV, \quad \delta \int_{S_h} \frac{\alpha u^2}{2} dS = \int_{S_h} \alpha u \delta u dS, \quad (9.39)$$

аналогичные (9.28), (9.29), находим

$$\begin{aligned} \int_V (-\Delta u - f) \delta u dV &= - \int_S \nabla u \mathbf{n} \delta u dS + \int_V \nabla u \nabla (\delta u) dV - \\ &- \int_V f \delta u dV = - \int_{S_h} (h - \alpha u) \delta u dS + \int_V \nabla u \nabla (\delta u) dV - \delta \int_V f u dV = \end{aligned}$$

$$= \delta \int_{S_h} \left(\frac{\alpha u^2}{2} - hu \right) dS + \delta \int_V \left(\frac{(\nabla u)^2}{2} - fu \right) dV = 0. \quad (9.40)$$

Обратим внимание на то, что поверхностный интеграл на участках S_g поверхности S исчезает, поскольку на S_g заданы значения искомой функции и, следовательно, $\delta u \equiv 0$ на S_g . Кроме того, мы использовали и краевое условие (9.37).

Предпоследняя часть равенства (9.40) является вариацией функционала

$$J[u] = \int_V \left(\frac{(\nabla u)^2}{2} - fu \right) dV + \int_{S_h} \left(\frac{\alpha u^2}{2} - hu \right) dS. \quad (9.41)$$

В качестве области определения этого функционала можно взять линейное многообразие $C^1(V) \cap C(V \cup S)$, всюду плотное в $L_2(\bar{V})$. Согласно проведенным выкладкам, первая вариация этого функционала на множестве $D(A)$ совпадает с $(Au - f, \delta u)$. Аналогично можно построить функционал

$$J[u] = \int_V \left(k \frac{(\nabla u)^2}{2} - fu \right) dV + \int_{S_h} \frac{k}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha u^2}{2} - hu \right) dS \quad (9.42)$$

с областью определения $D(J) = C^1(V) \cap C(V \cup S)$, соответствующий операторному уравнению

$$-\nabla(k(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad x \in V, \quad (9.43)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(x) = g(x), & x \in S_g, \\ \alpha_1(x)\nabla u(x)n(x) + \alpha(x)u(x) = h(x), & x \in S_h, \end{cases} \quad (9.44)$$

где $f \in C(V)$; $k \in C^1(V) \cap C(S_h)$; $k \neq 0$ на S_h ; $\alpha_1, \alpha, h \in C(S_h)$; $\alpha_1 \neq 0$ на S_h .

Убедимся в том, что вариация функционала $J[u]$ в области определения $D(A)$ оператора A , состоящей из функций линейного многообразия $\mathcal{L}_V$, удовлетворяющих краевым условиям (9.44), совпадает с выражением $(Au - f, \delta u)$. Для этого вычислим вариацию функционала, учитывая представления (9.39):

$$\delta J[u, \delta u] = \int_V k \nabla u \delta \nabla u dV - \int_V f \delta u dV + \int_{S_h} \frac{k}{\alpha_1} (\alpha u - h) \delta u dS.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства преобразуем с помощью формулы Остроградского — Гаусса:

$$\begin{aligned} \int_V k \nabla u \delta \nabla u dV &= \int_V k \nabla u \nabla (\delta u) dV = \\ &= \int_S k \nabla u n \delta u dS - \int_V \nabla (k \nabla u) \delta u dV. \end{aligned}$$

Подставляя преобразованный интеграл в выражение для $\delta J[u, \delta u]$ и учитывая, что $\delta u \equiv 0$ на S_g , находим

$$\begin{aligned} \delta J[u, \delta u] &= \int_S k \nabla u n \delta u dS - \int_V \nabla (k \nabla u) \delta u dV - \\ &- \int_V f \delta u dV + \int_{S_h} \frac{k}{\alpha_1} (\alpha u - h) \delta u dS = - \int_V (\nabla (k \nabla u) + f) \delta u dV + \\ &+ \int_{S_h} \frac{k}{\alpha_1} (\alpha_1 \nabla u n + \alpha u - h) \delta u dS. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Проведенные выкладки показывают, что первая вариация этого функционала на множестве $D(A)$ совпадает с $(Au - f, \delta u)$. Если некоторая функция u_0 является решением краевой задачи (9.43), (9.44), то правая часть (9.45) обращается в нуль, т. е. эта функция будет стационарной точкой функционала (9.42).

Пример 9.14. Попытаемся для краевой задачи (9.9), (9.10) построить по вариационному уравнению (9.19) функционал, соответствующий операторному уравнению этой задачи. Вариационное уравнение (9.19) в данном случае имеет вид

$$\int_a^b (-u''(x) + q(u) - f(x)) \delta u(x) dx = 0. \quad (9.46)$$

Левую часть (9.46) представим суммой двух интегралов:

$$- \int_a^b (u''(x) + f(x)) \delta u(x) dx + \int_a^b q(u) \delta u(x) dx = 0. \quad (9.47)$$

Для первого интеграла в (9.47), так же как в примере 9.12, принимая во внимание то, что $\delta u(a) = 0$, и учитывая второе краевое условие (9.10), находим

$$\begin{aligned}
 & -\int_a^b (u''(x) + f(x)) \delta u(x) dx = -u'(x) \delta u(x) \Big|_a^b + \\
 & + \int_a^b u'(x) (\delta u(x))' dx - \int_a^b f(x) \delta u(x) dx = -(\tilde{\beta} - s(u(b))) \delta u(b) + \\
 & + \int_a^b u'(x) \delta u'(x) dx - \int_a^b \delta (f(x) u(x)) dx = -\delta \left(\tilde{\beta} u(b) - \int_0^{u(b)} s(u) du \right) + \\
 & + \delta \int_a^b \left(\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x) u(x) \right) dx. \tag{9.48}
 \end{aligned}$$

Второй интеграл в (9.47) представим в виде

$$\int_a^b q(u) \delta u(x) dx = \delta \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(u) du. \tag{9.49}$$

В итоге из (9.47)–(9.49) получаем

$$\begin{aligned}
 & -\delta \left(\tilde{\beta} u(b) - \int_0^{u(b)} s(u) du \right) + \\
 & + \delta \int_a^b \left(\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x) u(x) \right) dx + \delta \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(u) du = 0.
 \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства есть первая вариация функционала

$$\begin{aligned}
 J[u] = & -\tilde{\beta} u(b) + \int_a^b \frac{(u'(x))^2}{2} dx - \int_a^b f(x) u(x) dx + \\
 & + \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(u) du + \int_0^{u(b)} s(u) du, \tag{9.50}
 \end{aligned}$$

в качестве области определения $D(J)$ которого возьмем линейное многообразие $C^1[a, b]$. На множестве функций $u(x)$ из $D(J)$, удовлетворяющих краевому условию $u(a) = \tilde{\alpha}$, вариация функционала совпадает с левой частью $(Au - f, \delta u)$ вариационного уравнения.

9.4. Исследование выпуклости функционала

Для каждого из построенных в примерах 9.12–9.14 функционалов пока удалось лишь установить, что если соответствующая ему краевая задача имеет решение, то это решение является стационарной точкой этого функционала. Естественно, возникают вопросы: будет ли у такого функционала эта точка единственной и будет ли в этой точке функционал достигать наименьшего или наибольшего значения? Ответы на эти вопросы можно получить путем проверки свойства выпуклости функционала.

Подмножество M линейного пространства $\mathcal{L}$ называют **выпуклым множеством**, если для любых элементов $u, v \in M$ и любого числа $\sigma \in [0, 1]$ элемент $\sigma u + (1 - \sigma)v$ также принадлежит M . Простейшим примером выпуклого множества является само линейное пространство $\mathcal{L}$, а также любое его линейное многообразие. Функционал $J[u]$, определенный на выпуклом множестве $M = D(J)$, называют **выпуклым функционалом**, если для любых $u_1, u_2 \in M$ и $\sigma \in [0, 1]$

$$J[\sigma u_1 + (1 - \sigma)u_2] \leq \sigma J[u_1] + (1 - \sigma)J[u_2]. \quad (9.51)$$

Если при любых $u_1 \neq u_2$ и $\sigma \in (0, 1)$ в (9.51) выполнено строгое неравенство, т. е.

$$R(u_1, u_2) = \sigma J[u_1] + (1 - \sigma)J[u_2] - J[\sigma u_1 + (1 - \sigma)u_2] > 0, \quad (9.52)$$

то функционал $J[u]$ называют **строго выпуклым функционалом**. Отметим, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^1$ понятие функционала сводится к понятию действительной функции одного действительного переменного. В этом случае понятие выпуклого (строго выпуклого) функционала равнозначно понятию выпуклой (строго выпуклой) функции [II].

Пример 9.15. Выпуклым функционалом является линейный функционал. В нормированном пространстве $\mathcal{N}$ выпук-

лым функционалом является норма $\|u\|$, так как из неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \|\sigma u + (1-\sigma)v\| &\leq \|\sigma u\| + \|(1-\sigma)v\| = \\ &= \sigma\|u\| + (1-\sigma)\|v\|, \quad u, v \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Взяв неубывающую строго выпуклую вниз функцию $f(x)$ действительного x (например, $f(x) = x^2$), получим строго выпуклый функционал $J[u] = f(\|u\|)$. Действительно,

$$\begin{aligned} f(\|\sigma u + (1-\sigma)v\|) &\leq f(\sigma\|u\| + (1-\sigma)\|v\|) < \\ < \sigma f(\|u\|) + (1-\sigma)f(\|v\|), \quad u, v \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

В частности, $\|u\|^2$ — строго выпуклый функционал в нормированном пространстве.

Замечание 9.2. Непосредственно из определений вытекает, что сумма выпуклых функционалов является выпуклым функционалом, а сумма выпуклого и строго выпуклого функционалов является строго выпуклым функционалом. В частности, если $F[u]$ — линейный функционал и функционалы $J[u]$ и $J_1[u]$ связаны соотношением $J[u] = J_1[u] + F[u]$, то они выпуклые (строго выпуклые) одновременно. Это означает, что при исследовании функционала $J[u]$ на выпуклость в его представлении можно опускать линейные относительно элемента u слагаемые. Например, квадратичный функционал $J[u] = (Au, u) - 2(f, u)$ будет выпуклым (строго выпуклым) тогда и только тогда, когда выпуклым (строго выпуклым) является функционал $J_2[u] = (Au, u)$.

Пример 9.16. Выясним, при каких условиях функционал $J_2[u] = (Au, u)$, построенный по линейному оператору A , будет строго выпуклым. Для этого необходимо проверить неравенство (9.52). Для произвольных элементов $u, v \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} R(u_1, u_2) &= \sigma(Au_1, u_1) + (1-\sigma)(Au_2, u_2) - \\ &- (A(\sigma u_1 + (1-\sigma)u_2), \sigma u_1 + (1-\sigma)u_2) = \\ &= \sigma(1-\sigma)((Au_1, u_1) + (Au_2, u_2) - (Au_1, u_2) - (Au_2, u_1)) = \\ &= \sigma(1-\sigma)(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Так как $\sigma(1-\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0,1)$, заключаем, что функционал $J_2[u] = (Au, u)$ будет строго выпуклым, если A — положительный оператор.

Выпуклые функционалы имеют несколько важных свойств.

Свойство 1. Ограничение выпуклого (строго выпуклого) функционала на выпуклое множество является выпуклым (строго выпуклым) функционалом.

◀ Пусть $J[u]$ — выпуклый функционал и $M \subset D(J)$ — выпуклое множество. Тогда функционал $J_M[u]$, определенный на множестве M и совпадающий на этом множестве с функционалом $J[u]$ (т. е. $J_M[u]$ есть ограничение $J[u]$ на M), будет выпуклым функционалом. Действительно, для любых элементов $u, v \in M$ и любого $\sigma \in (0, 1)$ элемент $\sigma u + (1 - \sigma)v$ принадлежит M и при этом в силу выпуклости функционала $J[u]$ верно неравенство (9.51). А это и значит, что функционал $J_M[u]$ выпуклый. Рассуждения в случае строго выпуклого функционала аналогичны. ►

Свойство 2. Если функционал $J[u]$ выпуклый (строго выпуклый), то при $c \geq 0$ ($c > 0$) функционал $cJ[u]$ тоже выпуклый (строго выпуклый).

◀ Свойство выпуклости функционала $J[u]$ означает выполнение неравенства (9.51). Умножив это неравенство на c , получим утверждение о выпуклости функционала $cJ[u]$. В случае строго выпуклого функционала рассуждения аналогичны. ►

Свойство 3. Если $J[u]$ — выпуклый функционал, а $f(x)$ — выпуклая (вниз) неубывающая функция действительного переменного x , определенная на всей числовой оси, то композиция $f(J[u])$ — выпуклый функционал. В частности, если $J[u]$ — линейный функционал, то $J^2[u]$ — выпуклый функционал.

◀ Для выпуклой функции при любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in (0, 1)$ верно неравенство

$$f(\sigma x + (1 - \sigma)y) \leq \sigma f(x) + (1 - \sigma)f(y).$$

Рассматривая в качестве x и y значения функционала, получаем

$$\begin{aligned} f(J(\sigma u_1 + (1 - \sigma)u_2)) &\leq f(\sigma J[u_1] + (1 - \sigma)J[u_2]) \leq \\ &\leq \sigma f(J[u_1]) + (1 - \sigma)f(J[u_2]), \end{aligned}$$

где $u_1, u_2 \in D(J)$; $\sigma \in (0, 1)$.

Если $J[u]$ — линейный функционал, то $|J[u]|$ — выпуклый функционал, так как

$$\begin{aligned} |J[\sigma u_1 + (1-\sigma)u_2]| &= |\sigma J[u_1] + (1-\sigma)J[u_2]| \leq \\ &\leq \sigma |J[u_1]| + (1-\sigma)|J[u_2]|, \end{aligned}$$

где $u_1, u_2 \in D(J)$; $\sigma \in (0, 1)$.

Выбрав выпуклую неубывающую функцию $f(x)$, равную x^2 при $x \geq 0$ и нулю при $x < 0$, заключаем, что функционал $J^2[u] = f(|J[u]|)$ является выпуклым. ►

Свойство 4. Непрерывный выпуклый (в частности, непрерывный строго выпуклый) функционал $J[u]$ достигает наименьшего значения на любом замкнутом ограниченном множестве в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если $J[u] \rightarrow +\infty$ при $\|u\| \rightarrow \infty$, то выпуклый функционал $J[u]$ достигает наименьшего значения на любом замкнутом в $\mathcal{H}$ множестве*. #

Свойство 5. Если строго выпуклый функционал $J[u]$ достигает на выпуклом множестве M своего наименьшего значения J_* , то элемент u_* , на котором достигается это значение, единственный.

◄ Пусть $J[u_1] = J_* = J[u_2]$. Тогда, полагая $\sigma = 1/2$ в (9.52), получаем

$$\begin{aligned} R(u_1, u_2) &= \frac{1}{2}J[u_1] + \frac{1}{2}J[u_2] - \\ &- J\left[\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right] = J_* - J\left[\frac{u_1 + u_2}{2}\right] > 0, \end{aligned}$$

т. е. $J[(u_1 + u_2)/2] < J_*$, а это противоречит тому, что J_* является наименьшим значением функционала на множестве M . ►

Свойство 6. Если строго выпуклый функционал $J[u]$, у которого всюду в области определения существует дифференциал Гато, имеет стационарную точку, то эта точка единственная и в ней функционал достигает наименьшего значения.

◄ Покажем, что стационарная точка строго выпуклого функционала является его точкой минимума. Тогда, согласно свойству 5, эта точка является единственной.

* См.: Экланд И., Теем Р.

Пусть $u_0 \in D(J)$ — стационарная точка функционала $J[u]$. Выберем произвольную точку $u \in D(J)$. Тогда, согласно свойству строгой выпуклости функционала $J[u]$, для любого числа $\sigma \in (0, 1)$

$$\sigma J[u] + (1 - \sigma)J[u_0] > J[\sigma u + (1 - \sigma)u_0].$$

Вычитая из обеих частей неравенства $J[u_0]$ и деля на σ , получаем

$$J[u] - J[u_0] > \frac{J[\sigma u + (1 - \sigma)u_0] - J[u_0]}{\sigma} = \frac{J[u_0 + \sigma \delta u] - J[u_0]}{\sigma},$$

где $\delta u = u - u_0$.

Так как функционал $J[u]$ имеет дифференциал Гато, то существует предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{J[u_0 + \sigma \delta u] - J[u_0]}{\sigma} = \delta J[u_0, \delta u].$$

Этот предел равен нулю, потому что u_0 — стационарная точка. Но тогда

$$J[u] - J[u_0] \geq \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{J[u_0 + \sigma \delta u] - J[u_0]}{\sigma} = 0,$$

т. е. $J[u] \geq J[u_0]$ и u_0 в силу произвольного выбора $u \in D(A)$ является точкой минимума функционала $J[u]$. ►

Пример 9.17. Выясним, при каких условиях функционал $J[u]$, определяемый соотношением (9.31), является выпуклым. Область определения $D(J) = C^1[a, b]$ этого функционала является линейным многообразием, т. е. представляет собой выпуклое множество. Согласно замечанию 9.2, линейные слагаемые можно опустить, поскольку они не влияют на выпуклость функционала. Функционал будет выпуклым, если каждое из оставшихся слагаемых определяет выпуклый функционал на $D(J)$. При этом, если одно из этих слагаемых определяет строго выпуклый функционал, то и функционал $J[u]$ является строго выпуклым.

Интеграл

$$\int_a^b c(x)u(x)v(x)dx$$

в случае $c(x) > 0$, $x \in [a, b]$, можно трактовать как скалярное произведение функций $u(x)$ и $v(x)$ в линейном пространстве $C^1[a, b]$. Поэтому слагаемое

$$\frac{1}{2} \int_a^b c(x) (u(x))^2 dx$$

в (9.31) определяет строго выпуклый функционал как половину квадрата нормы (см. пример 9.15 и свойство 2).

Слагаемое

$$\frac{1}{2} \int_a^b p(x) (u'(x))^2 dx$$

при $p(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, определяет выпуклый функционал, поскольку для любых функций $u(x)$, $v(x) \in C^1[a, b]$ и любого $\sigma \in (0, 1)$ и $\mu = 1 - \sigma$ имеем

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \sigma \int_a^b p(x) (u'(x))^2 dx + \mu \int_a^b p(x) (v'(x))^2 dx - \\ &- \int_a^b p(x) (\sigma u'(x) + \mu v'(x))^2 dx = \sigma \mu \int_a^b p(x) (u'(x) - v'(x))^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при построении функционала было использовано условие $p(a)p(b) \neq 0$ (см. пример 9.12), что вместе с условием неотрицательности функции $p(x)$ дает $p(a) > 0$ и $p(b) > 0$. Поэтому слагаемые

$$\frac{\alpha p(a) u^2(a)}{2\alpha_1}, \quad \frac{\beta p(b) u^2(b)}{2\beta_1}$$

определяют выпуклые функционалы, если $\alpha/\alpha_1 \geq 0$ и $\beta/\beta_1 \geq 0$. Это вытекает из свойств 2 и 3.

Итак, если $p(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, $c(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, $p(a)p(b) \neq 0$, $\alpha/\alpha_1 \geq 0$, $\beta/\beta_1 \geq 0$, то функционал (9.31) строго выпуклый.

Пример 9.18. При исследовании выпуклости функционала $J[u]$ (9.42), область определения которого $D(J) = C^1(V) \cap C(\bar{V})$ есть выпуклое множество, можно не рассматривать линейные слагаемые. Этот функционал является выпуклым, если слагаемые

$$\frac{1}{2} \int_V k(\mathbf{x})(\nabla u)^2 dV, \quad \frac{1}{2} \int_{S_h} \frac{k(\mathbf{x})}{\alpha_1(\mathbf{x})} \alpha(\mathbf{x}) u^2 dS$$

определяют выпуклые функционалы. Можно показать, что достаточным условием выпуклости первого из них является неотрицательность функции $k(\mathbf{x})$ в V , $k(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in V$. Предполагая, что эта функция непрерывна, заключаем, что она неотрицательна и на границе области, т. е. $k(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in S_h$. С учетом этого нетрудно показать, что выпуклость второго функционала, определяемого интегралом по S_h , будет следовать из соотношения $\alpha(\mathbf{x})/\alpha_1(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in S_h$.

Итак, рассматриваемый функционал выпуклый при $k(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in V$, и $\alpha(\mathbf{x})/\alpha_1(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in S_h$. Можно показать, что если $k(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in V$, то функционал (9.42) является строго выпуклым.

Пример 9.19. Функционал (9.50) будет выпуклым, если выпуклы функционалы

$$\int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(\xi) d\xi, \quad \int_0^{u(b)} s(\xi) d\xi, \quad (9.53)$$

поскольку первое и третье слагаемые в правой части (9.50) линейные и не влияют на выпуклость функционала $J[u]$, а второе слагаемое определяет выпуклый функционал.

Обозначив через $Q(x)$ и $S(x)$ первообразные функций $q(x)$ и $s(x)$, принимающие значение 0 в точке $x = 0$, можем записать

$$J_q[u] = \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(\xi) d\xi = \int_a^b Q(u(x)) dx,$$

$$J_s[u] = \int_0^{u(b)} s(\xi) d\xi = S(u(b)).$$

Выпуклость функционала $J_s[u]$ означает выполнение неравенства

$$S(\sigma u_1(b) + \mu u_2(b)) \leq \sigma S(u_1(b)) + \mu S(u_2(b)),$$

где $u_1(x)$, $u_2(x) \in C^1[a, b]$; $\sigma \in (0, 1)$, $\mu = 1 - \sigma$, а это равносильно выпуклости (вниз) функции $S(x)$.

Как известно [II], критерием выпуклости дифференцируемой функции является неубывание ее производной. Поэтому функционал $J_s[u]$ выпуклый, если функция $s(x)$ не убывает на $[a, b]$.

Условием, достаточным для выпуклости функционала $J_q[u]$, является выпуклость функции $Q(x)$ или неубывание функции $q(x)$. Действительно, в случае выпуклой функции $Q(x)$ имеем

$$\begin{aligned} J_q[\sigma u_1 + \mu u_2] &= \int_a^b Q(\sigma u_1(x) + \mu u_2(x)) dx \leq \\ &\leq \int_a^b (\sigma Q(u_1(x)) + \mu Q(u_2(x))) dx = \sigma \int_a^b Q(u_1(x)) dx + \\ &+ \mu \int_a^b Q(u_2(x)) dx = \sigma J_q[u_1] + \mu J_q[u_2], \end{aligned}$$

где $u_1(x), u_2(x) \in C^1[a, b]$; $\sigma \in (0, 1)$; $\mu = 1 - \sigma$.

Итак, функционал (9.50) является выпуклым при условии, что функции $q(u)$ и $s(u)$ не убывают. Нетрудно убедиться, что этот функционал будет строго выпуклым, если функция $q(x)$ является монотонно возрастающей. Отметим, что строгая монотонность $s(x)$ не обеспечивает строгой выпуклости функционала $J_s[u]$, так как

$$J_s[\sigma u_1 + (1 - \sigma)u_2] = \sigma J_s[u_1] + (1 - \sigma)J_s[u_2]$$

для любых функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, имеющих одинаковые значения в точке b .

Вопросы и задачи

9.1. Убедитесь, что соотношения (9.2) и (9.3) удовлетворяют всем аксиомам скалярного произведения и нормы соответственно.

9.2. Постройте функционал, соответствующий краевой задаче для ОДУ (9.32) с краевыми условиями

$$u'(a) - \alpha u(a) = \tilde{\alpha}, \quad u(b) = \tilde{\beta},$$

где $\alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$.

Исследуйте этот функционал на выпуклость и укажите для него множество допустимых функций.

9.3. Для ОДУ

$$p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

с краевыми условиями $u(a) = u(b) = 0$ укажите требования к функциям $p(x)$, $q(x)$ и $c(x)$, выполнение которых позволит построить соответствующий этой краевой задаче строго выпуклый функционал. На каком множестве функций допустимо рассматривать этот функционал?

9.4. Постройте функционал, соответствующий краевой задаче для дифференциального уравнения

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in V,$$

где $c(x), f(x) \in C(V)$, с краевыми условиями (9.36), (9.44).

Укажите множество функций, на которых допустимо рассматривать этот функционал.

10. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

10.1. Минимизирующие последовательности

Рассмотрим некоторый функционал $J[u]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, ограниченный снизу, т. е.

$$\inf_{u \in D(J)} J[u] = \alpha > -\infty.$$

Бесконечную последовательность элементов $u_n \in D(J)$, $n \in \mathbb{N}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[u_n] = \alpha,$$

называют *минимизирующей последовательностью* функционала $J[u]$.

Построение минимизирующей последовательности позволяет найти наименьшее значение рассматриваемого функционала. При некоторых дополнительных свойствах функционала можно утверждать, что минимизирующая последовательность является фундаментальной в заданном функциональном пространстве. В случае полного функционального пространства это означает, что минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ сходится по норме пространства к некоторому элементу u_0 . Этот элемент будет точкой минимума функционала, если функционал непрерывен.

Квадратичный функционал $J_s[u] = (Au, u) - 2(f, u)$, соответствующий операторному уравнению $Au = f$ с симметрическим оператором A , задан лишь в области определения $D(A)$ этого оператора. Всюду в $D(A)$ этот функционал имеет первую вариацию $\delta J[u] = 2(Au, \delta u) - 2(f, \delta u)$. Если A — положительный оператор, то функционал $J[u]$ строго выпуклый. Если он до-

стигает своего минимума в некоторой точке u_* , то эта точка единственная и является стационарной точкой функционала, т. е. $\delta J[u_*, \delta u] = 0$ (см. 9.4, свойства 5 и 6).

Если оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является положительно определенным, т. е. для некоторого числа $\gamma > 0$ выполняется неравенство $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $u \in D(A)$, то можно ввести *энергетическое скалярное произведение*

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad (10.1)$$

индуцирующее *энергетическую норму*

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}. \quad (10.2)$$

При этом

$$\|u\|_A \geq \gamma \|u\|. \quad (10.3)$$

Несложно проверить, что введенное таким образом умножение удовлетворяет всем аксиомам скалярного умножения. С помощью энергетического скалярного произведения квадратичный функционал можно записать в виде

$$J_s[u] = (u, u)_A - 2(f, u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u). \quad (10.4)$$

Его обычно называют *функционалом энергии*.

Отметим, что из сходимости последовательности $u_n \in D(A)$ по энергетической норме* к некоторому элементу $u \in D(A)$ следует сходимость $u_n \rightarrow u$ и по норме гильбертова пространства, поскольку для положительно определенного оператора A , согласно (10.3),

$$\|u_n - u\| \leq \gamma^{-1} \|u_n - u\|_A. \quad (10.5)$$

Поэтому если $D(A)$ — полное евклидово пространство относительно энергетического скалярного произведения, то оно является линейным подпространством гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (т. е. замкнутым линейным многообразием). Если же $D(A)$ относительно энергетического скалярного произведения не является полным, то его можно пополнить — расширить до полного евклидова пространства $\mathcal{H}_A$, причем такое попол-

* Такую сходимость иногда кратко называют *сходимостью по энергии*.

нение можно провести в рамках гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Полное евклидово пространство $\mathcal{H}_A$ называют *энергетическим пространством*. Нетрудно видеть, что функционал энергии $J_s[u]$ естественным образом продолжается на все линейное пространство $\mathcal{H}_A$ с помощью той же формулы (10.4).

Теорема 10.1. Если A — положительно определенный оператор в $\mathcal{H}$ и u_0 — решение операторного уравнения $Au = f$, то любая минимизирующая последовательность функционала энергии сходится к u_0 .

◀ Пусть $Au_0 = f$ и $u \in D(A)$. Тогда, используя свойства скалярного умножения и учитывая симметричность и положительность оператора A , получаем

$$\begin{aligned} J_s[u] &= (u, u)_A - 2(Au_0, u) + (u_0, u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \geq -\|u_0\|_A^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Из этих преобразований видно, что элемент u_0 является точкой минимума функционала $J_s[u]$ и значение $J_s[u_0] = -\|u_0\|_A^2$ для функционала наименьшее. При этом

$$\|u - u_0\|_A^2 = J_s[u] + \|u_0\|_A^2 = J_s[u] - J_s[u_0].$$

Если последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей для функционала $J_s[u]$, то $J_s[u_n] - J_s[u_0] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, и $\|u - u_0\|_A^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. минимизирующая последовательность сходится к u_0 по энергии. Согласно (10.5), эта последовательность сходится к u_0 также по норме гильбертова пространства $\mathcal{H}$. ►

Напомним, что в случае положительного (в частности, положительно определенного) симметрического оператора A любое решение операторного уравнения $Au = f$ является точкой минимума функционала энергии, и наоборот (см. теорему 9.2), а согласно теореме 9.1, такая точка единственная. Но вопрос, существует ли такая точка и при каких условиях, пока открыт.

Теорема 10.2. Функционал энергии имеет в энергетическом пространстве точку минимума, и притом единственную.

◀ Согласно представлению (10.4), функционал энергии $J_s[u]$ является строго выпуклым, так как в этом представлении слагаемое $2(f, u)$ является линейным функционалом и его можно не учитывать (см. замечание 9.2), а другое слагаемое — квадрат нормы — является строго выпуклым функционалом (см. пример 9.15). При этом, согласно неравенствам Коши — Буняковского и (10.3),

$$\begin{aligned} J_s[u] &= \|u\|_A^2 - 2(f, u) \geq \|u\|_A^2 - 2\|f\|\|u\| \geq \\ &\geq \|u\|_A^2 - \frac{2}{\gamma^2}\|f\|_A\|u\|_A = \|u\|_A \left(\|u\|_A - \frac{2}{\gamma^2}\|f\|_A \right) \rightarrow +\infty, \\ \|u\| &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что относительно энергетической нормы функционал энергии — непрерывный функционал. Действительно, с учетом неравенства (10.5) имеем

$$\begin{aligned} |J_s[u + \delta u] - J_s[u]| &= \\ &= \left| \|u + \delta u\|_A^2 - 2(f, u + \delta u) - \|u\|_A^2 + 2(f, u) \right| \leq \\ &\leq \left| \|u + \delta u\|_A^2 - \|u\|_A^2 \right| + 2|(f, \delta u)| \leq 2|(u, \delta u)_A| + \|\delta u\|_A^2 + \\ &+ 2\|f\|\|\delta u\| \leq 2\|u\|_A\|\delta u\|_A + \|\delta u\|_A^2 + \frac{2}{\gamma^2}\|f\|_A\|\delta u\|_A \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\|\delta u\|_A \rightarrow 0$. А это и означает, что функционал $J_s[u]$ непрерывен в произвольно взятой точке $u \in D(J_s)$.

Итак, функционал энергии непрерывен. Поэтому в силу свойства 4 (см. 9.4) он достигает наименьшего значения в энергетическом пространстве. Согласно свойству 5 (см. 9.4), точка минимума у строго выпуклого функционала единственная. ►

Как утверждается в доказанной теореме, функционал энергии достигает наименьшего значения на некотором элементе u_* , причем наименьшее значение функционала равно $-\|u_*\|_A^2$. Если $u_* \in D(A)$, то этот элемент, согласно теореме 9.2, являет-

ся решением операторного уравнения $Au = f$. Но это выполняется не всегда, и если $u_* \notin D(A)$, то операторное уравнение не имеет решений, так как любое решение u_0 операторного уравнения есть точка минимума функционала $J_s[u]$. Нетрудно показать, что тогда u_0 есть точка минимума функционала энергии и в $\mathcal{H}_A$, т. е. должна совпадать с u_* .

Если операторное уравнение $Au = f$ имеет решение, то его называют *классическим решением*. В случае симметрического положительно определенного оператора A , если операторное уравнение не имеет решений, интерес представляет точка минимума u_* функционала энергии, ее называют *обобщенным решением* уравнения $Au = f$.

Напомним, что $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ есть *сепарабельное гильбертово пространство*. Доказано*, что и соответствующее энергетическое пространство $\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H}$, будучи линейным подпространством гильбертова пространства $\mathcal{H}$, также является сепарабельным. В таком линейном пространстве существует *счетный базис* $\{u_m\}$. При этом, по предположению, $D(A)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$, следовательно, счетный базис состоит только из элементов этого множества [IX]. При заданном счетном базисе обобщенное решение представим в виде

$$u_* = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m, \quad a_m \in \mathbb{R}, \quad (10.7)$$

где сходимость ряда рассматривается относительно энергетической нормы.

Если последовательность $\{u_m\}$ является *ортонормированной системой функций* гильбертова пространства $\mathcal{H}_A$, то ряд (10.7) будет *рядом Фурье* по этой системе и его коэффициенты a_m можно найти по формулам Эйлера — Фурье:

$$a_m = (u_*, u_m)_A = (f, u_m), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10.8)$$

Последовательность функций

$$\tilde{u}_N = \sum_{m=1}^N a_m u_m, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (10.9)$$

* См.: Треногин В.А.

представляющая собой последовательность частичных сумм ряда (10.7), сходится по энергетической норме к обобщенному (или классическому) решению u_* . В силу непрерывности функционала энергии эта последовательность является минимизирующей для функционала $J_s[u]$. Элемент $\tilde{u}_N$ при фиксированном N называют *приближенным решением операторного уравнения* $Au = f$.

Если счетный базис является ортонормированным, то для частичных сумм ряда (10.7), являющегося в этом случае рядом Фурье, верно соотношение $\|u_{N+1} - u_*\|_A \leq \|u_N - u_*\|_A$, $N = 1, 2, \dots$, т. е. последовательность $\{\|u_N - u_*\|_A\}$ монотонно убывает. Значит, с ростом числа N функций u_m , используемых в приближенном решении (10.9), точность приближенного решения (в смысле энергетической нормы) уравнения $Au = f$ возрастает.

Однако сходимость минимизирующей последовательности еще не означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|A\tilde{u}_N - f\| = 0, \quad (10.10)$$

т. е. стремится к нулевому элементу *невязка* в уравнении $Au = f$ при подстановке в него приближенного решения $\tilde{u}_N$. Соотношение (10.10) имеет смысл лишь в том случае, когда $u_m \in D(A)$, $m = \overline{1, N}$.

Отметим, что установленные для случая положительно определенного оператора результаты имеют главным образом теоретическое значение, поскольку на практике этот случай встречается достаточно редко. Однако возможность построить минимизирующую последовательность в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве лежит в основе методов приближенного решения широкого круга прикладных вариационных задач. При этом важно предварительно убедиться, что это пространство совпадает с множеством допустимых функций для функционала, входящего в вариационную формулировку конкретной краевой задачи. В качестве такого пространства обычно можно выбрать множество функций, интегрируемых с квадратом и весом вместе со своими производными определенного порядка.

Пример 10.1. Рассмотрим функционал $J[u]$, определяемый соотношением (9.31), в котором $p(x) \geq 0$, $c(x) > 0$ на отрезке

$[a, b]$ и $\alpha/\alpha_1 \geq 0$, $\beta/\beta_1 \geq 0$. Областью определения этого функционала является линейное многообразие $C^1[a, b]$ в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$. Введем в $C^1[a, b]$ скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \frac{\alpha p(a)u(a)v(a)}{\alpha_1} + \frac{\beta p(b)u(b)v(b)}{\beta_1} + \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)) dx. \quad (10.11)$$

При этом выполняются все аксиомы скалярного умножения. Пополненное относительно скалярного умножения линейное многообразие $C^1[a, b]$ становится сепарабельным гильбертовым пространством, в котором функционал $J[u]$ запишем в виде

$$J[u] = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_a^b f(x)u(x) dx + \frac{\tilde{\alpha}p(a)u(a)}{\alpha_1} - \frac{\tilde{\beta}p(b)u(b)}{\beta_1}, \quad (10.12)$$

а сходимость минимизирующей последовательности этого функционала рассматривать по норме, индуцированной скалярным произведением (10.11).

Пример 10.2. Функционал $J[u]$ (9.42) определен на линейном многообразии $D(J) = C^1(V) \cap C(\bar{V})$ в гильбертовом пространстве $L_2(\bar{V})$. Он является выпуклым при $k(x) \geq 0$, $x \in V$, и $\alpha(x)/\alpha_1(x) \geq 0$, $x \in S_h$ (см. пример 9.18). В $D(J)$ введем скалярное произведение

$$(u, v) = \int_V k \nabla u \nabla v dV + \int_{S_h} \frac{k\alpha}{\alpha_1} uv dS. \quad (10.13)$$

После пополнения относительно введенного скалярного умножения получаем сепарабельное гильбертово пространство, в котором функционал запишем в виде

$$J[u] = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_V f u dV - \int_{S_h} \frac{k}{\alpha_1} h u dS. \quad (10.14)$$

Сходимость минимизирующей последовательности этого функционала удобно рассматривать относительно нормы, индуцированной введенным скалярным произведением. #

Характерной особенностью записи функционалов в виде (10.12) и (10.14) является то, что в них как слагаемое входит квадрат нормы. Именно это слагаемое определяет строгую выпуклость функционала и тем самым единственность его стационарной точки. Такая запись оказалась возможной благодаря введению соответствующего скалярного произведения. Однако в случае функционала (9.50), отвечающего нелинейной краевой задаче, не удастся ввести подобное скалярное произведение. Поэтому сходимость минимизирующей последовательности этого функционала приходится рассматривать относительно нормы, индуцированной исходным скалярным произведением в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

10.2. Методы приближенного решения вариационных задач

Пусть линейный оператор A , действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является положительно определенным с областью определения $D(A)$, всюду плотной в $\mathcal{H}$. Тогда $D(A)$ можно пополнить до *энергетического пространства* $\mathcal{H}_A$. Последовательность приближенных решений $\tilde{u}_N$ операторного уравнения $Au = f$ будем искать в виде последовательности частичных сумм ряда (10.7):

$$\tilde{u}_N = \sum_{m=1}^N a_m u_m, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (10.15)$$

где $\{u_m\}$ — *счетный базис* в $\mathcal{H}_A$.

В 10.1 показано, что $\{\tilde{u}_N\}$ является минимизирующей последовательностью функционала, сходящейся к обобщенному решению по энергетической норме.

В силу введенной в $\mathcal{H}_A$ энергетической нормы для элемента $\tilde{u}_N$ вычислим

$$\|\tilde{u}_N\|_A^2 = \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m (u_m, u_n)_A. \quad (10.16)$$

Если счетный базис $\{u_m\}$ является ортонормированной системой функций в $\mathcal{H}_A$, то (10.16) можно упростить:

$$\|\tilde{u}_N\|_A^2 = \sum_{m=1}^N a_m^2 \|u_m\|_A^2. \quad (10.17)$$

В этом случае коэффициенты a_m можно найти по формулам Эйлера — Фурье (10.8). Однако построение ортонормированной системы (например, с помощью *процесса ортогонализации Грама — Шмидта* из некоторого исходного счетного базиса) — достаточно трудоемкий процесс. Способ нахождения коэффициентов a_m для произвольного счетного базиса в $\mathcal{H}_A$ называют *методом Рунца*. Суть метода состоит в следующем.

Если подставить (10.15) вместо u в *квадратичный функционал* $J_s[u] = \|u\|_A^2 - 2(f, u)$, достигающий на обобщенном решении $u_* \in \mathcal{H}_A$ своего наименьшего значения, то, учитывая (10.16), получим многочлен N переменных второй степени

$$\begin{aligned} J_s[\tilde{u}_N] &= \|\tilde{u}_N\|_A^2 - 2(f, \tilde{u}_N) = \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m (u_m, u_n)_A - 2 \sum_{m=1}^N a_m (f, u_m) \end{aligned}$$

относительно коэффициентов a_m , $m = \overline{1, N}$, определяющий дифференцируемую функцию в $\mathbb{R}^N$. Поскольку квадратичный функционал ограничен снизу, то эта функция также ограничена снизу и достигает минимума при некотором наборе значений коэффициентов a_m . Для нахождения этих значений можно использовать необходимые условия минимума функции многих переменных:

$$\frac{\partial J_s[\tilde{u}_N]}{\partial a_m} = 0, \quad m = \overline{1, N}.$$

В результате получим СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N (u_m, u_n)_A a_n = (f, u_m), \quad m = \overline{1, N}. \quad (10.18)$$

Матрицей СЛАУ (10.18) является *матрица Грама* для системы функций u_m , $m = \overline{1, N}$, относительно энергетического

скалярного произведения. Эта матрица не вырождена, поскольку элементы u_m , $m = \overline{1, N}$, линейно независимы [IV]. Поэтому СЛАУ (10.18) имеет единственное решение $a_{n,N}$, $n = \overline{1, N}$. Второй индекс в обозначении коэффициентов $a_{n,N}$ показывает, что они, вообще говоря, зависят от N .

Пример 10.3. Из курса сопротивления материалов известно, что зависимость от продольной координаты x прогиба $w(x)$ упругой балки, нагруженной распределенной по ее длине поперечной нагрузкой $q(x)$, удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x), \quad x \in [0, l], \quad (10.19)$$

где E — модуль упругости материала балки; J — момент инерции поперечного сечения балки; l — длина балки.

Произведение EJ характеризует жесткость балки на изгиб. Примем, что $EJ = \text{const}$, $q(x) \equiv q = \text{const}$, а концы балки имеют шарнирные опоры (рис. 10.1), т. е. в точках $x = 0$ и $x = l$ равны нулю прогиб и кривизна изогнутой продольной оси балки:

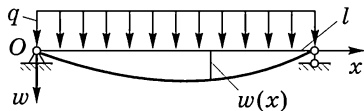


Рис. 10.1

$$w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0. \quad (10.20)$$

Для принятых предположений дифференциальное уравнение (10.19) является операторным уравнением $Aw(x) = q$, определяемым линейным дифференциальным оператором $A = d^4/dx^4$ и граничными условиями (10.20). Функцию $w(x)$ можно найти, последовательно интегрируя уравнение $w^{IV} = \bar{q}$, где $\bar{q} = q/(EJ)$, и учитывая граничные условия:

$$w'''(x) = \bar{q}x + C_1, \quad w''(x) = \frac{\bar{q}}{2}x^2 + C_1x + C_2, \quad C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{\bar{q}l}{2},$$

$$w'(x) = \frac{\bar{q}}{6}x^3 - \frac{\bar{q}l}{4}x^2 + C_3, \quad w(x) = \frac{\bar{q}}{24}x^4 - \frac{\bar{q}l}{12}x^3 + C_3x + C_4,$$

$$C_4 = 0, \quad C_3 = \frac{\bar{q}l^3}{24}.$$

В итоге получаем уравнение изогнутой продольной оси балки:

$$w(\bar{x}) = \frac{\bar{q}l^4}{24} (\bar{x}^4 - 2\bar{x}^3 + \bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \in [0, 1]. \quad (10.21)$$

Из симметрии условий закрепления и нагружения балки следует, что максимальный прогиб $w_{\max}$ балки будет в ее середине, т. е. при $\bar{x} = 1/2$. В этом можно убедиться и формальным путем, если исследовать на экстремум функцию $w(\bar{x})$. Из (10.21) при $\bar{x} = 1/2$ следует хорошо известный из курса сопротивления материалов результат:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \bar{q}l^4 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \approx 0,013021 \bar{q}l^4.$$

Располагая точным решением краевой задачи для уравнения $w^{IV}(x) = \bar{q}$ с граничными условиями (10.20), применим для ее решения метод Ритца. Для этого предварительно выясним область определения оператора $A = d^4/dx^4$ и его свойства.

В качестве области определения оператора A примем множество $C_0^4[0, l]$ четырежды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям (10.20). Это множество является линейным всюду плотным многообразием в гильбертовом пространстве $L_2[0, l]$. Убедимся, что оператор A с заданной областью определения является симметрическим. В самом деле, для произвольных функций $w, v \in D(A)$, последовательно интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} (Aw, v) &= \int_0^l v(x) w^{IV}(x) dx = v(x) w'''(x) \Big|_0^l - \\ &- \int_0^l v'(x) w'''(x) dx = -v'(x) w''(x) \Big|_0^l + \int_0^l (-v''(x) w''(x)) dx = \\ &= v''(x) w'(x) \Big|_0^l - \int_0^l v'''(x) w'(x) dx = -v'''(x) w(x) \Big|_0^l + \\ &+ \int_0^l v^{IV}(x) w(x) dx = \int_0^l v^{IV}(x) w(x) dx = (Av, w). \end{aligned}$$

Также последовательным интегрированием по частям для произвольной функции $w \in D(A)$ находим

$$\begin{aligned}(Aw, w) &= \int_0^l w(x) w^{IV}(x) dx = \\&= w(x) w'''(x) \Big|_0^l - \int_0^l w'(x) w'''(x) dx = -w'(x) w''(x) \Big|_0^l + \\&+ \int_0^l w''(x) w''(x) dx = \int_0^l (w''(x))^2 dx \geq 0.\end{aligned}$$

Из равенства $(Aw, w) = 0$ следует, что $w''(x) \equiv 0$, т. е. $w(x) = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$. Но из граничных условий (10.20) получаем $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$. Поэтому $w(x) \equiv 0$ и оператор A является положительным.

Можно доказать*, что оператор A с заданной областью определения является и положительно определенным, т. е. для некоторого числа $\gamma > 0$ верно неравенство $(Aw, w) \geq \gamma^2 \|w\|^2$, $w \in D(A)$.

Поскольку операторное уравнение с симметрическим и положительным оператором A имеет в $D(A)$ решение (10.21), то квадратичный функционал $J_s[w] = (Aw, w) - 2(\bar{q}, w)$ на этом решении, согласно теореме 9.2 о квадратичном функционале, достигает своего наименьшего значения. Приближенное решение этого операторного уравнения представим в виде

$$\bar{w}_N = \sum_{n=1}^N a_n \sin n\pi \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \in [0, 1], \quad (10.22)$$

и отметим, что $\bar{w}_N$ удовлетворяет всем граничным условиям (10.20). Подставляя (10.22) в функционал $J_s[w]$ и учитывая вид скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, получаем функцию N переменных

$$\begin{aligned}J_s[\tilde{w}_N] &= (A\tilde{w}_N, \tilde{w}_N) - 2(\bar{q}, \tilde{w}_N) = \\&= \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m \int_0^1 (\sin m\pi \bar{x})^{IV} \sin n\pi \bar{x} d\bar{x} - 2 \sum_{m=1}^N a_m \int_0^1 \bar{q} \sin m\pi \bar{x} d\bar{x} =\end{aligned}$$

* См.: Ректорис К.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \sum_{m=1}^N a_m \int_0^1 \sin m\pi\bar{x} \sin n\pi\bar{x} d\bar{x} - \\
&- 2 \frac{\bar{q}}{\pi} \sum_{m=1}^N \frac{1 - (-1)^m}{m} a_m
\end{aligned} \tag{10.23}$$

относительно коэффициентов a_m , $m = \overline{1, N}$, являющуюся многочленом второй степени.

Система функций $\{\sin n\pi\bar{x}\}$ на отрезке $[0, 1]$ ортогональная (но не ортонормированная):

$$\int_0^1 \sin m\pi\bar{x} \sin n\pi\bar{x} d\bar{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Поэтому в данном случае необходимое условие минимума функции (10.23) приводит к СЛАУ с диагональной матрицей, что позволяет записать явное выражение для каждого коэффициента:

$$a_n = 2 \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^5} \bar{q} l^4, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.24}$$

Отметим, что коэффициенты a_n не зависят от количества N рассматриваемых функций счетного базиса, что является следствием ортогональности счетного базиса. Это означает, что формулы (10.24) дают точные, а не приближенные значения коэффициентов.

Если в (10.22) ограничиться лишь одним первым слагаемым, то получим

$$\tilde{w}_1 = a_1 \sin \pi\bar{x} = \frac{4}{\pi^5} \bar{q} l^4 \sin \pi\bar{x} \approx 0,013071 \frac{ql^4}{EJ} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Это приближенное решение для максимального прогиба балки при $\bar{x} = 1/2$ дает значение $\tilde{w}_{\max} \approx 0,013071 ql^4 / (EJ)$, которое отличается от значения $w_{\max}$, полученного из точного решения (10.21), менее чем на 0,5 %.

Характерно, что при $n = 2$ имеем $a_2 = 0$, т. е. функция $\sin 2\pi\bar{x}$, будучи нечетной при переносе начала координат на рис. 10.1 в точку $x = l/2$, «не участвует» в формировании приближенного решения задачи, симметричной относительно этой точки. Из (10.24) видно, что такая же «участь» постигнет в (10.21) все слагаемые с четными номерами.

Для $n = 3$ имеем $a_3 = 4\bar{q}l^4/(3\pi)^5 \approx 0,000054ql^4/(EJ)$ и

$$\begin{aligned}\tilde{w}_3 &= a_1 \sin \pi \bar{x} + a_3 \sin 3\pi \bar{x} = \frac{4}{\pi^5} \bar{q}l^4 \sin \pi \bar{x} + \frac{4}{(3\pi)^5} \bar{q}l^4 \sin 3\pi \bar{x} = \\ &= \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{243} \sin \frac{3\pi x}{l} \right).\end{aligned}$$

В точке $x = l/2$ получаем значение $\tilde{w}_3 \approx 0,013017$ с пятью верными знаками после запятой, совпадающее со значением $w_{\max}$, вычисленным по точному решению. #

Метод Ритца можно использовать для нахождения приближенного решения не только в случае квадратичного функционала. Процедура этого метода применима и тогда, когда не удастся построить строго выпуклый функционал по вариационному уравнению, соответствующему заданному операторному уравнению $A(u) = f$. Пусть в этом случае область определения $D(A)$ оператора $A(\cdot)$ (необязательно линейного) является всюду плотной в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и известна такая система $\{u_m\}$ функций $u_m \in D(A)$, $m \in \mathbb{N}$, образующая счетный базис в $\mathcal{H}$, что система $\{v_m\}$ функций $v_m = A(u_m)$ также образует счетный базис в $\mathcal{H}$. Это означает, что любой элемент $f \in \mathcal{H}$ можно представить в виде ряда

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m v_m, \quad c_m \in \mathbb{R}. \quad (10.25)$$

Рассмотрим функционал

$$F[u] = \|A(u) - f\|^2, \quad (10.26)$$

который достигает наименьшего (нулевого) значения на элементе $u^* \in D(A)$ (если он существует), удовлетворяющем операторному уравнению, т. е. $Au^* = f$. Приближение к этому элементу будем искать в виде

$$u_N^* = \sum_{m=1}^N b_m u_m, \quad b_m \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (10.27)$$

Подставив (10.27) в (10.26), получим неотрицательную функцию N переменных $b_1, b_2, \dots, b_N$:

$$\varphi(b_1, \dots, b_N) = F[u_N^*] = \|A(u_N^*) - f\|^2 = \left\| A \left(\sum_{m=1}^N b_m u_m \right) - f \right\|^2. \quad (10.28)$$

Значения переменных в точке минимума можно найти одним из методов конечномерной оптимизации [XIV] исходя из условия

$$\varphi(b_1, \dots, b_N) = \|A(u_N^*) - f\|^2 \rightarrow \inf. \quad (10.29)$$

При этом в общем случае выполнение условия (10.29) не гарантирует существование единственного элемента u_N^* .

Если оператор A линейный, то функция $\varphi(b_1, \dots, b_N)$ будет многочленом второй степени от переменных $b_1, \dots, b_N$ и, следовательно, дифференцируемой в $\mathbb{R}^N$. Значения переменных, обеспечивающих минимум этой функции, должны удовлетворять необходимым условиям минимума:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_m} = 0, \quad m = \overline{1, N}.$$

Отсюда получаем СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N (v_m, v_n) b_n = (f, v_m), \quad m = \overline{1, N}, \quad (10.30)$$

имеющую единственное решение, поскольку ее матрица является матрицей Грама относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$ для системы линейно независимых элементов $v_m \in \mathcal{H}$, $m = \overline{1, N}$. В случае положительно определенного оператора A можно доказать*, что последовательность элементов u_N^* (10.27), для которых коэффициенты b_m являются решением СЛАУ (10.30), сходится в $\mathcal{H}_A$ по энергетической норме, а значит, и по норме гильбертова пространства, к обобщенному решению u_* уравнения $Au = f$. При этом, согласно (10.29), $Au_N^* \rightarrow f$ при $N \rightarrow \infty$.

Описанная процедура приближенного решения операторного уравнения характерна для метода наименьших квадратов. Несложно убедиться, что при использовании данного метода для нахождения коэффициентов $a_n (n \in \mathbb{N})$ в приближенном решении (10.22) краевой задачи, рассмотренной в примере 10.3, придем к тому же выражению (10.24).

* См.: Ректорис К.

Если известно, что обобщенное решение u_* операторного уравнения $Au = f$ с положительно определенным оператором A совпадает с классическим решением этого уравнения, т. е. $u_* \in D(A)$ и $Au_* = f$, то функционал

$$\Phi[u] = (Au, u) - 2(f, u) + \|Au - f\|^2, \quad u \in D(A),$$

достигнет своего наименьшего значения именно на элементе u_* (см. 10.1). Применение метода Ритца для построения минимизирующей последовательности $\{\tilde{u}_n\}$ функционала $\Phi[u]$ из элементов вида (10.15) при произвольном счетном базисе в $\mathcal{H}$ приводит к *методу Куранта*^{*}. Для метода Куранта сохраняет силу соотношение (10.10) без использования ортогонального базиса из собственных элементов оператора A . Применение этого метода для вычисления коэффициентов $a_n (n \in \mathbb{N})$ в приближенном решении вида (10.22) краевой задачи из примера 10.3 снова приведет к (10.24).

Отметим, что метод Ритца позволяет использовать счетный базис, элементами которого могут быть функции, принимающие ненулевые значения лишь в отдельных подмножествах области определения оператора. Такая возможность реализована, например, в *методе конечных элементов*.

10.3. Собственные значения симметрического оператора

Одной из распространенных прикладных задач является так называемая проблема собственных значений линейного оператора, входящего в формулировку краевой задачи. Эта задача состоит в нахождении ненулевых решений однородного операторного уравнения с однородными граничными условиями. Ее решение может быть получено вариационными методами.

Напомним, что ненулевой вектор x произвольного линейного пространства $\mathcal{L}$ называют собственным вектором линейного оператора (иногда собственным элементом оператора) A , действующего в $\mathcal{L}$, если для некоторого числа λ верно равенство $Ax = \lambda x$. При этом число λ называют собственным значением (или собственным числом) линейного оператора A .

^{*} Рихард Курант (1888–1972) — математик, родившийся в Польше и работавший до 1933 г. в Германии, а затем в США.

В случае конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ собственные значения λ — это все такие числа, для которых оператор $A - \lambda I$ (I — тождественный оператор) не имеет обратного, т. е. необратим. В случае бесконечномерного пространства оператор $A - \lambda I$ может не иметь ограниченного обратного оператора* хотя бы по одной из двух причин:

а) оператор $A - \lambda I$ не является инъективным (взаимно однозначным). Это равносильно тому, что уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ имеет ненулевое решение, или, другими словами, число λ является собственным значением оператора;

б) образ оператора $A - \lambda I$ не совпадает со всем пространством $\mathcal{L}$.

Совокупность всех тех λ , при которых оператор $A - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного, называют **спектром линейного оператора** A . Спектр естественно разделяется на две части: дискретную и непрерывную.

В ряде случаев линейный оператор не имеет непрерывного спектра, а дискретный спектр можно представить как некоторую последовательность значений λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что собственные векторы действующего в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ симметрического оператора A , отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. В конечномерном случае (тогда A является *самосопряженным оператором*) это доказано в [IV], но доказательство на самом деле не связано с размерностью линейного пространства и проходит в произвольном евклидовом пространстве. Естественно, возникает вопрос, можно ли из собственных векторов линейного оператора составить базис линейного пространства? В бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве под базисом понимают любую полную (или замкнутую, что одно и то же) линейно независимую систему [IX].

Задача определения собственных значений линейного оператора возникает во многих прикладных задачах. В [XI] рассмотрена задача поиска собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля, играющая большую роль в решении многих уравнений математической физики

* Линейный оператор A в нормированном пространстве $\mathcal{L}$ называют **ограниченным оператором**, если для некоторого числа $K > 0$ верно неравенство $\|Ax\| \leq K\|x\|$, $x \in \mathcal{L}$. Наименьшее из таких чисел называют **нормой оператора**.

[XII]. К аналогичной задаче приводит изучение собственных (свободных) колебаний механических систем. С проблемой собственных значений сталкиваются и при изучении вопросов устойчивости механических систем.

Проблему собственных значений можно свести к решению некоторой вариационной задачи. Если симметрический оператор A , действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, удовлетворяет неравенству $(Au, u) \geq k \|u\|^2$ ($k \in \mathbb{R}$) для любого вектора $u \in \mathcal{E}$, его называют *оператором, ограниченным снизу*. Ясно, что при $k > 0$ этот оператор является положительно определенным, а при $k = 0$ — положительным. Число

$$\alpha = \inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq k$$

тесно связано с собственными значениями симметрического оператора. Для любого собственного значения λ имеем $\lambda \geq \alpha$, так как

$$\alpha = \inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} \leq \frac{(Au_\lambda, u_\lambda)}{(u_\lambda, u_\lambda)} = \frac{(\lambda u_\lambda, u_\lambda)}{(u_\lambda, u_\lambda)} = \frac{\lambda(u_\lambda, u_\lambda)}{(u_\lambda, u_\lambda)} = \lambda,$$

где u_λ — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ .

Теорема 10.3. Если симметрический оператор A ограничен снизу и для некоторого вектора u_0

$$\frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)} = \alpha = \inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \quad u \in D(A),$$

то α есть наименьшее собственное значение оператора A , а указанный вектор u_0 — собственный вектор A , отвечающий собственному значению α .

◀ Рассмотрим оператор $B = A - \alpha I$. Тогда

$$(Bu, u) = ((A - \alpha I)u, u) = (Au, u) - \alpha(u, u) \geq 0,$$

т. е. B — *неотрицательный оператор*. При этом

$$(Bu_0, u_0) = (Au_0, u_0) - \alpha(u_0, u_0) = 0.$$

Пусть v — произвольный вектор. Используя свойство симметричности оператора B , вытекающее из симметричности A , получаем в силу неотрицательности B , что

$$\begin{aligned} (B(u_0 + tv), u_0 + tv) &= (Bu_0, u_0) + \\ &+ 2t(Bu_0, v) + t^2 \|v\|_A^2 = t^2 \|v\|_A^2 + 2t(Bu_0, v) \geq 0. \end{aligned}$$

Но такое неравенство будет верным при любых t только в случае, когда $(Bu_0, v) = 0$.

Итак, $(Bu_0, v) = 0$ для любого вектора v . Взяв, в частности, $v = Bu_0$, имеем $\|Bu_0\|^2 = 0$, откуда $Bu_0 = 0$. Рассматривая оператор A , приходим к выводу, что $(A - \alpha I)u_0 = 0$, или $Au_0 = \alpha u_0$. Таким образом, вектор u_0 является собственным для A и отвечает собственному значению α . Как уже показано, все собственные числа λ удовлетворяют неравенству $\lambda \geq \alpha$. Значит, α — наименьшее собственное значение. ►

Доказанная теорема позволяет переформулировать задачу определения наименьшего собственного значения ограниченного снизу симметрического оператора как задачу поиска наименьшего значения функционала:

$$J[u] = \frac{(Au, u)}{(u, u)} \rightarrow \inf. \quad (10.31)$$

Этой задаче можно придать другую формулировку. Очевидно, что

$$\inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} \leq \inf_{\|u\|=1} \frac{(Au, u)}{(u, u)}.$$

Но

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} = \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \left(A \left(\frac{u}{\|u\|} \right), \frac{u}{\|u\|} \right) = (Au_0, u_0),$$

где вектор $u_0 = u/\|u\|$ удовлетворяет соотношению $\|u_0\| = 1$.

Поэтому на самом деле

$$\inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \inf_{\|u\|=1} (Au, u).$$

Таким образом, наименьшее собственное значение симметрического оператора найдем, решая вариационную задачу для функционала $J[x] = (Ax, x)$:

$$(Ax, x) \rightarrow \inf, \quad \|x\| = 1. \quad (10.32)$$

Пусть спектр симметрического ограниченного снизу оператора A состоит из последовательности $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ собственных значений, причем все они простые, т. е. соответствующее *собственное подпространство оператора* одномерно. Предположим, что наименьшее собственное значение λ_1 и отвечающий ему собственный вектор $\mathbf{x}_1$ найдены, например, как решение задачи (10.32). Тогда *ортogonalное дополнение* $H^\perp$ к собственному подпространству $H = \text{span}\{\mathbf{x}_1\}$ оператора A является *инвариантным подпространством* этого оператора. Значит, можно рассмотреть ограничение оператора A на подпространство $H^\perp$ и поставить задачу вида (10.32), но с дополнительным ограничением:

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \rightarrow \inf, \quad \|\mathbf{x}\|=1, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = 0. \quad (10.33)$$

У ограничения оператора A на $H^\perp$ спектр будет состоять из последовательности собственных значений $\lambda_2, \lambda_3, \dots$. Поэтому если задача (10.33) имеет решение, то это решение даст собственное значение λ_2 и соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{x}_2$, так как поиск наименьшего значения в (10.33) происходит на подмножестве множества, определяемого в (10.32) равенством $\|\mathbf{x}\|=1$, то $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Описанный процесс можно продолжить. На n -м шаге, зная собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$, решаем задачу

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \rightarrow \inf, \quad \|\mathbf{x}\|=1, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \dots = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_{n-1}) = 0.$$

Если эта задача имеет решение, то оно даст собственное значение λ_n и соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{x}_n$. Ясно, что $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$. Если симметрический оператор A положительно определенный, т. е. $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \gamma^2 \|\mathbf{x}\|^2$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то все его собственные значения положительны (не меньше γ^2).

Замечание 10.1. Множество X в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ компактно, если любая последовательность $\{\mathbf{x}_n\} \subset X$ содержит сходящуюся (по норме пространства) подпоследовательность. Аналогично, используя сходимость по энергии, можно ввести понятие *множества, компактного по энергии*. Компактное множество является ограниченным и замкнутым. В конечномерном пространстве эти два условия являются и достаточными, но в бесконечномерном простран-

стве это уже не так. Множество, имеющее компактное замыкание, называют *предкомпактным*.

Линейный оператор A называют *компактным (вполне непрерывным)*, если он любое ограниченное множество отображает в предкомпактное. Вполне непрерывный оператор непрерывен, но не всякий непрерывный оператор является вполне непрерывным. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2[a, b]$ компактным является оператор вида

$$A[y(x)] = \int_a^b K(x, t)y(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

где $K(x, t)$ — непрерывная функция на множестве $[a, b] \times [a, b]$.

Если $K(x, t) \equiv K(t, x)$, то указанный оператор симметрический, а его спектр представляет собой последовательность $\{\lambda_n\}$, сходящуюся к нулю. При этом каждому значению $\lambda_n \neq 0$ соответствует конечномерное собственное подпространство.

Линейные дифференциальные операторы, как правило, не являются непрерывными, а тем более вполне непрерывными. Однако в ряде случаев линейный дифференциальный оператор A имеет обратный оператор, являющийся вполне непрерывным. Тогда оператор A имеет спектр из последовательности собственных значений, стремящейся к ∞ [XI]. Примером такого дифференциального оператора является *оператор Штурма — Лиувилля*.

Пример 10.4. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Эта задача представляет собой *задачу Штурма — Лиувилля*. Ее операторное уравнение $Au = \lambda u$ определяется линейным дифференциальным оператором $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, который действует в $L_2[0, 1]$, определен на множестве $C_0^2[0, 1]$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ и удовлетворяющих граничным условиям задачи. Этот оператор симметрический и положительно определенный (см. примеры 9.7 и 9.10). Положительная определенность оператора означает, что он

ограничен снизу, причем в качестве константы k можно взять нуль.

Задача Штурма — Лиувилля решается аналитически. Собственными значениями оператора A являются числа $\lambda_n = n^2\pi^2$, а ортонормированная система собственных функций имеет вид [XI]

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Выясним, как выглядит вариационная формулировка задачи Штурма — Лиувилля. Для произвольной функции $u \in C_0^2[0, 1]$, согласно (9.14) с учетом $c = 0$, имеем

$$(Au, u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx.$$

Поэтому наименьшее собственное значение $\lambda_1 = \pi^2$ является решением вариационной задачи

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \rightarrow \min, \quad \int_0^1 (u(x))^2 dx = 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad \#$$

Отметим, что в прикладных задачах возникает необходимость находить ненулевые решения операторного уравнения вида

$$Au - \lambda Bu = 0 \quad (10.34)$$

с однородными граничными условиями, где A — симметрический оператор, а B — положительно определенный, причем $D(A) \subseteq D(B)$. Если в области определения $D(B)$ оператора B с помощью соотношения $\|u\|_B = (Bu, u)^{1/2}$ ввести энергетическую норму $\|\cdot\|_B$, то наименьшее собственное значение λ_1 и соответствующий ему собственный элемент u_1 будут решением вариационной задачи

$$(Au, u) \rightarrow \inf, \quad \|u\|_B = 1. \quad (10.35)$$

Это можно показать, незначительно модифицировав доказательство теоремы 10.3. Аналогично (10.33) для следующего по возрастанию собственного значения и соответствующего ему собственного элемента получим задачу

$$(Au, u) \rightarrow \inf, \quad \|u\|_B = 1, \quad (Bu, u_1) = 0,$$

так как векторы u_1 и u_2 , отвечающие различным значениям λ_1 и λ_2 , ортогональны относительно энергетического скалярного произведения, порожденного оператором B (доказательство этого аналогично доказательству ортогональности собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям). Последовательно можно найти собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ и отвечающие им собственные элементы $u_1, \dots, u_{n-1}$. Тогда собственное значение λ_n и соответствующий ему собственный элемент u_n будут решением задачи

$$(Au, u) \rightarrow \inf, \quad \|u\|_B = 1, \quad (Bu, u_1) = \dots = (Bu, u_{n-1}) = 0.$$

10.4. Приближенное решение задачи на собственные значения

Задачу на собственные значения ограниченного снизу симметрического оператора A_1 можно свести к задаче на собственные значения для положительно определенного оператора A . Действительно, если выполнено неравенство $(Ax, x) \geq k\|x\|^2$, то оператор $A_1 = A - k'I$, где $k' < k$, а I — тождественный оператор, является положительно определенным, так как

$$(A_1x, x) = (Ax - k'x, x) = (Ax, x) - k'(x, x) \geq (k - k')\|x\|^2 > 0.$$

При этом, если λ — собственное значение оператора A , а x — соответствующий собственный вектор, то $A_1x = Ax - k'x = \lambda x - k'x = (\lambda - k')x$. Значит, x является и собственным вектором оператора A_1 , а соответствующее этому вектору собственное значение оператора A_1 равно $\lambda - k'$.

Итак, можно ограничиться рассмотрением лишь положительно определенного оператора A , все собственные значения которого положительны. Покажем, как вариационная задача (10.32) нахождения наименьшего собственного значения такого оператора A может быть решена методом Ритца.

Рассмотрим последовательность $\{e_n\}$ векторов из области $D(A)$ определения оператора A , линейно независимую и полную относительно энергетической нормы, порожденной оператором A . Образует линейную комбинацию $x_N = a_1e_1 + \dots + a_Ne_N$, коэффициенты в которой подберем так, чтобы

$$(Ax_N, x_N) = \|x_N\|_A^2 \rightarrow \inf, \quad (x_N, x_N) = \|x_N\|^2 = 1, \quad (10.36)$$

т. е. наименьшее значение энергетической нормы $\|x_N\|_A$ будем искать в линейной оболочке конечной системы векторов $e_1, \dots, e_N$. Это приводит к поиску наименьшего значения действительной функции N переменных $a_1, a_2, \dots, a_N$, имеющей вид

$$f(a_1, \dots, a_N) = (Ax_N, x_N) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (Ae_n, e_m) a_n a_m, \quad (10.37)$$

при ограничении

$$(x_N, x_N) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (e_n, e_m) a_n a_m = 1. \quad (10.38)$$

Поставленная задача имеет решение, поскольку непрерывная функция N переменных достигает своего наименьшего значения на замкнутом ограниченном множестве $[V]$. Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид $\Phi = (Ax_N, x_N) - \lambda(x_N, x_N)$. Необходимое условие экстремума этой функции дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = \sum_{n=1}^N ((Ae_n, e_m) - \lambda(e_n, e_m)) a_n = 0, \quad m = \overline{1, N}. \quad (10.39)$$

Согласно ограничению (10.38), искомое решение однородной системы (10.39) линейных алгебраических уравнений должно быть ненулевым, т. е. определитель ее матрицы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} (Ae_1, e_1) - \lambda(e_1, e_1) & (Ae_N, e_1) - \lambda(e_N, e_1) \\ (Ae_1, e_2) - \lambda(e_1, e_2) & (Ae_N, e_2) - \lambda(e_N, e_2) \\ \vdots & \vdots \\ (Ae_1, e_N) - \lambda(e_1, e_N) & \dots & (Ae_N, e_N) - \lambda(e_N, e_N) \end{vmatrix} = 0. \quad (10.40)$$

Так как система $\{e_n\}$, $n = \overline{1, N}$, линейно независима, то матрица Грама для векторов $e_1, \dots, e_N$ невырождена. Значит, в (10.40) коэффициент при λ^N , равный по абсолютному значению определителю матрицы Грама, не равен нулю.

Пусть λ_0 — один из корней алгебраического уравнения (10.40) N -й степени. Подставим λ_0 в систему (10.39) и найдем ее ненулевое решение $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_N^0)$, определяемое с точностью до числового множителя. Этот числовой множитель позволяет выбрать решение так, что будет выполнено условие нормировки, т. е. можно считать, что

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (e_n, e_m) a_n^0 a_m^0 = 1. \quad (10.41)$$

Подставив значения a_n^0 , $n = \overline{1, N}$, и λ_0 в (10.39), получим тождества

$$\sum_{n=1}^N (Ae_n, e_m) a_n^0 = \lambda_0 \sum_{n=1}^N (e_n, e_m) a_n^0, \quad m = \overline{1, N}.$$

Умножим их на a_m^0 и просуммируем по m :

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (Ae_n, e_m) a_n^0 a_m^0 = \lambda_0 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (e_n, e_m) a_n^0 a_m^0.$$

Вследствие (10.41) правая часть этого соотношения равна λ_0 . Поэтому для вектора $\mathbf{x}_N^0 = a_1^0 e_1 + \dots + a_N^0 e_N$ имеем

$$(A\mathbf{x}_N^0, \mathbf{x}_N^0) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (Ae_n, e_m) a_n^0 a_m^0 = \lambda_0.$$

Чтобы найти решение задачи, необходимо выбрать наименьший корень λ_N^0 алгебраического уравнения (10.40) и вычислить соответствующий этому значению вектор $\mathbf{x}_N$. Увеличивая N , получим последовательность $\{\lambda_N^0\}$ значений λ_N^0 ($N \in \mathbb{N}$) и последовательность $\{\mathbf{x}_N^0\}$ соответствующих им векторов. Так как при возрастании N множество, на котором идет поиск наименьшего значения в (10.36), расширяется, последовательность $\{\lambda_N^0\}$ не возрастает, причем $\lambda_N^0 \geq \alpha$, где α — наименьшее значение функционала в вариационной задаче (10.32). Значит, существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N^0 \geq \alpha$. Можно показать, что на самом деле этот предел равен α , т. е. последовательность $\{\mathbf{x}_N^0\}$ является минимизирующей.

Чтобы найти следующее по возрастанию после λ_N^0 собственное значение оператора A , решаем вариационную задачу

$$(Ax_N, x_N) \rightarrow \inf, \quad (x_N, x_N) = 1, \quad (x_N^0, x_N) = 0$$

на линейной оболочке системы векторов $e_1, \dots, e_N$, что приводит к поиску наименьшего значения той же функции (10.37) N переменных при ограничениях

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (e_n, e_m) a_n a_m = 1, \quad \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (e_n, e_m) a_n^0 a_m = 0,$$

которые вытекают из формулировки задачи (10.33).

Пример 10.5. В задаче Штурма — Лиувилля найдем приближенные значения двух младших собственных чисел, выбрав в качестве счетного базиса последовательность

$$u_k(x) = (1-x)x^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Взяв первые две функции счетного базиса, вычислим элементы определителя второго порядка в характеристическом уравнении (10.40). Для этого последовательно находим

$$(u_1, u_1) = \frac{1}{30}, \quad (u_1, u_2) = \frac{1}{60}, \quad (u_2, u_2) = \frac{1}{105},$$

$$(Au_1, u_1) = \frac{1}{3}, \quad (Au_1, u_2) = \frac{1}{6}, \quad (Au_2, u_2) = \frac{2}{15}.$$

Таким образом, в данном случае уравнение (10.40) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda \cdot \frac{1}{30} & \frac{1}{6} - \lambda \cdot \frac{1}{60} \\ \frac{1}{6} - \lambda \cdot \frac{1}{60} & \frac{2}{15} - \lambda \cdot \frac{1}{105} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая в этом уравнении определитель, получаем квадратное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{420} \lambda^2 - \frac{13}{105} \lambda + 1 = 0.$$

Его решениями являются $\hat{\lambda}_1 = 10$ и $\hat{\lambda}_2 = 42$. Точные значения первых двух собственных чисел равны $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_2 = 4\pi^2 \approx 39,4784$. Нетрудно убедиться, что точность полученных приближений находится в пределах 1,5 % для первого собственного значения и в пределах 2,6 % для второго собственного значения. Отметим избыточный характер приближений. #

Применение метода Ритца для нахождения любого собственного значения положительно определенного оператора A обеспечивает приближение сверху. Однако на практике наряду с оценкой собственного значения сверху не менее важно иметь его оценку снизу. Наличие двусторонней оценки собственного значения позволяет контролировать сходимость приближенного решения и иметь представление о возможной погрешности этого решения.

Оценку сверху собственного значения λ_1 симметрического оператора A получим, используя произвольный ненулевой элемент u ($\|u\| > 0$) из области определения $D(A)$ этого оператора. Действительно, в силу теоремы 10.3

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq \inf_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \quad u \in D(A).$$

Если оператор A *положительный*, то оценку снизу для λ_1 можно найти, располагая такой гарантированной оценкой $\underline{\lambda}_2$ снизу следующего собственного значения λ_2 , что $\bar{\lambda}_1 < \underline{\lambda}_2 < \lambda_2$. Тогда, вычислив предварительно по указанному выше ненулевому элементу $u \in D(A)$ значение

$$\kappa = \frac{(Au, Au)}{(Au, u)},$$

придем в итоге к неравенству [XIII]

$$\bar{\lambda}_1 \left(1 - \frac{\kappa - \bar{\lambda}_1}{\underline{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \right) \leq \lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1, \quad (10.42)$$

которое имеет смысл при условии $\bar{\lambda}_1 \leq \kappa$. Это условие выполняется, поскольку в силу неравенства Коши — Буняковского $|(Au, u)| \leq \|Au\| \cdot \|u\|$. Для положительного оператора $\lambda_1 > 0$, поэтому применение (10.42) эффективно лишь в случае, если

гарантированная оценка снизу для λ_2 такова, что $\kappa < \lambda_2$. В противном случае левая часть в (10.42) будет неположительной.

Вопросы и задачи

10.1. Исследуйте свойства оператора

$$J[u] = -\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x} \frac{du}{dx} \right),$$

определенного на множестве $C_0^2[0, 1]$ функций $u(x)$, дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ и удовлетворяющих краевым условиям $u(0) = u(1) = 0$.

10.2. В задаче на собственные значения

$$-\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x} \frac{du}{dx} \right) = \lambda u, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

найдите методом Ритца два первых приближения для наименьшего собственного значения λ_1 . В качестве двух первых функций счетного базиса используйте функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из примера 10.5.

10.3. Выясните, является ли заданный оператор симметрическим при заданных краевых условиях, и решите задачу на собственные значения:

- а) $y'' = \lambda y'$, $y(0) = y(l) = 0$, $x \in [0, l]$;
- б) $-y'' = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$, $x \in [0, \infty)$;
- в) $y^{IV} = -\lambda y''$, $y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$, $x \in [0, 1]$.

11. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

11.1. Альтернативные функционалы

Существенным преимуществом вариационной формулировки прикладной задачи, функционал которой имеет определенные экстремальные свойства, является не только возможность применения эффективных прямых методов, но и удобные способы оценки погрешности приближенного решения. Действительно, из двух приближенных решений u_1 и u_2 в задаче на минимум функционала $J[u]$ разумно отдать предпочтение тому из них, на котором значение функционала $J[u]$ меньше, т. е. ближе к минимальному значению. В этом случае значение функционала выполняет роль обобщенного критерия для сравнения двух и более приближенных решений.

Для количественной оценки погрешности приближенного решения u можно использовать разность $\Delta J = J[u] - J[u_*]$ значений функционала (u_* — точное решение задачи на минимум функционала). Эту разность можно связать со значением $\|u - u_*\|$, отражающим близость точного и приближенного решений. Но элемент u_* не известен в процессе приближенного решения задачи, поэтому не известно и значение $J[u_*]$. Следовательно, необходимо направить усилия на поиск оценки значения $J[u_*]$ снизу, чтобы получить оценку разности ΔJ сверху.

Оценка неизвестного значения $J[u_*]$ может быть получена, если построить дополнительную вариационную задачу на максимум некоторого функционала $I[v]$, удовлетворяющего условию

$$I[v_*] = \max I[v] \leq \min J[u] = J[u_*]. \quad (11.1)$$

Тогда для любой пары элементов $u \in D(J)$ и $v \in D(I)$ имеем

$$I[v] \leq I[v_*] \leq J[u_*] \leq J[u]. \quad (11.2)$$

Таким образом, получаем оценку сверху приближенного решения u :

$$\Delta J = J[u] - J[u_*] \leq J[u] - I[v].$$

Функционал $I[v]$, который связан с функционалом $J[u]$ условием (11.1), будем называть *альтернативным (двойственным) функционалом* по отношению к функционалу $J[u]$, а вариационную задачу на максимум функционала $I[v]$ — *двойственной вариационной задачей* по отношению к вариационной задаче на минимум $J[u]$.

Отметим, что оценка приближенного решения разностью $J[u] - I[v]$ имеет нижнюю границу, равную $J[u_*] - I[v_*]$. Поэтому при построении двойственной задачи желательно, чтобы эта граница была как можно меньшей. Лучше всего, когда она равняется нулю. Однако это условие лишь необходимое и имеет в основном теоретическое значение, так как в практических вычислениях эта граница не известна. Совпадение решений у двойственных задач еще не гарантирует хорошей оценки приближенного решения.

В прикладных задачах значение функционала обычно имеет конкретный содержательный смысл и определяет некоторую усредненную характеристику исследуемого объекта или процесса. Поэтому двусторонняя оценка вида (11.2) дает возможность понять, насколько точным является найденное приближенное значение указанной характеристики. Таким образом, весьма важно выяснить, при каких условиях для данной вариационной задачи, представляющей собой вариационную формулировку некоторого операторного уравнения, можно построить двойственную вариационную задачу.

Построение двойственной задачи — неоднозначный процесс, оно может приводить к различным вариантам в зависимости от выбранного способа построения. Наиболее распространенным подходом к построению двойственной задачи является следующий. Рассмотрим задачу на минимум функционала $J[u]$, определенного на некотором множестве $U = D(J)$. Предположим, что имеется такой функционал $\Phi[u, v]$, заданный на множестве $U \times V$, что исходный функционал $J[u]$ представим в виде

$$J[u] = \sup_{v \in V} \Phi[u, v].$$

Тогда поставленную вариационную задачу интерпретируем как минимаксную:

$$J_* = \inf_{u \in U} J[u] = \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \Phi[u, v]. \quad (11.3)$$

При этом оказывается, что функционал

$$I[v] = \inf_{u \in U} \Phi[u, v]$$

является альтернативным по отношению к функционалу $J[u]$. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 11.1. Если функционал $\Phi[u, v]$ определен на множестве $U \times V$, то

$$\sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \Phi[u, v] \leq \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \Phi[u, v]. \quad (11.4)$$

◀ Неравенство (11.4) очевидно, если его правая часть равна $+\infty$ (это соответствует случаю, когда при любом $u \in U$ функционал $\Phi[u, v]$ не ограничен по v). Поэтому будем считать, что минимум в правой части неравенства равен некоторому числу M .

Для любых $u \in U$ и $v \in V$ имеем

$$\Phi[u, v] \leq \sup_{v \in V} \Phi[u, v].$$

Значит, и точные нижние грани по u связаны таким же неравенством:

$$\inf_{u \in U} \Phi[u, v] \leq \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \Phi[u, v].$$

Отсюда следует, что функционал $I[v] = \inf_{u \in U} \Phi[u, v]$ ограничен сверху числом $M = \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \Phi[u, v]$, т. е. число M является верхней гранью функционала $I[v]$. Поэтому $\sup_{v \in V} I[v] \leq M$, так как точная верхняя грань — это наименьшая верхняя грань. Последнее неравенство эквивалентно неравенству (11.4). ▶

11.2. Построение альтернативного функционала

До сих пор краевые условия, входящие в формулировку вариационной задачи, рассматривались как ограничения на область определения функционала. Однако иногда удобно трактовать вариационную задачу как задачу на условный экстремум, которая в самом общем виде формулируется следующим образом.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задан функционал $J[u]$ с областью определения $D(J)$, а оператор $\Phi[u]$ отображает $D(J)$ в некоторое полное евклидово (гильбертово или конечномерное евклидово) пространство $\mathcal{V}$. Требуется найти минимум функционала $J[u]$ при условии $\Phi[u] = 0$ (0 в данном случае обозначает нулевой элемент евклидова пространства $\mathcal{V}$). Другими словами, ищем минимум функционала $J[u]$ на множестве $\{u \in D(J): \Phi[u] = 0\}$.

В случае гладкой задачи, т. е. если множество $D(J)$ открыто, а функционал и оператор дифференцируемы*, решение этой задачи находим с помощью метода множителей Лагранжа. Если u_* — решение задачи, то при некоторых дополнительных предположениях** существует такой элемент $v \in \mathcal{V}$, что элемент u_* является стационарной точкой *функционала Лагранжа*

$$L[u, v] = J[u] + (\Phi[u], v). \quad (11.5)$$

Оказывается, что функционал Лагранжа позволяет сформулировать задачу, двойственную к исходной. Действительно, вариационную задачу

$$J[u] \rightarrow \inf; \quad \Phi[u] = 0 \quad (11.6)$$

поиска точки минимума u_* функционала $J[u]$ представим как минимаксную задачу

$$J[u_*] = \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} L[u, v] \quad (11.7)$$

для функционала Лагранжа $L[u, v]$. При этом, если $\Phi[u] \neq 0$, то $\sup_{v \in \mathcal{V}} L[u, v] = +\infty$. Значит, решение минимаксной задачи

* Понятия дифференциала Фреше и дифференциала Гато для оператора аналогичны соответствующим понятиям для функционала, введенным в 1.2.

** См.: Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.

(11.7) не может достигаться на элементе u_* , для которого $\Phi[u_*] \neq 0$. Но если $\Phi[u] = 0$, то $L[u, v] = J[u]$ и решение минимаксной задачи (11.7) совпадает с решением вариационной задачи.

Функционал Лагранжа $L[u, v]$ (11.5) по отношению к функционалу $J[u]$ иногда называют полным, а функционал $J[u]$ по отношению к функционалу Лагранжа — частным. Если $J[u]$ — выпуклый функционал, удовлетворяющий условию $J[u] \rightarrow +\infty$ при $\|u\| \rightarrow \infty$, то в (11.7) можно изменить порядок точных верхней и нижней граней*:

$$J[u_*] = \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} L[u, v] = \sup_{v \in V} \inf_{u \in U} L[u, v] = \sup_{v \in V} I[v] = I[v_*], \quad (11.8)$$

где

$$I[v] = \inf_{u \in U} L[u, v]. \quad (11.9)$$

Отметим, что правая часть в формуле (11.9) может принимать значение $-\infty$. Разумно ограничиться теми значениями v , для которых $I[v]$ конечно. Это приводит к естественному сужению области определения функционала $I[v]$ до некоторого подмножества $D(I) \subset V$.

Предположим, что функционал $L[u, v]$ при любом $v \in D(I)$ достигает минимума в единственной точке $u_v \in U = D(J)$. Тогда, по существу, на множестве $D(I)$ определено отображение ψ , которое элементу v ставит в соответствие элемент $u_v \in U$. С помощью этого отображения запишем

$$I[v] = \inf_{u \in U} L[u, v] = L[\psi(v), v] = J[\psi(v)] + (\Phi(\psi(v)), v),$$

т. е. при известном отображении ψ альтернативный функционал $I[v]$ легко восстанавливается. Однако отображение ψ далеко не всегда удастся получить в явном виде. Чаще всего оно определяется некоторым уравнением, да и условие единственности точки минимума при фиксированном v выполняется не всегда. Тем не менее связь v и u_v учитываем в выражении для функционала Лагранжа и тем самым упростить задачу построения альтернативного функционала $I[v]$.

Если функционал $J[u]$ является дифференцируемым, то уравнение для отображения ψ ищем с помощью метода множителей Лагранжа:

* См.: Экланд И., Теем Р.

$$\delta J[u, \delta u] + (\delta \Phi[u, \delta u], v) = 0, \quad \Phi(u) = 0.$$

Пример 11.1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in V, \quad u(x) = g(x), \quad x \in S, \quad (11.10)$$

где $g(x)$ — известная функция, заданная на поверхности S , ограничивающей область V .

Эта краевая задача является частным случаем задачи, рассмотренной в примере 9.13. В этом примере для краевой задачи построен функционал (9.41), который в данном случае сводится к *функционалу Дирихле*

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 dV \quad (11.11)$$

с областью определения $C^1(V) \cap C(\bar{V})$.

Краевое условие $u - g = 0$ на S трактуем как условие $\Phi(u) = 0$, причем отображение Φ переводит функцию $u \in C^1(V) \cap C(\bar{V})$ в вектор-функцию $(u - g)\mathbf{n}$ на поверхности S (здесь $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности). Таким образом, в качестве полного евклидова пространства $\mathcal{V}$ в данном случае используем гильбертово пространство вектор-функций на S с интегрируемым скалярным квадратом. С учетом этого полный функционал можно записать в виде

$$\begin{aligned} L[u, v] &= J[u] + (\Phi(u), v) = \frac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 dV + \int_S (u - g) v n dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 dV + \int_S u v n dS - \int_S g v n dS. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Найдем вариацию функционала $L[u, v]$:

$$\delta L[u, v, \delta u, \delta v] = \int_V \nabla u \delta \nabla u dV + \int_S (u - g) \delta v n dS + \int_S v n \delta u dS.$$

Отсюда, используя первую формулу Грина и полагая, что $\delta \nabla u = \nabla(\delta u)$, получаем

$$\delta L[u, v, \delta u, \delta v] = - \int_V \Delta u \delta u dV + \int_S (u - g) \delta v n dS + \int_S (v + \nabla u) \mathbf{n} \delta u dS.$$

Из условия стационарности $\delta L[u, \delta u, v, \delta v] = 0$ полного функционала при произвольных вариациях δu в V и δv на S следует, что $\Delta u = 0$ в V и $u - g = 0$ на S , т. е. в стационарной точке полного функционала должны быть выполнены равенства (11.10). Но помимо этого получаем дополнительное условие связи между u и v : $v + \nabla u = 0$ на S , или

$$\nabla u(\mathbf{x}) = -v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (11.13)$$

Условие (11.13) позволяет построить непрерывное продолжение вектор-функции $v(\mathbf{x})$, определенной на поверхности S , в область V согласно формуле $v(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$. Учитывая это продолжение, находим по формуле Остроградского — Гаусса

$$\int_S u v n dS = \int_V \operatorname{div}(uv) dV = \int_V v \nabla u dV + \int_V u \nabla v dV.$$

Используя это равенство, а также условие связи $\nabla u = -v$ в представлении полного функционала (11.12), получаем

$$\begin{aligned} L[u, v] &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 dV + \int_V v \nabla u dV + \int_V u \nabla v dV - \int_S g v n dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_V v^2 dV - \int_V v^2 dV + \int_V u \nabla v dV - \int_S g v n dS = \\ &= -\frac{1}{2} \int_V v^2 dV + \int_V u \nabla v dV - \int_S g v n dS. \end{aligned} \quad (11.14)$$

В данном случае видно, что точная нижняя грань по u конечна лишь при выполнении условия

$$\nabla v(\mathbf{x}) \equiv \operatorname{div} v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V. \quad (11.15)$$

С учетом этого условия из (11.14) получаем представление альтернативного функционала $I[v]$:

$$I[v] = \inf_{u \in D(J)} L[u, v] = -\frac{1}{2} \int_V v^2 dV - \int_S g v n dS. \quad (11.16)$$

Его областью определения $D(I)$ является множество непрерывно дифференцируемых в области V функций, удовлетворяющих условию (11.15).

Пример 11.2. Построим функционал, альтернативный функционалу $J[u]$ (9.50) из примера 9.14.

Областью определения функционала $J[u]$ является линейное многообразие $C^1[a, b]$ в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$. Его минимум ищем при краевом условии $u(a) = \tilde{\alpha}$ (второе условие учтено в самом виде функционала). Таким образом, в данном случае $\Phi[u] = u(a) - \tilde{\alpha}$, причем оператор Φ переводит функцию $u(x)$ в число $u(a) - \tilde{\alpha}$, т. е. является функционалом. Значит, в качестве евклидова пространства $\mathcal{V}$ следует взять одномерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^1$ со скалярным произведением $(x, y) = xy$. Используя условие связи, можем записать

$$\begin{aligned} L[u, v] = J[u] + (\Phi[u], v) = & -\tilde{\beta}u(b) + \int_a^b \frac{(u'(x))^2}{2} dx - \int_a^b f(x)u(x) dx + \\ & + \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(u) du + \int_0^{u(b)} s(u) du + (u(a) - \tilde{\alpha})v. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Найдем первую вариацию функционала (11.17) при произвольных вариациях $\delta u(x)$ и δv :

$$\begin{aligned} \delta L[u, v, \delta u, \delta v] = & -\tilde{\beta}\delta u(b) + \int_a^b u'(x)\delta u'(x) dx - \\ & - \int_a^b f(x)\delta u(x) dx + \int_a^b q(u(x))\delta u(x) dx + \\ & + s(u(b))\delta u(b) + (u(a) - \tilde{\alpha})\delta v + v\delta u(a). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \delta L[u, v, \delta u, \delta v] = & -\tilde{\beta}\delta u(b) + u'(x)\delta u(x)\Big|_a^b - \int_a^b u''(x)\delta u(x) dx - \\ & - \int_a^b f(x)\delta u(x) dx + \int_a^b q(u(x))\delta u(x) dx + s(u(b))\delta u(b) + \\ & + (u(a) - \tilde{\alpha})\delta v + v\delta u(a) = [u'(b) + s(u(b)) - \tilde{\beta}]\delta u(b) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^b [-u''(x) + q(u(x)) - f(x)] \delta u(x) dx + \\
& + (u(a) - \tilde{\alpha}) \delta v + (v - u'(a)) \delta u(a).
\end{aligned}$$

Из необходимого условия экстремума $\delta L[u, v, \delta u, \delta v] = 0$, которое должно выполняться при произвольных вариациях $\delta u(x)$ и δv , следует, что в стационарной точке полного функционала верны все равенства (9.9), (9.10). Но помимо этого имеет место равенство $v = u'(a)$. Рассмотрим функцию $v(x) = u'(x)$, которую можно интерпретировать как продолжение значения $v = v(a)$ на отрезок $[a, b]$. Согласно правилу интегрирования по частям,

$$u(a)v(a) = u(b)v(b) - \int_a^b u'(x)v(x) dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx,$$

$$\int_0^{u(x)} q(u) du = q(u(x))u(x) - \int_0^{u(x)} uq'(u) du,$$

$$\int_0^{u(b)} s(u) du = s(u(b))u(b) - \int_0^{u(b)} us'(u) du.$$

Используя эти тождества, а также равенство $v(x) = u'(x)$, из (11.17) получаем

$$\begin{aligned}
L[u, v] = & -\tilde{\beta}u(b) + \int_a^b \frac{(u'(x))^2}{2} dx - \int_a^b f(x)u(x) dx + \\
& + \int_a^b q(u(x))u(x) dx - \int_a^b dx \int_0^{u(x)} uq'(u) du + s(u(b))u(b) - \\
& - \int_0^{u(b)} us'(u) du + u(b)v(b) - \int_a^b u'(x)v(x) dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx - \\
& - \tilde{\alpha}v(a) = -\frac{1}{2} \int_a^b v^2(x) dx + \int_a^b [-v'(x) + q(u(x)) - f(x)] u(x) dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [v(b) + s(u(b)) - \tilde{\beta}]u(b) - \int_a^b dx \int_0^{u(x)} uq'(u)du - \\
& - \int_0^{u(b)} us'(u)du - \tilde{\alpha}v(a).
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Точная нижняя грань полного функционала (11.18) конечна, если выполняются условия

$$\begin{cases} -v'(x) + q(u(x)) - f(x) = 0, & x \in [a, b]; \\ v(b) + s(u(b)) - \tilde{\beta} = 0. \end{cases} \tag{11.19}$$

В этом случае функционал $L[u, v]$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
L[u, v] = & -\frac{1}{2} \int_a^b v^2(x) dx - \int_a^b dx \int_0^{u(x)} uq'(u)du - \\
& - \int_0^{u(b)} us'(u)du - \tilde{\alpha}v(a),
\end{aligned} \tag{11.20}$$

а альтернативный функционал $J[v]$ — в виде

$$\begin{aligned}
J[v] = \inf_u & \left(-\frac{1}{2} \int_a^b v^2(x) dx - \right. \\
& \left. - \int_a^b dx \int_0^{u(x)} uq'(u)du - \int_0^{u(b)} us'(u)du - \tilde{\alpha}v(a) \right). \quad \#
\end{aligned}$$

11.3. Оценка погрешности приближенного решения

Пусть $\{\tilde{u}_N\}$ — минимизирующая последовательность квадратичного функционала

$$J_s[u] = \|u\|_A^2 - 2(f, u), \tag{11.21}$$

соответствующего краевой задаче для операторного уравнения $Au = f$ с положительно определенным оператором A . Различие

между приближенным решением $\tilde{u}_N$ и обобщенным решением u_* операторного уравнения, на котором этот функционал достигает своего наименьшего значения $J_s[u_*] = -\|u_*\|_A^2 = d$ (см. 10.1), оценим по разности значений функционала на этих решениях:

$$\Delta J[\tilde{u}_N] = J_s[\tilde{u}_N] - J_s[u_*] = J[\tilde{u}_N] - d. \quad (11.22)$$

Если обобщенное решение u_* принадлежит области определения оператора A , т. е. является классическим решением, то мерой погрешности приближенного решения $\tilde{u}_N$ может служить норма $\|A\tilde{u}_N - f\|_A$ его *невязки*. Так как для классического решения $Au_* = f$, то, полагая $u = \tilde{u}_N - u_*$, согласно теореме 10.3 и неравенству Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda &\leq \frac{(Au, u)}{(u, u)} \leq \frac{\|Au\| \|u\|}{\|u\|^2} = \\ &= \frac{\|A(\tilde{u}_N - u_*)\|}{\|\tilde{u}_N - u_*\|} = \frac{\|A\tilde{u}_N - f\|}{\|\tilde{u}_N - u_*\|}, \end{aligned} \quad (11.23)$$

где λ — наименьшее собственное значение оператора A .

Отсюда

$$\|\tilde{u}_N - u_*\| \leq \frac{\|A(\tilde{u}_N - u_*)\|}{\lambda}, \quad (11.24)$$

т. е. норму разности между приближенным и обобщенным решениями на самом деле можно оценить с помощью нормы невязки. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ неравенство (11.24) принимает вид

$$\sqrt{\int_{\Omega} [\tilde{u}_N(x) - u_*(x)]^2 d\Omega} \leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{\int_{\Omega} [A(\tilde{u}_N(x) - f)]^2 d\Omega}. \quad (11.25)$$

Здесь речь идет об оценке среднеквадратичной погрешности приближенного решения в области Ω . Отметим, что для гарантированной оценки сверху этой погрешности необходимо использовать оценку наименьшего собственного значения снизу (см. 10.4).

При построении минимизирующей последовательности для функционала $J_s[u]$ с помощью метода Ритца условие $\|A\tilde{u}_N - f\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ выполняется лишь тогда, когда все

функции u_m в представлении (10.15) являются собственными элементами оператора A . В противном случае оценка (11.25) может оказаться слишком грубой. Применение методов наименьших квадратов или Куранта для построения минимизирующей последовательности обеспечивает $\|A\tilde{u}_N - f\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ в случае произвольного счетного базиса в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A$, составленного из функций $u_m \in D(A)$, что уточняет оценку (11.25).

В более общем случае погрешность приближенного решения, построенного с использованием счетного базиса, включающего функции u_m не только из $D(A)$, приходится оценивать по значению разности (11.22). Так как в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A$ для положительно определенного оператора $(Au, u) = \|u\|_A^2$, то вместо (11.23) с учетом (10.6) при $u = \tilde{u}_N - u_*$ запишем

$$0 < \lambda \leq \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = \frac{\|\tilde{u}_N - u_*\|_A^2}{\|\tilde{u}_N - u_*\|^2} = \frac{J_s[\tilde{u}_N] - J_s[u_*]}{\|\tilde{u}_N - u_*\|^2}.$$

Отсюда получаем

$$\|\tilde{u}_N - u_*\|^2 \leq \sqrt{\frac{J_s[\tilde{u}_N] - J_s[u_*]}{\lambda}} \leq \sqrt{\frac{J_s[\tilde{u}_N] - d}{\lambda}}. \quad (11.26)$$

Это верно, в частности, и для пространства $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$.

Точно определить минимальное значение d квадратичного функционала удастся редко. Однако если построена неубывающая последовательность $\{d_m\}$, сходящаяся к d , то $J_s[\tilde{u}_N] - d \leq J_s[\tilde{u}_N] - d_m$ и вместо (11.26) можно использовать более грубую оценку

$$\|\tilde{u}_N - u_*\| \leq \sqrt{\frac{J_s[\tilde{u}_N] - d_m}{\lambda}}. \quad (11.27)$$

Как и в случае (11.25), из (11.27) следует, что для количественной оценки погрешности необходимо располагать оценкой снизу значения λ .

Строить последовательность $\{d_m\}$ можно различными способами. Один из них состоит в построении функционала $I[v]$, двойственного функционалу $J_s[u]$ и достигающего на некотором элементе v_* своего наибольшего значения $I[v_*] = d$. Тогда

построим последовательность $\{d_m\}$ приближенных решений d_m вариационной задачи для функционала $I[v]$, которая сходится к d снизу, не убывая.

Пример 11.3. В примере 11.1 построен функционал

$$I[v] = -\frac{1}{2} \int_V v^2 dV - \int_S g v n dS, \quad (11.28)$$

двойственный функционалу Дирихле

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 dV. \quad (11.29)$$

Оператор $A = -\Delta$ в краевой задаче (11.10) не является симметрическим (см. пример 9.13). Тем не менее в этом случае для оценки погрешности приближенного решения краевой задачи (11.10) применима оценка, аналогичная (11.26). Действительно, используя первую формулу Грина и полагая $\tilde{u} = \tilde{u}_N - u_*$, преобразуем разность:

$$\begin{aligned} J[\tilde{u}_N] - J[u_*] &= \frac{1}{2} \int_V [(\nabla \tilde{u}_N)^2 - (\nabla u_*)^2] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla \tilde{u}_N - \nabla u_*) \nabla \tilde{u} dV + \frac{1}{2} \int_V (\nabla \tilde{u}_N - \nabla u_*) \nabla u_* dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{u} dV + \frac{1}{2} \int_V \nabla \tilde{u} \nabla u_* dV = \frac{1}{2} \int_S \tilde{u} \nabla \tilde{u} n dS - \\ &- \frac{1}{2} \int_V \tilde{u} \Delta \tilde{u} dV + \int_S \tilde{u} \nabla u_* n dS - \int_V \tilde{u} \Delta u_* dV = -\frac{1}{2} \int_V \tilde{u} \Delta \tilde{u} dV, \end{aligned}$$

поскольку $\tilde{u} \equiv 0$ на S и $\Delta u_* \equiv 0$ в V .

Пусть оператор $\tilde{A}$ есть оператор $-\Delta$, рассматриваемый на множестве функций $u(x) \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$, удовлетворяющих краевому условию $u \equiv 0$ на S . Тогда этот оператор будет симметрическим и

$$-\frac{1}{2} \int_V \tilde{u} \Delta \tilde{u} dV = \frac{1}{2} (\tilde{A} \tilde{u}, \tilde{u}), \quad \tilde{u} \in D(\tilde{A}).$$

В силу теоремы 10.3 имеем

$$0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \frac{(\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{u})}{(\tilde{u}, \tilde{u})} = 2 \frac{J[\tilde{u}_N] - J[u_*]}{\|\tilde{u}_N - u_*\|^2},$$

где $\tilde{\lambda}_1$ — наименьшее собственное значение симметрического оператора $\tilde{A}$.

Отсюда получаем

$$\|\tilde{u}_N - u_*\| = \sqrt{2 \frac{J[\tilde{u}_N] - d}{\tilde{\lambda}_1}}.$$

Если $\{d_m\}$ строить как минимизирующую последовательность функционала $-I[v]$, обратного по знаку функционалу (11.28), то для гарантированной оценки погрешности приближенного решения краевой задачи (11.10) используем оценку

$$\|\tilde{u}_N - u_*\| = \sqrt{2 \frac{J[\tilde{u}_N] - d_m}{\tilde{\lambda}_1}},$$

которая аналогична оценке (11.27).

Пример 11.4. При некоторых дополнительных предположениях оценку погрешности приближенного решения $\tilde{u}_N$, аналогичную (11.27), можно использовать и в нелинейных задачах. В примере 9.14 построен функционал (9.50)

$$\begin{aligned} J[u] = & -\tilde{\beta}u(b) + \int_a^b \frac{(u'(x))^2}{2} dx - \int_a^b f(x)u(x) dx + \\ & + \int_a^b dx \int_0^{u(x)} q(u) du + \int_0^{u(b)} s(u) du, \end{aligned}$$

соответствующий нелинейной краевой задаче (9.9), (9.10). Условием выпуклости этого функционала является неубывание функций $q(u)$ и $s(u)$ (см. пример 9.19).

Пусть этот функционал достигает своего наименьшего значения $J[u_*]$ на элементе $u_*(x) \in D(A)$, удовлетворяющем (9.9), (9.10), т. е.

$$\begin{cases} -u''_*(x) + q(u_*(x)) = f(x), & x \in [a, b], \\ u_*(a) = \tilde{\alpha}, \quad u'_*(b) + s(u_*(b)) = \tilde{\beta}. \end{cases} \quad (11.30)$$

Обозначив $\tilde{u}(x) = \tilde{u}_N(x) - u_*(x)$, запишем разность функционалов:

$$\begin{aligned} J[\tilde{u}_N] - J[u_*] &= -\tilde{\beta}(\tilde{u}_N(b) - u_*(b)) + \int_a^b \frac{(\tilde{u}'_N(x))^2 - (u'_*(x))^2}{2} dx - \\ &- \int_a^b f(x)(\tilde{u}_N(x) - u_*(x)) dx + \int_a^b dx \int_{u_*(x)}^{\tilde{u}_N(x)} q(u) du + \int_{u_*(b)}^{\tilde{u}_N(b)} s(u) du = \\ &= -\tilde{\beta}\tilde{u}(b) + \frac{1}{2} \int_a^b (\tilde{u}'(x))^2 dx + \int_a^b \tilde{u}'(x) u'_*(x) dx - \\ &- \int_a^b f(x) \tilde{u}(x) dx + \int_a^b dx \int_{u_*(x)}^{\tilde{u}_N(x)} q(u) du + \int_{u_*(b)}^{\tilde{u}_N(b)} s(u) du. \end{aligned}$$

Заменим в двух последних интегралах $q(u)$ и $s(u)$ соответственно на $q(u_*(x))$ и $s(u_*(b))$. Для неубывающих функций $q(u)$ и $s(u)$ это не приведет к возрастанию правой части последнего соотношения. Тогда, интегрируя по частям и учитывая соотношения (11.30) и равенство $\tilde{u}(a) = 0$, находим

$$\begin{aligned} J[\tilde{u}_N] - J[u_*] &\geq -\tilde{\beta}\tilde{u}(b) + \frac{1}{2} \int_a^b (\tilde{u}'(x))^2 dx + \tilde{u}(x) u'_*(x) \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \tilde{u}(x) u''_*(x) dx - \int_a^b f(x) \tilde{u}(x) dx + \int_a^b q(u_*(x)) \tilde{u} dx + s(u_*(b)) \tilde{u}(b) = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (\tilde{u}'(x))^2 dx + \int_a^b (-u''_*(x) + q(u_*(x)) - f(x)) \tilde{u}(x) dx + \\ &+ (u'_*(b) + s(u_*(b)) - \tilde{\beta}) \tilde{u}(b) = \frac{1}{2} \int_a^b (\tilde{u}'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Выпуклый функционал

$$F[u] = \int_a^b (\tilde{u}'(x))^2 dx = \|u'\|^2$$

достигает некоторого наименьшего значения λ° на замкнутом ограниченном множестве U функций $u(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих краевому условию $u(a) = 0$ и условию $\|u\|_{L_2} = 1$, так как этот функционал непрерывен по норме $\|\cdot\|_C^1$. Этот минимум является решением задачи на условный минимум функционала $F[u]$ при условии $\|u\|_{L_2} = 1$. Решая эту вариационную задачу методом множителей Лагранжа (см. теорему 4.3), заключаем, что функция $u_0(x)$, являющаяся точкой условного минимума, удовлетворяет дифференциальному уравнению $u''_0 = \lambda u_0$ (уравнение Эйлера для лагранжиана задачи) и краевым условиям $u(a) = 0$, $u'(b) = 0$ (условие трансверсальности). Другими словами, λ° есть собственное значение симметрического положительного оператора $A[u] = -u''$, определенного на множестве функций $u(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $u(a) = u'(b) = 0$. Ясно, что λ° — это наименьшее собственное значение оператора A , которое нетрудно определить: $\lambda^\circ = \pi^2/4$ [XI]. Таким образом,

$$\lambda^\circ = \min_{\|u\|=1} F[u] = \min_{u \neq 0} \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\|\tilde{u}'\|^2}{\|\tilde{u}\|^2} \leq 2 \frac{J[\tilde{u}_N] - J[u_*]}{\|\tilde{u}_N - u_*\|},$$

где минимумы ищут на множестве функций $u(x) \in C^1[a, b]$, для которых $u(a) = 0$.

В итоге получаем

$$\|\tilde{u}_N - u_*\| = \sqrt{2 \frac{J[\tilde{u}_N] - d}{\lambda^\circ}}.$$

Вопросы и задачи

11.1. Постройте функционал, двойственный функционалу (9.31), переходом к полному функционалу.

11.2. Сформулируйте задачу на собственные значения для нахождения числа λ в (11.27) при использовании вместо $J_s[u]$ функционала (9.31).

11.3. Постройте функционал, двойственный функционалу (9.42), переходом к полному функционалу.

11.4. Сформулируйте задачу на собственные значения для нахождения числа λ в (11.27) при использовании вместо $J_s[u]$ функционала (9.42).

ЧАСТЬ IV

Приложения вариационных методов

С тех пор как существует научная физика, высшей целью, мерцавшей перед нею, было разрешение задачи — как обобщить все явления природы, наблюдавшиеся в прошлом и могущие быть наблюдаемыми в будущем, в одном простом принципе...

Эта цель и сегодня не достигнута; она не будет достигнута полностью и в будущем, что лежит в природе вещей, но все более и более приближаться к ней — вполне возможно.

М. Планк

12. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА

Механической системой называют множество материальных точек, в которых положение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек этого множества. Условия, ограничивающие движение точек системы, называют связями. Связи могут записываться в виде уравнений или неравенств, которым подчиняются координаты положения и скорости точек системы.

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и координатами положения $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, заданными в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Предполагаем, что связи в рассматриваемой механической системе имеют вид

$$f_j(r_1, \dots, r_n, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (12.1)$$

Если функции f_j на самом деле от скоростей $\dot{r}_i$ материальных точек не зависят, то соответствующие связи называют голономными.

Кинетической энергией механической системы из n точек называют величину

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (12.2)$$

где $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ — вектор скорости i -й материальной точки.

Движение механической системы вызывается совокупностью сил. Пусть на i -ю материальную точку системы из n точек действует сила $\mathbf{F}_i$. Если существует такая функция $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$, что сила $\mathbf{F}_i$ может быть представлена в виде $\mathbf{F}_i = \text{grad}U(\mathbf{r}_i)$, то эту функцию называют потенциалом сил,

а противоположную ей функцию $V(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$ — потенциальной энергией механической системы. Сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы представляет собой полную энергию этой системы. Если в процессе движения механической системы ее полная энергия не изменяется, т. е. $T + V = T - U = \text{const}$, то такую механическую систему называют консервативной.

Если связи (12.1), наложенные на систему, являются голономными, причем функции f_j функционально независимы, или, другими словами, ранг матрицы Якоби системы функций f_j , $j = \overline{1, k}$, максимален и равен k , то система уравнений (12.1) может быть локально разрешена относительно каких-либо k переменных. Тогда остальные $3n - k$ переменных могут свободно меняться, полностью определяя положение механической системы. В этом случае говорят, что механическая система имеет $3n - k$ степеней свободы. Эти $m = 3n - k$ свободно меняющихся переменных могут рассматриваться как обобщенные (лагранжевы) координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ механической системы. Конкретное положение механической системы будет описываться набором значений обобщенных координат и может интерпретироваться как точка в некотором m -мерном фазовом пространстве E . При этом движение механической системы будет изображаться некоторой кривой, которая параметрически описывается вектор-функцией $(q_1(t), \dots, q_m(t))$. Производные лагранжевых координат по времени называют обобщенными скоростями механической системы.

Итак, механическая система из n материальных точек изображается точкой в m -мерном арифметическом пространстве, которое мы будем считать евклидовым со стандартным скалярным произведением. Любому движению системы из положения $A(q_{10}, \dots, q_{m0})$ в положение $B(q_{11}, \dots, q_{m1})$ соответствует кривая $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_m(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой $q_i(t_0) = q_{i0}$, $q_i(t_1) = q_{i1}$, $i = \overline{1, m}$. Все гладкие кривые в пространстве обобщенных координат, проходящие через данные точки A и B , будем называть возможными траекториями, а ту из них, по которой происходит движение системы под действием приложенных сил, — действительной траекторией.

Пусть механическая система потенциальна и, вообще говоря, неконсервативна. Функцией Лагранжа механической системы называют функцию

$$L = L(t, q, \dot{q}) = T + U,$$

а *действием по Гамильтону* для рассматриваемой механической системы — функционал

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt,$$

заданный на всех возможных траекториях системы.

Согласно *принципу Гамильтона*, среди возможных траекторий движения системы действительной является та, на которой вариация действия по Гамильтону равна нулю:

$$\delta S[q] = \delta \left(\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt \right) = 0.$$

Другими словами, действительная траектория является стационарной точкой действия по Гамильтону.

Итак, для того чтобы найти траекторию движения механической системы, вызванного приложенными к системе внешними силами, нужно определить стационарные точки функционала, называемого действием по Гамильтону. Но точно так же решается простейшая задача вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt \rightarrow \text{extr}, \quad q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (12.3)$$

где $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{m0})$; $q_1 = (q_{11}, \dots, q_{m1})$; $q(t) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$.

Экстремали вариационной задачи (12.3) ищем как решения системы уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt} L'_{\dot{q}_i} - L'_{q_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12.4)$$

удовлетворяющие краевым условиям вариационной задачи. Система уравнений (12.4) в теоретической механике известна как система уравнений движения в форме Лагранжа.

Замечание 12.1. Изложенный принцип был опубликован В. Гамильтоном в 1834–1835 годах в случае стационарных связей. Независимо от него и в более общем случае нестационарных неголономных связей этот принцип был сформулиро-

ван М.В. Остроградским в 1848 году. Поэтому иногда в литературе принцип Гамильтона называют принципом Гамильтона — Остроградского. #

Хотя в принципе Гамильтона действительная траектория характеризуется как стационарная точка функционала (действия по Гамильтону), заданного на множестве возможных траекторий на общем промежутке времени $[t_0, t_1]$ с общими концами A и B , в ряде случаев по смыслу рассматриваемой прикладной задачи ясно, что действительная траектория является и точкой минимума рассматриваемого функционала, а поиск действительной траектории фактически эквивалентен решению простейшей задачи вариационного исчисления (12.3). В таких случаях принцип Гамильтона сводится к принципу наименьшего действия.

Пример 12.1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из единственной точки, движение которой подчиняется голономной связи $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где x, y, z — текущие координаты этой точки. В этой системе точка перемещается по сфере. Если внешние силы отсутствуют, то потенциал сил U можно считать равным нулю и действие по Гамильтону имеет вид

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt,$$

где m — масса материальной точки; v — вектор скорости точки в текущий момент времени.

Доказано*, что при отсутствии внешних сил движение идет с постоянной по модулю скоростью ($|v| = v = v_0 = \text{const}$), а траекториями движения будут дуги больших кругов на сфере. Значит, действие по Гамильтону можно записать в виде

$$S = \frac{mv_0^2}{2}(t_1 - t_0).$$

Для любых фиксированных точек A и B на сфере укажем две дуги большого круга, соединяющие эти точки. Каждая из них, как отмечено, является действительной траекторией. Меньшая из них дает минимум действия по Гамильтону,

* См., например: Бухгольц Н.Н.

а бóльшая — максимум, так как при фиксированном промежутке времени однозначно определена постоянная скорость, с которой материальная точка должна двигаться по траектории, причем эта скорость пропорциональна длине траектории. Итак, не всякая действительная траектория обеспечивает минимум действия по Гамильтону.

Отметим частный случай, когда точки A и B диаметрально противоположны. В этом случае существует бесконечно много действительных траекторий, соединяющих эти точки, причем среди таких траекторий можно выбрать сколь угодно близкую к некоторой заданной. В теоретической механике такие точки называют сопряженными кинематическими фокусами.

Если движение на сфере ограничить некоторой областью D , не содержащей диаметрально противоположных точек (сопряженных кинематических фокусов), то любая экстремаль будет давать минимум действия по Гамильтону. Значит, принцип Гамильтона в малом (локально) становится принципом наименьшего действия.

13. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Простейший пример механической системы с распределенной массой — струна или стержень. Струной (нитью) называют тело, у которого поперечное сечение намного меньше длины (одномерное тело) и которое сопротивляется только натяжению. Струна однородна, если плотность материала, из которого она изготовлена, постоянна.

Пусть в некоторый начальный момент времени струна под действием натяжения N приобрела длину l и располагается в прямоугольной системе координат Oxy вдоль оси Ox , $x \in (0, l)$, концы ее закреплены в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Поперечные малые колебания струны можно описать функцией $u = u(x, t)$, значение которой $u(x, t)$ есть отклонение вдоль оси Oy точки, имеющей в положении равновесия координаты $(x, 0)$. При этом $|u(x, t)| \ll l$, $|u'_x(x, t)| \ll 1$ при $t > t_0$ и $x \in (0, l)$. Кинетическая энергия элемента длины струны равна

$$dT = \frac{1}{2} \rho (u'_t)^2 dx,$$

где ρ — линейная плотность материала. Поэтому кинетическая энергия колеблющейся струны выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (u'_t(x, t))^2 dx.$$

При колебаниях длина струны меняется на величину

$$\Delta l = \int_0^l \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx - l \approx \frac{1}{2} \int_0^l (u'_x)^2 dx.$$

Сила натяжения совершает работу на этом приращении длины. Согласно теореме Клапейрона^{*}, вклад внешней силы N в потенциальную энергию с учетом ее постоянства равен:

$$V = \frac{N}{2} \int_0^l (u'_x)^2 dx.$$

Согласно принципу Гамильтона, ищем стационарные точки функционала

$$\begin{aligned} S[u] &= \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l (\rho(u'_t)^2 - N(u'_x)^2) dx = \\ &= \iint_{\Omega} f(t, u, u'_x, u'_t) dx dt, \end{aligned}$$

где $f = f(x, t, u, u'_x, u'_t) = \frac{1}{2}(\rho(u'_t)^2 - N(u'_x)^2)$ — интегрант функционала; $\Omega = [0, l] \times [t_0, t_1]$.

В качестве допустимых рассматриваются все непрерывно дифференцируемые функции $u(x, t)$, обращающиеся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, а при $t = t_0$ и $t = t_1$ — совпадающие с заданными функциями $u(x, t_0)$ и $u(x, t_1)$ соответственно (эти функции описывают форму струны в начальный и конечный моменты времени).

Уравнение свободных колебаний — это уравнение Остроградского для функционала $S[u]$, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f'_{u'_t} + \frac{\partial}{\partial x} f'_{u'_x} - f'_u = 0.$$

Подставляя в него конкретный интегрант, находим

$$\rho u''_{tt} - N u''_{xx} = 0. \quad (13.1)$$

Пусть на струну действует поперечная нагрузка интенсивности $p(x, t)$. Ее работа на поперечных перемещениях точек струны равна:

^{*} См.: Работнов Ю.Н.

$$A = \int_0^l p(x, t) u(x, t) dx.$$

Струна, распрямляясь, совершает работу, отличающуюся знаком от работы A внешней нагрузки. Следовательно, дополнительная потенциальная энергия равна:

$$-\int_0^l p(x, t) u(x, t) dx.$$

Записав действие по Гамильтону

$$S[u] = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho (u'_t)^2 - \frac{1}{2} N (u'_x)^2 + pu \right) dx dt,$$

находим уравнение Остроградского этого функционала:

$$\rho u''_{tt} - Nu''_{xx} = p(x, t), \quad (13.2)$$

которое представляет собой уравнение вынужденных колебаний струны.

Положение устойчивого равновесия* под действием статической нагрузки получим, решив вариационную задачу

$$V[u] = \int_0^l \left(-\frac{1}{2} N (u'_x)^2 - p(x) u \right) dx \rightarrow \min.$$

Соответствующее уравнение Остроградского, представляющее собой уравнение равновесия, имеет вид

$$Nu''_{xx} + p(x) = 0.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (13.2) при условии, что ускорение u''_{tt} тождественно равно нулю, а распределение внешней нагрузки не зависит от времени: $p(x, t) \equiv p(x)$.

* См.: Вольмир А.С.

14. КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ

Мембрана — это материальная поверхность (пленка), которая не сопротивляется изгибу и сдвигу. Пусть мембрана натянута на плоский контур Γ , охватывающий область G в плоскости xOy . Рассмотрим поперечные колебания мембраны, в которых перемещение $u(x, y, t)$ каждой точки $(x, y) \in G$ перпендикулярно плоскости xOy .

Пусть dl — элемент некоторого контура на поверхности деформированной мембраны. На этот элемент действует усилие Tdl , где вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной к поверхности плоскости и перпендикулярен dl , а его модуль T представляет собой натяжение мембраны. Предполагая, что мембрана подвержена малым колебаниям, т. е. $|u(x, y, t)|$ намного меньше размеров G , а $|u'_x|$, $|u'_y|$ много меньше единицы, мы можем пренебречь вторыми и более высокими степенями частных производных, так как, например, $|u'_x|^2 \ll |u'_x|$, $|u'_y|^2 \ll |u'_y|$.

Натяжение $T(x, y, t)$ во всех точках мембраны одинаково: $T(x, y, t) = T_0 = \text{const}$. Считаем, что материал мембраны обладает линейно упругими свойствами. Тогда потенциальная энергия деформирования мембраны пропорциональна приращению площади ее поверхности, причем коэффициент пропорциональности равен натяжению. Это можно показать, выделив дифференциальный элемент площади и подсчитав элементарную работу сил натяжения, затраченную на его деформирование.

Площадь S поверхности деформированной мембраны вычисляется по формуле

$$S = \iint_G \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} dx dy,$$

значит, приращение площади равно:

$$\Delta S \iint_G \left(\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} - 1 \right) dx dy \approx \frac{1}{2} \iint_G ((u'_x)^2 + (u'_y)^2) dx dy.$$

Отсюда находим потенциальную энергию деформированной мембраны:

$$V = T_0 \Delta S = \frac{T_0}{2} \iint_G ((u'_x)^2 + (u'_y)^2) dx dy. \quad (14.1)$$

Пусть на мембрану действует поперечное давление $f(x, y)$. Тогда элементарная работа, затраченная на перемещение элемента поверхности $dx dy$ на расстояние $u(x, y, t)$, равна: $\delta A = f u dx dy$, а вся работа выражается интегралом:

$$A = \iint_G f u dx dy.$$

Предположим, что контур Γ мембраны удерживается линейно упругими пружинами с модулем упругости c и может перемещаться только вдоль оси Oz . На контур действует внешняя распределенная нагрузка $p(l)$, направленная вдоль Oz и стремящаяся удержать контур в положении равновесия. Тогда суммарная работа упругих пружин равна:

$$A_{\text{уп}} = -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} c u^2 dl,$$

а работа распределенной нагрузки $p(l)$ есть

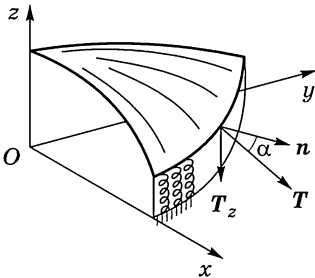


Рис. 14.1

$$A(p) = -\oint_{\Gamma} p(l) u dl.$$

Кроме перечисленных внешних сил, на контур действуют силы натяжения $T dl$. Их составляющая T_z вдоль оси Oz совершает работу по перемещению контура (рис. 14.1). Вычислим эту составляющую:

$$T_z = T \sin \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial u}{\partial n},$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная u по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к контуру Γ .

Таким образом, потенциальная энергия V упругой системы мембрана — контурные пружины может быть записана в виде

$$V = \iint_G \left(\frac{T_0}{2} ((u'_x)^2 + (u'_y)^2) - fu \right) dx dy + \\ + \oint_{\Gamma} \left(p(l)u + \frac{1}{2} c(l)u^2 + T_0 \frac{\partial u}{\partial n} u \right) dl.$$

Если пренебречь массой контурных пружин, кинетическую энергию мембраны можно представить так:

$$K = \frac{1}{2} \iint_G \rho (u'_t)^2 dx dy,$$

где $\rho = \rho_0 = \text{const}$ — поверхностная плотность мембраны.

Для вывода уравнений движения мембраны используем принцип Гамильтона, согласно которому действие по Гамильтону на функции $u(x, y, t)$, описывающей реальное движение мембраны, т. е. функционал

$$S[u] = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L = K - V,$$

имеет нулевую первую вариацию: $\delta S[u, \delta u] = 0$. Другими словами, функция $u(x, y, t)$ является стационарной точкой функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_G \left(\frac{1}{2} \rho (u'_t)^2 - \frac{T_0}{2} ((u'_x)^2 + (u'_y)^2) - fu \right) dx dy - \right. \\ \left. - \oint_{\Gamma} \left(p(l)u + \frac{1}{2} c(l)u^2 + T_0 \frac{\partial u}{\partial n} u \right) dl \right\} dt. \quad (14.2)$$

Вычисляя вариацию этого функционала (см. 2.4) и приравнивая ее нулю, получаем уравнение колебаний мембраны

$$\frac{T_0}{2}(u''_{xx} + u''_{yy}) + f(x, y) = \rho u''_{tt} \quad (14.3)$$

и естественные краевые условия

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + p + cu \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (14.4)$$

Если речь идет о закрепленной по контуру мембране, то контурный интеграл в (14.2) равен нулю и естественное краевое условие (14.4) заменяется краевым условием $u|_{\Gamma} = 0$.

При использовании принципа Гамильтона мы считаем, что допустимые функции имеют конкретные значения в моменты времени t_0 и t_1 . Однако в задачах динамики задают только начальное состояние, т. е. считают известными $u(x, y, t_0)$ и $u'_t(x, y, t_0)$. Таким образом, приходим к задачам смешанного типа: ставим и краевые, и начальные условия.

Сформулируем задачу о статическом нагружении мембраны. Из уравнений (14.3) и (14.4), приравнивая нулю производные по времени, получаем

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{2}{T_0} f(x, y), & (x, y) \in G; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \frac{c}{T_0} u = -\frac{p}{T_0}, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (14.5)$$

Эта задача представляет собой краевую задачу III рода для уравнения Пуассона [XII]. Если c велико (это соответствует высокой жесткости пружин), то во втором уравнении можно пренебречь производной по направлению нормали. В этом случае получаем краевую задачу I рода (задачу Дирихле). Если же c мало, так что можно считать, что $c = 0$, получаем условия свободной границы. Это краевая задача II рода (задача Неймана). Задача Неймана имеет не единственное решение. Решение будет зависеть от аддитивной постоянной, отражающей начальное состояние мембраны. Кроме того, в случае краевых

условий II рода равновесие возможно только тогда, когда суммарная сила, действующая на мембрану, равна нулю:

$$\iint_G f(x, y) dx dy + \oint_{\Gamma} p(l) dl = 0.$$

О способах интегрирования уравнений движения (равновесия) мембраны см. в [XII].

15. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотренный ранее принцип Гамильтона можно обобщить на случай неконсервативной и неголономной системы. Функция Лагранжа определяется равенством $L = T - V = T + U$, где T и V — соответственно кинетическая и потенциальная энергии механической системы. Принцип Гамильтона можно записать следующим образом:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U) dt = 0. \quad (15.1)$$

Если в подынтегральном выражении (15.1) второе слагаемое δU , представляющее собой вариацию потенциала действующих на систему сил, заменить величиной

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i,$$

выражающей элементарную работу непотенциальных сил через обобщенные силы Q_i и возможные обобщенные перемещения δq_i , то получим обобщение принципа Гамильтона на неконсервативные системы*. Вычислим интеграл от вариации кинетической энергии:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \right.$$

* См.: Бухгольц Н.Н.

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt, \quad (15.2)$$

так как в данном случае вариации изохронны и $\delta t = 0$.

Преобразуем второе слагаемое в (15.2) с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt, \end{aligned}$$

учитывая, что начальное $\mathbf{q}(t_0)$ и конечное $\mathbf{q}(t_1)$ положения механической системы фиксированы и вследствие этого $\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + Q_i \right) \delta q_i dt = 0. \quad (15.3)$$

Из уравнения (15.3) вытекают уравнения движения неконсервативной системы с n степенями свободы, если учесть, что промежуток интегрирования произволен, а вариации δq_i независимы.

Оказывается, что принцип Гамильтона в форме (15.3) справедлив и для систем с линейными неголономными связями. При этом из вариационного принципа можно получить не только уравнения движения, но и краевые условия.

Пусть жидкость несжимаема. При движении такой жидкости любой выделенный ее объем не изменяется (хотя и меняет форму). Выберем некоторый объем $\Delta\Omega$ и рассмотрим возможные перемещения $\delta \mathbf{r}$ его точек. Перемещения должны быть таковы, чтобы выполнялось условие несжимаемости:

$\varphi = \frac{\Delta\Omega' - \Delta\Omega}{\Delta\Omega} = 0$, где $\Delta\Omega'$ — объем $\Delta\Omega$ жидкости после перемещения. Так как $\varphi = \text{div} \mathbf{r}$, то

$$\delta\varphi = \delta \text{div} \mathbf{r} = \text{div} \delta \mathbf{r} = 0. \quad (15.4)$$

Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, на которую, возможно, действуют неконсервативные силы. Принцип Гамильтона можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega} (\delta \tilde{T} + \delta \tilde{A}) d\Omega = 0, \quad (15.5)$$

где $\delta \tilde{T}$ и $\delta \tilde{A}$ — вариации кинетической энергии $\tilde{T}$ и работы $\tilde{A}$, приходящихся на единицу объема.

Так как работа внутренних сил в любом объеме жидкости равна нулю (вследствие того, что она идеальна), то $\delta \tilde{A}$ есть работа только внешних, например массовых, сил $\mathbf{K}$, т. е. $\delta \tilde{A} = \mathbf{K} \delta \mathbf{r}$.

Итак, ставится задача о стационарности действия по Гамильтону при дополнительном условии (15.4).

Используя метод множителей Лагранжа, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega} (\delta \tilde{T} + \delta \tilde{A} + \lambda \delta \varphi) d\Omega = 0. \quad (15.6)$$

Здесь все подынтегральные величины отнесены к единице объема. Так как $\tilde{T} = \frac{1}{2} \rho v v$, то $\delta \tilde{T} = \rho v \delta v$. Действительная скорость есть полная производная по времени от вектора перемещения $\mathbf{r}$. Поэтому

$$\delta v = \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\delta \mathbf{r})}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \rho \delta v \cdot \mathbf{v} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d(\delta \mathbf{r})}{dt} dt = \\ &= \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dt, \end{aligned}$$

так как $\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{0}$.

Далее, учитывая формулы связи между дифференциальными операциями векторного анализа, находим

$$\lambda \delta \varphi = \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{r} = \operatorname{div}(\lambda \delta \mathbf{r}) - \operatorname{grad} \lambda \cdot \delta \mathbf{r}.$$

По теореме Остроградского — Гаусса

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{r} d\Omega &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\lambda \delta \mathbf{r}) - \operatorname{grad} \lambda \cdot \delta \mathbf{r}) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \lambda \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega + \oint_{\Sigma} \lambda \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \end{aligned}$$

Используя проведенные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega} (\delta \tilde{T} + \delta \tilde{A} + \lambda \delta \varphi) d\Omega = \\ = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega} \left(-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{K} - \operatorname{grad} \lambda \right) \delta \mathbf{r} d\Omega + \int_{t_0}^{t_1} dt \oint_{\Sigma} \lambda \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0. \quad (15.7) \end{aligned}$$

Чтобы это равенство было верным, достаточно обратить в нуль каждое слагаемое.

Смысл множителей Лагранжа в случае механических систем состоит в том, что эти дополнительные неизвестные заменяют уравнения связей и на самом деле отражают ответные воздействия связей на систему, т. е. характеризуют реакцию связей.

При выделении объема идеальной жидкости связи проявляются как воздействие на выделенный объем «остальной» среды. А это есть нормальные давления на поверхность выделенного объема: $\lambda = p$. После введения множителя λ перемещения $\delta \mathbf{r}$ становятся свободными. Поэтому, приравнявая в (15.7) первое слагаемое нулю, заключаем, что подынтегральное выражение равно нулю, и получаем уравнение движения в векторной форме*:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{grad} p = \mathbf{K}. \quad (15.8)$$

* См.: Лойцянский Л.Г.

Второе слагаемое в уравнении (15.7) после приравнивания нулю порождает краевые условия, выраженные через давление и перемещения точек границы:

$$pn\delta r|_{\Sigma} = 0. \quad (15.9)$$

Если часть границы Σ_1 области соприкасается с неподвижной стенкой, то из (15.9) с учетом $p \neq 0$ получим условие отсутствия перемещений на этой части границы в направлении вектора нормали $\mathbf{n}$, называемое условием непротекания (непроницаемости границы):

$$\mathbf{n}\delta r|_{\Sigma} = 0.$$

16. ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА

Сформулировать задачу Чаплыгина можно следующим образом: определить замкнутую кривую (траекторию), по которой должен лететь самолет, имеющий собственную скорость (по модулю) v_0 , чтобы в промежуток времени T облететь наибольшую площадь; при этом предполагаются постоянными скорость и направление ветра*.

Пусть ось Ox совпадает с направлением вектора скорости ветра a ; $x(t), y(t)$ — координаты положения центра масс самолета в момент времени t ; скорость самолета в неподвижных осях xOy есть геометрическая сумма векторов собственной скорости и скорости ветра. Поэтому проекции скорости самолета на оси координат:

$$x'(t) = v_0 \cos \alpha + a; \quad y'(t) = v_0 \sin \alpha. \quad (16.1)$$

Здесь $\alpha = \alpha(t)$ — угол между продольной осью самолета, т. е. направлением вектора $v(t)$, и осью Ox (рис. 16.1, $++$ — условное обозначение самолета).

Площадь, ограниченная замкнутой траекторией самолета, описанной за время T , вычисляется в виде

$$J[x, y] = \frac{1}{2} \int_0^T (xy' - yx') dt.$$

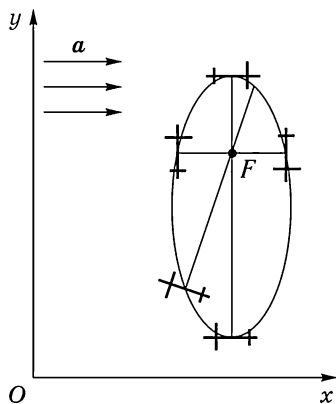


Рис. 16.1

* См.: Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.

Задача сводится к поиску $\max J[x, y]$ при дифференциальных (неголономных) связях (16.1), т. е. поставлена задача Лагранжа в параметрическом виде.

Ставим задачу на безусловный экстремум

$$J^*[x, y, \alpha, \lambda_1, \lambda_2] = \int_0^T [xy' - yx' + \lambda_1(x' - v_0 \cos \alpha - a) + \lambda_2(y' - v_0 \sin \alpha)] dx \rightarrow \max.$$

Запишем уравнения Эйлера:

$$L'_x - \frac{d}{dt} L'_{x'} = 0 \Rightarrow y' - \frac{d}{dt}(-y + \lambda_1) = 0, \quad (16.2)$$

$$L'_y - \frac{d}{dt} L'_{y'} = 0 \Rightarrow -x' - \frac{d}{dt}(x + \lambda_2) = 0, \quad (16.3)$$

$$L'_\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_1 \sin \alpha - \lambda_2 \cos \alpha = 0. \quad (16.4)$$

Из (16.2) и (16.3) следует:

$$2y + C_1 = \lambda_1; \quad 2x + C_2 = -\lambda_2. \quad (16.5)$$

Путем параллельного переноса координат добьемся того, чтобы постоянные в выражениях (16.5) стали равны нулю, тогда

$$x = \frac{-\lambda_2}{2}, \quad y = \frac{\lambda_1}{2}. \quad (16.6)$$

Выберем полюс полярной системы в некоторой точке F . Перейдем к полярным координатам: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ — полярный угол.

Поскольку $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, из (16.6) получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (16.7)$$

С другой стороны, из (16.4):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (16.8)$$

Сравнение (16.7) и (16.8) дает:

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad (16.9)$$

так как $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi \equiv 0$.

Подстановка (16.9) в (16.1) приводит к системе

$$\begin{cases} x' = -v_0 \sin \varphi + a; \\ y' = v_0 \cos \varphi. \end{cases}$$

Умножим первое соотношение на x , второе — на y и сложим:

$$\begin{aligned} x'x + y'y &= -v_0 x \sin \varphi + ax + v_0 y \cos \varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow x'x + y'y &= ax = ar \cos \varphi = ar \sin \alpha, \end{aligned}$$

поскольку $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$.

Исходя из равенства $x'x + y'y = ar \sin \alpha$, имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = r \frac{dr}{dt} = ar \sin \alpha \Rightarrow \frac{dr}{dt} = a \sin \alpha.$$

Воспользуемся вторым из соотношений (16.1):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{v_0} \frac{dy}{dt}.$$

Отсюда получим уравнение

$$r = \frac{a}{v_0} y + C \Rightarrow r = \frac{a}{v_0} r \sin \varphi + C \Rightarrow r = \frac{C}{1 - \frac{a}{v_0} \sin \varphi}.$$

Получили уравнение эллипса ($a/v_0 < 1$, так как скорость самолета больше скорости ветра), фокус которого находится тоже в F , полюсе полярной системы, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{a}{v_0}$, большая ось направлена по оси Oy . Вектор скорости центра масс самолета ортогонален радиусу-вектору (в полярной системе) $r(\varphi)$ в силу (16.9).

17. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЬЮТОНА

В 1687 г. вышел в свет исторический труд сэра Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии». В России книга впервые была опубликована в 1914 г. в «Известиях Николаевской морской академии» в переводе с латыни «с пояснениями и примечаниями Флота Генерала А.Н. Крылова, заслуженного профессора академии, ординарного академика Императорской академии наук».

В разделе 7 «О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел» Ньютон решает задачу о сопротивлении движению шара и длинного круглого цилиндра равных диаметров в «редкой» среде (модель идеального газа или слабо сопротивляющейся жидкости); затем исследует движение усеченного конуса в той же среде и ставит задачу о нахождении формы тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при своем движении.

Без каких-либо пояснений Ньютон приводит решение последней задачи (рис. 17.1): «Когда же кривая $DNFG$ будет такова, что если из любой ее точки N опустить на ось AB пер-

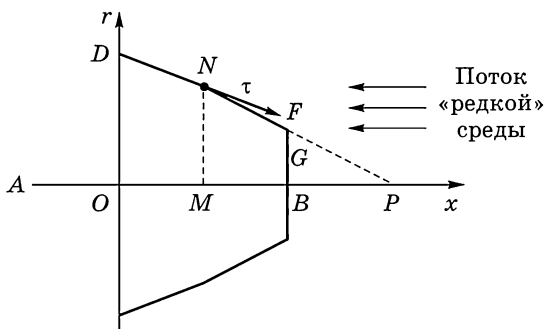


Рис. 17.1

пендикуляр NM и из конечной точки G провести прямую GP параллельно касательной $N\tau$, построенной к кривой в точке N , то имеет место пропорция

$$MN:GP = GP^3:(4BP \cdot GB^2) \text{ }^*.$$
 (17.1)

Постановка задачи о теле вращения наименьшего сопротивления зависит от закона сопротивления среды. Ньютон представлял себе «редкую» среду состоящей из неподвижных равномерно распределенных в ней абсолютно упругих шариков массой m (поэтому и назвал среду «редкой»).

Пусть тело вращения (вокруг оси Ox) движется со скоростью v ($|v| = \text{const}$) в ньютоновской среде и сталкивается с расположенными в среде шариками (рис. 17.2).

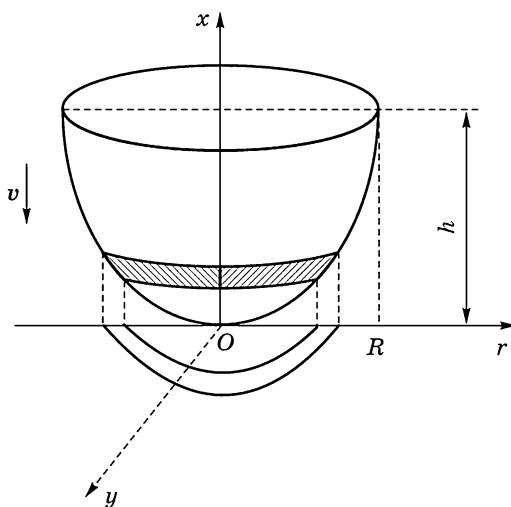


Рис. 17.2

Дифференциальный элемент dr на оси Or при вращении вокруг оси Ox «заметет» площадь

$$d\sigma = 2\pi r dr.$$

Этому кольцу, принадлежащему плоскости rOy , на поверхности движущегося тела соответствует поясок площадью $d\Sigma$. За время dt поясок $d\Sigma$ «вытеснит» объем

$$dV = 2\pi r dr (v dt).$$
 (17.2)

* См.: Крылов А.Н.

Пусть ρ — плотность «редкой» среды. Тогда количество частиц, встретившихся на пути пояска $d\Sigma$,

$$N = \rho d \frac{V}{m}. \quad (17.3)$$

Вычисляем *импульс*, действующий на $d\Sigma$ (за время dt). Пусть элемент ds дуги меридиана поверхности вращения наклонен к оси Or под углом φ . Отражаясь от точек пояска $d\Sigma$ (при этом угол падения равен углу отражения), каждая частица массы m получит приращение количества движения

$$m(v_2 - v_1) = 2m v n \cos \varphi, \quad (17.4)$$

где $|v_1| = |v_2|$; n — единичная нормаль к элементу поверхности;

$\varphi = \arctg \frac{dx}{dr}$ — угол ds с осью Or .

В уравнении (17.4) столкновения абсолютно упругие.

В силу третьего закона Ньютона от столкновения с одной частицей тело подвергнется действию импульса

$$dJ = -2m v n \cos \varphi.$$

За время dt таких импульсов будет N , причем за счет осевой симметрии компонента суммарного импульса J_r (по оси Or) равна нулю, а J_x вычисляем (в силу (17.2) и (17.3)) следующим образом:

$$|J_x| = (N m 2v \cos \varphi) \cos \varphi = 4\rho \pi v^2 \cos^2 \varphi r dr dt.$$

Отсюда получаем составляющую по оси Ox силы противодействия движению тела:

$$\begin{aligned} dF dt &= J_x \Rightarrow dF = \frac{J_x}{dt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow dF = (4\rho \pi v^2) \cos^2 \varphi r dr \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = 4\pi \rho v^2 \int_0^R \cos^2 \varphi r dr = K \int_0^R \frac{r dr}{1 + \tg^2 \varphi} = K \int_0^R \frac{r dr}{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Необходимо определить уравнение такой кривой $x = x(r)$, чтобы сила сопротивления F была минимальной.

Прежде чем решить проблему минимизации функционала (17.5), рассмотрим вспомогательную задачу: среди всех усеченных конусов, построенных на основании AC радиуса R и на высоте h , найти конус (т. е. определить радиус меньшего основания) с наименьшим сопротивлением движению (рис. 17.3). Иными словами: построить прямой конус (т. е. при заданном радиусе основания R найти высоту $AS = H$), усечением которого на высоте h получим конус с наименьшим сопротивлением.

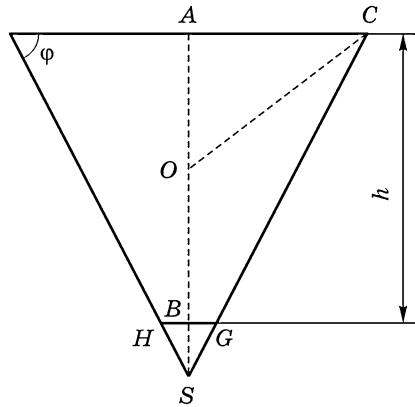


Рис. 17.3

Ньютон (без объяснений) дает способ построения искомого конуса: поделим отрезок AB пополам точкой O , найдем гипотенузу $\triangle ACO$

$$CO = \sqrt{R^2 + (h/2)^2}$$

и отрезок CO отложим от точки O вдоль оси AB :

$$AS = H = \frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2}.$$

Таким образом, построим конус ACS , который необходимо «усечь» на высоте h . Приводим решение А.Н. Крылова, данное в его комментариях к «Математическим началам».

Введем вспомогательный параметр ξ : $H = h + \xi$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(h + \xi)}{R}, \quad r_0 = BG = \frac{\xi R}{(h + \xi)}.$$

Сила сопротивления среды, действующая на усеченный конус, есть сумма сопротивления F_1 носовой части GH и сопротивления F_2 боковой поверхности:

$$F = F_1 + F_2 = 4\pi\rho v^2 \left(\int_0^{r_0} r dr + \int_{r_0}^R \frac{r dr}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi\rho v^2 \left(\frac{\xi^2 R^2}{(h+\xi)^2} \left(1 - \frac{R^2}{R^2 + (h+\xi)^2} \right) + \frac{R^4}{R^2 + (h+\xi)^2} \right) = \\
 &= 2\pi\rho v^2 R^2 \frac{\xi^2 + R^2}{R^2 + (h+\xi)^2} \equiv F(\xi).
 \end{aligned}$$

Находим стационарную точку:

$$\begin{aligned}
 F'(\xi) = 0 &\Rightarrow \xi^2 + h\xi - R^2 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{(-h \pm \sqrt{h^2 + 4R^2})}{2}.
 \end{aligned}$$

Берем положительный корень:

$$\xi = -\frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2},$$

получаем высоту конуса ACS , предложенную Ньютоном:

$$H = h + \xi = \frac{h}{2} + \sqrt{R^2 + (h/2)^2}.$$

Рассмотрим малую секцию усеченного конуса:

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow R \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{R} \rightarrow 1,$$

т. е. образующая усеченного конуса пересекает меньшее основание под углом 135° .

Отсюда Ньютон делает важный вывод (рис. 17.4): «Если тело образуется обращением эллипса или овала $ADBE$ около

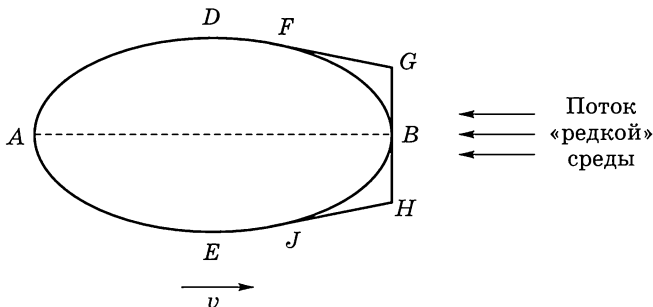


Рис. 17.4

оси AB и к производящей кривой проводятся касательные FG , GH , HJ в точках F , B , J так, что $GH \perp AB$ в точке касания, другие же касательные FG и HJ составляют с GH углы FGB и JHB , равные 135° , то тело, образуемое обращением фигуры $ADFGHJE$ около той же оси AB , будет испытывать меньшее сопротивление, нежели первоначальное (т. е. тело, образованное вращением овала), при движении вдоль оси точкою B вперед.

Я считаю, что это предложение может быть *небесполезно* при построении судов».

Пример 17.1. Спроектируем носовую секцию некоторого аппарата, головная часть которого должна быть получена вращением параболы $x = r^n$ вокруг оси Bx (рис. 17.5).

На каждой полуветви производящей кривой находим точки F , J , такие, чтобы касательные, проведенные из них, пересекали ось Br под углом 45° . Тогда координаты точек F , J будут равны

$$\left(\pm \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BG = r_0 = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

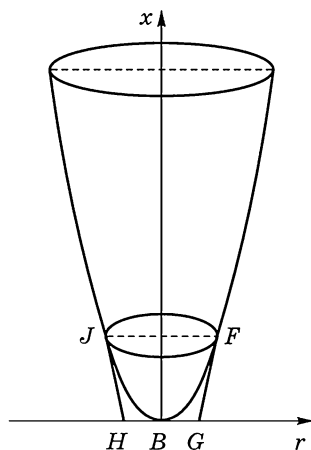


Рис. 17.5

Вычисляем силы сопротивления и объемы тел, образованных вращением параболы FBJ (F_1 и Q_1 соответственно) и вращением ломаной $FGBHJ$ (F_2 и Q_2).

Сравнительные значения величин приведены в таблице*. Силы сопротивления F_1 , F_2 даны в условных силовых единицах, объемы — в некоторых кубических единицах длины.

Отмечаем в обоих случаях уменьшение силы сопротивления и увеличение полезного объема носовых секций.

* См.: Ванько В.И.

Таблица

Парабола	F_1	Q_1	F_2	Q_2	$\frac{F_1 - F_2}{F_1} \cdot 100\%$	$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \cdot 100\%$
$x = r^2$	0,0866	0,0982	0,0781	0,1145	9,81	16,4
$x = r ^3$	0,1309	0,1209	0,1204	0,1418	8,00	17,28

#

Из (17.5) получаем экстремальную задачу:

$$J[x(r)] = \int_0^R \frac{r dr}{1+x'^2} \rightarrow \min,$$

$$r \in [0, r_0] \Rightarrow x = 0, \quad x(R) = h, \quad (17.6)$$

кроме того, в силу замечания Ньютона имеем $x'(r_0) = 1$.

В формуле (17.6) интегрант функционала *явно* зависит от независимой переменной r , поэтому интегрировать соответствующее уравнение Эйлера весьма затруднительно.

Получим более удобную форму функционала.

Считая функцию $x = x(r)$ монотонно возрастающей, обратим зависимость

$$x = x(r) \Rightarrow r = r(x) \Rightarrow dr = r' dx.$$

Тогда

$$\int_0^R \frac{r dr}{1+x'^2} = \int_0^R \frac{r dr}{1 + \frac{1}{(dr/dx)^2}} = \int_0^R \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 r dr = \int_0^h \frac{r'^3 r dx}{1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2}.$$

Следовательно, задачу ставим так:

$$J[x(r)] = \int_0^h \frac{r'^3 r dx}{1+r'^2} \rightarrow \min,$$

$$r(0) = r_0, \quad r(h) = R, \quad r'(0) = 1. \quad (17.7)$$

В (17.7) штрихом обозначили производную по x ; далее покажем, что $r(0) = r_0 \neq 0$, т. е. тело вращения с минимальным сопротивлением имеет площадку в носовой части. Это соответствует чертежу Ньютона (рис. 17.1).

Замечание 17.1. В комментариях А.Н. Крылова к задаче Ньютона показано, что геометрическое условие (17.1) фактически эквивалентно уравнению Эйлера вариационной задачи (17.7).

Решаем задачу (17.7). Интегрант преобразованного функционала *явно* не содержит независимой переменной, в данном случае x . Поэтому сразу выписываем первый интеграл (обозначив интегрант через $f(\cdot)$):

$$\begin{aligned} r'f_{r'} - f &= C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r' \left(\frac{rr'^3}{1+r'^2} \right)_{r'} - \frac{r'^3 r}{1+r'^2} &= C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2r'^3 r}{(1+r'^2)} &= C_1. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Полученное ОДУ первого порядка (17.8) интегрируем методом введения параметра:

$$\begin{aligned} r' = p &\Rightarrow \frac{2p^3 r}{(1+p^2)^2} = C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= C_1 \frac{(1+p^2)^2}{2p^3}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} = p &\Rightarrow d \left(C_1 \frac{(1+p^2)^2}{2p^3} \right) = p dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dx &= \frac{C_1}{2} \int \left(\frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p^3} - 3 \frac{1}{p^5} \right) dp \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{C_1}{2} \left(\ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) + C_2. \end{aligned}$$

Итак, выведены параметрические уравнения искомых экстремалей (образующих поверхности вращения):

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2} \left(\ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) + C_2; \\ r = \frac{C_1}{2} \frac{(1+p^2)^2}{p^3}. \end{cases} \quad (17.9)$$

Замечание 17.2. Параметрическое представление экстремалей задачи (17.9) впервые получено А.Н. Крыловым, причем $C_1 = \frac{r_0}{2}$.

Уравнения экстремалей получены также в параметрической форме*. Параметр, обозначенный через q , есть обратная величина параметра, введенного в нашей работе: $q = 1/p$.

Известно решение задачи Ньютона с применением теории оптимального управления (во введенных обозначениях, см. (17.5))**:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{r dr}{1+u^2} &\rightarrow \inf, \\ \frac{dx}{dr} &= u, \\ x(0) &= 0, \quad x(R) = h, \\ u &\in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Решение получено также в параметрической форме через параметр $u = -1/p$ (p — использованный в данной работе параметр).

Отметим, что представления решений в виде (17.9) и в цитированных работах совпадают с точностью до обозначения параметров и постоянных.

Пусть начальное значение параметра $p = p_0 > 0$. Тогда из второго соотношения (17.9) получим $r(p_0) \neq 0$. В противном случае $r(p_0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, и из первого соотношения (17.9) следует, что $x = C_2$, т. е. кривая $x = x(r)$ вырождается в отрезок прямой, параллельной оси Or , и при этом нарушается условие взаимной однозначности зависимости $x \sim r$.

Исследуем семейство кривых (17.9). Рассмотрим кривую при $C_1 = 2$, $C_2 = 0$; остальные кривые семейства при любых C_1, C_2 получаются из этой кривой ($C_1 = 2$, $C_2 = 0$) подобным преобразованием с центром в точке, принятой за начало координат, с коэффициентом подобия C_1 и перемещением на расстояние C_2 .

* См.: Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.

** Решение приведено, например, в книге: Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.

Получили *кривую Ньютона*:

$$\begin{cases} x = \ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4}, \\ r = \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p} + p. \end{cases} \quad (17.10)$$

Исследуем поведение кривой (17.10) на плоскости xOr . При $p \rightarrow +0$: $r \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$; при $p \rightarrow +\infty$: $r \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

Поэтому при некотором значении параметра $p = p^*$ функции $x(p)$ и $r(p)$ достигают своих минимальных значений. Найдем стационарные точки ($p > 0$):

$$\frac{dx}{dp} = \frac{p^4 - 2p^2 - 3}{p^5} = 0 \Rightarrow p^4 - 2p^2 - 3 = 0;$$

$$\frac{dr}{dp} = \frac{p^4 - 2p^2 - 3}{p^4} = 0 \Rightarrow p^4 - 2p^2 - 3 = 0.$$

В обоих случаях получили одно и то же биквадратное уравнение, единственный корень которого, удовлетворяющий условию $p > 0$, есть $p^* = \sqrt{3}$.

Для кривой (17.10), двумя ветвями уходящей в бесконечность, точка с координатами $(r(p^*), x(p^*))$ есть точка возврата* (рис. 17.6).

Итак, при $p \rightarrow \sqrt{3}$ функции $r(p)$, $x(p)$ стремятся к своим минимальным значениям:

$p \in (0, \sqrt{3}]$: $p \rightarrow \sqrt{3} \Rightarrow r \rightarrow r(p^*)$, $x \rightarrow x(p^*)$ — по 1-й ветви;

$p \in [\sqrt{3}, +\infty)$: $p \rightarrow +\infty \Rightarrow r, x \rightarrow +\infty$ — по 2-й ветви.

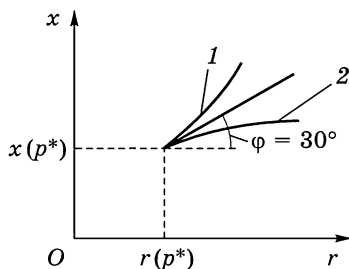


Рис. 17.6

Покажем, что минимальное значение функционала обеспечивается 1-й ветвью кривой Ньютона: $p \in (0, \sqrt{3}]$. Проверяем выполнение усиленного условия Лежандра:

* См.: Рашевский П.К.

$$\begin{aligned}
 f(x, r, r') &= \frac{r'^3 r}{1+r'^2} \Rightarrow f'_{r'} = \frac{r'^4 r + 3r'^2 r}{(1+r'^2)^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f''_{r'} = \frac{2r'r}{(1+r'^2)^3} (3-r'^2) > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 3-r'^2 > 0,
 \end{aligned} \tag{17.11}$$

так как $r, r' > 0$.

Из неравенства (17.11) получаем ограничения на изменение параметра $p = r'$: $0 < p \leq \sqrt{3}$.

Тангенс угла наклона касательной кривой (17.10) к оси Or выражается в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dr} = \frac{1}{p}.$$

Отметим, что в точке возврата для обеих ветвей

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Так как при $p \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$, на 1-й ветви существует точка $(\tilde{r}, \tilde{x})$, где $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ($\varphi = 45^\circ$): $(\tilde{r}, \tilde{x}) = \left(4, \frac{7}{4}\right)$, ибо здесь $\tilde{p} = 1$.

Теперь приведем слова Ньютона: «...из конечной точки G проведем прямую GP ... то имеет место пропорция...», см. (17.1).

Точка G на оси Or должна быть задана при постановке задачи: $r = r(x) \Rightarrow r(0) = r_0$, что будет показано далее.

Поэтому, на наш взгляд, задача Ньютона *изначально* ставилась следующим образом: на оси Or задавался отрезок $BG = r_0$, и кривая $(x(p), r(p))$ строилась так, чтобы точка G была точкой кривой, где касательная образует с осью Or угол 45° (см. вспомогательную задачу о конусе наименьшего сопротивления, пример 17.1).

Итак, пусть $r(p_0) = r(1) = r_0$, $x(1) = 0$. Тогда из параметрических соотношений (17.9) получаем значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{r_0}{2}, \quad C_2 = -\frac{7}{16} r_0.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$\begin{cases} r = \frac{r_0}{4} \frac{(1+p^2)^2}{p^3}; \\ x = \frac{r_0}{4} \left(\ln p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{p^4} \right) - \frac{7}{16} r_0. \end{cases} \quad (17.12)$$

Рассмотрим различные конструктивные требования.

Прежде всего отметим, что задавать произвольно габаритные размеры R , h , r_0 , вообще говоря, нельзя.

Например, пусть $R = 50$, $r_0 = 16$, $h = 57$ некоторых единиц длины. Из первого уравнения системы (17.12) прямой подстановкой убеждаемся в том, что $p = 1/2$ есть одно из его решений. Второе уравнение системы (17.12) после подстановки значений $x = h = 57$, $r_0 = 16$ и $p = 1/2$ приведет к противоречию: $\ln 1/2 = 0$.

Покажем, что задание R и h (совместно с условием $x'(r_0) = 1$) определяет единственное решение задачи (17.7). Из уравнений (17.12) исключаем r_0 и, вводя параметр $\omega = h/R$, получаем уравнение

$$p^4 \ln p = \frac{7}{4} p^4 - p^2 - \frac{3}{4} + \omega(p^5 + 2p^3 + p), \quad 0 < p < 1. \quad (17.13)$$

Обозначив через $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ левую и правую части уравнения (17.13), имеем $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$.

Решения уравнения (17.13) есть абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \varphi_1(p)$ и $y = \varphi_2(p)$ на плоскости pOy .

Функция $y = p^4 \ln p$ на интервале $(0, 1)$ корней не имеет: $y \leq 0$, $p \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow -\infty$, $\varphi_1(1) = 0$.

Исследование многочлена пятой степени $\varphi_2(p)$ с помощью теоремы Бюдана — Фурье (построением таблицы перемен знаков функции $\varphi_2(p)$ и ее производных до пятого порядка в точках $p = 0$ и $p = 1$) показывает, что многочлен имеет на интервале $(0, 1)$ три корня или один корень*.

Таким образом, уравнение (17.13) на интервале $p \in (0, 1)$ может иметь от одного до трех корней (один корень заведомо существует, так как $\varphi_2(0) = -3/4$, $\varphi_2(1) = 4\omega > 0$).

* См.: Курош А.Г.

Покажем, что любому значению параметра $\omega = h/R > 0$ соответствует единственное значение $p \in (0, 1)$.

Разрешив (17.13) относительно ω , получим

$$\omega = \frac{p^4 \ln p + p^2 - \frac{7}{4}p^4 + \frac{3}{4}}{p^5 + 2p^3 + p}; \quad (17.14)$$

$$\omega = \omega(p): p \rightarrow +0 \Rightarrow \omega(p) \rightarrow \infty, \omega(1) = 0.$$

Анализ значений производной функции $\omega(p)$ на полуинтервале $(0, 1]$ показывает, что $\omega'(p) < 0$, т. е. функция $\omega(p)$ на этом отрезке монотонно убывает (рис. 17.7).

Пусть дано отношение габаритов $h/R = \omega_0$. На кривой $\omega = \omega(p)$ находим соответствующее значение $p = p_0$. Чтобы определить значение r_0 , необходимо задать в некоторых единицах длины, например, размер R . Тогда $h = \omega_0 R$ и значение r_0 (в тех же единицах) определяется из любого из уравнений (17.12).

Замечание 17.3. Рассуждения, изложенные выше, можно рассматривать как доказательство существования поля экстремалей в области $x > 0$, $r > 0$.

Замечание 17.4. Выполнив дальнейший анализ с использованием теоремы Бюдана — Фурье, убеждаемся в единственности решения задачи (17.7) при известных габаритах r_0 , R или r_0 , h .

С геометрической точки зрения последние утверждения очевидны: задание габаритного размера r_0 определяет един-

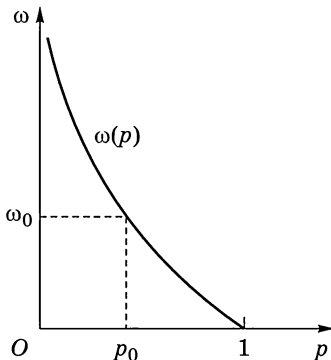


Рис. 17.7

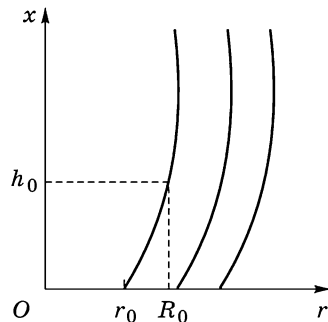


Рис. 17.8

ственную кривую (17.12); на этой кривой размер $r = R$ определяет единственное значение $x = h$ (и наоборот) (рис. 17.8)*.

Замечание 17.5. Рассмотрим решение задачи Ньютона в упрощенной постановке**.

Поставим задачу (см. (17.7)):

$$J = \int_0^h \frac{r'^3 r}{1 + r'^2} dx \rightarrow \min, \\ r(0) = 0, \quad r(h) = R.$$

Считая, что $\frac{1}{1 + r'^2} \approx 1$ (т. е. рассматриваются *пологие* образующие поверхности вращения), получим

$$J = \int_0^h r'^3 r dx \rightarrow \min, \quad r(0) = 0, \quad r(h) = R.$$

Имеем уравнение Эйлера:

$$r'^3 - 3(r r'^2)' = 0, \quad (17.15)$$

следовательно, частное решение $r = 0$ неприемлемо в силу поставленных краевых условий.

Уравнение (17.15) приводится к виду

$$r'^3 + 3r r' r'' = 0. \quad (17.16)$$

Умножив (17.16) на r' , заметим, что полученное выражение есть полная производная:

$$r'(r'^3 + 3r r' r'') = \frac{d}{dx}(r'^3 r) = 0 \Rightarrow r'^3 r = C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r' = \left(\frac{C_1}{r}\right)^{1/3} \Rightarrow r(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \left(\sqrt[3]{C_1} x + C_2\right)^{3/4}. \quad (17.17)$$

В силу граничных условий из (17.17) получим:

* См.: Ванько В.И.

** См.: Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев В.Н.

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \left(\frac{3}{4} \frac{R}{h} \right)^3 R.$$

Таким образом,

$$r = \left(\frac{3}{4} \right)^{3/4} \left(\frac{x}{h} \right)^{3/4} R,$$

следовательно, поверхность минимального сопротивления в рассматриваемой постановке есть парабола степени $3/4$.

Обратим внимание на то, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dr}{dx} = \infty,$$

следовательно, соответствующая поверхность вращения в носовой части имеет затупление.

Очевидно, что экстремали (17.14) образуют *поле* и выполняется усиленное условие Лежандра.

Замечание 17.6. Задача Ньютона получила значительное развитие в работах отечественных исследователей в связи с проектированием головных частей космических аппаратов*.

* См.: Гонор А.А.; Ефремов Н.Л. и др.; Крайко А.Н.; Черный Г.Г.

18. ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

18.1. Действие потенциальной силы

Даниил Бернулли, решая проблему чистого изгиба упругой балки, выдвинул гипотезу прямых нормалей: все нормали к нейтральному слою балки остаются таковыми и после изгиба балки, не изменяя своей длины (рис. 18.1).

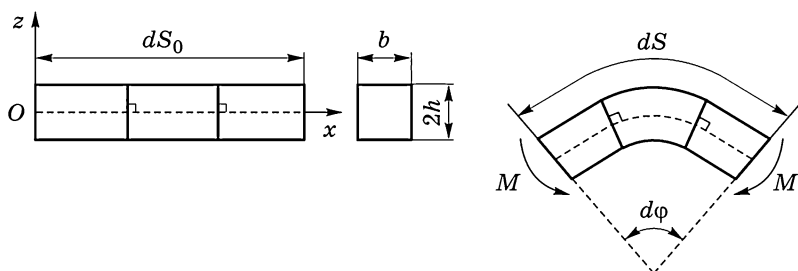


Рис. 18.1

При действии моментов крайние сечения элементов длины dS смещаются одно относительно другого на угол $d\varphi$. Вычислим деформации продольных волокон, находящихся на расстоянии z от нейтрального слоя $z = 0$ (который сохраняет свою первоначальную длину), $-h \leq z \leq h$:

$$\varepsilon_z = \frac{(dS_0 + z d\varphi) - dS_0}{dS_0} = z \frac{d\varphi}{dS_0} = \kappa z, \quad (18.1)$$

где κ — приращение кривизны первоначального прямого стержня.

Из (18.1): $\sigma_z = E\varepsilon_z = Ekz$ — напряжения в точках волокон упругой балки, E — модуль Юнга материала балки, Н/м². Поэтому внутренний изгибающий момент в сечении (рассматриваем балку прямоугольного постоянного сечения $b \times 2h$):

$$M = \int_F \sigma_z z dF = \int_{-h}^h (Ekz) z b dz = Ek \frac{2}{3} b h^3 \Rightarrow M = EI\kappa. \quad (18.2)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения, м²; I — геометрический момент инерции сечения, м⁴; EI — жесткость упругой балки (стержня) на изгиб, Н·м².

Как известно, момент, приложенный к элементу dS , «работает» на приращении угла между соседними поперечными сечениями. Поэтому элементарная работа внутреннего момента имеет вид

$$\delta A(M) = M d\varphi = EI\kappa d\varphi = EI\kappa \frac{d\varphi}{dS} dS = EI\kappa^2 dS. \quad (18.3)$$

В силу теоремы Клапейрона, потенциальная энергия (работа напряжений), накопленная элементом dS , равна половине работы внешних сил (в данном случае моментов), приложенных к элементу. Тогда потенциальная энергия изогнутой балки, длина которой l :

$$\Pi(dS) = \frac{1}{2} EI\kappa^2 dS \Rightarrow \Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EI\kappa^2 dS. \quad (18.4)$$

В письме от 22 октября 1742 г. Д. Бернулли сообщает Л. Эйлеру, что задача об изгибе упругого стержня может быть решена методом максимумов и минимумов: «...среди кривых постоянной длины, которые проходят через две фиксированные точки... определить ту, для которой

$$\int_0^l \kappa^2 ds \rightarrow \min^* \quad (18.5)$$

Это была первая в истории теории упругости постановка вариационной задачи. Действительно, κ — приращение кри-

* См.: Эйлер Л.

визны упругой оси изгибаемого стержня, длина которого l ; функционал (18.5) с точностью до множителя $\frac{1}{2}EI$ — потенциальная энергия изогнутого стержня, EIk — в формуле Бернулли есть внутренний момент сопротивления поперечного сечения стержня изгибу (E — модуль Юнга, Н/м²; I — момент инерции сечения относительно его нейтральной линии, м⁴); $(1/2)EI\kappa^2 ds$ — потенциальная энергия элемента ds . Поэтому требование минимальности функционала (18.5) — выражение минимума потенциальной энергии упругого стержня.

Рассмотрим постановку задачи о продольном изгибе упругого стержня длиной l , постоянного поперечного сечения, $I = \text{const}$ (рис. 18.2).

Вычислим потенциальную энергию системы стержень — внешняя сила, пренебрегая деформациями сжатия оси. Считаем, что прогибы $y(x)$ малы, $\kappa \approx y''$.

Потенциальная энергия элемента ds (в силу гипотезы Бернулли и теоремы Клапейрона) равна $\frac{1}{2}EI\kappa^2 ds$. Отсюда энергия всего изогнутого стержня

$$\Pi_1 = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 ds.$$

Внешняя сила перемещает подвижный конец стержня на величину Δ (см. рис. 18.2):

$$\begin{aligned} \Delta &= l - L = l - \int_0^l \cos \varphi ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} ds \approx \\ &\approx l - \int_0^l \sqrt{1 - \text{tg}^2 \varphi} ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - y'^2} ds \approx \\ &\approx l - \int_0^l \left(1 - \frac{1}{2} y'^2 \right) ds \approx \int_0^l \frac{1}{2} y'^2 dx \quad (dx \approx ds). \end{aligned}$$

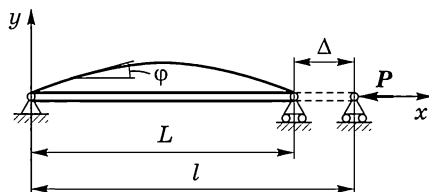


Рис. 18.2

Поэтому действующая сила совершит работу

$$A(P) = P \cdot \Delta = \int_0^l \frac{1}{2} P y'^2 dx.$$

Потенциальную энергию внешней силы можно вычислить так:

$$\Pi_2 = - \int_0^l \frac{1}{2} P y'^2 dx.$$

В силу принципа минимума потенциальной энергии консервативной системы ставим вариационную задачу:

$$J[y] = \Pi_1 + \Pi_2 = \int_0^l \left(\frac{1}{2} E I y''^2 - \frac{1}{2} P y'^2 \right) dx \rightarrow \min.$$

В силу теоремы о необходимом условии экстремума функционала имеем:

$$\delta J[y, \delta y] = \delta(\Pi_1 + \Pi_2) = \int_0^l (E I y'' \delta y'' - P y' \delta y') dx = 0.$$

Техника получения из условия $\delta J = 0$ уравнения равновесия и *естественных краевых условий* состоит в следующем. Интегрированием по частям добиваемся, чтобы под интегралом осталось некоторое выражение, умноженное на вариацию δy . Приравняв множитель при δy нулю, имеем уравнение равновесия. Внеинтегральные слагаемые с учетом кинематических (предварительных) краевых условий, определяемых постановкой задачи, образуют естественные краевые условия.

Итак (после процедуры интегрирования),

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y] = \delta(\Pi_1 + \Pi_2) = & \int_0^l (E I y^{IV} + P y'') \delta y dx + \\ & + E I y'' \delta y \Big|_0^l - E I y''' \delta y \Big|_0^l - P y' \delta y \Big|_0^l = 0. \end{aligned}$$

Для обращения вариации функционала в нуль достаточно интеграл и внеинтегральные слагаемые приравнять нулю. Из равенства интеграла нулю при *произвольных* непрерывных вариациях $\delta y(x)$ в силу леммы Лагранжа получим уравнение равновесия

$$EIy^{IV} + Py'' = 0. \quad (18.6)$$

Тогда необходимое условие экстремума примет вид

$$\begin{aligned} \delta J[y, \delta y] &= EIy''\delta y'|_0^l - EIy'''\delta y|_0^l - Py'\delta y|_0^l = 0, \\ \delta J &= EIy''\delta y'|_0^l - (EIy''' + Py')\delta y|_0^l = 0. \end{aligned}$$

Постановку задач для различных случаев закрепления концов стержня проиллюстрируем примерами*.

Пример 18.1. Шарнирное опирание в точках $x=0$ и $x=l$ (см. рис. 18.2).

Здесь $y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \delta y(0) = \delta y(l) = 0$. Поэтому вариация функционала имеет вид

$$\delta J = EIy''(l)\delta y'(l) - EIy''(0)\delta y'(0) = 0.$$

Так как вариации производных в краевых точках не равны нулю и независимы, получим естественные краевые условия:

$$\delta y'(l) \neq \delta y'(0) \neq 0 \Rightarrow y''(0) = y''(l) = 0.$$

Задача о продольном изгибе в данном случае будет поставлена, если уравнение (18.6) решать при условиях

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0.$$

Пример 18.2. Оба конца стержня жестко заделаны (рис. 18.3).

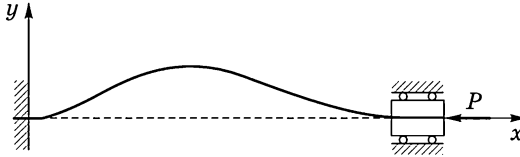


Рис. 18.3

Так как жесткость стержня на изгиб больше нуля, в точках $x=0$ и $x=l$ перемещения $y(x)$ и производные $y'(x)$ равны нулю, т. е. имеем кинематические краевые условия:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

При этом вариация $\delta J \equiv 0$.

* См.: Ванько В.И.

Пример 18.3. В точке $x=0$ — жесткая заделка, в точке $x=l$ — подвижный шарнир (рис. 18.4).

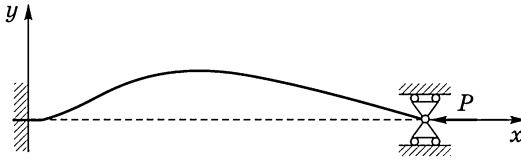


Рис. 18.4

Имеем предварительные краевые условия:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow \delta y(0) = \delta y(l) = 0, \quad \delta y'(0) = 0.$$

Отсюда

$$\delta J = EI y''(l) \delta y'(l) = 0 \Rightarrow y''(l) = 0.$$

Получено естественное краевое условие, поскольку $y'(l) \neq 0$.

Итак, краевые условия в этом случае:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Пример 18.4. В точке $x=0$ — жесткая заделка, конец $x=l$ — свободный, сила P сохраняет свое направление (рис. 18.5).

В точке $x=0$ имеем предварительные условия:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow \delta y(0) = 0, \quad \delta y'(0) = 0,$$

поэтому вариацию функционала потенциальной энергии, приравненную нулю, запишем так ($\delta y(l) \neq 0$, $\delta y'(l) \neq 0$):

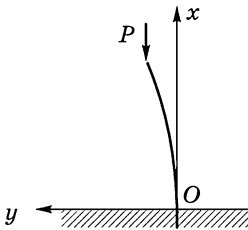


Рис. 18.5

$$\delta J[y, \delta y] = EI y''(l) \delta y'(l) - (EI y'''(l) + P y'(l)) \delta y(l) = 0.$$

В силу независимости вариаций $\delta y'(l)$ и $\delta y(l)$ получим два условия в точке $x=l$:

$$y''(l) = 0, \quad EI y'''(l) + P y'(l) = 0.$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных примеров для решения задачи о продольном изгибе упругого стержня име-

ем *однородное* (правая часть равна нулю) ОДУ с *однородными* краевыми условиями.

Поставим краевую задачу:

$$\begin{cases} y^{IV} + \lambda^2 y'' = 0 & (0 < x < l); \\ x = 0: y(0) = 0; \quad y'(0) = 0; \\ x = l: y''(l) = 0; \quad y'''(l) + \lambda^2 y'(l) = 0. \end{cases} \quad (18.7)$$

Здесь $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$ — основной параметр.

Поскольку (18.7) — *однородная* краевая задача, то одно из решений есть $y(x) \equiv 0$: при любом значении параметра $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ существует *прямолинейная* форма равновесия.

Выясним, существуют ли значения параметра λ , при которых наряду с тривиальным решением возможно решение $y(x) \neq 0$.

Общее решение уравнения (18.7) имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 x + C_4.$$

Произвольные постоянные интегрирования находим в силу краевых условий задачи (18.7):

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0; \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \lambda C_2 + C_3 = 0; \\ y''(l) = 0 \Rightarrow -\lambda^2 C_1 \cos \lambda l - \lambda^2 C_2 \sin \lambda l = 0; \\ y'''(l) + \lambda^2 y'(l) = 0 \Rightarrow \lambda^2 C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0. \end{cases} \quad (18.8)$$

В силу равенств (18.8) имеем:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \quad C_4 = -C_1, \\ \cos \lambda l &= 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} l = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (18.9)$$

Получено множество значений параметра $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, т. е. существует множество значений продольной силы P , при которых наряду с тривиальной формой равновесия ($y(0) \equiv 0$)

возможны *нетривиальные* формы равновесия ($y(0) \neq 0$). Такую ситуацию называют *бифуркацией*.

Множество $\lambda_n = \frac{\pi/2 + n\pi}{l}$ называют множеством *собственных чисел* однородной задачи.

Вычислим минимальное значение силы, соответствующее наименьшему собственному числу ($n = 0$):

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{\min} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}.$$

Значение силы $P_{\min}$ называют эйлеровой силой (в терминологии Л. Эйлера — «сила колонны») и обозначают P_3 .

Найдем, например, первую собственную функцию (первую из отклоненных форм равновесия стержня), соответствующую первому собственному числу $\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}$. Подставим λ_1 в систему (18.8).

Решение задачи (18.7), соответствующее первому собственному числу, имеет вид

$$y(x) = C_1 \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - 1 \right). \quad (18.10)$$

Свободному параметру C_1 можно придавать произвольные значения.

Полученный результат (18.10) с физической точки зрения неудовлетворителен. Постоянная C_1 остается неопределенной, т. е. одной и той же силе соответствует произвольный прогиб: равновесие оказывается *безразличным*. Предположим, что приложенная сила больше P_1 , соответствующей $n = 0$ в формуле (18.9), но меньше P_2 ($n = 1$). Рассуждения данного параграфа не обнаруживают никаких иных форм равновесия, кроме прямолинейной.

Причина этих физических противоречий заключается в том, что уравнение равновесия (18.6) выведено при условии $\kappa \approx y''$, т. е. уравнение изгиба не является точным*.

Замечание 18.1. Для того чтобы понять, что такое *бифуркация*, М.А. Лаврентьев** предложил и продемонстрировал

* См.: Работнов Ю.Н.

** См.: Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.

следующий эксперимент. Вертикально расположенный стержень (тонкая упругая полоса, в эксперименте — длинная стальная линейка) нижним концом закреплен в массивном основании (см. рис. 18.5). К верхнему концу крепится точечная масса, создающая своей тяжестью сжимающую силу, в начале опыта значительно меньшую соответствующей эйлеровой силы $P_3 = P_1$ (18.9).

Если стержень, нагруженный таким образом, слегка отклонить от вертикального положения, а затем отпустить, то он, совершив затухающие колебания в окрестности положения равновесия, вернется в первоначальное положение. Имеем устойчивое равновесие вертикального положения.

Увеличиваем точечную массу m . При этом уменьшается частота колебаний стальной линейки. При некотором значении массы $m = m^*$ частота колебаний обращается в нуль: стержень при отклонении уже не возвращается в вертикальное положение. Наступает состояние *безразличного равновесия*, причем отклонение верхнего сечения стержня может иметь в некоторых пределах любое значение. При тщательной поста-

новке эксперимента m^* соответствует силе $P_3 = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$.

Замечание 18.2. В учебниках по сопротивлению материалов показано, что величины EIy'' и EIy''' — соответственно изгибающий момент и перерезывающая сила в сечении, вызванные произошедшим изгибом (под действием приложенной нагрузки) стержня. Значит, полученные вследствие вариационной постановки в примерах 18.2, 18.4 естественные краевые условия $EIy''(0) = 0$, $EIy''(l) = 0$ — это выражения равенства нулю изгибающего момента в шарнирно-опертых сечениях.

В примере 18.4 условие $y''(l) = 0$ означает отсутствие изгибающего момента в свободном сечении стержня; условие $(EIy''' + Py')|_{x=l} = 0$, полученное посредством обращения вариации функционала энергии в нуль, трактуется как выражение перерезывающей силы Q

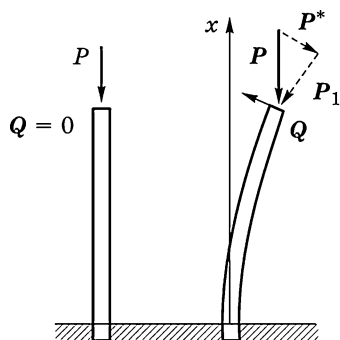


Рис. 18.6

в сечении через приложенную нагрузку и угол поворота сечения^{*} (по гипотезе плоских сечений сечение $x = l$ остается нормальным к оси стержня) при неизменном направлении силы P (рис. 18.6):

$$\begin{aligned} P &= P^* + P_1; \quad Q + P^* = 0 \Rightarrow Q = -P^* \Rightarrow Q = -P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q + P \sin \varphi \approx Q + P \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow (EIy''' + Py')\big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что при использовании вариационного подхода обсуждаемое *статическое* условие получено непосредственно как *естественное* условие.

18.2. Действие следящей силы

До сих пор мы ставили задачи для *консервативных* систем (упругая конструкция плюс потенциальная сила), для которых выполняется принцип минимума потенциальной энергии.

Пусть на жестко заделанный упругий стержень действует сила P , приложенная к свободному сечению, причем направление силы в любой момент ее действия совпадает с направлением касательной в точке $x = l$ (рис. 18.7). Показанную на

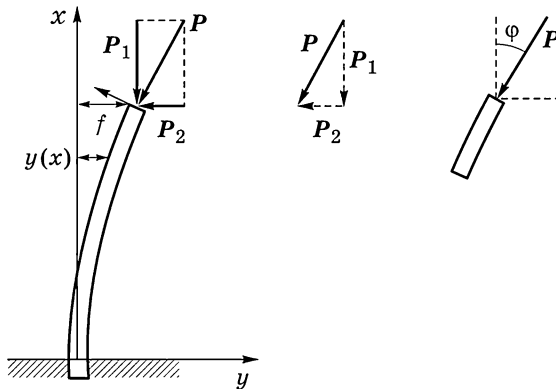


Рис. 18.7

^{*} См.: Вольмир А.С.

рисунке силу P называют *следящей*, это непотенциальная сила, так как ее работа зависит от траектории, по которой систему переводят в конечное состояние*.

Принципом минимума потенциальной энергии воспользоваться нельзя, поэтому запишем уравнение Бернулли:

$$EI\kappa = \sum_1^n \text{mom}(F_k). \quad (18.11)$$

Здесь F_k — силы, приложенные к стержню. Следящую силу P представим в виде суммы

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1 — вертикальная составляющая, P_2 — горизонтальная составляющая.

Пусть f — отклонение оси стержня от вертикали при $x = l$, φ — угол наклона оси в сечении $x = l$.

Уравнение (18.11) запишем в виде

$$\begin{aligned} EI\kappa &= P_1(f-y) - P_2(l-x) \Rightarrow \\ \Rightarrow EI\kappa &= P \cos \varphi (f-y) - P \sin \varphi (l-x). \end{aligned} \quad (18.12)$$

В геометрически линейном приближении ($\kappa \approx y''$, $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$) уравнение (18.12) принимает вид

$$EIy'' = P(f-y) - P\varphi(l-x).$$

Обозначив $P/EI = \lambda^2$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = \lambda^2 f - \lambda^2 \varphi(l-x); \\ y(0) = 0, y'(0) = 0; y(l) = f, y'(l) = \varphi. \end{cases} \quad (18.13)$$

Общее решение задачи (18.13):

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + f - \varphi(l-x),$$

что легко проверить непосредственной подстановкой.

Постоянные C_1, C_2, f, φ находим в силу краевых условий:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + f - \varphi l = 0; \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \lambda C_2 + \varphi = 0; \\ y(l) = f \Rightarrow C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0; \\ y'(l) = \varphi \Rightarrow -\lambda C_1 \sin \lambda l + \lambda C_2 \cos \lambda l = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

* См.: Болотин В.В.

$$\begin{aligned}
 & C_1 + f - \phi l = 0; \\
 & \Rightarrow \lambda C_2 + \phi = 0; \\
 & C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0; \\
 & -\lambda C_1 \sin \lambda l + \lambda C_2 \cos \lambda l = 0.
 \end{aligned}$$

Получили, как и выше, однородную СЛАУ. При обращении определителя системы в нуль возможны нетривиальные решения.

Вычисляем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -l \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \cos \lambda l & \sin \lambda l & 0 & 0 \\ -\sin \lambda l & \cos \lambda l & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 \lambda l + \sin^2 \lambda l \equiv 1 \neq 0.$$

При любом значении λ (следящей силы) определитель не равен нулю!

Из этого факта в некоторых публикациях авторами был сделан вывод о том, что стержень под действием следящей силы устойчивость не теряет*. Ситуация со следящей силой, сложившаяся в 50-е годы XX века, описана В.В. Болотиным**.

Однако еще в 1928 году Е.Л. Николаи изучал действие непотенциальных нагрузок на упругий стержень и показал, что для разрешения упомянутого «парадокса» (отсутствия критической силы) следует рассмотреть малые колебания около положения равновесия, т. е. переходить к динамической постановке задачи: согласно Ляпунову, форма равновесия устойчива, если малые возмущения вызывают малые отклонения от равновесной формы***.

18.3. Динамический подход

Изучим характер колебаний упругого стержня под действием потенциальных и непотенциальных сил.

1. *Консервативная система*: сила возрастает, сохраняя свое направление.

* См.: Феодосьев В.И.

** См.: Болотин В.В.

*** См.: Николаи Е.Л.

Статическая постановка рассмотрена выше (см. пример 18.4):

$$P_э = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}.$$

Динамическая постановка: малые колебания около возможного положения равновесия $y(x, t) = 0$.

Для упрощения выкладок считаем, что масса стержня сосредоточена в сечении $x = l$ (точечная масса), а сам стержень есть упругая связь (рис. 18.8).

Согласно принципу Даламбера, в правой части уравнения (18.11) необходимо учесть момент силы инерции массы M :

$$EIy'' = P(f - y) - M(l - x) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l. \quad (18.14)$$

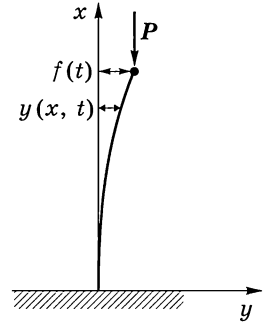


Рис. 18.8

Здесь $f = f(t)$ — отклонение сечения $x = l$ от вертикали. Перемещение $y = y(x, t)$ подчиняется краевым условиям: $y(0, t) = 0$, $y(l, t) = f(t)$, $y'(0, t) = 0$. Начальные условия: $y(x, 0) = 0$, $y'(x, 0) = 0$; $y(l, 0) = f(0) = F = \text{const}$, т. е. в начальный момент времени сечение $x = l$ отклонили на величину F , в результате чего начались колебания.

Решение задачи ищем в виде:

$$y(x, t) = Y(x)e^{i\Omega t}, \quad f(t) = Fe^{i\Omega t}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (18.14) и сокращая на $e^{i\Omega t} \neq 0$, получим для функции $Y(x)$ краевую задачу:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = \lambda^2 F + \frac{M\Omega^2}{EI}(l - x)F; \\ Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y(l) = F. \end{cases} \quad (18.15)$$

Запишем общее решение уравнения (18.15):

$$Y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + F + M \frac{\Omega^2}{\lambda^2 EI} (l - x) F.$$

Для определения постоянных C_1, C_2, F используем краевые условия (18.15):

$$\begin{cases} Y(0)=0 \Rightarrow C_1 + F\left(1 + \frac{M\Omega^2}{\lambda^2 EI}l\right) = 0; \\ Y'(0)=0 \Rightarrow \lambda C_2 - \frac{M\Omega^2}{\lambda^2 EI}F = 0; \\ Y(l)=F \Rightarrow C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0. \end{cases}$$

Обращая в нуль определитель системы, получаем частотное уравнение (относительно частоты колебаний Ω):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 + \frac{M\Omega^2}{\lambda^2 EI}l \\ 0 & \lambda & -\frac{M\Omega^2}{\lambda^2 EI} \\ \cos \lambda l & \sin \lambda l & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{M\Omega^2}{\lambda^2 EI}(\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l) = \lambda \cos \lambda l \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega^2 &= \frac{\lambda^2 EI}{M} \frac{\lambda \cos \lambda l}{\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} = \frac{(\lambda l)^2 EI}{M l^3} \frac{\lambda l \cos \lambda l}{\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega &= \sqrt{\frac{(\lambda l)^2 EI}{M l^3} \frac{\cos \lambda l}{\frac{\sin \lambda l}{\lambda l} - \cos \lambda l}}. \end{aligned}$$

Введем переменную величину $\xi = \lambda l$ и рассмотрим функцию под радикалом:

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi^2 \cos \xi}{\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi}.$$

Вычислим $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi(\xi)$, используя разложения $\sin \xi$ и $\cos \xi$ в окрестности точки $\xi = 0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{\xi^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right)} = 3.$$

Таким образом, собственная частота колебаний системы стержень — масса ($\lambda l \rightarrow 0 \sim P \rightarrow 0$):

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \cdot \sqrt{3}. \quad (18.16)$$

При возрастании параметра $\xi > 0$: $\Phi(\xi) > 0 \Rightarrow e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t$, т. е. имеем гармонические колебания около положения равновесия $Y(x) = 0$.

При $\Phi(\xi) < 0$ получим $e^{\pm|\Omega|t}$, т. е. неустойчивость положения $y(x, 0) = 0$ вследствие возрастания экспоненты.

Найдем значение $\xi = \xi^*$, соответствующее обращению знаменателя функции $\Phi(\xi)$ в нуль:

$$\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi = 0 \Rightarrow \xi = \operatorname{tg} \xi \quad (\cos \xi \neq 0). \quad (18.17)$$

Наименьший корень уравнения (18.17) есть $\xi^* = 4,493$.

Поэтому на интервале $\xi \in (0, \xi^*)$ функция $\Phi(\xi)$ непрерывна и переход от устойчивости к неустойчивости прямолинейной формы равновесия соответствует смене знака функцией $\Phi(\xi)$ при $\xi = \pi/2$ за счет изменения знака числителя.

Следовательно, эйлерова критическая сила есть

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2},$$

т. е. получено то значение, которое было найдено при статическом рассмотрении (см. пример 18.4).

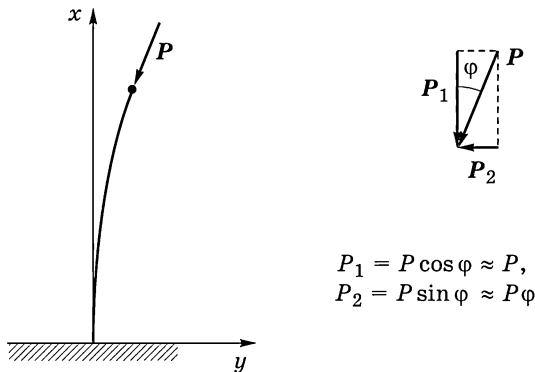
2. Неконсервативная система: малые колебания, под действием следящей силы, линейная постановка (рис. 18.9).

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow EI y''(x, t) &= P(f - y) - P\varphi(l - x) - M \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(l - x). \end{aligned} \quad (18.18)$$

Как и для консервативной системы, решение ищем в виде

$$y(x, t) = Y(x)e^{i\Omega t}, \quad f(t) = Fe^{i\Omega t}, \quad \varphi(t) = \Theta e^{i\Omega t}. \quad (18.19)$$



$$\begin{aligned} P_1 &= P \cos \varphi \approx P, \\ P_2 &= P \sin \varphi \approx P\varphi \end{aligned}$$

Рис. 18.9

Здесь подлежат определению постоянные F , Θ и постоянные интегрирования C_1 , C_2 .

После подстановки выражений (18.19) в уравнение (18.18) имеем краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = \lambda^2 F - \lambda^2 \Theta (l - x) + \frac{M\Omega^2}{EI} (l - x) F; \\ Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y(l) = F, Y'(l) = \Theta. \end{cases} \quad (18.20)$$

Общее решение уравнения (18.20):

$$Y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + F - \Theta(l - x) + M \frac{\Omega^2}{\lambda^2 EI} F (l - x).$$

Методика получения частотного уравнения описана выше. После раскрытия определителя линейной алгебраической системы относительно постоянных C_1 , C_2 , F , Θ (в силу нулевых условий (18.20)) запишем:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{EI}{Ml^3} \cdot \frac{(\lambda l)^2}{\frac{\sin \lambda l}{\lambda l} - \cos \lambda l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega &= \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \cdot \sqrt{\frac{\xi^2}{\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi}} = \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \cdot \sqrt{\Phi_1(\xi)}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

При $\xi = \lambda l \rightarrow 0$ ($P \rightarrow 0$) получим, как и выше, значение собственной частоты колебаний системы стержень — масса (18.16).

В выражении (18.21) смена знака подкоренной функции $\Phi_1(\xi)$ происходит за счет изменения знака знаменателя (см. (18.17)):

$$\begin{aligned}\xi \in (0, \xi^*) &\Rightarrow \Phi_1(\xi) > 0; \\ \xi > \xi^* &\Rightarrow \Phi_1(\xi) < 0.\end{aligned}$$

Следовательно, критическое значение следящей силы определяется из равенства $\xi = \xi^*$:

$$\xi = \xi^* \Rightarrow \lambda l = \xi^* \Rightarrow P_{\text{кр}} = \xi^{*2} \frac{EI}{l^2} \Rightarrow P_{\text{кр}} = 20,187 \frac{EI}{l^2}. \quad (18.22)$$

Отметим: если отказаться от рассмотрения модели (рис. 18.9) и изучать «обычный» стержень (распределенная по всей длине масса) под действием следящей нагрузки, то значения критической силы, вычисленные различными авторами, мало отличаются от (18.22).

В работе М. Бека* получено значение $P_{\text{кр}} = 20,05 \frac{EI}{l^2}$; в работе К.С. Дейнеко и М.Я. Леонова** — $P_{\text{кр}} = 19,77 \frac{EI}{l^2}$.

Итак, если система потенциальна, бифуркационный подход Эйлера и динамическое рассмотрение дают равные значения критических нагрузок; если система непотенциальная (конструкция упруго-пластическая и (или) нагрузка непотенциальна), то подход Эйлера *может* оказаться некорректным, как в примере со следящей силой.

Отмеченные факты, как выяснено, связаны со свойствами математических операторов поставленных задач: в консервативных (потенциальных) задачах оператор — самосопряженный, для неконсервативных задач оператор не является самосопряженным***.

* См.: *Beck M.*

** См.: *Дейнеко К.С., Леонов М.Я.*

*** См.: *Михлин С.Г.*

19. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ЛАГРАНЖА, РЕЙССНЕРА И КАСТИЛЬЯНО

Прежде чем рассматривать вариационные принципы Лагранжа, Рейсснера и Кастильяно применительно к задачам для линейно упругих тел, сформулируем закон сохранения энергии для тела, находящегося в равновесии:

$$\delta U = \delta W + \delta Q,$$

где U — внутренняя энергия тела объемом V и ограниченного поверхностью S :

$$U = \int_V u dV;$$

u — объемная плотность внутренней энергии, т. е. количество энергии, приходящееся на единицу объема;

$$\delta W = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_S \tilde{p}_i \delta u_i dS$$

— работа объемных (с компонентами b_i) и поверхностных (с компонентами $\tilde{p}_i$) сил на возможных перемещениях δu_i ; u_i — компоненты вектора перемещения; Q — количество теплоты, приобретенной телом. Здесь и далее мы опускаем знаки суммирования, предполагая по умолчанию, что в формулах при наличии одинаковых индексов выполняется суммирование от 1 до 3.

Положим, что граничная поверхность S рассматриваемого тела разделена на две части: S_u , на которой заданы компоненты вектора перемещения

$$u_i = \tilde{u}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (19.1)$$

и S_σ , на которой заданы поверхностные силы $\tilde{p}_i$. При этом $S = S_u \cup S_\sigma$ и $S_u \cup S_\sigma = \emptyset$. Очевидно, что $\delta u_i = 0$ на поверхности S_u .

В дальнейшем полагаем, что деформации малы и компоненты тензора деформации ε_{ij} определяются соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (19.2)$$

Так как компоненты векторов плотностей объемных b_i и поверхностных $\tilde{p}_i$ сил являются заданными функциями декартовых координат x_k ($k = 1, 2, 3$), то работа δW внешних сил на возможных перемещениях:

$$\delta W = \delta \left(\int_V b_i u_i dV + \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i dS \right).$$

Вариацию количества теплоты, приобретенной изучаемым телом, зададим в виде

$$\delta Q = \int_V T \delta h dV,$$

где T — абсолютная температура; h — энтропия единицы объема тела.

В дальнейшем будем рассматривать два случая деформирования: адиабатическое и изотермическое. В первом случае $h = h(x_1, x_2, x_3)$ — известная функция и $\delta h = 0$. Во втором случае известна абсолютная температура $T = T(x_1, x_2, x_3)$ и $\delta T = 0$. Только для этих двух случаев

$$\delta Q = \delta \int_V T h dV.$$

При изотермическом деформировании вместо $u = u(\varepsilon_{ij}, h)$ нужно использовать объемную плотность свободной энергии $A(\varepsilon_{ij}, T)$ и переход от первой функции ко второй осуществляется с помощью преобразования Юнга — Фенхеля^{*}:

$$A(\varepsilon_{ij}, T) = \sup_h [u(\varepsilon_{ij}, h) - Th].$$

При $\varepsilon_{ij} = 0$ массовые плотности свободной и внутренней энергий равны: $A(0, T) = B(T)$ и $u(0, h) = H(h)$. Функции $B(T)$ и $H(h)$ при $T \neq T_0$ ($T_0 = \text{const}$ — начальная температура тела) отличны от нуля, и их учет необходим при изучении процес-

^{*} См.: Бердичевский В.Л.

сов деформирования, протекающих при переменных температурах и сопровождающихся рассеянием энергии. Так как процессы рассеяния энергии мы не рассматриваем, то в дальнейшем полагаем, что $B(T) = 0$ и $H(h) = 0$.

Таким образом, условие стационарности функционала

$$J[u] = U[u] - L[u], \quad (19.3)$$

где

$$U[u] = \int_V u(\varepsilon_{ij}) dV, \quad L[u] = \int_V b_i u_i dV + \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i dS,$$

определяет компоненты u_i ($i = 1, 2, 3$) векторного поля u истинных перемещений при адиабатическом деформировании на множестве допустимых функций u_i , непрерывно дифференцируемых в V и принимающих заданные значения на S_u . Функционал (19.3) называется *функционалом энергии*. Отметим, что при изотермическом деформировании первое слагаемое в правой части соотношения (19.3) должно быть заменено на $\int_V A(\varepsilon_{ij}, T) dV$.

Рассмотрим условия, при которых задача поиска стационарных точек функционала энергии сводится к задаче о его минимуме. Первый вопрос, который необходимо в этом случае выяснить, — ограниченность снизу функционала энергии (19.3)*.

Пусть кинематические ограничения отсутствуют: $S_u = \emptyset$. Тогда объемная плотность внутренней энергии $u(\varepsilon_{ij})$ равна нулю на векторных полях перемещений, соответствующих малым перемещениям упругого тела как абсолютно твердого, т. е. при

$$u_i = c_i + e_{ijk} \omega_j x_k, \quad (19.4)$$

где $c_i = \text{const}$, $\omega_i = \text{const}$ — компоненты вектора поворота; e_{ijk} — символ Леви — Чивиты, представляющий собой тензор ранга 3 ($e_{ijk} = 1$, если индексы i, j, k различны и следуют в порядке (1, 2, 3), (2, 3, 1) или (3, 1, 2), $e_{ijk} = -1$, если этот порядок нарушен, и $e_{ijk} = 0$, если среди индексов есть одинаковые).

* См.: Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.

При таких векторных полях перемещений имеем $\varepsilon_{ij} = 0$. Необходимым условием ограниченности снизу функционала $J[u]$ является равенство нулю его значений на векторных полях перемещений вида (19.4). Поясним это условие.

Функционал $U[u]$ неотрицателен и, следовательно, ограничен снизу нулем. Функционал $L[u]$ линеен, и поэтому множество его значений не ограничено. Линейная комбинация функционалов $U[u] - L[u]$ может оказаться ограниченной снизу только за счет того, что с увеличением $L[u]$ растет и $U[u]$, причем последний, будучи квадратичным функционалом, растет быстрее. Однако ясно, что рост функционала $U[u]$ не сможет компенсировать рост $L[u]$ на тех функциях u_i , на которых $U[u] = 0$, т. е. на векторных полях перемещений вида (19.4).

Указанное условие ограниченности снизу функционала $J[u]$ дает соотношение

$$\int_V b_i (c_i + e_{ijk} \omega_j x_k) dV + \int_S \tilde{p}_i (c_i + e_{ijk} \omega_j x_k) dS = 0,$$

откуда при $c_i \neq 0$ и $\omega_j \neq 0$ в общем случае следуют шесть равенств:

$$\begin{aligned} \int_V b_i dV + \int_S \tilde{p}_i dS &= 0, \\ e_{ijk} \left(\int_V b_j x_k dV + \int_S \tilde{p}_i x_k dS \right) &= 0. \end{aligned} \tag{19.5}$$

Равенства (19.5) означают, что суммарные внешние сила и момент, действующие на тело, должны быть равны нулю. Если равенства (19.5) выполняются, то функционал $J[u]$ инвариантен относительно движений упругого тела как абсолютно твердого. В этом случае задача поиска стационарных точек функционала $J[u]$ не имеет единственного решения. Чтобы решение было единственным, на поля перемещений надо наложить ограничения. Например, можно принять, что

$$\int_V u_i dV = 0 \quad \text{и} \quad \int_V e_{ijk} u_i x_j dV = 0,$$

т. е. приравнять нулю среднее перемещение и средний поворот тела.

Если упругие свойства рассматриваемого тела не вырождаются ($u(\varepsilon_{ij}) > 0$ при $\varepsilon_{ij} \neq 0$), то, как оказывается, условия (19.5)

при $S_u = \emptyset$ являются достаточными для ограниченности снизу функционала $J[u]$. Функции b_i и $\tilde{p}_i$ при этом должны быть суммируемыми с квадратом.

Если на части S_u граничной поверхности тела заданы компоненты вектора перемещения, то можно доказать, что функционал энергии также ограничен снизу для любых суммируемых с квадратом функций b_i и $\tilde{p}_i$, в том числе и для имеющих ненулевые суммарные силу и момент*.

Ограниченность снизу функционала энергии позволяет поставить задачу об определении для него минимизирующего элемента. Эта задача может быть сформулирована в форме вариационного принципа Лагранжа: среди всех возможных перемещений действительные перемещения сообщают функционалу энергии минимум.

Уравнения Эйлера для функционала $J[u]$ можно получить, приравняв нулю его первую вариацию:

$$\delta J[u, \delta u] = \int_V \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_S \tilde{p}_i \delta u_i dS = 0.$$

Из теории упругости известно, что компоненты σ_{ji} симметричного тензора напряжений $\hat{\sigma}$ связаны с компонентами ϵ_{ij} тензора деформации соотношениями**

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}}.$$

Поэтому, согласно *теореме Остроградского — Гаусса*,

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ji} \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ji} \delta u_j) - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j \right] dV = \\ &= \int_S \sigma_{ji} n_j \delta u_i dS - \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i dV. \end{aligned}$$

* См.: Бердичевский В.Л.

** См.: Работнов Ю.Н.

Отсюда

$$\delta J[u] = - \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \right) \delta u_i dV + \int_S (\sigma_{ji} n_j - \tilde{p}_i) \delta u_i dS = 0.$$

Так как вариации δu_i произвольны в объеме V и на поверхности S_σ , то в силу леммы Лагранжа

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0 \text{ в } V \text{ и } \sigma_{ji} n_j = \tilde{p}_i \text{ на } S_\sigma. \quad (19.6)$$

Уравнения (19.6) представляют собой уравнения равновесия в объеме V и граничные условия на поверхности S_σ . Они были получены с учетом того, что $\delta u_i = 0$ на поверхности S_u .

Пример 19.1. Пусть задана объемная плотность свободной энергии

$$A(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} C_{jikh} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - \frac{1}{2} C_{jikh} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij}^{(T)},$$

где C_{ijhl} — компоненты симметричного тензора четвертого ранга независимых от координат коэффициентов упругости, $C_{ijhl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$; $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \varepsilon_{ji}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации (известная величина).

Используя вариационный принцип Лагранжа, получим уравнения Эйлера для соответствующего функционала и запишем эти уравнения через компоненты вектора перемещения.

Функционал энергии для заданной объемной плотности свободной энергии будет равен:

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_V [C_{jikh} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - C_{jikh} (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) (-\varepsilon_{ij}^{(T)})] dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i dS,$$

и условия (19.5) ограниченности функционала $I[u]$ снизу выполняются. Тогда

$$\delta I[u, \delta u] = \int_V C_{jikh} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \delta u_i dS = 0,$$

так как $\delta \varepsilon_{ij}^{(T)} \equiv 0$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части этого равенства с помощью теоремы Остроградского — Гаусса:

$$\begin{aligned}
 \int_V C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) \delta \epsilon_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_V C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) \delta u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (C_{ijl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) \delta u_j) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)})) \delta u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (C_{ijl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)})) \delta u_j \right] dV = \\
 &= \int_S C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) n_j \delta u_i dS - \int_V C_{jkl} \frac{\partial(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)})}{\partial x_j} \delta u_i dV.
 \end{aligned}$$

Окончательно условие равенства нулю первой вариации функционала $I[u]$ примет вид

$$\begin{aligned}
 \delta I(u_i) &= \int_{S_\sigma} (C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) n_j - p_i) \delta u_i dS - \\
 &\quad - \int_V \left(C_{jkl} \frac{\partial(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)})}{\partial x_j} + b_i \right) \delta u_i dV = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера в данном случае таковы:

$$\begin{aligned}
 C_{jkl} \frac{\partial(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)})}{\partial x_j} + b_i &= 0 \quad \text{в } V, \\
 C_{jkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{(T)}) n_j - \tilde{p}_i &= 0 \quad \text{на } S_\sigma.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношениями Коши (19.2), получим

$$\begin{aligned}
 C_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + b_i &= C_{jkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(T)}}{\partial x_j} \quad \text{в } V, \\
 C_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j &= C_{jkl} \epsilon_{kl}^{(T)} n_j + p_i \quad \text{на } S_\sigma. \quad \#
 \end{aligned}$$

Преобразование Юнга — Фенхеля функции $u(\varepsilon_{ij})$ по ε_{ij}

$$u^*(\sigma_{ij}) = \sup_{\varepsilon_{ij}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - u(\varepsilon_{ij})) \quad (19.7)$$

называют объемной плотностью дополнительной работы. Здесь и далее полагаем, что компоненты u_i вектора перемещения непрерывно дифференцируемы в V , а на поверхности S_u (при $S_u \neq \emptyset$) удовлетворяют граничным условиям. Кроме того, считаем, что компоненты σ_{ij} тензора напряжений $\hat{\sigma}$ непрерывно дифференцируемы в V . Плотность внутренней энергии можно выразить через дополнительную работу:

$$u(\varepsilon_{ij}) = \sup_{\hat{\sigma}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - u^*(\sigma_{ij})). \quad (19.8)$$

Используя соотношение (19.8), можем записать

$$\inf_u J[u] = \inf_u \sup_{\hat{\sigma}} I[\hat{\sigma}, u], \quad (19.9)$$

где

$$I[\hat{\sigma}, u] = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - u^*(\sigma_{ij})) dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i dS.$$

Решение минимаксной задачи (19.9) при указанных требованиях к u и $\hat{\sigma}$ является стационарной точкой функционала $I[\hat{\sigma}, u]$ на множестве всех $\hat{\sigma}$ и u , удовлетворяющих граничным условиям (19.1). Вычисляя первую вариацию этого функционала по компонентам тензора напряжений, находим $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}}$. Если же варьируем функции u_i , то получаем урав-

нение равновесия в объеме V и граничные условия на S_σ (см. (19.6)).

Сведение задачи равновесия упругого тела к задаче поиска стационарной точки функционала $I[\hat{\sigma}, u]$ называют *смешанным вариационным принципом* или *вариационным принципом Рейсснера*. Стационарная точка функционала $I[\hat{\sigma}, u]$ является седловой, так как она обеспечивает максимум $I[\hat{\sigma}, u]$ по функциям σ_{ij} и минимум по функциям u_i .

Пример 19.2. Используя вариационный принцип Рейсснера, получим уравнения (19.6) и соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций в изотермическом процессе деформирования. Объемная плотность дополнительной работы для изотропного однородного тела имеет вид^{*}

$$A^*(\sigma_{ij}, T) = \frac{1}{4\mu} \left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk}^2 \right) + \varepsilon^{(T)}\sigma_{kk},$$

где λ, μ — коэффициенты упругости; σ_{kk} — сумма диагональных элементов матрицы σ_{ij} .

В данном примере

$$I[\hat{\sigma}, \mathbf{u}] = \int_V \left[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{4\mu} \left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk}^2 \right) - \varepsilon^{(T)}\sigma_{kk} \right] dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i dS.$$

Вычислим вариацию функционала $I[\hat{\sigma}, \mathbf{u}]$ по σ_{ij} и приравняем ее нулю:

$$\delta I[\hat{\sigma}, \mathbf{u}] = \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{4\mu} \left(2\sigma_{ij} - \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk}\delta_{ij} \right) - \varepsilon^{(T)}\delta_{ij} \right] \delta\sigma_{ij} dV = 0,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Отсюда следует, что при произвольных функциях $\delta\sigma_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk}\delta_{ij} \right) + \varepsilon^{(T)}\delta_{ij}.$$

Если же вычислим вариацию функционала $I[\hat{\sigma}, \mathbf{u}]$ по u_i , то из условия $\delta I[\hat{\sigma}, \mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = 0$ получим (19.6). #

Вариационный принцип, двойственный принципу Лагранжа, можно ввести следующим образом. Сначала проверяем допустимость перестановки порядка вычисления максимума и минимума в соотношении (19.9). Эта перестановка дает

$$\sup_{\hat{\sigma}} \inf_u \left(\Phi[\hat{\sigma}, \mathbf{u}] + I^*[\hat{\sigma}, \mathbf{u}] \right) \leq I_0, \quad (19.10)$$

^{*} См.: Работнов Ю.Н.

где I_0 — минимум функционала $J[u]$;

$$\Phi[\hat{\sigma}, u] = - \int_V \left(b_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) u_i dV - \int_{S_\sigma} (\tilde{p}_i - \sigma_{ji} n_j) u_i dS;$$

$$I^*[\hat{\sigma}, u] = \int_{S_u} \sigma_{ji} n_j \tilde{u}_i dS - \int_V u^*(\sigma_{ij}) dV.$$

Очевидно, что для тензорных полей $\hat{\sigma}$, удовлетворяющих условиям равновесия и граничным условиям (19.6), $\Phi[\hat{\sigma}, u] = 0$, а для тензорных полей $\hat{\sigma}$, не удовлетворяющих граничным условиям, $\inf_u \Phi[\hat{\sigma}, u] = -\infty$ в силу линейности этого функционала по u_i .

Предположим, что функции u_i^* , минимизирующие функционал $J[u]$, непрерывно дифференцируемы. Введем обозначения:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Big|_{u_i = u_i^*}, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\partial u(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^*}.$$

Из уравнений Эйлера исходной вариационной задачи для функционала $J[u]$ при заданных условиях на поверхности S_u следует, что компоненты σ_{ij}^* тензора $\hat{\sigma}^*$ удовлетворяют соотношениям (19.6) и, следовательно, являются допустимыми функциями:

$$\sup_{\hat{\sigma}} I^*[\hat{\sigma}] \geq I^*[\hat{\sigma}^*]. \quad (19.11)$$

С другой стороны, так как $S = S_u \cup S_\sigma$,

$$\begin{aligned} I^*[\hat{\sigma}^*] &= \int_{S_u} \sigma_{ji}^* n_j u_i^* dS - \int_V u^*(\sigma_{ij}^*) dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji}^* u_i^*) - u^*(\sigma_{ij}^*) \right) dV - \\ &- \int_{S_\sigma} \sigma_{ji}^* n_j u_i^* dS = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} u_i^* + \sigma_{ji}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - u^*(\sigma_{ij}^*) \right) dV - \int_{S_\sigma} \sigma_{ji}^* n_j u_i^* dS = \\ &= \int_V \left[-b_i u_i^* + \sigma_{ji}^* \varepsilon_{ij}^* - u^*(\sigma_{ij}^*) + \frac{1}{2} \sigma_{ji}^* \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \right] dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i^* dS = \\ &= \int_V u(\varepsilon_{ij}^*) dV - \int_V b_i u_i^* dV - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i u_i^* dS = I_0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и неравенств (19.10), (19.11) следует, что

$$\inf_u J[u] = \sup_{\hat{\sigma}} I^*[\hat{\sigma}],$$

где минимум и максимум берутся по всем непрерывно дифференцируемым в V функциям σ_{ij} , u_i , причем $u_i = \tilde{u}_i$ на поверхности S_u и σ_{ij} удовлетворяют соотношениям (19.6).

Вариационная задача поиска максимума функционала $I^*[\hat{\sigma}]$ по всем тензорным полям $\hat{\sigma}$, подчиняющимся условиям (19.6), представляет собой математическую формулировку принципа стационарности дополнительной работы, или вариационного принципа Кастильяно: дополнительная работа $I^*(\hat{\sigma})$ достигает максимума, если тензор напряжений $\hat{\sigma}$ с компонентами σ_{ij} удовлетворяет уравнениям (19.6).

Пример 19.3. Получим уравнения Эйлера функционала, соответствующего вариационному принципу Кастильяно, записав их через компоненты тензора деформации.

При выводе требуемых уравнений будем полагать, что поверхность S_σ совпадает с поверхностью S , ограничивающей рассматриваемое тело объемом V . В этом случае

$$I^*[\hat{\sigma}] = - \int_V u^*(\sigma_{ij}) dV.$$

Также полагаем, что объемные b_i и поверхностные $\tilde{p}_i$ силы являются заданными функциями координат. Тогда из уравнений (19.6) получаем

$$\frac{\partial \delta \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \text{ в } V \text{ и } \delta \sigma_{ji} n_j = 0 \text{ на } S. \quad (19.12)$$

Вместо шести компонент тензора малой деформации введем в рассмотрение шесть новых функций $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ и $F_{ij} = F_{ji} = F_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, приняв $F_{ij} = 0$ при $i = j$, определяемых из условий:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) - F_{ij}. \quad (19.13)$$

Далее, используя соотношение $\varepsilon_{ij} = \partial u^* / \partial \sigma_{ij}$, полученное ранее, запишем условие стационарности функционала $I^*[\hat{\sigma}]$ в вариационном принципе Кастильяно в виде

$$\delta I^*[\hat{\sigma}] = - \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = 0,$$

которое после подстановки в него соотношений (19.13) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta \sigma_{ij} dV + \int_V F_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \\ & = - \int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dV + \int_V F_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = 0. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Преобразуя отдельно $\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dV$, получим, используя равенства (19.12) и теорему Остроградского — Гаусса, что

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ji} dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (f_i \delta \sigma_{ji}) dV - \int_V f_i \frac{\partial \delta \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = \\ &= \int_S f_i \delta \sigma_{ji} n_j dS - \int_V f_i \frac{\partial \delta \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = 0. \end{aligned}$$

В силу этого равенства соотношение (19.14) эквивалентно следующему:

$$\int_V F_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = 0. \quad (19.15)$$

Введем в рассмотрение три произвольные функции координат $\alpha_i = \alpha_i(x_1, x_2, x_3)$. Умножим вторую группу уравнений из (19.12) на α_i и проинтегрируем полученный результат по поверхности:

$$\int_S \alpha_i \delta \sigma_{ji} n_j dS = 0.$$

Применяя к последнему соотношению теорему Остроградского — Гаусса, получаем:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_i \delta \sigma_{ji}) dV = 0,$$

и после дифференцирования (с учетом симметрии тензора напряжений $\hat{\sigma}$) имеем:

$$\int_V \alpha_i \frac{\partial \delta \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0.$$

С учетом первой группы равенств из (19.12) последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0. \quad (19.16)$$

Так как функции α_i могут быть произвольными, потребуем, чтобы $\partial \alpha_i / \partial x_j = 0$ при $i = j$. Тогда последнее равенство имеет смысл только при $i \neq j$. Сравнивая соотношения (19.15) и (19.16), получим:

$$F_{ij} = B \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j,$$

где $B \neq 0$ — некоторая постоянная. Из этих равенств следует, что

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = B \left(\frac{\partial^3 \alpha_2}{\partial x_2^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 \alpha_3}{\partial x_2 \partial x_3^2} \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = B \left(\frac{\partial^3 \alpha_1}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 \alpha_3}{\partial x_1 \partial x_3^2} \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = B \left(\frac{\partial^3 \alpha_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (19.17)$$

а также

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} \right) = 2B \frac{\partial^3 \alpha_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} \right) = 2B \frac{\partial^3 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} \right) = 2B \frac{\partial^3 \alpha_3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0. \end{cases} \quad (19.18)$$

Определяя F_{ij} из (19.13), учитывая равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 2\varepsilon_{ij}$$

при $i = j$ и подставляя их в (19.18), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (19.19)$$

Система уравнений (19.19) содержит три из шести условий совместности деформаций (условий Сен-Венана).

Другие три условия совместности деформаций получим, подставив F_{ij} из (19.13) в (19.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right) = \\ &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \\ &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned}$$

и так далее.

Окончательно эти условия примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{cases} \quad (19.20)$$

Таким образом, мы установили, что условие стационарности функционала дополнительной работы эквивалентно условиям совместности деформаций (19.19) и (19.20). При этом необходимыми условиями существования стационарной точки функционала $I^*[\sigma_{ij}]$ являются уравнения (19.6).

Если на части S_u граничной поверхности S заданы компоненты вектора перемещения ($u_i = \tilde{u}_i$ на S_u), то, представив f_i в виде суммы $f_i(x_1, x_2, x_3) = g_i(x_1, x_2, x_3) + \tilde{f}_i(x_1, x_2, x_3)$, где функции g_i известны, причем $g_i = \tilde{u}_i$ на S_u , $\tilde{f}_i = 0$ на S_u , и проделав аналогичные преобразования, также получим условия совместности деформаций, следующие из условия стационарности функционала

$$I^*[\hat{\sigma}] = \int_{S_u} \sigma_{ji} n_j \tilde{u}_i dS - \int_V u^*(\sigma_{ij}) dV.$$

20. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Термоупругостью называют раздел механики деформируемого твердого тела, в котором изучают процессы упругого деформирования и распространения теплоты с учетом взаимодействия этих процессов.

В дальнейшем будем полагать, что компоненты ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора деформации $\hat{\varepsilon}$ связаны с компонентами u_i вектора перемещения $\mathbf{u}$ соотношениями Коши (19.2), компоненты σ_{ij} симметричного тензора напряжений $\hat{\sigma}$ связаны с ε_{ij} и абсолютной температурой T соотношениями Дюамеля — Неймана

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\vartheta, \quad (20.1)$$

где $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{jilk}$ — компоненты тензора коэффициентов упругости материала тела; $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}^{(T)}$; $\alpha_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения; $\vartheta = T - T_0$; $T_0 = \text{const} > 0$ — температура естественного состояния тела, т. е. та температура, при которой тело может находиться сколь угодно долго без взаимодействия с окружающей средой и для которой $|\vartheta|/T_0 \ll 1$.

Как и в 19, используем неявное суммирование по повторяющимся индексам.

Вектор плотности $\mathbf{q}$ теплового потока с компонентами q_i связан с градиентом температуры законом Фурье [XII]

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (20.2)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda_{ji}^{(T)}$ — компоненты тензора теплопроводности.

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\rho T_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v. \quad (20.3)$$

Здесь ρ — плотность материала тела; η — массовая плотность энтропии; t — время; x_i , $i = 1, 2, 3$, — декартовы прямоугольные координаты; q_v — объемная плотность мощности источников энерговыделения. При этом

$$\rho T_0 \eta = \rho c_\varepsilon \vartheta + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (20.4)$$

где c_ε — удельная массовая теплоемкость материала тела при постоянной деформации.

Запишем уравнения движения среды

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (20.5)$$

Здесь b_i — компоненты вектора плотности объемных сил.

В постановку задачи термоупругости вводят краевые условия:

начальное условие при $t = 0$

$$u_i|_{t=0} = u_i^0, \quad \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} = v_i^0, \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta^0 \quad \text{в } V;$$

граничные условия

$$u_i|_{S_u} = \tilde{u}_i, \quad (\sigma_{ij} n_j)|_{S_\sigma} = \tilde{p}_i, \quad \vartheta|_{S_T} = \tilde{\vartheta}, \quad q_i n_i|_{S_q} = \tilde{q},$$

где $S_u \cup S_\sigma = S$ — граничная поверхность рассматриваемого тела объемом V , причем $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$; n_j — координаты единичного вектора нормали к поверхности S ; $S_T \cup S_q = S$, $S_T \cap S_q = \emptyset$; u_i^0 , v_i^0 , ϑ^0 , $\tilde{u}_i$, $\tilde{p}_i$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{q}$ — заданные функции.

Полагаем, что все введенные функции и участки поверхности S обладают необходимой гладкостью (т. е. имеют необходимое количество непрерывных частных производных).

При формулировании вариационных принципов термоупругости будем использовать свертку двух функций по времени, которую определяют следующим образом [XI]:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Для включения начальных условий в вариационную формулировку соответствующей краевой задачи используем преобразование Лапласа [XI]

$$f^*(p) = L[f(t)](p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ — функция-оригинал; $f^*(p) = L[f(t)](p)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$.

Перейдем к изображениям в уравнениях движения (20.5):

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} + b_i^* - \rho(p^2 u_i^* - p u_i^0 - v_i^0) = 0, \quad (20.6)$$

и в уравнении (20.3):

$$\rho T_0 p \eta^* - \rho T_0 \eta(0) = -\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + q_v^*. \quad (20.7)$$

Так как

$$\varepsilon_{ij}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right),$$

то, согласно (20.4), учитывая симметрию β_{ij} и очевидное тождество

$$\beta_{ij} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) \equiv 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \rho T_0 \eta(0) &= \rho c_\varepsilon \vartheta_0 + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}(0) = \rho c_\varepsilon \vartheta_0 + \\ &+ T_0 \beta_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) \right] = \rho c_\varepsilon \vartheta_0 + T_0 \beta_{ij} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Поэтому закон сохранения энергии (20.3) в изображениях можно записать в виде

$$\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - \rho c_\varepsilon \vartheta_0 - T_0 \beta_{ij} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + p \rho T_0 \eta^* = q_v^*. \quad (20.8)$$

Решаем уравнения (20.6) и (20.8) относительно u_i^* и η^* :

$$\begin{aligned}\rho u_i^* &= \frac{1}{p^2} \frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} + \frac{1}{p^2} b_i^* + \frac{1}{p} \rho u_i^0 + \frac{1}{p^2} \rho v_i^0, \\ \rho T_0 \eta^* &= \frac{1}{p} q_v^* - \frac{1}{p} \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + \frac{1}{p} \rho c_\epsilon \vartheta_0 + \frac{1}{p} T_0 \beta_{ij} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{p^2} = L[t], \quad \frac{1}{p} = L[1],$$

то, применяя теорему о свертке [XI], находим

$$\rho u_i = g^* \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i, \quad \rho T_0 \eta = w - \dot{g}^* \frac{\partial q_i}{\partial x_i},$$

где $q(t) = t$; $\dot{g}(t) = 1$;

$$f_i = g^* b_i + \rho(t v_i^0 + u_i^0); \quad w = \dot{g}^* q_v + \rho c_\epsilon \vartheta_0 + T_0 \beta_{ij} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}.$$

Чтобы получить обобщение вариационного принципа Лагранжа, введем понятие кинематически и термически допустимого состояния, т. е. такого состояния, которое удовлетворяет соотношениям Коши (19.2), закону Фурье (20.2), уравнениям (20.1), (20.3), (20.4), а также граничным условиям на участках S_u и S_T поверхности S . Тогда обобщение принципа Лагранжа можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned}J[u, \vartheta] &= \\ &= \frac{1}{2} \int_V (g^* C_{ijkl} \epsilon_{kl} * \epsilon_{ij} - 2g^* \beta_{ij} \vartheta * \epsilon_{ij} + \rho u_i * u_i - 2f_i * u_i) dV - \\ &- \frac{1}{2} \int_V \left(\rho g^* \frac{c_\epsilon}{T_0} \vartheta * \vartheta - \frac{1}{T_0} g^* \dot{g}^* \lambda_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} * \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{1}{T_0} g^* w * \vartheta \right) dV - \\ &- \int_{S_\sigma} (g^* \tilde{p}_i * u_i) dS - \frac{1}{T_0} \int_{S_q} (g^* \dot{g}^* \tilde{q} * \vartheta) dS,\end{aligned}$$

который для любого $t \geq 0$ определен на множестве кинематически и термически допустимых состояний.

Вычислим первую вариацию функционала $J[u, \vartheta]$ и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned}
 \delta J[u, \vartheta, \delta u, \delta \vartheta] &= \int_V g^* ((C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \vartheta) * \delta \varepsilon_{ij} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} * \delta \vartheta) dV - \\
 &- \int_V \rho \left(g^* \frac{c_\varepsilon}{T_0} \vartheta * \delta \vartheta \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho (u_i * \delta u_i) dV + \\
 &+ \frac{1}{T_0} \int_V \left(g^* \dot{g} * \lambda_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} * \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) dV - \int_V (f_i * \delta u_i) dV - \\
 &- \frac{1}{T_0} \int_V (g^* w * \delta \vartheta) dV - \int_{S_\sigma} (g^* \tilde{p}_i * \delta u_i) dS + \frac{1}{T_0} \int_{S_\sigma} (g^* \dot{g} * \tilde{q} * \delta \vartheta) dS = \\
 &= - \int_V \left(g^* \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \vartheta) + f_i - \rho u_i \right) * \delta u_i dV - \\
 &- \frac{1}{T_0} \int_V \left[\rho \left(g^* c_\varepsilon \vartheta + \frac{T_0}{\rho} g^* \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \right) - \right. \\
 &- \left. g^* \dot{g} * \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \right) + g^* w \right] * \delta \vartheta dV + \\
 &+ \int_{S_\sigma} (g^* (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \vartheta) n_j - g^* \tilde{p}_i) * \delta u_i dS + \\
 &+ \frac{1}{T_0} \int_{S_q} g^* \dot{g} * \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} n_i - \tilde{q} \right) * \delta \vartheta dS = 0. \tag{20.9}
 \end{aligned}$$

Из уравнения (20.9) в силу произвольности δu_i и $\delta \vartheta$ на участках S_σ , S_q поверхности S и внутри объема V , а также равенства нулю вариаций δu_i на S_u и $\delta \vartheta$ на S_T следуют уравнения движения и теплопроводности с соответствующими граничными условиями.

Вариационный принцип для компонент σ_{ij} тензора напряжений $\hat{\sigma}$ и компонент q_i вектора q плотности теплового потока, аналогичный вариационному принципу Кастильяно, можно сформулировать следующим образом. Пусть тензор $\hat{\sigma}$ и

вектор $\mathbf{q}$ образуют динамически и энергетически допустимое поле тензора напряжений и вектора плотности теплового потока, т. е. поле, которое удовлетворяет граничным условиям на S_σ и S_q . На таком поле определим функционал

$$\begin{aligned}
 I[\hat{\sigma}, \mathbf{q}] = & \frac{1}{2} \int_V (S'_{ijkl} \sigma_{ij} * \sigma_{kl}) dV + \\
 & + \frac{1}{T_0} \int_V \alpha'_{ij} \left[\sigma_{ij} * \left(w - \dot{g} * \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) \right] dV - \frac{1}{2T_0} \int_V k_{ij} (\dot{g} * q_i * q_j) dV + \\
 & + \int_V \frac{1}{\rho} \left(f_i * \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho g * \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} * \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} dV - \\
 & - \frac{1}{2T_0} \int_V \frac{1}{\rho c_\sigma} \dot{g} * \dot{g} * \frac{\partial q_i}{\partial x_i} * \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dV + \frac{1}{T_0} \int_V \frac{1}{\rho c_\sigma} \left(\dot{g} * w * \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) dV - \\
 & - \int_{S_u} \tilde{u}_i * \sigma_{ji} n_j dS - \frac{1}{T_0} \int_{S_T} \dot{g} * \tilde{\vartheta} * q_i n_i dS,
 \end{aligned}$$

где $\alpha'_{ij} = T_0 \alpha_{ij}^{(T)} / (\rho c_\sigma)$; $c_\sigma = c_\epsilon + T_0 \beta_{ij} \alpha_{ij}^{(T)} / \rho$ — удельная массовая теплоемкость при постоянных напряжениях; $S'_{ijkl} = S_{ijkl} - \alpha_{ij}^{(T)} \alpha'_{kl}$; $S_{ijkl} = S_{klij} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ — компоненты тензора коэффициентов податливости материала тела, связанные с компонентами C_{ijkl} тензора коэффициентов упругости соотношениями $C_{ijkl} S_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$; $k_{ij} = k_{ji}$ — компоненты тензора термического сопротивления, $k_{ij} \lambda_{jm} = \delta_{im}$.

Вариация функционала $I[\hat{\sigma}, \mathbf{q}]$ равна нулю, если компоненты тензора $\hat{\sigma}$ и координаты вектора $\mathbf{q}$ являются решениями краевой задачи термоупругости.

Вычислим первую вариацию функционала $I[\hat{\sigma}, \mathbf{q}]$ и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned}
 I[\hat{\sigma}, \mathbf{q}, \delta \hat{\sigma}, \delta \mathbf{q}] = & \int_V \left[S'_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{T_0} \alpha'_{ij} \left(w - \dot{g} * \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) \right] * \delta \sigma_{ij} dV + \\
 & + \frac{1}{T_0} \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha'_{ij} \sigma_{ij}) * \dot{g} * \delta q_k dV - \frac{1}{T_0} \int_S \alpha_{ij} \dot{g} * \sigma_{ij} * \delta q_k n_k dS -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \dot{g}^* q_j * \delta q_i dV + \int_S \frac{1}{\rho} \left(g^* \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} \right) * \delta \sigma_{ji} n_j dS - \\
& - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} g^* \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} \right) * \delta \sigma_{ij} dV - \frac{1}{T_0} \int_S \frac{1}{\rho c_\sigma} \left(\dot{g}^* \dot{g}^* \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right) * \delta q_i n_i dS + \\
& + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho c_\sigma} \dot{g}^* \dot{g}^* \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right) * \delta q_i dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} f_i \right) * \delta \sigma_{ij} dV + \\
& + \int_S \frac{1}{\rho} f_i * \delta \sigma_{ji} n_j dS + \frac{1}{T_0} \int_S \frac{1}{\rho c_\sigma} \dot{g}^* w * \delta q_k n_k dS - \\
& - \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{\rho c_\sigma} (\dot{g}^* w) \right] * \delta q_k dV - \int_{S_u} \tilde{u}_i * \delta \sigma_{ji} n_j dS - \\
& - \frac{1}{T_0} \int_{S_T} \dot{g}^* \tilde{\vartheta} * \delta q_i h_i dS = \int_V \left[S'_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{T_0} \alpha'_{ij} \left(w - \dot{g}^* \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} g^* \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} f_i \right) \right] * \delta \sigma_{ij} dV + \\
& + \frac{1}{T_0} \int_V \dot{g}^* \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha'_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{\rho c_\sigma} \left(\dot{g}^* \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - w \right) \right) - k_{ik} q_i \right] * \delta q_k dV + \\
& + \int_{S_u} \left[\frac{1}{\rho} \left(g^* \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_i \right) - \tilde{u}_i \right] * \delta \sigma_{ji} n_j dS - \\
& - \frac{1}{T_0} \int_{S_T} \dot{g}^* \left[\alpha'_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{\rho c_\sigma} \left(\dot{g}^* \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - w \right) - \tilde{\vartheta} \right] * \delta q_k n_k dS = 0.
\end{aligned}$$

Так как вариации $\delta \sigma_{ij}$ и δq_i произвольны, то из полученного равенства следует, что если функции σ_{ij} и q_i удовлетворяют граничным условиям на участках S_σ и S_q поверхности S , то эти функции являются решением краевой задачи термоупругости.

Необходимо отметить, что рассмотренные функционалы $J[u, \vartheta]$ и $L[\hat{\sigma}, q]$ не обладают экстремальными свойствами.

В этом состоит их существенное отличие от функционалов, которые входят в формулировки принципов Лагранжа и Кастильяно.

Если не учитывать процессы деформирования, т. е. $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, $\sigma_{ij} \equiv 0$ и $S_\sigma = S_u = \emptyset$, то сформулированные вариационные принципы приводят к краевой задаче нестационарной теплопроводности с соответствующими краевыми условиями.

Для получения соотношений, определяющих статическое распределение деформаций и напряжений, а также стационарную теплопроводность в рассматриваемом упругом теле, можно воспользоваться предельным переходом $p \rightarrow 0$. В этом случае функции, содержащие в качестве множителя параметр p преобразования Лапласа, исчезают, а каждый из функционалов $J[u, \vartheta]$ и $I[\hat{\sigma}, q]$ преобразуется в сумму двух функционалов: $J[u, \vartheta] = J_1[u] + J_2[\vartheta]$, $I[\hat{\sigma}, q] = I_1[\hat{\sigma}] + I_2[q]$. При этом функционалы $J_1[u]$ и $I_1[\hat{\sigma}]$ будут эквивалентны тем функционалам, которые входят в формулировки принципов Лагранжа и Кастильяно. Условия стационарности функционалов $J_2[\vartheta]$ и $I_2[q]$ эквивалентны краевой задаче стационарной теплопроводности, сформулированной соответственно для ϑ и q .

21. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ В ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Построенные в 20 функционалы в частном случае соответствуют двойственной вариационной формулировке линейной краевой задачи стационарной теплопроводности. Помимо решения такой задачи, т. е. нахождения температурного поля в некоторой (в общем случае) пространственной области V , ограниченной поверхностью S , двойственная формулировка позволяет получить двусторонние оценки ряда важных интегральных параметров, характеризующих процесс передачи теплоты*.

Пусть распределение температуры $T(M)$, зависящее от положения точки $M \in \bar{V}$ на замыкании $\bar{V} = V \cup S$ области V , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla \cdot (\lambda^{(T)}(M) \nabla T(M)) + q_V(M) = 0, \quad M \in V, \quad (21.1)$$

с граничными условиями

$$T(P) = f_1(P), \quad P \in S_1, \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(T)}(P) \nabla T(P) n(P) + \alpha(P) T(P) = \\ = f_2(P), \quad P \in S_2. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Здесь $\lambda^{(T)}$ — коэффициент теплопроводности; q_V — объемная мощность энерговыделения; f_1 и f_2 — заданные функции точки P на участках S_1 и $S_2 = S \setminus S_1$ поверхности S соот-

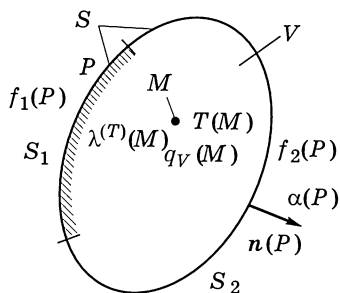


Рис. 21.1

* См.: Власова Е.А., Зарубин В.С.

ветственно; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S ; α — коэффициент теплообмена (рис. 21.1).

Краевой задаче (21.1)–(21.3) соответствуют двойственные функционалы*

$$J[T] = \int_V \left(\frac{\lambda^{(T)}}{2} (\nabla T)^2 - q_V T \right) dV + \int_{S_2} \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - f_2 T \right) dS, \quad (21.4)$$

$$I[T, \mathbf{q}] = - \int_V \frac{\mathbf{q}^2}{2\lambda} dV - \int_{S_1} f_1 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} \frac{\alpha}{2} T^2 dS, \quad (21.5)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(M)$ — вектор плотности теплового потока, зависящий от положения точки $M \in \bar{V}$.

Функционал (21.4) определен на температурных полях $T(M)$, непрерывных на $\bar{V}$, удовлетворяющих граничному условию (21.2) и имеющих кусочно-непрерывные производные в области V , а функционал (21.5) — на непрерывно дифференцируемых в области V функциях $\mathbf{q}(M)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{q}(M) = q_V(M), & M \in V; \\ \mathbf{q}(P) \mathbf{n}(P) = \alpha(P) T(P) - f_2(P), & P \in S_2. \end{cases} \quad (21.6)$$

Справедливы неравенства

$$I[T, \mathbf{q}] \leq J[T^*] \leq J[T], \quad (21.7)$$

где $T^*(M)$, $M \in \bar{V}$, — распределение температуры, на котором функционал $J[T]$ достигает своего наименьшего значения.

Для этого значения с учетом (20.1)–(20.3) имеем

$$2J[T^*] = - \int_V q_V T^* dV + \int_{S_1} f_1 \lambda^{(T^*)} \nabla T^* \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} f_2 T^* dS. \quad (21.8)$$

Выделим несколько характерных случаев оценки интегральных параметров.

1. В области V действуют источники энерговыведения с постоянной объемной мощностью q_V , а поверхность S состоит из участка S_1 с заданным постоянным значением температуры, которое можно принять за нуль отсчета, т. е. $f_1(P) \equiv 0$, $P \in S_1$,

* См.: Зарубин В.С. (1983).

и участка S_2 , на котором $f_2(P) \equiv 0$, $P \in S_2$ (рис. 21.2). В частном случае участок S_2 может быть идеально теплоизолированным и теплообмен на нем будет отсутствовать ($\alpha(P) \equiv 0$, $P \in S_2$). Ясно, что поверхность S может состоять лишь из одного участка: либо S_1 , либо S_2 .

При указанных условиях второй и третий интегралы в правой части (21.8) исчезают, и мы получаем формулу для температуры, осредненной по объему V области:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T^* dV = -2 \frac{J[T^*]}{q_V V}. \quad (21.9)$$

Используя (21.7) и (21.9), запишем двустороннюю оценку для этой температуры в виде

$$-2 \frac{J[T]}{q_V V} = \bar{T}_- \leq \bar{T} \leq \bar{T}_+ = -2 \frac{I[T, q]}{q_V V}. \quad (21.10)$$

2. Пусть в области V отсутствуют внутренние источники теплоты ($q_V(M) \equiv 0$, $M \in V$), участок S_2 поверхности S идеально теплоизолирован ($f_2(P) \equiv 0$ и $\alpha(P) \equiv 0$ при $P \in S_2$), а на остальной части поверхности S имеются два не граничащих между собой изотермических участка S'_1 и S''_1 с заданными значениями температур T'_1 и T''_1 соответственно (рис. 21.3).

В этом случае вместо (21.8) получаем

$$2J[T^*] = T'_1 Q'_1 + T''_1 Q''_1, \quad (21.11)$$

где Q'_1 и Q''_1 — суммарные тепловые потоки, поступающие в область V через участки S'_1 и S''_1 ее поверхности соответственно, причем

$$Q'_1 = \int_{S'_1} \lambda^{(T)} \nabla T^* \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$Q''_1 = \int_{S''_1} \lambda^{(T)} \nabla T^* \cdot \mathbf{n} dS.$$

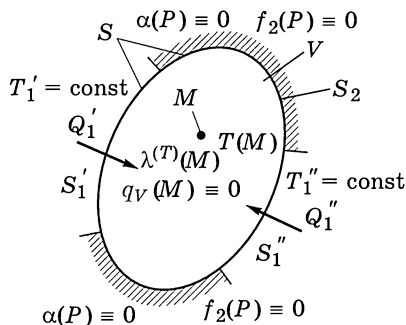


Рис. 21.3

Согласно условию сохранения тепловой энергии при стационарном процессе теплопроводности, $Q'_1 + Q''_1 = 0$. Поэтому, учитывая (21.11), получаем

$$Q'_1 = -Q''_1 = 2 \frac{J[T^*]}{T'_1 - T''_1}.$$

Отсюда вытекает формула для термического сопротивления

$$R = \frac{T'_1 - T''_1}{Q'_1} = \frac{(T'_1 - T''_1)^2}{2J[T^*]} \quad (21.12)$$

области V между изотермическими участками S'_1 и S''_1 поверхности S . Из (21.7) и (21.12) следует двусторонняя оценка для термического сопротивления:

$$\frac{(T'_1 - T''_1)^2}{2J[T]} \leq R \leq \frac{(T'_1 - T''_1)^2}{2I[T, q]}. \quad (21.13)$$

3. В области V отсутствуют внутренние источники теплоты ($q_V(M) \equiv 0$, $M \in V$), участок S_1 поверхности S является

изотермическим ($f_1(P) \equiv T_1 = \text{const}$, $P \in S_1$), а на участках S_2 происходит теплообмен с внешней средой, температуру которой принимаем за нуль отсчета, т. е. $f_2(P) \equiv 0$, $P \in S_2$ (рис. 21.4).

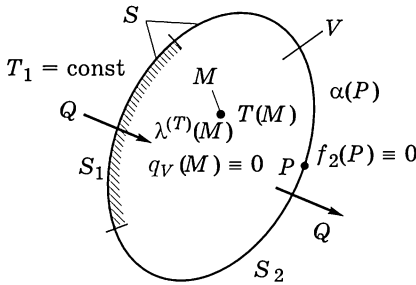


Рис. 21.4

При таких условиях от участка S_1 через участок S_2 к внешней среде будет проходить, согласно (21.8), тепловой поток

$$Q = \int_{S_1} \lambda^{(T)} \nabla T^* n dS = 2 \frac{J[T^*]}{T_1}, \quad (21.14)$$

а суммарное термическое сопротивление теплопередаче между участком S_1 с температурой T_1 и внешней средой с нулевой температурой будет равно:

$$R_\Sigma = \frac{T_1}{Q} = \frac{T_1^2}{2J[T^*]}. \quad (21.15)$$

Используя (21.7), (21.14) и (21.15), запишем двусторонние оценки для теплового потока

$$2 \frac{I[T, q]}{T_1} \leq Q \leq 2 \frac{J[T]}{T_1}$$

и для суммарного термического сопротивления

$$\frac{T_1^2}{2J[T]} \leq R_\Sigma = \frac{T_1^2}{2I[T, q]}.$$

4. Пусть по-прежнему в области V отсутствуют внутренние источники теплоты ($q_V(M) \equiv 0$, $M \in V$), а также отсутствует участок S_1 поверхности S , а участок S_2 , на котором, согласно (21.3), происходит теплообмен с коэффициентом теплообмена $\alpha(P)$, состоит из двух частей: на части S_2° теплообмен происходит с внешней средой, температуру которой примем за нуль отсчета, т. е. $f_2(P) \equiv 0$, $P \in S_2^\circ$; на остальной части $S'_2 = S_2 \setminus S_2^\circ$ имеем $f_2(P) \equiv q'_2 = \text{const}$ (рис. 21.5).

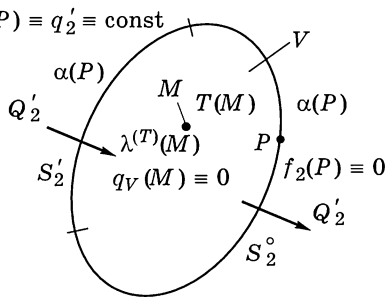


Рис. 21.5

При указанных условиях из (21.8) можно найти среднюю температуру участка S'_2 :

$$\bar{T}'_2 = \frac{1}{S'_2} \int_{S'_2} T^* dS = -2 \frac{J[T^*]}{q_2 S'_2}. \quad (21.16)$$

Из (21.7) и (21.16) следует двусторонняя оценка для этой температуры:

$$-2 \frac{J[T]}{q_2 S'_2} \leq \bar{T}'_2 \leq -2 \frac{I[T, q]}{q_2 S'_2}.$$

Если на участке S'_2 происходит теплообмен со средой, имеющей температуру T'_c , т. е. $q'_2 = \alpha' T'_c$, где α' — постоянный на этом участке коэффициент теплообмена, то, используя (21.16), можно найти передаваемый через S'_2 суммарный тепловой поток

$$Q'_2 = \alpha' (T'_c - \bar{T}'_2) S'_2 = \alpha' T'_c S'_2 + 2 \frac{J[T^*]}{T'_c} \quad (21.17)$$

и суммарное термическое сопротивление

$$R'_\Sigma = \frac{T'_c}{Q'_2} = \frac{T'_c}{\alpha' T'_c S'_2 + 2J[T^*]/T'_c}. \quad (21.18)$$

Отсюда, учитывая (21.7), получаем двусторонние оценки для суммарного теплового потока

$$2 \frac{I[T, q]}{T'_c} + \alpha' T'_c S'_2 \leq Q'_2 \leq 2 \frac{J[T, q]}{T'_c} + \alpha' T'_c S'_2$$

и для суммарного термического сопротивления теплопередачи

$$\frac{T'_c}{\alpha' T'_c S'_2 + 2J[T]/T'_c} \leq R'_\Sigma \leq \frac{T'_c}{\alpha' T'_c S'_2 + 2I[T, q]/T'_c}.$$

Пример 21.1. Рассмотрим тепловыделяющий элемент, представляющий собой стержень с поперечным сечением в

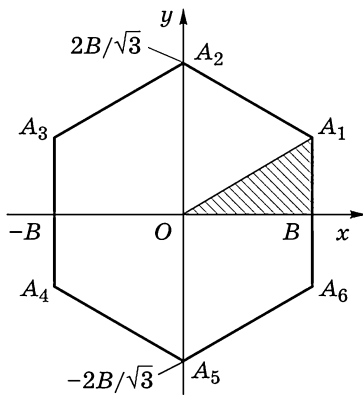


Рис. 21.6

виде правильного шестиугольника (рис. 21.6). Построим двустороннюю оценку средней по сечению температуры $\bar{T}$ при условии, что коэффициент теплопроводности $\lambda^{(T)}$ материала стержня и мощность q_V энергосвечения постоянны в поперечном сечении такого шестиугольного стержня. Заданное значение T_Π температуры поверхности этого стержня примем за нуль отсчета температуры.

В силу симметрии сечения стержня относительно прямых, проходящих через противоположные вершины шестиугольника и через середины его противоположных сторон, достаточно рассмотреть один из 12 треугольников, заштрихованный на рис. 21.6. Площадь этого треугольника $F = B^2/(2\sqrt{3})$, где B — радиус окружности, вписанной в шестиугольник. Для функционала (21.4) в качестве допустимого распределения температуры сначала возьмем следующее:

$$T_1(M) = C_1(B^2 - x^2), \quad M(x, y) \in F. \quad (21.19)$$

Постоянную C_1 определим из необходимого условия минимума функционала (21.4) после подстановки в него (21.19):

$$J[T_1] = \int_F \left(\frac{\lambda^{(T)}}{2} (\nabla T_1)^2 - q_V T_1 \right) dF = 2\lambda^{(T)} C_1^2 \int_0^B x^2 dx \int_0^{x/\sqrt{3}} dy - \\ - q_V C_1 \frac{B^4}{2\sqrt{3}} + \int_0^B x^2 dx \int_0^{x/\sqrt{3}} dy = C_1 B^4 \frac{2\lambda^{(T)} C_1 - q_V}{4\sqrt{3}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial J[T_1]}{\partial C_1} = \frac{B^4}{4\sqrt{3}} (4\lambda^{(T)} C_1 - q_V) = 0,$$

или $C_1 = q_V / (4\lambda^{(T)})$, что соответствует значению $J_1 = -\frac{(q_V B^2)^2}{32\sqrt{3}\lambda^{(T)}}$

функционала (21.4) и, согласно (21.10), нижней оценке средней температуры

$$\bar{T}_- = -2 \frac{J_1}{q_V F} = \frac{q_V B^2}{8\lambda^{(T)}} = 0,125 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}}. \quad (21.20)$$

Несложно проверить, что распределение вектора плотности теплового потока

$$q(M) = \frac{q_V}{4} \nabla(x^2 + y^2), \quad M(x, y) \in M,$$

с проекциями $q_x = q_V x/2$ и $q_y = q_V y/2$ на оси координат Ox и Oy соответственно удовлетворяет первому из условий (21.6) и поэтому может быть использовано в качестве допустимого для функционала вида (21.5):

$$I[q] = - \int_F \frac{q^2}{2\lambda^{(T)}} dF = - \frac{1}{2\lambda^{(T)}} \int_F (q_x^2 + q_y^2) dx dy = -5 \frac{(q_V B^2)^2}{144\sqrt{3}\lambda^{(T)}} = I_1.$$

Этому значению, согласно (21.10), отвечает верхняя оценка средней температуры

$$\bar{T}^+ = -2 \frac{I_1}{q_V F} = \frac{5q_V B^2}{36\lambda^{(T)}} \approx 0,138888 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}} < 0,139 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}}. \quad (21.21)$$

Таким образом, учитывая (21.20) и (21.21), получаем двустороннюю оценку для средней температуры поперечного сечения шестигранного тепловыделяющего элемента в виде

$$0,125 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}} \leq \bar{T} < 0,139 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}}. \quad (21.22)$$

Отметим, что замена шестигранного стержня круглым с равновеликой площадью поперечного сечения радиуса $r_0 = \sqrt{12F/\pi} = B\sqrt{2\sqrt{3}/\pi}$ приводит к значению средней температуры

$$\bar{T}_0 = \frac{q_V r_0^2}{8\lambda^{(T)}} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}} \approx 0,138 \frac{q_V B^2}{\lambda^{(T)}},$$

лежащему в найденных пределах (21.22) довольно близко к верхней границе.

Распределение температуры (21.19) является достаточно грубым. Следует ожидать, что его уточнение уменьшит «вилку», определяемую двусторонними оценками средней температуры $\bar{T}$. Для уточнения допустимого распределения температуры в поперечном сечении шестигранного стержня построим уравнение $\psi(x, y) = 0$ контура этого сечения в виде произведения уравнений сторон шестиугольника (см. рис. 21.6):

$$\begin{array}{ll} A_1 A_2 & 2B - x - \sqrt{3}y = 0, \\ A_2 A_3 & 2B + x - \sqrt{3}y = 0, \\ A_3 A_4 & 2B + x = 0, \\ A_4 A_5 & 2B + x + \sqrt{3}y = 0, \\ A_5 A_6 & 2B - x + \sqrt{3}y = 0, \\ A_6 A_1 & 2B - x = 0, \end{array}$$

так что в итоге получим

$$\psi(x, y) = (B^2 - x^2)((2B + x)^2 - 3y^2)((2B - x)^2 - 3y^2) = 0. \quad (21.23)$$

Уравнения сторон записаны таким образом, что при смещении точки внутрь шестиугольника левая часть уравнений становится положительной. Поэтому для любой внутренней точки шестиугольника $\psi(x, y) > 0$.

Примем допустимое распределение температуры в виде $T_2(M) = C_2\psi(x, y)$, $M(x, y) \in F$, и после его подстановки с учетом (21.23) в функционал (21.4) получим

$$\begin{aligned} J[T_2] &= \int_F \left(\frac{\lambda^{(T)}}{2} (\nabla T_2)^2 - q_V T_2 \right) dF = \\ &= \frac{\lambda^{(T)} C_2^2}{2} \int_F \left[\left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\ &- q_V C_2 \int_F \psi(x, y) dx dy \approx 42,72 C_2^2 \lambda^{(T)} B^{12} - 1,809 C_2 q_V B^8 = J_2. \end{aligned}$$

Из условия $\partial J[T_2]/\partial C_2 = 0$ найдем $C_2 \approx 0,0212 q_V / (\lambda^{(T)} B^4)$ и затем $J_2 = -0,0192 (q_V B^2)^2 / \lambda^{(T)}$. Тогда, согласно (21.10), получим уточненную нижнюю границу $\bar{T}'_- \approx 0,133 q_V B^2 / \lambda^{(T)}$ для средней температуры $\bar{T}$. Таким образом, «вилка», определяемая двусторонними оценками, стала более узкой.

Дальнейшее уточнение нижней границы для средней температуры можно получить, если представить распределение температуры в виде ряда

$$T(M) = \psi(x, y)(a_0 + b_1 x + c_1 y + a_{11} xy + b_2 x^2 + c_2 y^2 + \dots). \quad (21.24)$$

Степени x и y и их произведения образуют в данном случае полную систему функций, а наличие множителя $\psi(x, y)$ обеспечивает равенство нулю температуры по контуру поперечного сечения, т. е. распределение (21.24) является допустимым для функционала (21.4) при любых значениях коэффициентов a_0, b_1, c_1 и т. д. Вместо степенного ряда в (21.24) можно использовать тригонометрический ряд.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.

Ахиезер Н.Н. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 248 с.

Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 639 с.

Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 347 с.

Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.

Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 467 с.; Ч. 2. М.: Наука, 1966. 332 с.

Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели процессов теплопроводности. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 124 с.

Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.

Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.

Зарубин В.С., Селиванов С.С. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 358 с.

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с.

Коша А. Вариационное исчисление: пер. с венгер. М.: Высш. шк., 1983. 280 с.

Кротов В.Ф., Лагота Б.А., Лобанов С.М., Данилина Н.Н., Сергеев С.И. Основы теории оптимального управления. М.: Высш. шк., 1990. 429 с.

- Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: ГИТТЛ, 1953. 335 с.
- Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 296 с.
- Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Основы вариационного исчисления. Т. I, ч. II. М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1935. 400 с.
- Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: ГТТИ, 1957. 476 с.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
- Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551 с.
- Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. М.: Наука, 1974. 336 с.
- Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В.* Вариационное исчисление. Л.: КУБУЧ, 1933. 204 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
- Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
- Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.; Л.: ГТТИ, 1934. 600 с.
- Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
- Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению: пер. с англ. М.: Мир, 1974. 488 с.

Дополнительная литература

- Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998. 658 с.
- Болотин В.В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 336 с.
- Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления: пер. с англ. М.: Мир, 1972. 544 с.
- Ванько В.И.* Вариационные принципы и задачи математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 190 с.
- Ванько В.И.* Очерки об устойчивости элементов конструкции. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 224 с.
- Вариационные принципы механики: сб. / под ред. Л.С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. 932 с.

Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.

Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1985. 201 с.

Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.

Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.

Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.

Крылов А.Н. Собрание трудов. Т. 7: *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / пер. с лат. с примечаниями А.Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 696 с.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1943. 287 с.

Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1947. 464 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 903 с.

Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: ГТИ, 1955. 584 с.

Проблемы Гильберта: сб. / под ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969. 239 с.

Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: ГИФМЛ, 1962. 445 с.

Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГТИ, 1950. 428 с.

Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 468 с.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1953. 428 с.

Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1973.

Четаев Н.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367 с.

Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: пер. с англ. М.: Мир, 1979. 400 с.

Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.: Гостехтеоретиздат, 1958. 164 с.

Справочные издания и монографии

Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.

Александрова Н.В. Математические термины: справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: пер. с англ. М.: Наука, 1965. 458 с.

Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена: пер. с англ. М.: Энергия, 1975. 208 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 544 с.

Габасов Р., Кириллова М.Ф. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 184 с.

Коллатц Л. Задачи на собственные значения: пер. с нем. М.: Наука, 1968. 503 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Наука, 1973. 832 с.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: пер. с англ. Т. 1. М.; Л.: ГТТИ, 1934. 532 с.

Ланцош К. Вариационные принципы механики: пер. с англ. М.: Мир, 1965. 408 с.

Лернер А.Я., Розенман Е.А. Оптимальное управление. М.: Энергия, 1970. 358 с.

Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.

Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Энергия, 1977. 280 с.

Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.

Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 745 с.

Ректорис К. Вариационные методы в математической физике: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 590 с.

Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. М.: Наука, 1975. 576 с.

Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: ГТТИ, 1953. 240 с.

Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979. 559 с.

Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справ. рук. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1970. 192 с.

Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 238 с.

Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

Задачники

Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. 287 с.

Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (спец. разделы). Ч. 2. М.: Высш. шк., 1980. 290 с.

Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи. М.: УРСС, 2002. 166 с.

Сборник задач по математике для вузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: учеб. пособие / под ред. А.В. Ефимова. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1990. 304 с.

Периодические издания

Бернштейн Н.С. Об уравнениях вариационного исчисления // Успехи матем. наук. 1941. Вып. 8. С. 32–74.

Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов // ДАН СССР. 1956. Т. 110. № 1. С. 7–10.

Болтянский В.Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 3. С. 481–514.

Ванько В.И. О собственных частотах колебаний проводов воздушных ЛЭП // Изв. вузов. Сер. Энергетика. 1987. № 8. С. 7–12.

Гонор А.Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 1. С. 185–189.

Дейнеко К.С., Леонов М.Я. Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, № 6. С. 738–744.

Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянов К.С., Таковицкий С.А. Построение в рамках уравнений Эйлера головной части минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 6. С. 1017–1030.

Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 484–495.

Красносельский М.А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9, вып. 3 (61). С. 57–114.

Розоноэр Л.И. Принцип Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика, 1959. № 10, с. 1320–1334; № 11, с. 1441–1458; № 12, с. 1561–1579.

Слободянский М.Г. Оценка погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 4. С. 449–464.

Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 6. С. 1561–1580.

Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16, № 2. С. 129–149.

Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes // Zeitschrift angewandte Mathematik und Physik. 1952. Band 3. № 3. S. 225–228.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиомы скалярного умножения IV, 345

Базис стандартный IV, 152

– счетный IX, 348

Бифуркация 434

Брахистохрона II, 17

Вариация функции допустимая 26

– функционала 26

– вторая 143

– первая 26

Вектор управления 169

– фазовой скорости 173

– фазовый 168

Вектор-функция кусочно-непрерывная 170

Воздействие управляющее 169

Возмущение 195

Время свободное 210

Гиперплоскость 252

Гиперповерхность 253

Градиент функции V

Движение возмущенное 303

– лимитационное 180

– невозмущенное 303

– объекта 169

Действие по Гамильтону 393

Дифференциал полный VII, 46

– сильный (Фреше) 25

Дифференциал слабый (Гато) 26

Дополнение ортогональное IV

Задача Больца 134

– – элементарная 135

– вариационная 37

– – на условный экстремум 119

– – с подвижными границами 86, 90

Задача Больца с подвижными концами 86

– вариационного исчисления 42

– – – простейшая 42

– двухточечная 174

– изопериметрическая 127

– Лагранжа 121

– – в форме Понтрягина 181

– Майера 134

– Ньютона аэродинамическая 412

– о геодезических линиях 20

– о продольном изгибе 427

– оптимального управления линейная 169, 171

– оптимальной стабилизации 303

– синтеза оптимальных управлений 178, 179

– со свободным концом 173

– с подвижными (скользящими) концами 174

– стабилизации 302

– с фиксированным временем 258

– – фиксированными концами 173

– управления 173

– – многоточечная 174

– Штурма — Лиувилля XI, XII, 433

Закон движения 169

Значение собственное IV, 433

Интеграл Гильберта инвариантный 155

– Лебега IX

– первый системы ОДУ VIII, 61

Интегрант 28

Интервал времени управления 174

Комбинация линейная векторов III, IV

- Координаты фазовые 168
 Кривая гладкая II, 99
 – интегральная VIII, 61
 – фазовая 169
 Критерий интегральный квадра-
 тичный 175
 – – смешанный 176
 – качества 176
 – – интегральный 177
 – – энергетический 178
 – конечного состояния 177
 – оптимального быстрого дейст-
 вия 177
 Лагранжиан 123
 Лемма вариационного исчисления
 основная 33
 – Дюбуа-Реймона 35
 – Лагранжа 33
 Линия геодезическая V, 20
 – переключений 248
 Максимум сильный 31
 – слабый 31
 Матрица Гессе V, 60
 – Грама IV, 367
 – диагональная IV
 – невырожденная III
 Метод динамического программи-
 рования 275
 – конечных элементов XIII, 359
 Метод Куранта 359
 – множителей Лагранжа 128
 – наименьших квадратов XIII,
 358
 – Ритца XIII, 352
 Методы прямые XIII, 308
 Минимум сильный 31
 – слабый 31
 – строгий 31
 Многообразие линейное IX, 317
 Множество всюду плотное IX, 316
 – выпуклое XIV, 335
 – замкнутое I-186, 363
 – измеримое IX, XIII, 311
 – компактное I-189, XIII, 364
 – – по энергии 364
 – (лебеговой) меры нуль IX, 312
 – ограниченное I-183, 363
 – предкомпактное 363
 – управлений допустимых 170
 Множители Лагранжа 123
 Модель математическая XX, 171
 Наклон поля экстремалей 153
 Невязка 349
 Неравенство треугольника IV, 336
 Норма IV, IX, 23
 – евклидова IV, 311
 – ограниченного оператора 360
 – энергетическая XIII, 345
 Нормаль внешняя V,
 Область определения операто-
 ра XIII, 311
 – управления 170
 – управляемости 251
 Оболочка линейная системы век-
 торов IV, 367
 Объект детерминированный 168
 – управляемый 167
 Ограничение на управление 170
 – – фазовые координаты 169
 – фазовое 169
 Ограничения фазовые 120
 Оператор XIII, 310
 – Гамильтона VII, 320
 – действующий в линейном про-
 странстве 314
 – компактный (вполне непрерыв-
 ный) 364
 – Лапласа XII, 316
 – линейный IV, XIII, 316
 – – дифференциальный XI, 316
 – неотрицательный 362
 – ограниченный 360
 – – снизу 361
 – положительно определен-
 ный XIII, 317
 – положительный XIII, 317
 – самосопряженный IV
 – симметрический XIII, 317
 – тождественный IV, 366
 – Штурма — Лиувилля XI, 364
 Параллелепипед r -мерный 236
 Параметр управляющий 170
 Переключение 224
 Переменные канонические 60
 – сопряженные 213
 Поверхность V
 Подпоследовательность I-243, 361
 Подпространство собственное опе-
 ратора IV, 363

- Поле экстремалей 153
- Пополнение нормированного (евклидова) пространства XIII, 314
- Последовательность минимизирующая 344
- сходящаяся поточечно IX, 312
 - сходящаяся равномерно 313
 - фундаментальная 315
- Принцип взаимности 133
- Гамильтона 391
 - двойственности 133
 - максимума 208
 - оптимальности 275
- Произведение скалярное энергетическое XIII, 345
- Производная функции полная в силу системы VIII, 62
- – по направлению V, 319
- Пространство банахово IX, 24
- гильбертово IX, 24
 - – сепарабельное IX, 348
 - евклидово арифметическое IV
 - нормированное IV, IX, 22
 - – полное IX, 311
 - фазовое 169
 - функциональное 311
 - энергетическое XIII, 346
- Процесс допустимый 168
- локально оптимальный 203
 - оптимальный 175
 - ортогонализации Грама — Шмидта IV
- Режим особый 266
- Решение операторного уравнения классическое 348
- – – обобщенное 348
 - – – приближенное 349
- Ряд Фурье IX, 349
- Связи голономные 120
- дифференциальные 120
- Связи интегральные (изопериметрические) 120
- Связь обратная 244
- Синтез управления 244
- Система векторов линейно независимая IV
- гамильтонова 188
 - (ОДУ) автономная VIII
 - сопряженная 196
- Система управляемая 167
- – линейная 200
 - уравнений Эйлера 53
 - условий полная 123
 - функций ортонормированная IX, 348
 - Якоби 151
- Скобка Пуассона 62
- Соотношение Беллмана рекуррентное 280, 283
- Состояние начальное 172
- фазовое 168
- Стабилизация оптимальная в целом 304
- Сужение функционала (отображения) 200
- Сходимость в среднем квадратичном IX, 312
- по энергии 345
- Теорема Бюдана — Фурье 423
- о квадратичном функционале XIII, 321
 - – неявной функции V
- Точка возврата 421
- переключения 236
 - сопряженная 149
 - стационарная функционала 41
 - угловая I, 96
 - фазовая (изображающая) 169
 - экстремума функционала 31
- Траектория оптимальная 175
- Траектория фазовая 169
- – соответствующая управлению 173
- Управление 171
- допустимое 173
 - оптимальное 178
 - – по быстродействию 178
 - особое 265
 - программное 244
 - экстремальное 239
- Управляемость системы 199
- Уравнение Беллмана 289
- вариационное 322
 - – голономное 322
 - Лапласа XII, 59
 - линейного приближения VIII
 - операторное XIII, 314
 - Остроградского 59
 - Пуассона XII, 317

- Уравнение Эйлера 43
- Эйлера — Пуассона 56
 - Якоби 150
- Уравнения возмущенного движения 196
- первого приближения 197
 - Эйлера задачи Лагранжа 128
 - — изопериметрической задачи 129
- Условие краевое естественное 88
- Лежандра 150
 - — усиленное 150
 - начальное VIII, 172
 - общности положения 231
 - отражения 98
 - преломления 101
 - сильного минимума достаточное 158
 - слабого минимума достаточное 150
 - трансверсальности 95
 - экстремума функционала необходимое 43
 - Якоби 150
 - — усиленное 150
- Условия Вейерштрасса — Эрдмана 102
- связи 119
- Участок особого управления (режима) 268
- Форма билинейная IV, 143**
- каноническая уравнений Эйлера 61
- Формула Грина VII, 58
- — вторая VII, 319
 - — первая VII, 320
 - Остроградского — Гаусса VII, 333
- Формулировка прикладной задачи вариационная 322
- Функционал альтернативный 373
- билинейный 143
 - вспомогательный 123
 - выпуклый 335
 - — строго 336
 - вырожденный 46
 - дважды дифференцируемый в точке 143
- Функционал Дирихле 377
- дифференцируемый в точке 25
 - квадратичный 143, 321
 - — неотрицательно определенный 143
 - — положительно определенный 143
 - — сильно положительный 145
 - Лагранжа 375
 - линейный 23
 - непрерывный в точке 25
 - терминальный 177
 - целевой 119
 - целевой интегральный 135
 - — смешанный 135
 - — терминальный 135
 - энергии XIII, 345
- Функция аналитическая X, 238
- Беллмана 284
 - Вейерштрасса 159
 - Гамильтона 60
 - допустимая 21
 - измеримая IX, XIII, 312
 - комплексного переменного X, 237
 - кусочно-гладкая 101
 - Лагранжа 123
 - Понтрягина 188
 - пробная 34
 - синтезирующая 178
 - суммируемая с квадратом IX, 23
 - — — — и весом IX, 312
- Цель управления 169
- Экстремаль 43**
- включенная в поле экстремалей 153
 - задачи Лагранжа 123
- Экстремум сильный 30
- слабый 30
 - условный V, 129
- Элемент оператора собственный XIII, 359
- ε -окрестность сильная 24
- слабая 24

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	9
ЧАСТЬ I. Классическое вариационное исчисление	13
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	15
1.1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам	15
1.2. Основные определения	21
1.3. Основные леммы вариационного исчисления	33
1.4. Некоторые замечания о задачах вариационного исчисления	37
Вопросы и задачи	40
2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЦАМИ	42
2.1. Простейшая задача вариационного исчисления	42
2.2. Функционалы от нескольких функций	52
2.3. Функционалы с производными высшего порядка	54
2.4. Функционалы от функций многих переменных	57
2.5. Канонический вид уравнений Эйлера	59
2.6. Инвариантность формы представления уравнения Эйлера	62
2.7. Простейшая задача в параметрической форме	67
2.8. Принцип Гамильтона. Интеграл энергии	77
Вопросы и задачи	80
3. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ	86
3.1. Задача с подвижными концами	86
3.2. Задача с подвижными границами	90
3.3. Экстремали с угловыми точками	96
3.4. Задача с подвижными границами в пространстве	103
3.5. Задачи с односторонними вариациями	109
Вопросы и задачи	115
4. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ	119
4.1. Основные типы задач на условный экстремум	119
4.2. Необходимые условия в задаче Лагранжа	121
4.3. Необходимые условия в изопериметрической задаче	127
4.4. Примеры задач на условный экстремум	130
4.5. Принцип взаимности в изопериметрических задачах	133
4.6. Задача Больца и задача Майера	134
Вопросы и задачи	139

5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА	142
5.1. Слабый экстремум.....	142
5.2. Условие Якоби.....	153
5.3. Инвариантный интеграл Гильберта.....	155
5.4. Сильный экстремум.....	158
Вопросы и задачи.....	162
ЧАСТЬ II. Оптимальное управление	165
6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ	167
6.1. Постановка задач оптимального управления.....	167
6.2. Задача Лагранжа в форме Понтрягина.....	181
6.3. Некоторые задачи с ограничениями в классическом вариационном исчислении.....	189
6.4. Линейные задачи оптимального управления.....	196
6.5. Обсуждение методов вариационного исчисления.....	200
Вопросы и задачи.....	207
7. ПРИНЦИП МАКСИМУМА	208
7.1. Автономная система управления. Формулировка принципа максимума.....	209
7.2. Обсуждение принципа максимума.....	216
7.3. Задача быстрогодействия.....	221
7.4. Линейная задача оптимального быстрогодействия.....	231
7.5. Задача синтеза управления.....	244
7.6. Задача с подвижными концами.....	252
7.7. Неавтономные системы.....	256
7.8. Понятие особого управления.....	265
Вопросы и задачи.....	272
8. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	275
8.1. Принцип оптимальности.....	275
8.2. Уравнение Беллмана.....	283
8.3. Уравнение Беллмана в задаче быстрогодействия.....	294
8.4. Связь метода динамического программирования с принципом максимума.....	299
8.5. Оптимальная стабилизация.....	302
Вопросы и задачи.....	306
ЧАСТЬ III. Прямые методы вариационного исчисления	307
9. ФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ	309
9.1. Операторное уравнение.....	310
9.2. Вариационное уравнение.....	322
9.3. Примеры построения функционала по вариационному уравнению.....	326
9.4. Исследование выпуклости функционала.....	335
Вопросы и задачи.....	342
10. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ	344
10.1. Минимизирующие последовательности.....	344
10.2. Методы приближенного решения вариационных задач.....	351

10.3. Собственные значения симметрического оператора	359
10.4. Приближенное решение задачи на собственные значения	366
Вопросы и задачи	371
11. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ.....	372
11.1. Альтернативные функционалы.....	372
11.2. Построение альтернативного функционала	375
11.3. Оценка погрешности приближенного решения	381
Вопросы и задачи	387
ЧАСТЬ IV. Приложения вариационных методов	389
12. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА.....	391
13. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ	396
14. КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ	399
15. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ	404
16. ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА	409
17. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЬЮТОНА	412
18. ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ	427
18.1. Действие потенциальной силы.....	427
18.2. Действие следящей силы	436
18.3. Динамический подход	438
19. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ЛАГРАНЖА, РЕЙССНЕРА И КАСТИЛЬЯНО.....	444
20. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ	459
21. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ В ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	467
Рекомендуемая литература	476
Предметный указатель	482