МАТЕМАТИКА
и реальность

Труды
Московского
семинара
по философии
математики

Lomonosov Moscow State University
Faculty of Philosophy

MATHEMATICS and reality

Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics

Edited by
Valentin A. Bazhanov, Anatoly N. Krichevets, Vladislav A. Shaposhnikov

Moscow
University Press
2014

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Философский факультет

МАТЕМАТИКА и реальность

Труды Московского семинара по философии математики

Под редакцией
В. А. Бажанова, А. Н. Кричевца,
В. А. Шапошникова

Издательство
Московского университета
2014

УДК 1:001; 001.8
ББК 87; 22.1; 22.3
М34

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-06-06076.

Математика и реальность. Труды Московского семинара по
М34 философии математики / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. — М.: Издательство Московского университета, 2014. — 504 с.

ISBN 978-5-19-010959-7

Очередной тематический том трудов Московского семинара по философии математики подготовлен по итогам Третьей всероссийской конференции «Философия математики: актуальные проблемы», прошедшей 27–28 сентября 2013 г. на философском факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. Приоритетная тема конференции 2013 года — «Математика и реальность».

Для философов и историков математики и физики, а также для философов, логиков, математиков, психологов, преподавателей, ведущих аспирантский курс по истории и философии науки, аспирантов и студентов математических и естественно-научных специальностей.

Ключевые слова: философия математики, философия физики, онтология, реализм, платонизм, антиреализм, применимость математики, математизация, «непостижимая эффективность математики».

УДК 1:001; 001.8
ББК 87; 22.1; 22.3

Mathematics and Reality: Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics / Edited by Valentin A. Bazhanov, Anatoly N. Krichevets, Vladislav A. Shaposhnikov. — Moscow: Moscow University Press, 2014. — 504 p.

Moscow Philosophy of Mathematics Seminar's sixth Collection of papers grew out of the 3rd Conference "Philosophy of Mathematics: Actual Problems" which was held in Lomonosov Moscow State University (Faculty of Philosophy) on September 27/28 2013. The 2013 meeting was focused on "Mathematics and Reality".

This book may be of interest to philosophers and historians of mathematics and physics, as well as to logicians, mathematicians, psychologists, postgraduate and PhD students in all areas of mathematics and natural sciences.

Key words: philosophy of mathematics, philosophy of physics, ontology, realism, Platonism, antirealism, the applicability of mathematics, mathematization, "unreasonable effectiveness of mathematics".

ISBN 978-5-19-010959-7

© МГУ имени М.В. Ломоносова, 2014
© Издательство Московского университета, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга «Математика и реальность» — шестая в серии трудов Московского семинара по философии математики. Семинар работает с 1987 г., когда был организован на кафедре философии естественных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова Алексеем Георгиевичем Барабашевым. Все эти годы активно участвуют в работе семинара В.Я. Перминов, Г.Б. Гутнер, А.Н. Кричевец, В.А. Шапошников, в последние годы заметный вклад в его работу делают Е.В. Косилова, Л.И. Маневич, А.И. Липкин, А.В. Чусов и другие.

Выпускаемые семинаром сборники — тематические. Написанию статей предшествуют обсуждения темы будущего сборника на семинарах и конференции. Нынешний сборник включает расширенные и переработанные доклады участников конференции по философии математики, прошедшей на философском факультете МГУ имени М.В. Ломоносова в сентябре 2013 г. Основная тема конференции и служит названием нашей книги.

Сборник не является монографией с согласованными и структурированными разделами, здесь высказываются иногда даже противоположные взгляды на обсуждаемые вопросы. Мы, редакторы сборника, все же видим его единство в том, что авторами выявлены главные проблемы по заявленной теме отношений математики и реальности и предъявлены разнообразные аргументы в пользу и против основных позиций, которые могут быть заняты по отношению к этим проблемам. Каковы же эти проблемы и эти позиции?

Первая позиция, которая разделяется практически всеми авторами: вопрос о применимости математики в естествознании чрезвычайно важен и интересен для современной философии математики (но и не только для нее). Вводная статья В.А. Шапошникова дает экспозицию современного состояния интересов сообщества философов математики, где вопрос применимости математики характеризуется как приобретающий все большую важность. Читатель и сам может за-

метить, что наиболее часто цитируемая авторами статей сборника работа — это яркая статья Ю. Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках».

Вокруг эффективности и непостижимости и ведется одна из основных дискуссий в сборнике. Одни авторы решительно поддерживают позицию Вигнера (Вл.П. Визгин, дающий к тому же очень обстоятельную экспозицию проблемы, а также А.Н. Кричевец), другие ставят под вопрос непостижимость (А.А. Григорян, указывающий на важную роль «доводки» математических понятийных структур под влиянием запросов со стороны физики) и даже отчасти эффективность (А.И. Липкин, утверждающий, что Вигнер переоценивает роль математики, поскольку упускает из виду основной слой физических представлений — слой идеальных объектов). Для обоих авторов ошибка Вигнера связана с упущением важного опосредующего звена между математикой и физикой. Также на непростой и непрямолинейный характер взаимодействия математики и физики указывает Л.И. Маневич: принятые математические формализмы могут тормозить развитие физических идей и даже признание эмпирических фактов.

Вторая тема касается онтологического статуса математических объектов. Важнейшая оппозиция задана авторами двух помещенных рядом статей — В.Я. Перминовым и З.А. Сокулер. Первый утверждает, что первичные математические понятия, представляющие арифметику и евклидову геометрию, априорны, реальны и жестко заданы. Однако его версия «платонизма» далеко уходит от наивной трактовки существования математических объектов. Математика не исследует и открывает объекты, существующие где-то вне чувственно воспринимаемого мира, а задает условия возможности самой предметной человеческой деятельности. Что касается «вторичной», более сложной математики, то она имеет только «возможную эмпирическую значимость», т.е. может подтверждаться (или не подтверждаться) своими приложениями.

«Антиреалистическую» позицию занимает З.А. Сокулер. Обсуждая (как мне кажется, с сочувствием) позицию Л. Витгенштейна, она указывает на то, что значение математических предложений (тем самым и входящих в них понятий) не является контекстно независимым. Оно определяется той практикой (языковой игрой), в которую предложение включено, а подобные практики могут изменяться и проясняться. Прояснение может осуществляться с помощью философских рассуждений (в чем Витгенштейн и видит свою задачу).

Отмечу, что приводимые З.А. Сокулер аргументы Витгенштейна касаются «вторичной» (по Перминову) математики, а в чем именно

заключается изменение базовых, относящихся к первичному слою понятий в процессе развития вторичной математики, в этих рассуждениях не раскрыто. Во-первых, это значит, что позиция В.Я. Перминова этими рассуждениями не затронута. Во-вторых, одно дело, если это изменение значений есть некое бессистемное следствие изменения общественных вкусов или, например, моды или иных подобных обстоятельств, которые еще можно считать хотя бы относительно произвольными конвенциями. Другое дело, если в самом развитии понятий действует некое переплетение необходимых тенденций и случайных обстоятельств (в этой перспективе, мне кажется, видит наш предмет в своей статье С.Н. Бычков).

Безусловно, мы нуждаемся в третьем пути (между реалистами и антиреалистами). О третьем пути прямо пишет в своей статье В.А. Бажанов. Опираясь на работы М. Резника, он говорит об особом статусе математических объектов, существующих лишь как априорные возможности математических структур (детерминированные «механизмами репрезентации внешней реальности», с одной стороны, и особенностями телесной (в первую очередь мозговой) организации человека). Актуализация же этих структур происходит в историческом развитии культуры и в связи с ее состоянием и запросами.

На первый взгляд, похожую точку зрения высказывает А.В. Чусов, заканчивающий статью словами: «Математика как практически реализуемая объективация познания есть моделирование возможных онтологий». Однако понятийный фон этого утверждения существенно иной. Ключевым для понимания концепции словом является «объективация»: это превращение идеальной структуры мысли в «относительно самостоятельный, активный фрагмент мира». Существование объектов-в-себе Чусов выводит за скобки. Рискну резюмировать его позицию так: объективации регионов (в смысле Гуссерля) «реальных объектов» человеческой практики могут предшествовать объективации их возможных структур, осуществляемые математикой. С.Н. Жаров высказывает сходную позицию: «Если говорить о математике как о системе возможных математических миров (и соответствующих им связей), то мы имеем поистине сверхсубъективный универсум, который не зависит ни от человека, ни от культуры», а «истоки математических форм находятся на уровне умопостигаемого бытия. Там же берут начало интуиции современной теоретической физики». Таким образом, С.Н. Жаров подчеркивает предзаданность возможных математических форм и их согласованность с формами физических теорий.

Можно следующим образом суммировать результаты по указанным двум темам:

(1) Можно считать, что вся совокупность возможных форм математического мышления заранее предопределена. На долю истории остаются в таком случае лишь акценты: актуализация тех или иных форм прежде других. Те же математические формы неустранимым образом участвуют и в физических теориях, которые согласуются с экспериментальными данными и позволяют создавать практические приложения. Нет смысла называть такую позицию «реализмом», поскольку способ бытия (а) математических форм, (б) физических теорий и референтов их переменных, (в) экспериментальных данных и (г) использующих достижения наук социально значимых технологий и их результатов — не обязательно должен быть унифицирован, а скорее, и не может быть унифицирован[1]. Таким образом «реальность» подразделяется на регионы, в которых существование должно пониматься по-разному, однако не вызывает сомнение их взаимодействие и согласованность. Я не вижу возможности оспорить тезис Вигнера о непостижимости этой согласованности, если не вводится некоторая объемлющая все роды/регионы сущего онтология, в которой роды/регионы займут свое место в общей структуре, а их зависимости будут явно описаны и тем самым демистифицированы. Такой онтологии авторы статей не предъявляют, и для буквального «реализма» не остается места в нашем сборнике.

Однако с этой изложенной выше позиции не может быть прояснен статус ошибок того рода, который описан в статье Л.И. Маневича. Также без ответа остается критика со стороны Витгенштейна (Сокулер), указывающая на непостоянство значений математических терминов.

(2) Антиреалистическая позиция представлена в статье З.А. Сокулер — в непрямом виде, так сказать, не от первого лица (моя оценка отношения автора к излагаемому материалу как сочувствующего — не более чем мнение литературного критика). С этой точки зрения математика зависит от тех или иных внешних для нее форм существования, а придание ее объектам онтологического статуса является незаконным гипостазированием.

Вигнеровская непостижимая эффективность ставит перед такой позицией трудную задачу, поскольку математический символизм оказывается существенным средством описания физических явле-

[1] Здесь уместно упомянуть статью А.Ю. Цофнаса, который предлагает различать натуральную, динамическую и структурную онтологии. Он подчеркивает, что число не имеет отношения к онтологиям первых двух типов, поэтому математики всегда могут прийти к согласию относительно значимости доказательств и теорий в целом, даже если они занимают существенно различные позиции по отношению к проблеме онтологического (натурального и динамического) смысла математических понятий.

ний, их предсказания и конструирования. Вещи здесь «дают сдачи», как писал по поводу социальной редукции науки Бруно Латур. Физические процессы не могут подчиняться конвенции.

Отмечу еще статью В.Э. Тереховича, который, отталкиваясь от вариационных принципов, утверждает, что возможные состояния систем существуют в особом модусе: «Виртуальные движения, мыслимые нашим сознанием, это не плод нашего воображения, а отражение существующих возможностей». Не берусь сейчас точнее связать так понимаемую возможность с вопросом о возможных онтологиях в статьях Чусова и Жарова, однако мне кажется, что некоторые перспективы у сближения этих тем имеются.

Перейду теперь к другим важным темам. В статье Е.В. Косиловой развивается тема двойственности математики — с одной стороны, математика служит языком для «книги природы», т.е. обладает избыточной выразительностью по отношению к физическим гипотезам; с другой стороны, она сама является самостоятельным нечто, что может описываться метаязыком. На эту роль подходит логика. Двойственность математики как языка является также одной из тем статьи И.Д. Невважая. Он указывает, что этот язык, имеет взаимодополнительные функции: «функцию именования (и замещения вещи знаком) и функцию указания знака. Соответственно, знак либо вторичен по отношению к своему значению (в функции замещения), либо первичен (в функции указания как определении значения)». Общим для двух статей является то, что математика определяет самостоятельную сферу значений наряду с означиванием физического мира.

Замыкает раздел статья Г.Б. Гутнера. Автор утверждает, что достоверность постулатов естественнонаучной теории невозможно установить, рассматривая их как изолированные высказывания и ожидая от них очевидности. Достоверность обнаруживается в рамках целостной, системной деятельности обоснования и применения теории. Автор выделяет три уровня такой деятельности: уровень теоретических постулатов и теории как системы положений, уровень следствий и их экспериментальных подтверждений и уровень практических употреблений. Автор далее замечает, что для математических теорий ситуация несколько отличается: только первый уровень остается тем же, второй составляют протоматематические схемы предметной практики, третий — те же эмпирические схемы, но сложные и неочевидные.

Несколько статей посвящены применению математики вне и до того замечательного синтеза, который соединил математику и физику. Первая статья, написанная коллективом авторов (Г.Я. Красников, Е.С. Горнев, И.В. Матюшкин), посвящена техническому моделиро-

ванию в областях высоких технологий. Авторы описывают стандартное разделение функций в профессиональном труде моделирования и подчеркивают, что характер произведенного продукта зависит от уровня взаимопонимания акторов. В настоящее время построение моделей осуществляется с помощью готовых программных средств — специальных пакетов, и это приводит к появлению еще одного участника — программиста. Его роль часто недооценивается, да и сам он вряд ли осознает, пишут авторы, что косвенно он, действуя из консоли или в интерфейсных окнах, творит математическую модель — через выбор нужных ему экземпляров фундаментальных уравнений и т.п. Мне кажется, что проблема коллективной деятельности, в особенности в ситуациях применения не до конца понимаемых программных средств, фактически во многом предопределяющих конечный результат, становится все более важной и даже тревожащей в настоящее время.

А.Г. Барабашев пишет о применении математики в различных сферах государственного управления. Он указывает, что «спецификой абстрактных объектов научных направлений, изучающих сложные уникальные системы, выступает их двоякость (амбивалентность), в которую объект привносит условия нашего действия, себя и свои ценности, а само действие накладывает на внешние условия требования достичь цели и возможности вариативного исполнения». Объекты исследования наук об управлении являются субъектами собственных действий и этим существенно отличаются от объектов наук о природе. Воздействие на такие «объекты» включает аргументы, разъяснения, призывы и т.п. Выводы А.Г. Барабашева таковы: математика в этих областях «не язык, а один из аргументов в выборе лучшего действия, шире, в выработке субъективной оценки ситуации. Математические модели оценивают не истинность, а допустимость действия. Они помогают оправдать действие... Современная теоретическая математика, базовые разделы ее “ядра” для научных направлений, связанных с изучением сложных уникальных систем, не работают».

А.А. Крушинский в своей статье обращает наше внимание на то, что в китайской культуре «предметами математизации [...] оказываются столь нетрадиционные для привычной нам математики феномены как, например, сюжеты, эмоции, образы, межсубъектные взаимодействия, социальные нормы, управленческие действия, и т.д.»... По его мнению, «китайский панматематизм предопределен ярко выраженной композициональностью китайской идеографии», т.е. тем обстоятельством, что китайское иероглифическое письмо строится на взаимодействии пространственно соединенных единиц. Резюмирую его мысль так: поскольку геометрическое сочленение имеющих зна-

чение элементов письменной речи служит для собирания цельного смысла слов (иероглифов), постольку и математизация речи, построенной из таких иероглифов (для широкого круга тем этой речи), происходит легче, чем в языках, где слова складываются из букв, которые сами по себе не имеют значения.

Четвертая статья этого раздела принадлежит Е.А. Зайцеву. Добротное (как всегда у этого автора) историческое исследование показывает, что интенсивные количества вошли в западную культуру через богословие. Первыми шагами, например, было введение Августином понятий «*количество* добродетели/силы» и «*увеличение* милосердия». Для античных авторов такие обороты были неприемлемы. Автор прослеживает далее судьбу развивающихся понятий, связанных с интенсивными количествами.

Наконец, последний раздел посвящен проблемам, связанным с логикой. В большой статье С.Л. Катречко проводится последовательный анализ подходов к пониманию математической абстракции. Вывод автора таков: «Математические абстракции/предметы являются не аналогами (или "копиями") физических объектов, а созданными нашим сознанием [трансцендентальными] особыми "ключами", посредством которых мы можем "вскрывать" замки природы (проблема соответствия) и, тем самым, адекватно познавать ее».

В статье В.Х. Хаханяна разбираются достижения математической логики последних лет и показывается, что обойти вторую теорему Геделя по-прежнему не удается. Автор резюмирует: «Математика существует не менее трех тысячелетий и возникающие в ней проблемы и потрясения решаются по мере их поступления и дальнейшего осмысления работающими в ней математиками. Вопросы же обоснования являются философскими вопросами и должны быть "решены" именно с философской точки зрения. Краеугольным камнем такой точки зрения является **вера в устойчивость здания математической науки**, которая поддерживается в нас уже три тысячелетия».

Е.В. Щепин рассуждает о роли строгости в преподавании математического анализа студентам инженерных специальностей. Его предложение — не считать, что строгость обоснования анализа есть наиболее важная составляющая освоения анализа этими студентами. Напротив, гораздо важнее операциональная составляющая математических понятий. По мнению автора, анализ XVIII в. содержит наилучшие образцы подходов, которые и могут дать необходимый таким студентам уровень освоения анализа.

В статье С.М. Кусковой с позиций ультраинтуиционизма проблематизируется понятие натурального ряда. Вслед за А.С. Есенин-Вольпиным автор отказывается от понятия потенциальной бесконеч-

ности и показывает, какие проблемы возникают, если использовать более ограниченные средства — осуществимости.

В заключение отмечу стоящую особняком по отношению к общим темам сборника, но интересную и точную статью С.С. Минкова, в которой критикуется понятие вероятности (истинности) суждения. В частности в статье показано, что байесовский подход неприменим иначе чем в метафорическом смысле, если не известны априорные вероятности событий, а в рассматриваемых случаях вероятности истинности суждений оценки этих вероятностей никогда не могут быть получены.

А.Н. Кричевец

Раздел
0

ВВОДНЫЙ

В.А. Шапошников

ФИЛОСОФИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ: КОНФИГУРАЦИЯ ОСОБОЙ ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ?

В последние годы в рамках исследований по философии математики наметилась явная тенденция уделять особое внимание теме «математика и реальность». Такое наименование представляется мне наиболее общим, хотя, как мы увидим далее, у этого тренда пока еще нет одного общепринятого названия.

О наличии названной тенденции свидетельствует, например, книга «Философия математики: 5 вопросов» (2008), составленная из ответов на вопросы анкеты, которые дали двадцать восемь известных специалистов в области философии математики из разных стран мира. Последний из этих вопросов звучал так: «Какие открытые проблемы в философии математики представляются вам наиболее важными, и каковы перспективы развития в данной области?» Наиболее четко интересующую нас позицию высказал австралийский философ Марк Коливан: *применения математики* (the applications of mathematics) названы им «той темой, которая была в пренебрежении, но теперь стала одной из центральных (one of the main foci) в современной философии математики». «Проведенная в последнее время работа по приложениям, — продолжает Коливан, — <...> в результате дала то, что может даже рассматриваться как новая область — философия прикладной математики (the philosophy of applied mathematics)». Он приветствует новую ситуацию, в которой философы математики перестали ограничиваться чистой математикой и ее основаниями, и то, что «работа над применениями <математики> теперь в самом деле идет полным ходом и образует важную линию (a significant thread) в современной философии математики»[1].

Отвечая на тот же вопрос анкеты, британский философствующий математик Брайан Дэвис написал: «Первая такая проблема состоит в том, что для многих философов математика означает <главным образом> чистую математику, а прикладная математика и ее естественно-

[1] Philosophy of Mathematics: 5 Questions / Ed. by V.F. Hendricks and H. Leitgeb. Automatic Press / Vince Inc. Press, 2008. P. 79–80.

научные применения расцениваются как имеющие меньшее значение. Вторая проблема состоит в деперсонализации предмета изучения, который часто рассматривается не как деятельность математиков, но как абсолютная сущность, которая должна изучаться без обращения к истории или применениям к миру природы. Это безобидно для математика, но делает философский анализ нашего предмета более или менее невозможным»[1].

Как видим, Дэвис не просто причисляет проблематику приложений математики к важным, но ставит *всякий* философский анализ математики, претендующий на адекватность, в прямую зависимость от учета и должной разработки этой проблематики. Под приведенными словами Дэвиса я также готов подписаться.

Справедливости ради следует отметить, что подавляющее большинство авторов, принявших участие в этом анкетировании, либо упоминает проблему приложений далеко не на первом месте, либо вообще не уделяет ей внимания. И все же определенная тенденция налицо.

Ниже мы увидим, что в последнее время действительно наметился круг авторов, уделяющих особое внимание нашей проблеме, а иногда и считающих ее центральной для философии математики. Более того, в интересующей нас области уже обозначился ряд знаковых текстов и сложился список «классических» авторов.

Проблема Ю. Вигнера

Одним из важнейших знаковых текстов для нашей области стал доклад известного американского физика, лауреата Нобелевской премии, Юджина Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках», сделанный 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете[2]. В результате словосочетание «непостижимая эффективность математики (the unreasonable effectiveness of mathematics)» стало крылатым, а сам доклад породил[3], да и до сих

---

[1] Ibid. P. 96.

[2] См.: *Wigner Eugene*. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math. Vol. 13. N 1 (Feb. 1960). P. 1–14. Переиздан: *Wigner E.* Symmetries and Reflections. Bloomington & London: Indiana University Press, 1967. Русский перевод: *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Пер. В.А. Белоконя и В.А. Угарова // Успехи физических наук. Т. 94. Вып. 3 (Март 1968). С. 535–546. Другой перевод (Ю.А. Данилова) с тем же названием: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182–198.

[3] *Hamming Richard W.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics // The American Mathematical Monthly. Vol. 87. N 2 (Feb. 1980). P. 81–90; *Steen Lynn Arthur.* The Science of Patterns // Science. Vol. 240 (29 April 1988). P. 611–616; Math-

пор продолжает порождать[1], многочисленные реакции и отклики, как со стороны ученых, так и со стороны философов. Несколько статей было написано также в связи с применимостью (или неприменимостью) тезиса Вигнера к различным конкретным областям научного знания за пределами физики[2].

---

ematics and Science / Ed. by Ronald E. Mickens. Singapore: World Scientific, 1990; *Steiner Mark*. The Application of Mathematics to Natural Science // The Journal of Philosophy. Vol. 86. N 9 (Sep. 1989). P. 449–480; *Steiner Mark*. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.

[1] Например: *French Steven*. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics // Synthese. Vol. 125 (2000). P. 103–120; *Wilson Mark*. The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences // Monist. Vol. 83. N 2 (2000). P. 296–394; *Colyvan Mark*. The Miracle of Applied Mathematics // Synthese. Vol. 127. N 3 (June 2001). P. 265–277; *Визгин Вл.П.* «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н. Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123–141; *Longo Giuseppe*. The Reasonable Effectiveness of Mathematics and Its Cognitive Roots // Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. World Scientific, 2005. P. 351–382; *Dorato Mauro*. The Laws of Nature and the Effectiveness of Mathematics // Boniolo G., Budinich P., Trobok M. (eds.) The Role of Mathematics in Physical, Interdisciplinary and Philosophical Aspects. Dordrecht: Springer, 2005. P. 131–144; *Sarukkai Sandar*. Revisiting the "Unreasonable Effectiveness" of Mathematics // Current Science. Vol. 88. N 3 (Feb. 2005). P. 415–422; *Maddy Penelope*. The "Miracle" of Applied Mathematics // Maddy P. Second Philosophy: A Naturalistic Method. New York: Oxford University Press, 2007. Section IV.2.iii (p. 329–343); *Grattan-Guinnesse Ivor*. Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // The Mathematical Intelligencer. Vol. 30. N 3 (Summer 2008). P. 7–17; *Plotnitsky Arkady*. On the Reasonable and Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Classical and Quantum Physics // Foundations of Physics. Vol. 41. N 3 (Mar. 2011). P. 466–491; *Omnès Roland*. Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited // Foundations of Physics. Vol. 41. N 11 (Nov. 2011). P. 1729–1739; весь номер Interdisciplinary Science Reviews. Vol. 36. N 3 (Sep. 2011): Unreasonable Effectiveness of Mathematics / Guest ed. Steve Russ. P. 209–267, включающий, помимо редакционной, статьи следующих авторов: Jeremy Gray, Jesper Lützen, Patrick Suppes, Alan Baker; *Harvey Alex*. The Reasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences (Dec. 2012) http://arxiv.org/pdf/1212.5854.pdf

[2] Например: *Lesk Arthur*. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Molecular Biology // The Mathematical Intelligencer. Vol. 22. N 2 (2000). P. 28–36; *Lesk Arthur*. Compared to What? // Ibid. Vol. 23. N 1 (2001). P. 4; *Velupillai Vela K*. The Unreasonable *In*effectiveness of Mathematics in Economics // Cambridge Journal of Economics. Vol. 29. N 6 (Nov. 2005). P. 849–872; *Ginzburg L., Jensen Ch., Yule J*. Aiming the "Unreasonable Effectiveness of Mathematics" at Ecology Theory // Ecological Modelling. Vol. 207 (2007). P. 356–362; *Colyvan Mark*. The Undeniable Effectiveness of Mathematics in the Special Sciences (manuscript), http://www.colyvan.com/papers/uemss.pdf

Многие физики и математики говорили сходные вещи[1], но именно Вигнеру посчастливилось создать opus classicus на эту тему. Его доклад дал образец восприятия взаимоотношения математики и физики, как оно сложилось в первой половине XX века.

Понятия и теории современной чистой математики предстают для этого подхода как живущие в значительной степени автономной и самостоятельной жизнью по отношению к физике и другим естественнонаучным теориям, а также к эмпирическому миру, который последние претендуют описывать. Именно так смотрел на отношение математики и физики логический эмпиризм[2]. Его приверженцы настаивали на четком отделении формальных наук (логики и математики) от наук эмпирических. «Формальные науки вообще не имеют <собственных> объектов, это системы без объектов и без содержания»[3], они «ничего не говорят о чувственно воспринимаемом мире»[4], но лишь о связи символов. Другими словами, *математика — это язык*, причем чистая математика — это преимущественно синтаксис. Это странный язык, в котором есть жесткий синтаксис, семантика не определена, а прагматика может меняться достаточно гибко и свободно. Применение же математики и состоит в том, что мы наделяем эти синтаксические конструкции семантическим и нужным прагматическим измерениями, превращая их в язык той или иной области эмпирической науки.

Также и Вигнер смотрит на математику, в первую очередь, как на запас языковых конструкций: «Кто-то однажды сказал, что философия — это злоупотребление именно для этой цели придуманной терминологией. Следуя духу этого высказывания, я мог бы определить математику как искусное оперирование понятиями и правилами, при-

---

[1] Многочисленные примеры высказываний других ученых по данной теме см.: *Steiner Mark*. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 13–14; *Визгин Вл.П.* «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н. Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123–141.

[2] См.: *Крафт В.* Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003. С. 53–60; *Carnap R.* Formal and Factual Science <1934> // Readings in the Philosophy of Science / Ed. by H. Feigl and M. Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953. P. 123–128; *Hempel C.G.* On the Nature of Mathematical Truth // The American Mathematical Monthly. Vol. 52. N 10 (Dec. 1945). P. 543–556; *Hempel C.G.* Geometry and Empirical Science // Ibid. N 1 (Jan. 1945). P. 7–17.

[3] *Carnap R.* Formal and Factual Science <1934> // Readings in the Philosophy of Science / Ed. by H. Feigl and M. Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953. P. 128.

[4] *Крафт В.* Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003. С. 56.

думанными именно для этой цели». Главной руководящей нитью при этом служит математику «способность воспринимать формальную красоту (sense of formal beauty)»; он вводит именно такие понятия, которые «позволяют производить хитроумные (ingenious) логические операции, импонирующие нашему чувству прекрасного (which appeal to our aesthetic sense), как сами по себе, так и по своим результатам, обладающим великой общностью и простотой». Математиком движет, главным образом, чисто интеллектуальный интерес («быть интересной» — определяющее свойство математики, согласно М. Полани, на которого ссылается здесь Вигнер) и возможность проявить остроумие (ingeniousness), а вовсе не ориентация на эмпирический мир и его нужды. Он не сомневается, что элементарная математика (в частности геометрия) «была сформулирована с целью описывать такие объекты, которые напрямую подсказаны (directly suggested) реальным миром», однако современная математика не такова[1].

В результате и в самом деле становится непонятным, почему такая математика применима в эмпирических науках, почему «законы природы должны формулироваться на языке математики (the laws of nature must be formulated in mathematical language)»[2]. Математики, исходя из описанных выше устремлений, создают большое разнообразие математических понятий, из «списка (a listing of mathematical terms)» которых физики «выбирают (select)» то, что им нужно. Однако выбирают физики не произвольно, они движутся в разработке теорий своим путем, пока их теоретические конструкции не оформятся настолько, что им станет ясно, что именно из математических наработок им подходит: «во многих, если не в большинстве случае, соответствующие понятия были развиты независимо физиком и лишь затем опознаны как уже промысленные математиком (recognized then as having been conceived before by the mathematician)»[3].

Можно ли сказать, что физика и математика по Вигнеру осуществляют некоторое *встречное движение* в ходе своих разработок? Похоже, что нет. Про какое-то движение математики в сторону физики речи вообще не идет. Физика также движется не по направлению к математике. Она стремится оформить свои концепции, если же на каком-то этапе физик обнаруживает сходство своих построений с чем-либо имеющимся в языке математики, он без лишних размышлений, заимствует соответствующий математический формализм, наделяя его нужной для физических целей интерпретацией. Ведет себя

[1] *Wigner E.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math. Vol. 13. N 1 (Feb. 1960). P. 2–3.

[2] Ibid. P. 6.

[3] Ibid. P. 7.

физик при этом, по оценке Вигнера, «безответственным образом (he is a somewhat irresponsible person)»[1].

В результате то, что физик сплошь и рядом достигает на этом пути успеха, оказывается для подхода Вигнера совершенно чудесным и необъяснимым. Возможности теоретического обоснования этой успешности он не видит. Для него речь здесь идет о подтверждаемом многими примерами эвристическом приеме, который он называет «эмпирическим законом эпистемологии (an empirical law of epistemology)» или «догматом веры физика-теоретика (an article of faith of the theoretical physicist)» (последнее название со ссылкой на R.G. Sachs): математические формулировки законов природы «обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости (being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope)»[2]. Впрочем, этот догмат веры теоретика уравновешивается «кошмаром теоретика (a nightmare of the theorist)»: «нам в принципе неизвестно, почему наши теории работают так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости»[3].

Приведем, наконец, знаменитые заключительные (и скорее оптимистичные) слова доклада Вигнера, которые не устают цитировать бесчисленные авторы статей и книг о применении математики:

«The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning. (Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки законов физики. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам следует благодарить за него и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы надеемся также, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) в будущем расширится (принося нам не только радости, но и трудности) на многие новые области изучения)»[4].

Ключ или отмычка?

Юджин Вигнер почти в самом начале своего доклада говорит о физиках, применяющих для своих целей математические теории, следующее: «Мы находимся в положении, аналогич-

[1] Ibid. P. 8.
[2] Ibid. P. 10.
[3] Ibid. P. 13–14.
[4] Ibid. P. 14.

ном положению человека, которому дали связку ключей (who was provided with a bunch of keys) и который пытается открыть одну за другой несколько дверей. Ему всегда удается подобрать правильный ключ к очередной двери с первой или второй попытки, но сомнения относительно взаимно однозначного соответствия между ключами и дверями (the uniqueness of coordination between keys and doors) у него остаются»[1].

Попробуем осмыслить проблему Вигнера исходя из предложенной им метафоры, которая напоминает известное сравнение Роджера Бэкона, назвавшего математику «scientiarum porta et clavis (вратами и ключами науки)»[2]. Для начала спросим: *кто* дал нам связку математических ключей? Есть два основных ответа на этот вопрос — *натуралистический* и *супранатуралистический*. Философы и ученые эпохи научной революции XVI–XVIII веков стояли в своем большинстве на второй точке зрения. Они верили в незыблемость теокосмо-антропологического треугольника[3], который связывает узами предустановленной гармонии человеческий разум, устройство мира и Божественный замысел о них. Математика при этом укоренена во всех трех вершинах этого фундаментального треугольника и связывает их между собой, математика — универсальна. Это одно из важнейших основоположений их мышления и научной деятельности. В XIX–XX веках укрепила свои позиции и получила серьезную теоретическую разработку натуралистическая альтернатива, стремящаяся построить объяснение эффективности человеческого познания вне апелляции к теологическим аргументам (в условиях «смерти Бога»).

Какова позиция самого Вигнера по отношению к предложенной альтернативе? С одной стороны, он постоянно использует то ли «квазирелигиозный»[4], то ли «проторелигиозный» язык: в самом деле, *кого* нам следует благодарить за чудесный дар математического языка? Однако явно религиозных утверждений он не делает. С другой

---

[1] Ibid. P. 2.

[2] Opus Majus, pars 4, distinctio 1, capitulam 1. См.: *Бэкон Роджер*. Избранное. М.: Изд-во Францисканцев, 2005. С. 178–179.

[3] См.: *Шапошников В.А.* Математический скептицизм и абсолютистская трактовка доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики. / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: Книжный дом «Либроком» (URSS), 2014. С. 305.

[4] Ср. многочисленные примеры подобного словоупотребления в текстах физиков и математиков XIX–XX вв. и попытку чисто прагматического его объяснения у Вл.П. Визгина: «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры. С. 123–141.

стороны, Вигнер отказывается воспринимать всерьез в интересующем нас контексте главный натуралистический инструмент объяснения — эволюционный механизм. Он говорит об этом так: «О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удается использовать это понятие. Великий математик полностью владеет всем имеющимся в области допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Уже одно то, что его безрассудство не завело его в пучину противоречий, само по себе чудо. Трудно поверить, что дарвиновский процесс естественного отбора довел наше мышление до такой степени совершенства, которой оно, судя по всему, обладает»[1]. Как мы знаем из его интервью и воспоминаний, Юджин Вигнер стремился занимать *агностическую* позицию, не делая определенного выбора ни в сторону натурализма, ни в сторону супранатурализма, впрочем, в отношении последнего, его «не знаю» звучало куда решительнее[2]. Возможно, отчетливая нейтральность Вигнера в докладе 1959 г. также способствовала широкой популярности этого доклада, ведь автор предельно ярко ставил проблему, не предопределяя ее решения в ту или иную сторону.

Вернемся, однако, к метафоре связки ключей и обсудим натуралистическую ее разработку. Вигнер прав, полагая, что механизм биологической эволюции вряд ли способен снабдить нас специальным ключом, в точности соответствующим внутреннему устройству каждого дверного замка, который нам может случиться встретить. Ведь для эволюционного механизма не требуется полного соответствия

---

[1] *Wigner E.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math. Vol. 13. N 1 (Feb. 1960). P. 3.

[2] Юджин Вигнер родился и вырос в Венгрии, в еврейской семье, которая позднее приняла лютеранство. Незадолго до смерти он вспоминал о годах юности: «Я видел, что не могу ничего непосредственно знать о Боге, видел, что Его существование есть предмет веры, которой у меня не было» (The Recollections of Eugene P. Wigner as Told to Andrew Szanton. Basic Books, 1992. P. 60–61). В интервью от 3 сентября 1985 г., данном Вигнером в связи с организуемым Институтом Бхактиведанты первым всемирным конгрессом «Синтез науки и религии» (Мумбаи, Индия, 1986), Расараджа Даса прямо спросил его: «Какое представление о Боге было у Вас в детстве и как Вы, как физик, представляете Его теперь? Изменились ли Ваши представления, или Вы никогда не думали о Боге?» Вигнер ответил: «Когда я был ребенком, я не знал, верю ли я в действительности в то, чему меня учили о Боге, и я не знаю, во что я верю теперь. Не знаю». См.: Interviews with Nobel Laureates and Other Scholars: Brought on the Occasion of World Congress for the Synthesis of Science and Religion. Bombay: Bhaktivedanta Institute, 1986. Русский перевод доступен по адресу: http://philosophy.ru/library/synth/index.html

наших представлений миру, достаточно той степени соответствия, которая уверенно обеспечивает эффективность действия. Дать нам связку настоящих ключей, пожалуй, под силу только совершенному Творцу мира. Однако мы вполне можем в ходе эволюции приобрести такой мозг, который позволяет нам разработать универсальный набор *отмычек*, которые не будут в точности отвечать внутренней структуре названных замков, но будут достаточно хороши на практике для их вскрытия.

Универсальный, хотя и ограниченный по числу, набор интеллектуальных отмычек хорошо описывает одно из важных адаптационных преимуществ существа, способного теоретизировать — продумывание по возможности всех мыслимых вариантов про запас, поскольку, когда возникает реальная ситуация выбора, думать, как правило, поздно — надо уже быть во всеоружии.

Выше мы видели, что математик, согласно Вигнеру, руководствуется, главным образом, принципом формальной красоты, т.е. *эстетическим* критерием. Но так ли уж далек эстетический критерий от жизненных нужд, как кажется поверхностному взгляду? Согласно главному принципу эволюционной эстетики, красиво то, что эволюционный отбор запечатлел как заслуживающее особого внимания. Узкая утилитарность глупа и примитивна, она очень далека от полноценного многоуровневого понимания полезности. Интеллектуальные фикции, а таковых в современной математике очень много, бесполезны в узком смысле слова, но не могут быть признаны таковыми — в широком. Они также связаны с практикой и с миром, но не «в лоб», а через (возможно, многоуровневое) опосредование. Пусть они плод интеллектуальной *игры*, но такая игра бесполезна опять же лишь для поверхностного взгляда, с широкой же эволюционной точки зрения игра — жизненно необходимое занятие.

Мир слишком сложен для нашего мышления, но наше отношение к нему не есть отношение незаинтересованного беспристрастного познавательного устройства, нацеленного на исчерпывающее и безразличное познание всего, это ограниченно-избирательное и экономное отношение конечного существа направляемого вполне определенным набором жизненно-важных интересов. По крайней мере, исходно это так. Избыточность интеллектуальной деятельности человека связана с необходимостью прогноза на основе попыток предугадать полный спектр возможных ситуаций и их исходов, это навык второго уровня. Именно он приводит к стремлению создавать достаточно простые и обозримые, но разнообразные и максимально широко применимые теоретические схемы. Более того, подобная избыточность может закрепляться естественным отбором. Хорошо известным примером может служить избыточность естественных языков.

Мысль о том, что математика так хорошо применима для описания реального мира, поскольку она есть универсальная коллекция подобных схем (пусть не актуально, но хотя бы потенциально, по замыслу) достаточно близка к только что очерченному ходу мысли.

Необходимость дифференциации проблемы (подход Марка Штайнера)

Есть смысл различать *двухступенчатый* и *одноступенчатый* подходы к применению математики[1]. Для первого из них, с одной стороны, имеется самостоятельно существующая и самостоятельно понимаемая чистая математика, с другой, — никак не связанная с математикой природа, выступающая как предполагаемая сфера ее приложений. Для того чтобы приложение математики состоялось, мы нуждаемся в некотором третьем связующем звене между математикой и природой. Так видят ситуацию применения математики формалистский и структуралистский подходы. Этим третьим звеном может быть особая *интерпретация* базовых понятий формальной математической теории, которая и превращает ничего не говорящую о мире формально-математическую конструкцию в естественно-научную теорию. Так полагали логические позитивисты (см., например, разъяснение Карлом Гемпелем различия между чистой и физической геометриями[2], а также сравнение им математики с «соковыжималкой»[3]). Или это может быть установление определенного *соответствия* между математической структурой и устройством описываемого природного объекта (этот связанный со структурализмом подход по-английски называется «mapping account»[4], что можно перевести, например, как «теория соответствия»). Так или иначе, но двухступенчатый подход на первом шаге строит понимание математики, а затем, на втором шаге, ищет дополнительного объяснения применимости математики, понятой таким образом.

В отличие от этого одноступенчатый подход состоит в том, чтобы с самого начала включать объяснение применимости в наше по-

---

[1] *Pincock C.* The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/math-app/

[2] *Hempel C.G.* Geometry and Empirical Science // The American Mathematical Monthly. Vol. 52. N 1 (Jan. 1945). P. 12–15.

[3] *Hempel C.G.* On the Nature of Mathematical Truth // The American Mathematical Monthly. Vol. 52. N 10 (Dec. 1945). P. 554.

[4] *Pincock C.* A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics // Philosophia Mathematica. Vol. 3 (2004). N 12. P. 135–161; *Bueno O., Colyvan M.* An Inferential Conception of the Application of Mathematics // Noûs. Vol. 45. N 2 (June 2011). P. 345–374.

нимание математики. Тогда проблема применимости как бы автоматически получает решение, а правильнее сказать — применимость попросту не возникает в качестве самостоятельной проблемы. В соответствии с терминологией Криспина Райта это называется «Frege's constraint» (ограничение Фреге). Райт ссылается на § 158 «Основных законов арифметики» Фреге и интерпретацию взглядов Фреге на применимость математики Майклом Даммитом[1]. Райт определяет *ограничение Фреге* следующим образом: «Удовлетворительное основание математической теории должно тем или иным способом встраивать ее применения, как действительные, так и возможные, в самую ее сущность (build its applications into its core), — в то содержание, которое оно приписывает утверждениям теории, — вместо того, чтобы просто "залатывать их извне"»[2]. Поставленные Райтом в кавычки слова взяты у Фреге.

Однако даже Криспин Райт, признавая применимость ограничения Фреге к арифметике, ставит его под сомнение для математического анализа.

Американо-израильский философ Марк Штайнер предлагает различать *канонические* и *неканонические* приложения математических теорий. Приложение будет каноническим, «если теория была развита, в первую очередь, чтобы описывать соответствующее приложение»[3]. Примером может служить применение дифференциального исчисления, как оно было развито Ньютоном, к описанию ускоренного механического движения (в отношении современного математического анализа это нельзя повторить с той же степенью уверенности). В случае простейших канонических приложений математики (например, при использовании натуральных чисел для пересчета физических предметов) часто бывает весьма трудно провести границу между математической теорией и ее эмпирическим приложением, настолько тесно они связаны (так Дж.Ст. Милль не смог это сделать). Классический пример неканонического приложения — применение Кеплером греческой теории конических сечений к описанию орбит небесных тел. Более современный пример — применение теории групп в физике элементарных частиц и квантовой механике.

---

[1] *Dummett M.* Frege. Philosophy of Mathematics. London: Duckworth, 1991. P. 268–273.

[2] *Wright C.* Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege's Constraint // Cook R.T. (ed.) The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction. Dordrecht: Springer, 2007. P. 262–263.

[3] *Steiner M.* Mathematics — Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005. P. 627.

С этой точки зрения спор между одноступенчатым и двухступенчатым подходами разрешается отнесением первого к каноническим, а второго к неканоническим приложениям математики.

Именно неканонические приложения вызывают больше всего вопросов. Это в связи с ними Юджин Вигнер говорил о «непостижимой эффективности математики». Главное предположение, которое высказывает в этой связи Штайнер, состоит в том, что каждое успешное неканоническое применение математики — «отдельная история». Не из чего не следует, что существует *универсальное* объяснение для всех таких случаев. Проблема применения математики на деле есть несколько отдельных проблем.

Штайнер различает также *эмпирические* и *внутриматематические* приложения математики. Причем последние играют не менее важную роль в современном естествознании, поскольку «значительная часть того, что принимают за приложение математики к физике, есть в действительности приложение математики к самой себе». Пример внутриматематического приложения — теория представления групп. Современные физические теории, такие как квантовая механика, полагает Штайнер, имеют «глубоко пифагорейский» характер, поскольку применяемая ими классификация физических явлений индуцирована классификацией математических структур. Он видит в этом величайшую иронию. Естественно-научная мысль, пройдя такой большой путь, снова вернулась туда, откуда она, в свое время вышла, к взглядам Пифагора и Демокрита. «Пифагор думал, что мир сделан из чисел, но это слишком уж просто: он сделан из матриц, причем образующие их числа не действительные, а комплексные!»[1]

В связи с этим Штайнер настаивает на необходимости различать несколько понятий применимости математики. Во-первых, это *логическая или семантическая* применимость математики (проблема Фреге); во-вторых, это *дескриптивная* проблема применения математики (проблема Вигнера).

Первый аспект применимости математики был, по убеждению Штайнера, успешно разработан еще Фреге. Когда мы, например, применяем элементарную арифметику натуральных чисел для пересчета физических предметов, мы сталкиваемся с логической (семантической) и метафизической проблемами. Пусть, перед нами на столе семь яблок и пять груш, причем никаких других фруктов на столе нет; из этого мы заключаем, что на столе всего двенадцать фруктов. В этом примере арифметическое суждение «7 + 5 = 12» работает в роли «орудия логического вывода» (as an engine of deduction), той самой гемпелевской «теоретической соковыжималки», хотя и в са-

[1] Ibid. P. 647–649.

мом примитивном варианте. В ходе этого вывода мы переходим от употребления слов «семь» и «пять» в качестве прилагательных, применяемых при составлении предложений о фруктах, к числительным 7 и 5, используемым в роли существительных, а затем делаем аналогичный, но обратный переход с «двенадцатью». Эта «уловка» грозит разрушить логическую корректность нашей дедукции. Связанная же с этим переходом метафизическая проблема состоит в том, что мы игнорируем онтологическое различие между эмпирическими и математическими объектами[1].

Фреге удалось решить семантическую, а заодно и метафизическую, проблему приложения математики к природе за счет обращения к понятиям и суждениям, т.е. к универсальному измерению мышления. Именно в пространстве мышления встречаются и находят законное соединение математические объекты и физические предметы и явления, преодолевая пропасть разноприродности[2]. Речь в нашей дедукции, согласно Фреге, идет не о физических яблоках и грушах, а о *понятиях* «яблоки на этом столе», «груши на этом столе», «фрукты на этом столе» и соотношении между объемами этих понятий. Фреге писал в § 87 «Основ арифметики»: «законы чисел собственно не применимы к внешним вещам; они не являются законами природы. Они не утверждают связь между естественными явлениями, но утверждают таковую между суждениями; а к последним принадлежат и законы природы»[3].

Важно отметить, что подход Фреге к применимости математики не ограничивается арифметикой, он распространим на всю классическую математику, поскольку она выразима на языке теории множеств. «Мы можем заключить, — пишет Штайнер, — что Фреге полностью решил семантическую и метафизическую проблемы применимости»[4]. Это решение метафизически неубедительно лишь для того, кто имеет сомнения в существовании понятий или множеств (а это не такие уж сильные требования).

Однако, решив проблему применимости математических понятий *в общем*, Фреге никоим образом не ответил на вопрос, почему *именно эти* математические понятия применяются в данном конкретном

---

[1] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 15–23; *Steiner M.* Mathematics — Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005. P. 641–645.

[2] *Dummett M.* Frege. Philosophy of Mathematics. London: Duckworth, 1991. P. 255–259.

[3] *Фреге Г.* Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. С. 221.

[4] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 23.

случае и именно таким образом, каким это происходит на практике. Это *дескриптивная* применимость математики — «пригодность (конкретных) математических понятий для описания и правомерного предсказания физических явлений»[1].

Например, что делает арифметику столь полезной в повседневной жизни? Что должен представлять собой мир, в котором она может служить эффективным средством эмпирических предсказаний? Тела должны обладать достаточной стабильностью и не слишком большим разбросом в пространстве (чтобы их можно было «собирать вместе» и определенным образом «организовывать», делая «обозримыми»), только тогда люди смогут их считать. Кроме того, тела должны в основном сохранять свои числовые характеристики при человеческих манипуляциях с ними. В результате это делает арифметику исторически соединенной с геометрией, причем обе они тесно связаны с простейшими и наиболее распространенными типами человеческой деятельности. Ничего особо чудесного и таинственного в дескриптивной применимости арифметических операций сложения и умножения нет.

В целом стратегия решения дескриптивной проблемы применения математики, согласно Штайнеру, следующая: «Чтобы устранить таинственность описания конкретного явления определенным математическим понятием, мы устанавливаем соответствие (match) этого понятия и нематематического свойства»[2]. В результате загадочность дескриптивного применения математики находит объяснение «в терминах общих физических свойств природы», «посредством установления соответствия между физическими и математическими понятиями» (by matching mathematical to physical concepts)[3]. Однако чем более современные и сложные случаи приложения математики мы берем, тем сложнее становится следовать этой стратегии.

Так, уже знаменитый закон гравитации Ньютона (закон обратных квадратов), несмотря на предпринимавшиеся попытки его объяснения, по-прежнему остается таинственным. Это же можно повторить по отношению к эффективности комплексного анализа (теории аналитических функций) в гидродинамике, термодинамике, релятивистской теории поля. Имеется ли какое-то единое физическое свойство, которое ответственно за успех всех этих приложений?

Однако главное внимание Штайнера привлекает *квантовая механика*, которой посвящена половина его книги 1998 г. «Роль гильбертова пространства в квантовой механике более глубокая,

[1] Ibid. P. 25.
[2] Ibid. P. 44.
[3] Ibid. P. 32, 35.

чем дескриптивная роль отдельного понятия. Целостный формализм гильбертова пространства ставится в соответствие природе (is matched with nature). Информация о природе "считывается" с деталей этого формализма»[1]. Почему это работает — остается загадкой.

Но «самым глубоким» Штайнер считает вопрос, связанный с применением в физике *теории групп*. «Он затрагивает применимость математики как таковую, а не просто приложение того или иного понятия. Это тем самым эпистемологический вопрос, относящийся к связи между Сознанием и Космосом. Это и есть вопрос, поднятый Юджином Вигнером, о "непостижимой эффективности математики в естественных науках"»[2].

При этом важно понять, что применение математики не ограничивается использованием ее в качестве «орудия логического вывода» (an engine of deduction), как полагали логические позитивисты, но математика есть также «орудие открытия» (an engine of discovery) в науке[3].

Сравнивая свой подход с подходом Вигнера, Штайнер перечисляет различия[4]:

1) Вигнер говорит об использовании математики для *описания*, а не для *открытия*.
2) Вигнер игнорирует многочисленные *неудачи* в подборе приемлемого математического описания для природных явлений, сосредоточивая внимание на редких *успехах*.
3) Вигнер также не уделяет достаточного внимания математическим понятиям, так и не получившим применения к описанию природы.
4) Штайнер видит особую проблему в каждом конкретном успешном применении математического понятия. Этот успех может не говорить ничего об успешности применения математики вообще, а быть связанным с уникальными особенностями именно этого понятия (например, понятия группы).
5) Проблема Штайнера (в отличие от названных выше проблем Фреге и Вигнера) — это поразительный успех самой *общей стратегии*, состоящей в опоре на математические структуры при формулировке законов природы, а не просто успешное приложение того или иного конкретного математического понятия.

---

[1] Ibid. P. 44.

[2] Ibid. P. 45.

[3] *Steiner M.* Mathematics — Application and Applicability // Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005. P. 644.

[4] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 9.

Марк Штайнер, также как и Юджин Вигнер, стремится сохранить нейтральность в отношении оппозиции «натурализм — супранатурализм», но удается ему это хуже, чем Вигнеру. Он утверждает неспособность натурализма, как не допускающей антропоцентризм методологии, объяснить успех математически ориентированной современной физики (решить проблему Штайнера), но в то же время не готов объявить себя сторонником супранатуралистического подхода, хотя ближе стоит именно к нему.

Сомнения в возможностях натуралистического решения проблемы применимости математики, понимаемого как «дарвинистский подход к происхождению математики»[1], которые высказывал Вигнер в своем знаменитом докладе, становятся у Штайнера предметом специального обсуждения. Он опирается на авторитет Чарльза Пирса, писавшего о том, что наши инстинкты могут быть надежными руководителями на пути к истине, «поскольку они сформировались под влиянием тех самых законов, которые мы <с их помощью> исследуем». «Но, — продолжал Пирс, — по мере того, как мы проникаем глубже и глубже, уходя все дальше от поверхности природы, инстинкт утрачивает способность давать какие-либо определенные ответы <на наши вопросы>; а если бы он и давал их, у нас уже не было бы никакого основания полагать, что эти ответы близки к истине»[2].

«Другими словами, — комментирует Штайнер приведенные слова Пирса, — хотя естественный отбор возможно и мог бы объяснить наш успех в открытии науки, имевшейся до настоящего времени (ведь он якобы предсказывает существование своего рода гармонии между сознанием и миром), но он также предсказывает нашу неспособность открыть такие законы (подобные законам строения атома), которые не имели бы никакого отношения к эволюционному процессу или выживанию, как таковому»[3].

Это известный аргумент, в связи с которым один из главных теоретиков эволюционной эпистемологии Герхард Фоллмер ввел даже специальный термин — *мезокосмос*, имея в виду «мир, к которому приспособился наш познавательный аппарат в ходе эволюции», причем мир этот есть «лишь один срез, одна часть действительного мира»[4].

---

[1] Ibid. P. 8.

[2] Фрагмент 7.508. Штайнер цитирует Пирса по изданию: Collected Papers of Charles Sanders Peirce / Ed. A.W. Burks. Vol. 7. Cambridge (Mass.): Harvard University Press, 1958. См.: *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 50.

[3] Ibid.

[4] *Фоллмер Г.* Мезокосмос и объективное познание // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 1994. № 6. С. 35–56; 1995. № 1. С. 27–47.

Если эволюционное приспособление ограничено мезокосмосом, то как же тогда человек может постичь законы атомного и субатомного уровней реальности? Ответ Штайнера гласит: посредством *математической аналогии*. Если такие аналогии невыразимы ни в каком языке, кроме математического, Штайнер называет их *пифагорейскими* аналогиями.

Они весьма характерны для современной физики. Даже такие на первый взгляд собственно физические модели, как «планетарная» модель атома водорода Нильса Бора, на деле функционируют как «математические метафоры». Последнее выражение Штайнер разъясняет так: «Математическая форма соответствующих моделей была извлечена посредством абстрагирования (was abstracted out), а затем по аналогии применена даже в тех областях, где действительное поведение атома не могло быть описано классической механикой»[1].

Особо интересен случай, когда пифагорейские аналогии строятся не на самой математической структуре, а на принятой системе математических обозначений (mathematical notation). В этом случае аналогия строится на форме уравнений, а не на их смысле. Такие аналогии Штайнер называет *формалистскими*. Классический пример — введение Максвеллом в систему уравнений электромагнетизма (из соображений симметрии) тока смещения.

На каком основании мы можем рассчитывать на успех подобных аналогий? Штайнер не может не вспомнить знаменитые слова Галилея[2], обращенные к его оппоненту (Орацио Грасси, выступившему под псевдонимом Лотарио Сарси):

«Он, по-видимому, полагает, что философия[3] — книга чьих-то вымыслов, такая же, как “Илиада” или “Неистовый Роланд” — книги, для которых менее всего значит, истинно ли то, что в них написано. В действительности же, синьор Сарси, все обстоит не так. Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова; без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту»[4].

---

[1] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 3–4.

[2] Ibid. P. 2, 5.

[3] Точнее — *натуральная* философия, ведь ближайший предмет спора — природа комет (примечание мое. — *В.Ш.*).

[4] *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. С. 41.

Однако Галилей (в отличие от Штайнера и Вигнера) не просто избирал эмпирически оправдавшую себя методологию, которую Штайнер описывает так: «При формулировке гипотез физик-практик находится в плену убеждения (явного или неявного), что первичный (ultimate) язык Вселенной — это язык математика»[1]. Галилей имел для своей методологии серьезные *теологические* основания. Их предельно ясно к тому времени («Пробирных дел мастер» Галилея вышел в 1623 г.) уже выразил Иоганн Кеплер в изданной в 1619 г. «Гармонии мира» (Harmonices Mundi): «Геометрия существовала до <сотворения> вещей, она совечна (coaeterna) Божественному Уму и есть <сам> Бог (что может быть в Боге и не быть Богом?), она снабдила Бога образцами (exempla) для творения и перешла (transivit) к человеку вместе с образом Божиим; она не была воспринята <человеком> только посредством зрения»[2]. Да, «язык Вселенной — это язык математика (language of the mathematician)» для Кеплера и Галилея, только последнее слово следовало бы написать при этом с большой буквы, поскольку речь идет о Боге-творце.

В «Диалоге о двух главнейших системах мира» (1632) Галилей высказал это совершенно ясно, вложив в уста коперниканца Сальвиати следующие слова: «<...> я утверждаю, что человеческий разум познает некоторые истины столь совершенно и с такой абсолютной достоверностью, какую имеет сама природа; таковы чистые математические науки, геометрия и арифметика; хотя Божественный разум знает в них бесконечно больше истин, ибо он объемлет их все, но в тех немногих, которые постиг человеческий разум, я думаю, его познание по объективной достоверности равно Божественному, ибо оно приходит к пониманию их необходимости, а высшей степени достоверности не существует. <...> Истина, познание которой нам дают математические доказательства, та же самая, какую знает и Божественная мудрость; но я охотно соглашаюсь с вами, что способ Божественного познания бесконечно многих истин, лишь малое число которых мы знаем, в высшей степени превосходит наш; наш способ заключается в рассуждениях и переходах от заключения к заключению, тогда как его способ — простая интуиция; <...> Итак, те переходы, которые наш разум осуществляет во времени и, двигаясь шаг за шагом, Божественный разум пробегает, подобно свету, в одно мгновение; а это то же самое что сказать: все эти переходы всегда имеются у него в наличии»[3].

---

[1] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 5.

[2] *Kepler J.* The Harmony of the World / Tr. by E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997. P. 304.

[3] *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой // Галилей Г. Избранные труды: В 2 т. М.: Наука, 1964. Т. 1. С. 201–202.

Математическое описание для Кеплера и Галилея — это *истинное* понимание и объяснение мира, достигающее предельного (ultimate) уровня — уровня изначального замысла Творца, а не *фикция*, пусть и очень увлекательная (подобная великим произведениям Гомера и Лудовико Ариосто), а может быть даже и полезная на практике. Галилей — решительный противник фикционализма в понимании математики. Фикционалист скорее его оппонент — кардинал Беллармин[1].

Ну, а какова позиция Штайнера? Что с его точки зрения стоит за успехом математических аналогий? Он не считает свою собственную позицию *пифагорейской*, но признает пифагореизм «приемлемой и заслуживающей уважение (very respectable)» позицией. При этом он считает нужным различать *концептуальный* и *метафизический* пифагореизм. Первый состоит в убеждении, что «предельные свойства (ultimate properties) или "реальные сущности" вещей есть не что иное, как математические структуры и их отношения». Второй же идет далее, «попросту отождествляя Вселенную или все вещи в ней с математическими объектами или структурами»[2]. В первом случае сохраняется различие между вещью и ее (математическим) понятием, во втором этого различия нет.

Осознанными сторонниками концептуального пифагореизма могут быть признаны Галилей или Лейбниц. В этом смысле могут быть, например, истолкованы известные слова Галилея: «Не думаю, чтобы для возбуждения у нас ощущений вкуса, запаха и звука от внешних тел требуется что-нибудь еще, кроме размеров, форм, числа и медленных или быстрых движений; я полагаю, что если бы уши, языки и носы вдруг исчезли, то форма, число и движение остались бы, но не запахи, вкусы или звуки. Я глубоко уверен, что без живого существа последние представляют собой не более чем

---

[1] Коперниканство было осуждено католической церковью в XVII веке именно в качестве физического объяснения, а в качестве метода *спасения явлений* (φαινόμενα σῴζειν) оно считалось приемлемым. Пафос Галилея в том, что математическое описание дает истинное физическое объяснение, а не одно из многих возможных фиктивных повествований «спасающих явления». Кардинал Беллармин в письме к Антонио Фоскарини от 12 апреля 1615 г. говорил о приемлемости коперниканства во втором смысле и категорической неприемлемости в первом. См.: *Фантоли А.* Галилей: в защиту учения Коперника и достоинства Святой Церкви. М.: МИК, 1999. С. 138–140. Стоит отметить, что с точки зрения постпозитивистской философии науки позиция Беллармина выглядит более адекватной, чем позиция Галилея. См.: *Фейерабенд П.* Галилей и тирания истины // Фейерабенд П. Прощай, разум. М.: АСТ, Астрель, 2010. С. 321–345.

[2] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 5.

имена <...>»[1]. Другими словами, именно математическое описание — это объективное описание мира, именно оно имеет дело с первичными качествами. Однако попытки устранить различие между вещью и математическим понятием здесь не предпринимается. Особенно это заметно у Лейбница — на его языке речь идет о различии между бесчисленными возможными мирами и единственным миром действительным.

Современным примером метафизического пифагореизма может служить позиция Макса Тегмарка[2].

Говоря о пифагорейских аналогиях в современной физике, Штайнер обращает особое внимание на *антропоцентрический* характер подобной стратегии. Конечно, речь в данном случае идет не о *явном* (overt), а о *скрытом* (covert) антропоцентризме, т.е. о некотором поведении, которое без поддержки антропоцентрических убеждений перестает быть рациональным поведением[3]. Если мы, например, (без особой рефлексии по данному вопросу) классифицируем явления в соответствии с особенностями человеческого устроения, то мы повинны в скрытом антропоцентризме. Деля числа на женские (четные) и мужские (нечетные) древние пифагорейцы поступали именно так.

Штайнер убежден, что наша математика существенным образом человекоразмерна, поэтому безоглядно доверяющий ей физик обнаруживает тем самым скрытый антропоцентризм. Почему математика человекоразмерна? Мы готовы признать в качестве подлинной математики только то, что волнует наше *эстетическое чувство*. В этом убеждении Штайнер солидарен с Вигнером, и об этом согласно свидетельствуют многие крупнейшие математики (Дж. фон Нейман, Г. Харди и др.)[4]. Однако различие красивое/безобразное антропоцентрично, его трудно понять иначе, чем специфичные для нашего биологического вида предпочтения. Следовательно, антропоцентрична и наша математика, коль скоро она покоится на эстетическом критерии. Второй критерий, отличающий для нас математику от не математики — *удобство и полезность* (convenience)[5]. Ученые на практике

---

[1] *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. С. 225. Чуть ранее он называет в этой связи «вкусы, запахи, цвета и другие качества» (с. 223). Отметим, что Галилей отчасти делает исключение для зрения и осязания — как раз тех чувств, которые важны для геометрии.

[2] *Тегмарк М.* Параллельные вселенные // В мире науки, 2003. № 8. С. 23–33; *Tegmark M.* The Mathematical Universe // Foundations of Physics. Vol. 38. N 2 (Feb. 2008). P. 101–150.

[3] *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998. P. 55–56.

[4] Ibid. P. 64–66.

[5] Ibid. P. 66–70.

постоянно пользуются принципом «что удобно, то правильно» (what is convenient is correct). Штайнер приводит выразительный пример из воспоминаний Чжэньнин Янга, лауреата Нобелевской премии по физике 1957 г., в котором хорошо видно как оба критерия работают в согласии[1]. Антропоцентричность второго критерия еще очевиднее, чем первого.

Однако ярче всего антропоцентризм виден при использовании в современной физике *формалистских* аналогий. За таким использованием явно проглядывает реалистическая теория имен и символов. Подобное поведение не только явно антропоцентрично, оно сходно с поведением детей (childlike) и подозрительно напоминает архаичные магические практики. Впрочем, самое интересное состоит не в том, что современные ученые ведут себя подобным образом, а в том, что их стратегия оказывается в целом успешной! Это и есть проблема Штайнера[2].

Выше мы противопоставляли натурализм и супранатурализм. Штайнер определяет *натурализм* как противоположность не супранатурализма, а *антропоцентризма*[3]. Для него особенно важно, что натурализм настаивает на «конце человеческой исключительности» (если воспользоваться выражением Жана-Мари Шеффера), на том, что человек не имеет выделенного положения в мироздании. Как связаны между собой антропоцентризм и супранатурализм? В самом общем виде они, похоже, вообще могут быть не связаны. Однако в контексте авраамических религий между ними есть явная связь, антропоцентризм получает здесь супранатуралистическое оправдание.

Марк Штайнер, как уже было сказано выше, делает попытку занять промежуточную позицию между натурализмом и супранатурализмом, но не «посередине», а «ближе» к супранатурализму. Натурализм он критикует как не способный решить проблему Штайнера, т.е. объяснить особую эффективность явно антропоцентрической стратегии пифагорейских аналогий в современной физике, отношение же его к супранатурализму остается не вполне проясненным. Точнее: он приводит аргумент в пользу антропоцентризма и на этом останавливается. Предполагает ли его антропоцентризм супранатуралистическое дополнение или нет?

Приведу самое откровенное высказывание Штайнера на этот счет, и то брать его приходится не из основного текста, а из предисловия к книге 1998 года: «В той мере, в которой “натурализм” отвергает любую антропоцентрическую точку зрения <...> — эта книга броса-

[1] Ibid. P. 70.
[2] Ibid. P. 70–72.
[3] Ibid. P. 55.

ет вызов натурализму. Последнее делает мою книгу совместимой с естественной теологией, однако имеется и много позиций, которые не натуралистические, но и не теологические. <...> В моих исследованиях я в значительной степени вдохновляюсь взглядом Маймонида, согласно которому никакая философия, в частности никакая религиозная философия, не может быть полной без тщательного исследования наших лучших физических теорий (а это куда более трудная задача сегодня, чем это было в Средние века), и что изучение науки (и философии) само по себе может быть религиозным действием. Я осознаю, конечно, что Маймонид не одобрил бы, мягко выражаясь, мои "антропоцентристские" выводы, но именно к ним привел мой собственный философский поиск. Я, в самом деле, надеюсь, что эта книга послужит также напоминанием для верующих об истине Маймонида, утверждающей важность научного исследования с религиозной точки зрения»[1].

Не имеем ли мы здесь дело с фигурой умолчания — осознанным риторическим приемом, призванным подчеркнуть особую важность табуированной темы (смешение вопросов веры и философского анализа недопустимо)? Во всяком случае супранатуралистических выводов Штайнер навязывать читателям своей книги не хочет.

Философия применения математики

Не только доклад Юджина Вигнера, но и книга Марка Штайнера, — уже признанная классика, но в какой области? Обсуждаемая нами область исследований еще не имеет окончательно устоявшегося названия. Главный претендент на него — «the applicability of mathematics» (applicability — приложимость, применимость, пригодность). Именно этот термин закреплен в заглавии основополагающей для данного направления исследований монографии Марка Штайнера «The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem»[2]. Под таким названием имеется статья в «Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP)», написанная американским философом Кри-

[1] Ibid. P. 10.

[2] До выхода книги 1998 г. Штайнер опубликовал две статьи, где этот термин активно использовался (в первой из них — в тексте статьи, но не в заглавии): *Steiner M.* The Application of Mathematics to Natural Science // The Journal of Philosophy. Vol. 86. N 9 (Sept. 1989). P. 449–480; *Steiner M.* The Applicabilities of Mathematics // Philosophia Mathematica (III). Vol. 3. N 2 (May 1995). P. 129–156. Отмечу также, специальный раздел с таким названием в сборнике статей «Философия математики сегодня» под редакцией Эвандро Агацци и Дьёрдя Дарваша: Philosophy of Mathematics Today / Ed. by E. Agazzi and G. Darvas. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 233–334.

стофером Пинкоком[1]. Этот термин использован недавно в заглавии монографии норвежца Сорина Бангу[2], также на интересующую нас тему. Он вообще очень широко применяется. Другой претендент — «the philosophy of applied mathematics» (философия прикладной математики). Он использован, например, в замечательном введении в философию математики канадского исследователя Джеймса Роберта Брауна[3]. Он используется, наряду с первым термином, австралийским философом Марком Коливаном[4]. Он использован и Пинкоком в заглавии статьи «Towards a Philosophy of Applied Mathematics» (По направлению к философии прикладной математики)[5], точно так же назван один из разделов «Введения в философию математики» Коливана[6]. Можно обозначить эту тему еще проще, привычнее и шире, как названа книга, которую Вы держите в руках. Так назвала свою недавнюю книгу британский философ математики Мэри Лэнг[7]. Впрочем, последнее название, пожалуй, слишком широко. На практике речь главным образом идет об анализе той роли (точнее, многих ролей), которую математика играет в естествознании, и том вкладе, который она вносит в успех дела науки. Мне нравится название «философия применения математики».

В последнее время наметился круг авторов, уделяющих особое внимание нашей проблеме, а иногда и считающих ее центральной для философии математики. С одной стороны, в интересующей нас области уже обозначился ряд знаковых текстов и сложился список «классических» авторов. С другой, ее представители ощущают необходимость убеждать философов науки в особой значимости своей проблематики. Как сказал о цели своей монографии «Математика и естественнонаучные представления» (2012) Кристофер Пинкок, «я надеюсь добиться включения темы приложений <математики>

---

[1] *Pincock C.* The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/math-app/

[2] *Bangu S.* The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology. Palgrave Macmillan, 2012.

[3] *Brown J.R.* Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures. New York: Routledge, 1999. P. 37; *Brown J.R.* Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures. 2nd ed. New York: Routledge, 2008. P. 51.

[4] *Colyvan M.* Mathematics and the World // Irvine A.D. (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009. P. 651–702.

[5] *Bueno O., Linnebo Ø.* (eds.) New Waves in Philosophy of Mathematics. Palgrave Macmillan, 2009.

[6] *Colyvan M.* An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[7] *Leng Mary.* Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010.

в перечень наиболее важных и актуальных тем (to place the topic of applications on the agenda), стоящих как перед философией естествознания, так и перед философией математики»[1].

Впрочем, некоторый статус обсуждаемая область исследований уже завоевала, о чем свидетельствует включение посвященных ей специальных разделов в современные справочные издания по философии математики — статей М. Штайнера «Mathematics — application and applicability (Математика — применение и применимость)»[2] и М. Коливана «Mathematics and the world (Математика и мир)»[3].

Отсутствие общепринятого названия обсуждаемой области, конечно же, не случайно. Оно свидетельствует о сложностях с определением границ, смыслового ядра и статуса философии применения математики. Терминологическая неопределенность связана с плохой проясненностью соответствующих проблем. Посмотрим на нижеследующий список и попробуем ответить на вопрос, как соотносятся между собой:

- математизация (mathematization);
- приложение (применение?) математики (the applicability of mathematics);
- прикладная математика (applied mathematics);
- математические модели (mathematical models) и математическое моделирование;
- математика как язык науки: использование в некоторой области «математического языка» (mathematics as a/the language of science).

Перечислю и несколько все еще далеких от общепринятого решения проблем:

- различение и соотнесение чистой и прикладной математики (pure/applied mathematics distinction);
- проблема отношения математики к реальности (mathematics and reality);
- что означают «абстрактность», «идеальность» и «формальность» в применении к математике, и как они соотносятся с «конкретным» и «реальным» в контексте ее приложений;
- теоретизация и математизация: сходства, различия, взаимосвязь.

Несмотря на многие неясности, литература, относящаяся к философии применения математики, за последние годы стала весьма

---

[1] *Pincock C.* Mathematics and Scientific Representation. Oxford University Press, 2012. P. xiii.

[2] *Shapiro S.* (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005. P. 625–650.

[3] *Irvine A.D.* (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009. P. 651–702.

и весьма обширной. В ней явно выделяются *два кластера*. Первый связан с так называемым «аргументом от неустранимости» (the indispensability argument), второй — с проблематикой «математического объяснения» (mathematical explanation). В заключение представлю кратко каждый из них.

Аргумент от неустранимости

«Аргумент от неустранимости», или, более полно, «аргумент от неустранимости Куайна-Патнэма в пользу математического реализма» (the Quine-Putnam indispensability argument for mathematical realism), был сформулирован на рубеже 1970-х гг. американскими аналитиками Уиллардом Куайном[1] и Хилари Патнэмом[2]. Делались попытки оспорить аргумент Куайна-Патнэма, из которых самая известная была предпринята в 1980-е годы учеником Патнэма — Хартри Филдом[3]. Уже знакомый нам Марк Коливан написал целую диссертацию по данному вопросу[4]. В последнее время эта тема стала весьма популярна, о чем свидетельствуют значительный поток публикаций и появление сразу двух специализированных статей в интернет-энциклопедиях[5].

---

[1] Позиция Куайна по проблеме применения математики представлена в многочисленных статьях, из которых наиболее характерны следующие: О том, что есть <1948> // Куайн У.В.О. С точки зрения логики. М.: Канон+, 2010. С. 21–44; Две догмы эмпиризма <1950> // Там же. С. 45–80; Carnap and Logical Truth <1954> // Quine W.V. The Ways of Paradox and Other Essays. NY: Random House, 1966. P. 100–125; Success and Limits of Mathematization <1978> // Quine W.V. Theories and Things. Cambridge, MA: Belknap Press, 1981. P. 148–155; Вещи и их место в теориях <1980> // Аналитическая философия: становление и развитие (Антология) / Общая ред. и составление А.Ф. Грязнова. М.: ДИК, Прогресс-Традиция, 1998. С. 322–342.

[2] Явным образом «аргумент от неустранимости» был введен Патнэмом в работе «Philosophy of Logic» (1971). См.: Философия логики // Патнэм Х. Философия сознания. М.: ДИК, 1999. С. 103–145. В русском переводе А.Л. Никифорова термин, к сожалению, оказался несколько «растворен». Название раздела VIII «Indispensability Arguments» по-русски звучит «Необходимость как аргумент в пользу реализма» (с. 134).

[3] *Field H.* Science without Numbers: A Defence of Nominalism. Oxford: Blackwell, 1980; *Field H.* Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell, 1989.

[4] *Colyvan M.* The Indispensability of Mathematics. NY: Oxford University Press, 2001.

[5] *Colyvan M.* Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics (1998, substantive revision 2014) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/; *Marcus R.* The Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/indimath/. Литература на русском языке по данному вопросу практически отсутствует. В качестве

Аргумент (в самом общем виде) может быть сформулирован в следующей силлогистической форме[1]:

(P1) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к тем и только тем сущностям, которые неустранимы из наших лучших естественно-научных теорий.

(P2) Математические сущности неустранимы из наших лучших естественно-научных теорий.

(C) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к математическим сущностям.

Для нас этот аргумент интересен тем, что он *связывает* классические онтологические проблемы (спор реалистов и номиналистов) с проблемой применения математики в естествознании. В связи с тем, что предложенный силлогизм является формально правильным, основное внимание привлекает вопрос об истинности посылок P1 и P2. Приглядимся к ним поближе.

Первая из них использует термин Куайна «онтологические обязательства» (ontological commitment). Другими словами, здесь предполагается вполне определенное понимание онтологии. Принятие некоторой научной теории означает (для Куайна) принятие соответствующего языка, допускающего однозначное логическое прояснение. В результате этого прояснения мы выявляем так называемые связанные переменные или переменные квантификации. Именно они и задают нашу онтологию. «Теория обязывает к тем и только к тем сущностям, на которые должны быть способны указывать связанные переменные этой теории, для того чтобы сделанные в ней утверждения были истинными»[2]. Или более кратко: «Быть — значит быть значением переменной»[3]. Однако мы способны *изменять* наши теории, изменяя тем самым и наши онтологические обязательства: «Наше обязательство остается до тех пор, пока мы не придумаем некоторого способа перефразировки высказывания»[4]. В решении вопроса о том, какую теорию (а тем самым и онтологию) предпочесть, Куайн зани-

---

приятных исключений укажу: *Хлебалин А.В.* Онтологические обязательства неустранимости математики // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2009. № 4(8). С. 60–68; *Николаев В.М.* Необходимость математики для научных теорий как свидетельство существования абстрактных математических объектов // Философия, наука, образование — 2010 / Под ред. О.Д. Волкогоновой, В.А. Шапошникова. М.: ООО «МЭЙЛЕР», 2010. С. 230–242.

[1] При формулировке и обсуждении аргумента я опираюсь, главным образом, на энциклопедическую статью Марка Коливана для SEP.

[2] *Куайн У.* О том, что есть... С. 37.

[3] Там же. С. 40.

[4] Там же. С. 37.

мает *прагматическую* позицию, следуя по стопам Пирса и рекомендуя «терпимость и экспериментаторский дух»[1].

Разговор о «наших лучших естественнонаучных теориях» (our best scientific theories) в той же первой посылке, очевидно, отсылает нас к *натурализму* Куайна. Куайн верит в физические объекты, а не в гомеровских (или каких-то других) богов[2]. В этой связи очень интересен вопрос о характере *долженствования* (we ought to have, «нам надлежит»), которое звучит в P1. Это долженствование имеет, по крайней мере, два слоя: а) слой, связанный с куайновским пониманием онтологических обязательств, которые влечет за собой принятие (на прагматических основаниях!) некоторой теории; б) слой, связанный с натуралистической установкой, заставляющей нас относиться соответствующим образом к лучшим (на настоящий момент!) естественно-научным теориям.

В обеих посылках речь идет о «неустранимости» (indispensability) математики. Что имеется в виду? Можно, например, говорить о формальной и прагматической устранимости или неустранимости. *Формальная* устранимость означает возможность формального перестроения языка соответствующей научной теории, приводящего к элиминации соответствующих языковых элементов. *Прагматическая* же означает готовность реального научного сообщества, руководствующегося соображениями удобства, привычки и т.п., произвести соответствующую реформу. Как выражается М. Коливан, альтернативная теория должна быть привлекательной.

Говоря об альтернативных теориях в контексте обсуждаемого аргумента важно учесть также *холизм* Куайна. Он убежден, что опыт подтверждает или опровергает нашу логику и математику только как часть *целого* — всех наших естественнонаучных представлений о мире, но никогда в отдельности[3]. Наша склонность менять одни части этой системы скорее, чем другие, имеет под собой не столько принципиальные, сколько (опять же) прагматические основания. В связи с куайновским холизмом возникает вопрос: есть ли он всего лишь теоретический тезис максимальной общности или это реальная рабочая основа научной методологии? Например, Пенелопа Мэдди принимает натурализм, но ставит под вопрос холизм, полагая, что он плохо согласуется с реальной методологией ученых[4].

---

[1] Там же. С. 44.

[2] *Куайн У.* Две догмы эмпиризма... С. 77–78.

[3] Там же. С. 75–77.

[4] *Maddy P.* Naturalism in Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997. Sec. II.6: Indispensability and Scientific Practice.

В аргументе речь идет также о «математических сущностях» (mathematical entities). Что это такое? Имеется в виду вся математика или какая-то ее привилегированная часть? Судя по контексту, можно предположить, что онтологические обязательства мы имеем по отношению к той и только той математике, которая используется естествоиспытателями на текущий момент. А как быть с математическими теориями (и соответствующими сущностями) не находящими такого применения? Отметим также: граница между теми и другими сущностями исторически подвижна. Более того, даже если мы ограничимся применяемой математикой, то и здесь ситуация далеко не гомогенна. Одно дело, если речь идет о некой предельно математизированной физической теории, претендующей на роль теории всего, когда зазор между физической реальностью и соответствующими математическими сущностями становится едва различимым. Другое дело — если перед нами пример математического моделирования, когда сами ученые убеждены, что вводят удобные для расчетов математические фикции, которым ничего или почти ничего в физической реальности не соответствует (например, гипотеза сплошности в механике сплошных сред, предположения об абсолютной несжимаемости жидкости, ее бесконечной глубине и т.п.).

Споры вокруг аргумента Куайна—Патнэма составляют заметный компонент современной англоязычной философии математики, я лишь попытался показать, почему этот аргумент оказался плодотворным основанием для широкой дискуссии.

Математическое объяснение

Чтобы перейти к проблеме математического объяснения, нам следует задать вопрос: *почему* математика неустранима из науки, какие *цели* достигаются благодаря применению математики в какой-либо области? Нетрудно заметить, что на поставленные вопросы существует много разных ответов. Вот некоторые из подобных целей:

- описание (description);
- объяснение (explanation);
- прояснение (clarification, elucidation);
- открытие (discovery);
- унификация (unification);
- подтверждение (confirmation);
- предсказание (prediction);
- визуализация (visualization), в том числе математические аналогии (analogies) и математические метафоры (math metaphors);
- достижение согласия между учеными (convergence).

Говоря о математическом объяснении, современные авторы приводят несколько излюбленных примеров[1]. Я остановлюсь только на двух из них — один связан с применением для получения объяснения экстремальных свойств геометрических фигур, другой — простых чисел. Причем оба примера связаны не с физикой, а с биологией, поскольку в этой области ситуация с успешным применением математики куда более сложная и спорная. Мои нижеследующие комментарии к этим примерам далеко не так оптимистичны, как у Паоло Манкозу, Даниэле Молинини и ряда других авторов.

Почему ячейки пчелиных сот имеют форму правильных шестиугольников? Еще Марк Варрон (в I в. до н.э.) обращал на это внимание, указывая, что шестиугольник выбран пчелами, поскольку он, как утверждают геометры, вмещает больше всего меду. Чарльз Дарвин видел в пчелиных сотах результат естественного отбора — шестиугольное замощение плоскости позволяет минимизировать расход воска. Однако достаточно полно предположение об экстремальных свойствах пчелиных сот (honeycomb conjecture) было доказано только в 1999 г. американским математиком Томасом Хейлзом в следующем виде: всякое разбиение плоскости на равные по площади участки имеет суммарный периметр не меньший, чем соответствующее гексагональное разбиение[2].

Казалось бы, перед нами прекрасное объяснение, имеющее две компоненты: 1) биологическую или эволюционную; 2) чисто геометрическую. Причем вторая играет существенную роль[3]. К сожалению, эту красивую картину несколько портят появившиеся в последнее время публикации, приводящие серьезные (как экспериментальные, так и теоретические) аргументы в пользу альтернативной картины. Согласно новому подходу, изначально пчелы делают ячейки своих сот круглыми, а близкую к шестиугольной форму они приобретают в процессе застывания воска под воздействием чисто физических сил[4]. Заметим, впрочем, что и в новом объяснении математика опять

---

[1] См. энциклопедическую статью: *Mancosu P.* Explanation in Mathematics (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/; а также недавнюю PhD-диссертацию: *Molinini D.* Toward a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena (July 2011), Universite Paris Diderot (Paris 7) & Universitat de Barcelona. P. 5–6.

[2] *Hales T.* The Honeycomb Conjecture // Discrete & Computational Geometry, 2001. Vol. 25. N 1. P. 1–22.

[3] *Lyon A., Colyvan M.* The Explanatory Power of Phase Spaces // Philosophia Mathematica (III). Vol. 16. N 2 (June 2008). P. 228–229.

[4] *Karihaloo B.L., Zhang K., Wang J.* Honeybee Combs: How the Circular Cells Transform into Rounded Hexagons // Journal of the Royal Society Interface, 6 September 2013. Vol. 10. N 86, 20130299, http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.0299;

же играет существенную роль, но уже не прямо, а будучи запрятана внутрь физической теории, описывающей процесс застывания воска с помощью соответствующей системы уравнений.

Второй популярный пример связан с так называемыми периодическими цикадами (род Magicicada)[1]. Эти насекомые, обитающие в Северной Америке, имеют весьма необычный жизненный цикл. В состоянии личинок (нимф) они проводят 13 или 17 лет под землей (для насекомых это очень долго), затем синхронно и в огромных количествах выходят на поверхность, превращаются во взрослых особей, которые спариваются, откладывают яйца и вскоре погибают. Наземная часть цикла занимает всего около месяца.

Один из вопросов, который возникает в связи с особенностями цикла этих цикад, — почему периодичность их жизни задают именно *простые* 13 и 17, а не какие-то *составные* числа? Может быть это случайное совпадение? Так и думали, пока в 1977 г. известный американский биолог Стивен Джей Гулд не высказал предположение, что для предпочтения простых периодов может иметься особое основание[2].

В течение недели с момента появления на поверхности, цикады являются легкой и желанной добычей для всевозможных наземных хищников — поедателей насекомых (в особенности птиц). Поэтому одна из гипотез состоит в том, что массовое одновременное появление цикад — это попытка «пресытить хищников» (a strategy of predator satiation). В этом случае, важно еще, чтобы такое массовое появление происходило достаточно редко и поедатели не могли под него подстроиться. Большинство потенциальных хищников имеют жизненные циклы существенно более короткие (2–5 лет), следовательно, они не подстроены под цикл цикад. Однако если совпадение все же произойдет, цикады с удовольствием будут съедены. Значит, для цикад жизненно важно свести число возможных совпадений к минимуму. Предположим, пишет Гулд, что жизненный цикл хищника — 5 лет. Если цикл цикады будет 15 лет, то такой хищник сможет подстроиться под него, поскольку 15 делится на 5. Если ее цикл будет 12 лет, то под него сможет подстроиться любой из хищников с жизненным циклом 2, 3 или 4 года. С этой точки зрения оптимальным

Ball P. How Honeycombs Can Build Themselves: Physical Forces rather Than Bees' Ingenuity Might Create the Hexagonal Cells // Nature, 17 July 2013, doi:10.1038/nature.2013.13398.

[1] *Williams K.S., Simon C.* The Ecology, Behavior, and Evolution of Periodical Cicadas // Annual Review of Entomology. 1995. Vol. 40. P. 269–295; *Baker A.* Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // Mind. 2005. Vol. 114. N 454 (April 2005). P. 223–238.

[2] *Gould S.J.* Of Bamboos, Cicadas and the Economy of Adam Smith // Gould S.J. Ever Since Darwin: Reflections in Natural History. New York: W.W. Norton & Company Inc., 1977. P. 97–102.

для длины цикла цикады оказывается не слишком маленькое простое число, например 13 или 17.

Не так давно подтвердить эту идею предпочтительности простых длин жизненного цикла с точки зрения отношений «хищник-жертва» взялись с помощью математического моделирования на основе теории клеточных автоматов. Применяя эту методику, Эрик Голс с соавторами[1] пришел к выводу, что действительно «у этого типа динамики имеются родовые свойства, которые благоприятствуют появлению простых чисел». Они даже говорят в этой связи о своеобразном «биологическом генераторе простых чисел». Правда они изначально исходили из циклического характера жизни как хищников, так и их жертв, оценивая лишь вероятность того, что та или иная длина жизненного цикла выведет своего обладателя на устойчивый режим существования. Однако решающая роль хищников с отчетливо выраженной цикличностью в случае периодических цикад экспериментально не установлена. Пауло Кампос с соавторами[2] отходит дальше от гипотезы Гулда, освобождая свою модель от изначального предположения о циклическом характере жизни как хищников, так и жертв. В результате у них получается, что жертвы демонстрируют явную цикличность с предпочтением простых чисел даже при отсутствии четкой цикличности хищников-поедателей. «Это сильное свидетельство в пользу эволюционной предпочтительности жизненных циклов, выраженных простыми числами», — пишут они.

Имеются и другие попытки построить математическую модель, объясняющую появление таких жизненных циклов. Так, вводя некоторые дополнительные предположения (порой довольно искусственные), можно получить предпочтительность именно простых чисел 13 и 17. Например, Николас Лиманн-Цибарт с соавторами[3] в результате попыток математического моделирования экологической ситуации периодических цикад пришли к выводу, что экологические факторы ответственны за синхронное появление цикад, но простота циклов объясняется какими-то пока не установленными физиологическими или генетическими механизмами, но допускающими переключение между 13-летним и 17-летним периодами. (Есть экспериментальные данные, согласно которым, цикада может «пропустить» положенный ей 13-й год и появиться на 17-й). Названными авторами была выска-

---

[1] *Goles E. et al.* A Biological Generator of Prime Numbers // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2000. Vol. 3. N 2. P. 208–213; *Goles E. et al.* Prime Number Selection of Cycles in a Predator-Prey Model // Complexity. 2001. Vol. 6. N 4. P. 33–38.

[2] *Campos P.R.A. et al.* Emergence of Prime Numbers as the Result of Evolutionary Strategy // Physical Review Letters. 27 August 2004. Vol. 93. N 9. P. 098107(1-4).

[3] *Lehmann-Ziebarth N. et al.* Evolution of Periodicity in Periodical Cicadas // Ecology. 2005. Vol. 86. N 12. P. 3200–3211.

зана также чисто умозрительная гипотеза, что отвечающий за простоту механизм может заключаться в том, как устроены биологические часы наших цикад. Если предположить, что они высчитывают длинные периоды, используя двое (дополняющих друг друга) краткосрочных биологических часов, одни из которых способны определить максимум два года (а затем обнуляются), а другие — максимум три года. Используя такую двойную систему подсчета времени (a dual-clock counting mechanism) они способны идентифицировать только те годы, которые не делятся ни на 2, ни на 3. В диапазоне от 12 до 18 лет это как раз только 13 и 17.

С биологической точки зрения есть веские основания скептически относиться к полученным с помощью математики результатам.

1. Есть целый ряд различных гипотез о биологических причинах столь длинного жизненного цикла периодических цикад: наряду с обсуждавшейся выше причиной (давление со стороны поедателей взрослых особей) это необходимость избегать близкородственного скрещивания и состязание между нимфами разных выводков и др. Возможно, некоторые из этих причин действуют в сочетании.

2. Все имеющиеся гипотезы очень плохо подтверждены экспериментально.

3. Имеющиеся математические модели слишком упрощают реальную экологическую ситуацию периодических цикад. При этом нет биологических подтверждений тому, что избранные при их построении факторы — решающие. Даже если принять, что решающий фактор — это хищники-поедатели, то еще нужно выяснить какие именно: птицы, мелкие млекопитающие, другие насекомые, грибы (например, Massospora cicadina) и т.д., причем уточнив, о каких именно видах идет речь. Кроме того, есть еще целый ряд экологических факторов, которые могут оказаться весьма существенными. Например, практически одновременная гибель (вскоре после спаривания и кладки яиц) огромного количества взрослых цикад, мертвые тела которых буквально устилают землю, существенно обогащает почву со всеми вытекающими отсюда последствиями. Одно из недавних исследований давления на периодических цикад со стороны ряда наиболее характерных птиц-поедателей обнаружило, что на годы массового появления цикад приходятся минимумы поголовья птиц, после чего следует всплеск. Авторы полагают, что их исследование «позволяет предположить, что необычный жизненный цикл периодических цикад способен “проектировать” (engineer) популяции птиц таким образом, что это не позволяет птицам отслеживать массовое появление цикад, но не благодаря большой длине цикла или выражения этой длины простым числом, а скорее через постановку популяций птиц на такую траекторию развития, что последующее появление цикад

будет совпадать с пониженным давление на них со стороны птицпоедателей»[1].

Я не случайно так подробно остановился на этих двух примерах — пчелиных сотах и периодических цикадах. На мой взгляд, они, с одной стороны, достаточно просты, а с другой — хорошо иллюстрируют сложность проблемы применения математики вообще и математического объяснения в частности.

Современные авторы часто связывают тематику математического объяснения с обсуждением аргумента Куайна—Патнэма. Эту идею ясно высказал Алан Бейкер[2]. Он предлагает свою версию аргумента от неустранимости, свободную от столь критикуемого куайновского холизма, но привязанную к наличию подлинных математических объяснений:

(P*1) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к тем теоретическим сущностям, которые постулируются подлинными естественно-научными объяснениями.

(P*2) Имеются подлинные математические объяснения эмпирических явлений.

(C*) Нам надлежит иметь онтологические обязательства по отношению к сущностям, постулируемым соответствующей математикой.

Впрочем, эта версия аргумента от неустранимости также уязвима для критики. Так, главный пример Алана Бейкера для «подлинного математического объяснения» — это пример с периодическими цикадами. Как мы имели возможность видеть, с этим примером не все обстоит так гладко, как хотелось бы Бейкеру. Вопрос о наличии подлинных математических объяснений, об истинной роли математики в них и о неустранимости этой математики остается открытым. Не только вторая, но и первая посылка так сформулированного аргумента уязвима. В самом ли деле успешная математическая модель накладывает на нас определенные онтологические обязательства? Сторонники фикционалистской трактовки математики (например, Мэри Лэнг) оспаривают это[3]. Успешное применение математики может быть совместимо не только с реалистическими, но и с антиреалистическими представлениями. Как справедливо пишет Лэнг, «само

---

[1] *Koenig W.D., Liebhold A.M.* Avian Predation Pressure as a Potential Driver of Periodical Cicada Cycle Length // The American Naturalist. January 2013. Vol. 181. N 1. P. 148.

[2] *Baker A.* Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // Mind. 2005. Vol. 114. P. 223–238.

[3] Фикционалистский анализ примера с периодическими цикадами см.: *Leng Mary.* Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010. P. 245–249. Еще в конце 1990-х гг. куайновское понимание онтологических обязательств оспаривала Пенелопа Мэдди.

применение математики часто требует от нас делать определенно ложные, или, во всяком случае, необоснованные идеализирующие предположения относительно тех явлений, к которым наша математика, в конечном счете, применяется»[1]. Более того, математические теории применяются не к реальности как таковой, а к идеальным моделям реальности, т.е. к уже определенным образом подготовленным описаниям явлений. Лэнг предлагает рассматривать наши научные теории как своего рода «слоеный пирог», состоящий из многих слоев идеализированных фиктивных моделей.

Таким образом, тема математического объяснения оказывается тесно связанной с проблемой моделирования и использования идеализаций в науке. Мэри Лэнг и Паоло Манкозу ссылаются в этом контексте на работы канадского философа науки Маргарет Моррисон[2]. В книге 2000 г. Моррисон ставит под сомнение объяснительные возможности математики, математический формализм облегчает унификацию научных теорий, но не помогает нам отвечать на вопросы «как?» и «почему?». Другой же канадский философ науки, Роберт Баттерман, настаивает на существенной роли, которую математика играет в науке благодаря так называемым «асимптотическим объяснениям»[3].

Паоло Манкозу пишет в своем обзоре: «Несмотря на впечатляющую историческую родословную проблемы математического объяснения[4] <...>, работа аналитической философии в этой области еще только началась»[5]. В самом деле, эта проблематика еще весьма далека от убедительной разработки и оставляет широкое поле для будущих исследователей.

На этом я позволю себе завершить обзор современного состояния «философии применения математики». Названная тема представляется мне одной из самых перспективных, если не самой перспективной, для философии математики в ближайшем будущем. Надеюсь, что и наша книга «Математика и реальность» внесет посильную лепту в этот процесс.

---

[1] Ibid. P. 250.

[2] Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science / Ed. by M.S. Morgan and M. Morrison. New York: Cambridge University Press, 1999; *Morrison M.* Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures. New York: Cambridge University Press, 2000.

[3] *Batterman R.W.* The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction, and Emergence. New York: Oxford University Press, 2002.

[4] Манкозу возводит ее к Аристотелю.

[5] *Mancosu P.* Explanation in Mathematics (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/

Библиографический список

Бэкон Р. Избранное. М.: Изд-во Францисканцев, 2005.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Пер. В.А. Белоконя и В.А. Угарова // Успехи физических наук. Т. 94. Вып. 3 (Март 1968). С. 535–546.

Вигнер Е. Этюды о симметрии / Пер. Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1971. С. 182–198.

Визгин Вл.П. «Догмат веры» физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблема знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е.Н. Молодцова. СПб.: Алетейя, 2001. С. 123–141.

Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой // Галилей Г. Избранные труды: В 2 т. М.: Наука, 1964. Т. 1.

Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987.

Крафт В. Венский кружок: Возникновение неопозитивизма. <1950> М.: Идея-Пресс, 2003.

Куайн У.В.О. Вещи и их место в теориях <1980> // Аналитическая философия: становление и развитие (Антология) / Общая ред. и составление А.Ф. Грязнова. М.: ДИК, Прогресс-Традиция, 1998. С. 322–342.

Куайн У.В.О. С точки зрения логики. М.: Канон+, 2010.

Николаев В.М. Необходимость математики для научных теорий как свидетельство существования абстрактных математических объектов // Философия, наука, образование — 2010 / Под ред. О.Д. Волкогоновой, В.А. Шапошникова. М.: ООО «МЭЙЛЕР», 2010. С. 230–242.

Патнэм Х. Философия логики <1971> // Патнэм Х. Философия сознания. М.: ДИК, 1999. С. 103–145.

Тегмарк М. Параллельные вселенные // В мире науки. 2003. № 8. С. 23–33.

Фантоли А. Галилей: в защиту учения Коперника и достоинства Святой Церкви. М.: МИК, 1999.

Фейерабенд П. Галилей и тирания истины // Фейерабенд П. Прощай, разум. М.: АСТ, Астрель, 2010. С. 321–345.

Фоллмер Г. Мезокосмос и объективное познание // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 1994. № 6. С. 35–56; 1995. № 1. С. 27–47.

Фреге Г. Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008.

Хлебалин А.В. Онтологические обязательства неустранимости математики // Вестн. Томского гос. ун-та. Философия. Социология. Политология. 2009. № 4(8). С. 60–68.

Шапошников В.А. Математический скептицизм и абсолютистская трактовка доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики. / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: Книжный дом «Либроком» (URSS), 2014. С. 282–320.

Agazzi E., Darvas G. (eds.) Philosophy of Mathematics Today. Dordrecht: Kluwer, 1997.

Baker A. Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // Mind. V. 114. N 454 (April 2005). P. 229–233.

Ball P. How Honeycombs Can Build Themselves: Physical Forces rather Than Bees' Ingenuity Might Create the Hexagonal Cells // Nature. 17 July 2013. doi:10.1038/nature.2013.13398.

Bangu S. The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology. Palgrave Macmillan, 2012.

Batterman R.W. The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction, and Emergence. New York: Oxford University Press, 2002.

Bueno O., Colyvan M. An Inferential Conception of the Application of Mathematics // Noûs. V. 45. N 2 (June 2011). P. 345–374.

Bueno O., Linnebo Ø. (*eds.*) New Waves in Philosophy of Mathematics. Palgrave Macmillan, 2009.

Brown J.R. Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures. New York: Routledge, 1999.

Brown J.R. Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures. 2nd ed. New York: Routledge, 2008.

Campos P.R.A. et al. Emergence of Prime Numbers as the Result of Evolutionary Strategy // Physical Review Letters. 27 August 2004. V. 93. N 9. P. 098107(1-4).

Carnap R. Formal and Factual Science <1934> // Readings in the Philosophy of Science / Ed. by H. Feigl and M. Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crafts, inc., 1953. P. 123–128.

Colyvan M. Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics (1998, substantive revision 2014) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/

Colyvan M. The Indispensability of Mathematics. New York: Oxford University Press, 2001.

Colyvan M. The Miracle of Applied Mathematics // Synthese. V. 127. N 3 (June 2001). P. 265–277.

Colyvan M. An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

Colyvan M. The Undeniable Effectiveness of Mathematics in the Special Sciences (manuscript), http://www.colyvan.com/papers/uemss.pdf

Dorato M. The Laws of Nature and the Effectiveness of Mathematics // Boniolo G., Budinich P., Trobok M. (eds.) The Role of Mathematics in Physical, Interdisciplinary and Philosophical Aspects. Dordrecht: Springer, 2005. P. 131–144.

Dummett M. Frege. Philosophy of Mathematics. London: Duckworth, 1991.

Field H. Science without Numbers: A Defence of Nominalism. Oxford: Blackwell, 1980.

Field H. Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell, 1989.

French S. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics // Synthese. V. 125. N 1–2 (Jan. 2000). P. 103–120.

Ginzburg L., Jensen Ch., Yule J. Aiming the "Unreasonable Effectiveness of Mathematics" at Ecology Theory // Ecological Modelling. V. 207 (2007). P. 356–362.

Goles E. et al. A Biological Generator of Prime Numbers // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2000. V. 3. N 2. P. 208–213.

Goles E. et al. Prime Number Selection of Cycles in a Predator-Prey Model // Complexity. 2001. V. 6. N 4. P. 33–38.

Gould S.J. Of Bamboos, Cicadas and the Economy of Adam Smith // Gould S.J. Ever Since Darwin: Reflections in Natural History. New York: W.W. Norton & Company Inc., 1977. P. 97–102.

Grattan-Guinnesse I. Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // The Mathematical Intelligencer. V. 30. N 3 (Summer 2008). P. 7–17.

Hales T. The Honeycomb Conjecture // Discrete & Computational Geometry. 2001. V. 25. N 1. P. 1–22.

Hamming R.W. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics // The American Mathematical Monthly. V. 87. N 2 (Feb. 1980). P. 81–90.

Harvey A. The Reasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences (Dec. 2012) http://arxiv.org/pdf/1212.5854.pdf

Hempel C.G. On the Nature of Mathematical Truth // The American Mathematical Monthly. V. 52. N 10 (Dec. 1945). P. 543–556.

Hempel C.G. Geometry and Empirical Science // The American Mathematical Monthly. V. 52. N 1 (Jan. 1945). P. 7–17.

Hendricks V.F., Leitgeb H. (eds.). Philosophy of Mathematics: 5 Questions. Automatic Press / Vince Inc. Press, 2008.

Interviews with Nobel Laureates and Other Scholars: Brought on the Occasion of World Congress for the Synthesis of Science and Religion. Bombay: Bhaktivedanta Institute, 1986.

Irvine A.D. (ed.) Philosophy of Mathematics. (Handbook of the Philosophy of Science). Amsterdam: North Holland (Elsevier), 2009.

Karihaloo B.L., Zhang K., Wang J. Honeybee Combs: How the Circular Cells Transform into Rounded Hexagons // Journal of the Royal Society Interface. 6 September 2013. V. 10. N 86, 20130299, http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.0299

Kepler J. The Harmony of the World / Tr. by E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.

Koenig W.D., Liebhold A.M. Avian Predation Pressure as a Potential Driver of Periodical Cicada Cycle Length // The American Naturalist. January 2013. V. 181. N 1. P. 145–149.

Lehmann-Ziebarth N. et al. Evolution of Periodicity in Periodical Cicadas // Ecology. 2005. V. 86. N 12. P. 3200–3211.

Leng M. Mathematics and Reality. New York: Oxford University Press, 2010.

Lesk A. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Molecular Biology // The Mathematical Intelligencer. V. 22. N 2 (2000). P. 28–36.

Lesk A. Compared to What? // The Mathematical Intelligencer. V. 23. N 1 (2001). P. 4.

Longo G. The Reasonable Effectiveness of Mathematics and Its Cognitive Roots // Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. World Scientific, 2005. P. 351–382.

Lyon A., Colyvan M. The Explanatory Power of Phase Spaces // Philosophia Mathematica (III). V. 16. N 2 (June 2008). P. 227–243.

Maddy P. Naturalism in Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

Maddy P. Second Philosophy: A Naturalistic Method. New York: Oxford University Press, 2007.

Mancosu P. Explanation in Mathematics (2008, substantive revision 2011) // Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP), адрес доступа: http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/

Marcus R. The Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/indimath/

Mickens R.E. (ed.) Mathematics and Science. Singapore: World Scientific, 1990.

Molinini D. Toward a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena. PhD dissertation (July 2011). Universite Paris Diderot (Paris 7) & Universitat de Barcelona.

Morgan M.S., Morrison M. (eds.) Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science. New York: Cambridge University Press, 1999.

Morrison M. Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures. New York: Cambridge University Press, 2000.

Omnès R. Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited // Foundations of Physics. V. 41. N 11 (Nov. 2011). P. 1729–1739.

Pincock C. A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics // Philosophia Mathematica. V. 3 (2004). N 12. P. 135–161.

Pincock C. Mathematics and Scientific Representation. Oxford University Press, 2012.

Pincock C. The Applicability of Mathematics (2010) // Internet Encyclopedia of Philosophy (IEP), адрес доступа: http://www.iep.utm.edu/math-app/

Plotnitsky A. On the Reasonable and Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Classical and Quantum Physics // Foundations of Physics. V. 41. N 3 (Mar. 2011). P. 466–491.

Quine W.V. Carnap and Logical Truth <1954> // Quine W.V. The Ways of Paradox and Other Essays. New York: Random House, 1966. P. 100–125.

Quine W.V. Success and Limits of Mathematization <1978> // Quine W.V. Theories and Things. Cambridge, MA: Belknap Press, 1981. P. 148–155.

Russ S. (guest ed.) Unreasonable Effectiveness of Mathematics // Interdisciplinary Science Reviews. V. 36. N 3 (Sep. 2011). P. 209–267.

Sarukkai S. Revisiting the "Unreasonable Effectiveness" of Mathematics // Current Science. V. 88. N 3 (Feb. 2005). P. 415–422.

Shapiro S. (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. New York: Oxford University Press, 2005.

Steen L.A. The Science of Patterns // Science. V. 240 (29 April 1988). P. 611–616.

Steiner M. The Application of Mathematics to Natural Science // The Journal of Philosophy. V. 86. N 9 (Sep. 1989). P. 449–480.

Steiner M. The Applicabilities of Mathematics // Philosophia Mathematica. V. 3. N 2 (May 1995). P. 129–156.

Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.

Szanton A. The Recollections of Eugene P. Wigner as Told to Andrew Szanton. Basic Books, 1992.

Tegmark M. The Mathematical Universe // Foundations of Physics. V. 38. N 2 (Feb. 2008). P. 101–150.

Velupillai V.K. The Unreasonable *In*effectiveness of Mathematics in Economics // Cambridge Journal of Economics. V. 29. N 6 (Nov. 2005). P. 849–872.

Wigner E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // Comm. Pure and Appl. Math. V. 13. N 1 (Feb. 1960). P. 1–14.

Wigner E. Symmetries and Reflections. Bloomington & London: Indiana University Press, 1967.

Williams K.S., Simon C. The Ecology, Behavior, and Evolution of Periodical Cicadas // Annual Review of Entomology. 1995. V. 40. P. 269–295.

Wilson M. The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences // Monist. V. 83. N 2 (2000). P. 296–394.

Wright C. Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege's Constraint // Cook R.T. (ed.) The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction. Dordrecht: Springer, 2007. P. 253–272.

Раздел
1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОНТОЛОГИЯ. ДВА ПОЛЮСА

В.Я. Перминов

ДЕЯТЕЛЬНОСТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕАЛИЗМА

Говоря об опытной науке, мы предполагаем, что она описывает некоторый аспект реальности. Затруднения появляются только при попытке точного определения этого аспекта: могут обнаружиться некоторые расхождения мнений при проведении границы между физикой и химией, физиологией и психологией и т.п.

С принципиально иной ситуацией мы встречаемся в математике. Основная трудность, которая здесь возникает, относится не к уточнению аспекта реальности, исследуемого теорией, а к самому факту его существования. Мы хотели бы понять, соответствуют ли математическим теориям стороны бытия, которые играют для них роль, сходную с ролью процессов природы для физических теорий. Этот вопрос, поставленный еще Платоном и Аристотелем, оказался чрезвычайно трудным. Надо признать, что мы до сих пор не имеем на него достаточно обоснованного и убедительного ответа.

В пользу того положения, что в основе математики лежит некая реальность, свидетельствуют два факта. Первый из них состоит в том, что исходные математические понятия даны нашему сознанию с особой очевидностью, они навязываются всем людям однозначно и непреложно. Этот факт заставляет думать, что имеются устойчивые аспекты реальности, ответственные за эту непреложность. Другой факт, подкрепляющий веру в реальность математики, состоит в эффективности математики как средства описания законов природы. Даже те математические теории, которые появляются внутри математики и первоначально нацелены только на разрешение ее внутренних проблем, как правило, находят затем эмпирическую интерпретацию и становятся частью прикладной математики. Это тяготение математических теорий к опыту, демонстрируемое всей историей математики, говорит о том, что мир математических понятий тесно соединен с реальностью и нацелен на ее описание.

Однако сами по себе эти факты ничего не объясняют. Они не вводят нас в математическую реальность и не раскрывают ее специфику. В современном понимании математики существует, таким образом,

давняя и все еще не устраненная неопределенность. С одной стороны, мы убеждены в реальности математических теорий, можно сказать, ощущаем ее, но, с другой стороны, мы не имеем никакого более или менее ясного ее теоретического определения. Ниже будет намечен некоторый подход к устранению этой неопределенности, проистекающий из деятельностной трактовки первичных математических идеализаций.

1. История вопроса и современная его постановка

Проблема реальности математических объектов возникла уже во времена Пифагора и Платона. Реальны ли объекты математики и если да, то где и как они существуют? У Платона мы находим три положения, которые составляют суть исходного, собственно платоновского понимания математической реальности. Платон утверждает, во-первых, что существует особый мир идеальных сущностей, отделенный от мира чувственных вещей, пребывающий вне пространства и времени, «за пределами неба»[1]. Он утверждает, во-вторых, что идеи и математические сущности в отличие от чувственных вещей не материальны, не зависимы от материальных вещей, а также вечны и неизменны. Он утверждает, наконец, что человек получает знания об этих сущностях не через чувственное восприятие, а лишь путем непосредственного схватывания их разумом, на основе внечувственной интуиции. Математические сущности, по Платону, несомненно реальны, ибо они — не что иное, как мысли Бога в акте творения, предшествующие реальности и определяющие ее строение.

Аристотель уходит от этой мистической трактовки. Вопрос о существовании математических предметов он решает исходя исключительно из способности разума к отвлеченному мышлению. Геометры и исследователи чисел, говорит он, изучают отдельно то, что отдельно не существует. От круглых предметов они отвлекают круглоту и исследуют ее саму по себе, отодвинув в сторону все другие свойства этих предметов. Геометр, по Аристотелю, исходит из опыта, но благодаря отвлечению создает особый мир предметов, которого нет в опыте.

Эмпирическая концепция Аристотеля, однако, не устранила платоновского идеализма. Философы не приняли той идеи Аристотеля, что исходные математические понятия всегда связаны с тем или иным опытом. Они указывали на то, что представления о непрерывности и бесконечности, которые содержатся уже в началах геометрии, нельзя изъять из опыта в качестве непосредственно наблюдаемых его сто-

[1] *Платон.* Сочинения: В 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1993. С. 136.

рон. Аристотелевский натурализм, таким образом, не снял вопроса о реальности математики. Мы видим настойчивое его повторение у Плотина, Порфирия, Боэция, Абеляра, а в Новое время — у Декарта, Лейбница, Канта, Гегеля, Больцано и Фреге.

В XX в. мы видим увеличение интереса к этому вопросу и еще более резкую поляризацию мнений относительно подходов к его разрешению. Мы видим противостояние крайнего реализма, который хотел бы обосновать математическое знание из допущения особого рода внечувственной реальности, и натурализма, близкого по духу к аристотелевской трактовке математики, который хотел бы вывести математические представления из реального опыта человека. Это противостояние отличается от древнего лишь в том отношении, что появляются новые подходы к истолкованию математических понятий, которые нельзя отнести ни к реализму, ни к натурализму. Самые значимые из этих подходов — конвенционализм, конструктивизм и фикционализм.

В наиболее определенной форме реалистическое понимание математики было сформулировано в 40-х гг. XX в. выдающимся математиком К. Гёделем. Платонизм Гёделя проистекает из его исследований по основаниям математики. Он считал, что аксиома выбора и другие аксиомы теории множеств могут быть приняты как безусловно истинные на основе непосредственного созерцания абстрактных объектов, к которым эти аксиомы относятся. В статье «Расселовская математическая логика» (1944) он писал: «Классы и концепты, однако, могут быть поняты как реальные объекты, а именно классы как “множества вещей”, или как структуры, состоящие из множества вещей, а концепты как свойства и отношения вещей, существующие независимо от наших определений и конструкций. Мне кажется, что допущение таких объектов столь же законно, как и допущение физических тел и имеется не меньше оснований верить в их существование. Они в той же мере необходимы для построения удовлетворительной системы математики, как и физические тела необходимы для удовлетворительной теории чувственных восприятий»[1]. Ту же идею он защищал в статье «Что такое аксиома выбора?» (1947). «Несмотря на свою несхожесть с чувственным восприятием, — пишет он, — мы имеем нечто подобное ему также и для объектов теории множеств, что усматривается в том факте, что аксиомы теории множеств навязаны нам как несомненно истинные»[2].

---

[1] *Gödel K.* Russell's mathematical logic // Pears D.F. (ed.) Bertrand Russell. Collection of critical essays. N.Y., 1972. P. 108.

[2] *Gödel K.* What is Cantor's continuum problem? // Philosophy of mathematics. Selected readings. N.Y., 1964. P.484.

Хотя рассуждения Гёделя близки к платоновским, здесь имеется важное различие. Математический реализм Гёделя в действительности не связан с мистическим онтологизмом Платона. Говоря о математических предметах, он не имеет в виду реальность, находящуюся в «занебесном мире», а лишь особую систему представлений, содержащихся в человеческом разуме, которая детерминирует становление математических аксиом и в принципе достаточна для определения их истинности. Онтологически-мистический реализм Платона, таким образом, переводится Гёделем в сферу теории познания, превращается в проблему прояснения содержательной основы математики, определяющей генезис ее исходных представлений.

Близкую к гёделевской позицию в наше время защищает английский математик Дэвид Мамфорд. Основной факт, доказывающий присутствие в математике особого слоя реальности, состоит, по Мамфорду, в том, что предмет математики обладает поразительной однозначностью, устойчивостью и преемственностью. Исторический факт, считает он, состоит в том, что математика в своем содержании едина и не зависит от культуры. «Как платонист, я чувствую, что есть только одна истинная математика: разные культуры в разное время проходили одни и те же верстовые столбы по мере того как они копали глубже»[1]. Единство и автономность математики, по Мамфорду, проистекают из некоторого общего и неизменного основания человеческого мышления. Усиление памяти у *homo sapiens*, считает он, привело к созданию охватывающих структур сознания, определяющих человеческое мышление. Здесь он указывает на роль универсальных категорий мышления. «Категории, — пишет он, — это пример класса когнитивных схем, которые связывают платоновские понятия»[2].

Платонизм Мамфорда, как и платонизм Гёделя, не предполагает существования платоновского внечувственного мира. Реальное основание математики с точки зрения Мамфорда существует, но оно имеет статус особого дометематического видения реальности, играющего роль истока и интуитивного основания математических абстракций. Это видение реальности задается, по Мамфорду, системой когнитивных схем, которые включают в себя и систему философских онтологических категорий.

В различных вариантах реалистическая позиция высказывалась такими известными математиками XX в., как П. Бернайс, А. Френкель, Г. Харди, Н. Бурбаки, Р. Пенроуз, А. Коннон и др. На уровне гносеологического анализа попытки обоснования математического реализма бытия предпринимались в работах Г. Динглера, Ж. Пиа-

[1] *Mumford D.* Why I am a Platonist // EMS Newsletter. December. 2008. P. 29.
[2] Там же.

же, В.О. Куайна, Х. Патнема, П. Медди, П. Берджеса, М. Штейнера и многих других философов. Интуитивное восприятие математики как науки о реальности хорошо выразил Г. Штейнгауз. «Математика, — писал он, — не шахматная игра, правила которой могут быть изменены по нашему произволу, поскольку ее принципы отражают реальность»[1]. Философия математического реализма выражает в себе веру математиков в то, что исторически развертывающаяся система математических понятий раскрывает перед нами некоторую структуру мира, необходимую для понимания той структуры, к которой приближаются опытные науки на основе эксперимента и индукции. Процесс углубления и расширения математизации знания, имевший место на протяжении всего XX в., также поддерживает веру ученых в объективную значимость математических структур.

Однако в течение последнего столетия существенно усилилась и антиреалистическая установка. В наиболее определенной форме она проявилась в интуиционизме Брауэра и в конвенционализме Л. Витгенштейна. Брауэр был убежден, что все математические понятия есть лишь интеллектуальные конструкции, не имеющие какой-либо основы в реальности. Если, говорил он, человечество исчезнет, то физические законы как реальные характеристики физических процессов будут и дальше существовать, но от математических теорем не останется ничего. Л. Витгенштейн видел за математическими понятиями только языковые конвенции и специфические языковые игры, которые создаются нашими определениями, а никоим образом не могут быть поняты в качестве структур, навязанных какой-либо внешней реальностью.

Формалистская философия математики, получившая в XX в. преобладающее влияние, также является антиреалистической по своей сути. Согласно формалистской установке математическое понятие адекватно определяется только в рамках теории, и возможные содержательные ассоциации, предшествующие этому определению, не играют здесь существенной роли. Обычный человек имеет некоторое представление о множестве, но понятие множества, определяемое в теории множеств, не является экспликацией этого первичного представления. Это обстоятельство ясно уже из того, что существует несколько форм аксиоматического задания теории множеств и, таким образом, несколько неравнозначных математических определений множества, каждое из которых согласуется с обыденной интуицией этого понятия. Но это значит, что множество как математический объект оформляется только в рамках определенной теории и не мо-

[1] *Штейнгауз Г.* О математической строгости // Задачи и размышления. М., 1974. С. 111.

жет быть понято в качестве отражения свойств чувственно воспринимаемых множеств.

Математические объекты могут быть приведены в связь с опытом в процессе эмпирической интерпретации, но ясно, что такого рода их реализация всегда условна, поскольку оно зависит от выбранной нами сферы интерпретации и от правил соотнесения терминов, которые также в определенной степени произвольны. Это значит, что у нас нет никаких оснований говорить о выделенном аспекте реальности, который *по своей сущности* соответствовал бы данному математическому понятию.

В своей крайней форме формалистское понимание математики ведет к фикционализму, а именно к пониманию математических объектов как знаков, определяемых лишь произвольно выбранными правилами действия. Фикционализм еще более радикализирует интуиционистскую трактовку математических объектов как мысленных конструкций, распространяя ее и на арифметические понятия, которые понимались интуиционистами как данные и обусловленные представлением о времени. В своей статье «Арифметические фикции» (1982) Стивен Вагнер проводит ту мысль, что числа создаются человеческим разумом как определенные инструменты и в различных ситуациях они могут определяться по-разному. Числа, пишет он, обозначают не камешки, не лужицы грязи, и даже не знаковые конструкции. Числа — лишь теоретические фикции, которые наделяются смыслом в конкретных приложениях посредством правил их соединения с данными опыта. «Чисел как таковых, — пишет он, — вообще не существует: понятия арифметики обозначают Ничто»[1].

Еще одно существенное возражение против математического реализма исходит из платоновского определения математической реальности как внечувственной. Вопрос ставится здесь следующим образом: может ли внечувственная реальность, к которой у нас нет никакого доступа, кроме некоторого рода внечувственной интуиции, претендовать на статус реальности вообще? Если мы примем за основу критерии существования, значимые для позитивной науки, то идея внечувственной реальности представляется чисто метафизическим домыслом, не допустимым в сфере рационального мышления. Брайан Дэвис в заметке под характерным названием «Пусть платонизм умрет» (2007) высказывает мнение, что идея внечувственной реальности совершенно ложна и глубоко схоластична. Математический реализм, считает он, выполняет лишь две функции: первая состоит в том, что он дает веру в надежности математики тем, кто нуждается в

[1] *Wagner S.* Arithmetical Fiction // Pacific Philosophical Quarterly. Vol. 63. 1982. P. 255.

такой вере, вторая же его функция состоит в том, что он дает работу сотням философов, которые тщетно пытаются соединить его со всем, что им известно о мире[1]. Математика, считает Дэвис, не отличается от других наук и, как и все другие науки, нацелена исключительно на понимание окружающего нас мира.

Здесь можно привести также аргументы против платонизма, высказанные Габриэлем Лолли в его книге «Философия математики: наследие двадцатого столетия». Субъективное восприятие чего-либо, хотя бы и обладающее качеством самоочевидности, считает он, не является гарантией наличия смысла в заявлении, что то, что наблюдается, является истинным или существует. Является также ошибочным положение платонистов, что математики умозрительно рассматривают структуры, которые они изучают. «Без какого-либо образования или подсказки, — пишет он, — ни один ребенок, рассматривая треугольник, не увидит в нем медианы»[2]. Математический платонизм, утверждая непосредственную интуитивную данность математических объектов, не может объяснить функции математических доказательств, которые, в действительности, заставляют нас признавать свойства объектов далеко не очевидные и часто противоречащие интуиции. «Представления платонистов, — заключает Лолли, — призрачны и ложны»[3].

В современной философии математики, таким образом, имеют место две ясно выраженные и диаметрально противоположные установки. Платонисты, указывая на непреложность математической интуиции и на эффективность математики в описании реальности настаивают на том, что математика — отнюдь не система логических фикций, а абстрактная картина реальности, выполняющая эвристическую роль в раскрытии физической реальности. Антиреалисты, указывая на сугубо внутреннюю определенность математических понятий, считают платонизм пережитком отжившей мистической философии математики, которая утратила смысл при осознании формально-логической природы математических понятий.

Прямое сравнение этих установок не выявляет преимущества ни одной из них. Реализм обладает определенной психологической убедительностью, но не трудно видеть, что он не имеет достаточного рационального оправдания. Рассуждения К. Гёделя о реальности множеств ничуть не более доказательны, чем рассуждения Платона о реальности чисел. И в том и в другом случае основной аргумент сводится к тому, что за математическими понятиями стоит нечто, не

---

[1] *Davies E.B.* Let Platonism Die // EMS Newsletter. June, 2007. P. 25.

[2] *Лолли Г.* Философия математики: наследие двадцатого столетия. Нижний Новгород, 2012. С. 134–135.

[3] Там же.

зависящее от нашего сознания и что это нечто таково, что способно однозначно навязывать нам как систему понятий, так и логику обращения с ними. Ясно, что здесь мы не идем дальше некоторого интуитивного и неопределенного по своим истокам убеждения. Но и позиция антиреалистов не выдерживает критики. Указывая на формальный, конструктивный и конвенциональный характер математических понятий и отвергая идею их сущностного коррелята в реальности, они не могут объяснить, почему эти конструкции и фикции столь однозначно навязаны нашему сознанию и почему они столь успешно применяются для описания опыта. Тезис Г. Штейнгауза «математика — не шахматная игра» остается ничуть не поколебленным. Обе позиции, таким образом, имея некоторые доводы в свою пользу, остаются одинаково декларативными и ограниченными.

2. Априорность и реальность онтологии

Высказывалось мнение, что в этой дискуссии назрел переход к третьей позиции, устраняющей слабости как реализма, так и антиреализма[1]. Представляется, однако, что решение проблемы лежит в другой плоскости. Ниже высказаны соображения в защиту реализма, опирающиеся на деятельностное определение математической онтологии и математической реальности.

Современная философия математики, конечно, не может принять математический реализм в его собственно платоновском варианте. Обоснование существования особого мира идеальных сущностей, раскрывающихся для нас только посредством внечувственной интуиции, противоречит логике рационального объяснения. Как уже указывалось, К. Гёдель осуществил необходимую рационализацию платоновской позиции. Ясно, что всякое адекватное прояснение сути математического реализма должно начинаться с проведенной Гёделем демистификации платоновской позиции.

Мы будем исходить здесь из интуитивно ясного и убедительного тезиса, заключающегося в том, что математика — не шахматная игра. Наша задача состоит в том, чтобы понять, в чем состоит различие между математической теорией и шахматной игрой, и, если внутренние правила математической теории не могут быть изменены произвольно, то какова природа этой необходимости и говорит ли она о реальности математической теории.

Для ответа на этот вопрос мы должны разделить всю систему математических теорий на две неравные и принципиально различаю-

[1] *Бажанов В.А.* Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. 2014. № 5. С. 52–63.

щиеся части. К исходной — *первичной* или базовой — математике мы отнесем такие теории, как арифметика и евклидова геометрия. Эта часть математики является интуитивно ясной в своих посылках и в операциях со своими объектами. Это та интуитивно ясная, элементарная, конечная и априорная математика, которую Д. Гильберт включал в состав своей метатеории в качестве безусловно надежной основы математического мышления вообще. К этой части математики может быть отнесена также и система общезначимых логических норм, составляющих основу всякого математического рассуждения. К *вторичной* или абстрактной математике мы отнесем соответственно все теории, кроме арифметики, евклидовой геометрии и логики. Хотя в теориях вторичной математики также имеют место интуитивно ясные (аподиктически очевидные) определения и принципы, аподиктическая очевидность здесь никогда не является полной и достаточной для определения теоретической системы в целом. Целостность теорий достигается здесь за счет конвенций, которые не могут быть оправданы через апелляцию к интуитивной ясности. Основное различие между первичной и вторичной математикой состоит в том, что если принципы первой навязываются нашему сознанию на основе непреложной очевидности, то принципы второй не имеют полного интуитивного оправдания своих аксиом.

Основное положение, которое мы должны здесь обосновать, состоит в том, что первичная математика онтологически истинна, реальна и трансцендентна в том смысле, что она имеет коррелят в мире самом по себе. В сущности, это установка сильного реализма, оправдывающая основную интуицию Платона, с той лишь разницей, что мы не оправдываем здесь представление о математических сущностях как пребывающих в ином мире, лежащем за пределами воспринимаемого мира. Для обоснования математического реализма мы нуждаемся не в разделении миров, а лишь в разделении аспектов реальности, выявляющихся в описании нашего мира.

Утверждая истинность математики, мы говорим, конечно, не об эмпирической истинности и не о чувственной данности математических объектов. Речь идет об онтологической истинности математики. Главная трудность состоит в прояснении статуса онтологии. Здесь всегда было много путаницы. Часто называют онтологией всякую понятийную конструкцию, относящуюся к реальности. В действительности, к философской онтологии следует относить только предельно общие подразделения реальности, выраженные в категориях. Хайдеггер считал, что кантовская система рассудочных категорий представляет собой метафизику или общую онтологию. Под термином онтология мы будем понимать в дальнейшем только общую онтологию в смысле Хайдеггера. Это значит, что мы не будем связывать со

словом «онтология» никаких суждений о мире, кроме тех, которые выражены в рассудочных основоположениях. Онтология, понятая в этом плане, — это тонкий слой представлений о мире, выраженный в универсальных категориях. Ясно, что научная картина мира не имеет отношения к философской онтологии. И даже философские построения типа диалектики, существенно базирующиеся на индукции, должны быть вынесены за пределы собственно категориальной онтологии.

Прежде всего мы должны понять априорную природу категорий и философской онтологии в целом. Категории отражают не структуру мира, данную в опыте, не общие представления теоретической науки и не инварианты среды, выявляемые родовой эволюцией, а лишь необходимые условия нашей деятельности. Наша основная посылка будет состоять в том, что онтологические категории фиксируют в себе необходимые условия деятельности, навязываемые сознанию непосредственно в актах деятельности.

Поясним это положение через рассмотрение категориального основоположения, в соответствии с которым каждое явление имеет причину. Здесь мы имеем дело, конечно, не с обобщением опыта, как это мыслил Юм, не с общим выводом из физической науки, как считает М. Бунге, и не с методологической конвенцией, как думал Поппер. Необходимость этого положения, проистекает исключительно из целевой или деятельностной ориентации человеческого мышления. Суть человеческого бытия состоит в том, что человек погружен в деятельность, нацелен на возможность изменения окружающей его среды, которое может быть реализовано только на основе причинно-следственных связей, и вследствие этого обстоятельства каждое явление человек фиксирует не само по себе, но в интенции на его причинную обусловленность. Основоположение «каждое явление имеет причину» внедрено в наше сознание не на основе индукции, не через наблюдение совокупности причинных связей, но исключительно нашей направленностью на мир как объект действия. В каком бы мире человек ни жил, причинное отношение будет для него высшим онтологическим постулатом, ибо как живое существо он должен взаимодействовать с миром на основе причинно-следственных связей. Причинность — фундаментальное условие деятельности и вследствие этого — высший онтологический постулат, порожденный деятельностной ориентацией мышления. Этот принцип априорен в соответствии с кантовским определением априорности как универсальности и необходимости.

Сказанное относится ко всем категориальным основоположениям. Главное отличие намеченной здесь трактовки категориальных основоположений от кантовской их трактовки состоит в том, что если

категориальные основоположения у Канта выводятся из единства апперцепции как из высшей установки сознания, то мы выводим их из деятельностной ориентации сознания, т.е. в конечном итоге из реального взаимодействия человека с миром. В основе сетки категорий лежит с этой точки зрения не мистическое стремление к единству сознания, но его деятельностная ориентация, продиктованная включенностью субъекта в систему актов практического действия.

Другое принципиальное отличие деятельностной трактовки категорий от кантовской состоит в понимании их отношения к реальности. Кант истолковал категориальные основоположения как условия опыта и поместил их внутрь сознания, как только априорные нормативные требования самого сознания, не имеющие какого-либо коррелята в мире. С деятельностной точки зрения это ложная установка. Причинность — не только структура разума и даже не просто структура действия, а прежде всего структура самой реальности, ибо в мире, в котором явления изолированы и не находятся в причинном взаимодействии, деятельность была бы невозможна. Сам факт и успешность человеческой деятельности является доказательством того, что наш мир в достаточной мере удовлетворяет условиям деятельности. Как уже сказано, принцип причинности не доказывается на основе индукции. Он диктуется в качестве абсолютной нормы деятельностной ориентацией мышления, а его реальность и трансцендентная значимость обосновываются самим фактом человеческой деятельности.

Платон в диалоге «Софист» определяет понятие существования следующим образом: «Я утверждаю теперь, что все обладающее по своей природе способностью либо воздействовать на что-то другое, либо испытывать хоть малейшее воздействие, пусть от чего-то весьма незначительного и только один раз, — все это действительно существует»[1]. Это положение Платона поистине замечательно, ибо оно намечает деятельностное понимание смысла реальности. С точки зрения изложенного выше мы должны сделать здесь лишь одно дополнение. В действительности, к безусловно реальному или трансцендентному в наших представлениях о мире должны быть отнесены не только субъект и объект действия, как это мыслит Платон, но и сами условия действия. Мы должны понять то обстоятельство, что не только субъект и объект, но и вся система субъектно-объектных отношений обладает качеством реальности или подлинной трансцендентности. Мы должны также напомнить здесь положение Маркса, согласно которому «вопрос о том, обладает ли человеческое мышление предметной истинностью, вовсе не вопрос теории, а практиче-

[1] *Платон*. Сочинения: В 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1993. С. 316.

ский вопрос»[1]. Не чувственный опыт, а только практика высвечивает в наших представлениях о мире подлинно реальную или трансцендентную составляющую. А.Н. Уайтхед безусловно прав, наставая на том, что «деятельность выходит за пределы Я в познанный трансцендентный мир»[2].

Чувственность сама по себе никогда не дает нам представления о реальности объектов, и в этом смысле традиционный сенсуалистический скептицизм не опровержим. Но человеческое сознание не замкнуто в самом себе, оно не сводится к фиксации и упорядочению чувственных данных, оно безусловно трансцендентно в том смысле, что оно выходит к познанию мира самого по себе, и этот выход осуществляется в актах деятельности. Чувства могут дать нам ложную картину о структуре реальности, но действие продвигает нас к абсолютной структуре реальности. В сфере деятельности чувственная аберрация исключена. Разные уровни знания обладают разной степенью проникновения в структуру трансцендентности. Самая точная наука о чувственной реальности — физика — несомненно, содержит в себе массу ложных представлений о мире, которые будут отодвинуты в сторону ее дальнейшим развитием. Ясно, что и чувственное и теоретическое знание не абсолютны в плане трансцендентности. Но категориальная онтология должна быть понята в качестве уровня знания, раскрывающего абсолютную структуру мира самого по себе, ибо она определяет сам факт деятельности, саму его возможность. Мы должны уяснить то обстоятельство, что подлинная трансцендентная реальность может быть определена только как система представлений, необходимо навязываемая деятельностью. Теории могут быть фиктивными, но категориальные связи, выявляемые актами деятельности, не могут не соответствовать структуре мира.

Категориальные основоположения, таким образом, априорны и реальны. Принцип причинности априорен, ибо он является необходимым условием всякой систематизации опыта, и он реален, ибо описывает не только универсальную интенцию сознания, но фундаментальное свойство мира, независимое от бытия человека, обуславливающее возможность деятельности. Человек может действовать не в любом мире. Можно представить столь хаотический мир, что никакое существо не сможет здесь уловить никаких устойчивых причинно-следственных связей. Сам тот факт, что мы действуем, дает нам возможность заключить, что наш мир в достаточной степени подчинен причинно-следственной структуре. Основной дефект фи-

---

[1] *Маркс К.* Тезисы о Фейербахе // Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Изд. 2. Т. 3. М., 1960. С. 4.

[2] *Уайтхед А.Н.* Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990. С. 149.

лософии Канта состоит в игнорировании деятельности. Категориальную структуру сознания он навязывал сознанию как данную свыше и как подчиненную только требованию единства апперцепции, которое также принято в качестве постулата. Гуссерль и Хайдеггер также субъективизировали условия действия, толкуя их как условия опыта и относя их исключительно к сознанию субъекта. Категориальные основоположения — глубинные характеристики самой реальности, выявляемые деятельностью и являющиеся условиями деятельности. Онтология абсолютно реальна. Если даже человечество исчезнет, то причинно-следственная структура мира и все категориальные разделения реальности, делавшие возможным его существование на протяжении тысячелетий, наряду с физическими закономерностями останутся после него в качестве реальной структуры мира и могут послужить условием возникновения новой жизни и нового разума.

Деятельностная теория познания, таким образом, требует реабилитации трансцендентализма, т.е. признания априорных форм мышления, независимых от опыта и определяющих структуру мышления. Основной недостаток кантовского, гуссерлевского и хайдеггеровского трансцендентализма состоит в том, что это сугубо идеалистический трансцендентализм: априорная основа познания во всех этих случаях помещается внутрь сознания и понимается лишь как его нормативная структура, не имеющая прямого отношения к реальности как таковой. Деятельностный трансцендентализм подходит к пониманию априорного знания как знания реального, обладающего абсолютной трансцендентной значимостью. Категориальная реальность не дается нам на основе чувственного опыта, не навязывается каким-либо типом мистической интуиции, а диктуется актами деятельности и воспринимается субъектом как система высших и аподиктически очевидных разделений реальности.

3. Онтологическая реальность первичной математики

Эти абстрактные соображения позволяют нам подойти к пониманию того типа реальности, которая лежит в основе исходных понятий математики.

Говоря об онтологии в общефилософском плане, мы прежде всего обращаем внимание на такие понятия, как причина и следствие, взаимодействие, субстанция и акциденция, возможность и действительность. Это основные категории, выражающие субъектно-объектные отношения, определяющие структуру деятельности. Однако деятельностная ориентация мышления нормирует не только субъектно-объектное отношение как таковое, но и сам предмет деятельности,

вследствие чего появляются универсальные онтологические требования, относящиеся исключительно к предмету деятельности. В этом плане мы должны обратить внимание на представления, связанные с разделением части и целого, единого и многого, и на онтологическое представление о постоянстве формы объектов, с которыми мы взаимодействуем.

Аристотель указывает на то обстоятельство, что математик из человека делает единицу, он отвлекается от всех качеств человека и превращает его в такую же единицу, какой является камень. В чем состоят мотивы столь радикальной абстракции? Нетрудно понять, что корни ее лежат в деятельностной ориентации субъекта. Чтобы действовать, субъект должен выделить нечто из остальной реальности и соотнести его с другим нечто — не в смысле его чувственных качеств, а в смысле его самостоятельного существования и отделенности его от других нечто и возможности быть объектом действия. На уровне первичной деятельностной ориентации сознания мы вырабатываем представление о единичности, отделенной от многого, и о связях этих единичностей в рамках многого. Мы будем говорить в этом плане об *онтологической единичности* и об онтологическом разделении единого и многого как о необходимых элементах деятельностной онтологии.

Онтологическое представление единичности отличается от эмпирического. Аристотель говорит в «Физике», что существуют два рода чисел — числа, которые мы считаем, и числа, которыми мы считаем. Он имеет в виду то обстоятельство, что дискретности, данные в опыте, не тождественны идеальным дискретностям, которые мы связываем с числами как арифметическими понятиями. Реальные единичности, данные в опыте, могут разрушаться, исчезать, сливаться друг с другом, становиться мало различимыми и т.п., идеальные же единичности, о которых идет речь в арифметике, не разрушаются, не сливаются, безусловно различимы и т.д. Иногда в виде шутки говорят, что арифметику можно легко опровергнуть на фактах: если в клетку к тигру посадить зайца, то мы увидим, что 1 + 1 = 1. Аристотелевское различение двух видов чисел позволяет нам понять несостоятельность подобного опровержения. Ясно, что это опровержение основано на подмене онтологичнеских единиц эмпирическими. Для понимания сути арифметики мы должны хорошо осознать то обстоятельство, что она описывает не эмпирические, а идеальные или онтологические единичности, которые не могут исчезать и сливаться друг с другом.

Мы можем утверждать, что арифметика онтологически реальна, ибо в ее основе лежит система онтологических идеализаций, являющихся частью категориальной картины мира. Арифметика не имеет прямого отношения к окружающей нас эмпирической дискретности,

но она реальна в том смысле, что она является описанием универсального онтологического представления о связи единого и многого. Арифметика — не что иное, как концептуализация аспекта априорной предметной онтологии и сама она вследствие этого априорна и безусловно реальна. Ошибка философов-эмпириков состоит в том, что они хотят вывести арифметику из чувственного опыта, из реальной дискретности, из операций с камешками и пряниками. Ошибка фикционалистов состоит в том, что они отрывают ее от всякого сущностного содержательного основания. В основе определения числа и арифметики в целом лежит онтологическое представление о связи единичности и множественности, выработанное деятельностью и имеющей для сознания статус безусловной нормы. Наш общий вывод должен состоять в том, что арифметика в своих исходных определениях фиксирует представления предметной онтологии и в этом смысле является онтологически истинной.

Арифметический фикционализм базируется на игнорировании онтологического основания арифметики. В действительности понятие числа дано человеческому сознанию однозначно, с абсолютной необходимостью, и эта необходимость продиктована тем, что в основе этого понятия лежит вполне определенный аспект онтологического видения мира, выраженный в понятиях единого и многого. Арифметика реальна, ибо она отражает аспект реальности, выраженный в универсальной онтологии. К арифметике безусловно относится то, что было высказано выше по отношению к категориальным отношениям: арифметика априорна и абсолютно трансцендентна, ибо она в своих понятиях отражает аспекты реальности, без которых человеческая деятельность была бы невозможной.

Кант пытался вывести понятие числа из понятия времени. Этот замысел можно принять лишь в том отношении, что здесь намечена попытка выявить онтологическое основание арифметики. С деятельностной точки зрения, однако, ясно, что арифметика не имеет никакого отношения к представлению о времени. Она основана исключительно на онтологическом представлении о единичности, отражая в себе правила действия с числами как с множествами, составленными из онтологических единиц.

Прояснение статуса универсальной онтологии позволяет нам подойти и к анализу исходных представлений евклидовой геометрии. В конце XIX в. многие физики и математики, среди них Г. Гельмгольц, Э. Мах и А. Пуанкаре, высказывали мысль, что геометрия проистекает их понятия твердого тела. Гельмгольц считал, что геометрии не было бы, если бы в окружающем нас мире не было твердых тел. Еще ранее эту идею высказывал Лейбниц. Он указывал на то обстоятельство, что если мы имеем представление о теле, не меняющем свою форму,

то, заставив его вращаться около двух точек, произвольно выбранных на его поверхности, мы получим ось вращения, которая будет точным физическим коррелятом для математического определения прямой. Столетие спустя Н.И. Лобачевский, исходя из представления твердого тела, точки соприкосновения двух твердых тел и понятия сечения твердого тела, вывел все аксиомы евклидовой геометрии за исключением аксиомы параллельности. Э. Мах показал, что, имея твердые тела, мы всегда можем определить понятие плоскости как реальной поверхности, достигаемой посредством их взаимной шлифовки. Общая заслуга Лейбница, Лобачевского, Гельмгольца, Маха и Пуанкаре состоит в том, что они показали укорененность представлений евклидовой геометрии в представлении твердого тела.

Это положение, однако, порождает определенную трудность. Оно ведет к заключению, что геометрия является опытной наукой, поскольку понятие твердого тела формируется в опытной науке в качестве одной из физических идеализаций. Ясно, что соединение геометрии с понятием твердого тела трудно согласовать с представлением о геометрии как о строгой науке, покоящейся на безусловно истинных постулатах. Оно также мало согласуется с реальной историей науки, которая показывает, что геометрия как теоретическая наука появилась на две тысячи лет раньше, чем физика, породившая идеализацию твердого тела. В свой книге «Познание и заблуждение» Мах ищет выход из этого противоречия и допускает возможность нового математического априоризма, который был бы согласован с представлениями о твердых телах и их движениях[1].

С деятельностной точки зрения эта трудность устраняется различением физического и онтологического представлений о твердом теле. Несомненно, что механика содержит в себе представление о твердом теле как о теле, сохраняющем свою форму. Но означает ли это, что это представление впервые появилось в механике? Известно, что механика содержит в себе представление о трехмерном пространстве и одномерном и непрерывном времени, но эти представления не были впервые выработаны в механике. По отношению к пространству и времени это очевидно. Понятия пространства и времени, использованные Ньютоном для формулировки законов механики, сформировались задолго до этого в рамках философской онтологии.

Это справедливо и в отношении представления о твердом теле. Представление о теле, сохраняющем свою форму, если говорить о его истоках, — это не представление физики, а представление онтологии, сформировавшееся в актах деятельности. Онтология в своей сущности — это построение идеализированной картины мира, максимально

[1] *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: Бином, 2009. С. 447.

благоприятной для деятельности. Мы не знаем и не можем знать все ли явления имеют причину, но мы допускаем, что все, ибо именно это допущение наиболее благоприятно с точки зрения деятельностной ориентации мышления. На тех же основаниях в своем онтологическом видении мира мы постулирует сохранение формы тел и постоянство их структурных связей. Это не что иное, как онтологическая идеализация реальности, продиктованная деятельностной ориентацией сознания.

Таким образом, мы должны проводить различие между твердым телом как физической идеализацией, диктуемой системой физических законов, и твердым телом как онтологической идеализацией, порождаемой актами практической деятельности. Правильное понимание статуса евклидовой геометрии достигается в том случае, если мы будем видеть ее истоки в онтологической идеализации твердого тела. Геометрия появилась много раньше формирования собственно физических идеализаций, и становление ее понятий было обусловлено не физическими, а онтологическими идеализациями.

Таким образом, в отношении геометрии мы можем повторить выводы, которые были сформулированы выше в отношении арифметики. Евклидова геометрия несомненно априорна и реальна, ибо в системе своих первых понятий она описывает онтологическую идеализацию твердого тела как необходимое представление, продиктованное деятельностью и отражающее условия деятельности. Евклидова геометрия реальна, ибо она фиксирует в себе аспект абсолютно реальной деятельностной картины мира. В наших обыденных геометрических идеализациях зафиксированы общезначимые представления, производные от деятельности и отражающие в себе глубинные черты реальности, определяющие возможность деятельности. Так же, как и арифметика, евклидова геометрия реальна, она фиксирует в себе лишь другую сторону универсальной онтологии.

Здесь уместно рассмотреть попытку Г. Динглера подойти к пониманию статуса евклидовой геометрии, предпринятую им в 30-х гг. XX в. Концепция Динглера направлена против мнения Пуанкаре, согласно которому ни одна из геометрий не может быть объявлена более истинной, чем другая. По мнению Динглера, евклидова геометрия имеет особый статус, она в отличие от всех других геометрий обладает реальностью и истинностью. Принципы евклидовой геометрии, абсолютны, поскольку они проистекают из наших требований к физическому эксперименту. Эксперимент должен быть воспроизводим, но это возможно лишь в том случае, если он будет составлен из воспроизводимых частей и геометрических форм, обеспечивающих соподчинение этих частей. Определяющей геометрической формой является плоскость как наипростейшая поверхность, обе стороны ко-

торой одинаковы. Преимущество этой геометрической формы в том, что она воспроизводима. Техническое искусство с древнейших времен ориентировано, по Динглеру, прежде всего на производство плоских поверхностей. Плоскость не просто мыслится, как думал Кант, она производится, вносится в предметную реальность. В отношении плоскости мы вправе говорить об *априори изготовления*. Физический эксперимент, считает Динглер, требует принятия установок евклидовой геометрии как его априорной структуры. В сфере эксперимента, «скрылись платоновские идеи, после того как для них более не осталось места в безотрадном мире чистого эмпиризма»[1]. Динглер был убежден, что он доказал реальное существование евклидовой геометрии и, соответственно, несуществование или фиктивность всех других геометрий. Неевклидовы, многомерные и другие возможные геометрии существуют, по его мнению, только как логические системы, они могут занимать определенное место в структуре теоретического знания как функции, связывающие показания экспериментов, но они не существуют как реальные или метафизически значимые.

Мы видим, что Динглер близок к деятельностному пониманию геометрической реальности. Он, безусловно, прав в том, что образы прямой и плоскости как база геометрии не случайны, но связаны с практическим вмешательством человека в отношения реального мира. Динглер ясно осознал то важнейшее обстоятельство, что понятие реальности в действительности определяется деятельностью, т.е. практическим вмешательством человека в процессы природы. Эта позиция дает ему критерий для различения объективных и реальных теорий математики. Только евклидова геометрия реальна, все остальные геометрии — формальные конструкции, которые способны выполнять роль установления функциональных связей в эмпирической науке.

Теория Динглера, однако, не совпадает с намеченной здесь теорией математической реальности. С точки зрения деятельностной теории математических идеализаций дефекты теории Динглера можно выразить в следующих положениях:

1. Манипуляции с твердыми телами в плане их изготовления — слишком узкая база для обоснования априорности математики. В лучшем случае мы намечаем здесь подход к обоснованию априорности и реальности геометрии, оставляя в стороне вопрос об априорности категорий, логики и арифметики. Но обоснование априорности математики без обоснования априорности общей онтологии представляется бесперспективным.

---

[1] *Динглер Г.* Эксперимент: его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12. С. 103.

2. Динглер прав в том допущении, что в основе исходных геометрических представлений лежит представление о твердом теле. Но твердое тело существует как физическая идеализация и как онтологическое представление, обусловленное исключительно актами деятельности. С деятельностной точки зрения евклидова геометрия возникает не на основе физических идеализаций, как думает Динглер, а на основе онтологических представлений об объекте действия, которые предшествуют физике и всякой специальной науке. Первичные образы геометрии обусловлены установками деятельности и не имеют никого отношения к физическим идеализациям и к физическому эксперименту. Первичная математика в своем генезисе опирается только на абстрактную предметную онтологию и в этом смысле совершенно независима от физики.

3. Априорное у Динглера смешивается с конвенциональным. Выбор плоскости в качестве исходного образа обусловлен, по его мнению, возможностью ее технической реализации. В другом мире или при некоторых других технических возможностях здесь мог бы быть другой образ и другая система геометрии. С праксеологической точки зрения система исходных представлений геометрии обусловлена только деятельностной ориентацией мышления и не имеет никакого отношения к возможности технической реализации. Прямая и плоскость — не конвенции, определенные привходящими обстоятельствами, а онтологические идеализации, обусловленные только целью мышления, его направленностью на действие.

Тем не менее, следует отдать должное Динглеру. Он почувствал тупиковый характер эмпирической установки Маха и стал искать онтологические основания математики через рассмотрение деятельностного отношения человека к миру. Заслуга Динглера состоит в том, что он понял связь геометрической реальности с практической стороной человеческого бытия. Можно сказать, что Динглер первый со времен Платона сдвинул проблему реальности математики с мертвой точки, ибо он понял праксеологический и внеэмпирический смысл геометрической реальности. Несомненно, что только деятельностный анализ исходных интуиций математики позволяет отделить базовую, онтологически истинную математику от математики вторичной, характеризуемой другим типом связи с реальностью.

Наш общий вывод, таким образом, состоит в следующем: первичная математика реальна, ибо все ее понятия являются онтологически истинными, связаны с онтологическими допущениями о структуре реальности. Первичные математические представления имеют двоякий статус: они одновременно понятия математической теории, имеющие собственно теоретическое определение, и аспекты универсальной онтологии, отражающей фундаментальную структуру реаль-

ности, выявляемую деятельностью. Математические понятия числа, конечного множества, расстояния, геометрической фигуры, движения реальны, ибо отражают в себе конститутивные характеристики предметности, необходимые с точки зрения деятельности. Они навязаны нам деятельностью и отражают структуру реальности, определяющую возможность деятельности. Платон гениально почувствовал двоякий статус геометрических и арифметических представлений, он осознал их глубинное, хотя и не доступное для точных гносеологических характеристик их отношение к реальности. Поскольку эта реальность не могла быть выражена через опыт, то он не нашел никакого приемлемого способа для ее выражения. Понятие категориальной онтологии устраняет мистический аспект платонизма. Утверждая реальность математических сущностей, мы говорим не о другом мире, находящемся за пределами опыта, а лишь о другом уровне определения реальности, с которым генетически связаны исходные математические представления.

Если исходные математические представления отражают в себе аспекты реальной структуры деятельности, то они отражают стороны реальности, обусловливающие деятельность и в этом смысле обладают статусом трансцендентности. С этой точки зрения первичная математика — не фикция и не произвольная конструкция, а особого рода картина мира самого по себе, причем картина мира внеисторическая, абсолютная, необходимая для любого мыслящего сознания как прошлого, так настоящего и будущего. В этом плане мы должны принять кантовскую теорию математического априоризма, но ясно, что от априоризма Канта мы должны возвратиться к априоризму Лейбница, который за априорными представлениями сознания видел фундаментальные отношения бытия.

4. Эмпирическая реальность вторичной математики

Выше мы разделили математическое знание на две части, существенно отличные друг от друга по своему происхождению и по своему отношению к опыту. Термином *первичная математика* мы обозначили систему элементарных теорий, базирующихся на общезначимых интуициях. Это арифметика, евклидова геометрия и система интуитивно ясных логических норм, вовлеченных в обыденное и математическое мышление. Термином *вторичная математика* мы обозначили всю совокупность математических теорий, выходящих за пределы элементарной математики. Первичная математика — это та математика, о которой говорили Платон, Аристотель, Декарт и Кант. Философия математики вплоть до XIX в. опиралась исключительно

на эти первичные, интуитивно ясные теории. Наше рассуждение до сих пор касалось статуса именно этой части математики. Мы выяснили, что эта часть математики обладает свойством реальности, которое состоит в безусловной необходимости и онтологической фундированности идеализаций, лежащих в ее основе.

В XIX в. в математику вошли неевклидовы и многомерные геометрии. В середине XIX в. оформилась в качестве завершенных дисциплин проективная геометрия, теория групп и теория множеств. Быстро совершенствовался математический анализ, в особенности в своих приложениях к математической физике, что привело к развитию математической теории поля, векторного и тензорного исчислений. Во второй половине века началось интенсивное развитие функционального анализа. В настоящее время хорошо осознается тот факт, что традиционные теории более не играют главной роли в приложениях математики и не находятся в зоне ее интенсивного развития. Математика радикально изменила свою структуру. Можно сказать, что первичная математика окружила себя широким кольцом новых математических теорий, выходящих за ее пределы, как по своему содержанию, так и по своим методам. Интуитивная ясность принципов математики утратила свое значение.

Очевидно, что мы не можем говорить о реальности новой математики в том же смысле, в каком мы говорили выше о реальности арифметики и евклидовой геометрии. Новые математические теории не строятся на интуитивно ясных принципах, они не связаны в своем генезисе с категориальным видением мира, и в этом смысле не могут претендовать на онтологическую значимость. Лобачевский ясно осознавал то положение, что его новая геометрия может и не иметь никакого отношения к реальности. «Очень вероятно, — писал он, — что евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными»[1]. То же самое говорил и Кантор о своей теории множеств: он видел в ней не транзиентную (внешнюю), а только имманентную истинность, заключающуюся в логической непротиворечивости[2]. Новые математические теории строятся преимущественно из логических соображений. Исходя из принципа построения неевклидовых геометрий, Д. Гильберт построил неархимедову, недезаргову и непаскалеву геометрии. Ясно, что такое чисто логическое расширение математического знания не содержит в себе никакой гарантии его онтологической реальности. Если исходные представления евклидовой геометрии мы можем связать с деятельностными интуициями сознания, то ничего подобного нельзя сказать

[1] *Лобачевский Н.И.* Полное собрание сочинений. Т. 1. М., 1951. С. 209.
[2] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 79–80.

о неевклидовых, недезарговых и непаскалевых геометриях. Даже проективная геометрия, наиболее близкая к евклидовой, содержит в себе искусственные допущения, не оправдываемые интуицией и не выводимые из какого-либо опыта или какой-либо онтологии. Ясно, что вторичная математика не строится на онтологических интуициях и заведомо не обладает той реальностью, которая присуща теориям первичной математики.

Это значит, что ни реализм, ни антиреализм заведомо не универсальны и не применимы к математике в целом. По отношению к первичной математике мы вправе утверждать ее онтологическую истинность и настаивать в этом смысле на ее реальности, в то время как вторичная математика, если брать ее в целом в своем отношении к реальности, удовлетворяет критериям формализма и фикционализма.

История математики показывает, однако, что абстрактная математика также некоторым образом связана с реальностью. Мы имеем здесь в виду так называемое явление математического предвосхищения, которое состоит в том, что абстрактные математические теории, появившиеся из логических соображений, как правило, находят впоследствии физическую реализацию. В статье о Кеплере А. Эйнштейн писал: «Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел... Представляется, что человеческий разум должен свободно строить формы, прежде чем подтвердится их действительное существование»[1]. На эту закономерность как важную для понимания математического мышления указывал Н. Бурбаки в своей статье «Архитектура математики». Он указывал на то, что для изучения современной физики требуются разделы математики, которые не были изобретены с целью приложения к экспериментальным наукам[2].

Многие соображения приводят нас к признанию того, что тенденция абстрактной математики к эмпирической интерпретации и приложениям является ее необходимым качеством, проистекающим из глубинной диалектики математического и физического знания. Если бы этого явления не было как тенденции, то мы могли бы говорить о вторичной (абстрактной) математике как о системе формальных конструкций, которые некоторым, может быть случайным, образом оказываются в соприкосновении с понятийными структурами, относящимися к опыту. Явление математического предвосхищения, однако,

---

[1] *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 4. М., 1967. С. 123–124.

[2] *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М., 1963. С. 258.

дает нам основание говорить о реальности этих структур. Мы можем утверждать, что абстрактная математика связана с реальностью в том плане, что она является вероятной схемой внутренних связей будущей теоретической науки. Реальность абстрактных математических теорий состоит в наличии определенной положительной вероятности их эмпирической интерпретации.

Такое понимание реальности вторичной математики является отрицательным в том смысле, что мы приписываем этой части математики только возможную эмпирическую значимость и отрицаем ее метафизическую значимость. Мы утверждаем, что вторичная математика онтологически фиктивна и может квалифицироваться в качестве реальной лишь в плане перспективной возможности эмпирической интерпретации ее теорий.

Мы подходим, таким образом, к формулировке общего вывода об отношении математического знания к реальности. Вследствие двойственной структуры математики этот вывод будет двояким. Мы должны утверждать, что первичная (базовая) математика онтологически реальна и трансцендентна, ибо она в своей сути представляет собой концептуализацию онтологических представлений, порождаемых деятельностным отношением человека к миру. Что касается вторичной (абстрактной) математики, то она в своей сути представляет собой лишь набор формальных структур. Иными словами, она онтологически фиктивна и обладает лишь перспективной эмпирической реальностью, т.е. вероятностью приложения для описания опыта. Но это значит, что подлинная, онтологическая реальность математических понятий относится лишь к представлениям первичной математики, которые в самом своем генезисе связаны с представлениями универсальной онтологии.

Истинность математического реализма раскрывается констатацией того обстоятельства, что первичные математические идеализации детерминированы в своем становлении системой фундаментальных дематематических представлений. Такое понимание сути математического реализма уже наметил К. Гёдель. Наша задача состояла здесь в том, чтобы показать, что эти фундаментальные представления, лежащие в основе генезиса математических понятий и придающие им статус реальности, есть не что иное, как система онтологических категорий, порождаемая деятельностью и отражающая аспекты реальности, определяющие возможность деятельности.

С деятельностной точки зрения становится предельно ясным, что представления первичной математики — не фикции и не конвенции, а отражение универсальной онтологии мышления, и в этом смысле они представляют собой часть общезначимой структуры сознания, обусловленной деятельностным отношением человека к миру. Мате-

матика, как и физика, имеет коррелят в реальности. Разделение математики и физики, проведенное Брауэром, в этом отношении является несостоятельным. Если человечество исчезнет, то останутся не только объективные физические закономерности, но и объективные условия деятельности, лежащие в основе философской онтологии и в основе базовых математических интуиций.

Мы можем теперь ответить на вопрос: почему математика не может быть отождествлена с шахматной игрой? Различие между математикой и шахматной игрой состоит в том, что математическая теория укоренена в онтологии и не может существовать без онтологии. Универсальная онтология однозначно определяет структуру арифметики, евклидовой геометрии и систему реальной логики. Она неизбежно присутствует и в абстрактной математике. Хотя абстрактная математическая теория не имеет полного онтологического оправдания своих аксиом, нетрудно понять, что все ее внутренние доказательства основаны на интуициях, имеющих онтологическое оправдание. Г. Штейнгауз безусловно прав в том, что математика в отличие от шахматной игры описывает реальность. Ясно, что в понимании этого положения мы должны избежать упрошенного эмпирического истолкования реальности. Математика описывает различные аспекты эмпирической реальности и развитие математики, несомненно, направлено к этой цели. Но в генетическом плане она органически связана с категориальной реальностью. Математическая теория — не шахматная игра, прежде всего, потому, что ее исходные представления и внутренние правила обусловлены онтологически и не могут быть изменены.

5. Ложные подходы к обоснованию математического реализма

С изложенной точки зрения все выдвинутые до сих пор подходы к обоснованию реальности математики должны быть отвергнуты как идущие в ложном направлении.

Несостоятельны, прежде всего, те концепции, которые пытаются понять реальность математических понятий исходя из опыта, прибегая к допущению некоторого специфического математического опыта. Наиболее известная теория такого рода — генетическая эпистемология, разработанная Ж. Пиаже в 50-х гг. XX в. Основное положение этой теории состоит в том, что элементарные арифметические и геометрические представления у ребенка порождаются операциями предметного действия, такими как передвижение предметов в пространстве, передвижение в пространстве самого субъекта действия, композиции движений и т.д. Пиаже, несомненно, реалист, поскольку

он согласен с тем, что элементарные понятия математики не произвольны и не конвенциональны. Однако его теория ошибочна в своей основе, ибо онтологические основания математических представлений заменяются в ней основаниями эмпирическими, связанными со структурой логико-математического опыта.

Должны быть признаны бесперспективными и подходы к обоснованию реальности математики, основанные на эволюционной эпистемологии. Представления сознания, порождаемые и закрепляемые приспособительной эволюцией человеческого рода, несомненно существуют, и в этом смысле идеи эволюционной эпистемологии имеют значение. Однако категориальная структура сознания не может быть объяснена в логике эволюционной эпистемологии, ибо она порождена не родовой эволюцией сознания, но исключительно условиями деятельности, имеющими внеисторический характер. Попытка К. Лоренца прояснить кантовское *a priori* на основе биологии должна быть признана ошибочной, проистекающей из неадекватного понимания сути априорного знания. Столь же бесперспективны и все эволюционные объяснения математической реальности[1]. Здесь важно понять то обстоятельство, что исходные математические интуиции отражают не инвариантные элементы среды выживания, фиксируемые эволюцией, а инвариантные элементы в структуре деятельности.

Нельзя признать вполне приемлемым и реалистическое понимание математики, намеченное К. Гёделем. Важный сдвиг, осуществленный Гёделем в понимании математической реальности, состоит в том, что он придал этой проблеме строго гносеологический и, в принципе, разрешимый характер. Но он не нашел удовлетворительного решения проблемы. Он прав в том допущении, что математическое знание базируется на некоторого рода определяющих интуициях, которые могут быть основанием разделения математических аксиом на истинные и ложные. Это безусловно справедливо в отношении аксиом арифметики и элементарной геометрии. Однако это положение без достаточных оснований переносится Гёделем на теорию множеств. Корень ошибки состоит в том, что Гёдель не выявил природы математической онтологии и не определил действительной сферы онтологически истинной математики. Деятельностный анализ математической онтологии показывает, что онтологическая реальность не простирается за пределы элементарной математики и аподиктическая очевидность не достаточна для прояснения истинностного статуса аксиом теории множеств.

---

[1] *Rav Y.* Philosophical problems of Mathematics in the light of Evolutionary epistemology // Philosophica. Vol. 43. 1989. N 1. P. 49–78.

Попытки подойти к обоснованию реальности математики, исходя из теории множеств, — основное заблуждение современных подходов к оправданию математического реализма. Так мыслит в настоящее время большинство математиков и философов, нацеленных на обоснование математического реализма. Здесь прежде всего нужно назвать работы П. Мэдди, в которых этот подход защищается как наиболее естественный и рациональный. Теория множеств, считает она, является основанием всей математики и при прояснении сути математического реализма мы должны следовать за Гёделем и Куайном как за великими математическими реалистами, которые основывались в своем подходе на анализе аксиом теории множеств[1]. С деятельностной точки зрения ошибочность такого подхода состоит в том, что онтологическая реальность приписывается теориям вторичной математики, где она заведомо не является определяющей.

Нельзя признать адекватным и подход Д. Мамфорда, основанный на выявлении общего когнитивного основания науки. Мамфорд усматривает реальность математики в том факте, что в ее основе лежат некоторые абстрактные когнитивные схемы, определяющие единство математического знания и логику математического мышления. Эти абстрактные схемы реальности, считает Мамфорд, порождаются социальной памятью и развитием человеческого мышления и именно они являются истоком и содержательным основанием математических идеализаций. Это объяснение верно в том отношении, что оно дополняет подход Гёделя некоторой гносеологической конструкцией, нацеленной на понимание истоков фундаментальной математической очевидности, лежащей за аксиомами. Но намеченная здесь идея не доведена до ясности и в своей основе неудовлетворительна. Объяснение Мамфорда психологично и по этой причине заведомо противоречиво: если высшие когнитивные схемы порождаются памятью и процессом исторического развертывания человеческого познания, то они в принципе не могут быть основанием для внеисторических идеализаций математики.

Мы должны отвергнуть подход к обоснованию математической реальности, намеченный В.О. Куайном на основе сформулированного им «аргумента неустранимости» (indispensability argument). Идея Куайна состоит в том, что если математическая теория включена в сеть эффективных научных теорий, то этот факт доказывает ее реальность или наличие у нас «онтологических обязательств» по отношению к ней. По сути, это функциональное обоснование реальности математической теории: используемость теории доказывает ее реальность. За аргументом Куайна стоит определенный здравый смысл:

[1] *Maddy P.* Realism in mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1990. P. 3–4.

применимая теория отражает структуру реальности и в этом смысле может быть названа реальной. С изложенной выше точки зрения подход Куайна крайне ограничен: он фиксирует только факт эмпирической реальности математической теории и не затрагивает вопроса о ее онтологической реальности. Реальность математической теории выявляется не ее приложениями, но генетической связью ее аксиом с универсальной онтологией. Ясно, что из эмпирической необходимости математической теории не вытекает ее онтологической реальности.

Наконец, мы должны отвергнуть как несостоятельный подход к обоснованию математического реализма, отождествляющий тезис о реальности математики с истолкованием математических теорем как открытий. Таков исходный пункт реализма Р. Пенроуза, который видит доказательство реальности математических теорий в том факте, что в рамках известных теоретических установок открываются неожиданные непредсказуемые и предельно объективные факты. В системе математических понятий, считает он, скрыта независимая от нас реальность, о которой мы не имели представления, формулируя начала данной теории. В этой связи он указывает на открытие в теории комплексных чисел множеств Мандельброта, которые представляют собой как бы открытие новой сферы объективной реальности[1].

Дефект рассуждений Пенроуза состоит в том, что он существенно отклоняется от самой проблемы математической реальности. То, о чем он говорит, это в своей сути, эффект внутренней необходимости, неожиданности и непредсказуемости результатов математического рассуждения. Об этих сторонах математического мышления, по-видимому, говорил еще Я. Хинтикка, рассматривая проблему появления новой информации в процессе математического доказательства. Но, рассуждая таким образом, мы подменяем понятие реальности математической теории понятием необходимости ее выводов. Открытие множеств Мандельброта ставит вопрос о внутреннем богатстве теории комплексных чисел, оно наводит на мысль, что математики открывают новые объекты, подобно тому как географы открывают новые острова, но оно не ставит вопроса об онтологической или эмпирической истинности самой теории комплексных чисел в смысле внешней значимости ее понятий. Проблема реальности математической теории заменяется здесь проблемой ее внутренней объективности и непредсказуемости структур, возникающих в процессе ее развертывания. Представляется, что является ошибочной сама по-

[1] *Пенроуз Р.* Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. М., 2003. С. 80–90.

становка проблемы математической реальности на основе противопоставления изобретения и открытия в математике.

Основное затруднение в современном понимании математического реализма состоит в недостаточном осознании того факта, что решение этой проблемы связано с прояснением статуса философской онтологии. Разгадка математического реализма состоит в понимании онтологической природы исходных математических представлений, того обстоятельства, что понятия арифметики евклидовой геометрии и логики, будучи формально определяемыми элементами в составе строгих теорий, являются одновременно и необходимыми аспектами онтологического видения мира, порожденного практическим отношением человека к миру. Это значит, что мы должны разделить эмпирическую и онтологическую реальность математики. Мы должны понять, что кроме представлений о реальности, навязываемых опытом, мы имеем представления о реальности, навязанные деятельностью и заключающиеся в непосредственном созерцании структур деятельности как высшей реальности. Математика реальна не эмпирически, а онтологически и в этом состоит подлинный смысл платоновского положения о внечувственном характере математических сущностей.

Изложенное позволяет заключить, что математический реализм — не бессмыслица, не псевдопроблема, а вопрос, ведущий к прояснению истоков исходных представлений математики и природы математического мышления в целом. Анализ математического реализма важен и для прояснения общефилософского понятия реальности, ибо он высвечивает то обстоятельство, что в основе всех наших утверждений о реальности и трансцендентности стоит категориальная интуиция реальности, навязанная человеку актами деятельности.

Библиографический список

Бажанов В.А. Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. 2014. № 5. С. 52–63..

Бурбаки Н. Архитектура математики // Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М., 1963.

Динглер Г. Эксперимент: его сущность и история (перевод с немецкого А. Михайловского) // Вопросы философии. 1997. № 12.

Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Т. 1. М., 1951.

Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия. Нижний Новгород, 2012.

Маркс К. Тезисы о Фейербахе // Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Изд. 2. Т. 3. М., 1960.

Мах Э. Познание и заблуждение. М.: Бином, 2009.

Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. М., 2003.

Платон. Сочинения: В 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1993.
Уайтхед А.Н. Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990.
Штейнгауз Г. О математической строгости // Задачи и размышления. М., 1974.
Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4. М., 1967.
Davies E.B. Let Platonism Die // EMS Newsletter. June, 2007. P. 24–25.
Gödel K. Russell's mathematical logic // Pears D.F. (ed.) Bertrand Russell. Collection of critical essays. N.Y., 1972.
Gödel K. What is Cantor's continuum problem? // Philosophy of mathematics. Selected readings. N.Y., 1964.
Maddy P. Realism in mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1990.
Mumford D. Why I am a Platonist // EMS Newsletter. December, 2008. P. 27–30.
Rav Y. Philosophical problems of mathematics in the light of evolutionary epistemology // Philosophica. Vol. 43. 1989. N 1. P. 49–78.
Wagner Steven. Arithmetical Fiction // Pacific Philosophical Quarterly. 1982. Vol. 63. P. 255–269.

З.А. Сокулер

ПРИМЕР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНТИПЛАТОНИЗМА: ВИТГЕНШТЕЙН О ТЕОРЕМЕ ГЁДЕЛЯ И ДИАГОНАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЕ КАНТОРА

Философские проблемы математики занимали большое место в творчестве Л. Витгенштейна. Он всегда был последовательным противником математического платонизма и неизменно стремился лишить математические результаты *романтического ореола* прозрений относительно особой умопостигаемой реальности, представить их в *прозаическом свете* как результаты определенных созданных человеком построений и техник[1].

Такая позиция вытекала из всей совокупности его философских убеждений и сохранялась неизменной на всех этапах его творческой эволюции, начиная с «Логико-философского трактата» и кончая записями, которые позднее вошли в собрание под названием «О достоверности». Витгенштейн неизменно боролся с иллюзиями, порождаемыми разветвленностью, сложностью и видимой независимостью от нашей воли разнообразных знаковых систем, создаваемых современной европейской наукой и культурой. Прежде всего это иллюзия, что комбинации знаков подобных систем являются осмысленными предложениями, т.е. образами некоей особой, «тонкой», реальности. Эта иллюзия порождает следующую, оказывающуюся источником эпистемологических затруднений: иллюзия, что изменения, которые вносятся людьми в языковые системы, якобы являются «открытиями» относительно этой особой, «тонкой» реальности. А философия для Витгенштейна всегда выступала как «борьба против зачаровывания нашего интеллекта средствами нашего языка»[2].

Продуцирование все новых и новых знаковых систем и способов обращаться с ними является характерной чертой европейской культуры. Само по себе это, возможно, не хорошо и не плохо, одна-

[1] «В чем же значимость нашего исследования, ведь оно, по-видимому, лишь разрушает все интересное, то есть все великое и важное. (Как если бы оно разрушало все строения, оставляя лишь обломки, камни и мусор.) Но разрушаются лишь воздушные замки, и расчищается почва, на которой они стоят» (*Витгенштейн Л.* Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть I. М., 1994. § 118. С. 128–129.

[2] Там же. § 109. С. 127.

ко постоянно подпитывает вышеназванные иллюзии. Витгенштейну виделось здесь, как и во всей западной цивилизации, нечто болезненное. За языковыми иллюзиями, с которыми он боролся, он видел, в конечном счете, болезнь этой цивилизации. Поэтому такую болезнь и порождаемые ею иллюзии невозможно искоренить с помощью рациональных аргументов: «Болезнь времени излечивается изменением в образе жизни людей, и болезнь философских проблем могла бы исцеляться только изменением образа мышления и жизни, а не лекарством, изобретенным кем-то одним»[1]. Но можно пытаться отчасти ослабить, смягчить последствия подобных болезней, что Витгенштейн и пытался делать, в частности, критикуя математический платонизм.

Последний не сводится только к утверждению, что существует особая реальность идеальных объектов. Эта позиция подразумевает и следующее, весьма сильное, чреватое всяческими философскими затруднениями утверждение, что идеальная реальность открывается математику (будь то в умозрении, интуиции или логическом рассуждении); соответственно математические предложения выступают описаниями этой реальности. Поэтому математические предложения являются истинными или ложными сами по себе, даже если реальные математики еще не знают, истинно или ложно данное предложение.

Впрочем, хотя основным объектом критики является математический платонизм, но то, что пишет Витгенштейн, можно рассматривать и как критику математического трансцендентализма. Этим термином я хочу обозначить совокупность воззрений, согласно которым субъект математического познания оснащен определенными структурами, которые обусловливают общие черты и формы как мышления и человеческого действия, так и объектов внешнего мира. Математический трансцендентализм утверждает, что названные структуры определяют вневременные, неизменные априори математического познания. Хотя для трансцендентализма математические предложения вроде и не являются описаниями независимых от субъекта фактов, однако трансцендентализм подобен математическому платонизму в том отношении, что математические предложения могут оцениваться как соответствующие или несоответствующие этой изначальной и фундирующей все математическое познание структуре. Таким образом, для трансцендентализма, математические предложения выступают как «квази-дескриптивные».

Интересно сформулировать основное положение математического платонизма на языке известного философа-постмодерниста Ж. Дер-

---

[1] *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть II. М., 1994. § 4. С. 62.

рида. Тогда позиция математического платонизма будет формулироваться примерно так. Прежде всего, утверждается, что система математических предложений обладает *смыслом*. Для постмодернизма, как и для структурализма, значение любого элемента языковой системы определяется отношениями между данным элементом и другими элементами системы. Тем самым система языковых элементов замкнута на себя. Значение некоторого x определяется отличием x от y, z и других элементов системы, а не прямой связью x с неким элементом внеязыковой реальности. Для постструктуралистов, прежде всего для Деррида, отсюда следует, что значение x может «плыть», меняться, или, в терминологии Деррида, имеет место не просто «полисемия», но прямо-таки диссеминация, т.е. рассеяние исходных смыслов в непредсказуемых направлениях. Например, в гильбертовской аксиоматизации геометрии значения понятий «плоскость», «прямая», «точка» определяются только отношениями между ними, задаваемыми системой аксиом. В таком случае оказывается, что предложения этой системы можно отнести и к пивным кружкам, столам и стульям, а, может быть, и к еще более неожиданной системе из трех объектов.

Согласно Деррида, это и происходит с языковыми системами, в которых мы живем. Например, философские понятия, такие как «субъект» или «идея», путешествуя по растущему множеству философских текстов, обрастают все новыми и новыми связями и оппозициями внутри этих текстов, и одновременно происходит непрерывный дрейф их значений, ибо эти значения не привязаны ни к чему определенному вне совокупности текстов. Они не имеют, как выражается Деррида, «трансцендентального означаемого», т.е. не имеют референтов вне системы. Но с математическими понятиями, как принято считать, не может происходить ничего подобного. Для математического платонизма смысл математических терминов только отчасти определяется взаимными отношениями между элементами системы: система имеет *трансцендентальные означаемые*, которые находятся вне системы и обеспечивают *устойчивость значений* предложений, сформулированных в этой системе. В отсутствие подобного трансцендентального означаемого значения в системе «плывут», Но к математике с ее строго и точно определенными терминами и операциями, рассуждения о диссеминации неприложимы, ибо у нее есть «трансцендентальное означаемое» — не зависящий от созданных математиками систем и определений идеальный мир математических сущностей с их собственными отношениями. Соответственно и смыслы утверждений, которые делаются в математике, точно фиксированы и никакой диссеминации не подвержены. Таков «символ веры» сторонника математического платонизма.

Совершенно иной является позиция Витгенштейна, который доказывает, что математическое предложение имеет смысл только в некоторой системе. Для него никакого «трансцендентального означаемого» у математических предложений не может быть, и поэтому предложение, которое еще не доказано (т.е. не включено в определенную систему), *вообще не имеет смысла*. Недоказанное предложение выступает как «элемент математической архитектуры, который висит в воздухе и выглядит так, словно бы был, скажем, архитравом, но лишенным опоры и ничего не поддерживающим»[1]. Мысль Витгенштейна я попробую пояснить примером такого предложения: «Через любую точку можно провести ровно *n* прямых, параллельных данной». В каком-то смысле мы понимаем это предложение. Настолько, во всяком случае, чтобы понять, что оно неверно в евклидовой геометрии, но навряд ли мы сможем сказать что-то большее. Такое вот «примерное» понимание заставляет думать, будто математическое предложение имеет определенный смысл до и независимо от доказательства; что оно высказывается о каком-то факте, который может иметь или не иметь места. Но давайте сравним подобное понимание вышеприведенного предложения с тем пониманием, которое достигнуто после того, как оно будет доказано. Прежде всего, мы увидим, из каких аксиом и каким образом оно было доказано. Только после этого мы поймем, что значат слова «прямая», «точка» или «ровно *n*» в данном предложении. Но это и означает, что только после того как предложение доказано, мы начинаем понимать, о чем оно говорит. Будучи доказанным, математическое предложение входит в определенную систему, становится ее частью. И теперь уже оно будет влиять на значения других предложений.

Такова в общих чертах позиция Витгенштейна, и для нее подлинным вызовом оказывается *неразрешимое предложение*, существование которого в формализованной первопорядковой арифметике доказывается теоремой Гёделя. В самом деле, это предложение *недоказуемо*, и в то же время оно *истинно*. Ясно, что предложение, которое даже не имеет смысла, не может быть истинным. А гёделевское неразрешимое предложение *P* выглядит как адекватное описание некоторого факта, который был открыт Гёделем.

Результаты, полученные Гёделем или полученные с помощью канторовской диагональной процедуры, не просто поразили философов и философски настроенных математиков, но составили центральные сюжеты философии математики XX в. В этих результатах усматривали глубинный философский смысл. Какой именно — на этот счет

[1] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 64.

имелись самые разные мнения, но в любом случае считалось, что истинное, но недоказуемое предложение указывало на какие-то фундаментальные черты: то ли формализма, то ли рационального мышления вообще.

Что касается Витгенштейна, то он занимает совсем другую позицию. Познакомившись с его суждениями относительно недоказуемого предложения Гёделя[1], прежде всего обращаешь внимание на их тон. Витгенштейн кажется недовольным поднятым вокруг данного результата шумом. Пытается ли он опровергнуть соответствующие доказательства? Разумеется, нет. Витгенштейн всегда верен принципу, что философия «оставляет все так как оно есть», в первую очередь математические теории и доказательства: «И математику она оставляет такой, как она есть, не может продвинуть ни одно математическое открытие. "Ведущая проблема математической логики" остается для нас проблемой математики, как и любая другая. Не дело философии разрешать противоречие посредством математического, логико-математического открытия»[2]. Витгенштейн выступает против *истолкования* математических результатов, против некоторой философии, которую на них пытаются воздвигнуть[3].

Витгенштейн, как он сам постоянно говорит, хочет показать нам привычные вещи в новом свете. Он как бы меняет настройки оптического аппарата, сквозь который мы смотрим в данном случае на теорему Гёделя. Витгенштейн предлагает, как сейчас модно говорить, «смену исследовательской оптики», вкладывая нам в руки оптический аппарат с непривычно высоким разрешением. Если смотреть на вещи сквозь него, то становятся выпуклыми и четкими детали, на которые мы привыкли не обращать внимания. «Моё дело, — пишет Витгенштейн, — не доказать, что исчисление ошибочно, но подвергнуть испытанию то интересное, что есть в исчислении»[4]. Из-за непонимания цели витгенштейновских рассуждений его подчас несправедливо обвиняют в непонимании теоремы Гёделя (или каких-то других мате-

---

[1] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 53–58, 185–187.

[2] *Витгенштейн Л.* Философские исследования... § 124, 125. С. 130.

[3] «Я могу порой давать новые интерпретации, но не для того, чтобы предлагать их как правильные, а для того, чтобы показать, что старая интерпретация и новая в равной мере произвольны. Я буду придумывать новую интерпретацию только для того, чтобы поместить ее рядом со старой и сказать: "Вот, сделайте ваш выбор"» (*Wittgenstein L.* Lectures on the foundations of mathematics. L., 1980. P. 3–4). Ср. также: «Как бы странно это ни звучало, моя задача в связи с теоремой Гёделя состоит, по-видимому, лишь в том, чтобы выяснить, что означает в математике предложение типа: "Предположим, что это можно доказать"» (*Витгенштейн Л.* Замечания... С. 187).

[4] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 69.

матических результатов)[1]. А защитники Витгенштейна вынуждены прежде всего напоминать принципы витгенштейновского философствования, чтобы не происходило подобной путаницы[2].

Но пора наконец обратиться к самим заметкам Витгенштейна. Вот, например, он пишет: «Ты говоришь: "...следовательно, *P* истинно и недоказуемо". Это, вероятно, означает: "Итак, *P*". Пожалуй, я не возражаю, но с какой целью ты записываешь данное "утверждение"?.. И как бы ты смог объяснить мне истинность утверждения, если сам не можешь использовать его для чего-нибудь иного, кроме как для этих маленьких фокусов?»[3]. Слова о «маленьких фокусах» эпатируют. Но попробуем разобраться. Фраза «*P* истинно и недоказуемо» внушает мысль, будто *P* есть истинное описание не зависящего от нас объективного факта. Против этого Витгенштейн предлагает свое истолкование, ибо, как мне кажется, на этом и основан «фокус», который он имеет в виду: демонстрация недоказуемого, но истинного предложения. Прежде всего, Витгенштейн напоминает, что, согласно принятому словоупотреблению, говорить «*P истинно*» означает «принимать предложение *P*», «утверждать предложение *P*». Утверждение предложения составляет шаг в языковой игре. Вообще говоря, это могут быть разные игры, соответственно и значение утверждения «*P* истинно» может быть разным. (Замечу, что иногда говорят «*P* истинно», если *P* является тавтологией. Это — еще одна из «языковых игр», но она не имеет отношения к гёделевскому предложению.)

Если речь идет об определенной формальной системе (например, о первопорядковом исчислении предикатов с равенством), то там предложение утверждается, если оно принято в качестве аксиомы или стоит в конце некоторого доказательства, построенного по правилам этой системы.

Однако с гёделевским предложением *P* дело ведь обстоит не так. Оно не стоит в конце определенного доказательства в первопорядковой формальной арифметике. Да и вообще оно нигде не выписано в явном виде. То, что мы имеем возможность рассуждать о гёделевском неразрешимом предложении *P*, слегка маскирует данное обстоятельство. Гёдель описывает *принцип* его построения, показывая *принципиальную возможность* подобного предложения. При этом

---

[1] См., например: *Steiner M.* Wittgenstein as his own worst enemy: the case of Gödel's theorem // Philosophia Mathematica (3). Vol. 9. 2001. P. 257–279.

[2] См., например: *Ffloyd J.* Prose versus proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth // Philosophia Mathematica (3). Vol. 9. 2001. P. 280–307; *Friederich S.* Motivating Wittgenstein's perspective on mathematical sentences as norms // Philosophia Mathematica (III). Vol. 19. 2011. P. 1–19.

[3] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 58.

оно сконструировано так, чтобы говорить о своей недоказуемости, т.е. существенным элементом его построения является создание возможности интерпретировать данное предложение как утверждающее собственную недоказуемость.

Если предложение, говорящее о своей недоказуемости, вдруг было бы доказано, то это было бы противоречием. Поэтому, если система непротиворечива, то оно не может быть доказуемо. Гёделевское предложение *P* говорит о собственной недоказуемости, следовательно, оно не может быть доказуемым в непротиворечивой системе, следовательно, оно истинно. Так является ли оно истинным описанием объективного факта? Повторю еще раз, что Витгенштейн не спорит с построенным Гёделем доказательством, он спорит именно с тем, что это доказательство дает пример математического предложения, которое не имеет доказательства, и при этом имеет вполне определенный смысл и является истинным, т.е. представляет описание объективно существующего математического факта.

Тактика Витгенштейна состоит в том, чтобы показать, как в подобных рассуждениях по поводу гёделевского неразрешимого предложения происходят подмены обычных значений используемых выражений. Например, используется понятие истинности, которое по инерции кажется ясным, но на самом деле таковым не является, потому что выходит за пределы своих обычных применений. Говорится, что предложение *P* истинно, потому что оно утверждает собственную недоказуемость, и в таком случае оно не может быть доказуемо в предположении, что система, которой оно принадлежит, непротиворечиво. Но, спрашивает Витгенштейн, что же произойдет, если предложение, говорящее о своей недоказуемости, будет доказано? — Никакие основы не зашатаются, просто будет изменена *метаязыковая интерпретация* данного арифметического предложения. Например, будет уточнено, что оно не доказуемо такими-то доказательствами, — но доказуемо другим: «Когда для *P* была дана интерпретация “*P* недоказуемо”, то еще было неизвестно это доказательство для *P*, и поэтому нельзя сказать, что *P* утверждает: *это* доказательство не существует. — Как только построено доказательство, тем самым создана *новая ситуация:* и теперь надо решать, будем ли мы называть *это* доказательством (*еще одним* доказательством) или же утверждением о недоказуемости»[1]. Защищая Витгенштейна, напомню, что

[1] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 57. Джульет Ффлойд на основании этого и других высказываний Витгенштейна о теореме Гёделя приходит к выводу, что Витгенштейн увидел в теореме Гёделя свидетельство того, что формализованная арифметика не достаточно полно характеризует натуральное число. Если предположить, что предложение *P* окажется доказанным, это будет означать, что система

неразрешимое предложение может быть добавлено к системе формализованной арифметики в качестве аксиомы. Новая система не будет противоречивой, просто изменится интерпретация данного арифметического предложения. Является ли арифметическое предложение с другой метаязыковой интерпретацией тем же самым предложением? Или точнее было бы сказать вместе с Витгенштейном: «...что означает: *P* и "*P* недоказуемо" суть одно и то же предложение? Это значит, что эти *два* предложения в такой-то системе записи имеют *одно* выражение»[1].

Витгенштейн показывает, как изобретение Гёделем новых способов доказательства (гёделевская нумерация) вносит изменения в игру «утверждения предложения» или «принятия предложения». И якобы разверзание философских глубин объясняется тем, что мы не замечаем этих изменений и в одном и том же контексте склеиваем разные употребления слов «доказано», «истинно».

Чтобы понять, что значит предложение, и заметить происходящие смещения значений, надо смотреть на доказательство данного предложения, а также на его применение. Поэтому, призывает Витгенштейн, надо смотреть на *использования* математического предложения, а не на его вербальную интерпретацию. Эта установка остается лейтмотивом при обсуждении канторовской диагональной процедуры и ее результата. Витгенштейн призывает не смотреть на эту процедуру как на метод *открытия* особого поразительного факта — несчетности множества действительных чисел; и тем более не смотреть на это как на способ построения числа: «Не состоит ли вопрос, по сути, в следующем: для чего можно *использовать* это число? Правда, это звучит странно. — Но это как раз и означает: в какое математическое окружение оно включено?»[2]. Такой на первый взгляд странный и наивный вопрос о том, как можно использовать построенное посредством диагональной процедуры число, заставляет осознать, что диагональная процедура предъявляет новое число в весьма специфическом смысле, значительно отличающемся от принятых способов предъявления числа. Следовательно, диагональная процедура является не открытием поразительных черт особой идеальной реальности — континуума, а созданием новой практики, нового способа говорить о числах, о том, что значит «задать число», «предъявить число».

ω-противоречива, что еще не означает противоречивости в обычном смысле слова, но открывает возможность нестандартной интерпретации системы и ее основных понятий, а это означает изменение значений понятий «натуральное число» и «доказуемость» (*Ffloyd J.* Prose versus proof... P. 283–284).

[1] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 55.

[2] Там же. С. 59.

Витгенштейн обращает внимание на то, как меняется значение выражений «упорядочение», «действительное число» в ходе диагонального рассуждения. У нас есть представление о том, что значит «упорядочить в ряд все натуральные числа». Возможно упорядочение в ряд всех алгебраических чисел, но это уже другая техника. А когда говорят «предположим, мы упорядочили в ряд все действительные числа», то, обращает внимание Витгенштейн, непонятно, что это означает, какая именно техника, какие способы упорядочения этим подразумеваются: «Если спрашивают: “Можно ли упорядочить в ряд действительные числа” — то корректным был бы такой ответ: “Я пока не в состоянии создать точную идею этого”. — “Но ведь ты можешь, например, выстроить в ряд корни и алгебраические числа; значит, ты все-таки понимаешь это выражение!” — Правильнее говоря, я имею здесь дело с определенными похожими друг на друга образованиями, которые называю одним общим именем “ряд”. Но у меня еще нет надежного мостика от этих случаев ко “всем действительным числам”»[1]. А сам диагональный метод — это не способ *предъявить* неучтенное, но до того и независимо от диагонального рассуждения существующее число; это просто изменение словоупотребления, позволяющее называть диагональную процедуру методом построения нового действительного числа. Более того — фактически данная процедура и объявляется еще одним, неучтенным действительным числом. И поэтому Витгенштейн предлагает следующую, неопасную (в смысле: не возбуждающую никаких философских болезней) формулировку результата Кантора: «Если что-то называют рядом действительных чисел, то построение по диагональному методу также именуют “действительным числом” и при том говорят, что оно отлично от всех членов ряда»[2]. Витгенштейн предостерегает от предложений, которые, так и кажется, приоткрывают непостижимые тайны бесконечного и идеального: «О таком предложении можно было бы сказать: оно вводит нас в тайны математического мира. Это именно тот аспект, относительно которого я хочу предостеречь. Если кажется... то следует быть осмотрительным»[3]. «В формулировках: “Нельзя выстроить в ряд действительные числа” или же “Множество... несчетно” — опасно, обманчиво то, что некое определение, способ образования понятия, представлено в виде факта природы»[4]. Объясняя мысль Витгенштейна, уместно вспомнить о теореме Скулема, которая показывает, сколь

[1] Там же. С. 60.
[2] Там же. С. 61.
[3] Там же. С. 65.
[4] Там же. С. 61.

относительным является «открытие», которое якобы было сделано посредством диагональной процедуры[1], и сколь неопределенным по значению остается предположение (с которого начинается доказательство несчетности множества действительных чисел): «Предположим, что мы упорядочили в ряд все действительные числа».

Чтобы понять, что диагональная процедура не означает открытия особого действительного числа, которое не может быть встроено в упорядоченный ряд, достаточно посмотреть на его применение, точнее, на то, что никакого применения нет, потому что диагональная процедура не предъявляет определенного числа. Витгенштейн постоянно напоминает о том, что философ математики должен смотреть не на словесные формулировки математических результатов, а на их доказательство и употребление. Словесные формулировки математических результатов порождают в сознании некие картины, образы, которые частенько вызывают «легкое опьянение мыслей»[2], а философская терапия Витгенштейна направлена на отрезвление. Так, канторовское доказательство несчетности множества действительных чисел вызывает особый интерес, который «сопряжен с картиной, имеющей в высшей степени слабое обоснование, но привлекающей нас своей необычностью... Я могу только сказать: расстанься как можно скорее с такой картиной и усматривай интерес исчисления в его использовании»[3]. Удивительные открытия, особенно связанные с бесконечностью, Витгенштейн любит лишать ореола, убеждая, что мы просто сталкиваемся с тем, что некоторые выражения не получили смысла. Так, вместо рассуждений о бесконечности ряда он предлагает говорить о том, что в процедуре построения такого ряда не предусмотрено завершение. Или другой пример: «То, что в технике вычисления дробей выражение “наиближайшая по величине дробь” не имеет смысла, что мы не придали данному выражению никакого смысла — это вовсе не удивительно. Если мы применяем технику беспрерывного интерполирования дробей, то у нас не появится желания назвать какую-нибудь дробь “наиближайшей по величине”»[4].

Вместо головокружения от созерцания поразительных свойств бесконечности (или непрерывности) Витгенштейн предлагает описание разных практик, в данном случае практик работы с числами. От-

---

[1] Теорема Лёвенгейма—Скулема показывает, что первопорядковая аксиоматическая теория, имеющая бесконечную модель, имеет счётную модель, из чего следует относительность таких понятий, как счётность или несчётность.

[2] *Витгенштейн Л.* Замечания... С. 68.

[3] Там же.

[4] Там же. С. 66.

личительные черты этих практик могут показаться несущественной мелочью, на которую не должен отвлекаться серьезный мыслитель. Если задачей является выполнение определенных вычислений и получение определенных результатов, тогда моменты, на которых фиксирует внимание Витгенштейн, действительно составляют мелочи, на которые не надо тратить внимание. Но если уж мы начали «играть в другую языковую игру» и предлагать философские интерпретации названных практик, то мы обязаны «сменить оптику» и внимательно фиксировать специфические черты таких практик и их изменения.

В канторовской трансфинитной арифметике и в его учении об иерархии мощностей множеств Витгенштейн видит постоянное изменение значений слов, таких как «число», «равенство», «число, следующее после». Вообще математические открытия состоят в построении новых техник, которые изменяют старые «языковые игры». «Математик — изобретатель, а не открыватель»[1].

Таким образом, даже в математике происходит дрейф значений используемых слов — и наложение разных ментальных образов, с этими словами связанных. А это в свою очередь порождает разнообразные философские проблемы (и даже направления). Новое развитие в математике, появление новых методов и подходов вызывает изменение смыслов ранее использовавшихся слов и оборотов. Появляются новые употребления, которые в одних отношениях схожи, а в других — отклоняются от принятых. Мне кажется, что сам факт подобных изменений является аргументом против математического платонизма и математического трансцендентализма.

Критикуя Витгенштейна, М. Штейнер[2] подчеркивает, что в математике происходит не произвольное смещение значений, а расширение некоторых техник и понятий, при котором в прежней области эти понятия и техники должны сохранять свои значения. Подобное возражение касается и развиваемой здесь интерпретации Витгенштейна на языке Деррида. Однако оно не представляется нам достаточно веским аргументом против Витгенштейна, просто у Штейнера «оптика» настроена иначе, чем у Витгенштейна. Штейнер имеет в виду случаи, подобные, например, расширению операции извлечения квадратного корня на область отрицательных чисел. И он видит, что при новом понимании этой операции, число 2 все равно останется квадратным корнем из 4, но не замечает, насколько сильно изменился смысл понятия «число» при введении мнимых чисел. А для Витгенштейна

[1] Там же. С. 52.

[2] *Steiner M.* Wittgenstein as his own worst enemy: the case of Gödel's theorem // Philosophia Mathematica (3). Vol. 9. 2001. P. 257–279.

важно именно это. Никто не говорит, что изменения математических техник являются произвольными, что они разрывают с прежними практиками. Проблема в том, что они все равно остаются новыми и непредсказуемыми.

Обращает на себя внимание, что Витгенштейн постоянно стремится изменить для нас привычные словесные формулировки математических результатов, которые выглядят как повествовательные предложения, на формулировки в повелительной форме, подобные императивам или запретам. Такие формулировки кажутся ему более удачными в том отношении, что не заслоняют природу математических предложений так, как это делают повествовательные формулировки. Наоборот, они напоминают и показывают, что математические предложения — это правила наших действий, или, может быть запреты на какие-то действия, но запреты тоже ведь являются правилами!

Таким образом, в математике значения используемых выражений зачастую незаметно дрейфуют. Осознать это мешает обычность подобной практики, а философскую рефлексию тормозит платонизм. Платонистическая философия математики, как и математический трансцендентализм, задают «оптику», в которой подобные изменения употреблений становятся неразличимыми. А «оптика», которую предлагает Витгенштейн, помогает увидеть, что развитие даже и математических теорий и техник носит исторически случайный характер.

Если мы это осознаем, то распространенное представление, будто в аксиомах «содержатся» все теоремы, попросту теряет смысл. Коль скоро системы аксиом определенным образом применяются, и в этих применениях могут возникать новые, неожиданные линии развития (само гёделевское неразрешимое предложение, или техника гёделизации являются тому неплохой иллюстрацией), то бессмысленно говорить, что в аксиомах уже «все содержалось» заранее.

Представляется, что философия Витгенштейна имеет то преимущество по сравнению с математическим платонизмом или математическим трансцендентализмом, что она легитимизирует появление новых неожиданных практик, и, соответственно, снимает «эпистемологические препятствия» к их принятию. Здесь можно вспомнить практики, связанные с компьютерными доказательствами и вычислительными экспериментами. Эти практики наводят на мысль, что и само понятие математики претерпевает дрейф, что ее границы не предзаданы. Во всяком случае не дело философии заранее фиксировать эти границы. А из математического платонизма или трансцендентализма вытекает, что границы эти уже и навсегда зафиксированы.

Библиографический список

Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть II. Книга I. М.: Гнозис, 1994.

Витгенштейн Л. Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть I. М.: Гнозис, 1994.

Ffloyd J. Prose versus proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth // Philosophia Mathematica (3). Vol. 9. 2001. P. 280–307

Serény G. How do we know that the Gödel sentence of a consistent theory is true? // Philosophia Mathematica (III). Vol. 19. 2011. P. 47–73.

Steiner M. Wittgenstein as his own worst enemy: the case of Gödel's theorem // Philosophia Mathematica (3). Vol. 9. 2001. P. 257–279.

Friederich S. Motivating Wittgenstein's perspective on mathematical sentences as norms // Philosophia Mathematica (III). Vol. 19. 2011. P. 1–19.

Wittgenstein L. Lectures on the foundations of mathematics. L.: Duckworth, 1980.

Раздел
2

ПОСТИЖИМА ИЛИ НЕПОСТИЖИМА ЕФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ?

Владимир П. Визгин

«ПРЕДУСТАНОВЛЕННАЯ ГАРМОНИЯ МЕЖДУ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ»

(*к 150-летию со дня рождения Г. Минковского и 100-летию тензорно-геометрической концепции гравитации*)

«Но еще большее впечатление производит явление, которое, заимствуя терминологию у Лейбница, мы называем предустановленной гармонией. Она является прямым воплощением и реализацией математических идей... Самым великолепным и самым чудесным примером предустановленной гармонии является знаменитая эйнштейновская теория относительности».

Д. Гильберт[1]

Введение

Явление, о котором говорит Гильберт, а также которое вынесено в заглавие статьи и заимствовано из знаменитого Кельнского доклада Г. Минковского, широко известно как феномен «непостижимой эффективности математики в естественных науках». Эта крылатая формулировка принадлежит Ю. Вигнеру, который так назвал свою лекцию в честь Р. Куранта в Университете Нью-Йорка 11 мая 1959 г.[2]

Но существует другое название этого явления, более чем на полвека старше, которое в разгар квантово-релятивистской революции в физике использовали геттингенские математики Д. Гильберт, Г. Минковский, Ф. Клейн и др. Они же, фактически, и описали это явление.

В 2013–2014 гг. отмечаются две крупных юбилейных даты, связанные с этим. Во-первых, 100-летие со времени создания тензорно-геометрической концепции гравитации — концептуального ядра того «самого великолепного и самого чудесного примера предустановленной гармонии», т.е. общей теории относительности (ОТО), о котором говорится в эпиграфе. Во-вторых, 150-летие со дня рождения Г. Минковского (он родился 22 июня 1864 г.), обнаружившего эту гармонию

[1] *Гильберт Д.* Познание природы и логика // Гильберт Д. Избранные труды. М., 1998. Т. 1. С. 460.

[2] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971. С. 181–198.

в своей четырехмерной теоретико-инвариантной формулировке специальной теории относительности (СТО). Кстати говоря, эта формулировка Минковского сыграла важную роль в генезисе тензорно-геометрической концепции гравитации и, тем самым, ОТО.

Отметим некоторые особенности концепции предустановленной гармонии. Прежде всего, как впоследствии говорил Вигнер, она является «эмпирическим законом эпистемологии» и важным фактором при построении фундаментальных физических теорий. Эмпиричность ее состоит в том, что история теоретической физики дает массу примеров эффективности этой концепции, но сама она не имеет какого-либо логического или эпистемологического обоснования. Возвышенные, почти философские формулировки этого явления (закона, концепции) вызваны тем, что оно (это явление) уже приобрело статус своеобразного символа веры физиков-теоретиков.

Далее, само понятие предустановленной гармонии восходит к Г.В. Лейбницу и его монадологии. И это открывает еще одно измерение для изучения обсуждаемого феномена.

Геттингенские математики в первой трети XX в. не только внесли значительный вклад в создание и развитие релятивистских и квантовых теорий, продемонстрировав поразительную мощь чистой или абстрактной математики в физике, но и рассмотрели этот феномен как специфическую теоретико-познавательную концепцию.

В последующие годы выдающиеся физики-теоретики и математики (А. Эйнштейн, А. Зоммерфельд, В. Гейзенберг, П. Дирак, Н. Бурбаки и др.) так или иначе говорили об этом феномене, иногда в духе предустановленной гармонии. По существу, к ним присоединились и некоторые из лидеров отечественной физики и математики (Л.И. Мандельштам, С.И. Вавилов и несколько позже А.Д. Александров, Н.Н. Боголюбов, Я.Б. Зельдович, Л.Д. Фаддеев, Ю.И. Манин и др.).

И все-таки своего рода приоритет в открытии этого «эпистемологического явления» и его применения принадлежит, безусловно, геттингенцам. Отметим в этой связи важные работы почти тридцатилетней давности Л.Р. Пайнсона, который обстоятельно исследовал вклад геттингенцев в теорию относительности и использование ими лейбницевской концепции предустановленной гармонии[1].

Признание концепции предустановленной гармонии вводит в обиход физика-теоретика «математическую эвристику», игру с уравнениями, геометриями и другими математическими структурами.

[1] *Pyenson L.R.* The young Einstein: the advent of relativity. Bristol & Boston: A. Hilger. Ltd., 1985. Chapter 6.

Но анализ некоторых характерных проявлений этой гармонии (например, генезис тензорно-геометрической концепции гравитации) показывает сложность этого пути к отождествлению физической реальности и подходящей математической структуры, на котором «математическая эвристика» чередуется с физическими соображениями и методологическими принципами физики.

И последнее. Предустановленная гармония между математикой и физикой, сохраняя свою загадочность, остается мощным средством теоретизирования и в XXI в., о чем сказано в заключительной части нашей работы.

1. Д. Гильберт о взаимосвязи математики и физики и «предустановленной гармонии» накануне релятивизма и квантов

8 марта 1900 г. Гильберт прочитал свой знаменитый доклад «Математические проблемы» на II Международном конгрессе математиков в Париже[1]. До теории относительности оставалось пять лет, но идея кванта и постоянная Планка только что появились в весьма туманном виде (1899–1900). И хотя математика уже показала свою силу в классической механике и физике, прежде всего в теоретических трудах Дж.К. Максвелла, Л. Больцмана, Г. Герца, А. Пуанкаре и др., ее опережающая, конструктивная функция при построении фундаментальных физических теорий еще не проявилась достаточно ясно и не была осознана физиками. Один из лидеров Геттингена, Гильберт (другим в эти годы был Ф. Клейн, по инициативе которого он был в 1895 г. приглашен туда на должность профессора) уже тогда интересовался физикой и знал о ее плодотворном влиянии на развитие математики. К тому же он с молодых лет дружил с Г. Минковским, проявлявшим интерес к физике, а в Геттингене со времен К. Гаусса и Б. Римана была жива традиция математической физики.

В докладе «Математические проблемы» Гильберт в качестве важнейшего источника этих проблем называет естествознание. Развитие математики, во многом порожденное естественно-научными стимулами, возвращает наукам о природе (прежде всего, физике, механике, астрономии) свой долг, внося вклад в создание и совершенствование научных теорий. Трудно удержаться от того, чтобы не привести красочное описание Гильбертом этого эстафетного процесса: «Обратимся к вопросу о том, из какого источника мате-

[1] *Гильберт Д.* Математические проблемы // Гильберт Д. Избранные труды. М., 1998. Т. 2. С. 401–436.

матика черпает свои проблемы. Несомненно, что первые и самые старые проблемы каждой математической области знания возникли из опыта и поставлены нам миром внешних явлений...». Далее следует серия примеров, заканчивающаяся проблемами «теории численных уравнений, теории кривых, дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, теории рядов Фурье и теории потенциала, не говоря уже о всем богатстве проблем собственно механики и физики». «При дальнейшем развитии какой-либо математической дисциплины, — продолжает он, — человеческий ум, обнадеженный удачами, проявляет уже самостоятельность; он сам ставит новые и плодотворные проблемы, часто без заметного влияния внешнего мира, с помощью только логического сопоставления, обобщения, специализирования, удачного расчленения и группировки понятий и выступает затем сам на первый план как постановщик задач... А между тем во время созидательной силы чистого мышления внешний мир снова настаивает на своих правах: он навязывает нам своими реальными фактами новые вопросы и открывает нам новые области математического знания. И в процессе включения этих новых областей знания в царство чистой мысли мы часто находим ответы на старые нерешенные проблемы и таким путем наилучшим образом продвигаем вперед новые теории. *На этой постоянно повторяющейся и сменяющейся игре между мышлением и опытом, мне кажется, и основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленная гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и понятиях различных областей знания*» (курсив мой. — *В.В.*)[1].

Последняя, выделенная курсивом фраза, является ключевой. Во-первых, в ней уже появилось выражение «предустановленная гармония» между мышлением (в данном случае математикой) и опытом (т.е. естествознанием). Во-вторых, в ней высказана гипотеза об историко-научной природе этой гармонии, которую здесь Гильберт называет кажущейся. При этом никаких упоминаний о Г.В. Лейбнице, разработавшем концепцию предустановленной гармонии в связи со своим учением о монадах, здесь нет. Яркие, даже потрясающие воображение примеры этой гармонии еще не открыты (они появятся несколько позже — в связи с четырехмерной формулировкой специальной теории относительности и созданием общей теории относительности и квантовой механики), а Гильберт пророчески уже произнес магическую формулу и даже предложил «эстафетную» историко-научную модель для ее объяснения.

[1] Там же. С. 403.

2. Г. Минковский и предустановленная гармония между специальной теорией относительности и псевдоевклидовой геометрией

150-летие со дня рождения другого геттингенца и создателя четырехмерной теоретико-инвариантной концепции специальной теории относительности (СТО) Г. Минковского отмечается в 2014 г. После окончания университета в Кенигсберге он преподавал в Боннском университете, где общался с Г. Герцем, который увлек его физикой, а затем преподавал в Цюрихском Политехническом институте, где в это время учился А. Эйнштейн. В 1902 г. Ф. Клейн и Д. Гильберт сумели организовать его приглашение в Геттинген. Еще до появления главных работ Эйнштейна и Пуанкаре по СТО Минковский и Гильберт начали проводить в Геттингене семинар по электродинамике движущихся тел. Участник семинара М. Борн, ставший «физическим» учеником Минковского, вспоминал впоследствии, что его учитель уже тогда занимался преобразованиями Лоренца и «уже напал на след новых взаимосвязей»[1].

Первое изложение четырехмерной формулировки СТО было дано Минковским в докладе «Принцип относительности», сделанном на заседании Геттингенского математического общества 5 ноября 1907 г. и опубликованном только через шесть лет после его внезапной смерти[2]. Более яркое и доступное изложение этой формулировки он дал через год в Кельне на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей (21 сентября 1908 г.), который был сразу же опубликован и переведен на многие языки[3]. В обоих докладах Минковский обращает внимание на феномен поразительного соответствия между математикой и физикой, который только в кельнском докладе он именует «предустановленной гармонией между чистой математикой и физикой». Нет сомнения в том, что об этом феномене он не раз беседовал с Гильбертом, у которого, вероятно, и заимствовал это выражение.

Вот как об этом феномене он говорил в Геттингене: «Математик особенно хорошо предрасположен воспринимать новые воззрения, потому что при этом речь идет о приспособлении к таким комплексам понятий, которые ему давно были привычны, в то время как физик должен изобретать эти понятия отчасти вновь и при этом усердно

---

[1] *Борн М.* Воспоминания о Германе Минковском // Борн М. Размышления и воспоминания физика. М., 1977. С. 84.

[2] *Minkowski H.* Das Relativitätsprinzip (1907) // Annalen der Physik. 1915. Bd. 47. S. 927–938.

[3] *Минковский Г.* Пространство и время // Принцип относительности. Сборник работ классиков релятивизма. М.; Л., 1935. С. 181–203.

пробивать себе тропу через дремучий лес неясностей, хотя рядом выводит нас вперед отличная дорога, давно проложенная математиком. Вообще новые разработки, если они... верно отображают явления, означают чуть ли не наивысший триумф, которого когда-либо достигала математика. Речь идет о том, — при кратком по возможности выражении, — что наш мир в пространстве и времени представляет собой в известном смысле четырехмерное неевклидово (точнее, в соответствии с современной терминологией, — псевдоевклидово. — *В.В.*) многообразие. Кажется, становится ясным, что математики исключительно посредством своей фантазии создали большую область, которой суждено было обрести вполне реальное существование, хотя это и не было целью этих мастеров идеального»[1].

В кельнском докладе Минковский вводит понятие группы G_∞ (фактически галилей-ньютоновской группы классики, которая получается из группы Лоренца G_c при $c \to \infty$) и замечает: «При таком положении вещей и имея в виду, что G_c математически понятнее, чем G_∞, математик в свободном полете фантазии мог бы напасть на мысль, что явления природы, в конце концов, действительно инвариантны не относительно группы G_∞, но скорее относительно группы G_c с определенным конечным c, которое только в обычных единицах измерения *чрезвычайно велико*. Такое предвосхищение было бы необыкновенным триумфом чистой математики. Математика в этом вопросе не оказалась находчивой; все же для нее остается удовлетворение, что она, благодаря своим более ранним счастливым предшественникам, с их дальновидным и острым умом, в состоянии теперь сразу же охватить глубоко идущие следствия подобной перестройки нашего миропонимания»[2]. В этом отрывке ясно видно понимание Минковским поразительного соответствия парадоксальной, сложной физической теории — математически простой структуре. В данном случае физика опередила математику, но была возможна и обратная ситуация. Но даже обнаружение подлинной математической структуры уже созданной СТО открыло перед новой теорией и физикой в целом новые горизонты. В конце доклада он находит для упомянутого соответствия подходящее выражение и заодно указывает на то, что оно может облегчить восприятие теории теми, кому трудно принять ее парадоксальные физические следствия: «При дальнейшей разработке математических следствий найдется достаточно указаний для экспериментальной проверки истинности постулата (т.е. СТО. — *В.В.*)

---

[1] *Minkowski H.* Das Relativitätsprinzip (1907). S. 927. Отрывок дан в переводе В.А. Антонова из книги Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2» (М.; Ижевск, 2003), кроме последней фразы, данной в моем переводе.

[2] *Минковский Г.* Пространство и время. С. 186.

для того, чтобы примирить с ним, *на основе идеи о предустановленной гармонии между чистой математикой и физикой*, и тех, которым неприятно или больно оставить привычные воззрения»[1].

Во избежание недоразумений следует заметить, что почти за два года до Минковского А. Пуанкаре ввел четырехмерный подход к СТО, интерпретировав преобразования Лоренца как поворот в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, но использовал это только как математический прием для вычисления «инвариантов группы Лоренца» (выражение Пуанкаре) при построении релятивистского обобщения ньютоновского закона всемирного тяготения. Минковский же с самого начала формулирует теорию как четырехмерную инвариантную конструкцию и вводит четырехмерное пространство-время («мир») как фундаментальное физическое понятие.

3. Ф. Клейн, «Эрлангенская программа» и предустановленная гармония

10 мая 1910 г. (примерно чрез год после смерти Минковского) его старший друг, шестидесятилетний патриарх Геттингена Ф. Клейн прочитал доклад «О геометрических основаниях лоренцевой группы», который прозвучал как дань памяти Г. Минковскому[2]. В четырехмерной теоретико-инвариантной формулировке СТО Клейн увидел возможность физической реализации своей «Эрлангенской программы», которую он выдвинул еще в 1872 г. и которая внесла порядок в хаос, царивший в геометрии к середине XIX в. В соответствии с этой программой геометрии понимались как теории инвариантов связанных с этими геометриями групп преобразований, а Минковский в точности в этих же терминах сформулировал СТО и классическую механику — как теории инвариантов групп G_c и G_∞[3].

Клейн, как и Минковский, воспринял эту ситуацию как поразительное соответствие геометрии и физики, с одной стороны, вскрывающее математическую суть физических теорий и тем самым облегчающее восприятие парадоксальных следствий СТО, а с другой — стимулирующее и математическую мысль: «Это совпадение двух, совершенно обособленных по своему историческому происхождению, рядов мыслей должно будет, без сомнения, подействовать в высокой степени возбуждающим образом на обе стороны»[4].

---

[1] Там же. С. 203.

[2] *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцевой группы // Новые идеи в математике. Сборник № 5. Принцип относительности в математике. СПб., 1914. С. 144–174.

[3] *Визгин В.П.* Эрлангенская программа и физика. М.: Наука, 1975.

[4] *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцевой группы. С. 144–145.

О некоторых практических аспектах достижения гармонии между физикой и математикой Клейн говорит далее: «Исследователи, работающие на разных поприщах, и в частности физики, не имеют времени, а нередко также и случая, убедиться, не находятся ли уже готовыми в кладовых чистой математики те логические орудия, в которых они нуждаются; поэтому они от случая к случаю сами изготовляют себе математические орудия, в которых они нуждаются — что, между прочим, влечет за собой известную свежесть в их мыслях. Наступающее впоследствии соглашение с профессиональными математиками — представляющееся мне весьма важным делом, так как благодаря ему мысли приобретают более точный характер и открываются всякого рода связи — предполагает прежде всего перевод употребляемых там и сям способов выражения на другой язык»[1]. Кстати, именно после этих слов появляется клейновское выражение «теория относительности по отношению к некоторой группе».

Через пару страниц следует очень интересный фрагмент, касающийся существа и эвристичности обсуждаемой гармонии: «Должен рассеять предубеждение, которое, может быть, питают некоторые из вас: профан заранее мало склонен приписывать какую-нибудь ценность занятию проблемами, которые возникают прежде всего лишь из субъективного, так сказать, эстетического стремления к познанию математики. Но история науки показывает, что дело обстоит совершенно иначе. Это большая тайна, которую трудно выразить словами. Я скажу лишь, что все то, что здорово в математическом отношении, рано или поздно приобретает значение, далеко выходящее за пределы его первоначальной области»[2]. И дальше Клейн приводит пример с теорией конических сечений, «которая вместе с открытием кеплеровых законов, получила внезапно величайшее значение для нашего понимания природы».

Слово «гармония» в отношении обсуждаемого феномена появляется у него во втором томе «Лекций о развитии математики в XIX столетии», читанных им в 1915–1917 гг. и изданных посмертно в 1927 г. под редакцией Р. Куранта и С. Кон-Фоссена[3]. Подчеркивая, что разработка Эйнштейном расширения СТО, связанного с переходом к ОТО, а также открытие Г. Бейтменом и Э. Каннингхэмом конформной группы симметрии уравнений Максвелла свидетельствуют об эффективности и эвристичности применения идей «Эрлангенской программы» в физике, Клейн резюмирует: «Та удивительная гармония, которая существует между прежним развитием чистой матема-

[1] Там же. С. 153–154.

[2] Там же. С. 157.

[3] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

тики и идейными конструкциями новой физики, вновь открывает себя и в расширенной области»[1]. В другом месте он говорит о «той замечательной гармонии, которая существует между ранее накопленным запасом идей математической теории и современным аппаратом математической физики»[2].

В своей ранней работе «Эрлангенская программа и физика» я исследовал естественно-научные истоки этой программы, чтобы объяснить ее эффективное включение в физику и тем самым подтвердить (и проиллюстрировать) перспективность гильбертовской эстафетной модели взаимодействия математики и естествознания[3].

4. Предустановленная гармония и генезис тензорно-геометрической концепции гравитации

Тензорно-геометрическая концепция гравитации, развитая впервые в совместной статье А. Эйнштейна и его студенческого приятеля математика М. Гроссмана, опубликованной в июне 1913 г. (в 2013 г. отмечалось 100-летие этого события)[4], является основой ОТО. Ее чеканная формулировка принадлежит В. Паули: это «слияние двух совершенно различных областей — метрики и тяготения»[5]. Процесс формирования этой концепции от эйнштейновского принципа эквивалентности до решающего сдвига летом 1913 г. неоднократно рассматривался, в частности, и в моих работах[6]. Здесь же мы кратко отметим роль обсуждаемой предустановленной гармонии, которую Эйнштейн (отчасти вместе с Гроссманом) использовал, по крайней мере, дважды, хотя буквально не говорил о ней.

Первый случай — это принятие Эйнштейном всерьез четырехмерной геометрической формулировки Минковского. Сначала (в 1908–

---

[1] Там же. С. 97.

[2] Там же. С. 139.

[3] *Визгин В.П.* Эрлангенская программа и физика. М.: Наука, 1975. См. также: *Визгин В.П.* «Эрлангенская программа» Ф. Клейна и физика // Ученые записки. Институт информатизации образования РАО. Вып. 2. М., 1998. С. 46–63.

[4] *Эйнштейн А., Гроссман М.* Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М., 1965. С. 227–266.

[5] *Паули В.П.* Теория относительности. М.; Л., 1947. С. 215.

[6] См. например: *Визгин В.П.* Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915 гг.). М., 1981; *Визгин В.П.* Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 12. С. 1347–1363; *Визгин В.П.* Концептуальные истоки общей теории относительности (к 100-летию принципа эквивалентности А. Эйнштейна и четырехмерного мира Г. Минковского) // Исследования по истории физики и механики. 2007. М., 2008. С. 253–281.

1910 гг.) он недооценивал ее, считал «излишней ученостью», но в 1911 г. уже изменил свое отношение к ней, полагая, что она ведет к «чрезвычайно ясному изложению теории относительности, существенно облегчающему ее приложения»[1]. Но вскоре оказалось, что дело не только в ясности, но в существе дела. Летом 1912 г. Эйнштейн использовал четырехмерную формулировку уравнений движения материальной точки с помощью метрики *ds* для записи уравнений движения точки сначала в статических полях, а затем и в произвольных полях тяготения:

$$\delta \int ds = 0.$$

В конечном счете это и привело его к римановой метрике

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Поэтому вскоре после завершения основ ОТО он высоко оценивал идеи Минковского и тем самым связанную с ними предустановленную гармонию, «без которых общая теория относительности... быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии»[2].

Второй раз гармония сработала, когда после приезда Эйнштейна в Цюрих Гроссман помог ему подключить к делу риманову геометрию и тензорный анализ, хотя уже в Праге (до Гроссмана) он понял, что ему нужно что-то вроде гауссовой теории поверхности, курс которой он слушал, будучи студентом (этот курс читал профессор Гейзер). Осенью 1912 г. он высоко оценил конструктивную мощь математики. 29 октября 1912 г. он писал Зоммерфельду: «Теперь я занимаюсь исключительно проблемой гравитации и надеюсь, что с помощью одного здешнего друга, математика, все трудности будут преодолены. Но одно точно: никогда в жизни я так не мучился, и теперь мне внушает большое уважение математика, тонкости которой я по своей ограниченности считал роскошью»[3].

Однако прошло около года, прежде чем появилась статья Эйнштейна и Гроссмана, где была развита тензорно-геометрическая концепция гравитации. Эту задержку Эйнштейн объяснял впоследствии следующим образом: «Указанная математическая проблема была уже решена, прежде всего Риманом, Риччи и Леви-Чивитой... Достиже-

---

[1] *Эйнштейн А.* Теория относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М., 1965. С. 186.

[2] *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности // Там же. С. 559.

[3] *Einstein A.* The Collected Papers. Vol. 5. The Swiss Years: Correspondence. 1902–1914. Princeton, 1993. P. 505.

ния Римана были наибольшими. Он показал, как из поля тензора g_{ik} можно получить вторые производные. Из этого следовало, как должны выглядеть уравнения поля гравитации в случае, если поставлено требование инвариантности относительно группы всех непрерывных преобразований координат. Однако не так легко было принять это требование как обоснованное, так как я считал, что против него можно найти какие-то возражения...»[1]. Это объясняет также, и то, что ОТО появилась спустя два с половиной года, когда эти возражения были устранены.

Впоследствии создание тензорно-геометрической концепции гравитации и затем ОТО рассматривалось и в Геттингене, и за его пределами как наиболее впечатляющий триумф предустановленной гармонии между математикой и физикой. Но мы видим, что достижение этой гармонии — не однократный акт отождествления математического и физического, а сложный процесс, связанный с напряженными поисками и блужданиями в ошибочных направлениях.

В 1918 г. Эйнштейн упомянул о предустановленной гармонии и Лейбнице, но несколько в ином контексте, имея в виду гармонию между теоретическим миром, который, конечно, представляется на языке математики, и миром наблюдений: «Никто из тех, кто действительно углублялся в предмет, не станет отрицать, что теоретическая система практически однозначно определяется миром наблюдений, хотя никакой логический путь не ведет от наблюдений к основным принципам теории. В этом суть того, что Лейбниц удачно назвал “предустановленной гармонией”...»[2].

Несколько позже Эйнштейн, более десяти лет безуспешно искавший подходящую геометрию для единой теории гравитационного и электромагнитного полей, совершенно в духе предустановленной гармонии между математикой и физикой писал: «Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические конструкции физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность»[3].

---

[1] *Эйнштейн А.* Автобиографические наброски // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4. М., 1967. С. 355.

[2] *Эйнштейн А.* Мотивы научного исследования // Там же. С. 40–41.

[3] *Эйнштейн А.* О методах теоретической физики // Там же. С. 184.

5. Д. Гильберт и Г. Вейль о предустановленной гармонии в квантовой механике

Предустановленная гармония между математикой и физикой с новой силой проявилась и при создании и развитии квантовой механики. Контуры математической структуры физики микромира были намечены уже в первых статьях В. Гейзенберга, М. Борна, П. Иордана, Э. Шредингера, П. Дирака и др. в 1925–1926 гг. Физическое понимание пришло вслед за этим, в 1926–1927 гг., вместе с вероятностной трактовкой волновой функции, а также принципами неопределенности и дополнительности. Точки над «и» в отношении адекватной математической структуры квантовой механики были поставлены примерно в эти же годы при активном участии самого Гильберта и других геттингенцев или тесно связанных с Геттингеном теоретиков Дж. фон Неймана, Г. Вейля, Ю. Вигнера и др. Вообще Геттинген в 1920-е гг. был одним из главных центров в области квантовой механики, где подолгу работали П. Дирак, Э. Ферми, а также советские квантовые теоретики Я.И. Френкель, В.А. Фок и др. Продолжим слова Гильберта, приведенные в эпиграфе и сказанные им в торжественной речи на съезде общества германских естествоиспытателей и врачей в Кенигсберге в сентябре 1930 г.: «В новейший период все чаще встречаются случаи, когда важнейшие математические теории, стоящие в самом центре интересов математической науки, оказываются вместе с тем нужными в физике. Теорию уравнений с бесконечным числом переменных я развивал, исходя из чисто математической заинтересованности, и даже применял при этом терминологию спектрального анализа, не имея ни малейшего представления о том, что однажды в дальнейшем она будет реализовываться в реальных физических спектрах»[1]. Далее следует очень туманный фрагмент, в котором намечена попытка объяснения этой предустановленной гармонии: «Эту согласованность природы и мышления, эксперимента и теории будет можно понять лишь в том случае, если мы с обеих сторон — и со стороны природы, и со стороны нашего разума — примем во внимание этот формальный элемент и некий тесно связанный с ним механизм. Процесс математического решения задачи дает, как нам кажется, те точки покоя и стоянки, в которых в равной мере пребывают как тела в реальном мире, так и идеи в мире духовном, становясь тем самым доступными контролю и сравнению»[2].

Ближайший ученик Гильберта, также внесший немалый вклад в теоретическую физику, подводя итоги развитию математики в первой

[1] *Гильберт Д.* Познание природы и логика. С. 460.
[2] Там же.

половине XX в., затронул и проявление предустановленной гармонии в квантовой механике. Рассказывая о разработке учителем спектральной теории операторов, он заметил: «И вот произошло одно из тех событий, не предсказуемых даже самым смелым воображением, которое могло бы вызвать искушение поверить в предустановленную гармонию между физической природой и математическим образом мышления: через двадцать лет после исследований Гильберта квантовая механика обнаружила, что наблюдаемые физические системы могут быть представлены линейными симметричными операторами в гильбертовом пространстве и что собственные значения и собственные векторы того оператора, который представляет собой энергию, являются энергетическими уровнями и соответствующими квантовыми состояниями системы»[1].

Конечно, об этом феномене в 1930–1960-е гг. писали не только геттингенцы, но и многие выдающиеся теоретические физики и математики. Можно было бы привести ряд ярких высказываний М. Борна, А. Зоммерфельда, В. Гейзенберга, П. Дирака, Н. Бурбаки и др., которые, впрочем, использовали не понятие «предустановленная гармония», а другие близкие выражения возвышенного характера: «природа» или «Бог» — «лучший математик, чем мы» (Зоммерфельд), обсуждаемый феномен согласуется с «религией пифагорейцев» (Гейзенберг), «Бог является математиком очень высокого ранга» (Дирак), «предопределение» (Бурбаки) и т.д.

6. Взгляд в прошлое: предустановленная гармония у Лейбница и Геттинген на рубеже XIX и XX вв.

Само понятие предустановленной гармонии было развито Г.В. Лейбницем в конце XVII в. в его учении о субстанциальных элементах мира — монадах для объяснения их согласованности друг с другом и с миром в целом, согласованности, которая осуществляется Богом[2]. В ряде работ и письмах Лейбница она трактуется также как гармония тела и души[3], явления и сущности, идеального и материального и, наконец, математического и физического. В одном из ранних сочинений он говорит о «математическом ходе природы»[4], предвосхищая широко известную выразительную формулу: «Cum

---

[1] *Вейль Г.* Полвека математики. М., 1969. С. 29.

[2] *Соколов В.В.* Философский синтез Готфрида Лейбница // Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М., 1982. С. 3–77.

[3] *Лейбниц Г.В.* Сочинения: В 4 т. Т. 1. М., 1982. С. 427, 492.

[4] Там же. С. 173.

Deus calculat... fit Mundus» («Как Бог вычисляет, так мир и делает»)[1], являющуюся по существу выражением предустановленной гармонии между физикой и математикой.

Один из наиболее глубоких исследователей истории релятивизма и его восприятия в Геттингене Л.Р. Пайнсон обратил внимание на то, что в конце XIX — начале XX в. интеллектуальную атмосферу в Германии во многом определял интерес к Лейбницу[2]. Именно тогда было закончено издание двух семитомных собраний его математических трудов (в 1875 г.) и философских сочинений (в 1890 г.); вышло обстоятельное исследование Э. Кассирера о научных основаниях учения Лейбница (1902). Геттингенские математики и физики проявляли немалый интерес к философии, притом не только к классикам, но и к современным философам Э. Кассиреру, Э. Гуссерлю и др.

Плодотворное взаимодействие между механикой и физикой, с одной стороны, и математикой — с другой уже проявлялось в определенной мере в трудах таких классиков Геттингена, как Гаусс и Риман, и таких корифеев классической физики второй половины XIX в., как Максвелл, Г. Гельмгольц, Л. Больцман и др. Не случайно упоминание о предустановленной гармонии между мышлением и опытом мы находим уже в докладе «Математические проблемы» Гильберта, читанном в Париже в 1900 г., до новых, триумфальных проявлений этой гармонии в релятивистской и квантовой теориях.

Конечно, эти теории особенно выпукло и убедительно продемонстрировали предустановленную гармонию между математикой и физикой, и геттингенские математики и теоретики о ней говорили многократно и красочно. Вскоре о ней с восторгом и волнением стали говорить и все остальные выдающиеся теоретики, вплоть до Ю. Вигнера, использовавшего новую формулировку, почти вытеснившую лейбницевскую, а именно выражение «непостижимая эффективность математики в естественных науках».

Сказанное в этом кратком разделе открывает, по крайне мере, два новых аспекта для исследования. Первый относится к изучению связи между предустановленной гармонией Лейбница в ее первоначальном («монадологическом») смысле и гармонией математики и физики (в духе «математического хода природы» или «божественной математичности мира»). Второй аспект связан с возрождением популярности Лейбница и его концепции предустановленной гармонии в

---

[1] *Leibniz G.W.* Die philosophischen Schriften / Ed. C.I. Gerhardt. Bd. 7. Berlin, 1890 (Reprint: Hildesheim. 1961. Vol. 7). S. 191.

[2] *Pyenson L.R.* Preestablished harmony and relativity in the late Wilhelmine Germany // Proceedings of the XVIth International Congress for the History of Science. C. Meetings on the Specialized Topics. D. Commemorations. Bucharest, 1981. P. 139–144.

Германии, и особенно в Геттингене, в конце XIX — начале XX в. Начало изучению этой проблемы было положено Л.Р. Пайнсоном[1].

Небольшое отступление об Э. Кассирере. Блестящий знаток Лейбница, неокантианец Э. Кассирер прекрасно понимал современную физику и математику. В 1920 г. вышла его книга, посвященная философскому анализу теории относительности, которую одобрил А. Эйнштейн[2]. Цитируя Эйнштейна и Лейбница о единстве абстрактного и конкретного в понимании пространства, он продолжает: «Как мы видим, как раз в требовании единства абстрактного и конкретного, идеального и эмпирического сходятся и физик, и философ, но только один идет от опыта к идее, а другой от идеи к опыту. Теория относительности так же твердо держится за предустановленную гармонию между чистой математикой и физикой. Минковский в известных заключительных словах своего доклада «Пространство и время» снова вполне сознательно утвердил высокое достоинство этого термина. Но для физика эта гармония — неоспоримая предпосылка, из которой он спешит вывести все особые следствия и применения, тогда как гносеолог делает ее "возможность" как раз основной проблемой»[3]. И далее Кассирер набрасывает схему ответа на вопрос о смысле и корнях этой гармонии, связывая «каждое физическое полагание» (эксперимент, измерение) с «определенными логико-математическими постоянными», к коим он относит понятия пространства, функции и т.д.

В последнем его труде «Опыт о человеке. Введение в философию человеческой культуры» (1945)[4] есть заслуживающий внимания фрагмент, касающийся гармонии между чистой математикой и физикой, хотя собственно сам этот термин отсутствует: «Математическая мысль часто идет, кажется, впереди физического исследования. Наиважнейшие математические теории возникают вовсе не из непосредственных практических или технических нужд. Это общие схемы мысли до какого бы то ни было конкретного применения. При создании своей общей теории относительности Эйнштейн обратился к геометрии Римана, которая была создана задолго до этого и которую сам Риман считал лишь простой логической возможностью, хотя и был уверен в том, что такие возможности нужны нам для того, чтобы

---

[1] См. работу, указанную в предыдущем примечании, а также: *Pyenson L.R.* The young Einstein: the advent of relativity. Bristol & Boston, 1985.

[2] *Кассирер Э.* Теория относительности Эйнштейна. Изд. 2-е. М., 2009.

[3] Там же. С. 91–92.

[4] *Кассирер Э.* Опыт о человеке. Введение в философию человеческой культуры // Кассирер Э. Избранное. Опыт о человеке. М.: Гардарика, 1998. С. 440–722.

подготовиться к описанию действительных фактов, как и в том, что нужна полная свобода для построения различных форм математической символики, чтобы обеспечить физическое познание всеми необходимыми инструментами»[1]. Кассирер называет далее предустановленную гармонию «числовым детерминизмом» и замечает: «Правда, ученый не обязан давать какие бы то ни было доказательства этого главного допущения: единственное доказательство — это его труды. Он принимает принцип числового детерминизма как некую руководящую максиму, регулятивную идею, придающую его сочинению логическую связность и системное единство»[2].

7. «Предустановленная гармония между математикой и физикой» в XXI в.

Существует обширный материал, касающийся этой гармонии, или непостижимой эффективности математики в физике, относящийся к теоретической физике второй половины XX в., в частности и в нашей стране[3]. Упомянув об этом, мы сразу перенесемся в XXI век и рассмотрим один коллективный труд, свидетельствующий о том, что и в настоящее время обсуждаемый нами феномен сохраняется, проблема его истолкования тоже, хотя при этом появляются новые интересные грани и возможности, связанные с новейшими достижениями физики, особенно в области космологии и теории струн. Речь идет о сборнике докладов, сделанных на симпозиуме, посвященном 90-летию выдающегося американского теоретика XX в. Дж.А. Уилера, в марте 2002 г. в Принстоне. В 2004 г. эта книга была опубликована, а в 2013 г. с некоторыми дополнениями она вышла на русском языке под названием «Наука и предельная реальность: квантовая теория, космология, сложность»[4]. В числе авторов — выдающиеся физики, астрофизики и космологи, такие как Ф. Дайсон, Д. Дойч, В. Зурек, Х. Малдасена, Б. Девитт, С. Арош, Дж. Барроу, П. Дэвис, А. Линде, М. Тегмарк, Ли Смолин, Л. Рэндалл, Дж. Эллис и др.

Начнем с доклада М. Тегмарка. В разделе «Может ли физический мир быть математической структурой?» он пишет: «Теперь попробу-

---

[1] Там же. С. 698.

[2] Там же. С. 699.

[3] См., например, статью автора в готовящейся к изданию книге: *Визгин В.П.* Отечественные физики и математики: междисциплинарное взаимодействие // К исследованию феномена советской физики 1950–1960-х и других годов. Социокультурный и междисциплинарный аспекты // Сост. и ред. В.П. Визигин, А.В. Кессених, К.А. Томилин. СПб., 2014. С. 303–366.

[4] Наука и предельная реальность: квантовая теория, космология и сложность / Ред.-сост. Дж. Барроу, П. Дэвис, Ч. Харпер мл. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2013.

ем примириться с идеей о том, что физический мир... *есть* математическая структура. Хотя обычно такое представление многие физики-теоретики считают само собой разумеющимся, оно весьма глубоко и имеет далеко идущие последствия. Из него следует, что математические уравнения описывают не просто некоторые ограниченные аспекты физического мира, а все его аспекты. Это означает, что существуют некоторые математические структуры, которые математики называют *изоморфными* (т.е. эквивалентными) нашему физическому миру, так что каждому физическому объекту соответствует единственный объект математической структуры и наоборот»[1].

Далее рассматривается псевдориманова геометрия, которая является математической структурой мира гравитации, отмечается ее неадекватность квантовому микромиру. Затем подчеркивается, что адекватной ему является математическая структура, известная под названием алгебры операторозначных полей. «Однако в этой структуре, — продолжает Тегмарк, — не удается описать испарение черных дыр, самые ранние этапы Большого взрыва и другие явления квантовой гравитации, так что истинная математическая структура, изоморфная нашей Вселенной (если она вообще существует), пока не найдена»[2]. Получается, как отмечает далее Тегмарк, некая «онтологическая асимметрия»: некоторые математические структуры обладают физической реальностью, а другие не обладают ею. Чтобы избавиться от возникшего «философского противоречия», он выдвигает принцип «математической демократии», согласно которому «математическое и физическое существование эквивалентны, так что все математические структуры существуют также и физически». Это ведет к некой форме радикального платонизма, означающего, что «все свойства параллельных вселенных... в принципе могут быть выведены бесконечно талантливым математиком»[3].

Дж.Ф.Р. Эллис, выписав несколько хрестоматийных уравнений фундаментальной физики (уравнения Максвелла, уравнения гравитационного поля Эйнштейна-Гильберта и др.), замечает: «Эти формулы подчеркивают все еще загадочную поразительную мощь математики как средства описания поведения материи»[4]. Далее он перечисляет основные математические структуры современной физики и задается вопросом: «Какова онтология, природа существования всего этого квантового аппарата и (эффективных) описаний более высокого уровня?». Обсуждаются две альтернативы:

---

[1] Там же. С. 421.
[2] Там же. С. 423.
[3] Там же. С. 424.
[4] Там же. С. 551.

«(А). Это есть лишь наши собственные математические или физические построения, которые по какой-то причине достаточно точно описывают физическую природу физических величин.

(В). Они представляют более фундаментальную реальность платоновых величин, могущих управлять поведением физических величин (и могут точно представляться нашим описанием этих величин).

При первой посылке "непостижимая мощь математики" при описании природы оказывается серьезной проблемой... При второй посылке загадок больше нет — мир действительно основан на математическом описании. Но тогда возникает вопрос; как это получилось? Как все эти математические законы "впрессовываются" в физическую материю?»[1].

Этой проблеме уделил внимание в своем докладе и А. Линде: «Почему математика столь эффективно помогает описывать наш мир и предсказывать его развитие». Он приводит примеры Вселенных, «где математика была бы неэффективной». Это миры, где квантовые флуктуации кривизны пространства-времени имеют тот же порядок, что и сама кривизна, где линейки хаотично изгибаются, а часы разрушаются быстрее, чем можно измерить время, где ничего нельзя зафиксировать и т.д.

В результате автор приходит к выводу, что «в контексте множественной Вселенной можно рассматривать все возможные законы физики и математики. Среди всех возможных вселенных мы можем жить лишь в тех, где математика эффективна»[2]. Здесь проблема «непостижимой эффективности математики в физике», или, иначе говоря, проблема «предустановленной гармонии между чистой математикой и физикой», связывается с современной инфляционной космологией и антропным принципом.

Новые грани этой проблемы высвечиваются и в связи с современными исследованиями в области теории струн, пожалуй, наиболее перспективного направления в разработке квантовой теории гравитации. Приведем несколько фрагментов из книги по струнам, написанной одним из лидеров этого направления Ш. Яу вместе с физиком С. Надисом, вышедшей в 2011 г.[3] Авторы полагают, что «непостижимая эффективность математики» по-прежнему остается загадкой: «Действительно, мы снова и снова открываем для себя, что идеи, которые опираются на математику и соответствуют критерию простоты и красоты, обычно являются теми идеями, которые мы, в

---

[1] Там же. С. 553.

[2] Там же. С. 393–394.

[3] *Яу Ш., Надис С.* Теория струн и скрытые измерения Вселенной. СПб.: Питер, 2012.

конце концов, наблюдаем реализованными в природе. Совершенно непостижимо, почему это происходит... Остается загадкой, как чисто математические конструкции, не имеющие видимой связи с миром природы, тем не менее описывали этот мир с такой точностью»[1]. И далее: «По утверждению математика Майкла Атья, струнным теоретикам должно быть приятно, “что то, с чем они ‘играют’, если даже это невозможно измерить экспериментально, может оказаться очень богатой... математической структурой, которая не только согласуется с теорией, но фактически открывает новые двери, дает новые результаты и т.д. Очевидно, они кое в чем разбираются... Остается выяснить, является ли это ‘кое-что’ тем, что Бог создал для Вселенной. Но если это Бог создал не для Вселенной, то, вероятно, для чего-то еще”»[2]. «Предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» в некотором смысле действует и в обратную сторону: от физики к математике. «Теория струн, — по свидетельству выдающихся струнных теоретиков Яу, Э. Виттена и Атьи, — стала таким благом для математики, таким огромным источником новых идей, что даже если она останется несостоятельной как теория природы, она уже сделала для математики больше, чем любой другой вид человеческой деятельности, который я могу вспомнить... Теория струн трансформировала, обновила, революционизировала крупные разделы математики... в тех областях, которые кажутся далекими от физики...»[3]. Развитие теоретической физики в XX — начале XXI в., как полагает Яу, показывает, вопреки распространенному мнению, что математика в физике — это «не просто язык, а бесспорный путь к истине, краеугольный камень, на котором покоится вся система естественных наук»[4].

Важный аспект обсуждаемой взаимосвязи на примере теории струн отметил Л. Сасскинд: «У нас есть впечатляющее подтверждение того, что теория струн является математически непротиворечивой теорией *некоего* мира»[5]. Уверенность в наличии математической (и логической) непротиворечивости конструируемой теории, хотя и не гарантирует ее экспериментально-физической приемлемости, вместе с тем является залогом допустимости выбранного направления. А в случае теории струн речь идет о создании cGh-теории, т.е. о решении главной фундаментальной проблемы современной физики.

---

[1] Там же. С. 341.

[2] Там же. С. 343–344.

[3] Там же. С. 352–353.

[4] Там же. С. 7.

[5] *Сасскинд Л.* Битва при черной дыре. Мое сражение со Стивеном Хокингом за мир, безопасный для квантовой механики. СПб., 2013. С. 306.

Заключительные замечания

Квантово-релятивистская революция в физике в первой трети XX в. и последующее развитие фундаментальной физики продемонстрировали «исключительную силу математики», которая оказалась «не просто языком, а бесспорным путем к истине, краеугольным камнем, на котором покоится вся система естественных наук»[1]. Ю. Вигнер назвал этот феномен «непостижимой эффективностью математики в естественных науках», добавив, что он имеет статус «эмпирического закона эпистемологии». Но за полвека до Вигнера на этот феномен обратили внимание выдающиеся геттингенские математики Минковский, Клейн, Гильберт и др., внесшие немалый вклад в эту революцию и назвавшие эту взаимосвязь «предустановленной гармонией между математикой и физикой».

Выражение было заимствовано из философии Лейбница, возрождение интереса к которой наблюдалось в Германии с конца XIX в., еще до появления релятивистских и квантовых теорий. Достойно внимания, что Гильберт употребил его в 1900 г. в своем знаменитом докладе «Математические проблемы».

В связи со специальной теорией относительности его впервые использовал Г. Минковский (150-летие со дня рождения которого отмечается в 2014 г.), а затем патриарх Геттингена Ф. Клейн, воспринявший теоретико-инвариантный, геометрический подход Минковского, увидел в нем реализацию своей «Эрлангенской программы» в геометрии.

Следующий шаг — это впечатляющее проявление предустановленной гармонии в общей теории относительности, которой предшествовало отождествление гравитации и псевдоримановой геометрии, достигнутое в 1913 г. Эйнштейном и Гроссманом (100-летие этого события пришлось на 2013 г.). Исторический анализ этого открытия свидетельствует о сложности пути к достижению обсуждаемой гармонии, когда физические соображения и мысленные эксперименты чередуются с математическими исканиями и методологическими идеями. После создания ОТО Эйнштейн высоко оценил математику и также использовал понятие предустановленной гармонии.

Геттингенцы, прежде всего Гильберт, Вейль и др., приняли участие и в реализации предустановленной гармонии между физикой и математикой и в квантовой механике. Там она проявилась с новой силой, и спектральная теория операторов Гильберта неожиданно объяснила спектральные закономерности атомной физики.

Эта гармония, или «непостижимая эффективность математики», продолжала способствовать развитию фундаментальной физики и

[1] *Яу Ш., Надис С.* Теория струн... С. 7.

во второй половине XX в. — начале XXI в. Чтобы не загромождать статью конкретным материалом, который имеется в изобилии, мы ограничились только несколькими фрагментами из книги «Наука и предельная реальность», в которой предустановленная гармония между математикой и физикой рассматривается на примерах последних достижений в космологии, квантовой гравитации и теории струн. При этом появляются новые аспекты этой гармонии и открываются неожиданные возможности и интерпретации.

Таким образом, предустановленная гармония между математикой и физикой, сохраняя свою загадочность, продолжает оставаться мощным фактором познания мира, но не единственным. А. фон Гумбольдт говорил о том, что существует еще один язык, на котором написана книга Природы. Это — поэзия, и потому, вспоминая выражения Кеплера, Галилея, Лейбница и Дирака, можно сказать, что Бог — не только математик высокого ранга, но и поэт, который устами Гомера, Данте, Гёте, Пушкина, Блока, Мандельштама открывает нам новые грани мира[1].

Библиографический список

Борн М. Воспоминания о Германе Минковском // Борн М. Размышления и воспоминания физика. М.: Наука, 1977. С. 79–90.

Вейль Г. Полвека математики. М.: Знание, 1969.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Наука, 1971. С. 181–198.

Визгин В.П. Эрлангенская программа и физика. М.: Наука, 1975.

Визгин В.П. Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915 гг.). М.: Наука, 1981.

Визгин В.П. «Эрлангенская программа» Ф. Клейна и физика // Ученые записки. Институт информатизации образования РАО. Вып. 2. М., 1998. С. 46–63.

Визгин В.П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 12. С. 1347–1363.

Визгин В.П. Концептуальные истоки общей теории относительности (к 100-летию принципа эквивалентности А. Эйнштейна и четырехмерного мира Г. Минковского) // Исследования по истории физики и механики. 2007. М.: Наука, 2008. С. 253–281.

Визгин В.П. Отечественные физики и математики: междисциплинарное взаимодействие // К исследованию феномена советской физики 1950–1960-х и других годов. Социокультурный и междисциплинарный аспекты // Сост. и ред. В.П. Визигин, А.В. Кессених, К.А. Томилин. СПб., 2014. С. 303–366.

Гильберт Д. Математические проблемы // Гильберт Д. Избранные труды. М.: Факториал, 1998. Т. 2. С. 401–436.

Гильберт Д. Познание природы и логика // Гильберт Д. Избранные труды. М.: Факториал, 1998. Т. 1. С. 457–465.

[1] *Фишер Э.П.* Растут ли волосы у покойника? Мифы современной науки. М., 2013. С. 128.

Кассирер Э. Теория относительности Эйнштейна. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2009.

Кассирер Э. Опыт о человеке. Введение в философию человеческой культуры // Кассирер Э. Избранное. Опыт о человеке. М.: Гардарика, 1998. С. 440–722.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Клейн Ф. О геометрических основаниях лоренцевой группы // Новые идеи в математике. Сборник № 5. Принцип относительности в математике. СПб.: Изд. «Образование», 1914. С. 144–174.

Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1982.

Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности. Сборник работ классиков релятивизма / Под ред. В.К. Фредерикса и Д.Д. Иваненко. М.; Л.: ОНТИ, 1935. С. 181–203.

Наука и предельная реальность: квантовая теория, космология и сложность / Ред.-сост. Дж. Барроу, П. Дэвис, Ч. Харпер мл. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2013.

Паули В.П. Теория относительности. М.; Л.: ГТТИ, 1947.

Сасскинд Л. Битва при черной дыре. Мое сражение со Стивеном Хокингом за мир, безопасный для квантовой механики. СПб.: Питер, 2013.

Соколов В.В. Философский синтез Готфрида Лейбница // Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1982. С. 3–77.

Фишер Э.П. Растут ли волосы у покойника? Мифы современной науки. М.: Бином, 2013.

Эйнштейн А. Теория относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 175–186.

Эйнштейн А., Гроссман М. Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 227–266.

Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 530–600.

Эйнштейн А. Автобиографические наброски // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967. С. 350–356.

Эйнштейн А. Мотивы научного исследования // Там же. С. 39–41.

Эйнштейн А. О методах теоретической физики // Там же. С. 181–186.

Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. СПб.: Питер, 2012.

Einstein A. The Collected Papers. Vol. 5. The Swiss Years: Correspondence. 1902–1914 / Eds. M. Klein, A. Kox, R. Schulmann. Princeton: Princeton University Press, 1993.

Leibniz G.W. Die philosophischen Schriften / Ed. C.I. Gerhardt. Bd. 7. Berlin, 1890 (Reprint: Hildesheim, 1961. Vol. 7).

Minkowski H. Das Relativitätsprinzip (1907) // Annalen der Physik. 1915. Bd. 47. S. 927–938.

Pyenson L.R. Preestablished harmony and relativity in the late Wilhelmine Germany // Proceedings of the XVIth International Congress for the History of Science. C. Meetings on the Specialized Topics. D. Commemorations. Bucharest, 1981. P. 139–144.

Pyenson L.R. The young Einstein: the advent of relativity. Bristol & Boston: A. Hilger. Ltd., 1985.

А.А. Григорян

РАЗМЫШЛЕНИЯ О ПОСТИЖИМОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

«Для тех, кто ценит исключительную силу математики, она не просто язык, а бесспорный путь к истине, краеугольный камень, на котором покоится вся система естественных наук. Сила этой дисциплины состоит не только в способности объяснять и воспроизводить физические реалии: для математиков сама математика является реальностью... Мы считаем математические структуры даже более фундаментальными, чем природные частицы, ведь они позволяют не только понять устройство частиц, но и такие феномены окружающего мира, как черты человеческого лица или симметрия цветов. Геометров больше всего восхищают мощь и красота абстрактных принципов, лежащих в основе очертаний и форм объектов окружающего мира»[1].

В 1828 г. английский физик и математик Джордж Грин опубликовал «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма». Эта работа оказала огромное влияние на все дальнейшее развитие математической физики, прежде всего в Англии. В ней Д. Грин сознательно использовал показавший свою плодотворность в механике математический аппарат при построении теории электрических явлений. «Учитывая насколько желательно подчинить расчету, в той мере, в какой это возможно, силу столь универсального характера, как электричество, — писал Грин, — и размышляя о преимуществах, которые дает при решении многих задач то, что мы можем сосредоточить свое внимание на одной особой функции (эту функцию Грин назвал потенциалом. — *А.Г.*), от дифференциалов которой зависят силы, действующие на различные тела системы, вместо того, чтобы рассеивать свое внимание, исследуя каждую из этих сил в отдельности, я пришел к попытке, нельзя ли открыть какие-либо общие соотношения, существующие между этой функцией и между создающими ее количествами электричества в

[1] *Надис Стив.* Предисловие / Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. СПб., 2013. С. 7–8.

телах»[1]. Работа Грина стала одной из первых (если не самой первой) в цепи важнейших исследований, приведших к построению систематической математизированной теории электромагнитного поля Джеймса Клерка Максвелла в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными, которые вошли в историю науки под именем уравнений Максвелла. Этому успеху, вдохновлявшему затем целое поколение ученых, в числе которых были Х. Лоренц, А. Эйнштейн и многие другие, способствовали как экспериментальные исследования М. Фарадея, так и работы в области математической физики Дж. Стокса, Дж. Релея, У. Кельвина и других ученых, применявших аппарат линейных дифференциальных уравнений в частных производных к решению различных физических проблем. При построении своей теории Максвеллу удалось перенести так называемые «гидродинамические» представления из механики сплошных сред для объяснения электромагнитных явлений. Средством для такого переноса было как раз использование математической структуры уже сложившихся теорий — дифференциальных уравнений, которые подсказывали путь построения новой теории. Зафиксировав применимость представлений, аналогичных «гидродинамическим» для исследования электромагнетизма, Максвелл перешел к адекватной эмпирической интерпретации математического формализма, используя разработанные до него теоретические схемы Ш. Кулона, М. Фарадея и А. Ампера, содержащие такие понятия, как силовые линии, заряд, бесконечно малые элементы тока и т.п.[2]

Одной из наиболее часто упоминаемых и цитируемых оценок достижения Максвелла являются следующие слова Г. Герца, которому удалось получить первое экспериментальное подтверждение уравнений электромагнитного поля: «Невозможно избавиться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они мудрее нас, мудрее даже тех, кто их открыл, и что мы извлекаем из них больше, чем первоначально было заложено»[3]. Это чрезвычайно эмоциональное обожествление математического аппарата было, очевидно, вызвано главным образом тем, что, будучи сначала одним из ярых противников теории Максвелла, Герц решил ее экспериментально опровергнуть. Заметив, что из этой теории следует существование сантиметровых электромагнитных волн, Герц поставил соответствующие экспери-

---

[1] *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1978.

[2] Детальная реконструкция построения теории Максвелла содержится в работе: *Степин В.С.* Диалектика генезиса и функционирования научной теории // Вопросы философии. 1984. № 3.

[3] *Дайсон Ф.Дж.* Математика в физических науках // Математика в современном мире. М., 1967. С. 112.

менты, предполагая получить убийственный для теории Максвелла результат. Каково же было его изумление, когда поставленные эксперименты принесли блестящее подтверждение концепции Максвелла! Однако даже столь эмоциональные заявления Герца вряд ли могли в то время обусловить постановку проблемы «непостижимой эффективности математики». И дело не только в том, что всем прекрасно было известно, что теория дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), как, впрочем, и весь классический математический анализ нового времени, формировалась в значительной степени под влиянием механических и физических приложений. Под влиянием господствующей эмпиристской философии математики эта наука подавляющим большинством исследователей, как философов, так и, в еще большей мере, ученых, считалась в ту эпоху чуть ли не частью физики. Правда, один из проницательнейших умов, А. Пуанкаре, примерно в то время, когда Герц, подобно неофиту, восторгался сверхъестественными возможностями математики, счел необходимым заметить: «Он (речь шла о математическом анализе. — *А.Г.*) может дать физику лишь удобный язык; не является ли это посредственной услугой, без которой — строго говоря — можно было бы обойтись; и даже не следует ли опасаться, что этот искусственный язык будет завесой, опущенной между реальностью и глазом физика»[1]. Пуанкаре удалось заметить, что если даже очевидно, что определенный математический аппарат разрабатывался в связи с некоторыми физическими проблемами, как вспомогательное средство их решения, тем не менее, становясь частью математического знания и в дальнейшем подчиняясь внутренней логике его развития, он отчуждается от породившей его проблематики. А так как, кроме того, сформировавшийся в результате математический формализм применяется в самых разнообразных областях исследования, то его предполагаемая адекватность тем или иным видам физической реальности представляется не столь очевидной. Впрочем, Пуанкаре с поразительной легкостью рассеивал свои сомнения относительно обманчивой роли математического языка: «...без этого языка большая часть внутренних аналогий вещей осталась бы навсегда неизвестной для нас, и мы никогда не знали бы о той внутренней гармонии, которая... есть единственная подлинная объективная реальность»[2]. Причины такой уверенности, по-видимому, в частности обусловливались тем, что естественная физическая интерпретация большинства понятий математического анализа приводила к тому, что «философски

[1] *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 157.
[2] Там же.

исключительно важный интерпретационный акт как бы выпадал из поля зрения, ему не придавали большого значения»[1].

Два аспекта обусловили возникновение в XX в. проблемы «непостижимой эффективности математики» в той острой постановке, с которой можно познакомиться в широко известной работе Е. Вигнера[2]. Во-первых, постепенно, но неотвратимо, на смену эмпиристской философии математики, разделяемой до некоторого времени большинством философов и ученых, приходило понимание существования четкой границы между математикой и науками о природе, и во-вторых, совершенно неожиданно для многих, в физике чрезвычайно эффективно, и не только на вычислительном, но и на концептуальном уровне, нашли свое действительно эффективное применение математические теории, возникновение и первоначальное развитие которых, никак не было связано с запросами каких бы то ни было внематематических приложений. Здесь достаточно упомянуть хотя бы применение римановой геометрии при создании общей теории относительности и теоретико-группового математического формализма в квантовой механике (именно роль абстрактной теории групп и их представлений в квантовой механике восхищала таких физиков как Е. Вигнер и Ф.Дж. Дайсон). Думается однако, что эта «непостижимость» по крайней мере чрезвычайно сильно преувеличена, что я и постараюсь показать в настоящей статье на основе рассмотрения гносеологических особенностей возникновения нового математического знания.

Под «представлением» мы в настоящей работе будем понимать некоторое смысловое содержание, заключающее в себе способ описания объектов (или действия с объектами) самой различной природы. Так, например, «содержание линейной алгебры состоит в проработке математического языка для выражения одной из самых общих естественно-научных идей — идеи линейности»[3]. Представление о линейности (его можно охарактеризовать как принцип или способ описания процессов), заключающийся в возможности интерполяции процесса (функции, величины) в достаточно малой области его протекания его линейной составляющей, используется для решения самых различных математических проблем. Именно этот принцип лежит в основе многочисленных применений линейной алгебры в других науках. Под «структурированным представлением» мы понимаем выражение его на языке какой-либо научной дисциплины, что является

---

[1] *Тростников В.Н.* Загадка Эйнштейна. М., 1971. С. 17.

[2] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1972.

[3] *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 5.

необходимым этапом на пути решения стоящих в этой науке проблем с помощью использования нужного представления. «Структурированное представление», другими словами, — это система понятий, воплощающая в своей совокупности некоторый способ описания или действия. Так, представление об изменении структурируется в математике в системе таких понятий, как переменная, функция, окрестность точки, предел, производная (первая, вторая и т.д.) и др., в то время как в механике то же представление структурируется в терминах материальной точки, скорости, ускорения и др. Таким образом, элементы структурированного представления (понятия) отражают природу той области науки, в которой оно используется и структурируется. Ясно, что путем некоторой модификации элементов (понятий) структурированного представления и характера связи между ними можно, оставаясь в рамках определенной научной дисциплины, получать новые структурированные представления (новые системы понятий, воплощающие способы описания объектов определенного типа). Таким путем, например, в математике, исходя из обычного представления о непрерывности, можно получить более «тонкие» структурированные представления о «слабой» и «сильной» (равномерной) непрерывности, оставаясь при этом в рамках уже существующей системы понятий дифференциального исчисления. Например, для описания броуновского движения применяется математический аппарат, имеющий дело с функциями, которые всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы. С помощью таких функций описываются траектории броуновских частиц. Эти чувственно непредставимые функции на естественном языке можно охарактеризовать лишь как «чрезвычайно слабо проявляющие свойство непрерывности». Кроме того, создание новых структурированных представлений может быть осуществлено также на пути синтеза двух или нескольких структур или путем «вплавления» элементов (понятий) одного представления в структуру другого (дифференциально-алгебраические структуры в математике и т.п.). При этом достаточно очевидно, что создание новых представлений, описанным путем модификации элементов и связей между ними, существенно затрудняется, если исходные структурированные представления носят достаточно конкретный характер, привязаны к описанию объектов конкретной природы (физических, биологических и т.д.) и, наоборот, облегчается в той мере, в какой нам безразлична природа элементов, связанных исходной структурой. В самой природе математики заложена возможность чрезвычайно далекого отвлечения от природы тех объектов, для описания которых в математику вводится и структурируется некоторое исходное смысловое содержание, поскольку после решения проблемы, которой обязано своим появлением новое структурированное

представление, исследованию подвергается оказавшаяся плодотворной структура сама по себе. Следовательно, деятельности по созданию новых структурированных представлений (в ходе решения проблем) именно в математике и обеспечивается наибольший простор. С другой стороны, перенесение способов описания или действия из сферы математических понятий в виде вновь созданных в математике структурированных представлений в конкретные науки путем наполнения этих структур эмпирически верифицируемым содержанием чрезвычайно затруднено как раз из-за высочайшей абстрактности математических структур, доведенных до предела чистой логически-непротиворечивой возможности.

Таким образом, то, что дает математическим построениям их предвосхищающую мощь, является одновременно источником трудностей по приживлению этих конструкций в процессе построения физических теорий. Заметим, что возможность использования новых математически-структурированных представлений вне математики не является чисто абстрактной возможностью, хотя бы потому, что ряд исходных математических структур воплощает в себе объективно-смысловое содержание способов описания или действия, применимых в самых различных науках (порядок, непрерывность, линейность, дискретность и т.п.). Более того, часто эти представления могут быть плодотворно использованы лишь после их математической структуризации. «В самом деле, — отмечает Н. Мулуд, — нельзя сказать, что представление о порядке существует всецело на уровне практического интуитивного испытания объектов до того, как оно перейдет на второй уровень, уровень выработки категорий и символов... так как сознание порядка остается не полным, не законченным, пока в нем отсутствует его символическая составляющая»[1]. С другой стороны, математически структурированные представления позволяют осуществить перенос плодотворных представлений из одной конкретной области науки в другую — ярким и чрезвычайно успешным образцом такого рода деятельности является упомянутый в начале статьи перенос Максвеллом «гидродинамических» представлений в теорию электромагнетизма «на плечах» теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Создание новых математически-структурированных представлений не сводится, разумеется, к свободному отбрасыванию и модификации аксиом, описывающих исходные структуры, но детерминируется необходимостью решения математических проблем по установлению различных типов связи между математическими понятиями (или способов действия с этими идеальными математиче-

[1] *Мулуд Н.* Современный структурализм. М.: Прогресс, 1973. С. 224–225.

скими объектами), а также интегративной тенденцией в математике, выражающейся в поиске внутриматематической интерпретации новых структур на объектах фундаментальных математических теорий. Наконец, найдя свое первое применение вне математики, вновь созданные математические структуры начинают совершенствоваться в направлении их большей пригодности для приложений. Радиус их эффективного применения, таким образом, непрерывно увеличивается.

Будем исходить из того, что математика развивается по двум взаимосвязанным направлениям:

А) поиски решения опорных проблем (таких, например, как проблема разрешимости алгебраических уравнений в радикалах).

В) построение теорий, описывающих связи между математическими объектами, возникающими в процессе реализации пункта А). Сюда же входит решение многочисленных проблем, которыми обрастает исходная.

Значение опорных (или наиболее значительных на данном этапе) проблем в развитии математического знания чрезвычайно велико. Так, в целом верные утверждения о том, что математика развивается путем обобщений, многоступенчатой абстракции и т.п., становятся бессодержательными, если при этом забывается непосредственная цель указанных действий — решение вполне определенной математической проблемы. «Невозможно отрицать глубокое значение, — отмечал Д. Гильберт, — какое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще, и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследователя. Всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем... Как вообще каждое человеческое начинание связано с той или иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем. Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты»[1].

В ряде случаев богатство новых идей и конструкций, открываемых исследователем в процессе решения проблемы, бывает избыточным с точки зрения осуществления его непосредственных целей. Эта «избыточность», как правило, и свидетельствует о зарождении принципиально новой теории. Случается и так, что поставленная проблема не находит своего решения, однако попытки его получить приводят к открытию нового направления в математике. Так, введение Э.Э. Куммером идеальных чисел в попытках доказать большую теорему Ферма, а затем и построение теории идеалов, значение которой выходит

[1] Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова. М., 1969. С. 14.

за пределы теории чисел в алгебру и теорию функций, является одним из характерных примеров такого рода[1].

Наиболее общим является разделение опорных проблем на два класса. Это, во-первых, математические проблемы, возникшие в связи с потребностями конкретно-научного знания, и во-вторых, внутренние математические проблемы, включая проблемы обоснования математики. Однако история науки свидетельствует о том, что построение эффективно применяющихся математических теорий отнюдь не определяется характером решаемых математиками задач. Более того, роль внутренних проблем в развитии математического знания с каждым крупным его достижением значительно повышается, что в то же время не исключает огромной роли, которую играют в развитии математики исследования, связанные с ее приложениями.

Поскольку в этой статье анализируется прежде всего сам процесс построения математических теорий, играющих в естествознании эвристическую роль, в отношении опорной проблемы достаточно предположить, что она формулируется в терминах специфических для математики абстрактных объектов (понятий), природа и происхождение которых в данном случае безразличны.

Итак, пусть имеется некоторая математическая проблема, сформулированная с помощью конечного числа математических понятий A_1, ..., A_n. Как правило, проблема ставится таким образом, что необходимо ответить на вопрос о наличии какого-либо типа связи между имеющимися понятиями и, если возможно, указать, каким образом реализуется эта связь. (Примером может служить проблема разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. При этом мы имеем понятия алгебраического уравнения, его степени, его решения, радикала и т.д. И нам необходимо решить вопрос о наличии определенной связи этих понятий между собой.) Математические понятия представляют для математика ту единственную реальность, с которой он непосредственно может иметь дело. Другими словами, если естествоиспытатель пытается найти связь между объектами материального мира, доступными ему через, пусть даже весьма изощренные, опосредованные теоретическими схемами, но, тем не менее, экспериментальные исследования, для математика такими объектами служат им же самим или его предшественниками введенные понятия. Поэтому, подобно тому как естествоиспытатель проводит реальный или мысленный эксперимент с объектами материального мира, применяет имеющиеся или создает новые представления о характере связи между ними, математик в поисках решения интересующей его

[1] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1978. С. 93–98.

проблемы по сути дела делает то же самое со своими объектами — математическими понятиями. Каким же образом математик решает вопрос о наличии тех или иных связей между объектами своего исследования? В большинстве случаев для этого не требуется выхода за смысловые рамки понятий $A_1, ..., A_n$, в которых поставлена соответствующая проблема. Ее решение достигается за счет логической экспликации концептуального содержания, имплицитно заключенного в определениях этих понятий. Однако в ряде случаев для решения исследуемой проблемы вводятся новые понятия $B_1, ..., B_n$, воплощающие принципиально новое концептуальное содержание. (В приводимом нами примере о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах — это понятия о группе подстановок, их разрешимости и т.п.) Гносеологическим механизмом, опосредствующим приращение концептуального содержания путем введения новых понятий, является структурирование на основе имеющихся понятий $A_1, ..., A_n$ некоторого представления, воплощающего в своей совокупности некоторый способ описания объектов (или действия с объектами) самой различной природы.

Продолжим наш пример. С точки зрения выдвинутых положений представляется возможным следующая реконструкция познавательного процесса, приведшего Лагранжа и Галуа к формированию основ теоретико-групповой концепции при решении проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

В XVI в. итальянские математики Н. Тарталья и Дж. Кардано получили формулы для решения уравнения третьей степени. Затем ученику Кардано Л. Феррари удалось вывести соответствующие формулы для уравнения четвертой степени. С тех пор и до начала XIX в. усилия многих математиков были направлены на достижение подобного результата и для уравнения пятой степени. Однако поиски комбинации, составленной из коэффициентов уравнения, знаков арифметических действий и радикалов успеха не приносили. Первый наиболее значительный шаг был сделан Лагранжем. Ему удалось понять глубокие причины успеха приемов, выработанных учеными при решении уравнений третьей и четвертой степени. Он анализирует различные выражения, составленные из корней данного уравнения и выделяет те из них, которые при перестановках корней принимали относительно мало различных значений, или вообще оставались неизменными, выявив, таким образом, связь между решением уравнения в радикалах и перестановками корней. Эти соображения были изложены Лагранжем в 70-х гг. XVIII в. в мемуаре «Размышления об алгебраическом решении уравнений». Но уже в 1798 г. итальянский математик П. Руффини, а вслед за ним и независимо от него, в 1826 г. норвежский математик Г. Абель доказали теорему о том, что общее

уравнение пятой степени разрешить в радикалах невозможно. И хотя этот результат закрывал возможность построения в терминах буквенных коэффициентов единой формулы, по которой можно получить решение любого уравнения пятой степени, это не означало, что для каждого отдельного уравнения не существует формулы, использующей лишь арифметические действия и радикалы и связывающей решение уравнения с его численными коэффициентами. Возникла проблема нахождения признаков, позволяющих определять, решается ли данное конкретное уравнение в радикалах или нет. Эту задачу удалось решить юному французскому математику Э. Галуа, который, по-видимому, уже в 18 лет (в 1829–1830 гг.), за два года до трагической гибели на дуэли изложил свои результаты в «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (опубликован в 1897 г. Ш.Э. Пикаром). Опираясь на работы Лагранжа, Галуа вводит новые объекты — перестановки из n элементов и определяет их действие на соотношения между корнями уравнения *n*-й степени. Он выделяет те из перестановок, которые переводят верные соотношения между корнями в верные. Оказалось, что последовательное действие на выражение, составленное с помощью знаков арифметических действий из корней уравнения, двух таких перестановок, эквивалентно действию третьей перестановки, также обладающей нужным свойством. Назвав совокупность таких перестановок группой, Галуа выдвинул идею о том, что определенные свойства этой совокупности, зависящие от коэффициентов уравнения, обусловливают возможность или невозможность представления корней комбинацией, составленной из коэффициентов уравнения, знаков арифметических действий и радикалов. В рамках развиваемой в этой статье точке зрения можно утверждать, что, вводя новые понятия (группа перестановок, действие группы на множестве соотношений между корнями и т.п.) на основе имеющихся и формируя, таким образом, теоретико-групповую концепцию, Галуа структурировал в терминах присущих математике абстрактных объектов следующее (с точностью до изоморфизма) представление. Если мы имеем некоторые объекты, непосредственное исследование свойств которых представляется невозможным или затруднительным, то мы создаем вспомогательные объекты, результаты воздействия которых на исходные могут быть некоторым образом фиксированы. Основная цель введения таких вспомогательных объектов состоит в том, что, исследуя их свойства, мы можем получить нужную нам информацию о непосредственно интересующих нас объектах. Так, Галуа удалось показать, что алгебраическое уравнение n-ой степени с числовыми коэффициентами разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа сводится к коммутативным группам перестановок. Исследуя конкретные группы — группы пере-

становок для решения интересующей его проблемы, Галуа вводит такие фундаментальные для будущей абстрактной теории групп понятия, как нормальный делитель (нормальная подгруппа), смежный класс, разрешимая группа и т.д. Структурированные в абстрактной теории групп представления оказались чрезвычайно плодотворными при исследовании ряда важнейших проблем естествознания (классификация кристаллов, квантовая механика, теория элементарных частиц).

Важность использования различных эвристичных представлений, воплощающих разнообразные способы описания или действия именно в их математически-структурированной абстрактной форме, заключается в следующем. Согласно исследованиям В. Ингве, представляется разумным утверждать, что из-за ограниченности объема непосредственной человеческой памяти, а также вследствие исторического генезиса естественного языка с его экстенсиональным универсализмом, грамматика естественного языка оказалась сформированной таким образом, что не допускает построения слишком глубоких (сущностных) конструкций[1]. Искусственный же язык математики, являющийся в некотором смысле усовершенствованием естественного языка и применяющийся для достижения экстенсионально более скромных целей, как язык научного познания свободен от указанного существенного недостатка естественного языка. Разумеется, использование тех или иных представлений при объяснении, скажем, физических явлений на основе уже имеющихся систем физических понятий также является структурированием этих представлений, в результате чего создается новая система понятий. Но в отличие от математики на этом физики завершают свое исследование, ибо его цель — концептуальное описание определенного фрагмента реальности — достигнута (по крайней мере, на данном этапе развития науки); здесь важно лишь то, что введенные понятия не становятся объектом нового исследования — объект находится в реальном мире. Напротив, новые понятия, введенные при решении некоторой математической проблемы, сразу же становятся объектами математического исследования; при решении новых математических проблем находятся неожиданные связи между ними и другими математическими понятиями, создаются сложные композиционные структуры. Так, широкое применение в теоретической физике теоретико-групповой концепции во многом было обусловлено (в математическом плане), с одной стороны, работами А. Кэли, отделившего понятие группы от ее действия на некотором множестве объектов, и с другой — исследованиями Ф. Клейна, С. Ли и прочих математиков, творивших в рус-

[1] *Ингве В.* Гипотеза глубины // Новое в лингвистике. Вып. 4. М., 1965. С. 132.

ле теоретико-групповой концепции (введение понятий полугруппы, кольца, поля, представления группы и т.п.) и осуществивших синтез дифференциально-геометрических и топологических представлений с теоретико-групповыми (непрерывные группы, действие группы на многообразии и т.п.).

Новые структурированные представления, хотя и генетически связаны с исходными, существенно отличаются от них, прежде всего по характеру связи между элементами. Так, представление о непрерывности, структурированное в понятиях непрерывной функции, предела, окрестности и т.д., достаточно наглядно, в то время как представление о равномерной непрерывности, определяющее разбиение класса непрерывных функций на два подкласса, уже не столь наглядно. Выраженное в абстрактных математических понятиях, оно оказывается полезным в физике, поскольку интенсивность свойства непрерывности у различных материальных процессов неодинакова. «Естественно-научные открытия, — пишет В. Успенский, — обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Математические же открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира, а наиболее революционные из них дают начало новым моделям»[1]. Поэтому вряд ли стоит упрекать в гиперболизации известного физика Ф. Дайсона, утверждавшего, что математика — это «не только инструмент, с помощью которого он (физик. — *А.Г.*) может количественно описать любое явление, но и источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории»[2]. И как похожи эти слова Дайсона на не менее эмоциональную оценку роли математики учеными XXI в., приведенную в эпиграфе настоящей статьи!

В то же время у нас нет особых оснований для утверждения о том, что любые математические структуры рано или поздно найдут свое применение вне математики. Так, Н. Бурбаки указывает на бесполезность даже для самой математики работы с бессодержательными структурами, полностью лишенными приложений, единственное достоинство которых заключается в том, «что изучая их, можно дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют»[3]. Действительно, иногда новое математическое понятие или целые системы понятий вводятся чисто формальным путем в качестве оперативных терминов, необходимых для единообразного решения некото-

---

[1] *Успенский В.* Предисловие // Математика в современном мире. М., 1967. С. 6.

[2] *Дайсон Ф.Дж.* Математика в физических науках // Математика в современном мире. М., 1967. С. 112.

[3] *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963. С. 257.

рой совокупности математических проблем. Таким образом, как известно, появились в математике комплексные числа. Такие вначале бессодержательные оперативные понятия даже внутри математики находят первое время лишь локальное применение. И только после их интерпретации на объектах фундаментальных математических теорий они получают постоянную прописку в математике и начинают активно использоваться в самых различных ее областях (что и произошло с комплексными числами после их остроумной геометрической интерпретации). Отметим, что внутриматематический интерпретационный факт придает определенный математический смысл оперативным терминам, которые начинают выступать как элементы представления, описывающего некоторый тип связи между (или способ действия с) математическими объектами. Так, целенаправленный поиск алгебраической структуры, допускающей геометрическую интерпретацию, подобную интерпретации комплексных чисел, но только в трехмерном пространстве, привел ирландского математика В. Гамильтона к построению теории, значение которой для приложений трудно переоценить. Гамильтон попытался отыскать такую новую систему обобщенных чисел, которая, допуская полезную геометрическую интерпретацию в трехмерном пространстве, содержала бы в качестве подмножества систему комплексных чисел, подобно тому как преобразования трехмерного пространства содержат в качестве своего сужения на плоскость все преобразования двумерного пространства. «Озарение на него нашло, как охотно рассказывают его поклонники, в некий октябрьский день 1843 года, когда, проходя по мосту, он открыл кватернионы»[1]. Гамильтон определил четырехмерное комплексное число — кватернион, чисто числовую часть которого он назвал скалярной, оставшуюся, трехмерную часть — векторной. Как и ожидалось, кватернионы достаточны для представления всевозможных вращений с растяжением в трехмерном пространстве. Поэтому они оказались очень удобным вспомогательным средством для исследования вращения твердого тела. Но прикладное значение кватернионов не ограничивается только этим. Основываясь на правилах сложения и умножения кватернионов, Гамильтон закладывает основы векторного анализа, играющего огромную роль в современной физике. Гамильтон ввел понятия внутреннего (скалярного) и внешнего (векторного) произведения двух векторов. Далее, определив понятие векторного поля, Гамильтон строит так называемые символические операторы из частных производных по координатам поля. Аналогично введению скалярного и векторного произведения, применяя один из операторов к векторному полю $iu(x,y,z) + jv(x,y,z) + kw(x,y,z)$, где x,

[1] *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1978. С. 240.

y, z — координаты точки, в которой находится вектор из поля, i, j, k — векторные единицы кватерниона, и выделяя скалярную и векторную части получившегося кватерниона, можно естественно ввести такие понятия, как дивергенция и вихрь поля. «Выяснение исключительного значения этих понятий в физике, — замечает Ф. Клейн, — завело бы нас слишком далеко»[1].

Творчество Гамильтона убеждает также и в том, что построение математической теории путем чисто формальных обобщений вне решения актуальных математических проблем, поисков внутриматематической интерпретации или более глубокой точки зрения, объясняющей плодотворность уже построенных структур, не только, как правило, бесполезно для приложений, но даже в рамках самой математики не представляет особой ценности. Как указывал Клейн, легкость и изящество, с которыми Гамильтон получал содержательные теоремы, высоко развитый аппарат теории кватернионов, гибкая символика внушали его последователям, как и ему самому, «глубокое уважение, доходившее до благоговения»[2]. У кватернионистов, как стали называть Гамильтона и его сторонников, благодаря их фанатической вере в универсальное значение теории кватернионов, один за другим возникали дальнейшие планы развития этой теории, которые предполагали построение алгебры кватернионов с обстоятельной теорией уравнений, а также создание теории функций для кватернионов, от которой они ожидали наиболее интересных результатов, в корне преобразующих всю математику. Однако, как остроумно замечает Ф. Клейн, построение содержательной алгебры для кватернионов требовало расширения уже известных предположений, «которые при такой общности теряли самое существенное в своем содержании и становились беспредметными»[3]. Трудно удержатся от того, чтобы не привести еще один абзац из прекрасного обзора Ф. Клейна: «В упорном следовании по намеченному пути кватернионисты упустили из виду более глубоко лежащие проблемы, представляющие действительный интерес, вследствие своего предубеждения они не усмотрели, что более широкая точка зрения дает ясный критерий плодотворности их теории и одновременно может указать пути, которые должны привести к успехам»[4]. Подход, соответствующий более глубокой точке зрения, был реализован А. Кэли, создавшим матричное исчисление, охватившее операции над n^2-членными числами, которое, как частный случай, содержит и теорию кватернионов. При

[1] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л., 1937. С. 228.

[2] Там же. С. 229.

[3] Там же.

[4] Там же.

введении операций над матрицами Кэли пользовался интуитивными геометрическими представлениями о линейных преобразованиях n-мерного пространства, стремясь к тому, чтобы эти операции соответствовали действиям над линейными преобразованиями. Можно долго рассказывать о блестящем приложении матричного исчисления в матричной механике Гейзенберга в 20-х гг. XX в., но вряд ли это можно сделать лучше Е. Вигнера[1].

Взгляд на развитие математического знания как на создание и совершенствование структурированных представлений в процессе решения математических проблем необходимо дополнить соображениями, проясняющими проблему источников этой деятельности. Думается, исходные, фундаментальные представления, описывающие связи между объектами различной природы, математическая структуризация которых делает их эффективным орудием на пути построения физических теорий (непрерывность, линейность, порядок и т.п.) имеют своим источником образы, возникающие у исследователя при изучении реальных отношений. Например, комбинаторный анализ, — по определению В.Я. Буняковского, — «это особая отрасль математики, которая занимается 1) исследованием различных образов изменения порядка и мест вещей, подлежащих или не подлежащих определенной зависимости, 2) разысканием законов, по которым эти изменения или перемещения могут быть изменены и вычислены. Наконец, 3) приложением вводимых таким образом следствий к другим областям математики»[2].

Затронем еще один аспект обсуждаемой проблематики. Было бы наивно полагать, что эффективное применение математически структурированных представлений в физике достигается без серьезной работы по приживлению этих чрезвычайно абстрактных представлений к решению конкретно-научных проблем. Скажем, можно смело утверждать, что прежде чем идеи Б. Римана нашли свое применение в общей теории относительности, они прошли достаточно долгий и трудный путь внутриматематического развития, завершившегося созданием основ тензорного исчисления, но не менее справедливо и то, что новые успехи тензорного анализа были обусловлены главным образом изысканиями самих физиков. Эвристический принцип, примененный для описания n-мерных многообразий (задание метрики в бесконечно малом и «развертывание» ее в метрику всего многообразия), несомненно лежит в основе успеха четырехмерной римановой

[1] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1972. С. 192.

[2] *Буняковский В.Я.* Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839. С. 204.

геометрии в общей теории относительности. Однако такой успех в значительной мере был обеспечен не только детальной разработкой концептуального и вычислительного аппарата дифференциальной геометрии, создание которой заняло всю вторую половину XIX в., но и благодаря значительному усовершенствованию этого аппарата в связи с запросами приложений.

Аналогично дело обстоит и с приложениями теории групп и их представлений (здесь и в дальнейшем при изложении этого сюжета термин «представление» употребляется исключительно как математическое понятие — гомоморфизм заданной группы в группу невырожденных линейных преобразований векторного пространства). Возникнув как результат внутриматематических теоретических исследований, эти теории в некоторой их части стали развиваться в тесной связи с потребностями приложений. И дальнейшие их успехи не могут быть рационально объяснены без учета этой связи (создавались специальные группы с целью описания, например, классов элементарных частиц, тогда как в самой математике потребности в создании и исследовании различных «физических» групп не возникало). Более того, поиски нужных приложениям математических конструкций, на основе уже построенных внутри математики, нередко приводили к созданию идей, чрезвычайно интересных и в собственно математическом плане.

Основы теории представлений групп были заложены Ф.Г. Фробениусом на пути обобщения теории характеров коммутативных групп. Далее, в работах таких математиков, как И. Шур, В. Бернсайд, Ф.Э. Молин, было получено несколько математических результатов, связывающих теорию представлений конечных групп с теорией конечномерных алгебр (некое подобие внутриматематической интерпретации), была построена теория проективных представлений, а также накоплено много фактов о представлениях некоторых специальных групп. Вслед за этим последовало создание теории представлений компактных топологических групп (произошел синтез различных структур, результатом которого было построение, хотя и в чрезвычайно абстрактной форме, принципиально новых способов описания, а также конечномерных представлений полупростых групп Ли (работы А. Хаара, Д. фон Неймана, Г. Вейля, Ф. Петера, Э. Картана). Как подчеркивает А.А. Кириллов, на исторический обзор которого мы здесь опираемся, полученные упомянутыми учеными результаты «не только поражали своей красотой, но и нашли широкие применения в разных областях математики и физики (теория симметрических пространств, теория моментов в квантовой механике). Теория представлений становится прикладной наукой и ее по-

пулярность быстро возрастает»[1]. Дальнейшее развитие теории представлений прочно связывается с потребностями квантовой механики и теории элементарных частиц (разумеется, исследование физически пока не осмысленных конструкций тоже не прекращалось). В частности, в связи с некоторыми физическими проблемами появилась необходимость в исследовании некомпактных групп и их бесконечномерных представлений. А уже в 1939 г. на основе построенной теории бесконечномерных представлений Е. Вигнер предпринял первую попытку создания классификационной теории элементарных частиц. Бесконечномерные представления наряду с конечномерными становятся популярным объектом математического исследования, и уже в 1947 г. появляются классификационные схемы для бесконечномерных представлений (работы И.М. Гельфанда, М.А. Наймарка, В. Баргманна)[2].

Таким образом, если основы эффективно применяющихся математических теорий могут быть заложены в процессе решения собственно математических проблем (выявление структуры какого-либо способа описания или действия в процессе его применения к исследуемым проблемам, построение новых структур, уточнение содержания новых концепций с помощью внутриматематической интерпретации), то совершенствование полученного математического аппарата в соответствии с запросами приложений — необходимый этап развития науки, без учета которого невозможно рационально объяснить столь широкую сферу применения теорий, возникших согласно внутренней логике развития математического знания. Лишь имея в виду это обстоятельство, возможно «опрокидывание» построенной в данной статье гносеологической реконструкции процесса создания эффективно применяющихся математических теорий на реальную историю науки с целью построения рациональной модели ее развития.

Завершая эти размышления, вкратце затрону проблему применения математики вне физики. Методологические проблемы, связанные с применением математических средств при построении современных физических теорий, свидетельствуют о том, что о математизации физики нельзя говорить как о совершенно естественном процессе, не знающем трудностей[3]. То, что эти проблемы в физике, в отличие от многих нефизических приложений, разрешаются значи-

---

[1] *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М., 1978. С. 324.

[2] Там же. С. 325.

[3] См. об этом, например: *Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г.* Математическое моделирование в экологии. Историко-методологический анализ. М., 1999 (раздел 8.2. Математическая мистика в теоретической физике). С. 180–190.

тельно успешнее, указывает лишь на необходимость тщательного методологического и гносеологического анализа опыта применения математики в физике. Этот анализ, в частности, показывает, что точка зрения, указывающая на специфичность математического аппарата, обусловленная особенностями предмета каждой из конкретных наук, не отменяет необходимости попыток использования уже построенных математических концепций. «Вряд ли против необходимости разработки специального математического аппарата для психологии можно возражать. Однако, отмечают Б.Ф. Ломов, В.И. Николаев и В.Ф. Рубахин, к сожалению, пути разработки такого аппарата еще не ясны. И вряд ли их поиски могут вестись вне и помимо использования существующего математического аппарата»[1]. Несомненно, совершенствование математического аппарата в соответствии с потребностями конкретной науки, повышение его эффективности, увеличение его использования могут быть достигнуты лишь в процессе его приживления к понятийному аппарату конкретной науки. В то же время сама возможность применимости математических представлений в теоретическом естествознании обусловливается механизмом возникновения нового знания, реализующегося в процессе решения математических проблем.

При этом необходимо учитывать следующее немаловажное обстоятельство. Неадекватность концептуального применения используемых в физике математических средств для нужд нефизического знания может проистекать из того, что они не отделяются от сопутствующих им в физике представлений. Другими словами, математический аппарат тянет за собой образы, неадекватные конкретной области нефизической реальности, чем во многом обесценивается его применение, поскольку математизация подменяется далеко не всегда уместной физикализацией. Поэтому для успешной математизации нефизического знания представляется необходимым, с одной стороны, отделение содержания математических концепций от интерпретирующих их физических представлений, а с другой — поиски интерпретации математических представлений в рамках понятийных схем, непосредственно отвечающих свойствам исследуемой реальности. Одной из интересных попыток создания общей концептуальной схемы, направленной на создание резервуара математических представлений для описания объектов, изучаемых в рамках различных конкретных наук, является теория образов У. Гренандера. И хотя само понятие образа вводится достаточно формально (как класс эквивалентности на множестве объектов или схем относительно определенной группы

[1] *Ломов Б.Ф., Николаев В.И., Рубахин В.Ф.* Некоторые вопросы применения математики в психологии // Психология и математика. М., 1976. С. 23.

или полугруппы преобразований), основные побудительные мотивы исследования, как подчеркивает Гренандер, были обусловлены различными проблемами конкретных областей науки: геоморфологии, анатомии, нейрофизиологии, спектрографии и многими другими[1]. В анализируемой работе на основе самых различных математических концепций (классический анализ, алгебра, функциональный анализ, математическая логика, разработанная самим Гренандером теория вероятностей на алгебраических структурах и др.) исследуются способы формирования пространственно-временных образов движения и поведения, роста и распада и т.п. В качестве образующих (из которых формируются образы) берутся — в соответствии с особенностями моделируемых явлений — выпуклые множества[2], операторы в гильбертовом пространстве, меры в топологических пространствах[3], а также многие другие математические объекты. Особый интерес представляет попытка построения математических моделей таксономической (классификационной) деятельности, имеющей место в самых различных областях научного познания[4].

Эффективное применение математических представлений в физическом познании обычно связывается с получением в конечном счете численных методов расчета параметров исследуемых процессов. Другими словами, концептуальное применение математики в физике необходимым образом дополняется вычислительным аспектом. Это упрощает проверку результатов применения математического аппарата на адекватность, хотя, разумеется, адекватность не сводится лишь к согласию численных следствий из построенной теории с имеющимися на данный момент результатами лабораторных экспериментов. Однако сама способность математики порождать чрезвычайно сложные по своей структуре, адекватно не выразимые на естественном языке представления наталкивает на мысль о возможности такого применения содержания математических концепций, которое, не приводя к численным результатам, окажется, тем не менее, плодотворным для концептуального описания объектов нефизических областей знания. Речь идет о так называемом метафорическом применении математики (термин введен В.В. Налимовым). В этом случае математическое содержание не играет роли внутреннего формообразующего фактора естественно-научной теории, но выступает как внешний регулятор построения понятийной системы, описывающей некоторую предметную область. Так, В.В. Налимов пытается подоб-

---

[1] *Гренандер У.* Лекции по теории образов. Т. 1. М., 1979. С. 8.
[2] Там же. Т. 2. М., 1981. С. 19.
[3] Там же. С. 23.
[4] Там же. Т. 3. М., 1983. С. 323–342.

ным образом использовать известную в теории вероятностей формулу Байеса для построения теоретических систем в лингвистике и психологии[1]. И хотя попытки метафорического применения математики (в отличие от обычного концептуально-вычислительного применения, реализуемого в физике) сталкиваются с существенными трудностями, это направление в использовании математических средств представляется весьма интересным. Однако успех на этом пути зависит не только от овладения исследователем конкретной области явлений содержанием математических концепций, но и от умения видеть в математических конструкциях, по выражению Ю.И. Манина, воспитателя образного мышления[2]. Это в свою очередь требует совершенствования преподавания математики в вузах как естественно-научного, так и гуманитарного профилей, поскольку образы (структурированные представления), которые порождает современная математика, далеко ушли от тех, которые дает прямой жизненный опыт, и становятся осязаемыми лишь для тренированного рассудка[3]. Заметим в заключение, что и в современной физике реализуется чисто концептуальное применение математических теорий, которое в определенной мере можно также назвать метафорическим. Так, используя топологический подход, оказалось возможным «с помощью чисто качественных соображений, т.е. не решая никаких уравнений и не производя никаких вычислений... получить значительную информацию о конденсированных веществах»[4] (удается, например, перечислить устойчивые классы точечных дефектов).

Библиографический список

Буняковский В.Я. Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1972.

Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. М., 1980.

---

[1] *Налимов В.В.* О возможности метафорического использования математических представлений в психологии // Психологический журнал. 1981. № 2. Т. 3. С. 39–47.

[2] *Манин Ю.И.* Математика и физика. М., 1979. С. 4.

[3] См.: *Григорян А.А., Бычков С.Н., Шикин Е.В., Шикина Г.Е.* О преподавании математических курсов на факультете государственного управления МГУ имени М.В. Ломоносова // «Государственное управление в XXI веке: традиции и инновации». Материалы 4-й международной конференции на факультете государственного управления МГУ имени М.В. Ломоносова (24–26 мая 2006 г., Москва). М., 2006. С. 272–281; *Григорян А.А., Шикина Г.Е.* Библиотека специалиста: Антикризисное управление. Математическая составляющая. М., 2013; Проблемы математической истории / Отв. ред. Г.Г. Малинецкий и А.В. Коротаев. М., 2008.

[4] *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Физика и топология. М., 1980. С. 60.

Гренандер У. Лекции по теории образов. Т. 1. М., 1979; Т. 2. М., 1981; Т. 3. М., 1983.

Григорян А.А., Бычков С.Н., Шикин Е.В., Шикина Г.Е. О преподавании математических курсов на факультете государственного управления МГУ имени М.В. Ломоносова // «Государственное управление в XXI веке: традиции и инновации». Материалы 4-й международной конференции на факультете государственного управления МГУ имени М.В. Ломоносова (24–26 мая 2006 г., Москва). М., 2006.

Григорян А.А., Шикина Г.Е. Библиотека специалиста: Антикризисное управление. Математическая составляющая. М., 2013.

Дайсон Ф.Дж. Математика в физических науках // Математика в современном мире. М., 1967.

Ингве В. Гипотеза глубины // Новое в лингвистике. Вып. 4. М., 1965.

Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., 1978.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л., 1937.

Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1980.

Ломов Б.Ф., Николаев В.И., Рубахин В.Ф. Некоторые вопросы применения математики в психологии // Психология и математика. М., 1976.

Манин Ю.И. Математика и физика. М., 1979.

Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1978.

Мулуд Н. Современный структурализм. М.: Прогресс, 1973.

Надис Стив. Предисловие // Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. СПб., 2013. С. 7–8.

Налимов В.В. О возможности метафорического использования математических представлений в психологии // Психологический журнал. 1981. № 2. Т. 3.

Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова. М., 1969.

Проблемы математической истории / Отв. ред. Г.Г. Малинецкий и А.В. Коротаев. М., 2008.

Пуанкаре А. О науке. М., 1983.

Степин В.С. Диалектика генезиса и функционирования научной теории // Вопросы философии. 1984. № 3.

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М., 1978.

Тростников В.Н. Загадка Эйнштейна. М., 1971.

Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г. Математическое моделирование в экологии. Историко-методологический анализ. М., 1999 (раздел 8.2. Математическая мистика в теоретической физике).

Успенский В. Предисловие // Математика в современном мире. М., 1967.

С.Н. Жаров

БЫТИЕ И РЕАЛЬНОСТЬ В КОНТЕКСТЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ

Ясно, что математический объект обретает свое «быть» через включенность в систему отношений, которая в идеале должна быть приведена к системе аксиом. Собственно говоря, математический объект суть не что иное, как своего рода свертка, свернутая система отношений, через которые он определяется. Отсюда возникает два принципиальных вопроса.

1) Откуда берется эта дефинитивная (т.е. определяющая) система отношений и какова ее связь с бытием? Фактически это вопрос об онтологических истоках математической предметности и о возможности онтологического подхода к математике как таковой.

Ответ на первый вопрос еще не означает, что мы полностью прояснили онтологический статус математики. Поэтому возникает второй вопрос.

2) Есть ли необходимая связь между онтологическим истоком математики и тем, что мы обычно называем «реальностью», — с реальными объектами, с которыми имеет дело, например, физика?

Попытка ответить на поставленные вопросы требует прояснения понятий *бытия* и *реальности* в широком научном и метафизическом контексте. Начнем с рассмотрения первого вопроса.

Математическая предметность: истоки определенности

Если речь идет о дефинитивной системе отношений, то сразу же всплывают логически возможные варианты ответа. (a) Эта система есть продукт *абстракции* от реальности; (b) Эта система есть продукт *субъективного полагания*, ограниченного лишь требованием логической непротиворечивости; (c) Эта система имеет некий *самостоятельный онтологический исток*, который еще предстоит выяснить.

Вариант (a) объясняет «предустановленную гармонию между чистой математикой и физикой»[1], но не может обосновать аподиктический характер математических теорий и тот факт, что они подчас значительно опережают потребности своего естественно-научного применения.

Вариант (b) может быть принят только в том случае, если мы имеем в виду не эмпирическую, а трансцендентальную субъективность, которая отвечает за полагание всеобщих и необходимых структур. Связь математики и реальности здесь обеспечивается тем, что реальность сама является продуктом трансцендентального полагания. Именно так обстоит дело у Канта.

Вариант (c) кажется наиболее привлекательным, но в своей начальной формулировке он выглядит абстрактным утверждением, ибо не указывает на онтологические истоки математики. Выдумывание таких истоков *ad hoc* завело бы нас в дебри метафизических фантазий. Если математика и имеет свой собственный (и, возможно, не единственный) онтологический исток, то он должен быть обнаружен в живой стихии математического творчества, там, где речь идет о введении важнейших математических объектов. В этой связи обратимся к одному из самых значимых эпизодов в истории математики — открытию действительных чисел. Строго говоря, анализ одного или нескольких эпизодов из истории математики не может служить основанием общих выводов. Однако все дело в том, *как* этот эпизод берется философом и методологом. Философский подход состоит в таком рассмотрении, когда конкретное событие обнаруживает осуществленную в нем общую закономерность. Выбранный нами эпизод — это строгое определение действительных чисел.

Один из способов определения действительных чисел был предложен Дедекиндом. В несколько упрощенном изложении его идея выглядит так. Последовательность рациональных чисел «разрезается» таким образом, чтобы положение «разреза» отвечало действительному числу (действительные числа включают в себя числа рациональные и иррациональные). Такое разбиение называется дедекиндовым сечением. Сечение, у которого в нижнем множестве нет наибольшего, а в верхнем — наименьшего, называется иррациональным числом.

Чтобы не запутывать читателя деталями, обратимся к короткой и в то же время строгой формулировке, в которой логика дедекиндова сечения представлена Г. Вейлем.

---

[1] См. об этом: *Визгин В.П.* Предустановленная гармония между чистой математикой и физикой // Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность. Тезисы Третьей всероссийской научной конференции. 27–28 сентября 2013 г. М., 2013. С. 27–30.

«Назовем... *отрезком* область рациональных чисел, которая вместе с любым рациональным числом h всегда содержит также и все рациональные числа <h. Такой отрезок *открыт,* если не существует наибольшего принадлежащего ему рационального числа. Открытый отрезок рациональных чисел, отличный от пустого и универсального множеств, называется *действительным числом*»[1].

У открытого отрезка нет *наименьшей верхней границы* среди рациональных чисел. В результате ситуация выглядит так. Сначала мы берем *неопределенное* (открытое, не имеющее однозначной верхней границы) множество чисел. Поскольку в исходном пункте рассуждения даны *только* рациональные числа, то эта неопределенность носит принципиальный характер: она говорит о том, что данный отрезок нельзя однозначно сопоставить ни с одним числом. Как же превратить принципиальную неопределенность в нечто определенное? Мы просто *постулируем*, что теперь это неопределенное множество будет рассматриваться как число, пусть и особого рода. Post factum оправданием наших действий будет применимость к новым числам всех правил арифметики. Но что является *истоком* такого определения, какая логика подводит к такого рода рассуждениям?

Вопрос об истоке сразу же проясняется, как только мы вспомним, что числа изначально проецировались на геометрическую прямую. Когда было открыто, что отношения геометрических отрезков не всегда выразимы рациональным числом, стало ясно, что на прямой есть точки особого рода, которые можно отождествить с новым видом чисел. Если до открытия несоизмеримости, пишет И.Г. Башмакова, «... геометрические задачи сводились к арифметике рациональных чисел, то теперь, наоборот, геометрия легла в основу всей математики»[2].

Геометрический отрезок сам по себе выступает как нечто завершенное и данное в созерцании. Но, будучи рассмотренным как континуум точек, он начинает раскрывать свою бесконечность. Точки *принадлежат* континууму, хотя было бы поспешно делать отсюда вывод, что континуум *состоит* из точек как заранее существующих неделимых сущностей. Об этом писал еще Аристотель: «...невозможно, чтобы что-либо непрерывное состояло из неделимых [частей], например линия из точек, если линия непрерывна, а точка неделима»[3].

Точки присутствуют в континууме, и в этом смысле *существуют*. Но чтобы стать предметом строгого рассуждения, каждая точка

---

[1] *Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989. С. 139–140.

[2] *Башмакова И.Г.* Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. М.: Физматлит, 1958. Вып. XI. С. 261.

[3] *Аристотель.* Физика, VI.1 231 a 25 // Аристотель. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1981. Т. 3. С. 179.

должна быть однозначно выделена из континуума, что требует специальной логической процедуры. В случае действительных чисел этой процедурой выступает дедекиндово сечение[1], логика которого реализована в приведенном выше определении Вейля. Однако дело обстоит так, что дедекиндово сечение не столько создает, сколько предметно выделяет то, что уже присутствовало. Иначе говоря, в процессе открытия действительных чисел последние фигурируют двояким образом: 1) предметно, как *результат* строгого определения; 2) *неявно*, как точки, которые принадлежат континууму, но должны быть выделены посредством специальной операции.

Таким образом, существование в математике может быть понято в двух смыслах. Подчеркнем, что речь идет о разделении, не совпадающем с различием существования в классической и конструктивистской трактовках.

Первый смысл связывает существование математического предмета (в нашем случае — действительного числа) с его включенностью в однозначно определенные отношения. *Второй смысл* исходит из интуитивно подразумеваемого присутствия определяемого в исходном умопостигаемом континууме. Предпосылкой является уверенность в том, что определяемое в некотором роде уже существует, и надо только выделить его посредством соответствующих процедур. Об этом фактически говорит сам Вейль, характеризуя рациональные числа как знаки, позволяющие локализовать точки одномерного континуума[2].

По-видимому, здесь мы имеем дело с некоторой общей закономерностью. Предпосылкой строгого определения новой математической формы, как правило, является неявное присутствие этой формы в уже выделенной математической предметности. Примером может служить открытие Э. Галуа теории групп. Галуа впервые «увидел» математическую группу, обнаружив, что ответ на вопрос о разрешимости алгебраических уравнений связан с соответствующими этим уравнениям перестановочными отношениями[3].

Можно ли указать на всеобщую математическую предметность, которая способна выступать источником математической интуиции при введении новых математических форм? Для Галуа таким истоком стали алгебраические соотношения, но последние есть обобщение числовых отношений. Тут сразу же вспоминается часто цитируе-

---

[1] Во избежание недоразумений еще раз отметим, что существуют и другие способы определения действительных чисел, кроме предложенного Дедекиндом.

[2] См.: *Вейль Г.* Математическое мышление. С. 14.

[3] *Галуа Э.* Соч. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 65–84; *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963. С. 69.

мая мысль Л. Кронекера о том, что Бог создал натуральное число, а человек — все остальное. Возможны и несколько иные соображения относительно того, что является поистине фундаментальным. Как раз натуральные (и полученные из них рациональные) числа могут быть приписаны человеческому творчеству, ибо выделение из гераклитова потока жизни себетождественной абстрактной «единицы» является достаточно искусственной процедурой. Однако дальнейшее развитие теории чисел, как мы видели, было связано с проекцией рациональных чисел на умопостигаемый континуум. Можно сказать, что действительные числа — это искры, высеченные из бесконечности континуума погруженными в него рациональными числами. Интуиция непрерывности (континуума), по-видимому, старше, чем интуиция числа, ибо линией и рисунком древний человек овладел раньше, чем числами.

Так может быть, умопостигаемый континуум, таящий внутри себя неопознанные структуры, и есть первичный исток математических форм? Правда, сам по себе континуум есть нечто неопределенное; единственное, что здесь оговорено, — это непрерывность и связанная с ней внутренняя бесконечность, заявляющая о себе при попытке оцифровать континуум. И, кроме того, математик никогда не имеет дело с континуумом вообще. Математику интересен континуум как носитель неких (пусть пока не проясненных) отношений. Но тогда континуум превращается в пространство.

«Пространство вообще» как предмет чистого созерцания и онтологический исток математических структур

Мы видели, что ключевую роль при определении числа играет интуиция континуума. Как таковой, континуум есть нечто «первоначально аморфное»[1]. Он становится фактором математической эвристики, лишь будучи включен в сеть отношений, которые как бы высекают из неопределенности континуума «искры» новых математических форм. Континуум, несущий в себе определенную сетку отношений, представляет собой некое определенное пространство[2]. Континуум, выступающий как носитель скрытых, еще не выявленных отношений, есть *пространство вообще*, пространство как таковое. Именно *пространство как таковое* выступает как всеобщий предмет интеллектуального созерцания и источник новых математи-

[1] *Пуанкаре А.* О науке. 2-е изд. М.: Наука, 1990. С. 233.
[2] Там же.

ческих интуиций. Не случайно Г. Вейль назвал топологию и абстрактную алгебру двумя основополагающими способами понимания в современной математике[1].

Пространство как чистое созерцание — начало этого сюжета восходит к Платону. На категориальном уровне данная тема была развита Кантом. Однако у Канта пространство — это раз и навсегда заданное априори. У неокантианцев (Г. Коген), напротив, пространство выступает как продукт рассудочного синтеза. Оно по-прежнему именуется «созерцанием», но это уже не это данность, а лишь объективация того или иного теоретического метода[2]. Такое решение вполне соответствует духу чистой математики, но окончательно разрывает связь пространства с онтологией, если только не сводить последнюю к свободным интеллектуальным конструкциям.

В данной статье предлагается иной подход. «Пространство как таковое» априорно не в гносеологическом, а в онтологическом смысле, как континуум всех возможных умопостигаемых форм; формы здесь не выделены явно, а слиты в интуитивно данном единстве. Это многообразие всех возможных траекторий, по которым «субъект» (т.е. социокультурно обусловленная мысль математика-человека) производит выделение математических предметов, т.е. создает теории с определенными математическими объектами. Первичные умопостигаемые формы надсубъективны в том смысле, что не зависят от воли и желания субъекта, что, однако, не означает возврата к платонизму. Платонизм предполагает, что математические формы существуют как *готовые предметности*, своего рода «идеальные вещи». Я же имею в виду, что первичные математические формы образуют пространство *возможных* траекторий мысли. Эти возможности суть данность, но данность, не существующая в виде самостоятельных предметностей. Предметное выражение этих возможностей зависит от активности субъекта, и в этом смысле математика есть творение человека.

Таким образом, в отличие от платоновского предметно оформленного абсолюта, мы имеем пространство предметно невыделенных форм, иначе говоря, «пространство вообще». Само по себе «пространство вообще» весьма неопределенно, это своего рода сетка всех возможных линий, по которым идет построение новых интеллектуальных конструкций, причем эти линии становятся отчетливыми только в процессе самого конструирования.

---

[1] См.: *Вейль Г.* Математическое мышление. С. 26.

[2] См.: *Коген Г.* Теория опыта Канта. М.: Академический проект, 2012. С. 578.

Ответ на второй из поставленных в начале статьи вопросов может идти по двум направлениям. Можно сразу искать связь между математикой и физической реальностью. Однако на этом пути слишком много тупиков и ловушек, чтобы вступать на него без предварительного прояснения самой задачи. Мы с легкостью применяем слово «существует» и к числу, и к физической вещи, скрадывая тем самым онтологическое различие между ними. Но возможно ли принципиальное сходство математической и «реальной» предметности по *типу существования*? Иначе говоря, есть ли внутреннее сходство физической и математической онтологии не по *структуре*, а по *типу бытия*?

Стандартный подход заключается в сопоставлении математических предметов с физическими и т.п. объектами. В таком случае математическому миру отказывают в праве на «реальность», поскольку он не соответствует тому, что мы привыкли считать реальным. Исходные соображения здесь понятны: математическая структура не является предметом чувственного восприятия, она не может регистрироваться приборами. Но почему право называться реальностью заслуживает только чувственно (или экспериментально) обнаруживаемая предметность? И разве к физической реальности не принадлежат, скажем, ненаблюдаемые кварки? И разве то, что сегодня выступает как физическая реальность, не появилось на свет как воплощение тех или иных математических структур?

Мы еще не прояснили понятие реальности, а уже попали в некий парадоксальный контекст, который нельзя преодолеть простым уточнением терминов, ибо дело не в терминологии, а в самой сути. Чтобы вывести обсуждение проблемы в рациональное русло, поставим вопрос следующим образом. Существует ли способ различения математических и реальных объектов, не прибегающий к ссылке на эмпирическую достоверность и в то же время согласующийся с привычным разделением сущего на «реальное» и «данное лишь в интеллекте»? На мой взгляд, такой способ существует.

Выше уже говорилось о том, что математический предмет задается некими определяющими, т.е. дефинитивными отношениями. Но то же самое можно сказать и о реальных объектах. Врач может поставить правильный диагноз, поскольку знает, какие признаки указывают на диагносцируемое заболевание и исключают другие варианты. Физики экспериментально обнаружили бозон Хиггса, поскольку имели четкие критерии, позволяющие связать некоторые из наблю-

даемых событий именно с искомой частицей. Объекты, изучаемые современной наукой, нередко вводятся по принципу математической гипотезы, как предметное выражение тех или иных математических отношений внутри теории[1].

Так в чем же тогда различие математического и реального объектов, если последний задается в теории дефинитивными (в том числе математическими) отношениями? В первом приближении это различие состоит в том, что математический объект как таковой *исчерпывается* дефинитивными отношениями. Математические плоскость и прямая есть то, что о ней сказано в их определении, и ничего более. Но для экспериментатора «прямая» есть некое явление (например, лазерный луч как физический эквивалент прямой), которое изначально несет в себе содержание, *непредусмотренное* дефинитивными отношениями. Иначе говоря, впервые задаваемый математический предмет целиком задан исходными дефинитивными отношениями, в то время как реальный объект, даже если он представлен теоретически, лишь отчасти исчерпывается своими определениями. Именно на этот признак указывают Л.В. Канторович и В.Е. Плиско, говоря о том, что спецификой математической структуры является то, что она может быть «описана полностью»[2]. Правда, в указанной работе сравнивается не математика и реальность, а математические структуры и то, что авторы называют «математическими системами».

С точки зрения приведенного критерия открываемый математический предмет логически исчерпаем, ибо сводится к дефинитивным отношениям, в то время как реальный объект неисчерпаем и несет в себе непредсказуемую глубину. Собственно говоря, это соображение неявно присутствует уже в марксовой критике гегелевского идеализма. У Гегеля исторический субъект сведен к осуществлению логической схемы, а бытие выступает как объективация этой схемы. По Марксу, ограниченность гегелевской системы заключается в том, что «философское значение имеет здесь не логика самого дела, а дело самой логики»[3].

Если все обстоит именно таким образом, то возникает известный парадокс: чем более строгим становится математическое мышление,

---

[1] Например, *кварки* были введены как предметно-физическое истолкование неприводимого представления определенной группы симметрии.

[2] См.: *Канторович Л.В., Плиско В.Е.* Системный подход в методологии математики // Системные исследования: Методологические проблемы. Ежегодник 1983. М.: Наука, 1983. С. 31–32.

[3] *Маркс К.* К критике гегелевской философии права // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 1. С. 236.

тем оно тавтологичнее. Если прямолинейно подойти к осмыслению этого парадокса, то получается, что строгое мышление не способно нести в себе предпосылки собственного развития. Посмотрим, насколько этот вывод справедлив по отношению к математике как развивающейся системе.

Математика как развивающаяся система: преодоление тавтологии

Каким должно быть бытие математического мира, чтобы он мог развиваться? Вопрос может показаться непривычным, поэтому поясню смысл сказанного. Как бы ни трактовалось существование математического объекта (платонически, конструктивистски и т.д.), он существует лишь в рамках строгой, логически выверенной системы. Но предоставленная сама себе рациональная система замыкает себя в кругу заданных оснований — говоря словами Канта, теоретический разум, стремится «...обрести покой, ...замкнув круг в некотором самостоятельно существующем целом»[1]. И полное замыкание этого круга означает невозможность выхода за его пределы. Там, где господствует абсолютная логическая строгость в следовании выбранным основаниям, невозможно движение к новым основаниям. Поэтому, как показано в монографии Н.А. Мещеряковой, классический рационализм не знает подлинного развития, а знает только *развертывание* заданной сущности[2], здесь господствует «субстанциалистский редукционизм»[3]. В полной мере это относится к математике с ее идеалом логически замкнутой теории.

В этом контексте естественно возникает следующее соображение. Замкнутость математических теорий компенсируется тем, что математику развивают люди, наделенные свободой выходить за пределы заданных оснований и создавать новые основания (понятия, аксиомы, теории). Конечно, эта свобода реализуется в конкретном культурно-историческом и когнитивном контексте. Но тогда выходит, что траектория развития математики продиктована не столько ее собственной природой, сколько внешними обстоятельствами.

Если бы все обстояло именно так, то получилась бы довольно странная картина. Развивающаяся математика представляла бы собой уходящую в бесконечность череду островов строгости, погруженных в море произвола. Конечно, эти острова соединены между собой

---

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 467.

[2] *Мещерякова Н.А.* Детерминизм в философском рационализме: от Фалеса до Маркса. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1998. С. 6.

[3] Там же. С. 8–9 и далее.

мостами логических соответствий и отображений, однако эти мосты здесь вторичны и строятся лишь после творческого акта, вносящего новизну, которая не вытекает из предшествующих теорий. В такой картине наращивание новизны означает отсутствие внутренней логики развития, а предположение о существовании этой логики ведет к отрицанию математической новизны. Очевидно, что эта воображаемая картина не учитывает каких-то важных закономерностей развития математической мысли. Чтобы их увидеть, нужно перейти от абстрактной постановки вопроса к реальным ситуациям математического творчества. Именно здесь выходят на свет недостающие посылки, без учета которых развитие математики выглядит парадоксальным процессом.

Обращение к математическому творчеству далеко не всегда означает погружение мысли в сложные логические и исторические коллизии. Иногда, чтобы увидеть истину, нужно задать правильный вопрос, который станет своего рода волшебным фонарем, высвечивающим подлинное положение дел. В нашем случае вопрос может быть сформулирован следующим образом:

Совпадают ли те отношения, которые развертываются из математического объекта, с теми отношениями, которые были воплощены, свернуты в нем при его определении? Т.е. имеет ли место логическая редукция порожденных отношений к отношениям порождающим (дефинитивным).

Может показаться, что ответ очевиден: да, имеет место, в силу логичности и доказательности математики. Однако на самом деле все оказывается не так просто. Одно дело — прямая логическая сводимость. Другое — сводимость, опосредованная введением новых посылок, которые логически не выводятся из начального определения, хотя ему и не противоречат. В развитии математики работает конструктивный метод введения математических объектов с их последующим логическим «укоренением» в существующую математическую структуру, что означает и расширение самой этой структуры. Применительно к математике о таком методе еще в 1962 г. писал В.А. Смирнов[1], применительно к естествознанию — В.С. Степин[2].

Как в математику входили «мнимые» числа? Типичная ситуация — мнимые числа возникали как следствие того, что операцию извлечения корня пытались применить к отрицательным числам. Для этого нужно была рассмотреть корень квадратный из -1 не как при-

---

[1] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М.: Наука, 1962. С. 263–284.

[2] *Степин В.С.* К проблеме структуры и генезиса научной теории // Философия, методология, наука. М.: Наука, 1972. С. 158–185.

мер неосуществимой процедуры, а как операцию, задающую особое «мнимое» число *i*. Иначе говоря, новое математическое содержание здесь возникает при расширении предметной сферы обычной процедуры при условии, что результат может быть вписан в логику чисел.

В знаменитой работе Колмогорова[1] вероятность впервые определяется как *мера* на некотором множестве. Затем этот подход применяется уже к бесконечным множествам и вероятность оказывается мерой в некотором (возможно бесконечномерном) математическом пространстве.

И в том, и в другом случае наращивание содержания происходит не дедуктивным путем, но и не путем чисто формального введения «ниоткуда» взявшихся отношений. Существо таких новаций состоит в том, что определения известных отношений (корня квадратного и меры) распространяются на другие математические предметности. Результатом является взаимное обогащение и обновление исходных структур (числа и вероятности, корня и меры) и наполнение их новым содержанием, которое *не противоречит* старому, но и *не выводится* из нее напрямую.

Новое математическое содержание возникает как результат погружения одной математической структуры в другую. В случае с действительными числами одна из структур была представлена скорее на уровне интуиции, чем строгой логики (континуум). Если же рассматривать введение «мнимых» числе и вероятности как меры, то обе начальные структуры имеют вполне строгие определения.

Перед нами — способ размыкания той логической заданности, которая присутствует в исходных структурах. Но для того чтобы проецировать структуры друг в друга, нужно, чтобы они каким-то образом были уже сопряжены, погружены в единое смысловое пространство. Замечу, что этот способ выражения вовсе не противоречит привычному для математиков использованию общего понятия пространства, достаточно вспомнить определение А.Д. Александрова из «Математической энциклопедии»: «Пространство — логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции»[2].

Для математика математические структуры объединены в интуитивном пространстве, которое предполагает возможность и необходимость их проецирования друг в друга. Ключевой вопрос в том, откуда берется это пространство. Является ли оно субъективным

---

[1] *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974.

[2] *Александров А.Д.* Пространство // Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энциклопедия, 1977. Т. 4. Стб. 712.

продуктом, или, напротив, субъективность *способна связывать* лишь потому, что ей дано *сверхсубъективное пространство возможных связей*? В любом случае ключевым здесь будет принцип математического развития, согласно которому новое не противоречит старому, но и не выводится из него. Мы увидели действие этого принципа на примерах из истории математики. Однако его происхождение связано с логической природой математических структур.

Как показал Гедель в знаменитой теореме о неполноте (1931 г.), в каждой достаточно сложной формализованной теории всегда можно построить высказывания, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках исходной теории. Иначе говоря, математическая теория несет в себе свою собственную разомкнутость, связанную не с вмешательством извне, а со своей внутренней логикой. Полная логическая замкнутость по большей части недостижима (по крайней мере, для достаточно сложных систем). Но это не означает, что стремление к логической замкнутости не имеет смысла. Наоборот, в свете геделевского результата такого рода попытки обретают совершенно неожиданное значение. Чем усерднее мы будем стараться замкнуть наши логико-математические системы, тем скорее обнаружим в них то место, в котором они разомкнуты и откуда может начинаться путь, ведущий к принципиально новым системам. В очерченном выше ракурсе теорема Геделя указывает на предпосылки незапрограммированного продолжения, которые таятся в каждой достаточно сложной математической теории. Вначале эти предпосылки обнаруживают себя в виде парадоксов (вспомним знаменитые парадоксы теории множеств), а попытки преодоления парадоксов выводят к новым математическим идеям.

Таким образом, бытие математики как развивающегося целого связано с *внутренней* разомкнутостью, внутренней открытостью составляющих ее систем. Именно эта неопределенность, незаданность и дает возможность развиваться математике как целому. Присутствие бытия как открытости (здесь напрашивается связь с онтологией Хайдеггера) есть условие развития мира математических структур по своему *собственному*, никогда не предсказуемому заранее пути. Математика развивается благодаря предметно невыраженным глубинам, из которых рождаются новые формы. Математические формы хранят в себе связь со своим непредметным истоком, который выступает началом их внутреннего размыкания, трансцендирования определенности[1]. Математическое воображение выводит за пределы

[1] См.: *Жаров С.Н.* Математика и онтологическое понятие трансценденции // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы международной научной конференции. 15–16 июня 2007. М., 2007. С. 248.

заданности, но сам этот выход нельзя считать чисто субъективным актом. Как справедливо замечает А.Г. Вяткина, творческое воображение есть сфера осуществления непредметного бытия, где совершается переход от неопределенности к новой определенности[1].

Оформленные математические предметности таят в себе размыкающее и никогда не формализуемое *непредметное бытие* (неопределенность внутри системы). И именно это бытие является залогом развития математики как целого. При этом та неопределенность, с которой имеет дело мышление математиков, есть не какая-то «неопределенность вообще». Это всегда конкретная неопределенность, заданная логикой конкретной теории и существующая в ее зазорах, — момент *трансцендирования*, присутствующий в логической имманентности системы. Бытие математики как развивающейся системы есть постоянное «пробуждение» и предметное оформление этих конкретных неопределенностей.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению. Математическая структура как таковая сводится к своему определению. Но математический мир в целом оказывается столь же неисчерпаемым, как и постигаемая естествознанием природная реальность. Развивающаяся математика имеет траектории развития, многообразие которых дается сочетанием математической определенности и связанной с нею неопределенности. Эти траектории осуществляются через деятельность субъекта, и в этом плане прав В.Я. Перминов, настаивая на неразрывной связи математики и деятельности[2], однако возможность этих траекторий из одной деятельности не выводится. Если говорить о математике как о системе возможных математических миров (и соответствующих им связей), то мы имеем поистине сверхсубъективный универсум, который не зависит ни от человека, ни от культуры. Этот универсум возможностей таится в непредметной (предметно неосуществленной) глубине, которая сопровождает все известные нам предметные миры. Что касается мира математических предметностей, то его осуществление, помимо чисто математических связей, зависит и от характера деятельности, и от культурных ценностей. В этом плане следует согласиться с В.А. Бажановым, который говорит о тройственной детерминации системы математических объектов — «внутренней», «внешней» и собственно «деятельностной»[3].

---

[1] См.: *Вяткина А.Г.* Воображение как основа творческого процесса // Научные проблемы гуманитарных исследований: научно-теоретический журнал. Пятигорск, 2011. Вып. 6. С. 251–252.

[2] *Перминов В.Я.* Реальность математики // Вопросы философии. 2012. № 2. С. 24–39.

[3] См. статью В.А. Бажанова в настоящем сборнике.

В своем первоистоке математика сверсубхъективна и априорна, однако этот первоисток, в отличие от платоновского мира идей, не имеет наличных предметных форм. Бытийное априори математики — это интуитивное *бытие-пространство,* в которое погружена мысль математика и из которого она (как из горизонта возможностей) выделяет новые математические предметности.

В известном смысле развитие математики напоминает движение альпиниста по горным склонам. Вершины, на которые он восходит, открываются ему благодаря его умению, но их контуры не созданы этим умением. Возможные контуры математических вершин столь же независимы от человеческого умения, как и контуры гор. Разница, однако, в том, что горная гряда выделилась благодаря геологическому процессу, а математические вершины обретают предметность в зависимости от искусства математиков. При этом высота и площадь предметно оформленного математического массива становятся тем больше, чем больше сил приложено для их освоения.

Таким образом, мы видим в математике цепь вершин, *контуры* которых имеют надсубъективный характер, но *предметное выделение* этих контуров происходит лишь в разумной человеческой деятельности.

Однако сверхсубъективное бытие математических возможностей еще ничего не говорит о том, как связана математика и та реальность, которую изучают естественные науки. Мы выяснили только, что в известном ракурсе бытие математики по своему онтологическому типу похоже на неисчерпаемую реальность мира. Но мы вовсе не доказали, что математические структуры и естественно-научная реальность изначально соответствуют друг другу. Попытаемся увидеть возможные перспективы решения этой проблемы.

Математическое бытие и физическая реальность: истоки внутренней согласованности

Первые, идущие еще от пифагорейцев, прямолинейные попытки сопряжения математики и физического мира сразу же наталкиваются на парадоксы и непреодолимые трудности. Во-первых, математика соотносится с физической реальностью не сама по себе, а лишь будучи реализованной в тех или иных объяснительных конструкциях. Но есть и другая трудность, замеченная еще Аристотелем. Если телесная реальность груба и местами, можно сказать, «корява», то математика изящна и точна, — пожалуй, слишком точна, чтобы быть «реальной». Именно это имел в виду Аристотель. Для Стагирита математика пригодна лишь для описания совершенных небесных

тел. Что касается земной физики, то точные математические формы есть лишь приближенный способ говорить о природе: «Математической точности нужно требовать не для всех предметов, а лишь для нематериальных. Вот почему этот способ не подходит для рассуждающего о природе, ибо вся природа, можно сказать, материальна»[1]. Для Аристотеля математические отношения есть всего лишь абстракция от тех качественных отношений, которые никогда не могут быть уложены в чисто математические формы. И хотя физика Нового времени, вслед за Галилеем и Декартом, приняла тезис о том, что природа говорит на языке математики, вряд ли кто-то из классических физиков помышлял о том, чтобы всерьез онтологизировать математические формы со всей присущей им числовой точностью. Зато в физике XX в. мы видим поворот к платоновской точке зрения, выраженный Гейзенбергом, указывавшим на «плодотворность пифагорейско-платоновского образа мыслей»[2]. «Если достижения современной физики элементарных частиц сравнивать с какой-либо из философий прошлого, то речь может идти лишь о платоновской философии; в самом деле, частицы современной физики суть представления групп симметрии...»[3].

Специфика квантовой физики состоит в том, что ее результаты фактически соответствуют математической точности. Квантовая электродинамика уже в 70-х гг. XX в. позволяла вычислить и экспериментально измерить уровни сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода с «фантастически высокой точностью»[4]. В ряде случаев речь идет не просто о некоем приближении, но практически о буквальном совпадении с математической строгостью. Например, все бозе-частицы тождественны друг другу, так что волновая функция системы частиц симметрична относительно перестановок любой пары частиц. Помыслите эту тождественность нарушенной хотя бы чуть-чуть, и вы получите частицы, которые не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии (т.е. это уже будут не бозе-частицы).

В этой ситуации на передний план выходит первое из указанных выше соображений против проецирования математики на реальность. В самом деле, математика сопоставляется с реальностью лишь будучи примененной в конкретном объяснении опыта. Физическая

---

[1] *Аристотель*. Метафизика, II.3.995a 15 // Аристотель. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 98.

[2] *Гейзенберг В.* Шаги за горизонт. М.: Прогресс, 1987. С. 273.

[3] Указ. соч. С. 173.

[4] *Бродский С., Дрелл С.* Современный статус квантовой электродинамики // Успехи физических наук. 1972. Т. 107. Вып. 1. С. 70.

реальность есть не что иное, как осуществленность теоретической схемы в совокупности возможных опытов. Этот подход берет свое начало в философии Канта. У Канта «реальность» есть эмпирическое воплощение трансцендентального схематизма, продукт соединения чувственности и рассудка[1]. Эйнштейновский подход к реальности во многом аналогичен кантовскому: реальность есть опытное осуществление теоретических схем. Различие состоит в том, что у Канта эти схемы являются врожденными и неизменными, а Эйнштейн говорит об их творческом построении: «Мы вольны сами выбирать, из каких элементов строить физическую реальность»[2]; «...человеческий разум должен свободно строить формы, прежде чем подтвердится их действительное существование»[3]. Там, где эти формы становятся схемами осуществленного опыта, можно говорить о «реальности» теоретически введенных объектов.

Таким образом, математика непосредственно не связана с физической реальностью. Но — позволю себе нарочито парадоксальное высказывание — кто сказал что современный физик-теоретик работает главным образом с физической реальностью? Разве струны и суперсимметрии, столь занимающие умы современных физиков, уже стали физической реальностью? Конечно нет, однако от этого они отнюдь не потеряли своей онтологической значимости. Ведь кроме уровня реальности есть еще и уровень бытия, того самого умопостигаемого бытия, о котором в свое время говорил Парменид.

Реальность есть опытное воплощение теоретических схем, их объективация в возможном опыте. Бытие есть схематизм построения теоретически допустимых реальностей, из которых далеко не все будут признаны действительными, наличествующими в нашей Вселенной и в нашем опыте. Бытие — это умопостигаемая структура реальности, исходя из которой строятся ее конкретные картины[4]. Но переход к реальности, к конкретным условиям эксперимента совершается не всякий раз. Физик все чаше работает в мире теоретически возможного бытия, весьма редко выходя в реальность для объяснения каких-то эффектов. Характерная черта современных теорий поля, отмечаемая многими физиками-теоретиками, состоит в следующем. Эти теории

---

[1] Кант говорит о «чувственности, которая придает реальность понятиям рассудка... в то же время ограничивая его» (*Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 128).

[2] *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4 т. М.: Наука, 1967. Т. 4. С. 328.

[3] Там же. С. 124.

[4] На роль умопостигаемых структур в современной космологии обращает внимание А.Н. Павленко. См.: *Павленко А.Н.* Современная космология: новые идеалы рациональности // Исторические типы рациональности. М.: Ин-т философии РАН, 1996. Т. 2. С. 323–325.

представляют собой не столько описание какой-либо конкретной, опытно фиксируемой реальности, сколько способ построения конструкций, поначалу лишь в принципе способных претендовать на согласие с реальностью. «Калибровочные теории задают только общее направление, а не конкретизируют модель. Последняя зависит от конкретного выбора (калибровочной группы и других параметров. — С.Ж.)... Можно предложить огромное множество моделей»[1].

Иначе говоря, 1) современное теоретико-физическое мышление способно к предвосхищающему опыт исследованию бытия, 2) это бытие лишь отчасти может быть истолковано в терминах физической реальности. Впрочем, то, что происходит в теоретической физике, уже давно имеет место в философии, если рассматривать последнюю как попытку выразить на языке всеобщих определений тот же самый мир, который другими способами изучают конкретно-научные дисциплины. Например, для многих естественников детерминистские учения античности (за исключением разве что атомизма) представляются не просто архаичными, но и надуманными, поскольку не вполне укладываются в знакомую физику картину. В монографии Н.А. Мещеряковой этот вопрос получил новое освещение. «Даже самые глубокие парадигмы классического рационализма ... кажутся устаревшими... лишь потому, что они не могут быть непосредственно спроецированы на предметную поверхность современного конкретно-научного материала»[2]. Однако эти парадигмы имеют непреходящее значение, ибо в них «философия... открывает... категориально-всеобщие (идеальные) детерминистские формы»[3]. Иными словами, философия схватывает всеобщие формы бытия, чтобы потом некоторые из них в преображенном виде стали основой для постижения реальности.

В плане *реальности* о физике можно говорить как о последовательности физических моделей (см., например, работы А.И. Липкина[4]), каждая из которых приближает нас к постижению наличного порядка природы. Однако теоретическая физика выводит нас не только к *реальности*, но и к *бытию* как возможному порядку природы. Именно на уровне возможных порядков на первый план выдвигается понятие, воплощающее в себе внутреннее единство физики и математики, онтологии и интеллигибельного схематизма. Речь идет о понятии пространства как такового.

---

[1] *Илиопулос Дж.* Введение в калибровочные теории // Успехи физических наук. 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 579.

[2] *Мещерякова Н.А.* Детерминизм в философском рационализме. С. 20.

[3] Там же.

[4] *Липкин А.И.* Основания современного естествознания: Модельный взгляд на физику, синергетику, химию. М.: Вузовская книга, 2001.

До примерно 70-х гг. XX в. понятие пространства и связанные с ним топологические интуиции и геометрические методы воспринимались не столько как основа, сколько как «один из» элементов теоретической физики. Сегодня можно говорить о существенном изменении ситуации (среди философов на это одним из первых обратил внимание И.А. Акчурин[1]). Умопостигаемое пространство, многообразные варианты которого дает математика, все чаще становится источником физических интуиций и своего рода «теоретическим материалом» для построений физических теорий.

В современной теоретической физике все отчетливее вырисовывается путь, начало которому положили работы Эйнштейна: взаимодействия выражаются в терминах модификации пространственно-временного континуума. Одна из задач теоретика — правильно подобрать многомерное пространство и выделить в нем структуру, способную выразить динамику взаимодействий[2].

Таким образом, на первый план выдвигается пространство как первоисточник (на уровне интуиции) и носитель (на уровне теоретической схемы) возможных онтологических форм. Идея и интуиция пространства указывает нам на онтологическую область, где мышление физика и математика имеет общий онтологический корень. Расхождение начинается потом, когда от «пространства вообще» происходит переход к конкретному пространству, обремененному физической интерпретацией, и начинается объяснение опыта посредством физических моделей.

* * *

Было бы наивным рассчитывать на то, что в одной работе можно найти решение проблемы онтологического статуса математики. Однако проведенный выше анализ позволяет увидеть подходы, проясняющие онтологический статус математики. Истоки математических форм находятся на уровне умопостигаемого бытия. Там же берут начало интуиции современной теоретической физики. Объединяющим онтологическим началом выступает интуитивно данное *бытие-пространство*, «пространство вообще», из которого выделяются предметные интеллектуальные формы. Структуры, от-

---

[1] См.: *Акчурин И.А.* Единство естественно-научного знания. М.: Наука, 1974; *Его же.* Концептуальные основания новой — топологической физики // Философские проблемы физики элементарных частиц (тридцать лет спустя). М.: Ин-т философии РАН, 1995. С. 5–23.

[2] Такой подход характерен для теории струн. А поиски симметрии, объединяющей бозоны и фермионы, привели к чрезвычайно интересным понятиям суперсимметрии и суперпространства, свойства которого еще не получили должного методологического осмысления.

вечающие за предметную осмысленность физического опыта, образуют каркас *физической реальности*. Если же ставить вопрос об особой *математической реальности*, то ею будет оформляемая субъектом предметность самих математических форм.

Библиографический список

Акчурин И.А. Единство естественнонаучного знания. М.: Наука, 1974.

Акчурин И.А. Концептуальные основания новой – топологической – физики // Философские проблемы физики элементарных частиц (тридцать лет спустя). М.: Ин-т философии РАН, 1995. С. 5–23.

Александров А.Д. Пространство // Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энциклопедия, 1977. Т. 4. Стб. 712–713.

Аристотель. Метафизика // Аристотель. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 63–367.

Аристотель. Физика // Аристотель. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1981. Т. 3. С. 59–262.

Бажанов В.А. Реализм, антиреализм и идея третьей линии в философии математики (в настоящем сборнике).

Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. М.: Физматлит, 1958. Вып. XI. С. 225–438.

Бродский С., Дрелл С. Современный статус квантовой электродинамики // Успехи физических наук. 1972. Т. 107. Вып. 1. С. 57–98.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.

Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.

Визгин В.П. Предустановленная гармония между чистой математикой и физикой // Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность. Тезисы Третьей всероссийской научной конференции. 27–28 сентября 2013 г. М., 2013. С. 27–30.

Вяткина А.Г. Воображение как основа творческого процесса // Научные проблемы гуманитарных исследований: научно-теоретический журнал. Пятигорск, 2011. Вып. 6. С. 250–255.

Галуа Э. Соч. М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М.: Прогресс, 1987.

Жаров С.Н. Математика и онтологическое понятие трансценденции // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы международной научной конференции. 15–16 июня 2007. М., 2007. С. 246–248.

Илиопулос Дж. Введение в калибровочные теории // Успехи физических наук. 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 565-596.

Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994.

Коген Г. Теория опыта Канта. М.: Академический проект, 2012.

Канторович Л.В., Плиско В.Е. Системный подход в методологии математики // Системные исследования: Методологические проблемы. Ежегодник 1983. М.: Наука, 1983. С. 27–41.

Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974.

Липкин А.И. Основания современного естествознания: Модельный взгляд на физику, синергетику, химию. М.: Вузовская книга, 2001.

Маркс К. К критике гегелевской философии права // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 1. С. 219–358.

Мещерякова Н.А. Детерминизм в философском рационализме: от Фалеса до Маркса. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1998.

Павленко А.Н. Современная космология: новые идеалы рациональности // Исторические типы рациональности. М.: Ин-т философии РАН, 1996. Т. 2. С. 312–330.

Перминов В.Я. Реальность математики // Вопросы философии. 2012. № 2. С. 24–39.

Пуанкаре А. О науке. 2-е изд. М.: Наука, 1990.

Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М.: Наука, 1962. С. 263–284.

Степин В.С. К проблеме структуры и генезиса научной теории // Философия, методология, наука. М.: Наука, 1972. С. 158–185.

Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. М.: Наука, 1967. Т. 4.

А.Н. Кричевец

АРГУМЕНТ НЕУСТРАНИМОСТИ КУАЙНА—ПАТНЕМА, НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ И ЖИЗНЕННЫЙ МИР

0. Тема онтологического статуса математических объектов — одна из старейших философских тем. В совершенно эксплицитном виде она сформулирована уже Платоном (VII письмо). Было бы несправедливостью сказать, что она «недостаточно полно исследована», как это принято в обосновании актуальности диссертационных работ. Напротив, она исследована, так сказать, вдоль и поперек. Однако, говоря тем же «диссертационным» языком, мы еще далеки от окончательного ответа. Я попытаюсь дать ответ, несколько расширив концепцию жизненного мира Э. Гуссерля.

1. Аргумент неустранимости Куайна—Патнема (Quine—Putnam indispensability argument) описывают в настоящее время следующим образом: поскольку математические объекты (множества, функции и т.п.) не могут быть устранены из физических теорий, то они, грубо говоря, существуют в той же степени, что и предметы физических теорий. Более точно: мы имеем равные «онтологические обязательства» перед всеми неустранимыми из *лучших* (пока оставим это добавление в стороне) теорий объектами, среди которых свое место занимают и математические объекты[1].

Именно этот вопрос: что такое в данном контексте «онтологические обязательства» и какие именно «онтологические обязательства» мы имеем перед объектами математических и физических теорий? — мы и обсудим далее.

Замечу, прежде всего, что подспудный смысл аргумента Куайна—Патнема — это «прибавить веса» математическим объектам, «нагрузив» их тем весом, который имеют связанные с ними физические объекты: «аргумент о неустранимости математики из языка

[1] Indispensability of mathematics to empirical science gives us good reason to believe in the existence of mathematical entities. Moreover, mathematical entities are seen to be on an epistemic par with the other theoretical entities of science, since belief in the existence of the former is justified by the same evidence that confirms the theory as a whole (*M. Colivan*. Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics. http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/)

естественно-научных теорий ныне рассматривается как один из наиболее весомых доводов в пользу реалистской позиции в онтологии математики»[1]. Хотя участники дискуссий вокруг аргумента в большинстве своем не разделяют *наивной* веры в существование какого-то референта у всякого элемента физической теории — об этом свидетельствует, например, формулировка: «неустраним из *лучших* физических теорий», однако пиетет перед объектами физических теорий сохраняется — иначе не имело бы смысла сводить одно существование к другому. В радикальном виде эта вера выражается в утверждении, что естественная наука и является мерой всех вещей — существующих, что они существуют, а не существующих, что они не существуют[2]. Моя дальнейшая цель — показать некоторые проблемы, сопровождающие такую веру.

Рискну предположить, что за верой в онтологический приоритет физических теорий стоит не доведенная до полной ясности вера в некую единую физическую теорию, к которой потенциально сводятся все имеющиеся теории всех наук. В такой перспективе современное развитие науки выглядит как направленное на раскрытие *фундаментальных* свойств мира, т.е. обнаружение *онтологического фундамента* всего существующего. В таком случае, разумеется, все референты всех понятий языка, в том числе и математических понятий, существуют лишь в той мере, в какой они легитимированы через эти фундаментальные понятия. Следы подобной не вполне проясненной веры мы находим очень далеко от физики — например, один из наиболее радикально настроенных философских «защитников» сознания Дэвид Чалмерс (заявляющий о том, что он принимает сознание всерьез) ищет физико-психические законы, связывающие переживаемое сознание с его физическим носителем. При этом Чалмерс говорит о *физическом вообще*, не уточняя, с какой именно физической теорией он собирается коррелировать сознание, что и свидетельствует о генерализованности и неконкретности его веры в онтологический статус объектов физических теорий.

Фактически же в настоящий момент у нас есть большое количество физических теорий разного уровня общности и имеющих ограниченный в большей или меньшей степени ареал применения. Даже теории, которые невозможно не отнести к «лучшим» и которые в указанном смысле являются наиболее фундаментальными, — общая

---

[1] *Хлебалин А.В.* Онтологические обязательства неустранимости математики // Вестник Томского Гос. ун-та. Философия, социология, политология. 2009. № 4 (8). С. 61.

[2] В сообществе, в котором оживленно обсуждается эта проблема, принято называть такую установку *натурализмом*, однако такое именование, по-моему, ничего не проясняет и не ориентирует в понимании сути дела.

теория относительности и квантовая механика — приложимы к разным «реальностям», различающимся пространственно-временными масштабами, и вступают в конфликт в приложениях к одним и тем же предметам. Нельзя исключать ни того, что они будут объединены, ни противоположной ситуация принципиального отсутствия интегрирующей теории — см., например, статью Юджина Вигнера, о которой речь пойдет ниже.

2. Случаи, когда математические понятия получают неожиданное употребление в областях, весьма далеких от вызвавших эти понятия к жизни математических проблем, широко известны. На мой взгляд, самый поразительный и компактный пример[1] дает центральная предельная теорема теории вероятностей, которая утверждает сходимость плотности распределения вероятностей суммы случайных величин к функции, выражаемой через константы π и e. Константы, «изобретенные» для совсем иных целей, оказываются востребованы в теореме, имеющей ясное прикладное значение и, несомненно, затрагивающей онтологические вопросы. Тем самым, замечу, легитимация математических понятий может происходить и помимо физических теорий. В данном случае отношения между математическими объектами и реальностью очень плотные. Центральная предельная теорема указывает на особый характер нормального распределения: мы можем ожидать, что практически важные распределения (это понятие представляет собой нефизическую идеализацию по отношению к реальному[2] миру) будут похожи на нормальное распределение, если относятся к величинам, определенным сложением влияний множества факторов. Никаких непосредственно соотносимых с реальностью теоретических объектов, кроме случайной величины и ее распределения, это приложение двух математических констант не требует.

Вернемся теперь к физике: нас интересуют случаи, когда физические теории используют предшествующие разработки математиков, которые возникли из внутренних потребностей математической науки. Обсуждая эту замечательную эффективность математики в физике, Вигнер пишет: «Не следует забывать, что гильбертово пространство квантовой механики — это комплексное гильбертово пространство с эрмитовым скалярным произведением. Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее,

[1] Фактически, именно с этого примера начинает свою статью Юджин Вигнер, но шутливая форма, которую он ему придает, серьезно снижает его эффект, и читатели обращают внимание лишь на отношения математики и физики, которой посвящена оставшаяся часть статьи.

[2] Я здесь употребляю это слово в не обязывающем обыденном смысле.

использование комплексных чисел в квантовой механике отнюдь не является вычислительным трюком прикладной математики, а становится почти необходимым при формулировке законов квантовой механики»[1]. Это «почти» в последнем предложении можно легко пояснить. Вместо комплексных чисел можно было бы использовать упорядоченные пары чисел с операциями, которые делают их изоморфными комплексным числам. Ясно, что это не ставит под сомнение применимость некоего глубокого операционального инварианта, который скрывается за обоими своими представлениями. Возможно, вообще никакое конкретное математическое понятие не является неустранимым в самом радикальном смысле — утверждают, что при определенных стараниях из некоторых теорий можно устранить вообще всю математику[2]. Однако даже логическая возможность полного насильственного устранения математики из физики не изменит ситуации их неразрывного соединения в реальной практике.

Хотя наибольшее удивление вызывает именно опережающее развитие математических теорий, затем находящих применение в «лучших» физических теориях, однако и обратные ситуации нередко случаются. Например, развитие квантовой механики в свою очередь мотивировало развитие некоторых разделов функционального анализа.

Есть и еще достойные внимания варианты взаимодействия математики и физики. Как выразился Л.И. Маневич на обсуждении своего доклада, в котором излагался материал его статьи в настоящем сборнике, физика нынче движется от ньютоновского идеала к аристотелевскому: каждый новый раздел порождает свою ad hoc онтологию и свои средства решения задач. При таком многообразии физических предметов вопрос о том, как они порождаются, может быть важным для решения нашей проблемы. Из десятка примеров Л.И. Маневича отмечу три.

Первый пример для меня наиболее удивителен, и я уделю ему, возможно, больше внимания, чем автор указанной статьи. Речь идет об относительно частной задаче обтекания жидкостью бесконечно длинного цилиндрического (в смысле инвариантного относительно продольных сдвигов) твердого тела, т.е. фактически двумерной задаче обтекания. То, что конформное отображение комплексной плоскости (если представить плоскость задачи как комплексную) переводящее границы тела в границы некоторого другого тела, переводит

---

[1] *Вигнер Е.* О непостижимой эффективности математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 189.

[2] Х. Филд провел такую операцию устранения математики из ньютоновой теории тяготения (*Mark Colyvan.* Indispensability... См. также: *Хлебалин А.В.* Онтологические обязательства...).

также линии тока в линии тока для новой задачи, кажется еще более удивительным, чем уместность гильбертова пространства в квантовой механике, — более удивительным потому, что речь идет не о «фундаментальных свойствах материи», а всего лишь о прикладной задаче, в которой скорее можно было бы ожидать уточняемого описания с помощью потенциально уточняемой и усложняемой модели. Разумеется, дело в самом уравнении, описывающем обтекание, и все же новая функция конформных отображений удивительна.

Второй пример показывает, что «гипноз» математического метода может даже успешно противостоять фактам. Возможность солитонов отвергалась сообществом по причине невозможности такого решения для обычно используемых уравнений. И только введение нелинейности в уравнения позволило получить соответствующее решение и оправдать факт, описанный задолго до этого, но не принимаемый сообществом.

И наконец, последний пример касается теории колебаний. Здесь я не буду использовать основную часть текста примера, в которой описаны слабо связанные осцилляторы. Для нашего обсуждения аргумента Куайна—Патнема достаточно и самого общего уровня. Зададим вопрос: что является референтом понятийной единицы (entity в английском оригинале аргумента) *колебание* в теории колебаний? Если рассмотреть историю вопроса, то, по-видимому, наши онтологические обязательства перед синусом сначала определялись неплохими теориями разнообразных частных маятников, а затем стали еще в большей степени оправдываться лучшей теорией колебаний. Но если спросить наивного человека, что он сочтет в большей степени существующим — *раскачивание качелей* или *колебание как таковое*, он из двух существительных выберет первое и сочтет первое неплохое оправдание ничем не уступающим второму.

Если же не связывать наш анализ ситуации с оправданием тригонометрических функций, то сравнение статусов маятника и колебаний не кажется мне простой задачей. С одной стороны, теория колебаний представляет собой более общую теорию, а обобщение теории, как кажется, ведет нас к более фундаментальным законам (теория тяготения — «более фундаментальна», чем законы падения тел и кеплеровские орбиты планет), и может оказаться, что мир вообще «состоит» не из предметов, а из колебаний каких-то нематериальных «струн».

С другой стороны — со стороны здравого смысла, — мы видим, что функция Шредингера и колебание «струн» выглядят слишком далеким от населяемого нами мира и не имеют даже воображаемого предметного референта. Можно сказать: «вещество состоит из атомов», но не: «вещество состоит из функций Шредингера».

Ситуация усугубляется тем, что, как я уже отмечал, некоторые физические теории несовместимы, и физический мир, описываемый единой теорией, есть не более чем *идея* в кантовском смысле. Она «руководит» поисками синтезов, но не гарантирует их. Может даже оказаться, что «следствия из некоторых законов природы будут противоречить друг другу, но мы не захотим отказаться ни от одного из законов, поскольку каждый из них в своей области достаточно убедителен. Обнаружив противоречие между отдельными законами природы, мы можем покориться такой ситуации и потерять интерес к разрешению конфликта между различными теориями. Мы можем разочароваться в поисках "абсолютной истины", т.е. непротиворечивой картины, образующейся при слиянии в единое целое маленьких картинок, отражающих различные аспекты природы»[1]. Идея синтеза может умереть.

Но что же в таком печальном случае представляет собой физический мир, описываемый несовместимыми законами? «"Законы природы", — пишет Вигнер, — обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости». И далее: «Каждый эмпирический закон обладает тем неприятным свойством, что пределы его применимости неизвестны»[2].

Мне кажется, что в этом своем знаменитом тексте Вигнер сказал гораздо больше, чем усвоило читающее сообщество. Действительно, картина несовмещающихся и не синтезируемых теорий с неопределенными границами применимости не выглядит столь уж вдохновляющей, и «непостижимая эффективность математики» в физике с этой позиции не столько повышает статус математики, сколько ставит вопросы, выходящие далеко за рамки физики. Обращу внимание на еще одно слово в этой замечательной статье: «Опираясь на них [законы природы] и используя то, что нам известно о состоянии *неодушевленного* (курсив мой. — *А.К.*) мира в данный момент, мы можем лишь заключать более или менее разумные пари о его будущих свойствах»[3]. Выделение одушевленного мира из-под юрисдикции законов природы не стало темой статьи, но сказанное ясно показывает позицию автора. И наконец: «Законы природы хранят молчание относительно всего, что касается состояния мира в данный момент, например существования Земли, на которой мы живем и на которой Галилей проводил свои эксперименты, существования Солнца и всего, что нас окружает. Отсюда следует, что законы природы можно использовать для предсказания будущего лишь в исключительных обстоятельствах, а

[1] *Вигнер Е.* Указ. соч. С. 194.
[2] Там же.
[3] Там же. С. 188.

именно лишь тогда, когда известны все существенные (для предсказания будущего) условия, определяющие состояние мира в данный момент. Отсюда же следует, что создание машин, функционирование которых физик может предвидеть заранее, является наиболее эффектным его достижением. В этих машинах физик создает ситуацию, при которой все существенные параметры известны и поведение машины предсказуемо»[1].

Мы подошли к очень важному пункту нашего изложения. Онтологический статус физических законов оказывается, по Вигнеру, не столь простым. Законы природы позволяют предсказывать поведение объектов, которые являются референтами базовых физических понятий: твердого тела, обладающего определенной массой (ему более или менее соответствуют твердые тела в природе), функции Шредингера (ей соответствуют мельчайшие части *этих же* тел), релятивистской массы (ей соответствуют эти же тела, если они движутся с большими скоростями). Но само многообразие этих законов и неопределенные границы их применимости ставят под сомнение фундаметальность онтологического статуса референтов этих понятий. Если идея о существовании синтезирующей физической теории — *только идея*, то электроны, кварки, колебания и жидкости, обтекающие цилиндры — это референты разноуровневых локальных теорий равного статуса. Статуса моделей? Решительно — нет! Есть несомненная разница между моделями, параметры которых подгоняются на тестовых данных, чтобы обеспечить более или менее практически ценные предсказания относительно каких-то процессов, и математизированными физическими теориями, в которых комплексные числа, матрицы и гильбертовы пространства получают неожиданную сферу применимости.

Таким образом, особый статус единиц (entities) физических теорий еще нуждается в прояснении, прежде чем статус математических понятий можно будет с ним связывать. Далее мы попробуем взглянуть на проблему с позиции гуссерлевского жизненного мира, и увидим, что это даст продуктивный, но все же недостаточный результат.

3. Можно заметить, что последние процитированные слова Вигнера фактически говорят о том же, о чем с большей определенностью выразился Э. Гуссерль в работе «Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология», написанной за два десятилетия до лекции Вигнера: «Всякое познание законов могло быть только познанием перспектив протекания действительных и возможных феноменов опыта, познанием тех или иных, схватываемых в качестве

[1] Там же. С. 187.

законов, предвидений»[1]. И далее: «Мы изобретаем то или иное особое искусство, геометрическое или галилеевское, которое теперь называется физикой. Что мы можем действительно сделать с его помощью? Именно расширить до бесконечности наше *предвидение*»[2]. Но далее Гуссерль высказывает радикальную мысль, которая говорит нам о статусе физических объектов нечто новое: «Благодаря одеянию идей мы принимаем за *истинное бытие* то, что является *методом*, предназначенным для того, чтобы в бесконечном прогрессе улучшать *грубые предвидения*, которые изначально только и возможны в рамках действительно познанного и познаваемого жизненного мира»[3].

И наконец, приведу заключительные слова Вигнера в цитируемом докладе: «Нам в принципе неизвестно, почему наши теории "работают" так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости»[4]. И далее: «Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов, это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем»[5]. Я не буду приводить полстраничную цитату из § 9 «Кризиса» Гуссерля, в котором высказана параллельная мысль, лежащая в русле одной из основных задач этой работы[6]. Именно: философская задача состоит в нахождении подлинного смысла этого дара, не отрицающего, разумеется, его практическую продуктивность и идеальную значимость.

Резюмируя, отмечу, что критика аргумента Куайна-Патнема соединила в одном нарративе два контраргумента, подкрепляющих друг друга в данном контексте, но далее подлежащих разделению. Это аргумент о зависимости физической онтологии от математики и аргумент о множественности физико-математических онтологий. Оба они говорят о том, что подкрепление статуса математических объектов их применимостью в физике должно быть освобождено от наивной веры в «предметное» существование референтов физических теорий. Их статус тем меньше похож на статус предметов нашего мира (если пытаться уточнить, то жизненного мира в смысле Гуссерля, разумеется), чем дальше условия их применимости требуют удалиться от привычного нам мезо-мира человеко-соразмерных масштабов и скоростей, и коррелятивно, чем более базовые единицы этих теорий оказываются

---

[1] *Гуссерль Э.* Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология. СПб.: Владимир Даль, 2004. С. 76.

[2] Там же. С. 77.

[3] Там же. С. 78.

[4] *Вигнер Ю.* О непостижимой... С. 197.

[5] Там же.

[6] *Гуссерль Э.* Кризис... С. 79.

связаны с математикой, далеко ушедшей от очевидностей элементарной геометрии и арифметики.

Однако при обсуждении статуса математических идеальностей, к которому мы переходим, их (идеальностей) связь с физикой и, шире, с человеческой деятельностью в мире становится позитивным предметом нашего исследования, а множественность «физик» и «математик», напротив, ставит перед ним дополнительные проблемы, которых не было бы, если бы эти науки представляли собой кумулятивно развивающееся единство.

4. В последних своих работах Э. Гуссерль ставит масштабную задачу: продолжая отстаивать фундаментальный статус математической (в первую очередь геометрической[1]) идеальности от попыток ее релятивизации и сведения к социальным «изобретениям», вместе с тем разъяснить сущность кризиса европейского научного мировоззрения. Творцы европейской науки, несомненно, далеко продвинули математику, однако упустили важнейший и фундаментальный смысл своей науки, что и привело европейское человечество к кризису. В случае геометрии от автора одновременно требовалось (1) продвинуть трансцендентальное обоснование геометрии как коренящегося в жизненном мире проекта развития идеальных коррелятов средств решения жизненных задач и (2) разъяснить сущность ошибок в развитии геометрических идеальностей, связанных с научной идеологией и патологическим пониманием смысла геометрической деятельности современными учеными. Задача, безусловно, очень трудная, и возможно даже невыполнимая.

Убедительная критика самого замысла и его реализации в работе «Начало геометрии» дана в статье З.А. Сокулер. До некоторой «точки бифуркации» мы будем двигаться параллельно. «Гуссерль прямо начинает, как с совершенно очевидного, с очень сильного утверждения: любое геометрическое развитие, любой прогресс этой науки изначально вписаны в определенные рамки, в определенный горизонт. Это и означает, что данный горизонт существует априорно по отношению к реальной истории геометрии»[2]. И далее: «Замысел Гуссерля относительно геометрии является последовательным выражением континуалистского понимания истории науки. Гуссерль не подвергает сомнению посылку о том, что изначальный смысл геометрии не должен был измениться в ходе исторического развития геометрии

---

[1] Под геометрией здесь Гуссерль понимал всякую математическую теорию о пространстве и времени (*Гуссерль Э.* Начало геометрии. М.: Ad Marginem, 1996. С. 211).

[2] *Сокулер З.А.* Э. Гуссерль о геометрической традиции: к смене парадигм в теории познания // Философия науки. Вып. 5. М.: ИФ РАН, 1999.

(фактически он, конечно, изменился. Но с этим Гуссерль и собирается бороться...)»[1].

Как мне представляется, позиция Гуссерля по отношению к истории диктовалась необходимостью решить одновременно те две задачи, о которых я писал выше, а «континуалистичность» является следствием этого. Он задает определенное единство геометрии как соединения неотменимых идеальностей и практики в жизненном мире, и это соединение задает горизонт будущего *бесконечного* развития. Чтобы точнее понять, что представляет собой это априори подлинной геометрии, надо обратиться к тому, как Гуссерль задает возможность *трансцендентальной патологии* (выражение Ж. Деррида), т.е. непротиворечивого и даже продуктивного, и вместе с тем патологического развития науки. Эти слова в комментарии к «Началу геометрии» Деррида сопровождает сноской, в которой он истолковывает «Кризис» в таких словах: «С точки зрения смысла техническая деятельность как таковая, включая и науку, есть пассивность; она есть болезненная лихорадка, припадки бреда»[2]. Мне представляется, что по отношению к геометрии здесь имеется в виду, что деятельность со знаками осуществляется автоматически, и алгоритмы здесь заменяют творческое усилие. Действительно, многие творцы европейской науки связывали научный метод и с такими надеждами (я имею в виду, например, реально созданную аналитическую геометрию Декарта и лишь задуманную универсальную характеристику Лейбница). Для Гуссерля эта возможность патологии связана с языком, а точнее, с тем, что геометрическая традиция живет в «осаждении и реактивации» идеальных содержаний в форме письменной речи, которое с какого-то исторического момента используется для передачи традиции от поколения к поколению. Именно при считывании идеальностей, осажденных предшествующими геометрами в форме текстов, реактивация может дать сбой и позволить новому геометру чрезмерно увлечься знаковыми опосредованиями как существом дела, поддаться «искушению языком»[3].

Чтобы четко отделить кризисное развитие науки от возможного положительного, Гуссерль отыскивает акт «первоучреждения» геометрической идеальности, принадлежащий тому самому жизненному миру, который предлагается им в качестве основополагающей смысловой структуры вместе для европейской науки и философии.

Здесь наши пути с той критикой подхода Гуссерля, которую развивает далее З.А. Сокулер, расходятся. В свою очередь, критикуя ее

---

[1] Там же.
[2] *Деррида Ж.* Введение // Гуссерль Э. Начало геометрии. С. 96.
[3] *Гуссерль Э.* Начало геометрии. С. 222.

конвенционалистские установки, я буду пытаться преобразовать идею жизненного мира в таком ключе, чтобы найти там место для непостижимой эффективности физико-математического естествознания и математики самой по себе. Замечу, что Гуссерль хорошо видит эту задачу: «Дело не в том, что *очевидность позитивно-научного метода* обманывает нас, а его достижения суть одна лишь видимость, а в том, что эта очевидность сама является *проблемой,* что этот объективно-научный метод покоится на никогда прежде не исследованном, глубоко скрытом субъективном основании, философское прояснение которого только и выявляет истинный смысл достижений позитивной науки и, коррелятивно, истинный бытийный смысл объективного мира — и именно как трансцендентально-субъективный смысл»[1]. Однако он направляет свои усилия в идеально очищенное прошлое (очищаемое редукцией фактической истории). Тем самым этот важный опыт успешного математического естествознания оказывается под угрозой «заключения в скобки» прежде, чем в скобках окажется и замысел реконструированных изобретателей проекта геометрии, которые находили ей (и ее непатологическим, по Гуссерлю, историческим преемницам) место в том жизненном мире, реконструировать который старается Гуссерль. Он пишет: «Оправданное возвращение к наивности жизни, сопровождаемое, однако, возвышающейся над ней рефлексией, представляет собой единственно возможный путь к преодолению философской наивности, скрытой в “научности” традиционной объективистской философии»[2].

Таким образом, дело не в изначально континуалистском понимании истории Гуссерлем, как считает З.А. Сокулер. Скорее, его диктуемое общей философской задачей движение «назад к жизненному миру» порождает континуалистские последствия для его исторических реконструкций. А это значит, что современные достижения математики и математической физики, опирающиеся на существенное использование знаковых систем *не в качестве только средств передачи* идеальных содержаний, для Гуссерля могут оказаться только в «патологической» части истории геометрии[3].

---

[1] *Гуссерль Э.* Кризис... С. 141.

[2] Там же. С. 88. Вопрос, каким образом эта рефлексия включает «неподлинный» опыт математического естествознания.

[3] З.А. Сокулер справедливо отмечает, что для античного геометра многомерное пространство никак не могло быть причастно его идее геометрии. Я же замечу, что оно никак не может быть предметом для математика вне развитого алгебраического символизма (изобретенного Виетом и Декартом вопреки античным интуициям (*Кричевец А.Н.* В какой математике возможны стили математического мышления // Стили в математике: социокультурная философия математики. СПб., 1999. С. 54)). Думаю, для Гуссерля этот вопрос был бы трудным.

Помочь нам в нашей проблемной ситуации может не возвращение к жизненному миру в его наивной изначальности, даже и с возвышающейся над ней рефлексией, а жизненный мир в той полноте, в какой мы можем его *создать*, найдя в нем место и современным достижениям «европейских» наук. Кризис же, как я постараюсь показать в заключительной части статьи, остается и при нынешнем состоянии «европейских наук» на том же самом месте, на каком его ставит анализ ситуации скептического парадокса в научной психологии, проведенный Гуссерлем в § 13 его работы.

5. «В классической рационалистической гносеологии, — пишет З.А. Сокулер, — познание рассматривается как своего рода причащение божественному. Знание вероятное, пусть даже высоковероятное, принципиально не может служить такой цели»[1]. В § 13 «Кризиса» Гуссерль как раз и рассматривает пафос познания столь успешного, какого не могли представить творцы науки предыдущих веков. И однако именно этот пафос «при взгляде *со стороны психологии*, в области которой эти свершения осуществлялись» вступает в противоречие со своими собственными целями: исследуя ученого как предмет, психология не может включать его пафос познания как приближения к истине, его «познание» не релевантно истине[2]. Еще в XVIII в. И. Кант предпринял серьезную попытку ограничения области применимости науки, своей первой Критикой «освобождая место вере». На мой взгляд, раздробление физики, о которой мы вели речь в первой части работы, ничего серьезным образом не добавляет к той проблеме, которую видел уже Кант.

Надо лишь понять различие между математическими моделями, которые благодаря подбору коэффициентов более или менее вероятно предсказывают поведение моделируемых систем (например, в психологии и популяционной биологии), и математизированными физическими *теориями*, в которых физические *единицы* вызываются к существованию математическими средствами, как например, линии тока в двумерной задаче обтекания (см. выше). Здесь знания не достоверны, а вероятны *лишь в силу неопределенности границ применимости* математизированных законов. Если же говорить о квантовой механике, то это совершенно точная наука, несмотря на то, что ее предсказания не являются точными, а лишь вероятностными. Таким образом, *если нам будет угодно*, мы по-прежнему можем рассматривать не менее (а скорее даже более) успешные, чем ньютоновская динамика, современные достижения математизированной физики как свидетельства нашей причастности (в качестве читателей книги

[1] *Сокулер З.А.* Э. Гуссерль...
[2] Там же. С. 99.

природы) божественному замыслу — и именно эту мысль выразил Вигнер в последней из приведенных в первой части статьи цитате о «незаслуженном даре».

Далее, легко видеть, что в целом верные замечания З.А. Сокулер, подобные приведенному ниже, касаются математической физики в меньшей степени, чем других наук: «Научные теории получают признание в научном сообществе, несмотря на сомнения в их истинности, потому что оказываются во многих отношениях удобными. Соответственно главная функция науки видится в том, чтобы служить руководством для технологических, экономических, политических и пр. решений, ориентиром для социальных действий, но не для решения кардинальных проблем человеческого существования и не для восстановления связи индивида с Абсолютом. Можно было бы сказать, что современное общество, как оно конституировалось после эпохи Просвещения, замыкается на себя. Не жаждет обретения связи с Трансцендентным. Соответственно переопределяется роль и назначение науки. Наука становится социальным институтом в ряду прочих институтов. Она имеет определенную социальную функцию и более или менее успешно выполняет ее. Но, по сравнению с парадигмой классической гносеологии, ее роль оказывается гораздо менее значимой»[1]. Это, несомненно, точное выражение состояния *современной философии науки*, но это не значит, что вопрос *о науке* решен этим окончательно.

В том же смысле верно и утверждение: «Философия науки со времен второго позитивизма осознала, что научные теории не подсказываются опытом и не выводятся из него, но содержат произвольные конструкции, обусловленные активностью познающего разума и оценивающиеся по критерию удобства. Они оставляют познающих в рамках своей собственной социально организованной познавательной деятельности и не открывают перспектив трансцендирования в сторону подлинной реальности или созерцания Абсолюта»[2]. На мой взгляд, и здесь философия науки может и должна уточнить свое понимание, и прежде всего смысл «произвольности» в конструировании понятий.

---

[1] *Сокулер З.А.* Э. Гуссерль... Должен заметить, З.А. Сокулер не считает, что у человека вовсе нет перспективы трансцендирования наличного сущего в сторону подлинной реальности — об этом можно судить по ее прекрасной книге «Герман Коген и философия диалога», в которой эта перспектива связывается, в частности, с отношением с Другим. В данной статье невозможно развивать эту тему, но мне представляется, что интерсубъективность математики не вовсе чужда теме отношений «Я — Другой», в частности, передача идеальных содержаний с помощью языка обычно происходит в среде этого отношения, а не в чистоте реактивации знаковых осадков в ситуации «Я — текст».

[2] Там же.

Из того, что наука функционирует как социальный институт, не следует, что теорема Пифагора или теорема о собственном базисе для самосопряженного оператора не имеет какого-то внеисторического и внесоциального идеального значения. Больше того, признание социальных условий возможности и социальных мотиваций математической деятельности не может ничего дать для решения проблемы традирования этих идеальностей. Если же признать неудачной попытку Гуссерля опереться в решении проблемы передачи геометрии (к которой он относит и теорию относительности) в ряду поколений только на системы знаков, то можно сказать, что философия науки к проблеме еще и не подступилась.

Как отметил Л. Витгенштейн в пункте 4.112 «Логико-философского трактата», «Философия должна прояснять и строго разграничивать мысли, которые без этого являются как бы темными и расплывчатыми». Я считаю, что проблемное поле, в рамках которого расположилась данная статья, нуждается именно в прояснении и описании, а не в объяснениях и ответах на вопросы «почему», которые, на мой взгляд, здесь и невозможны.

6. Чтобы развести две стороны проблемы, я подвергну редукции то фактическое состояние математики, наук в целом и разнообразных ненаучных движений и достижений культуры, когда ограниченность возможностей человеческого индивида не позволяет ему освоиться во всем указанном пространстве достижений. Результат редукции, которую я назову редукцией интерсубъективности, можно представить себе как разум, многократно превосходящий разум нашего даже самого выдающегося современника — но лишь количественно — так сказать, по быстродействию и по объему памяти, но не качественно. Такой универсальный мыслитель мог бы быть специалистом во всех развитых до современного состояния науках, а также и в других человеческих деятельностях. Как бы он ответил на вопрос о статусе математических объектов?

Математика, сказал бы он, прилагается разнообразно к деятельностям разного уровня сложности. В жизненном мире, как его представлял Гуссерль, ее способ существования состоит в том, что идеальные ее предметы могут непосредственно сопоставляться с предметами мира, и это сопоставление находится в согласии с деятельностями в предметном мире. Больше того, некоторые деятельности только и становятся возможны благодаря их нормированию математическими средствами. Эту сторону математического существования описывает в своих работах (в частности, в статье в данном сборнике) В.Я. Перминов, а также Г.Б. Гутнер (также в данном сборнике). Замечу, что здесь аналога аргументу Куайна—Патнема не может быть, поскольку

отсутствуют эксплицитные теории этого жизненного мира, а развитые арифметика и геометрия уже возможны.

Над этим слоем возможно качественное развитие математики, связанное с развитием знаковых средств. Арабская цифровая система, алгебраическая символика, дифференциальное исчисление и т.д. выводят за рамки предметной онтологии, по Перминову. Гипотетический универсальный мыслитель не нуждался бы в знаках для передачи традиции, поскольку он и был бы этой традицией, но новая математика не могла бы им развиваться без специальных знаков (пример с многомерными пространствами, которые осваивает линейная алгебра, ясно показывает это). Но знаки позволяют образовывать новые слои предметности, или лучше квазипредметности, развивать формальную сторону математических рассуждений и образовывать тем самым новые слои деятельности (прежде всего, деятельность с письменными знаками на бумаге)[1], в которой математик усматривает аналогии и аналогии аналогий (именно в таком усмотрении, по преданию, С. Банах видел истинный талант математика). И каждая аналогия может быть удачно выражена и закреплена знаками. Однако назвать эту деятельность «произвольным конструированием», с моей точки зрения, серьезная ошибка. С.Н. Жаров справедливо указывает в статье в данном сборнике, что математика как система возможных математических миров (и соответствующих им связей) представляет собой сверхсубъективный универсум, который не зависит ни от человека, ни от культуры.

С другой стороны, все связи между физикой, математикой и их применением в жизненном мире также оставались бы доступны в каждый момент субъекту научной деятельности[2]. Для этого субъекта умножение регионов математизированного физического знания и коррелирующее, но не связанное жестко развитие математики явно демонстрировали бы свою укорененность в жизненном мире, однако

---

[1] *Шварц А.Ю.* Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики // Психологические исследования: электронный научный журнал [Электронный ресурс]. 2011. № 3 (17).

[2] Мне кажется, мы могли бы назвать этого полученного редукцией интерсубъективности субъекта трансцендентальным коррелятом жизненного мира, последний теперь становится, в отличие от гуссерлевского, развивающимся. «Стартуя» от преданного жизненного мира, субъект может расширять жизненный мир, обнаруживая, например, новые априорные принципы, подобно тому как у Канта ньютоновская теория развивалась по предопределенным априорным принципам после образования эмпирического понятия движения (*Кант И.* Метафизические начала естествознания // Кант И. Соч.: В 6 т. Т. 6. С. 71). О необходимости расширения гуссерлевского понятия жизненного мира говорил Ю. Хабермас, акцентируя, правда, редуцированную нами интерсубъективность (*Хабермас Ю.* От картин мира к жизненному миру. М.: Идея-Пресс, 2011. С. 111).

это возвращение к жизненному миру сопровождалось бы не только рефлексией (как это предлагалось Гуссерлем), но и дополнительным пониманием статуса математики и математического естествознания. А именно: *феномен* относительно независимого развития математики и ее непостижимой эффективности в физике должен быть отнесен к жизненному миру. Он «виден» из жизненного мира как возможность идеальной предметности, проецирующейся на специальные региональные идеализации физики. И далее, как возможность создания машин, хорошо согласованных с региональными идеализациями и использующих те предвидения, которые эти идеализации делают возможными[1]. Эти возможности принадлежат слою непосредственной очевидности.

Онтологический статус математических объектов[2], по нашему мнению, полностью определяется системой их причастности к жизненному миру, и тем самым разные роды объектов имеют различающиеся статусы. Арифметика и элементарная геометрия образуют слой идеальных предметов, наиболее тесно взаимодействующих с ядром жизненного мира. Именно такого рода сплетение искал Гуссерль в работе «Начало геометрии». Математические идеальные объекты более высокого уровня не менее ясны, чем геометрические, но конечно, гораздо более сложные. Они «непостижимо эффективны», вплетаясь в пропорционально далекую от ядра жизненного мира физическую, сплошь математизированную онтологию. В этом смысле аргумент Куайна—Патнема правильно указывает на онтологический паритет этих двух родов объектов, на равные «онтологические обязательства», которые мы имеем перед ними. В свою очередь математизированные объекты физики «непостижимо эффективно» возвращаются в жизненный мир в виде машин, в настоящее время составляющих значительную часть обыденного мира. Ошибкой будет только приписывание этим физико-математическим объектам фундаментального онтологического статуса, что и ведет (здесь я полностью согласен с Гуссерлем) к кризисным явлениям в науке.

7. Делая теперь попятный шаг и освобождаясь от редукции интерсубъективности, т.е. возвращаясь к математике в рамках традиции и ограниченных возможностей отдельных индивидов, мы получаем дополнительно еще одну «непостижимость» — возможность пере-

---

[1] Подчеркну, что этот феномен относится к сфере математического естествознания в узком смысле — к физике. О других областях, где математика используется в моделях внешних, я здесь не говорю.

[2] Это традиционное выражение я считаю крайне неудачным в силу коннотаций с обыденным словоупотреблением. В самом деле, является ли доказательство теоремы математическим объектом? Нет, пока оно не стало предметом изучения в метаматематическом слое.

дачи идеальных предметностей от человека к человеку. Разумеется, эта передача происходит с помощью языка, но столь же несомненно, что идеальная предметность не сводится к комбинациям языковых знаков. Эта непостижимая передача математических значений не является изолированной загадкой и разделяет непостижимость с передачей языковых значений вообще[1]. *Непостижимость возможности и эффективности математики, языка и деятельности принадлежит слою непосредственных очевидностей жизненного мира.*

Библиографический список

Вигнер Е. О непостижимой эффективности математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.

Гуссерль Э. Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология. СПб.: Владимир Даль, 2004.

Гуссерль Э. Начало геометрии. М.: Ad Marginem, 1996.

Деррида Ж. Введение // Гуссерль Э. Начало геометрии. М.: Ad Marginem, 1996.

Кант И. Метафизические начала естествознания // Кант И. Соч.: В 6 т. Т. 6. С. 53–168.

Кричевец А.Н. В какой математике возможны стили математического мышления // Стили в математике: социокультурная философия математики. СПб., 1999.

Сокулер З.А. Э. Гуссерль о геометрической традиции: к смене парадигм в теории познания // Философия науки. Вып. 5. М.: ИФ РАН, 1999 (http://iph.ras.ru/ps_5.htm).

Хабермас Ю. От картин мира к жизненному миру. М.: Идея-Пресс, 2011. С. 111.

Хлебалин А.В. Онтологические обязательства неустранимости математики // Вестник Томского гос. ун-та. Философи, социология, политология. 2009. № 4 (8). С. 60–68.

Шварц А.Ю. Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики // Психологические исследования: электронный научный журнал [Электронный ресурс]. 2011. № 3 (17).

Colivan M. Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics. http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/

[1] Объем статьи не позволяет развивать эту тему.

А.И. Липкин

МЕСТО МАТЕМАТИКИ В ФИЗИКЕ

Структура физического знания (у которой много общих черт со структурой математического знания), ярко выраженная в 10-томнике «Теоретической физики» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, имеет следующий вид. Физика (Ф) представляется как совокупность разделов физики ($РФ_j$), имеющих собственные основания ($ОРФ_j$)

$$Ф = \Sigma РФ_j,$$

в рамках которых задаются базовые понятия раздела, среди которых мы особо выделяем понятие «первичного идеального объекта» (ПИО), примерами которого является механическая частица в классической механике или электромагнитное поле в электродинамике. Среди других базовых идеальных сущностей (идеальные сущности — то, что задается путем определений (явных или неявных) и фигурирует в умозрении), примерами которых служат силы, массы и объекты — то, что «движется» в весьма общем смысле. Под последним имеется в виду то, что в физике (это ее специфика) все процессы («движения») представляются как переход физического объекта (системы) А из одного состояния S_A в другое: $S_A(1) \rightarrow S_A(2)$ (в большинстве случаев в качестве номера состояния выступает время t). Из $ПИО_j$ строятся теоретические модели физических объектов — «вторичные идеальные объекты» (ВИО), лежащие в основе соответствующих физических явлений (Я):

$$\{ОРФ_j\ (ПИО_j)\} \rightarrow ВИО \leftarrow Я.$$

Структура ВИО и место в ней математики определяются структурой оснований ($ОРФ_j$) и местом в ней математики, входящих в ВИО через ПИО.

Структура оснований ($ОРФ_j$) изображена на схеме 1[1].

[1] *Липкин А.И.* Структура современного физического знания // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 2011.№ 1. С. 46–62; *Липкин А.И.* Основания физики. Взгляд из теоретической физики. М.: УРСС, 2014.

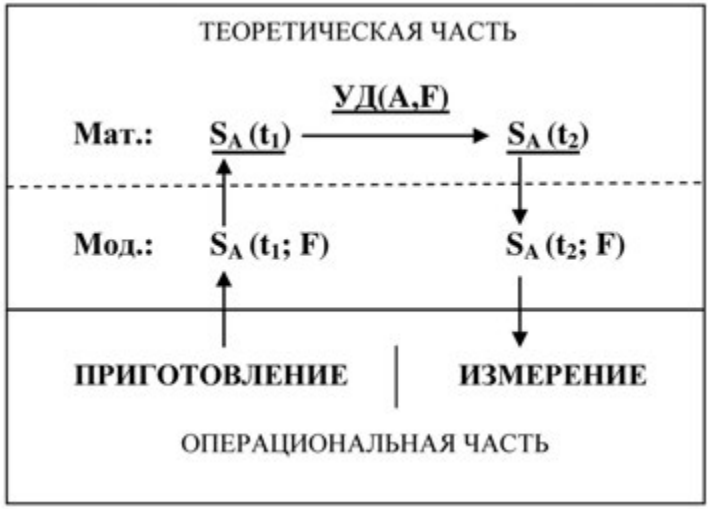


Схема 1. Структура теоретического описания физического процесса и оснований раздела физики (при А=ПИО)

В этой структуре выделены, во-первых, теоретическая (описание поведения ИО) и операциональная («материализация» ИО) части. Во-вторых, в теоретической части выделены *математический* и *модельный* слои. Модельная часть содержит два главных понятия: физической системы (объекта) А (ПИО или ВИО) и ее состояний ($S_A(t)$) в момент времени t. С их помощью осуществляется теоретическое описание *обобщенного движения (процесса) как перехода физической системы из одного состояния в другое*. Связь между состояниями задается с помощью математического слоя (в этом его смысл и функция), в котором *уравнение движения* (УД) — центральный элемент. Уравнение движения содержит в том или ином виде математические образы физической системы А и ее состояний S_A (подчеркивание обозначает принадлежность к математическому слою), а также внешнего воздействия $F(t)$[1]. Таким образом, время в динамике играет особую роль — оно нумерует состояния (в некоторых разделах физики, например в равновесной термодинамике, эту роль играют другие измеримые величины).

Набор возможных состояний является важнейшей характеристикой физической системы. Состояние — это понятие, описывающее

[1] Из уравнения движения можно получить и набор (множество) состояний (точнее, их математических образов), отвечающих данной физической системе.

изменение (движение) системы и дающее *полную возможную информацию о системе в данный момент времени, а посредством уравнения движения — и в другие моменты времени.* Это определяет понятие состояния физической системы, которое тесно связано с другими элементами структуры, изображенной на схеме 1.

Кроме указанных элементов теоретической части, физическая система ПИО и ее исходное состояние должны иметь *материальную эмпирическую реализацию*[1], *а измеримые величины (расстояние, скорость, масса и т.п.), которые входят в физическую модель системы и ее состояний, должны быть обеспечены в эмпирическом слое соответствующими эталонами и операциями сравнения* с эталоном. Это обеспечивают операции приготовления (системы в исходном состоянии) и измерения, составляющие «*операциональную*» часть, которая непосредственно связана с модельным слоем теоретической части (а через него опосредованно — с математическим слоем)[2].

Теперь можно перейти к обсуждению места математики в физике и связи между математикой и физикой. Для этого я проведу критический разбор популярного утверждения Е. Вигнера о «непостижимой эффективности» математики в физике.

Одна из формулировок вопроса-удивления об эффективности математики Вигнера выглядит так: «Закономерности в явлениях окружающего нас мира допускают формулировку с помощью математических понятий, обладающих сверхъестественной точностью... Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов»[3]. В качестве иллюстраций он приводит три примера: закон всемирного тяготения Ньютона, теорию основного состояния гелия, лэмбовский сдвиг, которые эмпирически подтверждены с очень высокой точностью. (Текст Вигнера написан в 1959 г., но весьма почитаем и сегодня.)

Мне представляется, что утверждения Е. Вигнера и сама постановка его вопросов существенно связана с эмпиристской и позитивистской эпистемологической позицией, где в «стандартной» структуре физического знания модельный слой отсутствует и в качестве центральной задачи рассматривается нахождение законов природы, выражаемых с помощью математических формул и получаемых из эмпирических данных (по-позитивистски интерпретированной бэко-

---

[1] В математике это место занимает доказательство существования математического объекта.

[2] Отметим, что место приготовления может занимать выбор среди того, что находится в готовом виде в окружающем мире, например звезды в астрофизике.

[3] *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 194, 197.

новской схеме: эмпирические факты => эмпирические закономерности => теоретические законы): «Математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений. Это свидетельствует о том, что математический язык... отвечает существу дела»[1].

Однако в схеме 1 математика не является ни языком, на котором что-то выражается, ни «существом дела». В качестве «языка» и онтологических единиц здесь выступают ПИО. Математические понятия (математика) являются элементами конструкции оснований раздела физики наряду с понятиями модельного слоя и техническими операциями приготовления и измерения. Ту или иную математику включают в основания раздела физики (подобно тому, как колесо включается в качестве элемента в конструкцию повозки). При этом математика не является языком для выражения чего-то существующего вне ее или отражением (или выражением) реальности (как у Платона), а служит инструментом (как у Декарта)[2]. Поэтому место вигнеровской «эффективности математики» занимает «эффективность ПИО»[3]. Если следовать неокантианской линии, то $ПИО_j$ выступают здесь в качестве априорных форм, задающих физическую онтологию, и в результате мы имеем не «два... чуда — существование законов природы и человеческого разума, способного раскрыть их», а их взаимосвязь.

Что касается «эффективности ПИО», то здесь надо различать две вещи. Точность реализации ПИО в эмпирическом материале в рамках развиваемого мной конструктивистского взгляда на ПИО ничем не ограничена. Что касается точности описания явлений с помощью ВИО, то здесь она не ограничена с точки зрения построения ВИО: его можно неограниченно усложнять, внося новые $ПИО_j$ и взаимодействия (аналог разложения в ряд, но по $ПИО_j$). Правда, перечисленные Вигнером примеры отличаются очень простыми ВИО. Однако они обладают одной важной особенностью. Случай планетарной системы и родственный ему случай электрона в атоме являются особыми случаями в физике, ибо их модель ВИО должна удовлетворять условию чрезвычайной устойчивости. Планеты не улетают от Солнца в течение миллиардов оборотов. Аналогична ситуация с электро-

[1] Там же. С. 190.

[2] *Гайденко П.П.* История новоевропейской философии в ее связи с наукой. М.: Университетская книга, 2000. С. 141–142, 144.

[3] Последняя опирается на наличие множества однотипных простых объектов (камней, планет и т.п.) и их элементаристских комбинаций. Но если бы дело обстояло иначе, то не было бы физики, которая на этом основана.

ном в атоме. Это накладывает требование чрезвычайной точности на модель. Модель, где сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, в сочетании со вторым законом Ньютона, обеспечивает эту устойчивость, а следовательно, и точность описания. Для физических явлений другого типа (например, в механике сплошных сред) такой точности при простых ВИО не наблюдается.

Рассмотрим еще несколько примеров «удивлений»: утверждения о «подчинении явлений законам математики» (Ньютон) и о «предустановленной гармонии» между математикой и физикой (Г. Минковский, Ф. Клейн, Д. Гильберт, А. Эйнштейн и др.), а также об «опережающей роли математики» при создании теории относительности и квантовой механики[1].

Утверждение Ньютона вырастает, с одной стороны, из того, что до появления электромагнитного поля (что по типу значимости можно сравнить с появлением неэвклидовых геометрий для математики) для физиков объект, который двигался (тело, жидкость) был очевиден, и считалось, что задача состоит в нахождении «законов движения». С другой стороны, Для Галилея и Ньютона была очень значима идеологема «мир — это книга, написанная Богом на языке математики». Эти две стороны замечательно поддерживают друг друга и хорошо согласуются с идеей «предустановленной гармонии».

Но начиная с электродинамики Фарадея — Максвелла, с перехода к «неклассической» физике[2], ситуация меняется: во-первых, в центре оказывается объект (ПИО), а закон его движения (УД) выступает как одна из его характеристик; во-вторых, имеет место усложнение математики, теперь ищут не просто уравнение движения, а математическое представление, т.е. математические образы ПИО, которые становятся гораздо сложнее и разнообразнее. В результате увеличивается доля работы в математическом слое и становится явным выбор и поиск типов математики при создании новых «неклассических» разделов физики. Это приводит к впечатлению об «опережающей роли математики».

Но рассмотрим, так ли это. В случае специальной теории относительности противоречие между старой механикой Ньютона и новой электродинамикой Фарадея — Максвелла, состоящее в невыполнении принципа относительности Галилея, было сформулировано на математическом языке как необходимость использования преобразо-

[1] *Визгин Вл.П.* Математизация физики // Философия науки (ред. А.И. Липкин). М.: ЭКСМО, 2007. Гл. 11.

[2] Этот сдвиг вполне в духе ментального сдвига в европейской культуре после революций 1848 г., в философии это, по сути, переход от Нового к Новейшему времени.

ваний Лоренца, а не Галилея при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Решение Эйнштейна состояло в замене эталона твердого метра на «твердую» скорость света, т.е. в наделении второго свойствами первого. Безусловно, что роль математики здесь сильно повышается, но можно ли говорить об опережении? Все-таки схема выглядит так: в начале был физический принцип относительности, затем его перевели в математическую форму, т.е. перешли из физического слоя в математический, а в конце опять вернулись в физический слой.

Нечто подобное мы имеем и в случае квантовой механики. В старой квантовой теории мы в начале имеем несколько физических парадоксов, например «ультрафиолетовая катастрофа» теплового излучения «черного тела». Это физический эффект, которому отвечала формулировка в математическом слое в виде неправильного теоретического выражения для спектра этого излучения. Планк находит формулу, которая дает правильный результат. То же мы имеем и с фотоэффектом, и со спектрами атома водорода. В общем-то того же типа рисунок мы имеем уже при создании электродинамики: Фарадей формулирует модель, а Максвелл относительно долго и сложно создает для нее математическое представление (слой).

Если перейти к рассмотрению создания «новой» квантовой теории, то на входе мы имеем сформулированный де Бройлем корпускулярно-волновой дуализм и модель атома Бора, которые я бы отнес к слою физической модели. Затем идет поиск математического слоя, в результате чего возникают варианты Гейзенберга и Шрёдингера. Параллельно этому формируются вероятностная интерпретация волновой функции Шрёдингера и другие элементы оснований квантовой механики. К этому следует добавить, что в постулаты квантовой механики вносится постулат квантования, который действует по той же схеме (аналогичный прием используется и в ОТО, и в статистической физике): берется «затравочная» классическая модель физической системы (объекта), строится ее классический математический образ (гамильтониан или лагранжиан), который по определенным правилам превращается в оператор, становящийся математическим образом квантовой системы.

Думаю, что в рассмотренных случаях речь идет не об «опережении», а об «увеличении» и «активации» роли математики и усложнении математического аппарата. Но если исходить *из позитивистской «стандартной» модели*, в которой не выделяется модельный слой, то там *видна только математика*.

Вывод из проведенного анализа состоит в том, что постановка и попытки ответов на вопросы об «эффективности» математики, ее

первенстве и т.п. отнюдь не очевидны, как это часто преподносят, а сильно зависят от эпистемологической позиции. Утверждения о «непостижимой эффективности» математики или принципа наименьшего действия[1] связано с тем, что авторы придают математике онтологический статус (в их структуре физического знания, как и у логических позитивистов, по сути нет модельного слоя), что, с моей точки зрения, неверно: *онтологию несет на себе ПИО, его модель, а математика при этом лишь один из элементов, одно из средств*, входящих в основания раздела физики, задающих ПИО.

Представляется, что математика развивается по своей логике, создавая множество разделов математики. Физика развивается по своей логике, где при создании нового раздела физики из математики заимствуются средства из того или иного раздела математики, которые становятся элементом создаваемой конструкции. Взаимодействие между физикой и математикой состоит во взаимном стимулировании. Так, с одной стороны, развитие физики часто стимулирует развитие, а иногда и создание того или иного раздела математики, с другой стороны, развитие физики зависит от того спектра математик, которые уже есть. *Математика в физике — элемент, средство*, хотя и активное (наиболее яркий пример — понятие волны в среде, которое, думаю, тесно связано с математическим разложением Фурье).

Библиографический список

Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.

Визгин Вл.П. Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Философия физики. Актуальные проблемы. Материалы научной конференции 17–18 июня 2010 г. М.: Наука, 2010.

Визгин Вл.П. Математизация физики // Философия науки (ред. А.И. Липкин). М.: ЭКСМО, 2007. Гл. 11.

Гайденко П.П. История новоевропейской философии в ее связи с наукой. М.: Университетская книга, 2000.

Липкин А.И. Структура современного физического знания // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 2011. № 1. С. 46–62.

Липкин А.И. Основания физики. Взгляд из теоретической физики. М.: УРСС, 2014.

[1] *Вигнер Е.* Этюды...; *Визгин Вл.П.* Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Философия физики. Актуальные проблемы. Материалы научной конференции 17–18 июня 2010 г. М.: Наука, 2010.

Л.И. Маневич

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ: РЕАЛИЗОВАННЫЕ И УПУЩЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Развитие физики в XX в. отчетливо показало, что достигнутый ею прогресс не может быть объяснен в рамках чисто позитивистской концепции становления нового знания. Достаточно вспомнить генезис общей теории относительности, квантовой теории света и квантовой механики, теории скалярного поля Хиггса.

В первом случае, помимо эмпирического факта равенства тяжелой и инертной масс, позволившего А. Эйнштейну рассматривать и свободно падающую в однородном поле тяготения систему отсчета как инерциальную, решающую роль сыграло *метанаучное требование инвариантности уравнений движения при произвольном преобразовании системы отсчета*. Именно это требование определило само название теории, которая при позитивистской интерпретации, по своему чисто физическому (в традиционном понимании) содержанию, называлась бы пост-ньютоновской теорией тяготения. Эйнштейновская формулировка квантовой теории света также включала метанаучную составляющую — концепцию *дуализма волна-частица*. В течение 15 лет логическая противоречивость не позволяла физическому сообществу принять эту концепцию.

При выводе фундаментального квантово-механического уравнения руководящей идеей для Шредингера была предполагаемая аналогия между описанием атомных систем и математической задачей на собственные значения, при этом физический смысл волновой функции первоначально не был прояснен.

Хиггсова идея скалярного поля, порождающего массу элементарных частиц, оставалась метанаучной в течение полувека, вплоть до ее недавней экспериментальной верификации.

Внимательное рассмотрение обнаруживает в этих хорошо известных фактах общую причину достигнутого успеха — не суженное приверженностью к позитивизму философское умонастроение ученого, которое делает возможным эффективное взаимопроникновение фи-

зических и математических идей, пусть и при временном отсутствии прямых экспериментальных свидетельств верности избранного пути. Последнее обстоятельство, вообще говоря, порождает трудный вопрос, который В. Паули: сформулировал следующим образом: «Каким <в этом случае> должен быть мост, устанавливающий вообще какую-нибудь связь между чувственным восприятием, с одной стороны, и логическими выводами, с другой?»[1] Ведь философское умонастроение проявляется «в идеях и понятиях, как правило, далеко выходящих за рамки чистого опыта, но необходимых для построения системы законов природы, т.е. естественно-научной теории». Отмечая, что «чистая логика принципиально не в состоянии установить эту связь», он предлагает ввести «постулат о порядке во Вселенной, не зависящем от нашего произвола и отличном от мира явлений; тогда связь между чувственным восприятием и идеей остается следствием того, что душа познающего и познанное им в ощущениях подчиняются некоему порядку, который считается объективным. Любое неполное познание этого порядка, господствующего в природе, приводит к формулировке утверждений, с одной стороны, соответствующих миру явлений, а с другой — выходящих за его пределы, поскольку в них используются общие логические понятия, идеализирующие этот мир». Здесь можно уточнить, что идеализация означает в первую очередь не абстрагирование, а «пополнение»[2], т.е. наделение логического понятия заведомо не допускающими экспериментальную реализацию свойствами (простейший пример — наличие иррациональных точек на прямой линии).

Анализируя процесс формирования первой естественно-научной теории — законов движения планет Солнечной системы, В. Паули сопоставляет упомянутый выше объективный порядок с архетипическими представлениями И. Кеплера, первоначально проявившимися в идее о связи между их орбитами и правильными многогранниками Платона. Будучи отправной точкой и психологической мотивацией его поиска, эти представления, которые приводили к определенному математическому описанию структуры Солнечной системы, постепенно трансформировались под давлением «физических» данных о свойствах орбит, не оставив, в конечном счете, ничего от первоначального замысла, кроме самой идеи объективно существующего порядка.

---

[1] *Паули В.* Влияние архетипических представлений на формирование естественнонаучных теорий у Кеплера // Физические очерки. Сборник статей. М., 1975.

[2] *Неванлинна Р.* Пространство, время и относительность. М., 1966.

Э. Шрёдингер в своей книге «Мой взгляд на мир»[1], уже обобщая трехсотлетний опыт науки Нового времени, приходит к выводу, который можно кратко сформулировать следующим образом: *завершенная формулировка научной теории — логична, но процесс ее формирования — метафизичен*. Термин «метафизика» имеет здесь фактически тот же смысл, что и «архетипические представления» у В. Паули при обсуждении генезиса законов Кеплера. Анализ же конкретного «наполнения» этого термина в процессе развития науки Нового времени позволяет связать его с не поддающимся логическому истолкованию взаимопроникновением физических и математических идей, движущей силой которого является философская мотивация ученого.

В статье речь пойдет о взаимодействии математики и физики в двух аспектах, обозначенных в названии темы. Рассматриваются ситуации, когда такое взаимодействие оказывалось принципиально важным, но его реализация или, напротив, игнорирование определялись философским умонастроением отдельных исследователей либо научного сообщества в целом. В результате достигался существенный прогресс в понимании сложных проблем, либо же из-за упущенной возможности взаимодействия математики и физики такой прогресс откладывался на годы или десятилетия.

Мы не затрагиваем здесь другие важные аспекты взаимодействия математики и физики. Один из них уже много лет широко обсуждается после появления хорошо известной статьи Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках». Второй аспект формулируется как «Философия приложения математики», в которой речь идет о нетривиальных аспектах «проникновения» математики в физику.

1. Интерпретации комплексных чисел и их обобщение; конформные отображения и гидродинамика

Начнем с простого, но очень наглядного примера. Хорошо известно, что геометрическая интерпретация комплексных чисел на плоскости стала разрешением старого «парадокса мнимых чисел». Оказалось, однако, что, помимо представления точками комплексной плоскости, обобщающего геометрическую интерпретацию вещественных чисел как точек на бесконечной прямой, комплексные числа интерпретируются также как векторы на плоскости. При этом операциям над числами соответствуют операции над векторами, которые можно рассматривать как операторы, представимые матрицами

[1] *Шрёдингер Э.* Мой взгляд на мир. М., 2009.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Комплексные числа, векторы на плоскости и матрицы приведенного вида — изоморфные объекты, но имеющие различный физический смысл, если речь идет о приложениях математики.

Целью У. Гамильтона было обобщение числовой ипостаси на трехмерный случай, что привело к принципиальным трудностям из-за невозможности сформулировать правила операций, аналогичные правилам операций с комплексными и вещественными числами (то, что «прошло» при обобщении «одномерных» чисел на двумерные, уже не проходит при любом дальнейшем обобщении — нельзя добиться коммутативности). Но, если бы речь шла об обобщении второй ипостаси — векторной, которая особенно важна для физики и в то время еще не была прояснена, ситуация выглядела бы совершенно иначе. Вектор на плоскости — геометрический или физический (в теории двумерных полей) объект. Нетривиальные операции над ним — повороты в плоскости — коммутативны, благодаря чему они изоморфны операциям с координатами точек (комплексных чисел). Обобщение на трехмерный случай — вектор в пространстве. Однако нетривиальные операции, повороты в пространстве, вообще говоря, некоммутативны. Тогда и действия над числами, изоморфные поворотам, должны быть некоммутативными, и они легко восстанавливаются по известным правилам преобразования трехмерных векторов. При этом из геометрических (физических) соображений выясняется, что обобщенные числа должны быть четырехмерными. Таким мог бы быть естественный переход от комплексных чисел к кватернионам. Отождествление физических и геометрических соображений не случайно: как справедливо отмечал Ю. Манин[1], геометрическая интерпретация физических фактов — весьма важный этап на пути к их адекватному математическому описанию, и идущая от теории относительности тенденция геометризации физики находится в магистральном русле ее современного развития (показательно, что сам Эйнштейн первоначально не придавал серьезного значения геометризации специальной теории относительности, осуществленной Г. Минковским, считая ее лишь «математическим украшением» самодостаточной физической теории, но разрабатывая общую теорию относительности, он понял, что без геометризации добиться желаемого успеха невозможно).

Осознание значения третьей ипостаси задержалось на полстолетия. Известно, что в аксиоматическом построении математики, предпринятом Н. Бурбаки, разделяются объекты и операции над ними.

[1] *Манин Ю.И.* Математика и физика. М., 1979.

Между тем, уже на комплексной плоскости обнаруживается изоморфизм между объектами и операциями. Существование подобного изоморфизма — трещина в исходном замысле Бурбаки, выявленная лишь при появлении теории категорий.

Выводы: геометрическая интерпретация комплексных чисел не была всесторонне осмыслена. Констатация важности их векторного представления, идущая от физики, выявила бы исключительное место, занимаемое двумерными числами — последним коммутативным обобщением вещественных чисел. Констатация изоморфизма объектов на комплексной плоскости и операций над ними предотвратила бы попытку дуалистического построения математики. Философское же умонастроение предполагает, по-возможности, исчерпывающий всесторонний анализ, обеспечивающий прояснение смыслов.

Позитивный пример в этой области, относящийся уже к функциям комплексной переменной, — линеаризация Эйлеровых уравнений гидродинамики вскоре после разработки О. Коши и Б. Риманом теории функций комплексного переменного с ее представлениями о конформных отображениях. Поскольку решение задач плоской линейной гидродинамики в стационарном случае эквивалентно нахождению аналитической функции комплексного переменного, применение конформных отображений оказывается весьма эффективным. Например, каким бы сложным ни был профиль крыла самолета, можно конформно отобразить его на круг, т.е. такую простую область, для которой решение задачи обтекания уже не представляет труда. Эта удивительная универсальность способна поразить воображение. В родственной плоской теории упругости до 1908 г. рассматривались только бесконечные и круговые области. Качественно новый этап наступил здесь лишь в XX в., когда М. Колосовым и Н. Мусхелишвили плоская задача теории упругости была сформулирована в терминах двух (но не одной, как в гидродинамике!) аналитических функций. При этом допускаются конформные отображения, реализуемые уже не любыми, а только рациональными аналитическими функциями. Важные физические приложения конформных отображений дали мощный толчок разработке математических методов их исследования. Взаимопроникновение физики и математики в области механики оказалось столь полным, что специалистов-механиков сегодня обучают на механико-математических, а не на физических факультетах. У истоков классической механики такие имена, как Ньютон, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Пуассон, Коши, Риман и Стокс, которые в равной степени могут быть отнесены и к математикам, и к физикам, причем глубина полученных ими научных результатов определялась в большой степени необычайной широтой интересов, свойственной философски настроенным умам.

2. Локализованные волны (солитоны) и пограничные слои в нелинейной физике

Второй пример упущенных возможностей — отрицание крупнейшими математиками XIX в. существования уединенных нелинейных волн после их описания английским инженером С. Расселом. Причина отрицания — абсолютизация линейной теории вопреки экспериментальным фактам. Философский анализ обратил бы внимание на это несоответствие, что могло привести к адекватному пониманию роли уединенных волн задолго до 1967 г., когда был открыт метод обратной задачи рассеяния и тем самым была вызвана к жизни теория солитонов, оказавшаяся фактически общей теорией классического нелинейного поля. Отметим, что математический аппарат, необходимый для ее создания, в значительной мере был разработан в XIX в. Теория солитонов, открыв совершенно новую область математических исследований, стимулировала наряду с другими новыми областями нелинейной динамики отход математики от доминировавшего в первой половине XX в. бурбакистского направления. Этот поворот опять-таки связан именами философски настроенных математиков и физиков — В. Арнольда, М. Крускала, В. Захарова, С. Новикова, Л. Фаддеева.

Если истоки теории солитонов относятся к нелинейной динамике идеальной жидкости, то происхождение теории пограничного слоя, которая является столь же фундаментальной, обнаруживается в нелинейной теории вязкой жидкости. В начале XX в. немецкий механик Л. Прандтль показал, что вязкость можно учитывать лишь в тонком слое, непосредственно примыкающем к обтекаемому телу. Вне этой области жидкость (или газ) можно рассматривать в рамках теории идеальных жидкостей. Философский анализ этого открытия привел бы математиков к разработке принципиально новой области в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и асимптотического анализа — теории сингулярных возмущений. Этого не случилось, и прошло примерно полвека, пока уже по «чисто математическим» причинам такая теория была создана (начало ей было положено теоремой Тихонова). Гораздо больше «повезло» теории сингулярно возмущенных уравнений с частными производными. Аналогом открытия Л. Прандтля явилось здесь построение асимптотической теории тонких оболочек А.Л. Гольденвейзером. Ознакомившись с этим результатом, математики М.И. Вишик и Л.А. Люстерник, ученики философски настроенного Н.Н. Лузина, вскоре построили уже асимптотическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными (элементы этой теории содержались и в более ранних работах К. Фридрихса).

В то время как в гидродинамике пограничный слой возникает вблизи границы, разделяющей жидкость и твердое тело, в тонкостенных упругих оболочках он может быть и внутренним. Нелинейная теория тонких оболочек чрезвычайно сложна с математической точки зрения. Однако практическая важность нелинейных задач устойчивости элементов авиационных и ракетных конструкций определила широкий фронт исследований в этой области в середине XX в. Как теперь ясно, традиционных математических средств, тогда существовавших, было недостаточно для убедительного решения этих задач. Однако известный геометр А.В. Погорелов, обладавший широким кругозором, подошел к проблеме с совсем другой стороны, рассматривая ее с точки зрения теории изометрических преобразований поверхностей. В контексте данной статьи важно отметить, что эта ключевая идея, использованная математиком, базируется на физических предпосылках, учитывающих специфику тонкой оболочки, которые не принимались во внимание предшествующими исследователями-механиками. При этом появление внутренних пограничных слоев как раз и отражает эту специфику. В результате была построена геометрическая теория оболочек с ясными предпосылками как в ее основе, так и в процессе решения конкретных задач.

3. Альтернативные теории в механике и электродинамике

Хотя гидродинамика Эйлера представляет собой континуальную теорию, при построении теории упругости твердых тел с самого начала использовались представления о молекулах, взаимодействующих посредством центральных сил, несмотря на отсутствие экспериментальных данных о строении вещества. В континуальном пределе это приводило к одноконстантной теории упругости. Когда Дж. Грин отбросил «молекулярные леса» и, введя впервые потенциальную энергию деформации, вывел двухконстантную континуальную теорию упругости, используя условие изотропии (симметрия!), она рассматривалась как математическое упражнение в противовес одноконстантной «физической» теории Навье. Это стало поводом для дискуссии, продолжавшейся несколько десятилетий, которая отразила огромную роль метанаучных предрассудков.

Следующий хорошо известный пример относится к электродинамике. К последней четверти XIX в. считалось, что основные ее уравнения установлены и практически все наблюдаемые в эксперименте закономерности объяснены электродинамикой В. Вебера. Как и в небесной механике, предполагалось дальнодействующее взаимодействие зарядов, подвижность которых реализуется в металлических

нитях — проводах. Попытка Д. Максвелла трансформировать наглядные «полевые» представления М. Фарадея в уравнения электромагнитного поля не вызывала какого-либо интереса, даже когда она завершилась блестящим успехом, фактически опровергнув представления о дальнодействии в электродинамике. Более того, выявление факта, что скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света, казалось бы, должно было направить внимание философски настроенных исследователей на глубокий анализ ситуации. Но этого не произошло. Примерно в течение двадцати лет, вплоть до открытия Г. Герцем радиоволн, уравнения Максвелла, как это ни удивительно, рассматривались физическим сообществом как чисто математическая теория. В это время (и даже в студенческие годы А. Эйнштейна) теория Вебера господствовала и в исследованиях, и в преподавании физики. Подобная ситуация свидетельствует о том, насколько глубоко владели умами ученых позитивистские установки. Ведь во время становления теоретической физики, которое сопровождалось длительным противостоянием ньютонианцев и картезианцев, одним из главных аргументов последних была физическая несостоятельность гипотезы о дальнодействии гравитационных сил. Эта же гипотеза, которая стала рассматриваться уже как универсальная после грандиозных успехов механики Ньютона, лежала и в основе электродинамики Вебера. Поэтому даже появление сформулированной математически (в отличие от смутных соображений картезианцев) полевой теории без дальнодействия не могло поколебать удовлетворяющие позитивистским критериям установки физического сообщества.

4. Динамика кристаллов, теория колебаний и понятие о математической модели

Пожалуй, ни один факт из истории науки не говорит столь много о математическом багаже даже выдающихся физиков начала XX в., как развитие динамики кристаллов. Эта область физики твердого тела была принципиально важна для построения квантовой теории теплоемкости. У ее истоков стояли А. Эйнштейн и П. Дебай. И они использовали для описания динамики кристалла такие простейшие модели, как система независимых атомов (Эйнштейн) и бесконечный упругий континуум с ограничением по длинам волн (Дебай). Примерно через десять лет М. Борн и Т. Карман построили точную линейную дискретную модель кристалла, которая в силу симметрии оказалась разрешимой. Однако, когда еще через десять лет Л.И. Мандельштаму в связи с разработкой теории рассеяния света на тепловых флуктуациях кристалла потребовалась динамическая

модель решетки, он первоначально использовал не точную дискретную модель Борна—Кармана, а модель Дебая, не позволившую учесть наиболее важные для анализа взаимодействия с электромагнитными волнами оптические колебания решетки. Причина этого — в отсутствии представления о роли симметрии, позволяющей даже в случае бесконечной решетки получить простое решение бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений. Позднее Л.И. Мандельштам в своих знаменитых лекциях по теории колебаний особое внимание уделял этому удивительному (если не учитывать соображения симметрии) факту.

Тот же Мандельштам, которого глубоко интересовала философия науки, был первым, кто назвал «Теорией колебаний» новый раздел физики, изучающий колебательно-волновые явления независимо от их физической природы. До него Дж. Релей, понимая идейную общность колебательных явлений, все же дал своей книге название «Теория звука», поскольку даже в конце XIX в. и в начале XX в. не допускалась мысль, что можно изучать колебания вообще, безотносительно к физической природе колеблющейся среды. Не удивительно, что Мандельштам первым отчетливо сформулировал и понятие математической модели физического процесса. Только после этого общность математических моделей, возникающих в различных областях физики, стали воспринимать как веское основание для выделения таких областей знания, как нелинейная динамика, теория устойчивости, синергетика, теория самоорганизации и др., в которых результаты конкретных наук являются примерами, позволяющими оценить эффективность взаимопроникновения физических и математических идей.

5. Понятие твердого тела

Понятие упругого тела первоначально сформировалось в начале XIX в. на основе дискретных молекулярных моделей с последующим переходом к упругому континууму, несмотря на смутное в то время представление об атомах и молекулах. Впоследствии этот подход был заменен чисто континуальным описанием, хорошо согласующимся с нашими интуитивными макроскопическими представлениями о твердом теле, которое, однако, оказалось вполне применимым лишь для кристаллов и поликристаллических тел. На первый взгляд, поведение стекла очень похоже на поведение поликристалла, за исключением характера перехода в жидкое состояние (плавление кристаллов и поликристаллов с резким изменением плотности и симметрии качественно отличается от перехода стекла в жидкость без подобных трансформаций). Но, как известно, стекла

обладают рядом низкотемпературных аномалий[1] (например, линейной температурной зависимостью теплоемкости при низких температурах), которые отсутствуют в кристаллах или поликристаллах. Что касается резины, наиболее выраженной и очевидной ее особенностью является очень низкий модуль сдвига по сравнению с кристаллами и стеклами. Понятно, что переход на микроскопический уровень необходим, если мы хотим объяснить и понять особенности поведения различных типов твердых тел.

В случае кристалла континуальную теорию упругости можно рассматривать как длинноволновой и низкочастотный пределы дискретной теории атомной решетки. Неудивительно, что такая возможность, отраженная в ясной и исчерпывающей форме в работе Борна и Хуанга[2], была фактически реализована вскоре после того, как была надежно установлена атомная природа вещества. Однако этот подход не может быть распространен на другие типы твердых тел (например, резины или гели), которые не являются жесткими и на микроскопическом (молекулярном) уровне ведут себя как жидкости. Поэтому понимание природы упругости резины было достигнуто совершенно другим путем, с использованием методов статистической физики макромолекул[3].

Что касается стекол, то на первый взгляд кажется, что основные структурные отличия от кристалла обусловлены только случайностью их микроскопической структуры. Но с этой точки зрения невозможно понять причины низкотемпературных аномалий, упомянутых выше. С другой стороны, общепринятое понимание стекла как жидкости с очень высокой вязкостью противоречит интуитивно понятному отнесению стекол, как и кристаллов, к твердым телам.

Возникает трудная проблема: как примирить все эти противоречивые факты и идеи?

Представляется, что наиболее общий и глубокий анализ этой проблемы, который принимает во внимание предыдущие достижения, был предпринят в работе С. Александера[4]. Прежде всего, объединение кристаллов и стекол в качестве твердых тел обосновывается принципиальной ролью в жидком состоянии группы перестановок (являющихся реальными «активными» симметриями жидкости) — при отверждении это уже не так. Таким образом, в твердом теле реализуется уникальное состояние, соответствующее одной специаль-

---

[1] *Anderson P.W., Halperin B.I., Varma C.M.* Anomalous low-temperature thermal properties of glasses and spin glasses // Philosophical Magazine. 1972. Vol. 25. P. 1.

[2] *Born M., Huang K.* Dynamical Theory of Crystal Lattices. Clarendon Press, 1954.

[3] *Flory P.J.* Principles of polymer chemistry. N.Y.: Cornell University Press, 1953.

[4] *Alexander S.* Amorphous solids: their structure, lattice dynamics and elasticity // Physical Reports. 1998. Vol. 296. P. 65–236.

ной перестановке составляющих его атомов в узлах решетки — из N! возможных. Естественно, это означает, что процессы, в которых перестановки частиц проявляются в твердом теле (например, диффузия атомов) здесь не принимаются во внимание.

Если речь идет о твердом кристаллическом веществе, нет никаких проблем при разработке решеточной теории упругости с дальнейшим переходом к соответствующему континуальному пределу в случае длинноволновых низкочастотных колебаний. Такая процедура является прямым обобщением аналогичной процедуры для одномерной колебательной цепи.

В случае неупорядоченного твердого тела, как, например, резина, ситуация совершенно иная. В отличие от кристаллических твердых тел здесь невозможно ввести жесткую микроскопическую систему отсчета на атомном уровне, поскольку резина является на этом уровне жидкостью. Оправдание нашего интуитивного ее восприятия как твердого тела обеспечивается существованием сетки, приводящей к проявлению не только объемной, но и сдвиговой жесткости. Это хорошо видно в общей теории упругости резины, но такая теория в ее непрерывном пределе сильно отличается от классической теории упругости. Однако теорию упругости полимерных сеток можно переформулировать в рамках классической теории упругости, если учесть, что начальное (не нагруженное) состояние в этом случае является напряженным на молекулярном уровне. Начальные напряжения, которые, как правило, достаточно малы в кристаллах и поликристаллах, должны быть приняты во внимание при анализе таких сред, как полимерные сетки. Именно начальные напряжения (отрицательное давление) обеспечивают механизм формирования сдвиговой жесткости, который сильно отличается от обычного механизма, обусловленного энергетическим взаимодействием между атомами. Отрицательное давление, обеспечивающее сдвиговую жесткость, есть только «сеточная» часть полного давления. Последнее также включает «жидкую» часть, так что их сумма равна нулю.

Утверждение о принципиальной роли начальных напряжений является универсальным для всех неупорядоченных твердых тел, хотя проявления их влияния оказываются различными. Если мы имеем дело, например, со стеклами, которые интуитивно воспринимаются как твердые тела, влияние внутренних напряжений может быть прослежено в процессе отверждения. Этот довольно сложный процесс релаксации в охлаждаемой жидкости приводит к образованию «композитной» среды, состоящей из сжатых (более плотных, «жестких») областей и растянутых (менее плотных, «мягких») областей. С энергетической точки зрения процесс релаксации может рассматриваться как «блуждание» между седлами по поверхности постоянной энергии

в пространстве состояний, направленный к локальному минимуму. Наличие «мягких» доменов позволяет описать универсальные низкотемпературные аномалии физических свойств стекол.

Как ни удивительно, приведенная концепция твердого тела, впервые позволившая объяснить разнородные свойства различных его состояний, не вызвала ожидаемого ее автором интереса, несмотря на наличие детального изложения в обзорной статье. Причина, видимо, в ее обобщающем характере, что не согласуется с потребностями доминирующих сегодня в науке «узких специалистов».

6. Нестационарные процессы и гиперболические числа

Последний пример относится к описанию широко известного физического явления — биений (в школьном курсе физики оно наглядно демонстрируется на примере двух слабо связанных камертонов). Этот процесс характеризуется полным энергообменом между двумя слабо связанными механическими, акустическими, электрическими или оптическими осцилляторами. Попытка непосредственного его обобщения на системы, состоящие из большего числа осцилляторов, наталкивается на принципиальные трудности.

В простейшем случае, когда наблюдаются биения, осцилляторы являются линейными. Тогда к их описанию применима линейная теория самосопряженных операторов. Из нее вытекает существование двух вещественных собственных значений и соответствующих им собственных векторов (нормальных мод) в двумерном линейном пространстве (2 — число осцилляторов). Используя линейные комбинации нормальных мод, можно удовлетворить произвольным начальным условиям, в том числе и тем, которые приводят к биениям.

Представления об инвариантных многообразиях позволяют обобщить концепцию нормальной моды на нелинейные системы, не используя понятия линейного пространства, собственных чисел и векторов. Введение нормальных мод физически оправдано, поскольку сами осцилляторы, будучи связанными, перестают быть *независимыми* элементами системы (в системе двух связанных идентичных осцилляторов нормальные моды — это синфазные или антифазные движения частиц с равными амплитудами).

Однако при *слабой* связи частоты линейных нормальных мод близки, и уже при наличии малой нелинейности между ними происходит интенсивное (резонансное) взаимодействие. Тогда «коллективные осцилляторы» перестают быть независимыми (или почти независимыми) элементами системы, а соответствующие им нормальные моды — независимыми движениями (за исключением слу-

чая, когда только одна из нормальных мод возбуждена, либо вторая мода возбуждена относительно слабо). Слабая связь между осцилляторами проявляется в существовании относительно медленных (по сравнению с собственными колебаниями осцилляторов) временных модуляций, соответствующих характерному для биений интенсивному межчастичному энергообмену. Если в рамках *линейной* теории не различать случаи сильной и слабой связи, то всегда, в том числе и в случае биений, можно получить корректное решение, комбинируя нормальные моды. Но этот подход не допускает нелинейного обобщения из-за отсутствия принципа суперпозиции, а формальные математические возможности уводят от адекватного описания, и поэтому важный понятийный ряд вместе с соответствующим ему математическим аппаратом оказался «пропущенным» в развитии динамики. Это принципиальный вопрос: ограничиваться ли уже имеющейся математической процедурой или искать выделенную схему, которая непосредственно согласовывалась бы с физической интуицией. Р. Фейнман отмечал, что при наличии различных схем (языков) решения одной и той же задачи, только одна из них обычно допускает обобщение в желаемом направлении. Но в случае биений такую выделенную схему никто не искал; считалось, что язык мод для систем связанных частиц универсален — ведь резонансы в линейном случае не мешают найти решение. Без пересмотра же математической трактовки линейных биений нет оснований отказываться от языка мод.

В действительности, уже в линейном случае, помимо взаимодействия мод (которого здесь нет), надо учитывать второй фактор, важный для физика, но не для специалиста по линейным дифференциальным уравнениям, — когерентность. Именно когерентность, проявляющаяся в области резонанса, делает здесь выделенным язык частиц уже в линейном приближении. В самом общем виде когерентность означает согласованность протекания во времени нескольких колебательных или волновых процессов. Если речь идет о согласованности во времени колебаний отдельных частиц, то она реализуется в каждой нормальной моде, что и позволяет рассматривать ее как проявление подвижности «коллективного осциллятора», включающего все частицы исследуемой системы. В случае биений необходимо уже учитывать согласованность самих резонирующих нормальных мод, т.е. резонирующих «коллективных осцилляторов». Такая согласованность приводит в определенный момент времени к *«конструктивной»* (усиливающей) *интерференции* на одной частице и *«деструктивной»* (ослабляющей) *интерференции* — на другой. В процессе медленного энергообмена усиление возбуждения первого осциллятора периодически сменяется его ослаблением, а второй осциллятор претерпевает обратную эволюцию.

Адекватный подход, опирающийся на физическую интуицию[1], открывает путь не только к описанию *нелинейных* биений в системе двух осцилляторов, но и к обобщению концепции биений на системы, состоящие из многих осцилляторов и даже осцилляторных цепей. Но роль, которую при традиционных биениях играют собственно осцилляторы, переходит теперь к обобщенным, включающим определенное число частиц *эффективным осцилляторам*, между которыми и происходит энергообмен уже и в линейном приближении. Они представляют собой альтернативу *коллективным осцилляторам*, которые в линейном приближении вообще не обмениваются энергией. Сами же биения описываются «*предельными фазовыми траекториями*», соответствующими *полному обмену энергией* между «*эффективными осцилляторами*» и поэтому представляющими собой альтернативу нормальным модам.

Применимость этой новой идеологии выходит далеко за пределы механики. Она впервые позволила выявить природу общности широкого класса задач физики твердого тела, нелинейной оптики, фотоники и биофизики, для которых традиционные парадигмы этих областей физики оказались неприменимыми[2]. В то же время потребовалась разработка математического аппарата, отражающего специфику феномена биений и их обобщений. Этот аппарат базируется на использовании гиперболических чисел с базисом

$$(1,e),e^2 = 1,\ e \neq 1,$$

представляющих собой частный случай алгебр Клиффорда[3]. В теории нестационарных процессов их роль аналогична роли комплексных чисел с базисом

$$(1,i),i^2 = -1.$$

---

[1] *Manevich L.I.* New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillators chains // 8th Conference on Dynamical Systems-Theory and Applications, Proceedings. Lodz (Poland). December 12–15. 2005. Vol. 1. P. 119–136; *Manevitch L.I.* New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Arch. Appl. Mech. 2007. Vol. 77 (5). P. 301–312; *Manevitch L.I., Smirnov V.V.* Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains // Physical Review E. 2010. Vol. 82. P. 036602(1–9).

[2] *Manevitch L.I., Kovaleva A.* Nonlinear energy transfer in classical and quantum systems // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. P. 022904 (1–12); *Manevitch L.I., Kovaleva M.A., Pilipchuk V.N.* Non-conventional Synchronization of Weakly Coupled Active Oscillators // Europhys Lett.. 2013. Vol. 101. P. 50002; *Manevitch L.I., Gendelman O.V.* Tractable Models of Solid Mechanics. Formulation, Analysis and Interpretation // Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2011.

[3] *Pilipchuk V.N.* Nonlinear Dynamics, Between Linear and Impact Limits // Springer, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, 2010.

Заключение

Приведенные примеры из различных областей физики дают представление о том, насколько важен связанный с философским умонастроением ученого всесторонний анализ проблемы, в котором физическая интуиция тесно переплетается с выбором или разработкой адекватного математического аппарата. «Прояснение смыслов» и есть сверхзадача такого анализа.

Библиографический список

Alexander S. Amorphous solids: their structure, lattice dynamics and elasticity // Physical Reports. 1998. Vol. 296. P. 65–236.

Anderson P.W., Halperin B.I., Varma C.M. Anomalous low-temperature thermal properties of glasses and spin glasses // Philosophical Magazine. 1972. Vol. 25. P. 1.

Born M., Huang K. Dynamical Theory of Crystal Lattices. Clarendon Press, 1954.

Flory P.J. Principles of polymer chemistry. N.Y.: Cornell University Press, 1953.

Manevich L.I. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillators chains // 8th Conference on Dynamical Systems-Theory and Applications, Proceedings. Lodz (Poland). December 12–15. 2005. Vol. 1. P. 119–136.

Manevitch L.I. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Arch. Appl. Mech. 2007. Vol. 77 (5). P. 301–312.

Manevitch L.I., Smirnov V.V. Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains // Physical Review E. 2010. Vol. 82. P. 036602(1–9).

Manevitch L.I., Gendelman O.V. Tractable Models of Solid Mechanics. Formulation, Analysis and Interpretation. Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2011.

Manevitch L.I., Kovaleva A. Nonlinear energy transfer in classical and quantum systems // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. P. 022904 (1–12).

Manevitch L.I., Kovaleva M.A., Pilipchuk V.N. Non-conventional Synchronization of Weakly Coupled Active Oscillators // Europhys. Lett. 2013. Vol. 101. P. 50002.

Манин Ю.И. Математика и физика. М.: Знание, 1979.

Неванлинна Р. Пространство, время и относительность. М.: Мир, 1966.

Паули В. Влияние архетипических представлений на формирование естественнонаучных теорий у Кеплера / Физические очерки. Сборник статей. М.: Наука, 1975.

Pilipchuk V.N. Nonlinear Dynamics, Between Linear and Impact Limits / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics./Springer/ Berlin, 2010.

Шрёдингер Э. Мой взгляд на мир. М.: Либроком, 2009.

В.Э. Терехович

ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ И МЕТОДА ИНТЕГРАЛОВ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

1. Введение

Одно из удивительных свойств уравнений движения состоит в том, что реальные системы следуют им с необъяснимым постоянством. Причины эффективности этих уравнений составляют часть общей проблемы — почему математический способ эффективен для описания наблюдаемой реальности[1]. Большинство уравнений движения соответствуют какой-либо физической теории, которая предлагает собственную модель или интерпретацию, связывающую эти уравнения с реальностью. Помимо уравнений такие модели включают в себя набор понятий, аксиом и конкретную логику. Все вместе это опирается, часто в неявном виде, на определенное отношение к реальности. Например, классическая механика описывает реальность как взаимодействие точечных объектов в абсолютном плоском пространстве и однородном времени, используя понятия массы, инерции и силы. Теория поля рассматривает реальность как взаимодействие полей в различных пространствах, используя понятия заряда, потенциала, вектора напряженности, кривизны и другие.

Существует два математических способа описания движения, с которыми не принято соотносить какую-либо объяснительную теорию, и тем более их не принято связывать с реальностью. Это экстремальные или вариационные принципы (в дальнейшем эти названия будут использоваться как эквивалентные)[2], и квантовый метод интегралов по траекториям Ричарда Фейнмана[3]. С одной стороны, подавляющее число физиков и математиков рассматривают обе эти модели лишь

[1] В.П. Визгин сравнивает непостижимость эффективности уравнений аналитической механики с непостижимой эффективностью математики в целом (*Визгин В.П.* Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. М., 2011. С. 275–290).

[2] *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики // Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. М., 1959; *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики: Их развитие и применение в физике. М., 2010.

[3] *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовые интегралы по траекториям. М., 1968.

как удобные математические формализмы, удачно подобранные для описания реальных явлений. Против философской трактовки вариационных принципов возражали Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж, К. Якоби, А. Эйнштейн, Э. Мах, И. Пригожин. Сегодня эта традиция сохраняется[1]. Отношение к реалистической трактовке интегралов по траекториям и виртуальных частиц в диаграммах Фейнмана не такое однозначное[2]. С другой стороны, современные философы математики почти не интересуются вопросами прикладной математики[3]. Обычно они ограничиваются чистой математикой, одновременно удивляясь чуду ее применимости в мире[4].

Существует несколько способов объяснить, почему предсказания уравнений согласуются с наблюдаемым движением. Их можно объединить в четыре группы, расположив от крайнего анти-реализма до крайнего реализма. (1) В самих явлениях нет никакого порядка и логики. Люди наблюдают и создают модели описания наблюдений, пользуясь одной и той же логикой, одним и тем языком. Не удивительно, что и то, и другое совпадает. (2) В реальных явлениях есть какие-то закономерности, но мы их вряд ли узнаем, так как любое восприятие ограничено нашими психофизиологическими особенностями. Поэтому, создавая математические модели, мы подгоняем их под собственные восприятия. (3) Математические модели отражают реальные отношения разных типов объектов и явлений, т.е. описывают феноменологические законы конкретных областей природы. Но эти модели ничего не говорят о сущности, стоящей за явлениями. (4)

[1] *Липкин А.И.* Место понятий и принципов «парящих над» отдельными разделами физики // Актуальные вопросы современного естествознания. 2010. № 8. С. 51–58; *Lemons D.S.* Perfect form: Variational principle, methods and applications in elementary physics. Princeton, 1997; *Stöltzner M.* Can the Principle of Least Action Be Considered a Relativized A Priori? // Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives on Modern Physics / Ed. M. Bitbol et al. Springer, 2009. P. 215–227; *Yourgrau W., Mandelstam S.* Variational principles in dynamics and quantum theory. London, 2000.

[2] *Gell-Mann M., Hartle J.* Decoherent histories quantum mechanics with one real fine-grained history // Physical Review A. 2012. N 85 (6); *Ogborn J., Taylor E.F.* Quantum physics explains Newton's laws of motion // Physics Education. 2005. N 40 (1); *Ord G.N., Gualtieri J.A.* A realistic setting for Feynman paths // Chaos, Solitons & Fractals. 2002. N 14 (7). P. 929–935; *Sharlow M.* The Quantum Mechanical Path Integral: Toward a Realistic Interpretation. 2007. Preprint: http://philsci-archive.pitt.edu/3780/ (30.03.2013); *Taylor E.F.* A call to action // Am. J. Phys. 2003. N 71 (5); *Valente M.B.* Are Virtual Quanta Nothing but Formal Tools? // International Studies in the Philosophy of Science. 2011. N 25 (1). P. 39–53.

[3] *Steiner M.* Mathematics — Application and Applicability // The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / Ed. S. Shapiro. Oxford. 2005. Ch. 20. P. 625–650.

[4] *Лолли Г.* Философия математики: наследие двадцатого столетия. Н. Новгород, 2012.

Математические модели являются онтологическими и отражают реальные отношения сущности явлений.

С практической точки зрения, позиция анти-реалиста удобнее, для него любая теория — лишь временная модель, пригодная для описания определенного типа явлений. У реалиста задача сложнее, ему приходится делать выбор, уравнения какой модели описывают реальность наиболее адекватно. Если вариационные принципы и метод интегралов по траекториям не имеют прямого отношения к реальности, то почему мы так уверенно соглашаемся с моделями реальности классической механики или теории поля? Возможен и другой вариант — все модели являются следствием уравнений какой-то другой, более общей теории реальных процессов. Например, теория математической Вселенной утверждает, что любая физическая реальность полностью определяется математическими структурами, а значит, может существовать любая математически непротиворечивая реальность[1].

Как известно, экстремальные принципы и вариационное исчисление сегодня широко распространены не только в оптике и механике, но и во всех вариантах теории поля (нерелятивистской и релятивисткой, классической и квантовой), в равновесной и неравновесной термодинамике, а также в теории информации, биологии и других науках[2]. Метод интегралов по траекториям и связанные с ним «диаграммы Фейнмана» являются основой современной квантовой теории поля[3]. Известна также и формальная математическая связь между некоторыми экстремальными принципами и методом интегралов по траекториям[4]. Попытки возвести принцип наименьшего действия в ранг всеобщего предпринимались Г. Лейбницем, П. Мопертюи, Л. Эйлером, Г. Гельмгольцем, М. Планком[5]. Отечественные философы пробовали связать экстремальные принципы с законами диалектики[6]. Ряд зарубежных авторов рассматривает

---

[1] *Tegmark M.* The Mathematical Universe // Foundations of Physics. 2008. N 38 (2). P. 101–150.

[2] *Терехович В.Э.* Философско-методологические проблемы принципа наименьшего действия: Дис. ... канд. филос. наук. СПб., 2013.

[3] *Зинн-Жюстен Ж.* Континуальный интеграл в квантовой механике. М., 2010.

[4] Там же; *Hanc J., Tuleja S., Hancova M.* Simple derivation of Newtonian mechanics from the principle of least action // Am. J. Phys. 2003. N 71 (4). P. 386–391; *Ogborn J., Taylor E.F.* Quantum physics...; *Taylor E.F.* A call...

[5] См.: *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, 1959.

[6] *Ассеев В.А.* Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л., 1977; *Разумовский О.С.* Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. М., 1975; *Цехмистро Л.Н.* Эволюция и методологическое значение понятия действия в физике: Дис. ... канд. филос. наук. Харьковский инженерно-педагогический ин-т. Харьков, 1992.

реалистический подход к квантовым интегралам по траекториям[1]. В данной статье сделана попытка объединить две модели математического описания — экстремальные принципы и метод интегралов по траекториям, дав им реалистическую интерпретацию. Возможно, понимание работы математики именно в этих конкретных приложениях приблизит нас к решению общих проблем чистой математики.

Статья начинается с обзора особенностей вариационного исчисления и интегралов по траекториям (раздел 2). После перечисления некоторых философских проблем, связанных с этими моделями, рассмотрены направления поиска их онтологических оснований (раздел 3). Излагаются основные положения гипотезы о суммировании альтернативных сосуществующих возможностей, в которой онтологические допущения объединяются с математическим описанием движения (раздел 4). Полученные результаты используются для объяснения связи уравнений движения с реальностью (раздел 5).

2. Особенности вариационных принципов и метода интегралов по траекториям

Если познакомиться с историей создания вариационных принципов[2], а также с рассказом Фейнмана о том, как он пришел к формулировке метода интегралов по траекториям[3], можно отметить несколько интересных особенностей этих двух моделей описания движения. Перечислим основные из них.

1. Вариационные или экстремальные принципы находятся в центре современного естествознания. Они пригодны для описания линейных и нелинейных процессов в закрытых и открытых системах разной сложности, от элементарных частиц до социальных систем. Они же применимы к геометрии различной размерности и топологии. В неравновесной термодинамике и в теории информации эти принципы используют понятие вероятности.

2. Интегральные вариационные принципы можно свести к единой схеме: действительный процесс (траектория) отличается от всех возможных в данных условиях тем, что функционал (например, *дей-*

---

[1] *Gell-Mann M., Hartle J.* Decoherent histories...; *Valente M.B.* ...; *Wharton K.B., Miller D.J., Price Huw.* Action Duality: A Constructive Principle for Quantum Foundations // Symmetry. 2011. N 3. P. 524–540; *Ord G.N., Gualtieri J.A.* A realistic...; *Sharlow M.* The Quantum...

[2] *Ассеев В.А.* Экстремальные принципы...; *Полак Л.С.* Вариационные принципы, 2010.

[3] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. М., 2004. С. 96.

ствие), описывающий систему, стационарен и принимает экстремальное значение. Чаще всего это локальный минимум, но может быть и максимум. Функционал определяется как интеграл от некого выражения (его называют *лагранжиан* или *плотность лагранжиана*), а интегрирование может проводиться по времени, по пути, по n-мерному объему или по четырехмерному пространству-времени[1]. В вариационном исчислении экстремум, соответствующий действительному движению или состоянию, отыскивается путем операции варьирования или перебора спектра всех мыслимых, но не реализуемых в наблюдаемой реальности движений или состояний. Разность между действительным и любым возможным значением функционала в первом порядке приближения должна равняться нулю. С помощью математических операций из вариационных принципов выводятся дифференциальные уравнения движения или уравнения состояний систем.

3. Вариационные принципы описывают стационарные процессы (траектории, состояния) в n-мерном конфигурационном пространстве, по которым системы стремятся следовать в каждой конкретной ситуации. Одним из проявлений стационарности является постоянство скорости изменения функционала системы. Частный случай стационарного процесса — равновесный процесс, частный случай равновесного процесса — равновесное состояние.

4. Большинство вариационных принципов связано друг с другом через аналогию механических, оптических и волновых явлений, причем данная аналогия используется не только на классическом, но и на релятивистском, и на квантовом уровнях. Большинство вариационных принципов и метод интегралов по траекториям используют понятие *действия* с размерностью энергии, умноженной на время.

5. В основе метода интегралов по траекториям лежит предположение Фейнмана о том, что квантовые частицы движутся из начального состояния к конечному сразу по всем возможным путям. Путь, который мы наблюдаем как действительный, является результатом суммирования всех возможных путей. Суммирование происходит с помощью интерференции или сложения фаз амплитуды вероятности каждого отдельного возможного пути. Таким образом, результирующий путь обладает максимальной вероятностью. При увеличении масштаба систем квантовый метод интегралов по траекториям формально переходит в один из основных физических экстремальных принципов — классический принцип наименьшего действия.

---

[1] В дифференциальных вариационных принципах для описания действительного состояния системы вместо интегрирования используется сумма, которая вместо экстремума приравнивается нулю.

6. Связь между принципами симметрии и сохранения покоится на вариационных принципах (теорема Э. Нетер), и даже закон сохранения энергии является следствием вариационности уравнений системы и инвариантности величины действия.

7. Вариационные принципы, как и метод интегралов по траекториям используют в строгом математическом смысле пару фундаментальных философских понятий — *потенциальная возможность* и *актуальная действительность*.

8. В экстремальных принципах для описания реальных физических процессов одновременно используются как начальные, так и конечные состояния системы. Иначе говоря, в отличие от всех остальных эта модель не отдает предпочтения ни действующим, ни целевым причинам.

3. Направление поиска онтологических оснований

Перечисленные свойства вариационных принципов и метода интегралов по траекториям сами по себе еще не объясняют их эффективности. Наоборот, возникают новые вопросы, большая часть которых лежит в области философии, поэтому даже их формулировка представляет определенную трудность. Приведем некоторые примеры таких вопросов.

Каков физический и философский статус возможных или виртуальных движений (траекторий, состояний) в вариационных принципах, и какова степень их реальности? Тот же вопрос относится к виртуальным траекториям в интегралах по траекториям. В чем физический и философский смысл понятия *действие*? Почему *действие* стремится к экстремальным значениям, почему в одних случаях оно минимально, а в других — максимально? Как классическое *действие* связано с квантовым *действием* и с тензором кривизны пространства? Каково философское и физическое содержание комплексных величин в уравнениях движения? Почему свойства симметрии и сохранения связаны и с классическим *действием*, и с интегралами по траекториям? Каким образом в экстремальных принципах соотносятся действующие и целевые причины? Почему экстремальные принципы одинаково эффективны для описания как вероятностных, так и детерминистических процессов? Каким образом происходит переход от амплитуды вероятности на квантовом уровне к вероятности и однозначности на уровне классическом? И так далее.

Простой обзор свойств вариационных принципов и метода интегралов по траекториям наводит на мысль, что их взаимная связь — не

случайное совпадение. Более того, вместе они могут стать хорошим кандидатом для обнаружения возможных онтологических оснований уравнений движения. Однако одной интуиции недостаточно. Чтобы построить непротиворечивую гипотезу, необходимо разобраться в, казалось бы, очень далеких друг от друга областях философии, физики и математики. Программа подобного исследования должна, как минимум, включать в себя:

— философские концепции перехода из возможного (потенциального) модуса существования в действительный (актуальный) модус существования;

— идею фундаментальности вероятностного описания любых процессов природы, в соответствии с которой однозначная и статистическая причинность являются частными случаями причинности вероятностной;

— философские взгляды на равноправие действующего и целевого типов причинности, как двух дополняющих друг друга аспектов причинно-следственной связи;

— представление о вероятности как о мере перехода из возможности в действительность;

— традицию придавать онтологический характер внутренней активности любых физических систем, а вероятность рассматривать как следствие самодвижения материи;

— современные интерпретации квантовой механики: копенгагенскую, холистскую, согласованных историй, модальную, многомировую, экзистенциальную и другие, в разных вариантах использующие аналогию перехода от возможного существования к действительному;

— математические особенности применения метода интегралов по траекториям для расчета квантовых полей;

— связь квантовых амплитуд вероятности в интегралах по траекториям с классической теорией вероятности и с теорией информации;

— особенности использования комплексных величин и натуральных логарифмов в интегралах по траекториям для квантовых систем и в уравнениях движения классических физических систем.

Мы полагаем, что подобная программа исследования рано или поздно способна привести к гипотезе о единых онтологических основаниях разных видов уравнений движения, включая уравнения экстремальных принципов и метода интегралов по траекториям. Скорее всего, таких гипотез будет несколько, и каждая из них должна дать свой вариант непротиворечивых ответов на перечисленные выше вопросы.

4. Гипотеза суммирования сосуществующих возможностей

В результате одной из попыток следовать предлагаемой программе поиска[1] мы сформулировали гипотезу, которую условно можно назвать *гипотезой суммирования сосуществующих альтернативных возможностей*. Онтологический слой этой гипотезы опирается на три допущения.

Допущение об активности. Каждая реальная система обладает определенной степенью внутренней активности. Активность выражается в стремлении системы реализовать максимальное число имеющихся у нее возможностей по изменению и сохранению своего движения (состояния). Такая реализация происходит за счет взаимной деятельности систем или, что то же самое, за счет их взаимодействия с другими системами через изменение существующих и создание новых взаимных связей[2].

Допущение о двух модусах существования. Каждая реальная система существует в двух модусах. В возможном модусе каждая реальная система находится сразу во всех возможных альтернативных движениях, взаимодействуя с другими системами сразу всеми возможными способами. В действительном модусе каждая реальная система находится только в одном из возможных движений. Каждое возможное движение описывается характеристиками n-мерных пространств различных математически возможных топологий. Каждое действительное движение описывается характеристиками гладкого четырехмерного пространства-времени. Совокупность возможных движений образует реальность возможную, совокупность действительных движений образует реальность действительную. Обе реальности существуют «параллельно», переходя друг в друга.

Допущение о суммировании возможностей. Пакет согласованных возможных движений каждой системы непрерывно суммируется. Одно из возможных движений, объединяющее в себе наибольшее число возможностей, становится действительным. Остальные возможные движения системы продолжают существовать в возможном модусе. Изменение или исчезновение хотя бы одного возможного движения может изменить результат суммирования всего пакета, а значит, и действительное движение может стать другим. Взаимодействие реальных систем происходит не в действительном, а в возмож-

---

[1] *Терехович В.Э.* Философско-методологические...

[2] Данное допущение имеет богатую философскую традицию и может быть использовано для анализа общих принципов существования физических, биологических, социальных и психологических структур (см. например: *Терехович В.Э.* Формула смысла. Исследование мнений о смысле существования человека. СПб., 2012).

ном модусе. Каждое такое взаимодействие изменяет пакеты возможных движений каждой из систем, в результате чего автоматически изменяется действительное движение каждой взаимодействующей системы[1].

Физический слой предлагаемой гипотезы переводит онтологические допущения на язык физических понятий[2]. Начнем с квантовых систем, которые достаточно точно описываются методом интегралов по траекториям. В соответствии с допущением о двух модусах существования квантовая система на самом деле движется вдоль всех своих историй (траекторий), возможных в конкретных граничных условиях. Все эти истории находятся между собой в когерентной суперпозиции, поскольку имеют согласованные фазы амплитуд вероятности или волновых функций. В соответствии с допущением о суммировании возможностей пакет всех возможных историй квантовой системы в n-мерном конфигурационном пространстве суммируется путем интерференции, точнее говоря, складываются фазы всех таких историй. Каждая фаза — комплексная величина, пропорциональная величине *действия*. Чтобы получить вероятность суммарной истории, необходимо возвести в квадрат модуль суммы амплитуд вероятностей для всего пакета возможных историй. Поскольку вклад каждой возможной истории пропорционален ее фазе, результирующая история будет отличаться от возможных историй минимальным действием и максимальной вероятностью. Именно эту результирующую историю квантовой системы мы наблюдаем с помощью макроскопических приборов.

Чтобы перейти от квантовых систем к классическим, нам придется допустить отсутствие непреодолимой онтологической границы между объектами микро и макро-мира. Важные различия, конечно, есть, но они не несут абсолютного характера. Имеется в виду, что все

---

[1] Похожая гипотеза была сформулирована Г.В. Лейбницем: «Все возможное стремится к существованию». Из столкновения всех возможностей осуществляется «тот ряд вещей, который содержит наибольший ряд возможностей». Этот ряд такой же единственный и определенный, как среди линий прямая, среди углов прямой, среди фигур наиболее вместительная, а именно окружность или шар. Лейбниц постулировал принцип наибольшего количества существования, объясняющий, почему если нужно пройти от одной точки к другой, когда направление линии не определено, то выбирается самый легкий и кратчайший путь: если от возможности следует перейти к действительности, то количество существования должно быть «наивозможно большим при данном возможном порядке существования» (*Лейбниц Г.В.* Сочинения: В 4 т. Т. 1. М., 1982. С. 235–284).

[2] Обзор философских аргументов в пользу применения онтологической многомодусной модели реальности к квантовой механике дан в работе: *Севальников А.Ю.* Интерпретации квантовой механики: В поисках новой онтологии. М., 2009.

системы на фундаментальном уровне существуют по единым принципам, а наблюдаемая разница коренится в особенностях нашего восприятия и описания способов существования систем разного типа и масштаба. Если на макроскопическом уровне с определенной степенью приближения можно обойтись описанием только в терминах действительного существования, то на квантовом уровне уже невозможно игнорировать процесс перехода из возможного модуса в действительный.

Объединим три онтологических допущения с описанием квантовых объектов и рассмотрим, как изменится наше описание реальности, когда размер системы становится существенно больше длины волновой функции ее возможных историй. Пакет возможных историй, вносящих существенный вклад в действительную историю, сожмется до узкого пучка. Квантовое флуктуирующее многомерное пространство схлопнется до четырехмерного гладкого искривленного пространства-времени. Квантовые возможные истории преобразуются в виртуальные движения (траектории, состояния) макроскопических систем. Квантовое *действие* в пределе постепенно приблизится к *действию* классическому, а метод интегралов по траекториям перейдет в один из экстремальных принципов. В результате действительная квантовая история перейдет в наблюдаемое классическое движение вдоль геодезической траектории с минимумом классического действия или с экстремумом другого функционала системы. Таким образом, можно сказать, что максимум квантовой вероятности, полученный путем суммирования фаз амплитуд вероятностей возможных историй, проявится в классическом и релятивистском пределах как минимум или максимум одной из характеристик системы, а это, в свою очередь, найдет выражение в известных экстремальных принципах.

Обобщая, можно сделать предположение, что все экстремальные принципы в своей основе имеют вероятностную природу и общий онтологический источник на квантовом уровне. Учитывая взаимную связь различных экстремальных принципов и историческую традицию их использования, назовем этот вывод *вероятностной интерпретацией принципа наименьшего действия*. Такая гипотеза, несмотря на ее странность и радикальность, предлагает свой вариант объяснения удивительной распространенности вариационных принципов в науке[1].

---

[1] Аналогичную идею в 1920 г. высказал А. Эддингтон, считавший, что принцип наименьшего действия становится принципом наибольшей вероятности. Таким образом, закон природы сводится к тому, что то состояние мира, которое осуществлено в действительности, является наиболее вероятным состоянием, а физическая реальность — это синтез всех возможных физических аспектов природы (*Эддингтон А.* Пространство, время и тяготение. М., 2003).

5. Связь уравнений с реальностью

Проверим, предлагает ли изложенная гипотеза какие-то новые ответы на проблему предсказательной силы уравнений движения. Согласно *гипотезе суммирования сосуществующих возможностей* экстремальность различных функционалов, характерная для действительных движений или состояний систем, теряет свою таинственность и предстает простым следствием механизма интерференции на квантовом уровне. Максимумы и минимумы этих функционалов становятся частными случаями максимума вероятности. Сами экстремальные принципы становятся удобными предельными выражениями вероятностной интерпретации принципа наименьшего действия.

Как известно, практически каждому вариационному принципу соответствует дифференциальное уравнение движения, и наоборот. Сама по себе такая эквивалентность еще не объясняет, что здесь первично, а что вторично. Но если предположить, что вариационные принципы являются частными случаями принципа наименьшего действия в его вероятностной интерпретации и имеют общее онтологическое основание в поведении систем на квантовом уровне, тогда дифференциальные уравнения движения можно рассматривать как дополнительную и производную математическую форму вариационных принципов.

В вариационных принципах давно привычными стали такие понятия, как *возможные движения*, *траектории* или *возможные перемещения*, их еще называют *виртуальными* или *мыслимыми*. В свете нашей гипотезы эти довольно странные для физики понятия предстают не просто метафорами, а выражениями, наполненными определенным онтологическим содержанием. Возможные или виртуальные движения происходят на самом деле, но в другом модусе существования. С точки зрения актуального существования такое утверждение звучит абсурдно, поскольку в четырехмерном пространстве-времени одна и та же система не может одновременно находится в разных местах. Противоречия не возникает для возможного модуса существования, в случае, если само четырехмерное пространство-время рассматривать не как нечто, заранее данное, а как следствие взаимодействия действительных систем, точнее систем в актуальном модусе. Виртуальные движения, мыслимые нашим сознанием, — это не плод нашего воображения, а отражение существующих возможностей. Иначе говоря, вариации в вариационных принципах происходят не в уме математика (хотя и там тоже), а в возможном модусе реальности. Математик лишь использует их для расчета действительного движения, а потом удивляется совпадению своих расчетов с наблюдением.

Если пространство рассматривать не как арену, на которой развертывается актуальное взаимодействие актуальных систем, а как форму и результат такого взаимодействия[1], можно предположить, что геометрические свойства самого пространства определяются особенностями механизма перехода из возможного модуса существования в действительный. В принципе наименьшего принуждения Гаусса величина *принуждения* эквивалентна геодезической кривизне траектории точки в трехмерном евклидовом пространстве, а в геометрическом аналоге этого принципа — в принципе Герца — точка стремится минимизировать кривизну своей траектории. Принцип наименьшего действия с успехом применяется в современной теории суперструн для пространств с различной размерностью. Все это дает основания предположить, что геометрические свойства пространства, не только эвклидова, но и риманова, и даже финслерова, связаны с математическими особенностями механизма интерференции возможных движений систем, взаимодействующих на квантовом уровне[2].

Особый интерес представляет отношение к реальности такого математического объекта, как вероятность. Кроме психологического понимания вероятности как наиболее ожидаемого или правдоподобного исхода дел, существует несколько вполне научных интерпретаций ее смысла, например статистическая, информационная и квантовая. Первая рассматривает вероятность как усредненную частоту совокупности уже произошедших, а значит наблюдаемых событий. Вторая связывает вероятность со степенью неопределенности или упорядоченности сложной системы. Третья под вероятностью понимает вполне объективную и измеримую предрасположенность к тому, что какое-то квантовое событие в будущем станет наблюдаемым. В нашей гипотезе вероятность рассматривается как мера реализации конкретной возможности конкретной системы в действительный модус существования. Поскольку каждая возможная история со своей мерой реализации непрерывно участвует в образовании действительной истории, снимается противоречие между статистической и квантовой интерпретацией вероятности. Ведь для меры реализации не имеет значения, с какой точки зрения ее изучать — до реализации в действительность или после — из настоящего в будущее или из настоящего в прошлое. Мера реализации возможности всегда содержится в настоящем, в каждой возможной и в каждой действительной истории.

---

[1] Предположение о вторичности пространства и времени обосновал Г. Лейбниц (*Лейбниц Г.В.* Сочинения. Т. 1. С. 325).

[2] А. Эддингтон предлагал рассматривать величину действия в качестве аналога кривизны пространства (*Эддингтон А.* Пространство...).

Еще одно интересное следствие гипотезы суммирования сосуществующих возможностей связано с онтологической трактовкой комплексных чисел. В квантовой фазе амплитуды вероятности каждой возможной истории содержится как вещественная, так и комплексная части. После интерференции и сложения фаз пакет возможных историй переходит в действительную историю, при этом комплексная часть фазы пропадает. Отсюда можно предположить, что смысл комплексной составляющей фазы состоит в ее отношении к возможному модусу существования, а математическая операция возведения в квадрат модуля амплитуды вероятности описывает переход от множества возможных историй к истории действительной.

Если исходить из предположения, что квантовый уровень фундаментален для всех типов явлений, тогда различные колебания или волны, наблюдаемые нами в окружающем действительном мире, должны быть как-то связаны с волновыми функциями или амплитудами вероятности квантовых систем. Фейнман изображал амплитуды вероятности в виде векторов, вращающихся в абстрактном пространстве, а фазы — как углы поворота этих векторов. В классическом пределе такое представление, с одной стороны, аналогично методу Гюйгенса вычисления фронта волны через возбуждение и сложение микроволн, с другой стороны, оно аналогично принципу Ферма для лучей света, распространяющихся вдоль геодезических линий. Объединим все это с представлением о принципе Гамильтона как об аналоге принципа Ферма, когда материальная точка движется вдоль луча, ортогонального фронту фазовой волны в конфигурационном пространстве[1]. Возможно, это объяснит, почему все колебания и все волны в природе могут быть описаны одними и теми же математическими способами. Правда, для этого нам придется пожертвовать некоторыми установками «здравого смысла», приняв, что и интегралы Фейнмана, и метод Гюйгенса, и принцип Ферма, и принцип Гамильтона — все они не просто продукты разума, а модели, вполне адекватно описывающие один из аспектов реальности. Как выразился физик Мичио Каку, наше представление о физической вселенной, основанное на здравом смысле, является просто-напросто наиболее вероятным состоянием из бесконечного количества возможных; мы сосуществуем со всеми возможными состояниями, некоторые из них перенесли бы нас в эпоху динозавров, к ближайшей сверхновой или на окраину Вселенной[2].

---

[1] Эту аналогию Л. Де Бройль и Э. Шредингер использовали при создании волновой квантовой механики (*Полак Л.С.* Вариационные принципы, 1959. С. 691, 861).

[2] *Каку М.* Параллельные миры. Об устройстве мироздания, высших измерениях и будущем Космоса. М., 2008.

Следующим шагом может быть заключение о том, что универсальные законы колебаний и волн определяются едиными правилами интерференции возможных историй любых типов систем на квантовом уровне. Единство этих правил также проявляется в общих принципах симметрии и сохранения. Именно благодаря общим правилам интерференции сосуществующих возможностей наше классическое действительное пространство однородно, изотропно и трехмерно. Из-за этих общих правил интерференции любые однотипные системы в нашей Вселенной подчиняются одним и тем же законам. Возможно, в том, что актуальный мир кажется нам таким упорядоченным, простым и красивым, нет ничего удивительного. Возможно, иначе просто не может быть, ведь результат интерференции возможностей с математической точки зрения просто не может быть иным, по крайней мере, в нашей Вселенной. Теоретически можно представить, что в других Вселенных действуют другие правила интерференции возможностей. Тогда там должны быть другие принципы симметрии, сохранения и экстремальности. Тогда актуальные системы иначе будут взаимодействовать друг с другом, а значит, пространство будет иметь там совсем другие свойства.

Наконец, гипотеза суммирования сосуществующих возможностей может оказаться полезной в дискуссии о статусе актуальной бесконечности в математике. Как известно, Кантор, пытаясь свести физику к теории точечных множеств, ссылался на монады Лейбница как на простые элементы природы, «из объединения которых в некотором смысле получается материя»[1]. Рассмотрим пакет бесконечного множества возможных историй системы как потенциальную бесконечность фаз амплитуд вероятности, характеризующих каждую возможную историю. Тогда результат интерференции возможных историй (суммирования фаз) — действительную историю системы — можно рассматривать сразу с двух точек зрения: а) как конечное множество актуальных состояний системы в категориях четырехмерного пространства-времени; б) как множество бесконечного числа возможных историй и возможных состояний этой системы в данных граничных условиях. Каждый аспект актуального модуса реальности, выраженный в конечном множестве, содержит в себе бесконечное множество аспектов потенциального модуса реальности. Таким образом, бесконечность становится необходимым связующим звеном между потенциальным и актуальным модусами реальности.

[1] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985. С. 168.

6. Заключение

Цель статьи состояла в исследовании связей с реальностью двух, широко применяемых в современной физике математических моделей — вариационных принципов и квантового метода интегралов по траекториям. Высказано предположение, согласно которому наблюдаемые явления соответствуют результатам вычисления потому, что обе эти модели имеют общие онтологические основания. Согласно гипотезе суммирования сосуществующих возможностей, система следует сразу по всем историям, возможным в данных условиях, а действительная история (действительное состояние) системы является суммой всех возможных историй (возможных состояний), отличаясь от них максимальной вероятностью.

Такая гипотеза вызывает много возражений, которые можно объединить в две группы. Специалисты-философы обычно возражают против переноса на реальность любых математических и физических моделей. Однако, как показывает история, большинство значимых концепций реальности, помимо религиозных догматов, в той или иной степени использовали сначала геометрические модели, а затем модели естественных наук. В XIX в. основным источником концепций реальности были теории Ч. Дарвина и электромагнетизма. В XX в. вряд ли найдется хоть одна онтологическая концепция, не испытавшая прямого или косвенного влияния трех физических моделей, первоначально созданных исключительно для удобства математических расчетов. Имеются в виду общая и специальная теория относительности, модель расширяющейся Вселенной и квантовая механика с ее принципами неопределенности и дополнительности, а также парадоксами ЭПР и «кошки Шредингера».

Другое возражение выдвигают специалисты-физики. Они не против переноса физических моделей на реальность, но соглашаются только на модели, которые используют объекты с ясным физическим содержанием. Обычно утверждается, что экстремальные принципы и метод интегралов по траекториям никакого физического содержания не имеют, это только удобные метафоры. Однако наличие или отсутствие физического содержания — аргумент спорный, ведь это содержание само является моделью. Как решить, в какой модели больше физического содержания: в силе тяготения, действующей на расстоянии, или в искривленном пространстве-времени; в электроне как частице или в электроне как облаке вероятностей? Другое возражение состоит в том, что экстремальные принципы и метод интегралов по траекториям имеют много ограничений в практическом применении.

На это можно возразить, что смысл изложенной здесь гипотезы — не в онтологизации интегралов по траекториям Фейнмана, а наоборот, в формулировке онтологических оснований, которые сами объясняют интегралы по траекториям, а заодно предлагают варианты решения других важных проблем. Дело не в том, законно или нет соотносить успешные физические и математические модели с онтологическими конструкциями реальности. Дело в испытании и сравнении разных результатов этой работы. Самый известный пример такого соперничества — многочисленные интерпретации квантовой механики и квантовой космологии, каждая из которых пытается обосновать свой взгляд на реальность.

Конечно, программа исследования того, как уравнения экстремальных принципов и метод интегралов по траекториям связаны с реальностью, не обязательно должна дать только один результат. Возможно, будет выдвинута гипотеза, более убедительная, чем суммирование сосуществующих возможностей. Только в конкуренции разных существующих и будущих гипотез возможен прогресс нашего понимания реального мира. Если мы предполагаем, что математические операции в какой-то мере отражают реальность, а не заканчиваются границами нашего мозга, эти операции можно и нужно использовать для уточнения и систематизации известных онтологических конструкций. Взамен математики могут надеяться, что приведенные в порядок онтологические идеи помогут им в объяснении смысла привычных математических объектов.

Библиографический список

Ассеев В.А. Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л., 1977.

Визгин В.П. Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. М., 2011. С. 275–290.

Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. М., 2010.

Мякишев Г.Я. Динамические и статистические закономерности в физике. М., 1973.

Каку М. Параллельные миры. Об устройстве мироздания, высших измерениях и будущем Космоса. М., 2008.

Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985.

Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1982.

Липкин А.И. Место понятий и принципов «парящих над» отдельными разделами физики // Актуальные вопросы современного естествознания. 2010. № 8. С. 51–58.

Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия. Н. Новгород, 2012.

Полак Л.С. Вариационные принципы механики // Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. М., 1959.

Полак Л.С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применение в физике. М., 2010.

Разумовский О.С. Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. М., 1975.

Севальников А.Ю. Интерпретации квантовой механики: В поисках новой онтологии. М., 2009.

Терехович В.Э. Философско-методологические проблемы принципа наименьшего действия: Дис. ... канд. филос. наук. СПб., 2013.

Терехович В.Э. Формула смысла. Исследование мнений о смысле существования человека. СПб., 2012.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. М., 2004.

Фейнман Р., Хибс А. Квантовые интегралы по траекториям. М., 1968.

Цехмистро Л.Н. Эволюция и методологическое значение понятия действия в физике: Дис. ... канд. филос. наук. Харьковский инженерно-педагогический ин-т. Харьков, 1992.

Эддингтон А. Пространство, время и тяготение. М., 2003.

Gell-Mann M., Hartle J. Decoherent histories quantum mechanics with one real fine-grained history // Physical Review A. 2012. N 85 (6).

Hanc J., Tuleja S., Hancova M. Simple derivation of Newtonian mechanics from the principle of least action // Am. J. Phys. 2003. N 71 (4). P. 386–391.

Lemons D.S. Perfect form: Variational principle, methods, and applications in elementary physics. Princeton, 1997.

Ogborn J., Taylor E.F. Quantum physics explains Newton's laws of motion // Physics Education. 2005. N 40 (1).

Ord G.N., Gualtieri J.A. A realistic setting for Feynman paths // Chaos, Solitons & Fractals. 2002. N 14 (7). P. 929–935.

Sharlow M. The Quantum Mechanical Path Integral: Toward a Realistic Interpretation. 2007. Preprint: http://philsci-archive.pitt.edu/3780/ (30.03.2013).

Steiner M. Mathematics — Application and Applicability // The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / Ed. S. Shapiro. Oxford, 2005. Ch. 20. P. 625–650.

Stöltzner M. Can the Principle of Least Action Be Considered a Relativized A Priori? // Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives on Modern Physics / Ed. M. Bitbol et al. Springer, 2009. P. 215–227.

Taylor E.F. A call to action // Am. J. Phys. 2003. N 71 (5).

Tegmark M. The Mathematical Universe // Foundations of Physics. 2008. N 38 (2). P. 101–150.

Valente M.B. Are Virtual Quanta Nothing but Formal Tools? // International Studies in the Philosophy of Science. 2011. N 25 (1). P. 39–53.

Wharton K.B., Miller D.J., Price Huw. Action Duality: A Constructive Principle for Quantum Foundations // Symmetry. 2011. N 3. P. 524–540.

Yourgrau W., Mandelstam S. Variational principles in dynamics and quantum theory. London, 2000.

А.В. Чусов

ОБ ОТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И РЕАЛЬНОСТЬЮ

Будем в рассмотрении отношений математики и реальности исходить из: а) дескриптивного (а не нормативного) подхода к феноменам, б) того факта, что математика в основном занимается созданием исчислений и средств исчисления (как интерпретируемых моделей = средств решения задач), и в) того факта, что математика постоянно воспроизводит знания, и эти знания изменяются.

Глобальная тема конференции «Математика и реальность» напоминает классические споры об отношении бытия и мышления. Аналогично мышлению математика неявно признается либо а) чем-то нереальным, либо б) чем-то реальным в каком-то смысле, но одновременно противостоящим «подлинной», «истинной», выделенной реальности, либо же в) чем-то реальным в превосходной степени, превышающей все локальные реализации. В основе тут лежат онтологические (но также и более глубокие — онтические) неявные предположения касательно иерархизации сфер существования (регионов сущих).

В терминах реальности естественно интерпретировать классические проблемы философии математики вроде выделенного статуса существования математических истин, определения специфики деятельности в сфере математики или практической значимости («непостижимой эффективности») математики. Они в основном решались в рамках рассмотрения математики как: а) системы знаний, б) индивидуальной деятельности, в) социального института. Будем исходить из понимания математики как особой сферы деятельности = объективации общественной практики, в которой объективируется, субъективируется, процессируется, изменяется и развивается математический предмет. Будем понимать предмет как «данность объекта субъекту»[1]. Это понимание очень тесно контекстуально связано с

[1] *Чусов А.В.* О перспективах развития методологии науки: моделирование, объективация, общая структура метода // Вопросы философии. 2012. № 1. С. 60–70.

классической философией, но в некоторых моментах требует выхода за пределы классически зафиксированных представлений.

Будем понимать реальность в смысле Х. Ортеги-и-Гассета: «Реальность — это все то, с чем мы поневоле должны считаться, поскольку, хотим мы того или нет, оно — здесь, оно произошло, противоположилось»[1]. Заметим, что «противоположное» — что-то вроде категории у Аристотеля — ведь две главы трактата «Категории» посвящены «противолежащему» и «противоположному».

В определении Ортеги можно выделить такие смысловые характеристики реальности, как актуальность, реализованность, самостоятельность, неотменимость, непосредственная данность в каком-то отношении (заметим, что оно не ограничивается отношением к «внешнему» миру), включенность в мировую конструкцию соотнесения разных мест. Особая проблема здесь связана с данностью, поскольку овладение специфическими средствами доступа к какой-то данности практически полностью убеждает человека в ее существовании. Однако тут присутствует и трудность — нужно отличать данности, которые обладают относительно самостоятельным существованием, от данностей, являющихся собственным продуктом активного воображения. Продукты разума от продуктов чистого воображения традиционно отличаются благодаря критерию (относительной) их устойчивости, или, что то же, существования, независимого от чисто субъективных актов или устремлений разума.

В отношении к предметам математики эта проблема стоит довольно остро. Нельзя отрицать, что математические предметы каким-то образом даны математикам, но в то же время нелегко установить, как же именно существуют эти предметы. Простая их представимость в воображении совершенно недостаточна для объяснения исключительности мышления об этих предметах. Ведь, будучи символически зафиксированными и развитыми, математические объекты обнаруживают значительную самостоятельность в своем существовании, несопоставимую с существованием простых предметов воображения. С другой стороны, символическая фиксация предметов религиозного культа не вполне сопоставима с аналогичной фиксацией математических предметов. То есть предметы (объекты) математики воображаемы, но не так, как простые мечты, и символически представимы, но не так, как религиозные предметы (объекты).

Мы рассматриваем математику как объективацию, т.е. как относительно самостоятельную сферу человеческой деятельности, используя базисное марксистское методологическое представление об

[1] *Ортега-и-Гассет Х.* Человек и люди // Ортега-и-Гассет Х. Дегуманизация искусства. М., 1991. С. 254–324.

объективации, укореняя его в практике. Объективация как теоретический концепт возникает в связи с проблемой объективной значимости идей у мыслителей, наследовавших И. Канту в критическом способе постановки вопросов. Об «объективирующей деятельности» писал Шеллинг. Понятие «объективация», видимо, впервые введено Гегелем в «Феноменологии духа». Оно является существенным и для Шопенгауэра, и для некоторых позднейших мыслителей, в частности для Дильтея, для герменевтов XX в. и для такого неклассического мыслителя как Н. Бердяев. Однако самостоятельная актуальность объекта была явным образом включена как необходимый концептуальный момент непосредственно в исследованиях К. Маркса, а также у такого неординарного марксиста как Д. Лукач[1]. В эксплицируемом в данном докладе варианте марксистского понимания объективация есть воспроизводящийся, локально связный, открытый универсум специфического взаимодействия, в общем случае — вне зависимости от отношения к субъекту. Существенные структурные корреляции этого понимания прослеживаются также в концепциях К.-О. Апеля, П. Бурдье, М. Фуко, Н. Лумана и др. Смысл введения методологического концепта «объективация» существенно связан с неклассической онтологией акта и процесса: это ответ на вопрос о том, как в мире имманентно появляются принципиально новые объекты.

Понятие «объективация» связано также с выделением специфической сферы взаимодействий. Для исследования математики как объективации требуется фиксация как специфических предметных форм математического объекта и математического субъекта, так и последующих объективаций их отношений в структуре предметной области математики (превращение форм существования, создание новых онтологий, имеющих референцию на новые типы реальностей).

Проблему существования предметов человеческого познания специально исследовал Кант. При этом он, подобно многим предшественникам, брал математику в качестве идеального образца познания. Однако математика в его понимании не имела отношения к чисто эмпирическим данным, и остался фактически нерешенным вопрос о возможности доступа к математическим предметам. Можно сформулировать это положение в виде апории: основой познания является созерцание предмета, но математические предметы не могут быть созерцаемы. Проблема состоит в онтологическом статусе созерцания математического объекта: он не может быть усмотрен простым чувством, но каким же образом он тогда будет дан? Данность предмета — необходимое условие познания этого предмета. Кант пишет, в частности: «Если познание должно иметь объективную реальность,

[1] *Лукач Д.* Своеобразие эстетического. Т. 1–4. М., 1985–1986.

т.е. относиться к предмету и в нем иметь значение и смысл, то необходимо, чтобы предмет мог быть каким-то образом *дан*» (B194)[1].

Данность предмета Кант проблематизирует в зависимости от области рассуждений. С одной стороны, в «Критике чистого разума» он пишет о чувственной способности созерцания, что это «только восприимчивость, способность определенным образом подвергаться аффицированию посредством представлений (mit Vorstellungen affiziert zu werden), отношение которых друг к другу есть чистое созерцание пространства и времени (чистые формы нашей чувственности)... Нечувственная причина этих представлений совершенно неизвестна нам, и потому мы не можем созерцать ее как объект, так как подобный предмет мы должны были бы представлять себе не в пространстве и не во времени (составляющих лишь условия чувственного представления), а между тем *без этих условий мы не можем иметь никакого созерцания* (курсив мой. — *А.Ч.*)» (B522). Но в «Критике способности суждения» Кант пишет: «Интуитивный способ представления может быть разделен на схематический и символический... все созерцания, которые подводятся под априорные понятия, — либо схемы, либо символы; первые из них содержат прямые, вторые опосредствованные изображения понятий»[2]. В первом случае он не допускает непрямых, т.е. опосредствованных, созерцаний, во втором же идет речь о «символах», которые как опосредствованные созерцания могут быть подведены под априорные понятия. Символы же он рассматривает в связи с математикой.

Чтобы установить данность нечувственных, или чистых, созерцаний, надо было бы явно указать на их источник и способ данности. Но «чистое созерцание», на которое Кант указывает в этом качестве, выглядит весьма проблематично в свете требуемой априорности: «Понятие a priori (неэмпирическое понятие) или уже содержит в себе чистое созерцание, и тогда оно может быть конструировано, или же оно не заключает в себе ничего, кроме синтеза возможных созерцаний, которые a priori не даны, и тогда вполне можно посредством него судить синтетически и a priori, однако лишь дискурсивно согласно понятиям и никогда интуитивно, т.е. посредством конструирования понятия. Но из всех созерцаний a priori дана одна лишь форма явлений — пространство и время...» (B747–748). Фактически Кант утверждает нереальность предмета математики: «Единственное по-

---

[1] Мы следуем традиции цитирования Канта по пагинациям первого и второго издания «Критики чистого разума», основываясь на издании: *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Сочинения на немецком и русском языках: В 4 т. / Под ред. Н. Мотрошиловой, Б. Тушлинга. Т. 2(1). М.: Наука, 2006.

[2] *Кант И.* Критика способности суждения // Кант И. Собр. соч.: В 8 т. Т. 5. М.: Изд-во ЧОРО, 1994.

нятие, представляющее a priori это эмпирическое содержание явлений, есть понятие *вещи вообще*, и синтетическое познание a priori, касающееся вещи, может заключать в себе только правило синтеза того, что может быть дано восприятием a posteriori, но никогда не может доставить a priori созерцание реального предмета, так как такое созерцание необходимо должно быть эмпирическим» (B748).

Учитывая кантовскую конструкцию мира как идеи, т.е. как чистого понятия разума, общую проблему отношения математики к реальности, на наш взгляд, можно сформулировать так: каковы отношения между разными мирами, в частности миром математики и миром вне математики. Основаниями такой постановки проблемы являются воспроизводящиеся *ощущения реальности* как мира вне математики, так и самой математики и, менее явно, особой реальности соотнесений математики с «внешним миром». Иначе говоря, речь идет о воспроизводстве математических феноменов в контексте реализации объектов-в-мирах (будь то объекты и миры чисто математические или связываемые с иными регионами и типами существования). На наш взгляд, в целях корректного понимания отношений между математикой и реальностью необходимо принципиально изменить ряд классических философских оснований, прежде всего концептов «мир», «объект», «субъект» и «представление».

Не вдаваясь в проблематизацию этих концептов, примем следующие рабочие определения.

Мир = взаимодействие объектов, взятое как внутренне расчлененное целое (становящееся).

Объект = относительно самостоятельный, активный фрагмент мира.

Субъект = фрагмент мира, имеющий особый тип внутренней активности — представление (репрезентацию), т.е. субъект есть частный случай объекта.

Предмет = данность объекта субъекту.

Представление = синтез представляющего объекта с представляемым объектом на основе субъектного акта их соотнесения.

Реальность = непосредственно данная неким определенным образом часть мира.

Объективация = объектная фиксация структуры.

Онтология = система предположений о типах существования и несуществования объектов.

В таком понимании реальность не только самоданна, но и перспективна, т.е., по словам Ортеги-и-Гассета, связана с интерпретациями действительности, «с помощью которых человеческое воображение и интеллект реагируют на вещный мир, его перспективу и локализованность в отношении личности. Для этого человек населяет плодами своего воображения воображаемые области». К нашей теме здесь

относится то, что воображаемые модели устройства мира «представляют уже не первичную реальность жизни, а ее идею, образ». Но, добавим, идея и образ притом имеют свою реальность, реальность существования в воображаемых областях, которую и надо исследовать. Такое исследование следует проводить, опираясь на неклассическое представление об онтологии, связанное с необходимостью включить в число онтологических концептов и различений акты как особые типы существования. На наш взгляд, акты как типы существования входят в онтику и суть не что иное, как локальные осуществления наличного. Неклассический подход к онтологии явно выражен, к примеру, у Хайдеггера в проблематике различения онтологии и онтики.

Неклассичность нашего подхода проявляется в:

— применении принципа развития к мировым структурам;

— явном рассмотрении множественных онтологических характеристик такого региона сущего как представление (репрезентация);

— предположении множественности миров, реальностей и онтологий;

— трактовке знания как акта представления (в отличие от овещненных и потерявших непосредственную актуальность информационных форм фиксации знания);

— особенным образом понятом историзме.

Перейдем к непосредственному рассмотрению отношений математики и реальности.

Наивно-онтологически реальность математики пытались позитивно описывать и обосновывать какими-либо аспектами действительности, вроде «количественные отношения и пространственные формы». Здесь мир обладает основной реальностью, которая превышает реальность математики; «отношение» и «форма» понимаются классически (как несамостоятельные элементы действительности), математика относится к реальности как производный феномен и связана с чем-то вроде «отражения». На наш взгляд, здесь проявляется позитивная линия на понимание мира как естественного образования, причем математика оказывается производным продуктом реальности, включенным в последнюю. При этом исчезает проблема «непостижимой эффективности». Но современное развитие математики не позволяет некритически продолжать эту линию (при этом игнорируются как многие современные математические теории, так и ряд математических практик, относящихся к сфере «чистой математики»), да и критика показывает ряд неуниверсальных метафизических предпосылок в отношении мира. Можно сказать, что эта позиция основана на выделении внешней результативности математики.

Понимание математики как «самой по себе» истинной реальности восходит к платонизму. Математика относится к миру неизменных идеальных сущностей, обладающих бытием и не подверженных становлению. Тут признается существование единого особого неизменного предмета/объекта математики, в предположении неизменности математических объектов и, менее явно, полноты и единственности, а также полной предзаданности мира математических объектов. Эта точка зрения может быть продолжена до крайне идеологического тезиса «сотворение мира по законам математики». При этом реальность математики превышает реальность мира. Однако история математики показывает, что изменялись как объекты, относимые к области математики, так и их понимание. Так, единица долгое время выступала не как число, а как начало числа; современному алгебраическому пониманию единицы удовлетворяет, в частности, матрица (совсем не выглядящая единицей). Кроме того, полная предзаданность современной математики среди прочего требовала бы (со)существования принципиально разных и несовместимых математик — например, в случае принятия того или иного решения континуум-гипотезы.

Особое понимание математики в отношении к иной, истинной реальности можно связать с формализмом и логико-семиотической интерпретацией: математика имеет дело с чисто формальными соглашениями насчет операций с символами, ее реальность — производна и фиктивна. Есть настоящая реальность вне математики (как правило, редуцируемая к физической). Однако у этой точки зрения также есть существенные возражения, прежде всего в силу очевидной практичности математики. Кроме того, эта позиция сталкивается с тем фактом, что в качестве математических не могут быть приняты абсолютно произвольные формальные системы. Так, в арифметике, в которой разрешено деление на ноль, числа неразличимы. На наш взгляд, основные проблемы в развитии этой позиции были связаны с попытками выделить некую единственную логическую онтологию в качестве основы сопоставления математики и мира.

Еще две позиции в обосновании математики — интуиционизм и конструктивизм — также не смогли достаточно утвердиться, по-видимому, прежде всего из-за того, что они приносят в жертву логической обоснованности и финитной реализуемости значительную часть классического содержания математики, от которого (пока что?!) не готовы отказаться ни теоретические математики, ни инженеры. Однако у этого факта есть и темная сторона: не существует единственной логики (существуют континуумы логик, есть логики с противоречиями и т.д.). Поэтому конструкции интуиционизма и конструктивизма не являются совершенно обоснованными и зависят от внелогического выбора логики.

Некоторые более современные концепции математики расширяют рассмотрение ее предмета за счет рассмотрения того или иного отношения к практике (например, P. Kitcher, R. Hirsch), другие пытаются изменить онтологию (S. Shapiro, P. Maddy). Но при этом нельзя оставаться на наивной эпистемологической или логической позиции, в частности, игнорируя разработанные в философии понятийные средства мышления об онтологических основаниях разных регионов сущих.

В отношении к математике можно зафиксировать, что, как правило, люди математиками не рождаются, а становятся. Это означает, что для актуальной реализации математического знания требуется включение единичного субъекта в общественную практику, причем он застает как фиксированные ранее условия ее осуществления, так и возможности внесения вариаций. Этот факт показывает, что в формировании математического предмета участвует такая разноуровневая формация, как субъект, причем субъект математики как тип субъекта исторически различается не по онто- или филогенетическим структурам, а по практически приобретенным навыкам работы с типичными математическими объектами — в зависимости от типичных подручных ему средств работы с математическими объектами. Например, типичные субъекты вычисления дробей различаются как по типичным доступным им операциям, так и по типичным непосредственно противостоящим им объектам: в Древнем Египте это аликвотные дроби, в XVIII в. — натуральные дроби, в первой половине XX в. — десятичные дроби, а в начале XXI в. — конечные записи в калькуляторах и счетных программах.

Развитие математики и ее предмета получает дополнительные размерности благодаря включению в рассмотрение, к примеру, объективируемых способов обеспечения воспроизводства достоверности и реальности результатов математических изысканий. Здесь можно указать на типичные способы организации проверки (в ее функции трансляции легитимации результата на все сообщество) доказательства — от античных форм непосредственной демонстрации истины для понимающих математику избранных до институтов научного редактирования, рецензирования и массовой информации. Фиксация этого направления математической деятельности также сопровождается соответствующей субъективацией (которая, напомним, в нашем подходе является разновидностью объективирования), и часть математиков занимает позиции в институционализированных структурах. Другой аспект формирования математики как сферы деятельности заключается в фиксации организации математического обучения. Эта организационная сторона кажется лишь вторичной.

Однако не только обоснование полученных результатов, доступное для учащихся (например, обоснование математического анализа О. Коши), но и проверка теорем, и поиск новых способов их интерпретации, и выдвижение интересных проблем тесно связаны с математическими школами, т.е. с организациями обучения. Важным аспектом современной математической деятельности являются финансовые институции, организующие условия совместной математической деятельности.

Таким образом, развитие непосредственной актуальной данности математического знания имеет, помимо очевидной компоненты, состоящей в прогрессирующей фиксации прямых результатов математической деятельности, ряд сопутствующих направлений, критически фиксирующих «условия возможности» математики.

Проблему обоснования математики часто возводят к античности. Но пифагорейский кризис был кризисом не математики как таковой, а лишь одной из программ ее развития — программы синтеза предметных областей числа и величины. Так, Аристотель писал, что у числа и величины — разные начала. В дальнейшем математику тривиально обосновывал приписываемый ей онтологический статус принадлежности (или причастности) к сфере истинного бытия. А собственно вопрос об обосновании математики возникает в XVI–XVIII вв. (в связи с развитием анализа), но развитую форму получает в XIX в. (в связи с открытием неевклидовых геометрий). Аргументы сторонников и противников расширения предмета математики в обоих случаях имеют онтологический смысл. Однако случаи анализа бесконечных величин и геометрий разной кривизны типологически принципиально различны. В первом случае речь идет о расширении сферы логически совместимых математических предметов, а во втором — о возможности сосуществования в математике разных непосредственно логически несовместимых теорий. Это автоматически приводило к постановке вопроса о том, какая же из возможных математик находится в соответствии с миром, в котором мы живем. В конце концов сложилось общее признание самостоятельности альтернативных теорий предметной области геометрии в рамках математики, особенно после того, как были построены погружения различных геометрий друг в друга.

А. Пуанкаре, наследуя Канту, предложил интересное (до сих пор недостаточно эксплицированное в его онтологическом аспекте) направление обоснования математики: для полноценного описания математического рассуждения недостаточно различать (с опорой на некую «естественную» онтологию, предполагающую логическую единственность реальности) аналитические и синтетические предло-

жения[1]. Конвенциональные предложения формируют **существенное своеобразие математики**: ***средства для порождения и описания формальной онтологии возможной реальности***. Однако в течение XX в. предполагаемая при этом связь математики с внешней действительностью в ходе последующего развития логических и семиотических взглядов на предмет математики получила обратный начальному смысл: вопрос был преобразован в проблему «непостижимой эффективности математики» (Е. Вигнер).

Математическая реальность изменяется в силу системных операциональных требований — примером этому являются этапы пополнения чисел, когда в разряд существующих математических объектов вводились объекты, требуемые обратимостью операций. Можно сказать, в частности, что математика — наука об эквивалентно преобразуемых структурах. Практическим основанием этого тезиса является рассмотрение того факта, что теория в математике обычно непосредственно вырастает из попыток решения какого-то типа задач (основана на решении канонической задачи). Абстрактные структуры решения задачи благодаря так называемым «эквивалентным» преобразованиям переводятся в операциональную сферу. При этом а) операции, взятые как морфизмы, пополняют исходную структуру, и б) конструктивные схемы операций с преобразованными и пополненными объектами задают идеализации как объекты нового уровня. В качестве примера укажем введение в математическую онтологию отрицательных чисел, квадратных корней, мнимой единицы, обобщенных функций и проч. При введении в математику новых обобщенных типов существования (чисел, функций...) расширяется онтология представления и происходит развитие предмета математики. Другой пример пополнения математического предмета — переходы к сопряженным пространствам (от чисел — к функциям, от них — к функциям над функциями и т.д.). Соответствие же между старыми и новыми предметными областями задается структурно.

Несколько изменяя понимание Н. Бурбаки, скажем, что *непосредственный предмет математики* составляют абстрактные и идеализированные структуры деятельности субъекта (в том числе коллективного). Как пример абстракции рассмотрим умножение. Когда два берется три раза, то трижды считается такой неклассический объект, как операция субъекта — взятие некоторого множества как целого. Субъект, не способный в своих действиях выделить эту абстрактную структуру, не может умножать. На наш взгляд, сходные структуры действий можно обнаружить также и в геометрических конструк-

[1] *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1988.

циях, и представляется перспективным дальнейшее развитие этого тезиса в направлении обоснования математики теорией категорий и функторов.

Учитывая тот факт, что неподготовленный субъект просто не может воспринять математический текст как нечто содержательное, сделаем также тот вывод, что развитие математики как сферы деятельности необходимо содержит субъективацию (воспроизводство структуры типичного субъекта, рассматриваемое как необходимая подструктура взаимодействия, образующего основание общественной объективации). А результаты его деятельности объективно фиксируются и воспроизводятся в интерсубъективной, объективированной предметной области математики, поскольку сам субъект практически включен в структуру мира как объект.

Подведем некоторые итоги. Развитие математического предмета происходит во взаимосвязи непосредственно субъектной и опосредуемо объектной сторон математической деятельности, т.е. (квази) личностной структуры субъекта и теоретически фиксируемой структуры представления. Собственно математика как практически реализуемая объективация познания есть моделирование возможных онтологий.

Библиографический список

Кант И. Критика способности суждения // Кант И. Собр. соч.: В 8 т. Т. 5. М.: Изд-во ЧОРО, 1994.

Кант И. Критика чистого разума // Сочинения на немецком и русском языках: В 4 т. / Под ред. Н. Мотрошиловой, Б. Тушлинга. Т. 2(1). М.: Наука, 2006.

Лукач Д. Своеобразие эстетического. Т. 1–4. М., 1985–1986.

Ортега-и-Гассет Х. Человек и люди // Ортега-и-Гассет Х. Дегуманизация искусства. М., 1991. С. 254–324.

Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1988.

Чусов А.В. О перспективах развития методологии науки: моделирование, объективация, общая структура метода // Вопросы философии. 2012. № 1. С. 60–70.

Раздел
3

ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ РАЗЫСКАНИЯ

В.А. Бажанов

РЕАЛИЗМ, АНТИРЕАЛИЗМ И ИДЕЯ ТРЕТЬЕЙ ЛИНИИ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ[1]

История реализма и номинализма, как известно, восходит к средневековой философии. Противостояние реализма и номинализма, вызванное разногласием по проблеме универсалий, казалось бы, давно утратило былую остроту. Однако это противостояние возобновилось в XX в. в контексте размышлений об основаниях логики и математики и происходит в достаточно острых формах уже едва ли не сотню лет. Так, ближайший сотрудник и коллега великого Д. Гильберта П. Бернайс предпринимал попытку осмыслить природу математического платонизма еще в 1934 г.[2]

Проблема статуса и соотношения общего и единичного в логико-математических науках безусловно актуальна и поныне. Дискуссии между сторонниками реализма[3] (очень часто именуемыми «платонистами») и антиреалистами, развивающими линию номинализма[4]

[1] Работа поддерживалась грантом РФФИ (№ 13-06-00005а).

[2] Данная статья является английским переводом с французского лекции П. Бернайса 18 июня 1934 г. В ней ученый подчеркивает, что «платонизм ныне царствует в математике» и подвергает серьезному сомнению надежность апелляции к непосредственной интуиции, свойственной интуиционизму. Поскольку интуиция числа, считает Бернайс, более фундаментальна, чем интуиция пространства, то предпосылки платонизма носят более транцендентальный характер, нежели предпосылки и обоснование перспективности интуиционизма (*Bernays P.* Sur le platonisme dans les mathématiques // L'enseignement mathematique. Vol. 34. 1935. P. 57, 70; *Bernays P.* On Platonism in Mathematics // Philosophy of Mathematics. Selected Readings / Eds. P. Benacerraf and H. Putnam. Cambridge; N.Y.: Cambridge University Press, 1983).

[3] Здесь и далее имеется в виду не так называемый «научный реализм», понимание которого в западной традиции довольно близко к отечественному пониманию материализма, а именно реализм, который восходит к средневековой традиции. О «научном реализме», включающем метафизический, семантический и эпистемический аспекты см.: *Psillos S.* Scientific Realism // Encyclopedia of Philosophy / Ed. D. Borchert. Detroit: MacMillan Reference, 2006. Vol. 8. 2006.

[4] Еще в 1990-х гг. было принято говорить лишь о номинализме в математике (*Irvine A.D.* Nominalism, Realism and Physicalism in Mathematics // Physicalism in Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 1990. P. XII). Понятие антиреализма и широкое его использование позже

в логико-математических науках, активно продолжаются[1]. И нет веских причин надеяться, что они прекратятся ввиду победы одной из сторон в обозримом будущем. Напротив, каждая из дискутирующих сторон находит всё более и более веские и изощренные аргументы в пользу справедливости своей позиции и отыскивает слабые звенья в аргументах своих оппонентов. Анализ и оценка предмета и ткани этой дискуссии наводят на мысль о том, что в данной ситуации более перспективным выглядит стремление найти *третью, «срединную» линию*, которая могла бы избежать и «слабости» реализма, и «слабости» номинализма.

Современные перипетии этой дискуссии в отечественной литературе, посвященной философским основаниям логики и математики, освещены довольно скудно, да и соответствующих работ вообще крайне мало[2]. Между тем с методологической точки зрения эта дискуссия очень важна, поскольку во многом способна определить магистральные пути развития логико-математических дисциплин — как классических, так и относимых к неклассическим и/или альтернативным. Она затрагивает самые важные проблемы, претендующие на «метафизическое значение», которые имеют непосредственный выход в специфику сложного математического анализа и доктринальные особенности отдельных математических дисциплин[3].

В настоящей статье я постараюсь сосредоточиться на особенностях современного реализма и антиреализма и ответить на вопросы о том,

1) что конкретно ныне понимается под реализмом (антиреализмом);

2) какие разновидности реализма (антиреализма) существуют;

3) каковы основания для их выделения?

Сейчас, когда понятия реализма и антиреализма употребляются в самых различных смыслах и контекстах, важно разобраться, какое

обусловливается тем, что анализ соответствующего концептуального поля, прямо или косвенно связанного с номинализмом, обнажил такие оттенки ситуации и идей, которые не вполне покрывались понятием номинализма.

[1] Абстракции и объекты, которыми оперируют логика и математика, близки по своей природе, но не идентичны (*Weingartner P.* On the Demarcation between Logic and Mathematics // The Monist. 1982. Vol. 65. N. 1. 1982). Логицизм склонен считать абстракции и объекты логики более фундаментальными, нежели абстракции и объекты математики, но, думается, что это слишком сильное утверждение.

[2] Современные проблемы, относящиеся к дискуссии реализма и номинализма, в основном затрагиваются лишь в работах В.В. Целищева (*Целищев В.В.* Философия математики. Новосибирск: Наука. С. 31–36; *Целищев В.В.* Онтология математики. Объекты и структуры. Новосибирск: Наука, 2003. С. 11–16, 74–81).

[3] *Heller M.* Deep Questions on the Nature of Mathematics // Notices of the AMS. 2013. Vol. 60. N 5. P. 592.

содержание соответствует тому или иному их употреблению, каков спектр использования данных понятий и стоящих за ними концептуальных конструкций. Кроме того, я попытаюсь предложить *третью линию*, которая позволила бы снять остроту разногласий между реализмом и антиреализмом и под новым углом зрения подойти к проблеме существования логико-математических объектов.

Традиционный реализм (платонизм) в философии математики, его природа и виды

Ключевой вопрос, который разделяет реализм и антиреализм — это вопрос о модусе существования логико-математических объектов. Существуют ли логико-математические объекты подобно тому, как существуют деревья, коровы или грабли? Проблема существования этих объектов, несмотря на свою кажущуюся простоту, в действительности оказывается весьма сложной. Если связывать требование «существования» с некоторыми «априорными» необходимыми и достаточными условиями признания факта существования (объектов), то это, как показал Дж. Аззони, может вести к своего рода «метафизическому нигилизму»[1]. Между тем констатация модуса «существования» всегда плотно вписана в определенный контекст — онтологический, социологический, мереологический и т.д. И это естественно, поскольку каждый раз речь идет об «абстрактных» объектах, которые напрямую зависимы от когнитивного оснащения субъекта, его языковых, ментальных и иных особенностей.

Логико-математические объекты в отличие от объектов изучения нематематических (например, физико-химических наук), как известно, неосязаемы и эмпирически не верифицируемы, принципы детерминизма, обычные для физической реальности, в пределах математической реальности не действуют. Тогда можно ли утверждать, что они нам «известны»? И, если да, то в каком смысле?

Сильная версия реализма (которая фактически тождественна **традиционному платонизму**) на вопрос о модусе существования математических объектов отвечает утвердительно, причем имеется в виду фактическое существование вне зависимости от языка, который описывает данные объекты, ментального состояния того, кто осмысливает их природу или его деятельности (онтологическая версия реализма); аналогично обычно утверждается и наличие истинностных значений тех или иных математических предложений независимо от субъек-

[1] *Azzouni J.* Ontology and the Word 'Exist': Uneasy Relations // Philosophia Mathematica. 2010. Vol. 18. P. 90–91.

та математической деятельности (семантическая версия реализма). Иначе говоря, речь идет о некоторой актуальной *сверх*чувственной, трансцендентальной реальности, в которую «погружены» эти объекты. Эта реальность для субъекта в смысле ее восприятия имеет тот же статус, что и реальность его собственных чувств.

Сравнение объектов сверхчувственной реальности со своего рода платоновскими идеями допустимо лишь в ограниченном плане, а аналогии с концепцией Платона, имеющей историко-философский смысл, далеко не всегда в данном случае безупречны. Тем не менее термин «платонизм» прежде всего справедливо указывает на отдаленные истоки современного реализма, хотя, разумеется, самого Платона к математическим платонистам отнести нельзя. Математику он рассматривал как своего рода мост от иллюзорного мира чувств к истинной реальности идеальных форм.

Логико-математическое исследование с позиций платонизма является *открытием* соответствующих объектов и их свойств, причем допускаются методы доказательства, которые могут говорить о существовании этих объектов (или их свойств) без определения пути их построения (имеются в виду, например, так называемые теоремы чистого существования). Это, пожалуй, наиболее популярная у многих крупных и задумывающихся об основаниях своей науки математиков идеологическая позиция, которую разделяли, например, Г. Фреге, Г. Харди или К. Гёдель. Объекты здесь считаются «известными», если определены правила действия с ними (например, правила вывода).

Более точно эта позиция предполагает:

1) объективное существование некоторой математической реальности;

2) объективное существование элементов этой реальности;

3) независимость этих элементов от познавательной деятельности субъекта, его «инструментального» оснащения, включая языковые средства;

4) значения математических предложений задаются теми условиями истинности, которые задаются особенностями математической реальности.

В этом смысле под математикой понимают науку о структурах, порядке и отношениях, возникшую в процессе развития практики вычислений, измерений и описания форм реальных и абстрактных объектов и отношений между ними и основанную на логических доказательствах и численных выкладках[1].

[1] Данное определение было предложено Д.Х. Муштари, А.Н. Шерстневым и автором этих строк.

Однако если математика занимается исследованием некоторых объективно существующих идеальных (а потому не доступных непосредственному чувственному восприятию, т.е. сверхчувственных) сущностей, то каков модус этого исследования (проблема Бенацеррафа)? В контексте так называемой причинной теории познания и референции (causal theory of knowledge and reference), которая предполагает наличие причинно-следственных связей между объектами познания, вообще не понятно, как и каким образом нам известны и/или познаются логико-математические объекты, фактически находящиеся вне системы этих связей[1].

Нам, воспитанным отечественной логико-гносеологической традицией признания важной роли абстракций и идеализаций в познании, которая обоснована оригинальной концепцией интервальности[2], трудно осознать требование чувственного восприятия объектов познания, которое характерно для западной логико-эпистемологической мысли и которая уже не один десяток лет бьется над разрешением проблемы (или дилеммы Бенацеррафа — если иметь в виду трактовку когнитивных способностей человека, обязательно включающих этап чувственного восприятия). Тем не менее в западной философии математики данная проблема занимает почетное место, что никак не позволяет обходить ее вниманием[3].

Сам П. Бенацерраф еще в 1973 г. сформулировал аргументы, которые должны были бы подорвать позиции платонизма в математике[4].

Эти аргументы сводятся к ряду утверждений:

1) если математический платонизм является истинной концепцией, то нам должно быть доступно знание об абстрактных математических сущностях;

2) если нам доступно знание об абстрактных математических сущностях, то последние должны быть связаны с нами причинными зависимостями;

3) однако такой причинной зависимости нет;

4) следовательно, математический реализм нельзя считать истинной концепцией.

---

[1] Эта проблема между тем может не представляться как «непосильная» для платонизма, в рамках которого допустим ответ, придающий этой проблеме не столь острый характер (*Callard B.* The Conceivability of Platonism // Philosophia Mathematica (III). 2007. Vol. 15).

[2] *Новоселов М.М.* Абстракция в лабиринте познания. М.: Идея-пресс, 2005; *Бажанов В.А., Новоселов М.М.* Логика научного познания и логика абстракций в аспекте интервальной семантики // Логика научного познания. Актуальные проблемы. М.: Наука, 1987.

[3] См. также: *Целищев*, 2002. С. 37–38.

[4] *Benacerraf P.* Mathematical Truth // The Journal of Philosophy. 1973. Vol. 70. N 19.

Позднее многие крупные философы математики пытались усовершенствовать аргументацию Бенацеррафа. Например, Х. Филд отказался от идеи, связанной с необходимостью учитывать причинную зависимость в познании, которая используется Бенацеррафом, и обратился к идее надежности математического знания и уверенности в этом сообщества математиков. Филд считает, что многовековая уверенность математиков в точности и обоснованности математических рассуждений и конструкций говорит в пользу однозначной истинности этой области знаний[1]. Эта идея повлекла со стороны некоторых философов математики обвинения Филда в нарушении принципов натурализма и даже в агностицизме (Дж. Бургесс, Г. Розен). Однако полемика продолжилась.

Следует заметить, что антиреализм и его разновидность в виде номинализма в общем случае склонны связывать логико-математическое исследование не с открытием, а с *конструированием* объектов и их свойств, которое должно осуществляться в явном виде, а доказательство принимается лишь в том случае, если указан механизм такого конструирования, причем в крайних вариантах семантические соображения, относящиеся к понятию (математической) истины, могут заменяться альтернативными синтаксическими, типа свойств непротиворечивости и/или консервативного расширения. Именно так поступает Х. Филд при изложении своей номиналистической концепции в форме фикционализма[2]. Эта концепция не нуждается в допущении, что имеющие конкретные приложения математические теории являются истинными и потому могут быть полезными в науке (согласно так называемому «аргументу незаменимости»); наличие математических приложений, следуя номиналисту Х. Филду, можно объяснить случайностью, но тогда является ли случайным самое широкое использование в математике разного рода абстракций? Без абстракций до сих пор математика обходиться была никак не способна, и абстракции выполняют в ней роль не только конструкций, которые делают рассуждения «компактными», но и концентрирующими в себе особую концептуальную нагрузку.

Более умеренная точка зрения в платонизме состоит в том, что логико-математические объекты существуют, но не в буквальном смысле, а в некотором метафизически вторичном плане, когда о фактическом существовании речь не идет (или же лишь утверждается существование «фиксированного» истинностного значения);

---

[1] *Field H.* Mathematical Objectivity and Mathematical Objects // Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics / Eds. Stephen Laurence and Cynthia MacDonald. Oxford: Blackwell, 1998.

[2] *Field H.* Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell Publishers, 1989.

объект оказывается составной частью более фундаментальных соотношений[1].

Несмотря на апелляцию реализма к сверхчувственной реальности, его сторонники интенсивно ищут эмпирическое обоснование и усматривают его наличие в «аргументе незаменимости» (indispensability argument), который связывает факт существования такого рода реальности с фактом незаменимости (или же поразительной эффективности) математики в науке[2]. Аргумент незаменимости особенно интенсивно осмысливавшийся У. Куайном и Х. Патнемом[3], — это некоторая метафизическая позиция, которая позволяет купировать некоторые возражения против платонизма, имеющие эпистемологическую окраску[4]. Тем не менее убедительность этого аргумента, несмотря на его популярность в западной философии науки, на мой взгляд, далеко не бесспорна.

Впрочем, для многих логиков и математиков, далеких от философских раздумий об основаниях науки, но придерживающихся главного лейтмотива платонизма — явного или неявного признания независимого существования математической реальности и её объектов — платонизм связывается с рядом математических принципов и методов, которые только и допустимы для квалифицированного математического исследования[5]. Это означает использование:

1) классических первопорядковых формальных языков (в некоторых случаях и более сильных формальных языков);

2) классической логики;

3) «неконструктивных» методов и «неконструктивных» аксиом (типа аксиомы выбора в теории множеств);

4) непредикативных определений.

Данная категория логико-математического сообщества придерживается линии стихийного гносеологического оптимизма, которая выражается в убеждении, что всякая проблема в принципе (со временем) разрешима. Это платонизм на уровне «обыденного» сознания

---

[1] *Rosen G.* The Reality of Mathematical Objects // Meaning in Mathematics / Ed. J. Polkinghorne. Oxford: Oxford University press, 2011. P. 125.

[2] *Batterman R.W.* On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science // British Journal for the Philosophy of Science. 2010. Vol. 61.

[3] *Quine W.V.O.* Philosophy of Logic. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986. 2nd ed. P. 99; *Putnam H.* Philosophy of Logic // Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1971. 2nd ed. P. 347.

[4] *Yablo St.* Explanation, Extrapolation, and Existence // Mind. 2012. Vol. 121. N 487.

[5] *Linnebo O.* Platonism in the Philosophy of Mathematics. Version of 2011 // Stanford Encyclopedia of Philosophy (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/platonism-mathematics/).

математиков, принятый ими вовсе не по каким-то «идеологическим» мотивам, а в соответствие со своего рода утилитарными соображениями. Его можно условно назвать «работающим»[1].

Традиционный платонизм (сильная версия реализма) полагает, что абстрактные логико-математические объекты не обладают пространственно-временными характеристиками и не могут осмысливаться в терминах причинно-следственных связей, которые пронизывают объекты физического происхождения.

Если предмет математики трактуется в виде исследования некоторых абстрактных образований (структур), а логико-математическая реальность как система абстрактных объектов — чисел, функций, множеств, категорий и т.п. и, возможно, их истинностных значений, то этот тип реализма (платонизма) обычно еще называют объектным. В этом случае считается, что, например, теория множеств или теория чисел лишь *описывает* эти объекты[2].

Такой современный подход к интерпретации идеи паранепротиворечивости как диалетизм-dialetheism[3] хотя непосредственно и не связан с определенной концепцией истины, но неявно предполагает своего рода платонизм умеренного толка, поскольку подводит к констатации реального существования противоречивых объектов и/или реальных противоречивых ситуаций[4].

Приверженность (стихийному, так сказать) платонизму многих работающих математиков можно объяснить с точки зрения обыденной психологии исследователей. Их платонизм культивируется самой предметной областью («числа»), языком математики, который предполагает процесс широкого использования кванторов существования (на что, кажется, обращал внимание еще У. Куайн), что стимулирует убеждение в реальном существовании соответствующих объектов, а не просто некоторых их «виртуальных» свойств. В указанном смысле математики радикально отличаются от физиков, среди которых платонистов фактически не встречается. Причина здесь достаточно очевидна: физики рассматривают математику именно как *язык*, помогающий анализировать конкретные физические объекты и их свойства, а не интерпретировать его как конечную реальность.

---

[1] *Linnebo O.* Op.cit.

[2] *Balaguer M.* Realism and Anti-realism in Mathematics // Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Amsterdam; London; Oxford: North-Holland Elsevier, 2009. P. 41.

[3] Обоснование введения соответствующего русского термина «диалетизм» дано в кн.: *Бажанов В.А.* Dialetheism как методология паранепротиворечивой логики: исторический аспект // Восьмые Смирновское чтения по логике. Материалы международной научной конференции 19–21 июня 2013. М.: МГУ, 2013.

[4] Подробнее см.: *Priest G.* The Language of Dialetheism. Preprint, 2010.

Нетрадиционный реализм (платонизм) в философии математики

В рамках **нетрадиционного платонизма** принято различать версии П. Мэдди, в которой логико-математические объекты наделяются пространственно-временными характеристиками, «структуралистскую» (М. Резник и С. Шапиро), а также так называемый «полнокровный» реализм (М. Балагуер и Э. Залта). Согласно варианту П. Мэдди логико-математические объекты являются абстрактными образованиями нефизической и нементальной природы, но существующими в пространстве и времени, как и множества (обычных) физических предметов[1].

Реализм «структурного» толка (или просто «структурализм») интерпретирует логико-математическое знание как описание и анализ комбинаций абстрактных структур («паттернов»), которые носят элементарный, базисный характер, но из которых можно образовывать сколь угодно сложные абстрактные системы, фундаментальные свойства которых раскрываются не «сами по себе», а исключительно через их отношения к другим системам. По мнению М. Резника, паттерны состоят из позиций, которые могут проявлять разные свойства в зависимости от конкретных отношений и вхождения в те или иные структуры. Важны ориентации паттернов и их метрики, причем одних лишь логических средств оказывается недостаточно для полной характеристики паттернов, что свидетельствует в пользу их структурной релятивности[2].

Наконец, в последнее время была предложена и приобрела достаточную популярность концепция «полнокровного» реализма (Balaguer, 2009). «Полнокровный» реализм принимает принцип «изобилия» (plenitude principle), согласно которому с необходимостью существуют все логически мыслимые абстрактные объекты.

Этот тип реализма, наверное, было бы точнее назвать реализмом «без берегов» по той причине, что он утверждает не просто существование абстрактных объектов в виде некоторой сверхчувственной актуальной реальности, но и не накладывает на эти объекты никаких ограничений, имея в виду тот факт, что все в принципе (логически) мыслимые абстрактные объекты должны обладать актуальным (т.е.

---

[1] *Maddy P.* Mathematical Existence // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. Vol. 11. N 3.

[2] *Резник М.* Структурализм и идентичность математических объектов // Логические исследования. 2010. Вып. 16. С. 224.

действительным) существованием[1]. С точки зрения здравого смысла это очень сильное утверждение. Однако оно придает данной сверхсильной версии реализма (платонизма) качества, которые позволяют избежать действия ряда серьезных опровергающих его аргументы и ощутить себя в позиции, которая обеспечивает непротиворечивость системы соответствующих представлений и объектов. Традиционные платонисты теряются при вопросе о том, откуда логики и математики «берут» аксиомы, которые описывают математическую реальность; согласно полнокровному платонизму *любая* непротиворечивая система аксиом необходимо описывает определенный фрагмент этой реальности. Принимая определенную систему аксиом, они лишь «вырезают» из математической (точнее, «платонической») реальности тот фрагмент, который ими будет изучаться.

При этом данная реальность наделяется сторонниками полнокровного платонизма свойствами в духе упомянутого выше принципа «изобилия». Например, для континуум-гипотезы независимой в рамках стандартных аксиоматик теории множеств существуют фрагменты «платонической» реальности, где она истинна, и существуют фрагменты, в которых она ложна. В традиционном платонизме такого рода «плюрализм» не допускается: можно говорить об универсуме, в котором континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна.

Разумеется, в факт существования некоторой сверхчувственной («платонической») реальности, которая не обнаруживает себя ни в одном из физических эффектов, поверить сложно. Наличие её можно разве что постулировать — как, собственно, и поступают последовательные реалисты. Апелляция к аргументу «незаменимости» в качестве эмпирического обоснования — аргументу, который носит, на мой взгляд, достаточно искусственный характер, ничуть не добавляет уверенности в смысле констатации существования данной сверхчувственной реальности.

Математическая реальность является объективной и независимой по отношению к человеку как компонент культуры, но она исторически обусловленна и предопределенна как компонент внутреннего мира человека, задающий его когнитивные возможности и вектор активности. Вовсе не обязательно для нахождения философских оснований математики, как это делает традиционный математический реализм, постулировать существование некоторой сверхчувственной реальности, которая открывается некоторой априорной (в абсолют-

[1] В современной космологии в связи с осмыслением моделей инфляционной Вселенной высказываются аналогичные идеи (*Карпенко А.С.* Философский принцип полноты. Ч. II // Вопросы философии. 2013. № 7).

ном смысле) интуицией[1]. Более того, с точки зрения социального конструктивизма математика естественным образом выступает как типичный результат творческой деятельности человека, а точнее исторически предопределенной — и в этом смысле конкретной — математической практики[2]. Аналогично мотивы поиска и усовершенствования доказательств в логике и математике можно усматривать не в факторе «поиска истины», а в апелляции к научному сообществу с призывом проверить надежность и обоснованность того пути, который связан с формулировкой тезиса доказательства (например, теоремы), когда научное сообщество может убедиться в том, что ответственность, которая взята на себя автором (авторами) доказательства, правомерна и подкреплена вескими аргументами. Здесь доказательство приобретает смысл *этической* процедуры[3].

Антиреализм в философии математики, его природа и виды

Современный **антиреализм** так же, как и реализм, включает в себя целый набор различных подходов и направлений.

К нему обычно принято относить конвенционализм, который интерпретирует выражения логико-математического языка как аналитически-истинные суждения (Р. Карнап, К. Гемпель); формализм в духе Г. Фреге и метаматематический формализм в духе Г. Карри; фикционализм Х. Филда, который рассматривает логико-математические выражения как не имеющие отношения к реальности, подобно тем выражениям, в которых утверждается, что Карлсон живет на крыше нашего дома, а также Мейнонгианизм, согласно ко-

---

[1] Любопытно, что в 2008 г. известный математик и философ математики Р. Херш предложил участникам представительной конференции по математике ответить на вопрос о том, была ли истинной некоторая спектральная теорема в гильбертовом пространстве до Большого взрыва. 75% ответила положительно, 25% отрицательно (*Hersh P.* On Platonism // European Mathematical Society Newsletter. June. 2008. P. 17). Однако до Большого взрыва не существовало ни человека, ни математики, ни гильбертова пространства и т.п. и потому ответ на этот вопрос не может быть истинным или ложным; любой ответ здесь лишен смысла. Отсюда Р. Херш заключает, что нельзя говорить об этих понятиях и вообще о математике вне и помимо человеческой активности и её исторической обусловленности. В данном случае человеческий разум порождает конструкции вневременного и внепространственного характера, «истинные во всех возможных мирах».

[2] *Cole J.* Mathematical Domains: Social Constructs? // Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy / Eds. B. Gold, R. Simons. Mathematics Association of America. 2008. P. 115.

[3] *Bazhanov V.A.* Proof as an Ethical Procedure // Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science / Eds. E. Agazzi, F. Minazzi. Bruxelles; Bern; Berlin; Frankfurt am Main; New York; Oxford; Wien: Peter Lang, 2008.

торому числа и другие логико-математические понятия не существуют в реальности, но могут характеризоваться определенными истинностными значениями[1].

Кроме того, к антиреализму в философии математики относят психологизм в духе Э. Гуссерля и Л.Э.Я. Брауэра[2] и сторонников физикализма, которые считают логико-математические дисциплины науками об объектах физического мира[3].

Номинализм как разновидность антиреализма в его натуралистическом выражении (имея в виду установку на использование эмпирических методов исследования в науке) выступает в двух независимых друг от друга формах: 1) как отрицание возможности существования неких (или же вообще) *абстрактных* объектов и 2) как отрицание возможности существования универсалий (общих понятий). Здесь даже может подразумеваться, что *любые* логико-математические объекты — числа, функции, множества и т.п. — лишены какого-либо модуса существования; на самом деле мы имеем дело не с объектами, как утверждает А. Масгрейв, а с отношениями между высказываниями[4].

В настоящее время принято выделять следующие разновидности номинализма:

1) предикатный номинализм (вещи объединяются по наличию некоторого свойства, например на основании того, что они обладают «желтизной»);

2) концептуальный номинализм (вещи подпадают под некоторое единое понятие); номинализм классов (свойство как класс определенных вещей);

3) номинализм сходства (вещи, подобные в тех или иных отношениях);

4) иногда говорят и о мереологическом номинализме, имея в виду наличие некоторого свойства как той части, которая выделяется в некотором целостном образовании[5];

5) в последнее десятилетие все большее распространение получает так называемый инструментальный номинализм[6]. Речь здесь идет о требованиях к языку, в котором используются предикаты, которые

---

[1] Обстоятельная критика фикционализма дана Дж. Вудом (*Woods J.* Against Fictionalism // Model-Based Reasoning in Science and Technology (Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics). 2014. Vol. 8. Preprint).

[2] *Balaguer M.* Philosophy of Mathematics // Encyclopedia Britannica. 2003 (http://www.eb.com).

[3] *Irvine A.D.* Op. cit.; *Szabo L.* How can physics account for mathematical truth? Preprint. 2009 // http://philsci-archive.pitt.edu/5338/1/szabo-phys_math.pdf

[4] *Musgrave A.* Essays on Realism and Rationalism. Amsterdam: Rodopi, 1999.

[5] *Rodriguez-Pereyra G.* Nominalism in Metaphysics. Version of 2011 // http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/nominalism-metaphysics

[6] *Rosen G.* 2002; 2011. Op. cit.

выражают отношения только между конкретными (физическими) объектами, константы, используемые в теории, относятся только к этим объектам, а кванторы «пробегают» только по множествам данных объектов и/или их свойствам.

С точки зрения инструментального номинализма аргумент незаменимости Куайна—Патнема несостоятелен, поскольку мы вправе говорить о возможности теории описывать объективный мир, и эта возможность никоим образом не обусловливает необходимое независимое существование математической реальности и математических объектов[1].

В рамках современного номинализма природа и основная цель математического знания связываются и с её коммуникативной функцией, причем логико-математический язык считается насыщенным — как и любой естественный язык — своего рода метафорами, позволяющими эффективно осуществлять общение соответствующего сообщества по поводу некоторых абстрактных конструкций. Общение носит игровой характер. Принципиальной разницы между выражениями из x следует y и если x (имея в виду ребенка, который представляет себя гвардейцем кардинала) лежит, то он y (один из гвардейцев ранен) нет. Это так называемый «абстрактный экспрессионизм», который стремится избежать ряда концептуальных трудностей, свойственных номинализму[2]. Поскольку выполнение этой — коммуникативной — функции возможно лишь постольку, поскольку (научное, математическое) сообщество *верит* в надежность, связанность, упорядоченность, принудительность выводов с помощью и в контексте данного абстрактного языка, то еще более точно такая номиналистская позиция может быть названа «экспрессионизмом на основе совместной веры (belief expressionism)»[3].

Рефлексия над дискуссией реализма и антиреализма подводит к заключению о том, что в определенном смысле допустимо говорить о необходимости введения понятия *мета*онтологии, имея в виду совокупность вопросов, касающихся собственно онтологии, такие как их осмысленность, уровни объективности и сложности ее анализа. Именно в контексте своего рода метаонтологии математика может быть органично представлена как совокупность метафорических предложений, относящихся к некоторой «реальности», которая допускает спектр различных истолкований в духе, близком к тому, ко-

---

[1] *Pettigrew R.* Indispensability Arguments and Instrumental Nominalism // Review of Symbolic Logic. 2012. Vol. 5(4). P. 707.

[2] *Yablo St.* Op. cit.

[3] *Liggins D.* Abstract Expressionism and the Communication Problem // British Journal for the Philosophy of Science. 2013. Vol. 64. N 4. P. 13.

торый представлен Ю.И. Маниным[1], К. Девлином[2], Дж. Лакоффом и Р. Нюньесом[3].

Между тем комбинация некоторых положений структурализма, антиреализма (номинализма) в версии психологизма и «абстрактного экспрессионизма», биологической предопределенности базисных логико-математических абстракций[4] и идеи нормативного статуса бытия математических объектов М.А. Розова[5] позволяют обозначить своего рода «*срединную*», *третью линию* между реализмом и номинализмом в основаниях логики и математики, снять их противостояние и пролить новый свет на реальный модус существования математических объектов. Подобные попытки сами по себе[6] или отталкивающиеся от пересмотра статуса аргумента незаменимости уже предпринимались, но обычно оценивались как не вполне удачные, поскольку оказывалось, что речь шла об усовершенствовании аргументации либо реализма, либо номинализма[7]. Причину этих неудач можно усмотреть в том, что во всех случаях неявно указанные попытки подразумевали двойную (внутреннюю и внешнюю) детерминацию математики.

Я ввожу качественно новую идею о *тройной* детерминации математики. Обоснование этой идеи предполагает дальнейший прогресс нейробиологических и психологических исследований когнитивных процессов.

Идеи тройной детерминации математической реальности и ее онтогенетических оснований

Контуры «третьей линии» в философии математики связаны с идеей тройной детерминации математической реальности и учетом особенностей мозга в генерации базисных математических (арифметических) понятий. Итак, по порядку.

---

[1] *Манин Ю.И.* Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008. С. 52–60.

[2] *Devlin C.* Thinkig Evolved and Why Numbers Are Like Gossips. New York: Basic Books Publ., 2000.

[3] *Lakoff G., Nunez R.E.* Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. New York: Basic Books Publ., 2000.

[4] *Тростников В.Н.* Конструктивные процессы в математике. М.: Наука, 1975.

[5] *Розов М.А.* Способ бытия математических объектов // Методологические проблемы развития и применения математики. М.: АН СССР: Центральный совет философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР, 1985.

[6] *Hale B.* Nominalism // Physicalism in Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 1990.

[7] *Colyvan M.* Scientific Realism and Mathematical Nominalism: A Marriage Made in Hell // Rationality and Reality: Conversations with Alan Musgrave / Eds. C. Cheyne, J. Worrall. Springer. 2006.

Паттерны (по М. Резнику) представляют собой базисные, элементарные образования, которые формируют математическую реальность. Между тем в этой реальности человеческий интеллект вырезает то, что предзадано характером его деятельности и предшествующим опытом. В этом смысле можно говорить о нормативности абстрактных объектов математики[1] и об априорности процесса математического творчества, обусловленного активностью субъекта логико-математического познания[2]. Однако когнитивные способности субъекта логико-математического познания исторически обусловлены, а математика может считаться важнейшим элементом человеческой культуры и человеческой деятельности. Этот элемент столь же универсален и определен, как и другие элементы на конкретном историческом отрезке и в конкретном социальном окружении. Когнитивные способности субъекта логико-математического познания определяются не только его (настоящей и предшествующей) деятельностью, но и ее биологической предопределенностью, двойной (внешней и внутренней) детерминацией психики, ее перцептивными компонентами. В данном случае мы имеем непосредственное пересечение философии науки (и ее социально-культурного измерения) и философии сознания.

Известно, что разнородные, но сравнительно молодые языки креольской группы, географически далеко разделенных этносов имеют некоторые общие — базисные — структуры. Наличие этой общности обычно объясняют наличием некоторых универсальных когнитивных структур, которые обусловлены соответствующими особенностями человеческого мозга. У «старых» естественных языков эти структуры под плотными наслоениями исторической и культурной эволюции крайне сложно выявить. По аналогии с высокой степенью правдоподобия можно предположить, что особенности человеческого мозга отражаются и на логико-математических языках. «Если мы хотим глубже познать природу математики, то, — утверждает Р. Херш, — мы обязаны понять и осмыслить специфические свойства человеческого мозга»[3].

Действительно, специфика чувственного восприятия человека такова, что в перцептивном пространстве отрезок является более простым объектом, нежели точка, а в процессе восприятия объекта происходит укрупнение и обобщение данных отдельных (групп) нейронов, формируются целостные конфигурации, которыми и оперирует мозг и через «призму» которых он анализирует действительность.

---

[1] *Розов М.А.* Op. cit.

[2] *Бажанов В.А.* Кантианские мотивы в логике и философии науки: идея единства априорного и эмпирического знания // Кантовский сборник. 2012. № 3.

[3] *Hersh P.* Op. cit. P. 18.

И это понятно, поскольку в процессе эволюции для выживания было важно различать крупные визуальные конфигурации, которые оказываются первичными с точки зрения формирования образа внешнего предмета. Так, теорема Кантора о вложенных отрезках, лежащая в основе теории действительных чисел (любая последовательность убывающих ограниченных множеств действительных чисел имеет непустое пересечение) как бы вынуждается особенностями этого (перцептивного) пространства, а теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке соответствует нашему врожденному представлению о непрерывности. Анализ особенностей восприятия младенцев свидетельствует, что они, еще не приобретшие какого-нибудь зрительного опыта, предпочитают одни формы другим. Отсюда напрашивается вывод о том, что селекция форм происходит на уровне глубинных, «врожденных» структур мозга. Последующая эволюция интеллекта безусловно корректирует механизмы селекции[1].

Некоторые математики уже в течение нескольких десятков лет выражают уверенность, что эта наука является формой (биологической) адаптации к окружающей среде[2]. Новейшие нейробиологические и нейропсихологические исследования мозга достаточно убедительно подтверждают эту гипотезу, причем факты говорят в пользу природной врожденности элементарных «дигитальных» (числовых, арифметических) свойств не только у человека, но и у вообще многих представителей мира живого. В книге С. Дехане с весьма характерным названием «Чувство числа (number sense). Как мозг порождает математику», первое издание которой увидело свет в 1997 г., утверждается, что «зачатки арифметики укоренены в самих генах живых существ»[3]. Всё более уверенно звучит мысль, что «представления о числе онтогенетически обусловлены и не зависят от языковых способностей»[4]. Здесь имеются в виду человек и широкий круг животных, причем «чувство числа» у них генетически запрограммировано, а не является результатом какого-то обучения.

В XXI в. это смелое предположение получило солидное экспериментальное подтверждение. Речь идет о том, что «*чувство числа*», своего рода *протоматематическая интуиция*, продуцируется на уровне

---

[1] *Тростников В.Н.* Указ. соч. С. 239–248.

[2] См., например: *Steen A.* A Mathematical Mystery Tour: Discovering the Truth and Beauty of the Cosmos // Notices of AMS. 2000. Vol. 47. N 2. P. 224.

[3] *Dehaene S.* The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. N.Y.: Oxford University Press, 2011. P. 231.

[4] *Gelman R., Butterworth B.* Number and Language: How are they Related? Trends in Cognitive Sciences. 2005. Vol. 9. N 1. P. 6.

некоторых базисных структур мозга животных и у младенцев самого раннего возраста — независимо от их иных способностей, включая языковые и обучения. Функции мозга различных животных, младенцев и взрослых схожи; независимо от культурной и/или языковой принадлежности поражение каких-то его участков может приводить к потере «чувства числа», но при этом не затрагивает их иные интеллектуальные способности.

В области современных информационных технологий принято говорить о том, что в компьютере software (программное обеспечение) и hardware («железо», материальное воплощение счетного устройства в виде компьютера) независимы друг от друга. Однако метафора software и hardware в буквальном смысле не применима к мозгу: работа нейронных сетей и психические состояния (человека, животных) оказываются тесно связанными и взаимообусловленными.

Совершенно очевидно, что принятие факта обусловленности элементарных математических (арифметических) операций устройством мозга существенно ослабляет (если вообще не подрывает!) идеологию и (оборонительные) позиции математического реализма, причем это хорошо понимается самими математиками. Так, Б. Дэвис, президент Лондонского математического общества, апеллирует к данному факту в своей заметке, которая знаменательно озаглавлена «Пусть платонизм умрет» и в которой он провозглашает, что математическое творчество «ничем не отличается от других форм ментальной активности» и имеет те же источники, что и другие человеческие способности, связанные с адаптацией[1].

Анализ операций мозга с количественной (и числовой) информацией показал, что мозг обрабатывает ее по аналогии с особенностями человеческого восприятия внешних раздражителей, выраженным в законе Вебера-Фехнера (интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности раздражителя). Так и мозг использует логарифмическое «кодирование» количественной (числовой) информации. И это понятно, поскольку мозг стремится минимизировать множества задействованных в обработке этой информации нейронов[2]. Мозг дифференцирует количественную, числовую и пространственную информацию, распределяя ее по разным своим участкам.

---

[1] *Davies B.* Let Platonism Die // EMS Newsletter. June. 2007. P. 25.

[2] *Dehaene S.* The Neural Bais of the Weber-Fechner Law: a Logirithmic Mental Number Line // Trends in Cognitive Sciences. 2003. Vol. 7. N 4. P. 145; *Dehaene S., Izard V., Spelke E., Pica P.* Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Cultures // Science. 2008. Vol. 320. P. 1217.

Центральную роль в обработке числовой информации играет внутритеменная борозда (intrapariental sulcus), которая лишена возможности работать с языковой информацией[1]. В теменной области мозга существуют три типа нейронной сети, которые ответственны за решение различных арифметических задач: внутритеменная ассоциирована с обработкой количественной информации, левая угловая извилина (angular gyrus) выполняет вербальную обработку числовой информации, а верхние париентальные доли (superior parietal lobule) обеспечивают «пространственное и непространственное внимание»[2]. Внутритеменная борозда обрабатывает информацию, связанную с явным представлением количества (например, выполняет операцию вычитания чисел), тогда как угловая извилина активизируется при работе с ранее уже изученными данными[3]. Геометрические образы в большей степени, чем алгебраические и вообще нематематические представления, возбуждают левую внутритеменную область. Нечисловая информация же обрабатывается в той же части мозга, которая ответственна за общие языковые навыки — в левой средней извилине пояса и левой внутренней фронтальной извилине (left middle gyrus; left inferior front gyrus)[4].

Архитектура развивающегося мозга и его способности к когнитивной активности оказываются зависимой от ряда социально-экономических факторов (дохода родителей и впоследствии собственного дохода, социального статуса, образования). Так, доля серого вещества (например, в гиппокампе) тем выше, чем более благоприятны социально-экономические факторы, в которых формировался носитель данного мозга[5].

Если иметь в виду наличие структур мозга, которые онтогенетически определяют «чувство числа», протоматематическую интуицию, то логико-математические языки оказываются как бы надстройкой, вторым этажом над теми нейробиологическими структурами, которые в результате синтеза данных восприятия и внешних конфигура-

---

[1] *Dehaene S., Molko N., Cohen L., Wilson A.* Arithmetic and the Brain // Current Opinion in Neurobilogy. 2004. Vol. 14. P. 219.

[2] *Dehaene S., Piazza M., Pinel P., Cohen L.* // Cognitive Neuropsychology. 2003. Vol. 20. N 3–6. P. 488.

[3] *Butterworth B., Walsh V.* Neural Basis of Mathematical Cognition // Current Biology. 2011. Vol. 21. N. 16. P. 2.

[4] *Zhang H., Chen C., Zhou X.* Neural Correlates of Numbers and Mathematical Terms // Neuroimage. 2012. Vol. 60. P. 237.

[5] *Jednorog K., Altarelli I., Monzalvo K., Fluss J., Dubois J., Billard C., Dehaene-Lambertz G., Ramus F.* The Influence of Socioeconomic Status on Children's Brain Structure // PLoS ONE. 2012. Vol. 7. N 8. P. 5.

ций в конечном счете предопределяют компоненты математической реальности. Кроме того, и сам характер человеческой деятельности через свои нормативные компоненты определенным образом вносит свою лепту в формирование объектов этой реальности. Отсюда можно понять тот смысл, который великий К. Гёдель, несмотря на свои симпатии к платонизму, вкладывал в понятия *объективной и субъективной* математики: об объективной математике, вдохновляющей платонистов можно говорить как о постоянном расширяющемся до бесконечности множестве идей, которые никогда не будут исчерпаны конечным человеческим разумом (математик как первооткрыватель «новых» земель), а о субъективной математике можно говорить в смысле того, что математика есть продукт человеческого интеллекта, его гениальная конструкция, которую он постоянно творит и усовершенствует (математик как инженер и строитель величественного здания математики).

Здесь нельзя не вспомнить некоторые положения энактивизма[1], который стремился пролить новый свет и на процесс познания, и на происхождение и природу математики.

Математика под углом зрения энактивизма также является не только процессом репрезентации некоторых количественных и пространственных отношений внешнего мира, сколько процессом создания особой реальности, которая несет на себе печать специфики телесной организации человека (имея в виду и физиологию его мозга), — процессом, в котором теснейшим образом переплетаются механизмы репрезентации (внешние стимулы), особенности его телесной организации (внутренние стимулы) и собственно деятельность с её исторической обусловленностью и социально-культурной предопределенностью, формирующую нормативы действия с абстрактными объектами.

Таким образом, обнаруживается тройная детерминация математической реальности (системы логико-математических объектов) — «внутренняя», «внешняя» и собственно деятельностная (нормативная). Думается, что такой подход позволяет наметить контуры направления, способного преодолеть противостояние математического реализма и номинализма в виде «третьего» пути, сглаживающего «углы» и реализма, и номинализма и снимающего ряд эпистемологических затруднений, которые характерны для философии математики последних десятилетий.

---

[1] *Бескова Н.А., Князева Е.Н., Бескова Д.А.* Природа и образы телесности. М.: Прогресс-Традиция, 2011; *Lakoff, Nunez.* Op. cit.

Библиографический список

Бажанов В.А. Кантианские мотивы в логике и философии науки: идея единства априорного и эмпирического знания // Кантовский сборник. 2012. № 3.

Бажанов В.А. Dialetheism как методология паранепротиворечивой логики: исторический аспект // Восьмые Смирновское чтения по логике. Материалы международной научной конференции 19–21 июня 2013. М.: МГУ, 2013.

Бажанов В.А., Новоселов М.М. Логика научного познания и логика абстракций в аспекте интервальной семантики // Логика научного познания. Актуальные проблемы. М.: Наука, 1987.

Бескова Н.А., Князева Е.Н., Бескова Д.А. Природа и образы телесности. М.: Прогресс-Традиция, 2011.

Карпенко А.С. Философский принцип полноты. Ч. II // Вопросы философии. 2013. № 7.

Манин Ю.И. Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.

Новоселов М.М. Абстракция в лабиринте познания. М.: Идея-пресс, 2005.

Резник М. Структурализм и идентичность математических объектов // Логические исследования. 2010. Вып. 16.

Розов М.А. Способ бытия математических объектов // Методологические проблемы развития и применения математики. М.: АН СССР: Центральный совет философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР, 1985.

Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике. М.: Наука, 1975.

Целищев В.В. Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002.

Целищев В.В. Онтология математики. Объекты и структуры. Новосибирск: Наука, 2003.

Azzouni J. Ontology and the Word 'Exist': Uneasy Relations // Philosophia Mathematica. 2010. Vol. 18.

Balaguer M. Philosophy of Mathematics // Encyclopedia Britannica. 2003 (http://www.eb.com).

Balaguer M. Realism and Anti-realism in Mathematics // Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Amsterdam; London; Oxford: North-Holland Elsevier, 2009.

Batterman R.W. On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science // British Journal for the Philosophy of Science. 2010. Vol. 61.

Bazhanov V.A. Proof as an Ethical Procedure // Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science / Eds. E. Agazzi, F. Minazzi. Bruxelles; Bern; Berlin; Frankfurt am Main; New York; Oxford; Wien: Peter Lang, 2008.

Benacerraf P. Mathematical Truth // The Journal of Philosophy. Vol. 70. N 19.

Bernays P. Sur le platonisme dans les mathématiques // L'enseignement mathematique. 1935. Vol. 34.

Bernays P. On Platonism in Mathematics // Philosophy of Mathematics. Selected Readings / Eds. P. Benacerraf and H. Putnam. Cambridge; N.Y.: Cambridge University Press, 1983.

Butterworth B., Walsh V. Neural Basis of Mathematical Cognition // Current Biology. 2011. Vol. 21. N 16.

Callard B. The Conceivability of Platonism // Philosophia Mathematica (III). 2007. Vol. 15.

Cole J. Mathematical Domains: Social Constructs? // Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy / Eds. B. Gold, R. Simons. Mathematics Association of America, 2008.

Colyvan M. Scientific Realism and Mathematical Nominalism: A Marriage Made in Hell // Rationality and Reality: Conversations with Alan Musgrave / Eds. C. Cheyne, J. Worrall. Springer, 2006.

Davies B. Let Platonism Die // EMS Newsletter. June. 2007.

Dehaene S. The Neural Bais of the Weber-Fechner Law: a Logirithmic Mental Number Line // Trends in Cognitive Sciences. 2003. Vol. 7. N 4.

Dehaene S. The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. N.Y.: Oxford University Press, 2011.

Dehaene S., Piazza M., Pinel P., Cohen L. // Cognitive Neuropsychology. 2003. Vol. 20. N 3–6.

Dehaene S., Molko N., Cohen L., Wilson A. Arithmetic and the Brain // Current Opinion in Neurobilogy. 2004. Vol. 14.

Dehaene S., Izard V., Spelke E., Pica P. Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Cultures // Science. 2008. Vol. 320.

Devlin C. Thinkig Evolved and Why Numbers Are Like Gossips. New York: Basic Books Publ., 2000.

Field H. Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell Publishers, 1989.

Field H. Mathematical Objectivity and Mathematical Objects // Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics / Eds. Stephen Laurence and Cynthia MacDonald. Oxford: Blackwell, 1998.

Gelman R., Butterworth B. Number and Language: How are they Related? Trends in Cognitive Sciences. 2005. Vol. 9. N 1.

Hale B. Nominalism // Physicalism in Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 1990.

Heller M. Deep Questions on the Nature of Mathematics // Notices of the AMS. 2013. Vol. 60. N 5.

Hersh P. On Platonism // European Mathematical Society Newsletter. June. 2008.

Irvine A.D. Nominalism, Realism, and Physicalism in Mathematics // Physicalism in Mathematics / Ed. A.D. Irvine. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 1990.

Jednorog K., Altarelli I., Monzalvo K., Fluss J., Dubois J., Billard C., Dehaene-Lambertz G., Ramus F. The Influence of Socioeconomic Status on Children's Brain Structure // PLoS ONE. 2012. Vol. 7. N 8.

Lakoff G., Nunez R.E. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. New York: Basic Books Publ., 2000.

Liggins D. Abstract Expressionism and the Communication Problem // British Journal for the Philosophy of Science. 2013. Vol. 64. N 4.

Linnebo O. Platonism in the Philosophy of Mathematics. Version of 2011 // Stanford Encyclopedia of Philosophy (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/platonism-mathematics/).

Maddy P. Mathematical Existence // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. Vol. 11. N 3.

Musgrave A. Essays on Realism and Rationalism. Amsterdam: Rodopi, 1999.

Pettigrew R. Indispensability Arguments and Instrumental Nominalism // Review of Symbolic Logic. 2012. Vol. 5(4).

Priest G. The Language of Dialetheism. Preprint, 2010.

Psillos S. Scientific Realism // Encyclopedia of Philosophy / Ed. D. Borchert. Detroit: MacMillan Reference. 2006. Vol. 8.

Putnam H. Philosophy of Logic // Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1971. 2nd ed.

Quine W.V.O. Philosophy of Logic. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986. 2nd ed.

Rodriguez-Pereyra G. Nominalism in Metaphysics. Version of 2011 // http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/nominalism-metaphysics

Rosen G. Nominalism, Naturalism, and Epistemic Relativism // Philosophical Perspectives. 2001. Vol. 15.

Rosen G. The Reality of Mathematical Objects // Meaning in Mathematics / Ed. J. Polkinghorne. Oxford: Oxford University press, 2011.

Steen A. A Mathematical Mystery Tour: Discovering the Truth and Beauty of the Cosmos // Notices of AMS. 2000. Vol. 47. N 2.

Szabo L. How can physics account for mathematical truth? Preprint. 2009 // http://philsci-archive.pitt.edu/5338/1/szabo-phys_math.pdf

Weingartner P. On the Demarcation between Logic and Mathematics // The Monist. 1982. Vol. 65. N 1.

Woods J. Against Fictionalism // Model-Based Reasoning in Science and Technology (Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics). 2014. Vol. 8 (preprint).

Yablo St. Abstract Objects: A Case Study // Philosophical Issues. 2002. Vol. 12.

Yablo St. Explanation, Extrapolation and Existence // Mind. 2012. Vol. 121. N 487.

Zhang H., Chen C., Zhou X. Neural Correlates of Numbers and Mathematical Terms // Neuroimage. 2012. Vol. 60.

Бычков С.Н.

ПРИМЕНИМОСТЬ МАТЕМАТИКИ КАК ФИЛОСОФСКАЯ ПРОБЛЕМА

Применимость математики для многих специалистов в этой области знания не выступает в качестве особой философской проблемы. Неявно предполагается, что в случае доказательства непротиворечивости определенных разделов математики автоматически будет решена и проблема её применимости: математика хорошо обустроена в мыслях Творца, поэтому ничто не мешает построенному в соответствии с его планом миру подчиняться наличным математическим закономерностям. «Платонистский» взгляд на математику (мы намеренно отвлекаемся от позитивного понимания противоречия Платоном: см. «Софист», 259 a-b; только начиная с Аристотеля непротиворечивость становится для математики насущной) полагает применимость математики производной от её непротиворечивости. Отсутствие доказательства непротиворечивости актуализирует в этом смысле и проблему применимости математики.

Для философски мыслящих ученых подобного хода мыслей недостаточно, и для Декарта применимость математики приобрела проблемный характер. Проблемность применимости математики естественно вытекает из проводимого им противопоставления мыслящей и протяженной субстанций. Согласование мыслимого мира и реального мира, кривой, задаваемой в мире математических объектов посредством алгебраических символов, и геометрического контура той же кривой в реальном пространстве объявляется в картезианстве заслугой Бога, опосредующего субстанции, не имеющие ни одного общего предиката.

Лейбниц также сознавал эту проблему, но её решение он получил как частный случай общего философского подхода. У Лейбница «математическое и логическое мышление находятся по одну сторону: они принадлежат миру чистого рассудка, intellectus ipse. Они вместе противостоят миру восприятия, простых “истин факта”, но это отличие нигде не становится противоречием, истинным конфликтом между ними. Основной метафизический принцип философии Лейбница есть принцип “предустановленной гармонии”,

распространяющийся также на отношение разума и опыта. Истину чистого разума не получить из опыта, из рассмотрения единичных чувственных примеров, но каждая истина такого рода без всяких ограничений значима *для* опыта. Между логикой и математикой, с одной стороны, и эмпирико-физическим познанием — с другой, никогда не возникает раскол — в системе Лейбница нет места проблеме *применимости* математики»[1].

Для Канта, не принимавшего принцип «предустановленной гармонии», проблема применимости математики вновь становится актуальной. Он «ставит вопрос об условиях возможности согласованности априорных понятий и эмпирических фактов. Ответ на этот вопрос гласит, что и *эмпирический* предмет, будучи предметом, не просто дан, но включает в себя момент математической конструкции. Эмпирическая предметность реализуется только на основании эмпирического *порядка,* а он возможен лишь благодаря чистому чувственному созерцанию пространства и времени... Математическое не обладает теперь особым логическим достоинством; его значение, его quid juris, полностью выявляется его участием в построении эмпирического познания»[2].

У Канта в сравнении с теорией познания Лейбница «существенно увеличивается дистанция между логическим и математическим познанием. Не соотносясь с чистыми формами созерцания, пространством и временем, мышление становится совокупностью аналитических суждений, хотя и не содержащих в себе противоречий, но не имеющих права притязать на какую бы то ни было плодотворную роль в познании в целом»[3].

Кантовская «“чистая чувственность” занимает в целостном строении математики совсем иное место, чем у Лейбница. Из простого средства представления, каковым чувственность была у Лейбница, она превращается в самостоятельное *основание* познания: созерцание обретает фундирующую и легитимирующую ценность. Для Лейбница относимая к объективной связи идей область интуитивного познания отделялась от области символического познания, где мы имели дело не с самими идеями, но с представляющими их знаками. Интуиция для него не образует противостоящую логическому инстанцию, но она включает в себя логическое и математическое как свои особые формы. Напротив, для Канта граница проходит не между интуитивным и символическим мышлением, но между “дискурсивным” поня-

---

[1] *Кассирер Э.* Философия символических форм. Т. 3. Феноменология познания. М.; СПб., 2002. С. 189.

[2] Там же. С. 289–290.

[3] Там же. С. 290.

тием и “чистым созерцанием”, причем содержание математического находит свое основание только в последнем»[1].

Э. Кассирер справедливо констатирует тот факт, что в XIX в. математика «пошла... по пути, проложенному Лейбницем, а не Кантом. Этому поспособствовало в первую очередь открытие неэвклидовой геометрии. Благодаря полученным таким образом новым проблемам математика всё более делалась “гипотетико-дедуктивной системой”, истинность которой заключалась исключительно в её внутренней логической согласованности и последовательности, а основанием её не могли быть какие бы то ни было материальные суждения созерцания. Математика прибегает к созерцанию не с целью положительного доказательства или обоснования, но пользуется им лишь для конкретной *репрезентации* общих систем отношений, созданных чистым мышлением. Она показывает, что таких репрезентаций имеется бесконечно много, что определенная система “аксиом” реализуется не в какой-то единичной области данных созерцания, но может реализовываться самым различным образом»[2]. Указанное преобразование математики, происходившее на глазах молодого Кассирера, произвело на него столь сильное впечатление, что он не удержался от упрека в адрес Канта.

Лейбниц критиковал физическое учение Декарта за то, что оно «по-прежнему цепляется за тела, за *образы* протяженной массы. Его физика должна совершить последний и решающий шаг: она должна освободить мышление как от принудительности чувственного восприятия, так и от закрепощенности образами»[3]. Однако естественнонаучная мысль в XVIII в. «двигалась... путем “индуктивной” методологии, примером которой могут служить “Математические начала натуральной философии” Ньютона. Последующие великие философы-систематики познания природы отталкивались от Ньютона, а не от Лейбница. Развитие философского учения о принципах даже продемонстрировало отход на прежние позиции: лейбницевской “интеллектуализации” противостоит кантовское понятие “чистого созерцания”. Кантом вновь почитается оспаривавшееся Лейбницем безусловное господство геометрической конструкции. Ни одно понятие рассудка не может притязать на эмпирическую истинность и объективную общезначимость, пока оно не было “схематизировано” созерцанием. Но “сообщая реальность”, такая схема одновременно “ограничивает”: она удерживает понятие в границах пространственной *представимости*. Из этого проистекает взаимосвязь трансцен-

[1] Там же.
[2] Там же. С. 290–291.
[3] Там же. С. 359.

дентальной эстетики и трансцендентальной логики, определяющая строение всей "Критики чистого разума"»[1].

Но и без чистой математики Лейбниц всё равно одержал бы в XX в. победу над Кантом. Критика Лейбницем чрезмерного увлечения физиков образами созерцаниями не останавливала их даже в конце XIX в.: «Часто один и тот же учёный при объяснении того же самого феномена или родственного ему круга феноменов просто возводил рядом друг с другом совершенно различные образные представления. Даже столь фундаментальная работа, как "Электричество и магнетизм" Максвелла, дает пример пестрой последовательности разнородных картин, меняющихся с калейдоскопической быстротой»[2]. Однако неудача Максвелла (и ряда других физиков) в придании уравнениям электромагнетизма степени наглядности, сопоставимой с наглядностью механики или термодинамики, подтолкнула к изменению взглядов в физике на то, что считать наилучшим способом объяснения природных явлений. Собственный вывод о том, что в физике XX в. «схематизм образов уступил своё место символизму принципов»[3], Кассирер подкрепляет авторитетной цитатой из Г. Вейля: «Созерцаемые пространство и время уже не должны... служить посредником, с чьей помощью физика конструирует внешний мир; таковым становится четырехмерный континуум в абстрактно-арифметическом смысле. Если для Гюйгенса цвета были "действительными" колебаниями эфира, то теперь они оказываются лишь функциональными математическими процессами с периодическим характером, причем в этих функциях четыре независимые переменные выступают как репрезентации соотнесенного с координатами посредника. Всё остальное есть лишь *символическая конструкция* в том точном смысле, что был введен в математику Гильбертом»[4].

Сложность (и актуальность) проблемы применимости математики на сегодняшний день объясняется невозможностью более опираться на лейбницевскую идею предустановленной гармонии: представления современной науки о структуре физического пространства на малых расстояниях несовместимы с используемой в аппарате математического анализа бесконечной делимостью его «идеального прообраза». На каком же пути можно надеяться получить её решение?

Прежде всего, следует, на наш взгляд, оставить попытки «решить» проблему применимости средствами сугубо математического характера (что, по существу, хотел сделать Гильберт, формулируя

---

[1] Там же. С. 360.

[2] Там же. С. 361.

[3] Там же. С. 366.

[4] *Weyl H.* Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. München, 1927. S. 80; цит. по: *Кассирер Э.* Философия символических форм. Т. 3. С. 367.

свою шестую проблему). В основе подобных попыток лежит, в конечном счете, аристотелевская теория абстракции[1]. Поскольку эта теория опирается на понятие Ума-Перводвигателя, производного от аксиоматически построенной геометрии, а та, в свою очередь, стала возможной лишь на пути превращения землемерия в оторванную от практики созерцательную науку[2], то едва ли можно надеяться, что «европоцентристский» подход сможет привести к успеху в решении проблемы, *инвариантной* с точки зрения социокультурных аспектов философии науки.

Подкрепить это утверждение можно тем, что любой «внутриматематический» подход к решению проблемы применимости математики будет опираться (как и метаматематика Гильберта) на использование символов. Между тем и символы также не могут рассматриваться в качестве «инвариантного» средства решения проблемы применимости математики.

Важность понятия символа для современной математики отмечал Г. Вейль: «Математика — это наука о бесконечности, ее цель — символическое постижение бесконечности человеческим, то есть конечным»[3]. В этом понимании акцент сделан на самом существенном в понятии символа — на его предназначение служить орудием выявления сути *других* вещей: «Для символа, как его понимают все культурные языки, необходима такая идея, которая не имела бы ничего общего с непосредственным содержанием самого символа. У древних греков на о. Делосе Латона почиталась в виде полена. Полено это, несомненно, есть символ Латоны; и это не только потому, что Латона есть в данном случае нечто внутреннее, а полено — нечто внешнее, но еще и потому, что полено и Латона по содержанию этих образов не имеют ничего общего между собою»[4].

Далеко не сразу, однако, греческая философская мысль выработала подобное понимание символа. Вот что пишет А.Ф. Лосев по поводу «платоновского символизма»: «У Платона употребляется и самое слово symbolon, но оно всегда означает у него слишком общие предметы, чтобы считать его одним из основных философских терминов. Когда мы читаем, что каждый человек является “символом” своей половины, с которой он когда-то представлял единое целое (Conv. 191), то это слово никак нельзя переводить по-русски “символ”. Тут просто имеется в виду буквальное значение греческого слова, обозначающего “совпадение”. Если мы это слово переведем как “половину”, то едва

---

[1] *Бычков С.Н.* Как числа стали абстрактными? // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2002. Вып. 7 (42). С. 190–201.

[2] *Бычков С.Н.* «Греческое чудо» и теоретическая математика. М., 2007.

[3] *Weyl H.* The Open World. New Haven, 1932. P. 8.

[4] *Лосев А.Ф.* Проблема символа и реалистическое искусство. М., 1995. С. 28.

ли это будет ошибкой. Или когда для торговли требуются площадь и деньги как "символ обмена" (R.P. II 371b), то и здесь греческое слово symbolon меньше всего означает наше понятие о символе. Это, действительно, "знак" в самом бытовом и обывательском значении слова, решительно без всякого философского или эстетического значения. Если не считать сомнительных "Писем", то этим и ограничивается весь платоновский материал с термином "символ". Заметим, что вообще в греческом языке термин этот имеет самое широкое бытовое значение, — главным образом значение "договора".

<...>

Отсутствие у Платона философского и эстетического значения всех этих терминов, безусловно, свидетельствует о том, что Платон был *весьма далек от философского и уж тем более от чисто логического осознания своего собственного символизма*. Его собственный символизм — как мы теперь уже хорошо знаем, весьма глубокий, широкий и насыщенный, — оставался у него, вообще говоря, на стадии полной непосредственности и наивности. Как большинство великих художников и поэтов совсем не отдаёт себе никакого отчета в тех философских, эстетических и художественных категориях, которыми они бессознательно и часто глубочайшим образом пользуются, точно так же и Платон создал величественное здание философско-эстетического символизма, но сам, однако, весьма слабо разбирался в категориальных основах этого символизма и обозначал его самыми общими, часто неопределенными и даже расплывчатыми терминами»[1]. И как итог: «Символизм Платона в значительной степени *дорефлективен*»[2].

Рефлексивное понимание символа достигается тогда, когда мы *противопоставляем* значение символа его непосредственно наглядному выражению. Никакого противопоставления такого рода мы не найдём в первобытном представлении о Латоне в виде полена. Для *нас* между ними действительно нет ничего общего, а для древнего жителя о. Делос полено было не просто воплощением здесь и сейчас матери Аполлона и Артемиды, а самой богиней, соизволившей предстать в подобном образе.

Когда же достигается подобное противопоставление? Только тогда, когда значение символа (например, бесконечность, постигаемая посредством конечных математических символов) принадлежит иному — внечувственному — миру. А подобные миры — невидимое человеческому глазу из-за небесного хребта Занебесье, где находятся идеальные числа и фигуры у Платона (Метафизика, III, 2, 997b

---

[1] *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Софисты. Сократ. Платон. М., 1969. С. 549.

[2] Там же. С. 550.

12–19), или мыслящий эти же математические объекты, обнимающий Космос аристотелевский Ум-Перводвигатель[1] — по-разному относятся к реальным числам и фигурам.

У Платона о противопоставлении идеальных объектов реальным не может быть и речи, поскольку вторые стремятся подражать и походить на первых. Другое дело у Аристотеля. Там идеальные числа и фигуры бестелесны и действительно противоположны вещественным «копиям». Но бестелесность их, как показано в упомянутой работе[2], есть следствие бестелесности их в дедуктивной греческой геометрии. Мы видим, таким образом, что рефлексивное понимание символа, достигнутое только позднеантичной мыслью[3], оказалось возможным лишь благодаря аксиоматически построенной математике и тем самым «социокультурно обусловлено». А это означает, что «символический» способ обоснования факта применимости математики едва ли вообще возможен.

Единственным средством, инвариантным по отношению к особенностям той или иной культуры, являются, на наш взгляд, *категории*. Кант считал, что «мы не можем *мыслить* ни одного предмета иначе как с помощью категорий...»[4]. Поскольку «категории не выводятся из природы и не сообразуются с ней как с образцом», то поэтому «возникает вопрос, как понять то обстоятельство, что природа должна сообразоваться с категориями, т.е. каким образом категории могут a priori определять связь многообразного в природе, не выводя эту связь из природы»[5]. Поскольку Кант считал, что «явления суть лишь представления о вещах, относительно которых остается неизвестным, какими они могут быть сами по себе»[6], то ответ на поставленный вопрос фактически сводится к тому, что указанное выше обстоятельство «не более странно, чем то, что сами явления должны a priori сообразоваться с формой чувственного созерцания»[7]. Последнее же обусловлено психофизиологическим строением человеческого организма и тем самым инвариантно по отношению к «стилю мышления» той или иной культуры.

Вера во всеобщность категориального мышления, как уже отмечалось в связи с работами Кассирера, была подорвана успехами фи-

---

[1] «Математика имеет дело с формами, а не с субстратом» (Вторая аналитика, I, 13, 79a 8).

[2] *Бычков С.Н.* «Греческое чудо» и теоретическая математика. М., 2007.

[3] «Окончательную разработку понятия символа вместе с этим же самым термином “символ” мы имеем в неоплатонизме, и особенно у Прокла» (*Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Высокая классика. Харьков, 2000. С. 243).

[4] *Кант И.* Соч. Т. 3. М., 1964. С. 214.

[5] Там же.

[6] Там же. С. 213.

[7] Там же.

зико-математического естествознания. Основная гипотеза в связи с проблемой применимости математики состоит в том, что успех в категориальной интерпретации математических и физических теорий может быть достигнут, если в понимании категорий опираться не на Канта с его формально-логической абсолютизацией закона противоречия, а на диалектику Гегеля (в современной философии математики этот подход продуктивно развивает А.И. Белоусов[1]). Последнее означает, что противоречие должно рассматриваться также и с позитивной точки зрения.

В подкрепление данной гипотезы рассмотрим два примера. Первый относится к уже упоминавшемуся учению об электричестве и магнетизме.

Максвелл считал, что своим успехом он обязан работам Фарадея, в которых его идеи «выражены языком, наилучшим образом приспособленным для целей рождающейся науки...»[2]. Ключевое понятие магнитной силовой линии Фарадей вводит двумя различными способами: на основе пондеромоторного действия магнитной силы на небольшую магнитную стрелку и на основе её способности превращаться в электрическую силу. Фарадей настаивал при этом, что второй метод определения «предлагается не для упразднения прежнего метода, а для использования наряду с ним...»[3]. Именно это определение Фарадея позволило Максвеллу превратить результаты великого предшественника в основу для разработки принципиально новой концепции магнитных и электрических сил, допускающую способность этих сил к взаимопревращениям.

Введенное Фарадеем понятие магнитной силы *опосредует* механический и электродинамический аспекты её проявления. Вместе с тем, это понятие не умещается в рамки ньютоновской картины мира: оно *противоречиво*, так как отождествляет различное (линия силы *одна и та же* для проявления двух изначально различных классов явлений). Это совмещение логически невозможного в рамках ньютоновской физики и позволило Максвеллу разрешить указанное противоречие в новой (полевой) неньютоновской физической концепции.

К сожалению, этот диалектический момент развития новой физической концепции был похоронен знаменитым высказыванием

---

[1] *Белоусов А.И.* Гегелевская конструкция противоречия в контексте проблемы «математика и опыт» // Математика и опыт: Сб. статей. М., 2003. С. 467–499; *Белоусов А.И.* Категория количества в «Науке логики» Гегеля и её интерпретация в свете современной математики // Число: Сб. статей. М., 2009. С. 35–65.

[2] *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М., 1952. С. 381.

[3] *Фарадей М.* Экспериментальные исследования по электричеству. Т. 3. М., 1959. С. 559.

Герца: «Теория Максвелла — это уравнения Максвелла» — фразой, соединяющей в себе антидиалектичность (результат затмевает собой пути его получения) и формализм (примат символической формы над содержанием).

Второй пример относится к статистике, одному из основных её понятий — репрезентативной выборки (репрезентативность — это способность выборки представлять генеральную совокупность без искажений). С теоретической точки зрения единственным способом, гарантирующим репрезентативность, является простой случайный выбор.

Поскольку даже случайный отбор не в состоянии на 100% гарантировать репрезентативность выборки, вводится понятие *надежности*. Осуществляемая выборка, с одной стороны, должна быть достаточно большой, а с другой — существенно меньше генеральной совокупности по объему. Только тогда можно одновременно удовлетворить двум *противоречащим* требованиям: малой погрешности опроса и высокой его надежности.

Здесь мы встречаемся, пожалуй, с главным отличием математической статистики от теории вероятностей. Если в теории вероятностей имеется (считающаяся непротиворечивой) аксиоматика, позволяющая логически последовательно излагать её результаты, то в статистике это едва ли возможно: всякая случайная выборка в силу случайных же причин может оказаться недостаточно случайной. Это *внутреннее противоречие* статистической теории невозможно устранить никакими логическими ухищрениями. Его можно только пытаться *разрешить*, причем успех невозможно предвидеть заранее на основе сугубо качественных соображений. Удостовериться в нем удается только задним числом после проделывания соответствующих выкладок[1].

Возможно, именно этим обстоятельством объясняется тот факт, что поставленная еще в 1944 г. А.Н. Колмогоровым в докладе «Проблемы теории вероятностей» на Московском математическом обществе задача логического обоснования математической статистики (т.е. методов проверки гипотез, оценки параметров, контроля и регулирования массовой продукции по выборочным наблюдениям)[2] так и не получила решения.

Мы видим, таким образом, что попытка решения проблемы применимости математики приводит к более общим проблемам, относя-

---

[1] *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Симонова Г.И.* Теория вероятностей: Учебник для экономических и гуманитарных специальностей. М., 2009. С. 236–238.

[2] Колмогоров. Юбилейное издание в 3 кн. / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М., 2003. Кн. 1. Истина — благо. Биобиблиография. С. 90.

щимся уже не к собственно философии математики, а к философии как таковой. И в этом отношении данная работа близка по направленности работе В.Я. Перминова[1].

Библиографический список

Белоусов А.И. Гегелевская конструкция противоречия в контексте проблемы «математика и опыт» // Математика и опыт: Сб. статей. М., 2003. С. 467–499.

Белоусов А.И. Категория количества в «Науке логики» Гегеля и её интерпретация в свете современной математики // Число: Сб. статей. М., 2009. С. 35–65.

Бычков С.Н. Как числа стали абстрактными? // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2002. Вып. 7 (42). С. 190–201.

Бычков С.Н. «Греческое чудо» и теоретическая математика. М., 2007.

Кант И. Соч. Т. 3. М., 1964.

Кассирер Э. Философия символических форм. Т. 3. Феноменология познания. М.; СПб., 2002.

Колмогоров. Юбилейное издание в 3 кн. / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М., 2003. Кн. 1. Истина — благо. Биобиблиография.

Лосев А.Ф. Проблема символа и реалистическое искусство. М., 1995.

Лосев А.Ф. История античной эстетики. Софисты. Сократ. Платон. М., 1969.

Лосев А.Ф. История античной эстетики. Высокая классика. Харьков, 2000.

Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М., 1952.

Перминов В.Я. Реальность математики // Вопросы философии. 2012. № 2. С. 24–39.

Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Симонова Г.И. Теория вероятностей: Учебник для экономических и гуманитарных специальностей. М., 2009.

Фарадей М. Экспериментальные исследования по электричеству. Т. 3. М., 1959.

Weyl H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. München, 1927.

Weyl H. The Open World. New Haven, 1932.

[1] *Перминов В.Я.* Реальность математики // Вопросы философии. 2012. № 2. С. 24–39.

Г.Б. Гутнер

О ДОСТОВЕРНОСТИ ПОСТУЛАТОВ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И МАТЕМАТИКИ

Вопрос о началах науки — один из самых давних и запутанных. Какова природа тех положений, из которых мы исходим, познавая мир и развивая научные теории? Нет смысла указывать все варианты ответа на этот вопрос. Однако, как и любой философский вопрос, его приходится задавать вновь и вновь, поскольку человеческое знание, в том числе и научное, постоянно предстает в новых формах. Это не значит, что старые ответы не годятся. Просто их нельзя принимать как нечто само собой разумеющееся, а приходится продумывать заново.

О постулатах естествознания

Разговор о началах естествознания уместно, на мой взгляд, начать с краткого описания двух познавательных стратегий, которые постоянно присутствуют в научной деятельности и, как правило, дополняют друг друга. Первая из этих двух стратегий репрезентирует эмпирический характер научного знания. Последнее предстает как совокупность гипотез, выдвигаемых для объяснения наблюдаемых фактов и проверяемых в ходе дальнейших наблюдений. Познание разворачивается как последовательное выдвижение гипотез, их проверка, коррекция, опровержение, замена на альтернативные. Важным элементом этой стратегии является прогноз, благодаря которому и возможна проверка. Всякая гипотеза, объясняющая уже имеющиеся наблюдения, позволяет прогнозировать, что можно будет наблюдать при определенных, но еще не встречавшихся условиях. Иными словами, всякая гипотеза должна иметь наблюдаемые следствия. Строго говоря, несбывшийся прогноз означает ложность гипотезы — она должна быть отвергнута на основании логического правила modus tollens. На практике это происходит далеко не всегда, однако принципиальная опровержимость научных положений составляет важную черту науки.

Вторая из упомянутых нами стратегий определяет развертывание научных теорий. В.С. Степин удачно обозначил ее как «генетически-

конструктивную»[1]. Он же, обобщая размышления В.А. Смирнова[2], дал весьма емкое ее описание, которое мы здесь кратко воспроизведем. Согласно этому описанию в основе всякой научной теории лежит так называемая «фундаментальная теоретическая схема»[3]. Последняя фиксируется с помощью постулатов теории и задает связь исходных понятий или базовых идеальных объектов. Развитие теории состоит в извлечении всех возможных следствий из этих постулатов. Это происходит при использовании фундаментальной теоретической схемы в конкретных условиях. Последнее, по словам Степина, есть своего рода мысленный эксперимент[4], т.е. попытка установить, как будут вести себя идеальные объекты теории при заданных ограничениях. Подобным образом формулируются и решаются теоретические задачи, а также конструируются новые идеальные объекты.

Ясно, что обе стратегии дополняют друг друга. Любые положения теории, в том числе и ее исходные постулаты, представляют собой гипотезы. Они всегда подвержены критике, которая осуществляется в естествознании, прежде всего, в ходе опытной проверки. Решение теоретических задач в конечном счете должно приводить к получению наблюдаемых результатов. Эти результаты оказываются следствиями исходных постулатов, хотя, возможно, и весьма отдаленными. Поэтому их опровержение, так или иначе, задевает основы теории. Конечно, вопреки убеждению Поппера, едва ли частный результат заставит кого-либо отказаться от теории в целом. Тем не менее научная теория всегда открыта для критики и может быть рано или поздно отвергнута.

Мы теперь знаем, что динамика научного знания гораздо сложнее. Занятие наукой включает не только идеальное конструирование и рациональную критику. Эти две стратегии раскрывают лишь рациональный аспект научной деятельности. Несколько десятилетий назад Полани, Кун, позднее Фейерабенд показали влияние иррациональных факторов, сложную связь теорий с неявным знанием и научными парадигмами. Но все же в истории науки прослеживается линия, определяемая последовательным выдвижением гипотез, идеальным конструированием и критической проверкой. Такой образ науки можно признать идеализацией, но не иллюзией. Для дальнейшего нам потребуется более точное описание этой — рациональной — стороны науки.

---

[1] *Степин В.С.* Генетически-конструктивный метод // Новая философская энциклопедия. Т. 1. М., 2000. С. 499–500.

[2] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М., 2001. С. 417–437.

[3] *Степин В.С.* Теоретическое знание. М., 2000. С. 108.

[4] Там же. С. 127.

Мы должны, прежде всего, согласиться с тем, что естественнонаучные теории, будучи построены на гипотетических основаниях, не являются истинными. Они всегда лишь более или менее правдоподобны. Это обстоятельство имеет весьма глубокий смысл. Оно свидетельствует о том, что теория имеет дело с реальностью. Как бы далеко ни заходили теоретические построения, они неизбежно упираются в опытную проверку. Результат же этой проверки всегда может оказаться неожиданным. «Сопротивление материала», ощущаемое в любом научном исследовании, сказывается в том, что теория — лишь наше представление о реальности, сложившееся на основании нашего ограниченного опыта. Сама реальность есть «вещь в себе». Сталкиваясь с ней, мы обречены строить гипотезы, которые дают лишь приблизительное знание и могут быть опровергнуты в любой момент. Но именно такая приблизительность и опровержимость свидетельствуют о «встрече с реальным».

Итак, любое положение, выдвигаемое естествознанием, представляет собой гипотезу. Это верно и для временных ad hoc гипотез, и для постулатов развитой научной теории. Гипотезу выдвигали, например, астрономы позднего Средневековья, вводившие очередной эпицикл, чтобы согласовать новые наблюдения с исходной моделью. Гипотезы, несмотря на свое гордое заявление, выдвигал и Ньютон, формулируя основные законы механики. Основная черта гипотезы, как отмечают многие авторы, состоит в том, что для нее всегда существует альтернатива. Можно найти иную гипотезу, которая объясняла бы те же самые наблюдения.

Могут, конечно, возникнуть сомнения в том, что весь спектр научных положений имеет одинаковый статус. Слишком уж велико видимое различие между двумя названными здесь типами утверждений. Тем не менее, я полагаю, что это различие, если можно так выразиться, только количественное. Научные утверждения, несмотря на различное место, занимаемое ими в научном дискурсе, и различный вес, придаваемый им научным сообществом, все же имеют одинаковую природу. Сейчас я попробую привести дополнительные аргументы в пользу высказанного взгляда.

Для этого опишем сначала существо различий. Точности ради заметим, что говорить можно не о двух, а скорее, о трех типах научных положений. Первый тип — это постулаты теорий и их прямые следствия, возникшие при решении теоретических задач. Ко второму типу мы отнесем ad hoc гипотезы, такие, например, как только что упомянутое введение очередного эпицикла. Третий тип составляют, по моему мнению, те положения, которые не стали пока частью теорий, а призваны объяснить что-то еще совершенно непонятное.

Различие между первым типом положений и двумя другими можно определить следующим образом. Положения первого типа составляют завершенную идеальную целостность, консистентную научную теорию. Эта целостность фундирована постулатами теории, которые определяют решения частных теоретических задач. Последние представляют собой логически согласованные части целого. Положения второго и третьего типа не представляют собой подобной целостности. Одни из них являются своего рода дополнениями к уже завершенной теории. Создаются они для того, чтобы вписать в эту теорию, т.е. в уже оформленную целостность, нечто, по видимости из нее выбивающееся. Другие же вообще не соотнесены с каким-либо завершенным состоянием знания, а представляют собой некие частности, возникшие, возможно, наряду с другими подобными частностями, никак с ними не связанными, по крайней мере, по видимости.

Присмотримся внимательнее к этим гипотезам третьего типа. Они могут быть вообще довольно быстро отвергнуты на основании последующих наблюдений. Если же их судьба будет более удачной, то им все равно предстоит определенная коррекция, и, в итоге, они должны быть как-то согласованы с другими частными гипотезами, высказанными по другим, хотя и близким, поводам. Это согласование происходит, в конечном счете, благодаря теории, т.е. благодаря тому, что все эти гипотезы оказываются следствием общих постулатов. Иными словами, все такие гипотезы поглощаются той самой оформленной целостностью, которую мы только что описывали. Эмпирические гипотезы превращаются в решения теоретических задач. Так, кеплеровское описание орбиты Марса и найденные Галилеем уравнения падения тел — первоначально не связанные друг с другом частные гипотезы — входят в состав ньютоновской механики.

Таким образом, между научными положениями первого типа, с одной стороны, и второго и третьего — с другой существуют отношения целого и части. Именно в рамках целого каждая часть получает свое оправдание. Движение научного познания, следовательно, происходит от частей к целому, по крайней мере, на протяжении некоторых его периодов.

Из сказанного как будто следует принципиальная разница между разного рода гипотезами и постулатами научных теорий. Однако проведенное рассуждение требует уточнений.

Посмотрим сначала на характер любой гипотезы. Даже будучи чем-то незавершенным и несовершенным, она создает некоторую целостность. Она для того и выдвигается, чтобы соединить многообразие эмпирических данных в рамках общего объяснения. Будучи

актуальной или потенциальной частью некоторого целого (теории), она сама также есть нечто целое. Познание, таким образом, движется от меньшей целостности к большей. При этом меньшая целостность, входя в состав объемлющего целого, возможно, претерпевает некоторое изменение. Например, может выясниться, что предлагаемое ей объяснение лишь приблизительно и должно быть уточнено с помощью дальнейших исследований. В таком случае между гипотезами всех трех типов существует определенное сходство: все они позволяют создать нечто целое, включающее прежние знания (наблюдения, установленные эмпирические факты, ранее выдвинутые частные гипотезы) в качестве частей.

Заметим далее, что любая целостность, созданная таким образом, страдает неполнотой. Всякая гипотеза выдвигается на основании ряда частностей. Иными словами, ее выдвижение есть попытка судить о целом, исходя из знания некоторых частей. Ряд наблюдений за движением Марса, которыми располагал Кеплер, не содержит в себе представления об эллиптической орбите. Последнее есть целое, восстановленное по отдельным фрагментам. Такое целое есть неизбежно продукт нашего интеллекта, догадка о структуре реальности, истинность которой ничем не гарантирована. Возможность прогноза и связанная с ней опровержимость есть следствие такого движения мысли. Выдвигая гипотезу, мы пытаемся, исходя из частей, представить целое. Затем, на основании целого (созданного нашим умом) мы пытаемся представить недостающие части. Последнее и есть прогноз, т.е. наблюдаемое следствие гипотезы, которое делается не только для того, чтобы ее проверить, но также и для того, чтобы восполнить остающиеся пробелы.

Все сказанное также относится к любым гипотезам, в том числе и к теоретическим постулатам. Все они есть догадки о структуре целого, сделанные на основании ранее описанных фрагментов. Динамика естественно-научного знания обнаруживает движение мысли, поразительно напоминающее герменевтический круг: от частей к целому, а затем от целого к частям. Речь, однако, идет о расширяющемся целом. То, что составляло определенную целостность, превращается в часть (точнее, одну из частей), включаемую в более широкую целостность. Выдвигая гипотезы, т.е. располагая лишь более или менее правдоподобным знанием, мы не можем претендовать на всеобъемлющую тотальность. Даже самые развитые теории представляют собой знание не только правдоподобное, но и частичное. Чем больше включает построенная целостность, тем более правдоподобны содержащиеся в ней положения, тем глубже предлагаемые объяснения. Здесь, по-

видимому, можно вспомнить Гегеля, утверждавшего, что истина есть целое. Нужно лишь помнить, что сама истина, как и всеобъемлющая целостность, недостижима.

Упоминание о Гегеле в данном случае весьма уместно. Легко видеть, что намеченная здесь динамика познания отчасти совпадает с его проектом исторического развертывания духа. Он также движется к все большей целостности, при этом меньшая целостность, достигнутая ранее, «снимается», т.е. сохраняется в измененном виде. Будучи включена в нечто объемлющее, она оказывается понята «в своей истине». То же самое случается и с гипотезами, которые «снимаются» в развитых на их основе теориях. Эллиптическое движение Марса стало понятным не тогда, когда Кеплер впервые его обнаружил, а в рамках ньютоновской механики.

Однако движение духа в гегелевской философии направлено к завершению, т.е. как раз к всеобъемлющей целостности. Ее достижение означало бы радикальное изменение статуса знания. Во-первых, все установленные (и пребывающие в логической взаимосвязи) положения больше не были бы гипотезами. Всеобъемлющий характер знания не оставляет места альтернативам. Ни одно положение уже не может быть ни отвергнуто, ни уточнено. Во-вторых, реальность перестает быть вещью в себе. Ведь пока она остается таковой, возможно изменение существующих теорий и ничто не может претендовать на тотальность.

Едва ли, однако, мы можем ожидать появления такой целостности. Я думаю, что нет никаких априорных оснований утверждать, что она когда-либо будет достигнута, равно как и отрицать ее появление. Однако ее достижение представляется практически неправдоподобным. Если мы движемся от частей к целому, то наше представление о целом есть лишь более или менее удачная догадка. Только счастливая случайность может привести к тому, что такая догадка будет совершенно точной. У нас нет оснований рассчитывать на такую случайность. Ведь она бы означала, что реальность полностью совпала с нашей мыслью. Пока же она трансцендентна мысли, как можно ожидать такого совпадения? Почему структуры мысли должны строго соответствовать структуре реальности? Неясно даже, есть ли у реальности вообще какая-либо структура. Должна ли, например, реальность описываться категориями целого и части? Пока что мы видим, что эти категории описывают лишь движение мысли и переносятся в результате конструирования на созданный нами образ реальности. Но утверждение, что такова реальность сама по себе, что, например, будучи окончательно познана, она предстанет именно как завершенная целостность, едва ли может быть обосновано.

Итак, мы фиксируем переход от знания частей к знанию целого, что приводит к появлению гипотез, претендующих на все больший охват реальности. Однако, коль скоро всеобъемлющая теория не создана, всегда остается возможность для дальнейшего расширения. Это обстоятельство подтверждает нашу мысль, что различие между первоначально высказанными гипотезами и развернутыми в логической полноте теориями состоит лишь в степени общности. Во-первых, и те, и другие, как мы отмечали ранее, создают некоторую целостность. Во-вторых, как мы убедились сейчас, и те, и другие не создают окончательной всеобъемлющей целостности, а, следовательно, могут быть включены в дальнейшее движение мысли. Подобно тому как первоначальные гипотезы включаются в теорию в качестве «снятых» частей объемлющего целого, так и эта теория сама может быть снята в рамках еще большей тотальности. В качестве примера можно указать на судьбу все той же ньютоновской механики.

Трудно сказать, что направляет мысль к созданию тотальных конструкций. На мой взгляд, было бы наивно думать, что сама реальность есть нечто целое и потому для ее постижения требуется такое движение мысли. Мы только что упомянули о том, что ничто не обязывает реальность копировать структуры нашего мышления, в частности выстраиваться сообразно отношению часть—целое.

Мы заключим наше рассуждение о постулатах естествознания обсуждением двух качеств, которые в них обязательно предполагаются: ясности и достоверности.

Во времена научной революции XVII в. требование ясности полагалось основным для начал науки. Начиная с Декарта философы науки не раз обращались к мысли, что исходные научные принципы должны обладать достоинством «ясности и отчетливости», что предполагало непосредственное схватывание их с помощью интуиции (интеллектуальной или чувственной). Однако это требование едва ли выполняется в естественно-научных теориях. Даже постулаты ньютоновской механики нельзя назвать простыми и очевидными. Что уж говорить об электродинамике или теории относительности? Если их постулаты и можно назвать ясными, то совсем в другом смысле. Они проясняются благодаря полученным из них следствиям. Исходные положения теории, взятые сами по себе, выглядят, как правило, как малопонятные утверждения. Чтобы понять их, необходимо оценить целое. Такая оценка основывается на соотнесенности постулатов с тем множеством частных задач, которые решаются с помощью теории.

Такое же рассуждение верно и для достоверности. Достоверность гипотез, как видно из сказанного, зависит от свойств той целостно-

сти, которую они создают. Достоверность постулатов естествознания определяется развитостью и внутренней согласованностью теории. Эта внутренняя согласованность появляется не сразу. Она обнаруживается по мере роста решенных теоретических задач. Иными словами, их (постулатов) достоверность невозможно установить, рассматривая их как изолированные высказывания и ожидая, например, особой ясности или даже очевидности исходных положений. Достоверность обнаруживается лишь дальнейшим развитием, лишь теми результатами, которые могут быть из этих постулатов получены. Теория предстает как система идеальных объектов, как нечто целое, определяемое строгими логическими связями.

Понятие связи играет здесь решающую роль, поскольку требует выявить субъектный аспект теории. Связи должны устанавливаться. Развитие теории (т.е. решение теоретических задач) есть деятельность по установлению связей.

В упоминавшихся в начале статьи работах В.С. Степина постулаты теории охарактеризованы как «схемы», поскольку они задают связи между идеальными объектами. Но они также являются и схемами действий. Они не только выражают некие реально существующие связи, но и задают порядок действий по установлению этих связей. Здесь вполне уместно прибегнуть к кантовской терминологии. Эти схемы, подобно трансцендентальным схемам, задают синтез, т.е. соединение понятий, осуществляемое субъектом. Но «фундаментальные теоретические схемы», как мы видели, существуют лишь в рамках целого, которое производится на их основании. Развитая теория, следовательно, подразумевает развитый схематизм, обусловливающий целостную систему синтезов.

Этим, однако, дело не ограничивается. Конечно, целостность, возникающая благодаря решению теоретических задач, важна и интересна сама по себе как с эпистемологической, так и с эстетической точки зрения. Но она образует лишь первый уровень в рамках некой большей целостности. Последняя включает еще и второй уровень, поскольку теория не есть самодостаточное целое, подобное художественному произведению. Во всяком случае, если речь идет о достоверности, то, с одной стороны, подразумевается соотнесение теории с реальностью. С другой стороны, мы не обладаем прямым доступом к реальности. Прямое соответствие теории реальному положению дел, т.е. простая корреспондентная истинность всех положений теории, есть наивная реалистическая утопия. Мы, однако, уже не раз говорили о проверяемых следствиях теории. Это и есть один из важных способов сведения теории с реальностью. Заметим, что здесь вновь создается некая целостность, на этот раз уже не чисто теоретическая.

При эмпирической проверке следствий теории идеальные конструкции входят в сопряжение с методами и средствами наблюдения. В создаваемую при этом целостность включены как идеальные, так и реальные объекты.

Разговор, впрочем, должен идти не только об объектах. Мы уже видели, что идеальное конструирование (при решении теоретических задач) представляет собой определенную деятельность. Деятельностью является и эмпирическая проверка следствий теории. В конечном счете все положения теории вкупе с методами наблюдения и экспериментирования суть формы такой деятельности. Иными словами, существование научной теории подразумевает целую систему практик. Теория в таком случае достоверна тогда, когда эти практики достаточно успешны. Причем речь идет не об отдельных практиках, а именно о системе. Они реализуются совокупно, дополняя и взаимно обусловливая друг друга. Целостность системы (проще говоря, самая системность) и определяет достоверность.

Речь, следовательно, идет о систематической деятельности, обусловленной структурой теории. Синтезы, о которых мы говорили ранее, осуществляются как в идеальном, так и в материальном плане. Они подразумевают и соединение идеальных объектов (при решении теоретических задач), и монтаж экспериментальных установок, и сопряжение первого со вторым. Выше мы упоминали о двух уровнях целостности. Каждому уровню соответствуют свои схематизмы. Теоретические схемы, определяющие синтез понятий, дополняются схемами наблюдения, экспериментирования, монтажа, а также схемами сопряжения двух названных уровней. Таковыми являются, повидимому, схемы планирования эксперимента и схемы интерпретации его результатов.

Итак, если мы говорим о достоверности теории, то дело здесь не в самом факте проверки, не в том только, что наблюдение подтверждает теоретический прогноз. Важно, что создается развернутая и внутренне согласованная система, включающая как теоретические, так и эмпирические схематизмы, как схемы решения теоретических задач, так и схемы наблюдения. Именно целостность и развитость такой системы убеждает нас в достоверности теории.

Но жизнь теории этим не ограничивается. Ее распространение всегда оказывается гораздо шире, чем собственно научная сфера. Необходимо рассмотреть и третий уровень схематизмов: тот, что лежит за пределами собственно научной деятельности и захватывает многообразные и едва ли поддающиеся систематизации жизненные практики. Этот уровень, существенно расширяющий описываемую нами целостность, впервые ввел в рассмотрение Э. Гуссерль, когда выявил

связь науки с жизненным миром. Эта связь исследовалась весьма пристально на протяжении последних десятилетий и едва ли уместно в нашей работе давать обзор возникших по этому поводу концепций. Отметим лишь некоторые обстоятельства, важные для проводимого нами рассуждения.

Речь идет о погруженности научной теории в многообразие ненаучных практик, в которых нет ясно очерченных методов, строгой согласованности понятий и схем действия и даже, возможно, логической непротиворечивости. Тем не менее научная теория едва ли может существовать вне этого многообразия, поскольку именно постоянно возобновляющаяся связь с такими практиками и дает окончательную уверенность в теории, т.е. служит решающим критерием ее достоверности. Кажется, что это обстоятельство еще прежде Гуссерля заметил Маркс, настаивавший на укорененности познания в практике. Возможно, что Маркс излишне сузил понятие практики, сведя ее к трудовой деятельности. Наш жизненный мир включает много разных практик, не сводимых не только к труду, но и к чувственно-предметной деятельности вообще. Существуют коммуникативные практики, языковые практики, духовные практики, социальные практики и т.д. Эти практики едва ли можно строго систематизировать. Они лишь условно различимы, хотя никогда не совпадают. Ясно, например, что коммуникативные практики очень сильно пересекаются с языковыми, но все же это не одно и то же. Чувственно-предметная деятельность, в свою очередь, предполагает, коммуникацию, но не сводится к ней. Можно долго обсуждать разные виды практик и их отношения, но это не входит сейчас в нашу задачу.

Связь схем научной теории со схемами таких практик не имеет системного характера. Здесь не приходится ожидать общей согласованности в пределах целого. Скорее, имеют место локальные согласия, частичная согласованность отдельных схем науки с практическими схемами жизненного мира. Если научная теория вкупе с экспериментальными методами образует систему, то присоединение этого третьего уровня схем создает целостность иного рода. Я думаю, ее уместно назвать сетью.

Достоверность теории, таким образом, подтверждается тем, что она включена в широкую сеть человеческих практик. Так, например, не только строгость теоретических построений квантовой механики свидетельствует о достоверности описания свойств электрона. Даже экспериментальные подтверждения этих свойств, полученные в лабораторных условиях, не имеют решающего значения. Первое и второе весьма успешно дополняется многообразными практиками создания и использования различных электронных устройств,

благодаря которым эта теория входит в наш жизненный мир. Фундаментальные теоретические схемы квантовой механики входят во множество сопряжений с жизненными практиками разного рода. К этим практикам относится, например, утилитарное использование различных электронных приборов, что можно считать разновидностью чувственно-предметной практики. Другую часть этих практик составляют разнообразные языковые игры, создаваемые при обсуждении свойств, устройства, принципов работы таких приборов. Это семейство языковых игр пересекается с другой их разновидностью: с научно-популярными описаниями самой квантовой механики и ее возможных приложений. Здесь же рядом возникают этические дискурсы, посвященные распространению и использованию технологий, связанных с электроникой. Эти связи ширятся достаточно далеко, однако не бесконечно. Можно найти семейства или сети жизненных практик, не имеющих отношения к квантовой механике.

О постулатах математики

Обратимся теперь к математике и попробуем выяснить, чем обеспечивается достоверность ее постулатов. Нас так же, как и в случае естественно-научных теорий, будут интересовать типы создаваемых здесь целостных образований.

Первый вопрос, на который следует ответить, это вопрос о двух исследовательских стратегиях, которые были выявлены в начале статьи: генетически-конструктивной и гипотетико-дедуктивной. Первоначально возникает впечатление, что здесь присутствует только первая. Для выдвижения и критики гипотез как будто вовсе нет места. Скажу сразу, что это впечатление ложное и попробую показать, что возможны весьма глубокие аналогии между математикой и естествознанием, опирающиеся на дополнительность двух стратегий. Тем не менее для начала необходимо признать, что идеальное конструирование на основе фундаментальных теоретических схем составляет значимую часть деятельности математика. Структура математических теорий явно подтверждает это наблюдение. В самом деле, что такое система аксиом, как не фундаментальная теоретическая схема? Что такое решение математической задачи, как не использование заданных схем при некоторых ограничениях? Геометрия Евклида дает первый пример такого построения[1]. Но если постулаты естествознания суть гипотезы, подлежащие опытной проверке, то что представляют собой

[1] В.А. Смирнов приводит именно ее как пример использования «генетического метода».

аксиомы математики? Вопрос об их природе тем более интересен, что от ответа на него во многом зависит суждение об истинности математических теорий.

Что же раскрывается в математической теории, коль скоро она не подвержена риску эмпирического опровержения? Каков статус математических теоретических схем, заданных аксиомами? Отвечая на этот вопрос, мы, прежде всего, сталкиваемся с восходящим к Декарту (а возможно, и дальше в прошлое) суждением, что аксиомы представляют собой «ясное и отчетливое» знание, обладающее простотой и безусловной убедительностью. За аксиому следует признать лишь то, что само раскрывается «в естественном свете разума» и не вызывает сомнений ни у одного разумного существа. В таком случае математическая теория гарантировано истинна. Опираясь на самоочевидные начала, мы шаг за шагом конструируем новые истины. Они могут быть весьма сложны и не столь очевидны, однако их истинность обеспечена надежностью фундамента и точностью дедукции.

Однако такой образ математики едва ли соответствует реальности. Лишь немногие из развитых ныне математических теорий могут похвастаться такой простотой и ясностью своих начал. Евклидова геометрия, арифметика да, пожалуй, еще теория множеств принимают в качестве аксиом нечто прозрачное для нашей интеллектуальной интуиции. Но и здесь возникают проблемы. Из нескольких десятков аксиом, на которых Гильберт построил элементарную геометрию, далеко не все обладают искомыми достоинствами. То же можно сказать и о теории множеств, если вспомнить аксиомы Цермело-Френкеля. Другие же математические теории строятся на таких исходных положениях, которые и вовсе выглядят весьма странными абстракциями, лишенными какой-либо очевидности и интуитивной убедительности. Первый пример дает здесь та же геометрия, если обратиться к более поздним (по сравнению с Евклидом) теориям. Ни в геометрии Лобачевского, ни в геометрии Римана никакой очевидности нет. Но также точно не очевидны аксиомы топологии, абстрактной алгебры или, например, теории вероятностей.

Чем же определяется надежность математических аксиом? Я полагаю, что можно назвать целый ряд критериев, позволяющих судить о ней. Далее рассмотрено три таких критерия, имеющих разную значимость, но, по-видимому, учитываемых математиками при оценке их идеальных конструкций.

Первым и главным из них является само существование такой теории, т.е. системы непротиворечивых следствий. Эти следствия, как мы только что заметили, представляют собой решения теоретических

задач. В этом математическая теория вполне аналогична естественно-научной. Этому критерию с необходимостью должна соответствовать всякая аксиоматика. В некоторых случаях он оказывается и единственным. Судя по всему, наличие непротиворечивой теории, в рамках которой решаются нетривиальные задачи, служит для математиков достаточным доводом в пользу принятия системы аксиом.

Вторым критерием является наличие очевидных или, по крайней мере, достаточно ясных для здравого рассудка следствий. Возможно, это даже не прямые следствия, т.е. не теоремы, выведенные из аксиом, а их интерпретации. Например, при всей абстрактности аксиом топологии многие доказанные в этой дисциплине результаты демонстрируются с помощью наглядных геометрических образов. Вспомним также о евклидовых интерпретациях неевклидовых геометрий. По-видимому, почти все математические теории имеют наглядные и согласующиеся со здравым смыслом интерпретации части своих результатов. Конечно, этого невозможно требовать от всей теории. Значительная часть теорем лежит далеко за пределами всякой наглядности. Вообще, названный критерий едва ли можно считать необходимым условием принятия математической теории. Однако соответствие ему представляется весьма желательным.

Третий критерий, наверное, покажется математику еще более слабым, чем второй. Следование ему, возможно, уравняло бы математическую теорию с естественно-научной. Речь идет об эмпирическом подтверждении математических результатов. Тем не менее такое подтверждение, как правило, происходит: определенные следствия математических аксиом могут быть подтверждены не только на наглядных примерах, но и с помощью наблюдений. Самые яркие примеры дает здесь теория вероятностей. Выведенная из весьма абстрактных допущений сходимость независимых распределений к гауссовскому регулярно подтверждается эмпирически. Да и вообще сам факт существования статистических методов есть именно опытное подтверждение математической теории.

Это отнюдь не единственный пример такого подтверждения. Более того, речь здесь должна идти вообще не о примерах, а о структуре научных дисциплин и инженерных практик. Математические аксиомы получают эмпирическое подтверждение при всяком применении математики. Последнее составляет особую проблему, которая сейчас мной не обсуждается. Достаточно указать лишь на определенный способ убедиться в достоверности начал математической теории. Как и второй из рассмотренных нами критериев, этот также не является ни необходимым, ни достаточным. Однако он чрезвычайно важен и

играл, по-видимому, весьма существенную роль на протяжении всей истории математики.

Все три критерия выявляют одно важное обстоятельство: достоверность (или надежность) аксиом обнаруживается не сама по себе, т.е. не на основании априорных свойств этих аксиом. Судить о ней можно лишь тогда, когда получено достаточное количество результатов, т.е. a posteriori. Таким образом, обнаруживается некоторое сходство между математическими и естественнонаучными постулатами. Их достоверность определяется целостностью конструкции, которая создается на их основании. Здесь также можно провести рассуждение о схемах, подобное тому, что было проведено в предыдущем случае, хотя полного тождества все же не будет.

Здесь, как и в предыдущем случае, выявляется три уровня схем, образующих соответствующие целостности. Прежде всего, мы также имеем дело с теорией, основанной на фундаментальной теоретической схеме, т.е. на аксиомах. Этот уровень аналогичен построению теории в естествознании. Его схемы отвечают максимально возможным требованиям строгости (в чем математика, конечно, превосходит многие естественно-научные теории).

Второй уровень составляют интерпретации теории. Здесь мы сталкиваемся с некоторой неоднозначностью. Следует ли говорить об интерпретациях как о чем-то отдельном от теории? В большинстве случаев они являются естественным сопровождением теории. Интерпретацию всегда можно понять как применение теоретической схемы в определенных условиях, т.е. как решение теоретической задачи. При этом сами схемы интерпретации, как правило, достаточно строги, здесь применяются хорошо разработанные (по крайней мере, на современном уровне математики) формализмы. Исходя из этих соображений, кажется уместным отнести интерпретации к первому уровню и считать их составляющими одно целое с теорией.

Есть, однако, иные соображения. Выше мы видели, что благодаря интерпретациям достигается сопряжение теории со здравым смыслом, поскольку некоторые (пожалуй даже, весьма многие) интерпретации дают нам наглядные образы, позволяют описать в терминах теории привычные для нас предметы. Но именно эта *привычность* и заставляет относить интерпретации к другому уровню. Она указывает на то, что здесь теория встречается с жизненным миром. Будучи формальной и строгой, математическая теория, посредством своих следствий, вплетается в наши жизненные практики и описывает то, с чем мы привычно имеем дело: с созерцанием простых геометрических образов, с процедурами счета, с составлением совокупностей из элементов, сравнением величин и пр.

Мы видим, что подтверждение математических аксиом связано с включением их в некую целостность, возникающую при сопряжении теоретического и вне-теоретического уровней. При этом (как и при обсуждении третьего уровня схем для естествознания) мы имеем дело с такой целостностью, которую невозможно описать строго. Это некая сеть, распространяющаяся достаточно широко в нашей повседневности. Схемы, работающие при упомянутом сопряжении, не заданы ни в каких постулатах и не доказаны ни в каких теоремах. Они освоены нами благодаря нашей деятельности.

Однако здесь выясняется чрезвычайно важное обстоятельство. Хотя схемы, благодаря которым математическая теория сопрягается с жизненным миром, и не являются теоретическими схемами (в том смысле, что они не составляют аксиоматики и не доказаны как теоремы), они все же являются математическими. В самом деле, что может означать тот факт, что интерпретации математической теории оказываются релевантными нашим жизненным практикам? По-видимому, лишь то, что *какая-то математика всегда уже присутствует в этих практиках*. Чуть выше я уже упомянул о типах деятельности, которые можно было назвать если не математическими, то *прото-математическими*. Схемы, определяющие эту деятельность, встроены в наши жизненные практики, принадлежат нашему жизненному миру. Но опираясь на них, мы интерпретируем (в строгом смысле слова) предложения, выведенные в рамках формальных математических теорий. Например, формальное понятие гомеоморфизма, введенное в топологии, мы интерпретируем (чисто математически) как деформацию геометрических объектов без склеек и разрывов. Но такую операцию мы находим вполне согласной с нашим опытом и здравым смыслом, поскольку она нередко осуществляется нами в повседневной практике. Схема непрерывной деформации является одновременно и жизненной (можно сказать, телесной), и математической. Здесь происходит встреча математики с реальностью человеческой жизни.

Рассмотрим, наконец, третий уровень схем, который мы связали с эмпирической проверкой теории. В принципе и второй уровень можно было бы отнести к эмпирии, однако я считаю необходимым различить эти два способа верификации математических аксиом. В конце статьи я приведу дополнительные основания для такого различения. Рассматривая этот тип схем, я буду опираться, как на образец, на использованный выше пример гауссовского распределения. Схемы, о которых идет здесь речь, более других похожи на схемы проверки гипотез в естествознании. Они предполагают выведение

проверяемого следствия, прогноз, наблюдение. Так, проводя независимые измерения какой-либо величины, мы будем прогнозировать концентрацию большинства результатов около некоторого среднего и наличие симметричных «хвостов» в распределении. Такую проверку уместно назвать экспериментальной. Нам едва ли приходится наблюдать гауссовское распределение в естественных условиях. Для этого необходимо создать особые, искусственные условия, в которых оно проявится. Центральная предельная теорема, таким образом, может претендовать на статус закона природы. Ее отличие от «обычных» законов природы состоит в способе получения. Однако способ подтверждения полностью совпадает. Конечно, существует и другое отличие. Если предположить, что в ходе наблюдений удастся фальсифицировать указанную теорему, то она не будет окончательно отброшена, подобно гипотезе об эпициклах в птолемеевской космологии. В худшем случае она разделит участь множества других теорем, доказанных в математике и никогда не применявшихся к описанию реальности. Впрочем, никакая фальсификация, скорее всего, не будет окончательной. Всякое опровержение потребует лишь более точного описания условий применимости[1].

Ясно, что не только теория вероятностей дает примеры такого рода. Эмпирическое подтверждение имеет место всякий раз, когда математические теоремы применяются для описания реальности. С ним мы имеем дело и в науке, и в инженерной практике. Таким подтверждением является всякое работающее устройство, поскольку едва ли мы найдем такую сферу техники, которая не опиралась бы на достаточно развитую математику. Конструирование таких устройств также играет роль эксперимента: не создав специальных условий, мы не сможем увидеть, как названные теоремы работают на практике.

Аналогия с естествознанием все же неполна. Столкнувшись с экспериментом, противоречащим теории, ученый может поставить под сомнение саму теорию, метод проведения эксперимента, исправность экспериментальных установок. Но он никогда не усомнится в математическом аппарате, который использовался в его теории (или при конструировании экспериментальных установок). Чем объяснить такое доверие, если этот математический аппарат возник при выведении неочевидных следствий из неочевидных посылок? По-видимому, здесь играют роль первые два уровня, составляющие безусловную целостность.

[1] Заметим, что то же самое можно сказать и о многих естественно-научных теориях. Например, о ньютоновской механике. Так что граница между математикой и естествознанием весьма размыта.

Попытаемся, наконец, сопоставить второй и третий уровни. Между ними существует очевидное сходство. В обоих случаях предполагается соприкосновение с реальностью и связь с опытом. Эта связь (также в обоих случаях) возникает при использовании математических теорем на практике. Именно успешное включение в человеческую деятельность этих теорем и подтверждает их достоверность, равно как и достоверность постулатов, из которых они выведены. И те, и другие представляют собой схемы деятельности, причем деятельности практической (предметной), а не только ментальной[1]. Сходство усиливается еще и тем, что речь должна идти не о систематической проверке, как в естествознании, а о вплетении в сеть человеческих практик. Математика не предполагает методической эмпирической проверки своих результатов, а потому их подтверждение в опыте имеет спонтанный характер. Сеть, о которой мы только что сказали, представляет собой многообразие связей между математической теорией и ее приложениями. Эти связи создают некую целостность, но целостность подвижную, не имеющую сколько-нибудь определенной структуры.

Итак, второй и третий уровни подтверждения математической теории составляют схемы, выраженные математически, но реализуемые в предметной человеческой деятельности. Стоит ли эти уровни различать? Я полагаю, что стоит. Я полагаю даже, что второй уровень не является в строгом смысле эмпирическим, поскольку для принадлежащих ему схем опыт не служит критерием достоверности. Именно этот тезис я и собираюсь обсудить в заключение.

Разница между схемами второго и третьего уровней ощущается, прежде всего, тогда, когда они сформулированы в виде абстрактных математических предложений. Для схем второго уровня эти предложения просты и, можно сказать, очевидны. Эта очевидность, по-видимому, ввела в соблазн философов прошлых веков, наделивших такие предложения достоинством «ясности и отчетливости». Предложения третьего уровня отнюдь не таковы. Они всегда достаточно сложны, получить их можно лишь путем длинных доказательств. Их формулировки могут привести в замешательство даже некоторых искушенных специалистов. Попробуйте, например, если вы не специалист в теории оптимального управления, уяснить «навскидку» принцип максимума Понтрягина. Его формулировку следует признать не просто сложной, но даже, я бы сказал, неказистой.

---

[1] Понятно, что математика есть работа мысли, поэтому уместно рассматривать математические теоремы и аксиомы как схемы деятельности сознания, как это делает, например, Кант. Однако, как я пытаюсь здесь показать, этим дело не ограничивается.

Можно возразить, что оценки типа «просто—сложно», «очевидно—непонятно» могут показаться весьма субъективными. Локк, наверное, указал бы на дикарей или малолетних детей, которым утверждение типа «через две точки можно провести единственную прямую» покажется совершенно невразумительным. Однако этот — пока не очень точно сформулированный — критерий различения тесно коррелирован с другим, замеченным нами ранее.

Обратим внимание на то, как мы обнаруживаем связь с реальностью математических предложений, относимых к разным уровням. Для предложений третьего уровня, как мы уже видели, необходимо нечто вроде эксперимента. Тот факт, что нечто в реальности соответствует этим предложениям, не виден сам по себе. Нужно создать особые условия, чтобы это обнаружить. Чтобы удостовериться в истинности предложений второго уровня, специальных условий не требуется. Требуется, конечно, специальное усилие, чтобы сформулировать эти предложения в виде математических абстракций, а также для того, чтобы эти абстракции понять при первом знакомстве с ними. Однако выражаемые в них схемы деятельности обнаруживают себя непосредственно, во всяком случае, без всяких осознанно создаваемых искусственных условий. Я полагаю даже, что они сами являются условиями нашей деятельности. Утверждая это, я беру в качестве образца кантовскую концепцию априорного схематизма. Отличие от Канта состоит здесь в том, что описанные им схемы определяют деятельность рассудка и воображения, тогда как здесь речь идет *также* и о деятельности предметной[1]. Сообразно этим схемам осуществляются разнообразные манипуляции с предметами, такие, например, как различение и идентификация, собирание совокупностей из однородных элементов или упомянутая уже непрерывная деформация гибких тел[2].

---

[1] Такая интерпретация математических аксиом подробно разработана В.Я. Перминовым. Его подход в свою очередь восходит к концепциям «априори изготовления» Г. Динглера и «чувственно-предметной деятельности» К. Маркса. См.: *Динглер Г.* Эксперимент. Его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12. С. 96–134; *Михайловский А.В.* «Новое априори» Гуго Динглера / Математика и опыт. М., 2003. С. 218–233; *Перминов В.Я.* Философия и основания математики. М., 2000; *Перминов В.Я.* Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики / Математика и опыт. М., 2003. С. 56–94.

[2] Особого исследования заслуживает связь между схемами манипуляций и схемами воображения. Ясно, что каждое из названных действий имеет ментальный аналог. Каждая предметная операция то ли отображается, то ли предвосхищается актом воображения. На мой взгляд, важнейшая из названных операций — различение и идентификация — есть операция, преимущественно ментальная, т.е. совершаемая в воображении. Не исключено, что схема этой операции укоренена в языке, в котором, согласно Соссюру, существуют только тождества и различия.

Таким образом, ситуации, в которых обнаруживаются схемы второго уровня, нельзя назвать экспериментальными. Они не конструируются особым образом. Мы, помимо своей воли, оказываемся в этих ситуациях. Мы застаем себя вовлеченными в них едва лишь начинаем какую-либо — предметную или ментальную — деятельность. Осуществление таких схем представляет собой нечто, что *всегда уже есть*, и от чего мы не в силах избавиться, не перестав мыслить и действовать.

Библиографический список

Динглер Г. Эксперимент. Его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12. С. 96–134.

Михайловский А.В. «Новое априори» Гуго Динглера / Математика и опыт. М., 2003. С. 218–233.

Перминов В.Я. Философия и основания математики. М., 2000.

Перминов В.Я. Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики / Математика и опыт. М., 2003. С. 56–94.

Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М., 2001. С. 417–437.

Степин В.С. Генетически-конструктивный метод // Новая философская энциклопедия. Т. 1. М., 2000. С. 499–500.

Степин В.С. Теоретическое знание. М., 2000.

Е.В. Косилова

МАТЕМАТИКА — ЭТО ЯЗЫК?

Сущность языка

И у математиков, и у философов часто встречается мысль: математика — это язык. Но так ли это?

Язык — это совокупность знаков, свойства которой определяются, во-первых, свойствами знаков, во-вторых, способом их связи между собой.

Важнейшее свойство знака: он указывает на нечто, отличное от него самого (на вещь, положение дел, цепочку умозаключений, множество...). Иногда он может указывать на самого себя, но ни на что не указывать не может. Указание на самого себя (автореференция) — как правило, явление нежелательное. Оно приводит к парадоксам: например, предложение «это предложение ложно» сообщает о себе, что оно ложно, и если оно сообщает это истинно, то оно ложно, а если оно сообщает это ложно, то оно истинно — следовательно, невозможно сказать, истинно оно или ложно. При необходимости указать на знак обычно пользуются другим знаком (например, самим знаком плюс кавычки).

Хотя у знака не может вовсе не быть значения, бывают знаки, значение которых пусто: «нынешний король Франции», «летучий ноутбук».

Очень важно: значение знака связано с ним конвенционально, т.е. не сущностно. Чарльз Пирс, правда, выделял знаки, значения которых не конвенциональны: дым — знак огня, силуэт женской фигурки — знак женского туалета. Знаки первого типа он называл индексами, второго — иконками. В обоих случаях между знаком и значением есть «смысловая» связь. То же — в случае звукоподражаний. Полностью не связаны со своим значением, по Пирсу, лишь знаки-символы. Но чаще всего придерживаться учения Пирса непродуктивно. Подавляющее большинство знаков, которые стоит изучать, пирсовские знаки-символы: те, значение которых конвенционально.

Итак, язык — совокупность знаков, конвенционально связанных со своими значениями. Поэтому, в первом приближении, конвенционально связано с реальностью и общее «значение языка».

Теперь о синтаксисе. Это совокупность правил связывания знаков между собой. Конечно, синтаксис зависит от языка; хотя есть прочное ядро синтаксических законов, общих для многих языков. Почти любой язык содержит высказывания, почти любое высказывание состоит из субъекта и предиката[1]. В естественном языке субъект — подлежащее (обычно существительное), предикат — сказуемое (бывает выражено глаголом, любой именной частью речи, наречием). Второстепенные члены предложения — тоже предикаты. Если мы видим второстепенные члены у подлежащего, то это предикаты, которые должны быть развернуты в цепь простых высказываний прежде всего, т.е. до основного предиката и второстепенных членов группы сказуемого.

Сказанное станет понятно на примере развертки сложного предложения:

Бесцветные зеленые идеи яростно спят.

Вот как оно разворачивается в цепь простых высказываний:

1. *Имеются идеи* (это простой субъект, о нем подразумевается, что он существует).

&

2. *Эти идеи бесцветны.*

&

3. *Эти идеи зелены.*

&

4. *Эти идеи спят*

(теперь синтаксическое изменение структуры — новый субъект).

4'. *Имеется сон* [*идей*] (новый субъект также прост, подразумевается, что он существует).

5. *Этот сон яростен.*

Видно: синтаксические законы управляют последовательными развертками, как управляли и сворачиванием исходного сложного предложения. Видно и то, что простой субъект высказывания всегда нагружен предикатами из прошлых высказываний.

Известно, что синтаксис позволяет видоизменять структуру предложения с сохранением смысла:

Дима любит Олю → Оля любима Димой.

Такого рода обращения, кстати, уже прямо напоминают математические преобразования:

---

[1] Предикат может быть весьма сложным, но обычно дополнения к центральному предикату можно развернуть в цепочку конъюнкций простых предикатов (иногда это предикаты к другому субъекту). Субъект всегда прост. Кроме того, в рамках универсума высказывания он всегда имеет существование.

$$y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Здесь субъект с предикатом тоже меняются местами с сохранением смысла. Аналогом перехода активного залога с винительным падежом в пассивный залог с творительным падежом здесь будет обращение операции возведения в степень.

Надо разделять глубинный и поверхностный синтаксис. Глубинный синтаксис — последовательность высказываний и их субъект-предикатная структура. Поверхностный синтаксис — ее оформление в средствах конкретного языка: залоги, падежи... Разница между ними существенна.

Глубинный синтаксис не может быть нарушен. Его существование в большой мере тавтологично: сказать «данное высказывание имеет субъект и предикат» почти то же, что сказать: «данное высказывание есть высказывание» — ведь только то, что имеет субъект и предикат, может называться высказыванием (я не беру здесь повелительные высказывания; по сути лучше было бы с самого начала говорить не о высказываниях, а о суждениях). Нельзя сказать «любит», не сказав, кто любит кого; нельзя сказать «равно», не сказав, что равно чему. Это не высказывания, не суждения.

Поверхностный синтаксис может нарушаться относительно легко, о его правилах можно дискутировать, сами эти правила зависят от языка, от подъязыков внутри него, от языковой культуры и стилистических предпочтений. Можно сказать «моя твоя не понимай» и быть понятым. А можно щеголять мало кому известными правилами употребления сложных слов высокого штиля («довлеть», например — куда? на что? над чем? чему?).

Итак, у языка есть свои внутренние законы, и это законы синтаксиса, прежде всего глубинного. Принято думать, что общность глубинного синтеза для всех языков — залог межъязыкового понимания. Что же до поверхностного синтаксиса, он напоминает правила упорядочения слов в сложных предложениях, чтобы было ясно, как их разворачивать. Это, по сути, алгоритм свертки и развертки.

Математика — язык чего?

Видимо, идея о том, что математика — язык, берет начало в известном высказывании Галилея «Книга природы написана математическом языке». Тогда на вопрос «Языком чего является математика?» — ответ один: языком природы; точнее, физики — науки о природе.

Идея Канта о том, что математика базируется на априорных формах чувственности и мышления, приводит к тому же результату. Мир природы — это мир возможного опыта. Условия возможного опыта —

априорные структуры. Все, что относится к этим структурам, обладает качествами «всеобщности и необходимости». Отсюда известное высказывание Канта: в каждой науке столько науки, сколько в ней математики. Ведь только математика выражает всеобщее и необходимое — просто потому, что выражает законы восприятия и законы мысли самого субъекта.

Но математика у Канта — форма, по крайней мере, для естествознания. Физические законы имеют математическую форму. Почему? — Потому что лишь такая форма указывает на то, что субъект не может воспринимать их иначе. Так и у Канта получается, что математика — язык физики, точнее, ее законов.

Итак, согласно изложенной точке зрения, математика — язык, семантика (область значений) которого — физические объекты. Сама же наука математика — это наука, изучающая синтаксис этого языка.

Можно сказать, что физические формулы написаны на математическом языке, как вербальные содержательные предложения — на языке слов. Семантика этого языка — на совести физики. Объекты, с которыми имеет дело физика, входящие в физические высказывания, как правило, относительно наблюдаемы и измеримы. Если речь идет о ненаблюдаемых и неизмеримых объектах, таких как сила, то, как правило, известны процедуры их получения из измеримых величин (две измеримые массы перемножить, а измеримое расстояние возвести в квадрат и потом на него разделить).

Но математику можно рассматривать и саму по себе, вне связи с физикой. Тогда можно спросить: на каком языке и о чем повествуют математические предложения?

Несомненно, язык

Можно сказать, что в этом случае математика использует *формальный* язык. И он, что очень важно, входит в нее как неотъемлемая часть.

Рассматривать формальный язык математики можно, и это плодотворно. Вся математическая логика построена на изоморфизме математического и естественного языков. Прежде всего, у них общий глубинный синтаксис. Естественный язык построен на последовательности дискретных высказываний. Математическое повествование — тоже последовательность дискретных высказываний (формул). В предложениях естественного языка есть субъект и предикат, есть они и в математических формулах.

Главный предикат состоит из двух частей: знака равенства и правой части равенства. Это аналог именного сказуемого в естественном языке:

Сократ есть человек.
Производная есть функция.

Эти высказывания изоморфны, поэтому нет сомнения в том, что оба они — языковые. Заметим, что математические высказывания делает языковыми знак равенства (он и в матлогике рассматривается как обычный предикатор наряду с любыми другими, хотя в теории моделей это не так).

Итак, мы выяснили: в рамках математики функционирует некий язык, весьма напоминающий естественный. Он имеет субъект-предикатный характер и наращивает наши знания о субъекте. Слова его — математические символы. Фактически аналоги имен. В логике это называется *термы*.

Теперь наша задача — понять, каков характер его семантики, как связаны между собой понятия «язык математики», «содержание (семантика) языка математики» и «наука математика». И нет ли противоречия в том, что в науку входит и ее язык, и содержание этого языка без видимого различия между ними.

Особенности математических индивидов

Проведём аналогию дальше. В языке есть имена единичных объектов — индивидные константы. В естественном языке это имена собственные: Сократ, Платон, или сочетания слов типа «этот ноутбук».

Есть довольно сложная проблема: может ли имя индивида быть предикатом? Обычно считается, что нет — это идет от Аристотеля, который в «Категориях» прямо так давал определение первой сущности (индивида): «Это то, что не сказывается ни о чем». В функциональном анализе языка предикаторы — только имена классов, а предикатами соответственно могут быть только предикаторы, так что и тут запрещено создавать из имени предикат.

На самом деле имена могут быть смысловыми предикатами. Например: «Тот, кто написал диалог, — Платон». Эту фразу можно грамматически переделать в «аристотелевскую»: «Диалог написал Платон → Платон написал диалог». Но логическая форма мысли здесь: «написавший диалог есть Платон», т.е. имя, в совокупности со связкой — предикат. Тогда нас не удивит аналогичная ситуация и в других языках.

То, что в естественном языке — имена собственные, в математике — например, числа или сочетания вроде «этот треугольник».

Легко видеть принципиальное различие семантик математического и естественного языков: в математике нет индивидов. Математиче-

ские объекты всегда обозначают множества. Но те же объекты всегда единичны. Допустим, у нас есть ситуация (доказываем какую-то теорему), в которой мы рисуем треугольник. Мы говорим «вот этот треугольник», но за одним треугольником всегда мыслимо бесконечное множество треугольников — точно таких же, или различающихся, или любых. Но и таких же треугольников — бесконечное множество: мы всегда можем нарисовать рядом еще один, и он будет подчиняться тем же правилам, о которых речь в данной ситуации. С точки зрения математики число этих треугольников совершенно неважно: треугольник, о котором речь в нашей ситуации, всегда один. Если продолжить работу с той же ситуацией после перерыва и нарисовать треугольник заново, он может заметно отличаться от первого чертежа, но это будет *тот же* треугольник. В математике нет экземпляров.

Эта особенность перехода единичного в множественное и обратно определяет важнейшую черту семантики математики. Вообще, мы можем выбирать, как мыслить математические объекты. Можем стоять на позиции реализма (платонизма) и как можно больше множеств стягивать к их ярлыкам. Тогда единичным объектом будет и множество натуральных чисел, и множество чисел вообще, и любое число, и переменная, и x, и $f(x)$, и множество как таковое, и множество всех множеств. Эта операция в математике вполне логически допустима.

Переход синтаксиса в семантику. Пустота

Выше мы выяснили: с точки зрения физики математика предоставляет ей язык. Семантика его — так или иначе наблюдаемые физические объекты. Математика нужна, чтобы грамотно выражаться на этом языке, проделывать преобразования — в общем, это наука о правилах языка или о синтаксисе — частная синтактика, а то и попросту грамматика.

Например, превратить $F = ma$ в $a = F/m$.

Преобразование это — языковое, синтаксическое, никак не затрагивающее «смысла» высказывания. Можно проводить правильные преобразования с ложными высказываниями или ошибочные — с истинными.

Что делает любая наука о языке? Гипостазирует структуры языка и правила преобразования, т.е. превращает синтаксис в семантику. Можно совершить языковое действие по преобразованию высказываний: скажем, превратить «Платон написал диалог» в «Диалог написан Платоном». А можно сформулировать в общем виде:

Субъект — глагол в активном залоге — объект в винительном падеже → Объект — глагол в пассивном залоге — субъект в творительном падеже.

Синтаксическое преобразование названо. Появляются новые сущности: субъекты, глаголы, падежи. Синтактика — наука, терминология которой представляет собой гипостазированные языковые преобразования. Если считать это определением синтактики, то математика как наука — синтактика по отношению к математическому языку, используемому физикой.

Но что же — математика несамостоятельна по отношению к физике?

Кант так и считал. В «Критике чистого разума» он писал: «Всякое наше познание начинается с опыта (но не всякое познание происходит из опыта)». Т.е. по содержанию математика от физики, конечно, не зависит, но начинается познание с физики — науки опытной, а не с математики — науки априорной. Если же рассуждать в терминах синтактики и языка, то и вовсе очевидно: что первично — язык или наука о нем? Вроде бы язык. А ему в свою очередь предшествует реальность.

Математики, не согласные с вторичной ролью своей науки, против этого протестуют (да и философы привыкли считать ее чем-то более фундаментальным, чем физика). К тому же сейчас много говорят о том, что в современной физике математика более креативна, чем опыт.

Со стороны общеязыковых соображений приходят и другие аргументы.

Все мы знаем, что языковые экзерсисы и перформансы во многих произведениях современного искусства значительно опережают реалистическую описательную работу языка. Современное искусство само по себе, может, для науки и не авторитет, однако оно выявляет неожиданные эффекты: даже конструкции, порожденные чисто искусственными приемами, обретают осмысленность в ходе интерпретации. Если синтаксическая конструкция корректна, под нее обычно находится смысл.

Это относится и к математическим моделям в физике, и к языковым приемам в искусстве. Михаил Эпштейн каждую неделю придумывает по одному новому русскому слову (это живя в Америке-то) и каждый раз уверен, что под это слово в России должно найтись какое-нибудь значение. А математики придумывают новые математические модели, под которые у физиков находятся элементарные частицы.

Вывод: нас не должно удивлять, что синтаксис забегает вперед семантики. Язык — орудие не только описания, но и творчества.

За счет чего это возможно? За счет одной особенности языка, о которой надо было сказать с самого начала: огромной **пустоты**, потенциальности языка. Язык актуально выражает ничтожную часть

того, что способен выразить, его незадействованные резервы беспредельны (и с этой стороны он открывает познанию куда больше возможностей, чем ставит преград). Это свойство языка я называю «*конформностью*». Но это требует отказа от внутренних логических ходов языка. Там, где работает логика языка, внешняя логика познаваемого уже не отражается.

Это относится и к математическому языку как языку физики. Как уже говорилось, любой физический закон мог бы выглядеть иначе: язык не накладывает ограничений. Иначе мы не смогли бы сказать на нем ни одного эмпирического факта: все факты были бы только логическими, следующими из его законов.

Пустота языка даёт возможность сказать на нем и нечто совсем не следующее из эмпирических наблюдений. Но из законов языка оно должно следовать, оно должно им подчиняться, иначе будет непонятно.

Мета-язык

В начале мы сказали, что лучше не допускать ситуации, когда знак отсылает к самому себе. Так же дело обстоит с языком.

Не следует допускать ситуации, когда язык описывает самого себя. Это автореференция, чреватая, помимо парадоксов, и смысловыми искажениями, потому что получается, что один и тот же знак имеет несколько значений — свое внешнее и себя. Язык$_2$, на котором ведется разговор о некотором языке$_1$, будет по отношению к языку$_1$ мета-языком.

Только что мы пришли к выводу, что язык математики — это содержательный язык для физики (не только для неё, но это сейчас не важно), вполне удовлетворяющий требованиям, предъявляемым к языку: отсутствие автореференции и конформность, т.е. способность выразить связь вещей внешнего мира, не привнося в это своей логики. Математический язык, на котором говорит физика, — это, стало быть, язык$_1$. Наука математика — это наука о том языке, на котором говорит физика; математика — это наука о математическом языке. Стало быть, она должна говорить на другом языке, иначе возникнет автореферентность. Язык математики должен быть языком$_2$, мета-языком по отношению к языку$_1$.

Мы также выяснили, что законы языка$_1$ в языке$_2$ предстают как гипостазированные[1] сущности. Легкость логического обращения ги-

[1] Гипостазировать (от греч. hypostasis — сущность) — придавать обособленное объективное существование какому-либо отвлеченному представлению, качеству, признаку.

постазирования и схематизации (в кантовском смысле) соответствует легкости перехода между языком$_1$ и языком$_2$.

На первый взгляд в математике ничего подобного нет. Напрашивается вывод: самое первое предположение, что математика вообще — язык, привело наконец-то к противоречию.

Ибо мы не наблюдаем — на первый взгляд, в математике — двух языков: одного для физики, другого для самой математики. Раз получилось противоречие, из этого должно бы следовать, что первое предположение неверно. И математика — не язык.

Но не все так просто.

Естественный язык тоже описывает сам себя. Так, учение о синтаксисе русского языка пишется на русском языке. Исследователь вводит гипостазированное имя для языкового явления, например «падеж». Это термин мета-языка, но он же — и слово обычного языка, и вполне себе склоняется по падежам: падеж, падежа, падежу, падеж, падежом, о падеже. Такие вещи всегда чреваты автореферентностью, но при описании естественного языка без них, очевидно, не обойтись. Так что сосуществование двух языков в пределах одного текста не должно нас удивлять. В математике вполне может быть то же самое.

Два языка в математике: теория моделей, или Постмодерн в математике

Насколько мне показалось, в теории моделей явно первичен «язык», хотя не тот, о котором шла речь сначала. То был язык математики, а в теории моделей — скорее язык логики. Странно, что высказываниями почему-то называются только формулы с кванторами, более того, лишь такие формулы, в которых вообще все переменные связаны кванторами. Формулы вроде $a = b$ — не высказывания, а отношения, заданные на алгебраической системе.

Физические законы, наверное, тоже можно всегда записать с кванторами общности.

Итак, у нас есть совокупность высказываний: например, совокупность математических тавтологий или еще что-нибудь квантифицированное. Она может быть и конечна, и бесконечна, если задана как-нибудь общим образом.

Вопрос: **существует ли объект** (алгебраический, но это не принципиально), **который описывается этими высказываниями**? Если да — он и будет моделью этого множества высказываний.

Не правда ли, это очень хорошо вписывается в рамки современной культурологии? Такая теория могла родиться только в совре-

менном — гиперъязыковом мире, т.е. в мире постмодерна. Это мир, привыкший к тому, что наговорить можно все что угодно, особенно если говорить бесконечно (или если говорит бесконечное множество людей). И далеко не всё сказанное имеет хоть какой-то смысл. Сколько угодно может быть бессмысленных дискурсов, хотя и связанных внутри себя вполне ощутимой логикой (о взаимосвязи высказываний внутри множества вроде бы ничего не говорится).

В заключение еще два слова о модели. В предложенной теории «язык» представлен совокупностью высказываний. Не уверена, что это язык в полном смысле этого слова. Но почему бы и нет? У него есть примитивный поверхностный синтаксис: набор правил построения формул. Есть слабый глубинный синтаксис, особенно в той части, где про кванторы. В нем можно строить новые высказывания. В общем, язык. Хотя не математический, а логический.

Модель — семантика этого языка. Модель — математический объект (поле, кольцо, группа...) и несет согласованность алгебраического характера. Ее формулы вытекают друг из друга по законам математики, а не логического вывода. В пределе эти законы, видимо, стремятся к полному слиянию, но явным образом не достигают его, особенно если какая-то алгебраическая система не аксиоматизируема.

Раньше мы говорили, что математика строит «модели» физической реальности, и слово «модель» там имело совсем другой смысл. Там подразумевался некий изоморфизм между законами, управляющими физической реальностью (принципиально неизвестными), и теми, что действуют в алгебраической системе (принципиально известными, хотя не всегда очевидными). Какими высказываниями мы формализуем то и другое — неважно. Рассматривать математику в отношении к физике — значит быть в ситуации как бы избытка реальности по отношению к описанию. И тогда ищется описание, математическая модель, а не реальность. Внутри самой математики, вместе с логикой — избыток описания, а не реальности. Сказать можно все. Но имеет ли это смысл? Вот вопрос. И тогда ищется реальность. Которой является, между прочим, как раз математика — по отношению к логике.

Из сказанного выше о мета-языке и конформности следует вывод: мета-язык должен быть конформен по отношению к своему объектному языку — другими словами, его законы должны быть более свободными, чем законы объектного языка, иначе произойдет навязывание объектному языку законов мета-языка. Свободнее ли законы логики, чем законы математики? В принципе, в теории моделей — видимо, да. Но это вопрос открытый.

Словом, вывод по языку примерно такой: математика — язык описания физической реальности, когда мы говорим, что она строит модели физики. Но она — реальность, когда логика строит ее описание. У неё двойственный характер, в общем, как и у естественного языка, т.е. она все же язык. Соответственно она одновременно и онтологична: несет в себе законы, и конформна: может описывать законы другой реальности. Если же она описывает законы самой себя, приходится, видимо, признать, что она — в состоянии неощутимого раздвоения. Как, впрочем, и естественный язык, когда его синтаксис на том же естественном языке и описывается.

И.Д. Невважай

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ В КОНТЕКСТЕ КУЛЬТУРЫ НАУЧНОГО МЫШЛЕНИЯ

I

Тема соотношения реальности и математического знания может быть рассмотрена в разных контекстах. Согласно традиции классической новоевропейской философии математика рассматривалась как особый вид абстрактного знания, и вопрос о реальности в математике сводился к вопросу об истинности математического знания. Реальность должна мыслиться как прообраз математического знания. Такой узкий подход имеет право на существование, но тема реальности в математике не исчерпывается подобной догматикой. Догматика здесь состоит в том, что реальность, противопоставляемая знанию, мыслится как нечто безусловное, по поводу которого Кант в свое время остроумно заметил: «безусловное должно находится не в вещах, поскольку мы их знаем (поскольку они нам даны), а в вещах, поскольку мы их не знаем, т.е. как в вещах в себе»[1]. Представление о безусловном, которое пребывает в вещах самих по себе, является парадоксальным. Действительно, если допустить, что безусловное (реальность) существует в вещах, поскольку мы их знаем, то это ведет к противоречию, ибо если вещь в себе нами знаема, то она нам дана при каких-то условиях, но тогда она должна рассматриваться как обусловленная, а значит, не может быть безусловной, т.е. реально существующей. Поэтому, чтобы безусловное существовало (или мыслилось нами) в вещах в себе, необходимо, чтобы эта вещь не была бы предметом знания и не могла бы быть нам дана. На этот аспект понимания вещи в себе, как правило, не обращают достаточного внимания, и при этом он часто заслоняется другим аспектом ее понимания, в соответствии с которым вещь в себе, существуя вне и независимо от субъекта познания, непознаваема. Если непознаваемость понимать так, что вот-де «этот» стол существует вне и независимо от меня, но он не может быть познаваем, то это, конечно, абсурд. Так нередко в учебниках по философии «опровергают» Канта. Но такая «реалистическая» точка зрения есть своеобразное лицемерие.

[1] *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 6 т. Т. 3. М.: Мысль, 1964. С. 89.

Действительно, если нечто дано мне как существующее вне меня, то это означает, что данное нечто, скажем, стол, нам уже известен как что-то определенное (мы же говорим, что «это стол»). Говорить при этом, что эта вещь может быть познана, когда она уже познана нами, а потому дана нам в представлении как «этот стол, существующий вне и независимо от меня» — это, по меньшей мере, искусственная натяжка. Итак, обсуждать тему соотношения математики и реальности так, как будто мы знаем чтó есть реальность, какова она независимо от того, как она представлена в математическом знании, некорректно. Или же — другой ход мыслить реальность — мы фиксируем и представляем реальность физическими или иными нематематическим средствами, и при этом обсуждаем вопрос о том, как физическая реальность соотносится с математикой. Этот подход предлагал, например, А. Пуанкаре, когда обсуждал физический смысл некоторых математических представлений (к примеру, непрерывность).

В данной статье предпринимается попытка рассмотреть тему реальности в математике в рамках подхода к математике как мыслительной деятельности, в которой вырабатываются представления о реальности. Осмысливая природу математического мышления как специализированной символической деятельности, можно обнаружить интересные особенности отношения математического языка с тем, что математики называют реальностью. При этом обнаруживается, что тема «математика и реальность» замещается осмыслением понятия «математическая реальность». В связи с этим традиционная для философии математики контроверза «математического платонизма» и «натурализма» может получить новое осмысление.

II

Семиотический подход к математике позволяет нам рассматривать математику как гуманитарную науку, поскольку в данном контексте математика есть наука о человеке, о человеческой деятельности. Определение специфики математики как науки остается все еще проблемой. Отделяя ее от других наук, таких как естественные, технические, социально-гуманитарные, мы вынуждены, сравнивая ее с ними, выявлять сходства и отличия. В литературе встречаются разные мнения относительно того, что такое математическая наука. Я придерживаюсь позиции, согласно которой математика подобна языкознанию, она является наукой о языке науки. Взгляд на математику как на гуманитарную науку может сделать плодотворным обсуждение природы и специфики математики. Подчеркну, что при этом математика не сводится к какой-либо уже известной гуманитарной науке.

Итак, обосновываемые в данном разделе тезисы следующие. Тезис 1: математика отлична от всех других известных наук и одновременно она сходна со всеми другими науками. Этого нельзя сказать ни о какой другой науке. Тезис 2: математика есть определенный тип гуманитарной научной культуры. Поскольку утверждение, что математика — это особый вид гуманитарной науки, является довольно претенциозным и в то же время представляется автору продуктивным, в том числе и при решении проблемы математической реальности, остановимся чуть подробнее на обосновании сформулированных тезисов.

Сходства и различия между разными науками — математическими, естественными, техническими и социально-гуманитарными — определяются особенностями каждой в отношении к предмету, методу познания, функциям и роли в жизни человека.

По предмету науки можно разделить на две группы: «математические + естественные» и «технические + гуманитарные». Математические и естественные науки — это науки о «естественном», которые изучают объективный мир вещей, не сотворенных человеком. Но если естествознание (физика, химия, биология и др.) изучает, прежде всего, природу элементов мира, законы их взаимодействия, то математика изучает структуры этого мира, природа элементов которого ей безразлична. Правда, естествознание рассматривает опыт с внешними материальными объектами как основу познания и критерий истины, а математика для обоснования своих утверждений апеллирует не к опыту с вещами, а к опыту с мысленными образами и руководствуется принципом непротиворечивости суждений как критерием истины.

Технические и социально-гуманитарные науки, как науки об «искусственном», изучают мир произведений, созданных человеком. Предметом технических наук являются материальные произведения, изобретенные, сконструированные материальные системы, имеющие отношение к практическим целям, интересам и потребностям людей. Поэтому критерием оценки научно-технической деятельности является практическая выполнимость проектов, их целесообразность, эффективность, полезность. Социально-гуманитарные науки также изучают мир произведений, но прежде всего со стороны их духовного содержания и культурной ценности. Гуманитарные науки опираются, прежде всего, на значимость и смысл вещей. Предметом гуманитарных наук является субъективная человеческая деятельность, воплощенная в произведении, всегда имеющим символическое значение. Поэтому гуманитарные науки изучают те или иные знаковые системы в их отношении к человеку. Если математика понимается

как конструктивная деятельность, то ее предметом являются лингвистические определяемые произведения.

Из сказанного следует различие наук по способу познания. Науки, изучающие несотворенные предметы, нацелены на то, чтобы воспроизвести познаваемый объект в человеческих формах, подражать ему и, таким образом, изображать и выражать его содержание. Методы познания должны, таким образом, подражать самой познаваемой реальности. Таковы, например, методы эмпирического познания, в которых воссоздается познаваемый объект. Метод подчинен объекту. Напротив, в процессе познания науки об искусственном стремятся фиксировать сделанное, обозначить его и придать ему значение. Поэтому методы этих наук носят конструктивный характер, к числу которых относятся интерпретация и толкование. Это методы не воспроизводства, а производства объекта.

Из сказанного о методах также ясно, что математика может группироваться не только с естественными, но и с науками проективными (техническими) и гуманитарными.

Рассматриваемые науки различаются также и по функциям. Основными функциями научных теорий являются описание, объяснение, предсказание, проектирование, понимание, интерпретация. Описание есть представление действительности в определенной языковой системе. Оно является общей функцией всех наук. Математика описывает свойства, отношения идеализированных математических объектов, представляя их с помощью языка математических символов. Связи между элементами языка математика устанавливает методом рассуждения и доказательства. Поэтому ядром математики является логика.

Основные функции естественных наук — это объяснение и предсказание, или предвидение, явлений и свойств материального мира. Предсказание как функция естественных наук превращается в технических науках в функцию проектирования. Смысл объяснения в том, чтобы объясняемое явление, процесс, событие были представлены как моменты общих связей и закономерностей. В этом отношении математическое знание вполне способно выполнять функцию объяснения (за исключением причинного объяснения). То же можно сказать и о функции проектирования, поскольку математика постоянно создает модели, свойства которых изучает. Именно эти свойства математики и позволили, как мне представляется, в свое время Е. Вигнеру сформулировать тезис о непостижимой эффективности математики.

Главная функция социально-гуманитарных наук — это понимание. Понимание есть выявление смысла произведения. Герменевтическая концепция понимания говорит о нем как о процессе придания значения тексту в рамках определенного контекста. Эта функция

может быть названа интерпретацией. Математические науки всегда придавали большое значение интерпретациям, поскольку именно они делают математическое знание содержательным.

В истории развития науки происходили и происходят процессы интеграции и дифференциации. Процесс дифференциации затрагивает и математику. В процессе интеграции возникает объединение ранее независимых научных дисциплин, например, из соединения физики и математики возникла математическая физика. Можно говорить о формировании математической химии, биологии, экономики, социологии и т.д. Математика интегрируется с какими угодно науками, но обратное не наблюдается. Нет физической или биологической математики, или гуманитарной математики, но есть, например, математическая лингвистика или математическая физика. Это свидетельствует о специфике математики как науки «прикладной», т.е. «прикладываемой» к любым другим наукам.

Все вышеизложенное, на мой взгляд, свидетельствует в пользу тезиса 1. Смысл его я вижу в том, что математика оказывается какой-то универсальной наукой («царица всех наук»). Но понятие «наука наук» не означает, что математика есть наука особого рода. Она не наука наряду с другими, поскольку она больше, чем любая из известных конкретных наук. Я думаю, что имеет смысл рассматривать математику как выражение сущности научной культуры, как культуру научного мышления (тезис 2). Конкретные науки всегда связаны с материальным содержанием определенного среза реальности, что отражается в их названиях (биология, геология, химия, физика и т.п.). Математическое знание безразлично к материальной природе описываемых ею структур и отношений в реальных системах. Но то ли эти структуры существуют в самих материальных системах, то ли мы сами так структурируем мир объектов благодаря нашему воображению? Вопрос этот открыт навсегда. В ситуации отсутствия однозначного ответа на этот вопрос имеет смысл рассмотреть математику лишь как некий способ связи внешнего мира и нашего сознания, т.е. как культуру.

III

Тезис 2 говорит о математике как об определенном типе культуры. Культуру можно рассматривать с разных сторон. Одним из универсальных и плодотворных является представление культуры как знаковой системы. С этой точки зрения наука как культура, или научная культура, предстает в виде системы кодирования, воспроизводства и трансляции определенных умений, знаний об источниках знания, способах и средствах познания. Можно построить

различные классификации научных культур. Типы культур могут различаться способами кодирования, способами воспроизводства и трансляции знаний, способами и средствами познания. Типология культуры — отдельный самостоятельный вопрос. В данной работе я хотел бы остановиться лишь на одной фундаментальной типологии, в основе которой лежит разное понимание природы самого знака. В зависимости от отношения к знаку можно выделить два типа культуры, различие между которыми определяется тем, как понимается отношение между знаком и его значением: как единственно возможное или как условное и произвольное. Истоки этого подхода можно найти уже в диалоге Платона «Софист», где обсуждается вопрос о том, произвольны ли имена вещей или их имена связаны с природой самих вещей. Обозначая указанные два типа культуры, соответственно, как культуру выражения и как культуру правил, рассмотрим их характерные особенности[1].

В первом типе культуры — культуре выражения — сознание направлено, прежде всего, на поиск адекватного выражения уже данного содержания. Здесь содержание рассматривается как уже существующее, и задача заключается в том, чтобы найти «правильное» выражение данного содержания. В данном типе культуры имеет смысл говорить об истинности как о соответствии имени, знака содержанию, вещи. Основной мыслительной оппозицией в данном типе культуры является отношение «правильное — неправильное». Основной закон, действующий в данном типе культуры, звучит так: «что существует, то и правильно». Неправильное расценивается как несоответствующее существующему. Например, критерием правильности математического высказывания является его непротиворечивость, ибо существующее не может одновременно и быть, и не быть, быть «А» и одновременно быть «не-А». На этапе своего формирования, когда в математике складывались начальные представления о числе, фигуре, отношении, её доминантой формой была культура выражения (элементарная математика).

Культура выражения нашла свое яркое воплощение в галилеевой метафоре природы как книги. Он верил, что «книга природы» написана на языке математики, а буквами этого языка являются числа и фигуры. В этой фундаментальной метафоре математика понята как язык самой реальности, как «адекватное» выражение объективного содержания природы. Термин «адекватность» в данном контексте есть выражение символа веры в «математическую природу» природы. К этому же типу научной культуры относится известное выска-

[1] Впервые такая типология была предложена мною в книге: *Невважай И.Д.* Свобода и знание. Саратов: Изд-во СГАП, 1995. Гл. 5.

зывание Леопольда Кронекера о натуральных числах: «Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека».

Альтернативный тип культуры — культура правил — определяется отношением к знаку как к чему-то условному и произвольному по отношению к референту. В этой культуре сознание нацелено не на поиск выражения готового содержания, а на определение еще не данного содержания. Здесь знак не может быть правильным или неправильным. Именно знак и его употребление определяет и формирует свой референт, поэтому здесь действует правило: «существует то, что правильно, что определено правилом». Основной мыслительной оппозицией в данном типе культуры является отношение «упорядоченное — неупорядоченное». Применительно к математике этот тип культуры, очевидно, проявляется в том, что математические объекты вводятся посредством определений и заданием правил обращения с понятиями. Понятие указывает на то, что должно существовать в «действительности». Из этого обстоятельства исходят сторонники конструктивной математики. Согласно критерию конструктивности в математике, «существовать — значит быть правильно построенным». Критерий конструктивности противопоставляется критерию непротиворечивости, принятому в классической математике в качестве критерия существования. В данном типе культуры определяющей ценностью является правило, порядок, причем порядок установленный и контролируемый разумом. Интересно, что в одном из первых определений предмета математики, которое давал Декарт, говорится, что к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и при этом не существенно будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера. В соответствии с этим математика для обоснования своих утверждений апеллирует не к вещественному опыту, а руководствуется принципами доказуемости, полноты и др. Критерием же оценки эффективности математической деятельности является выполнимость (вычислимость) действий.

На мой взгляд, очень точно культура правил в математике охарактеризована Германом Вейлем в его метафоре математики как процессе «математизирования». Г. Вейль пессимистически оценивал возможность дать общепринятое определение предмета математики и в связи с этим прибегнул к образу «математизирования» как проявлению творческой деятельности человека, подобного музицированию, живописанию, стихосложению и т.д. А это означает, что математика не есть способ познания как отражения объективной реальности. Или — альтернативный вариант — эта реальность содержится в структурах человеческого мышления. Математика есть язык, каким говорит о себе разум, и посредством которого разум организует себя, свою дея-

тельность в отношении к окружающему человека миру. В вейлевском образе математика представляется как язык, посредством которого «строятся» математические объекты, математическая реальность.

Удивительным оказывается совпадение рассматриваемой типологии математической культуры и типах математического мышления, которые описаны в известной работе Ж. Адамара, посвященной психологии математического творчества[1]. Ж. Адамар пишет о двух типах математического мышления: есть умы логические и интуитивные. Согласно Адамару Пуанкаре и Риман были типичными интуитивистами, а, например, Вейерштрасс и Гильберт — логицисты. Интуитивные умы работают на поиск математического выражения некой эмпирической ситуации, а логицисты ищут решения вопроса в логическом развертывании содержания математических понятий. Конечно, ни один математик не обходится без интуиции или логики, речь может идти об интеллектуальной доминанте. Поэтому у интуитивистов в моей классификации доминирующей является культура выражения, а у логицистов — культура правил. Среди представителей современной математической мысли также можно выделить аналогичные типы. Так, например, И.В. Арнольд отстаивал право на понимание математики как культуры выражения, в то время как Н. Бурбаки видят математику, прежде всего, как культуру правил. И.В. Арнольд обращал внимание на то, что эти два подхода в математике отражаются и в системах математического образования, когда критиковал современную тенденцию ее «бурбакизации», т.е. формализации, выработки привычки мышления только по правилам, часто без должного проникновения в «физическое» содержание математических задач.

Таким образом, существование разнообразия математических культур является достоверным фактом. Это обстоятельство указывает на неизбежность радикального разрыва с классической философией математики и, соответственно, пересмотра сути проблемы реальности в математике. Классическая философия математики рассматривала смысл математики вне социально-исторического культурного контекста и понимала математическую онтологию как сферу вневременных, необходимых, и универсальных сущностей. В качестве альтернативы классической философии математики можно считать позицию, отстаиваемую Р. Хершем и определяемую как гуманистическая математика[2]. Согласно Р. Хершу математика есть человеческое предприятие и поэтому является частью человеческой культуры. Мате-

[1] *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970.

[2] *Hersh R.* A fresh winds in the philosophy of mathematics // American Mathematical Monthly. 1995. Aug.-Sept. P. 590–591.

матические сущности — это специальный вид социально-культурных и исторических объектов. Математические сущности — это общие культурные идеи, подобно литературным характерам или религиозным понятиям. Математика есть то, что делают математики. Поддерживая эту интенцию Херша, я предлагаю рассматривать математику не просто как часть «большой» общечеловеческой культуры, а как по сути самостоятельную специфическую культуру, существующую в виде универсальной системы кодирования, воспроизводства и трансляции определенных умений, знаний об источниках знания, способах и средствах познания. Такая точка зрения на математику позволяет обнаружить некоторые новые существенные связи между реальным миром, человеческим сознанием и математикой. В частности, мы приходим к неклассическим версиям решения проблемы реальности, если исходим из понимания реальности как того, что дано нам лишь в формах человеческой субъективности.

IV

Фиксированные выше две альтернативные парадигмы, что у вещей есть либо собственные имена, либо имена произвольны, я связываю не с природой вещей или имен, а с человеческим сознанием, которое «работает» по-разному. То, что для сознания является реальным, есть не некая внешняя данность как таковая, а действие сознания в отношении реальных вещей. Поэтому «данное» зависит от способа отношения к реальности. Тема «данного» актуальна в современных дискуссиях о познании. Наметились альтернативные подходы, определяемые как конструктивизм и реализм. Крайности этих позиций определяются тем, что конструктивизм изолирует мышление от бытия, а реализм изолирует бытие от мышления. В данной статье я не буду анализировать многочисленные аргументы сторонников конструктивизма и реализма, их достоинства и недостатки. Однако я хотел бы обратить внимание на один из ключевых моментов спора конструктивистов и реалистов. Возьму для этого фрагмент дискуссии, которая состоялась в ИФ РАН между В.А. Лекторским и В.М. Розиным. Она отражена в сборнике «Конструктивизм в теории познания»[1], вышедшем в Институте философии РАН в 2008 г. В.А. Лекторский защищал позицию реализма, а В.М. Розин — конструктивизма. Каждый из них признает притязания другой позиции, но отстаивает собственную позицию. В.А. Лекторский признает, что «конструктивистский подход схватывает ряд важных характеристик познавательной деятельности, которые могут и должны быть лучше поняты в рамках другой эпистемологической позиции, которую

[1] Конструктивизм в теории познания. М.: ИФРАН, 2008.

я (вслед за некоторыми философами) называю конструктивным реализмом»[1]. В.М. Розин же показывает, что, например, логическое мышление в античности возникло вследствие работ Аристотеля, в которых он определил правила и законы логики, выразив, таким образом, конструктивистскую точку зрения. Этот вывод встретил бурную негативную реакцию со стороны В.А. Лекторского. Лекторский твердо держится принципа реализма, согласно которому осознавать можно только то, что уже существует, в то время как В.М. Розин отстаивает противоположный ответ: предмет познания создается процессом познания. Оппоненты по-разному отвечают на принципиальный вопрос: «Существует ли предмет познания до того, как он стал изучаться?» Многие сторонники реализма согласятся с тем, что познаваемая реальность не «непосредственно даётся» познающему субъекту, а извлекается посредством деятельности. На этом часто звучащем в подобного рода дискуссиях тезисе стоит остановиться отдельно. Как понимать «извлечение»? Реалисты полагают, что можно извлекать лишь то, что уже есть. Правда, не надо забывать, что результат извлечения не обязан совпадать с извлекаемым. Если вы заранее не знаете, что извлечете, то на чем основана уверенность, что, извлекая из вещей, например, числа и фигуры, вы извлекаете именно то, что в них «есть» или чем они в действительности «являются»? Между «есть» и «являться» имеется разница. Напомню в связи с этим уже цитированное выше мной принципиальное соображение И. Канта о том, что безусловное находится в вещах не поскольку мы их знаем, но поскольку мы их не знаем. Именно поэтому мы и можем говорить о том, что вещи «являются» нам как числа, но при этом не обязательно, что вещи и «есть» числа или содержат в себе «числа». Поскольку мы не можем знать, какова вещь сама по себе, то можем лишь говорить о том, как она нам дана благодаря нашей позиции, какова она в отношении к нам. Само же это отношение всегда зависит и от нас. Говоря, что вещь нам «дана», мы не должны забывать, что дана-то она *нам*, а не просто наличествует в таком виде для всего и всех. Кант прав, говоря о том, что нам даны лишь «вещи для нас». И мы не можем сравнивать то, что мы извлекли из вещи с «самой» вещью. Если мы извлекли из вещи число, то это не значит, что число есть «внутреннее» самой вещи. Если я извлекаю из себя слова, это не значит, что эти слова находятся как таковые внутри меня. Конструктивисткая и реалистическая программы по-разному понимают «данное». Мне представляется, что конфликт между указанными двумя точками зрения на познание отражает вечное и фундаментальное различие между данным и созданным, между «нахождением» (finding) и «де-

[1] Там же. С. 31.

ланием» (making)[1]. Ричард Рорти считал это различие не существенным, но на мой взгляд, устранить его невозможно. Конструктивизм критикует реализм за мифологизацию, абсолютизацию понятия «данного» как налично существующего. Реализм прав, обвиняя конструктивизм в забвении понятия объективной реальности, существующей до и независимо от сознания, и понимании сознания как «фабрики реальности».

«Жена или теща»

Дискуссия между сторонниками конструктивизма и реализма может быть рассмотрена как развитие дискуссии между точками зрения Платона и Аристотеля на познание. Особенностью платоновской концепции является признание идей в качестве структур, задающих содержание вещей. Напротив, аристотелевская концепция понятия как извлечения из мира вещей, мир сам определяет содержание понятий. Историческим продолжением противостояния этих двух концепций является борьба эмпиризма и рационализма в философии Нового времени. Тупики, в которых оказывались эмпиризм и рационализм, обусловлены их методологией решения проблемы обоснования знания. Невозможно обосновать существование реальности вне и независимо от знания, исходя лишь из факта существования только самого знания (рационализм). Аналогичный тупик ждал эмпиризм, поскольку знание о фактах он стремился вывести из самих фактов (как известных, т.е. осознанных фактах).

Ограниченность и конструктивизма, и реализма проявляется в неспособности объяснить некоторые фундаментальные особенности восприятия и мышления. Для демонстрации сказанного обращусь к примерам. Рассмотрим восприятие так называемых двойственных изображений. Хорошо известна картинка «Жена или теща» (wife or mother-in-law) карикатуриста У. Хилла (E. Hill, 1915). Модернизированный вариант этой картинки был сделан психологами Е. Борингом и Р. Липером (E. Boring, R. Leeper, 1930). Кого мы видим на этой картинке, молодую женщину или старуху?

В связи с примерами двойственных изображений возникают следующие вопросы. Почему мы не можем одновременно видеть два образа в двойных изображениях? Почему мы видим либо одно изображение, либо другое? Глаза воспринимают всю сенсорную информацию сразу, а сознание «видит» значение воспринимаемого, и эти значения несовместимы в одно и то же время. Подобная способ-

[1] *Rorty R.* Philosophy and Social Hope. Harmondsworth: Penguin, 1999.

ность сознания проявляется не только в области восприятия, но и в области логики. Я имею в виду феномен истины и лжи. Считая истинным суждение «А», мы отдаем отчет в том, что суждение «не-А» является ложным, и при этом мы допускаем, что другому субъекту представляется «А» как ложь, а «не-А» — как истина. Эти факты можно объяснить, если принять гипотезу о том, что сознание есть способность отличать свои собственные состояния от состояний внешнего мира. В частности, сознание есть способность различать истину и ложь. Патология ума может проявляться в том, что человек продуцирует суждения, которые не может оценить как истинные или ложные. Когда человек говорит что-то, он понимает, говорит ли он правду или лжёт. Когда человек смотрит на некое изображение, то он осознает, что он видит, например, жену, но не тёщу, или тёщу, но не жену. Таким образом, сознание как акт различения не может оценивать видимый объект одновременно и как жену, и как тёщу, точно так же как не может воспринимать некое суждение одновременно как истину и как ложь.

Если мы рассматриваем сознание как «фабрику реальности», способную конструировать миры, то подобная точка зрения не позволяет объяснить описанные выше акты различения и то, как они связаны с особенностями самого объекта. Противоположная доктрина, рассматривающая сознание как отражение материального мира, также не объясняет феномен двойственности изображений и возможности умышленного обмана. В связи с этим я хочу обратить внимание на принципиальное соображение сэра Роджера Пенроуза, приведенное им в его книге «Новый ум короля». Пенроуз указывает, что действие «нормального» сознания не может быть описано никаким алгоритмом. Можно построить алгоритмы, генерирующие только ложные или только истинные суждения. Но нет алгоритма, который различал бы истину и ложь[1]. Таким образом, нельзя различные содержания сознания объяснить различием в объективных обстоятельствах бытия. Верно и обратное: нельзя различные обстоятельства бытия объяснить различными содержаниями сознания. Таким образом, конструктивизм и реализм, задавая свои и несовместимые друг с другом алгоритмы производства правильных, истинных представлений, суждений, не могут объяснить, почему мы не можем мыслить «А» и «не-А» как одновременно истинные или одновременно ложные суждения (это упрек, прежде всего, конструктивизму, для которого существует все, что может быть построено), и почему мы не можем воспринимать одновременно двойственные изображения (это упрек, прежде всего, реализму).

[1] *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М.: УРСС, 2003. С. 332.

В связи с поставленной задачей осмысления понятия «данного» хочу обратить внимание на проблему выражения, которую детально была проанализирована Э. Гуссерлем, но оказалась для него камнем преткновения[1]. Для решения проблемы «данного» необходимо признать, что описание сознания как интенционального акта должно быть дополнено описанием его как акта респонсивности[2]. Если интенция — это активность сознания, то респонсия (response) — это *ре*активность его. Идея респонсивности, или «ответности», в феноменологии была явно сформулирована одним из учеников Э. Гуссерля Адольфом Райнахом в работе «Априорные основания гражданского права»[3]. Сегодня концепцию респонсивного сознания разрабатывает немецкий философ Б. Вальденфельс[4]. Согласно Б. Вальденфельсу, термин «респонсивность», или «ответность», обозначает ситуацию, когда чужое сознание, или просто чужой, «пре-присутствует» в собственном сознании субъекта, который всегда *отвечает* на запрос, призыв чужого. С точки зрения собственника сознания чужая претензия не следует правилу и как будто не имеет смысла. «Чужое» дает о себе знать в форме выходящего за пределы устанавливаемого собственным разумом порядка. Сознание своими актами может отвечать на некую «данность», реагировать на событие «вторжения чужого» в наше сознание, требуя ответа, требуя выразить вторгающуюся «данность». Анализ подобных актов связан с выяснением того, как объективная реальность (вещь или «чужое» сознание) становится фактом нашего сознания. Поиск выражения притязающей на собственное бытие внешней данности осуществляется в актах говорения, именования, в попытках распознать и признать, что же нам дано. Данное предмету имя представляет его как объект мысли. Я считаю, что вальденфельсовское понимание респонсивности можно расширить, чтобы оно охватывало ответность не только в отношении претензии чужого сознания, но и претензии вообще всякого внешнего бытия, будь оно вещественным или духовным. Респонсивные акты определяют как раз тот тип культуры, который выше был определен как культура выражения. «Правильным» выражением считается тот знак, который адекватно представляет фактически существующую реальность. Мерой «правильности» имени является его объективно существующее значение. В данном типе культуры имеет смысл гово-

---

[1] *Разеев Д.Н.* В сетях феноменологии. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2004. С. 151.

[2] *Невважай И.Д.* Дуалогическое сознание // Практики признания истины. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2011.

[3] *Райнах А.* Собрание сочинений. М.: Дом интеллектуальной книги, 2001. С. 253–326.

[4] *Вандельфельс Б.* Мотив чужого. Минск: Пропилеи, 1999.

рить о «собственных» именах вещей, и поэтому здесь действует закон: правильно то, что существует, т.е. здесь означаемое первично, а означающее вторично.

Напротив, в интенциональных актах сознание есть направленность *на* предмет, который имеется в виду лишь постольку, поскольку сознание совершает акт, в котором открывается смысл, значение, поэтому оно опирается на объект-знак. От него сознание отсылается к возможному значению. Поводом, или основанием, интенционального акта может быть, например, непосредственно данная в опыте восприятия вещь. Воспринимаемая сторона этой вещи может выступать в функции знака, значение которого придается сознанием в процессе интерпретации видимого (*что* я вижу). В интенциональных актах реализуется функция *указания* знака как орудия мысли. Этот акт идеально полагает некое содержание: значение, выступающее в качестве объекта мысли. Т.е. интенция задает значение знака. Здесь отношение между знаком и его значением условно, произвольно, поскольку не материя знака задает его значение, а субъективный — что в данном контексте означает «начальный» — интенциональный акт придает знаку значение. Описанная особенность сознания определяет (порождает) тип культуры, или логики мышления, который я называл «культурой правил». Дело в том, что в рассмотренной ситуации мышление осуществляется в пространстве уже данных обозначающих, в котором интенциональные акты полагают, определяют обозначаемые. Субъективное отношение к знаку, способ его употребления определяют референт, поэтому здесь действует закон: существует то, что правильно, что задано правилом обращения со знаком. В этом случае сам знак не может быть «правильным» или «неправильным», он может быть каким угодно, ведь главное — это его значение, т.е. здесь означающее первично, а означаемое вторично. В данном типе культуры мыслительная оппозиция «правильное—неправильное» применяется только в отношении к действительности. Знаковые конструкции (правила) указывают на то, что должно иметь место в действительности, что в ней «правильно», а что «неправильно». Что определено посредством правила, то и существует реально. Поэтому здесь имеет смысл говорить о соответствии действительности понятию, или значению знака. Такое отношение является оценочным, в котором действительность оценивается как упорядоченная, организованная, «правильная» и как таковая противопоставляется неупорядоченной, спонтанно образованной действительности.

Итак, две сущностные способности сознания — респонсивность и интенциональность — определяют два альтернативных типа культуры мышления: интерпретативный и выразительный. И в мышлении

«работают» как бы два языка. Язык, конечно, один, но с двумя доминантами, связанными с двумя взаимодополнительными функциями: функцией именования (и замещения вещи знаком) и функцией указания знака. Соответственно, знак либо вторичен по отношению к своему значению (в функции замещения), либо первичен (в функции указания как определении значения). Особенностью математического мышления является то, что знак и его значение рассматриваются как две равноправные и взаимодополнительные «математические реальности», и, вместе с тем, математика дает описание отношений между областью знаков и областью значений, рассматривая «отображения» одной области на другую. Математическая реальность двойственна: она являет себя либо как значение знака, либо как знак определенного значения.

С учетом вышеизложенного можно придти к заключению, что реальность в математике — это определенная *математически* реальность. Способ определения может быть разный. Выше были описаны возможные фундаментальные способы, которые связаны с альтернативными функциями — указания и замещения. И поэтому реальность в математике может быть дана либо как значение — результат интерпретации знака, либо как значение, выраженное посредством знака. Эти два рода реальностей, как мне представляется, были четко фиксированы семантическим треугольником, определенны Г. Фреге[1]. Фреге соединяет имя, предметное значение (или денотат) имени, выражаемый смысл (способ выражения, представления значения с помощью имени) в единый комплекс, с которым работает математика. Математика все эти три ипостаси реальности рассматривает как равноправные, т.е. как «математические». Третья реальность — вдобавок к двум вышеупомянутым — это математические имена, алфавит.

Приведу простую иллюстрацию перехода между двумя описанными реальностями. Точка как «физический» объект есть знак, когда мы размещаем точку на прямой. Этот знак имеет в данном контексте значение числа (определяемого как величина расстояния от начала — точки «0»). Это интерпретация знака. Но с другой стороны, точка как объект может быть выражена числом. Число здесь есть имя точки. Так Декарт определяет точку в пространстве с помощью декартовой системы координат, т.е. пары чисел. Благодаря этому Рене Декарт установил связь между числами и геометрическими формами и проложил дорогу для разработки аналитической геометрии.

Помимо того, математика создает свой алфавит для каждой области задач. Этот алфавит состоит из простых символов (буквы,

[1] *Фреге Г.* Смысл и денотат // Семиотика и информатика. Вып. 8. М.: ВИНИТИ, 1977.

абстрактные значки). Математики придумывают всевозможные выражения и придают значение этим выражениям (формулы). Другой особенностью математики является создание техники (метода) логического вывода одних формул из других.

В заключении хотелось бы подчеркнуть, что обосновываемая в данной статье идея множественности математической реальности связана с радикальным отказом от классического стандарта понимания реальности как «вещи самой по себе», которая единственна и существует независимо от математического знания и познания. Найдет ли этот отказ отклик в эволюции математики — покажет будущее.

Библиографический список

Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970.

Вандельфельс Б. Мотив чужого. Минск: Пропилеи, 1999.

Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 6 т. Т. 3. М.: Мысль, 1964.

Конструктивизм в теории познания. М.: ИФРАН, 2008.

Невважай И.Д. Свобода и знание. Саратов: Изд-во СГАП, 1995.

Невважай И.Д. Дуалогическое сознание // Практики признания истины. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2011.

Пенроуз Р. Новый ум короля. М.: УРСС, 2003.

Разеев Д.Н. В сетях феноменологии. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2004.

Райнах А. Собрание сочинений. М.: Дом интеллектуальной книги, 2001.

Фреге Г. Смысл и денотат // Семиотика и информатика. Вып. 8. М.: ВИНИТИ, 1977.

Hersh R. A fresh winds in the philosophy of mathematics // American Mathematical Monthly. 1995. Aug.-Sept. P. 590–591.

Rorty R. Philosophy and Social Hope. Harmondsworth: Penguin, 1999.

А.Ю. Цофнас

ЧИСЛО: ОНТОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Парменид. ...Не думаешь ли ты, что остается какое-либо число, существование которого не необходимо?

Аристотель. Нет, не думаю.

Парменид. Следовательно, если существует одно, то необходимо, чтобы существовало и число.

Аристотель. Необходимо.

Парменид. Но при существовании числа должно быть многое и бесконечная множественность существующего. В самом деле, разве число не оказывается бесконечным по количеству и причастным бытию?

Аристотель. Конечно, оказывается.

Платон. Парменид, (144*a*)[1].

Скажу сразу, что, по моему мнению, вопрос о *природе* числа, который так давно и часто обсуждается[2], значения не имеет, и я попытаюсь обосновать — как этот свой тезис, так и некоторые следствия из него для осмысления философских оснований математики.

Онтологические предпосылки вопроса. Истоки онтологической постановки вопроса о природе числа обычно относят еще к парменидовскому обоснованию его Единого и к знаменитому пифагорейскому тезису «число правит всем». Число трактовалось пространственно-геометрически. В период становления классической науки за понятием числа все еще просматривались пространственные образы. Декарт создает аналитическую геометрию. А Галилей прямо говорит о Вселенной как о «величественной книге», понимать которую «может лишь тот, кто сначала научится постигать язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки её — треугольники, круги, другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова»[3]. Но как бы ни

[1] *Платон.* Парменид // Платон. Соч.: В 3 т. Т. 2. М.: Мысль, 1970. С. 432–433.
[2] См., в частности: Число: Сб. статей. М.: МАКС Пресс, 2009.
[3] *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. С. 41.

мыслилось число, жгучий интерес к прояснению его природы возник в начале XX в., когда физические открытия все чаще стали делаться «на кончике пера», причем пространственный образ за понятием числа возникал уже не обязательно. В 1941 г. Марк Блок определил социальный фон для такого интереса: «Как ни низко стоит... у большинства людей нашего времени восприятие чисел... наше восприятие, как и наша цивилизация, пропитано математикой»[1]. Не одинаково природа числа мыслилась через призмы весьма продуктивных с точки зрения математики, но не слишком, как мне представляется, эффективных в онтологическом смысле программ логицизма, формализма, конструктивизма, интуиционизма. А за всем этим маячила почти мистическая проблема, которую Е. Вигнер поместил в название своего доклада 1959 г. на курантовских математических чтениях в Нью-Йоркском университете: «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»[2]. Ясно, что хотя бы подступиться к этой «тайне, которую нам еще предстоит раскрыть» (эти слова Ч. Пирса взяты Вигнером в качестве эпиграфа к докладу), не удастся, не отвечая на вопрос об онтологическом смысле хотя бы одного слова «число».

Чтобы не утонуть в многочисленных нюансах, я попытаюсь максимально упростить суть дела и перевести основные ответы на этот вопрос в плоскость обыденных суждений. В конце концов, ведь все равно учителю математики приходится как-то приоткрывать детям эту самую пирсовскую тайну.

На обыденном уровне возникшая проблема выглядит так. Если, скажем, есть всем знакомое слово «дерево», то всегда есть возможность остенсивных определений, без которых не обходится ни один ребенок, осваивая родной язык. Можно, указав на березу, сказать: это — дерево. — А вот это клен? — И клен тоже дерево. А также ясень, дуб, ёлка: всё это деревья. На первых порах ребенок будет удовлетворен. Ситуация несколько усложнится, если ребенку придется объяснять, что такое цвет, дружба, улыбка или, того хуже, аддитивность, симметрия. Но даже в этих случаях можно все-таки на что-то указать, привести примеры, надеясь на (врожденную?) способность ребенка к генерализации. Если учитель написал на доске $7<5$, то ребенок непременно скажет, что этого не может быть, «потому что этого не может быть никогда» — ни в уме, ни за окном нашего класса. Собственно онтологическая проблема возникнет тогда, когда подросший ребенок спросит из чего «сделаны», из чего состоят эти самые дружба, улыбка

[1] *Блок М.* Апология истории, или Ремесло историка. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1986. С. 51.

[2] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Наука, 1971. С. 182–198.

чеширского кота или симметрия. И существуют ли они сами по себе, отдельно от Ивана и Петра, от самого кота (как это все же получалось, что когда кот исчезал, улыбка исчезала последней) или от пары туфель — так же, как эта береза от дерева вообще. Разные учителя, по-видимому, будут по-разному выходить из положения — в зависимости от того, отдают ли они, сознательно или бессознательно, свои симпатии номинализму или реализму (в средневековом смысле этих слов). Поскольку я работаю в техническом вузе, где математике уделяется много внимания, я точно знаю, что у студентов понятие природы числа почти всегда исчерпывается представлением о цифрах, а когда им укажешь разницу, они начинают искать ответ — как правило, в духе номинализма.

Онтологизм, гносеологизм или прагматизм? Выбор одной из концепций — номинализма или реализма в той или иной их форме — кажется обязательным для принятия (или отвержения) всеми работающими математиками. В.В. Целищев, например, полагает, что «... платонизм есть успешное с точки зрения математического сообщества объяснение природы математики и математической практики...», что работающий математик сознательно или бессознательно принимает онтологию платонизма[1], хотя замечает, что «более правильно говорить не о платонизме в математике, а о реализме в математике»[2].

Впрочем, позиции реализма и номинализма не обязательно просматриваются в различных концепциях относительно природы числа. Можно, например, попытаться избавиться от онтологической постановки вопроса. В таком духе рассуждал еще В.И. Ленин («Философские тетради»), когда решал проблему непрерывности движения, переводя внимание с онтологической проблематики на принципиально дискретную особенность человеческого мышления. Тем самым он полагал гордиев узел с апориями Зенона разрубленным: мы «не можем отразить, отобразить живого, не огрубив, не омертвив его». Вот и И.Д. Невважай предлагает «рассмотреть тему реальности в математике в рамках подхода к математике как форме языковой мыслительной деятельности», полагая, что таким образом «традиционная для философии математики контроверза “математического платонизма” и “натурализма” может получить новое осмысление»[3]. Тогда, отмечает автор, можно придти к выводу о том, что у самого человеческого сознания имеется «две сущностные способности» —

---

[1] *Целищев В.В.* Философия математики. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 2002. С. 34.

[2] Там же. С. 35.

[3] Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность. Тезисы Третьей всероссийской научной конференции. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. С. 81.

«респонсивность и интенциональность», которые «определяют два альтернативных типа культуры математического мышления». Автор полагает, что «это объясняет тот факт, что в математике “работают” два языка». В целом же, «математическая реальность двойственна: она является либо как значение знака, либо как знак определенного значения»[1].

Все бы хорошо, более того, мне и самому уже случалось высказываться в том же духе — у человеческого познания (отнюдь не только математического) имеются две контроверсивные и дополнительные (комплементарные) ветви познания[2]. Да вот только поиск онтологического смысла математических объектов этим не отменяется. Онтология, вообще-то, принимает принцип объективности, строит картины мира с позиции «Внешнего Наблюдателя» (если угодно, того самого «Бога, который не играет в кости»). А с точки зрения этого наблюдателя сами наши респонсивность (т.е. отображение, соответствие чему-то?) и интенциональность (направленность на некий x) являются не более чем отношениями в мире. И... они, в свою очередь, нуждаются в представлении каким-либо языком. Почему бы как раз — не одним из языков математики?

Для конструктивизма характерен перевод вопроса о природе объектов математики в прагматическую плоскость. Он изначально строился как альтернатива теоретико-множественным представлениям. В школе А.А. Маркова в меньшей степени (здесь внимание сосредоточивалось на полезности, а не на интуиционистски понимаемой онтологической сущности), но совершенно явно в случае трансцендентального конструктивизма Эрретта Бишопа онтологическая природа математических абстракций все-таки тяготеет к номинализму. К этому подталкивает общий тезис «существовать — значит быть конструируемым, т.е. быть построенным по некоторому правилу»[3].

Не знаю, кстати или некстати, но вспомнился один случай, известный всем футбольным болельщикам «со стажем», когда на чемпионате мира звезда аргентинского футбола Марадона забил гол рукой, а судья — конечно, не по правилам! — этот гол засчитал. Так был гол или он существовал лишь номинально? Конечно, правила игры в футбол и правила математики заметно различаются. Но, следуя мысли Л. Витгенштейна (ФИ, пп. 139–142)[4], можно сказать, что не суще-

---

[1] Философия математики... С. 84.

[2] *Цофнас А.Ю.* Теория систем и теория познания. Одесса: АстроПринт, 1999. С. 155–192.

[3] Философия математики... С. 174.

[4] *Витгенштейн Л.* Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 1. М.: Гнозис, 1994. С. 134–137.

ствует правил применения правила. Кроме того, правила — это даже не законы природы, их время от времени меняют, а если некто меняет правила, то в каком смысле существует объект, сконструированный по новым правилам? (Марков-то как раз правила менял — отказался от понятия актуальной бесконечности, от закона исключенного третьего).

И при всем том, бесспорно, что числа существуют с «необходимостью», что они — абстрактные объекты, что «они вводятся в обиход математической практики разными способами», что «следует различать, на каком уровне рассмотрения делаются утверждения о существовании чисел». А если значение понятия числа определяется его употреблением, то «следует искать такой контекст, в котором разговор об абстрактных объектах смешивается с разговором об обыденных объектах»[1]. Конечно, смешивать не следует, но всё это не снимает вопроса об онтологической природе наших математических абстракций.

«Сглаживая углы» номинализма и реализма, В.А. Бажанов[2] все многообразие точек зрения на природу числа свел к трем — двум основным и третьей, по его мнению, возможной. Реалисты (включая прямых «платоников») полагают объекты математики существующими — несмотря на непростой вопрос об определении «бытия» — либо в некоторой сверхчувственной объективной реальности, либо несколько иначе. (Замечу, что А.И. Уёмов, например, называл одну из возможных онтологических позиций «эмпирическим реализмом», полагая, что отношения, как и свойства, в том числе и математические, могут считаться объективно существующими и в то же время эмпирически данными, хотя и не обязательно непосредственно[3].) При этом, замечает Бажанов, реалисты оставляют вопрос о том, почему к объектам математики не применим принцип детерминизма — ни в сильной, ни в слабой его форме — без ответа. Антиреалисты же (в том числе прямые номиналисты) «склонны связывать логико-математическое исследование не с открытием, а с конструированием объектов», причем «семантические соображения, относящиеся к понятию (математической) истины, могут заменяться альтернативными синтаксическими, типа свойств непротиворечивости и/или консервативного расширения»[4]. К числу антиреалистов отнесены сторонники конвенционализма, формализма, фикционализма и др.

---

[1] *Целищев В.В.* Онтология математики: объекты и структуры. Новосибирск: Нонпарель, 2003. С. 220.

[2] Философия математики... С. 116–120.

[3] *Уёмов А.И.* Онтологические предпосылки логики // Вопросы философии. 1969. № 1. С. 73.

[4] Философия математики... С. 117.

Свои симпатии В.А. Бажанов, по-видимому, отдает тем, кого он относит к «третьей линии», позволяющей, по его мнению, снять некоторые трудности онтологического и гносеологического толка при реализации первых двух линий. Постулируется существование «паттернов» — «базисных, элементарных образований, которые формируют математическую реальность» и «из которых можно образовывать сколь угодно сложные абстрактные системы...». Со ссылкой на П. Мэдди утверждается, что «математические объекты являются абстрактными образованиями нефизической и нементальной природы, но существуют в пространстве и времени, как и множества (обычных) физических предметов», а «математические языки оказываются как бы надстройкой над ... нейробиологическими структурами»[1].

Однако обращение к понятию паттерна не позволяет вынести его содержание за пределы когнитивной, перцептивной, ментальной сферы в некий «третий мир». Использование понятия в синергетике, физиологии, науках об искусственном интеллекте, в гуманитарных науках, как утверждает соответствующая справочная статья[2], отсылает нас к гораздо чаще употребляемому понятию «концепт». Там же говорится, что паттерн связан с целостностью восприятия, с тем, что его «накладывают» на исследуемый «материал». Паттерн связывают с базовыми культурными ценностями и, наконец, прямо указывают, что он «гнездится в сознании».

Можно пойти и вовсе радикальным путем: решить, что математика вообще не должна обращать внимания ни на какие свои онтологические предпосылки. Предписывая онтологии иметь натурфилософские притязания (помнится, Гегель когда-то писал, что кое-кто приписывает философии чесотку, чтобы иметь право ее чесать), Габриэле Лолли, например, полагает, что такой поиск — это философская казуистика. «В научных языках нет никакой необходимости в общих словах типа “предмет” или “число”, которые характерны для естественного образа рассуждения, то есть такого способа, при котором каждый термин предположительно обозначает что-то реально существующее»[3]. Математика, по мнению автора, «исторически предшествует онтологии, и математические теории представляют собой построения, не зависящие от философских предписаний. Чем являются математические объекты и существуют ли они — решает математика»[4]. А вот если философ не выражает нормативных притязаний, то в этом случае он «может только принять к сведению, пред-

[1] Там же. С. 118, 119, 120.

[2] Новейший философский словарь. 3-е изд. Мн.: Книжный Дом, 2003.

[3] *Лолли Г.* Философия математики: наследие двадцатого столетия. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2012. С. 59.

[4] Там же. С. 61.

полагают ли математические теории... определенную онтологию или нет, и какого рода. Если его онтологическое учение явно противоречит математике, то оно остаётся лишь частной декларацией»[1].

По этому поводу можно лишь заметить, что вопрос о том, что возникло раньше — философия или математика — не только спорный (ох, уж эта проблема курицы и яйца!), но и несущественный. Философско-онтологические предпосылки — не временно́го характера, они могут быть обнаружены в любой развернутой области знания и даже в религиозных воззрениях, которые уж точно возникали никак не позже философии. Прояснением онтологических предпосылок математического знания интересуются отнюдь не только философы, но и сами математики — без этого, например, затруднительно определить предмет этой науки. А «принять к сведению», какая именно онтология предполагается разными математиками, невозможно, не «поставив ребром» онтологические проблемы.

Таким образом, столь долгое, но всё же не слишком эффективное обсуждение вопроса о природе числа, как и иных конструктов математики, наводит на мысль о том, что стоит попытаться выйти из привычного поля рассуждений. Не подойти ли к рассмотрению этого вопроса с другого конца — не столько обсуждая логико-математические проблемы, сколько пытаясь прояснить собственно философский аспект того, что имеется в виду под онтологическим значением?

Типы онтологии. Обычно, когда говорят об онтологии, на первый план действительно выплывают те самые «детские» вопросы: существует ли, а если да, то где именно — только в уме или же в каком-то эмпирически оправданном смысле за его пределами. Однако онтологическая проблематика этим далеко не исчерпывается. Онтология (не говоря уже о метафизике в целом) неоднородна. В ней различимы три группы проблем, несводимые друг к другу. Они соответствуют всего трем вопросам, которые можно обратить к миру «самому по себе»:

1) Существует ли данный предмет (или мир в целом), а если существует, какова его природа (материальная, идеальная, дуальная и т.п.)?

2) Меняется ли предмет (и мир в целом), а если изменяется, то каким именно образом — детерминированно или нет, имеется ли у этого изменения какая-либо определенная направленность?

3) Каково строение, структура данного предмета (и мира в целом)?

Ответы на эти вопросы составляют, соответственно, натуральную, динамическую и структурную онтологии. Каждая из этих частей он-

[1] Там же. С. 62.

тологии опирается на собственные принципы, т.е. на такие утверждения, которые не выводятся из наличного знания, а принимаются на веру. Поскольку это именно принципы, то их проблемная постановка невозможна. О принципах не спорят. Принципы — будь то хотя бы принципы номинализма и реализма в их исходном значении — либо принимают, либо отвергают, либо, как мы видели, пытаются совместить. Вероятно, наличие принципиально неразрешимых фундаментальных вопросов является отличительным признаком онтологии и, по-видимому, философского знания в целом. Философия интересна не тем или иным решением вселенских вопросов, а как раз попытками обзора всего поля правильно поставленных проблем и логически возможных решений.

Натуральная онтология касается описания наблюдаемых (или «созерцаемых» — в кантовском смысле) явлений и более или менее обоснованных предположений о природе вещей. Демокритовское рассуждение о том, что в мире нет ничего, кроме атомов и пустоты, — это рассуждение натурально-онтологического свойства. Атомы — материал, из которого «сделаны» вещи. Точно так же все модификации утверждений о том, что материальные явления первичны относительно духовных сущностей (либо наоборот), касаются природы вещей.

С другой стороны, когда, например, говорят, что движение неуничтожимо и первично относительно покоя, или что у всякого действия есть причина, или хотят определить тем или иным способом некий особый вид движения под названием «развитие» — во всех этих случаях речь ведут в русле *динамической онтологии*. К динамической онтологии относится и рассмотрение пространственно-временных характеристик изменений. Вообще все утверждения и рассуждения, которые связаны с концепциями детерминизма, с использованием категорий необходимости и случайности, возможности и действительности относятся к сфере динамической онтологии.

Однако когда Демокрит сравнивает свои атомы с буковками, полагая, что из однородных, но разного вида, атомов складываются несхожие вещи — примерно так же, как одними и теми же буквами пишутся комедия и трагедия, он переводит свое рассуждение в структурный план, в область *структурной онтологии*. К структурной онтологии относятся концепции (релятивизм, субстанциализм, субъективизм), касающиеся физической или ментальной относительности. Вообще любые утверждения об «организации» или о «порядке», включая кантовские представления о том, что натуральный ряд чисел есть выражение порядка, зафиксированного идеей времени, — так же из области структурной онтологии.

Конечно, развернутая онтология строится как единое целое. Три типа (или аспекта) онтологии окажутся в ней тесно переплетенны-

ми. Но это не означает, что эти три типа равнозначны. Структурно-онтологические представления невозможно устранить ни из какой онтологической концепции. Однако рассуждения непосредственно в области самой структурной онтологии могут вестись относительно независимо от представлений о природе вещей и об их динамике, т.е. от натуральной и динамической онтологии. Это можно сформулировать как *принцип толерантности* (*индифферентности*) структурных исследований к определению природы и динамики вещей[1]. Всем памятна «Глокая куздра...» Л.В. Щербы: пример был приведен, чтобы показать, что грамматику, структурную дисциплину, можно изучать, отвлекаясь от семантики. Достижение согласия исследователей по собственно структурным вопросам принципиально возможно, но оно далеко не всегда реализуемо при выяснении природы вещей или характера их изменений.

Бесчисленное множество раз цитировалось определение (по-видимому, предельно широкое) предмета математики Н. Бурбаки как науки о структурах. Но я приведу это определение в контексте: «Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, — пишет Н. Бурбаки,— является то, что они применимы к множествам элементов, природа которых не определена (разрядка моя. — *А.Ц.*). Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы... затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры. Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо других предположений* относительно рассматриваемых элементов, в частности, от всяких гипотез относительно их "природы")»[2].

Вот почему, опираясь на принцип индифферентности, два математика могут серьезно разойтись друг с другом во мнениях, когда выскажут свои соображения о природе числа, о понятии бесконечности или о значении неэвклидовых геометрий. Но при этом они легко согласятся считать истинным, например, доказательство теоремы Эвклида относительно того, что всегда можно найти простое число, которое больше, чем любое наперед заданное число N, потому что N!+1 — может иметь делители только превосходящие N. (Правда, затем наши математики могут вновь не придти к согласию относительно того, может ли эта теорема служить обоснованием идеи бес-

[1] *Цофнас А.Ю.* Теория систем и теория познания. С. 110–117.

[2] *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Архитектура математики. М.: Знание, 1972. С. 9–10.

конечности ряда простых чисел — например, потому, что станут поразному трактовать *природу* бесконечности.)

Именно этот принцип позволяет понять, почему только для математика, в отличие от людей множества других профессий, включая профессию историка, М. Блок сделал исключение: «Думается, что великий математик будет не менее велик, если пройдет по миру, в котором он живет, с закрытыми глазами»[1]. А если принцип принимается, то можно определенно сказать, что понятие числа не имеет никакого *натурально*-онтологического значения. Не имеет оно и *динамически*-онтологического значения: никому не приходит в голову говорить о движении, или, тем более, о развитии числа, а к объектам математики (по крайней мере, «реалисты», как отмечено Бажановым) не применяют принцип детерминизма.

Принцип индифферентности математики к натурально- и динамически-онтологическим суждениям как будто проясняет вопрос, почему из трех классических концепций истины — корреспонденции (соответствия эмпирически данному объекту), когерентности (внутренней согласованности) и прагматичности (эффективности применения) математик отдает предпочтение второму (как основному) и третьему (вспомогательному)[2]. Лишь косвенным образом — через третью концепцию, т.е. через установление соответствия научных теорий, в которых используется данный математический аппарат, этой самой эмпирической реальности — удается обратиться к концепции корреспонденции (А.А. Ивин приводит пример с обращением к «ослабленному критерию истинности Куайна»).

Тем не менее относительная свобода от описания природы и динамики объектов не освобождает математику (и понятие числа) от онтологического обоснования. Говоря языком Галилея, какие все же «знаки Вселенной» отображает математика?

Категории и принципы структурной онтологии. Структурная онтология, как и две другие ее части, не обходится без собственных фундаментальных понятий. В частности, это понятия вещи, отношения и свойства, соотношение которых предполагает соответствующие принципы. Категориальный смысл этим понятиям был придан в работе А.И. Уёмова «Вещи, свойства и отношения»[3] (ее, по-видимому, можно считать классической).

Уёмов полагал, что комбинаторно возможно представить себе семь принципов, которые так или иначе соотносят данные категории, и почти все они нашли отображение в каких-либо известных концеп-

---

[1] *Блок М.* Апология истории. С. 28.

[2] Философия математики... С. 45–47.

[3] *Уёмов А.И.* Вещи, свойства и отношения. М.: АН СССР, 1963.

циях. Как и едва ли не все фундаментальные вопросы философии — это вопросы о первичности (не во временно́м, разумеется, а в функциональном смысле). Можно, в частности, полагать первичными вещи — это концепция реизма. Фактически исчисление высказываний — это исчисление вещей. Атрибутивизм — это предположение о первичности свойств, и такой была, например, философская позиция Дж. Беркли. Реляционизм (релятивизм) признает, соответственно, первичными отношения. На этой позиции может оказаться, пожалуй, всякий, кто полагает, что наш мир — это просто реализация предсуществовавшей программы. Поскольку о математике говорится, что она наука о структурах, а структура понимается как отношения, вольно или невольно многие именно с этой точки зрения трактуют «непостижимую эффективность математики».

Далее, возможны еще три бинарные точки зрения, когда какая-то пара из этой тройки категорий принимается более фундаментальной, чем третья. Можно принять первичными вещи и свойства — к этому тяготела аристотелевская логика (но не метафизика). Логика отношений опиралась на идею большей фундаментальности вещей и отношений. В этом русле исчисление предикатов тесно переплетено с экстенсиональными представлениями, с понятиями класса и множества. Кажется, только представление о первичности свойств и отношений относительно вещей не нашло отображения в какой-либо известной логико-философской концепции, но ничто не мешает ей появиться завтра.

В работе «Вещи, свойства и отношения», как и почти во всех последующих работах автора, представлена — как наиболее естественная с точки зрения функционирования в естественном языке и использования понятий в научных исследованиях — тернарная модель. В ней категории вещи, свойства и отношения определяются друг через друга, а их различие становится чисто функциональным. Когда мы говорим о числе двенадцать, что оно четное, то думаем о числе как о вещи. Если утверждается, что «двенадцать негритят пошли купаться в море», то здесь «двенадцать» выступает как свойство некоторого набора вещей (отнюдь не одноместный, а многоместный предикат). А если утверждается, что $2^{12} = 4096$, то здесь «двенадцать» выступает как некоторое отношение между числами 2 и 4096. Это отношение превращает данные два числа в новую вещь — в пару чисел.

Разумеется, мои примеры могут быть переосмыслены в рамках любой из шести других концепций структурной онтологии — немедленно обнаружится разная вера математиков. Однако повода поставить вопрос о *натуральной* природе числа, о том, какая концепция скорее ведет к истине — реализм, номинализм или какой-либо «кентавр» из этих точек зрения, — ни у кого не возникнет. Структурная

онтология может оставаться вполне равнодушной к натурально-онтологическому вопросу о первичности/вторичности и в этом смысле «реальности» математических (как и вообще любых языковых) структур. Таким образом, приходится иметь дело не с определением природы числа, а с синтаксическим характером различия числа как вещи, свойства и отношения, а здесь открываются совсем иные перспективы для онтологических размышлений.

В качестве вещи, свойства или отношения число может, в свою очередь, характеризоваться различными свойствами. Ясно, что число, хотя и вещь, но не тело, т.е. не вещь, у которой можно искать какие-либо пространственные параметры. Как о свойстве, о числе можно сказать (с точки зрения его интенсивности), что это свойство *точечное*, а не линейное. Числа, конечно, бывают бóльшими или меньшими, но данное число в конкретном случае либо есть, либо его нет — точно так же, как можно либо быть гражданином такой-то страны, либо не быть. Невозможно спеть: «Почти двенадцать молодых афроамериканцев пошли купаться море» — их было либо 12, либо 11, либо какое-то другое определенное число. Не исключено, что разгадку той самой тайны эффективности математики следует искать именно на этом пути: по-видимому, любое линейное свойство любой вещи предполагает наличие точечного свойства, но не сводится к нему. «Быть умным человеком» — здесь указано свойство явно линейное. Но сначала надо просто «быть человеком», homo sapiens, а это свойство — точечное. (Поиском этого точечного свойства как раз и были заняты герои известного романа Анри Веркора «Люди или животные?») Людей без конца считают и пересчитывают, находят более или менее устойчивые демографические закономерности. Но никто не брался считать умных людей. Пресловутая *точность* математики явно выводится из этого обращения к точечным свойствам. (Отмечу в скобках, что математики настолько привыкают мыслить «точечно», что как бы перестают замечать линейные свойства; не потому ли ни один математик, кажется, никогда не управлял государством?)

В качестве отношения число характеризует свои объекты *внешним* образом, а не внутренним. (Внутренние, или «естественные», отношения — это такие отношения, которые нельзя изменить, не меняя соотносимых вещей, а внешние изменить можно.) Число «двенадцать» в нашей фразе из песенки можно легко заменить, допустим, на «дважды шесть»: пусть они идут купаться парами. Кроме того, про любое число можно сказать, что оно — *незавершенное*, т.е. такое, которое предполагает некоторую систему референции. В данном примере по умолчанию имеется в виду натуральный ряд чисел. Внешний характер имеет не только число, но и нумерал: «двенадцать» здесь зада-

но в пифагорейской десятеричной системе счисления, но могло быть задано и двоичным кодом, или каким-то иным.

Достаточно ли обращения к такой онтологической интерпретации «числа» для объяснения якобы повсеместного эффективного применения математики?

Непостижимая *не*эффективность математики в гуманитарных науках. Если не говорить о попытках столетней давности разъединить и даже противопоставить гуманитарные науки естествознанию, а трезво взглянуть на их состояние сегодня, то придется признать, что они не вполне соответствуют классическому понятию науки. И успехи гуманитарных наук на фоне развития, например, физики, несравненно скромнее. В качестве одной из причин этого обстоятельства зачастую отмечают слабое использование в них математики (исключая разве что такие ветви, как конкретные социологические обследования, структурная лингвистика, демография, экспериментальная психология или, скажем, контент-анализ). При этом привычно подчеркивают якобы необыкновенную сложность самого предмета исследования гуманитарных наук. И это, несомненно, так, но...

Сразу возникает вопрос: а разве у квантовой физики или космологии предметы настолько уж менее сложны? Кто-нибудь проводил такой сравнительный анализ? Но даже если бы это было так, Р. Фейнман именно и говорил, что математика «полезна там, где мы имеем дело с большим числом объектов в сложной обстановке»[1]. Правда, чтобы она была эффективной, необходимо, по Фейнману, установить «правила игры»[2]. А правила игры предполагают понимание того, что математика — «*не просто* другой язык», что «математика — это язык плюс рассуждения, это как бы язык и логика вместе», что в математике «сконцентрированы результаты *точного* (курсив мой. — *А.Ц.*) мышления многих людей»[3].

Стало быть, все дело в «точности» отображения предмета и «правилах», а вообще говоря, в выборе подходящей, *релевантной* гуманитарной проблематике, математизации. Такие попытки делаются. Вот, например, было замечено, что исследование структур социума или человеческого поведения сравнимо по сложности с исследованием диссипативных структур в духе синергетики. Синергетика имеет дело с количественной сложностью, сравнимой с числом Авогадро. Но ведь никому не приходит в голову, по крайней мере, применительно к физическому миру, обойтись в синергетике без математики. Зато применение синергетических идей в гуманитарных науках поч-

[1] *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968. С. 35.
[2] Там же. С. 36.
[3] Там же. С. 40.

ти никакими собственно математическими рассуждениями не сопровождается, а эффективность этого применения оказывается весьма невысокой. Зачастую дело ограничивается просто переименованием известных проблем. В чем здесь дело?

Вернемся ненадолго в школу, к нашим детям. Вообразим себе такой диалог:

— Мне всю неделю приходило в голову по одной математической идее в день, похвастал ученик.

— Стало быть, ты за эту неделю продвинулся на целых 7 пунктов! — пошутил учитель.

— Почему же только на семь? Ведь все мои идеи друг с другом были тесно связаны. Так что, — продолжил ученик, доставая калькулятор и демонстрируя свою эрудицию, — здесь надо брать $7! = 5040$. Вот как я на самом деле продвинулся в математике!

Почему подобный разговор на самом деле вряд ли мог бы произойти, даже если ученик знал, что такое факториал? А потому, что мысли никто не перемножает. Дважды две идеи — это может быть всего одна идея, а то и вовсе ни одной. Вроде бы кажется, что это соображение отбрасывает нас к выяснению «природы» числа: мол, оно характеризует только мир живых или неживых предметов, но более или менее легко отделимых друг от друга пространственно, а мысли различимы во времени, но не в пространстве. Однако ведь мы же говорим, что ньютоновская механика и эйнштейновская физика — это *две* разные физические теории. И никто не запретит, например, подсчитывать: А.С. Пушкин *столько-то вещей* сочинил в Одессе, а столько-то в Михайловском, и это, возможно, даже представляет интерес для литературоведа или биографа. Что-то мы все-таки считаем и в непространственном смысле.

По-видимому, дело здесь все же не в пространственных границах (не в различении «вещи» и «тела»), а в качественных. Понятие числа применимо к характеристике вещей любой природы, но только в том случае, если они, эти вещи, ясно и отчетливо (пусть в декартовском смысле) *локализованы качественно*. Качественная же локализация означает возможность точечной, а не линейной, характеристики, точного ответа на вопрос, является ли вещь именно этой вещью с таким-то набором свойств в данном отношении.

Есть, по крайней мере, еще одна особенность у разнообразных предметов гуманитарного интереса. Почти всё, что интересно гуманитариям, прямо или косвенно связано с отношением интенциональности, выходит на все эти наши «люблю», «надеюсь», «страшусь», «предполагаю» и прочие личные или групповые «отношения к x». Кажется, что математика от этого чрезвычайно далека. Однако, во-

первых, как уже сказано, любая онтология строится как бы с позиции Внешнего Наблюдателя, а с этой точки зрения интенциональные отношения ничем не хуже и не лучше хорошо изученных отношений типа «равно», «следует», «включает» и т.п. — они точно так же принадлежат предполагаемой картине мира. Во-вторых, любой логик все же не рассматривает интенциональные понятия как неприкасаемые. Он охарактеризует, например, отношение «любит» как несимметричное, нерефлексивное и нетранзитивное. А это значит, что он готов рассматривать его наравне с «классовыми» (не в социальном, ясное дело, смысле) отношениями. Но, увы, это мало чего дает гуманитариям. Здесь нужны какие-то иные, более *адекватные*, т.е., с одной стороны, релевантные смыслу решаемых задач, а с другой — специфические, дивергентные средства рассуждения, иной структурно-онтологический язык[1].

В одной из своих последних статьей[2] Уёмов обращал внимание на то, что гуманитарные науки не обходятся без понятия «система» и, соответственно, независимо от того, осознается это или нет, без системного подхода. (Замечу в скобках, что это понятие вместе с этим подходом не чужды и науке вообще, и даже обсуждаемому понятию числа: скажем, «число» теряет смысл вне представлений о системе счисления.) Возможно, полагает автор, что один из путей математизации гуманитарных наук пролегает именно через математизацию столь широко используемого понятия системы. Но для рассуждений о системах общественных отношений, системах коммуникации, системе ценностей, системе когнитивных процедур, о культуре как системе почти не пригодны языки арифметики, алгебры, топологии. Несмотря на их экстенсиональную широту, эти языки, как и другие известные языки математики, не ухватывают самого существенного в гуманитарных рассуждениях. Об этом свидетельствуют не слишком удачный опыт применения дифференциального исчисления самим автором термина «общая теория систем» Л. фон Берталанфи и его призыв создать особую «гештальтматематику». Не пригодна для этой цели и теория множеств: «теоретико-системный и теоретико-множественный подходы к... объектам диаметрально противоположны друг другу. Если первый связан с первичностью целого, то второй основан на признании первичности элементов»[3].

По-видимому, в какой-то мере адекватным гуманитарным исследованиям оказывается одно из неклассических исчислений — язык

---

[1] *Цофнас А.Ю.* Теория систем и теория познания. С. 26–51.

[2] *Уёмов А.И.* Л. фон Берталанфи и параметрическая общая теория систем // Системный подход в современной науке. М.: Прогресс-Традиция, 2004. С. 37–52.

[3] Там же. С. 44.

тернарного описания (ЯТО)[1], который как раз не предполагает обращения к теоретико-множественным представлениям, но который приспособлен для выражения понятия системы, специфических системных характеристик объектов — системных параметров, а также ряда уже выведенных системных закономерностей. Данные закономерности применимы везде, где объекты интересуют нас именно как системы, в том числе, и применительно к системам счисления. (Соотношение ЯТО с классическими языками рассматривал Л.Л. Леоненко[2].)

Использование этого языка и системной идеологии для дальнейшего анализа структурно-онтологического значения понятия числа выводит нас за рамки данной работы, требует специального обсуждения. Замечу только, что ЯТО нельзя было построить на основе одной лишь идеи синтаксических различий вещей, свойств и отношений. Его семантику составляет еще одна тройка фундаментальных (я даже полагаю, что генетически врожденных человеку) понятий — *определенного, неопределенного* и *произвольного*, которые в натуральном языке отображаются артиклями и указательными местоимениями. Они не чужды и арифметике, как и математике в целом. Во всяком случае, к ним прибегают всякий раз, когда говорят, скажем, о *данном* числе, о *каком-нибудь* из чисел или о *любом* числе. Проблема природы неопределенности много обсуждалась в связи с соответствующим принципом квантовой механики, однако и там «договориться» о том, существует ли неопределенность в физическом мире или это лишь непременный гносеологический спутник современных картин мира, не удалось. Причина, по-видимому, та же самая: понятие неопределенности — из арсенала категорий не натуральной онтологии, а онтологии структурной. Релевантный перевод понятий разных онтологий друг в друга невозможен. Когда речь идет о структурах, термины натуральной онтологии просто неуместны.

Попытки «натурализовать» понятие числа, причем независимо от того, имеются ли в виду действительные или мнимые числа, стремление наполнить его «плотью и кровью» напоминают мне неквин — процедуру жертвоприношений, описанную Гомером. Вот как призрак фиванского царя и прорицателя Тиресия обучал Одиссея, когда тот хотел заставить говорить тени умерших:

---

[1] *Uyemov Avenir I.* The ternary description language as a formalism for the parametric general systems theory // International Journal of General Systems. Part 1. Vol. 28(4–5) (1999). P. 351–366; Part 2. Vol. 31(2) (2002). P. 131–151; Part 3. Vol. 32(6) (2003). P. 583–623.

[2] *Леоненко Л.Л.* Язык тернарного описания и артикли. Не-фрегевский подход к логическому анализу натурального языка // Философские науки. 2004. № 7. С. 99–118.

Легкое средство на это в немногих словах я открою:
Та из безжизненных теней, которой приблизиться к крови
Дашь ты, разумно с тобою начнет говорить; но безмолвно
Та от тебя удалится, которой ты к крови не пустишь.

Гомер. Одиссея (*11, 145*)[1].

Но бесплотные тени хотя бы допускают измерение «с помощью циркуля и линейки», а понятие числа не допускает даже этого. Говорить о его натуральной «природе» бессмысленно.

Математика существует не одно тысячелетие. Сделано так много, что, говорят, из всего арсенала математики используется всего лишь 5%. Правда, откуда взялось это число, не известно. Оно опять-таки касается вещей, которые трудно считать. Тем не менее, замечу, что, несмотря на свой почтенный возраст, математика все еще очень молода. Во всяком случае, она, так и не найдя особого натурального носителя чисел, еще почти не приступила к самому интересному для людей — к области социальных и межличностных отношений, к исследованию интенциональных структур.

Библиографический список

Блок М. Апология истории, или Ремесло историка. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1986.

Бурбаки Н. Архитектура математики // Архитектура математики. М.: Знание, 1972.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Наука, 1971. С. 182–198.

Витгенштейн Л. Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 1. М.: Гнозис, 1994. С. 75–319.

Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987.

Гомер. Одиссея / Пер. с древнегреч. В. Жуковского. М.: Правда, 1984.

Леоненко Л.Л. Язык тернарного описания и артикли. Не-фрегевский подход к логическому анализу натурального языка // Философские науки. 2004. № 7. С. 99–118.

Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия / Пер. с итал. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2012. 299 с.

Новейший философский словарь: 3-е изд., исп. Мн.: Книжный Дом, 2003.

Платон. Парменид // Платон. Соч.: В 3 т. Т. 2. М.: Мысль, 1970. С. 401–477.

Уёмов А.И. Вещи, свойства и отношения. М.: АН СССР, 1963 (Интернет-ресурс: «Школа Уёмова» (эту и ряд иных работ как этого, так и других авторов, по теме статьи см.: http://www.uemov.org.ua)).

Уёмов А.И. Онтологические предпосылки логики // Вопросы философии. 1969. № 1. С. 67–77.

Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность. Тезисы Третьей всероссийской научной конференции, 27–28 сентября 2013 г. / Редкол.: Бажанов В.А. и др. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013.

[1] *Гомер*. Одиссея / Пер. В. Жуковского. М.: Правда, 1984. С. 138.

Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 2002.

Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры / Отв. редактор д. филос. н., профессор А.В. Бессонов. Новосибирск: Нонпарель, 2003.

Цофнас А.Ю. Теория систем и теория познания. Одесса: АстроПринт, 1999.

Число: Сб. статей. М.: МАКС Пресс, 2009.

Уёмов А.И. Л. фон Берталанфи и параметрическая общая теория систем // Системный подход в современной науке. М.: Прогресс-Традиция, 2004. С. 37–52.

Фейнман Р. Характер физических законов. М.: Мир, 1968.

Uyemov Avenir I. The ternary description language as a formalism for the parametric general systems theory // International Journal of General Systems. Part 1. Vol. 28(4–5) (1999). P. 351–366; Part 2. Vol. 31(2) (2002). P. 131–151; Part 3. Vol. 32(6) (2003). P. 583–623 (http://www.uemov.org.ua).

Раздел
4

ОТ ЦЕНТРА ПРОБЛЕМЫ К ВАЖНОЙ И ЭВРИСТИЧНОЙ ПЕРИФЕРИИ

*А.Г. Барабашев**

НОВЫЕ ГОРИЗОНТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ: АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МАТЕМАТИЗАЦИЯ

1. Постановка проблемы: во всех ли научных направлениях математика одинаково применяется?

Эффективность применения математики, о которой писали Н. Бурбаки в 1948 г. в статье «Архитектура математики»[1] и Ю. Вигнер в 1960 г.[2], исторически связана с успехами применения теоретико-математических конструктов в классическом естествознании, в первую очередь в физике и механике. В ряде естественнонаучных дисциплин математика превратилась из модельного инструмента (т.е. поставщика математических моделей, которые подходят для описания изучаемых явлений) в единственно возможный язык, без которого собственно описание явлений невозможно[3]. Тем самым обозначилась тенденция взаимодействия математики и естествознания: от квантификации к моделям и далее к математике как языку исследования[4].

Такое понимание взаимодействия математики и других научных направлений «ранжирует» науки в соответствии с уровнем применения ими математики. Теоретическая физика, например, оказывается более «продвинутой» в указанном смысле, нежели математическая лингвистика, а математическая лингвистика выше по применению

* Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики» (НИУ ВШЭ).

[1] *Бурбаки Н.* Архитектура математики / Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963.

[2] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971.

[3] *Алексеев И.С.* Методологические замечания о происхождении и функционировании онтологических знаний в системе теории / Алексеев И.С. Деятельностная концепция познания и реальности. Избранные труды по методологии и истории физики. М., 1995.

[4] *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев, 1976.

математики, чем макроэкономика, и т.д. Это понимание задает некий общепринятый шаблон того, как должно строиться «правильное взаимодействие» математики и других направлений, как должны развиваться научные методы. Более того, если некоторое научное направление в своем взаимодействии с математикой не укладывается в общую схему «от квантификации к языку», то данное направление начинает рассматриваться как подозрительное, как принципиально ненаучное. Следует полагать, что наиболее ярко эту мысль первоначально выразил Кант, который полагал, что прикладная математика также априорна[1].

Увеличение перечня научных направлений, которые не укладываются в «стандартные» представления о том, как должно совершенствоваться их взаимодействие с математикой, порождает несколько вопросов. Есть ли основания считать, что эти научные направления войдут в «нормальное» русло развития, начнут взаимодействовать с математикой в соответствии с общей схемой «от квантификации к языку», или нет? Если нет, то целесообразно ли эти направления полагать принципиально ненаучными, либо они представляют иные типы рациональности? Можно ли, опираясь на их опыт взаимодействия с математикой, выработать иное, альтернативное естественнонаучной традиции, понимание математизации и шире, самой математики? Наконец, может быть, существующая математика сама «не дозрела», т.е. ее аппарат плохо приспособлен к описанию тех явлений и процессов, которые изучаются в «плохо математизируемых» областях науки и практики[2]?

2. Отличительные черты объектов, методов и прикладной значимости тех научных направлений, в которых применение математики принципиально отличается от «естественно-научного»: эти черты обусловлены исследованием сложных уникальных систем

Определим, какие научные направления с трудом укладываются в стандартную естественно-научную схему математи-

[1] *Кант И.* Критика чистого разума / Кант И. Сочинения. Т. 3. М., 1964; *Tait W.* Reflections on the concept of a priori and its corruption by Kant / Proof and Knowledge in mathematics. Ed. by M. Detlefsen. N.Y., 1992.

[2] *Барабашев А.Г.* О прогнозировании развития математики посредством анализа формальных структур познавательных установок // Стили в математике: социокультурная философия математики / Под ред. А.Г. Барабашева. М.; СПб., 1999; *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М., 1984.

зации. На причисление к данным направлениям претендуют в первую очередь гуманитарные и, помимо того, частично, социальные области познания (намеренно не употребляем слово «науки»), а также соответствующие им практики. Исследуемые в них феномены — сюжеты, эмоции, образы, межсубъектные взаимодействия, социальные нормы, управленческие действия, и т.д. Далее мы покажем, что этот список научных направлений следует расширить, и укажем критерии такого расширения. Нельзя сказать, что математика в подобных направлениях не применяется вовсе: тут есть и квантификация, и модели, и даже элементы языка математики. Однако контекст применения математики здесь иной, нежели чем в естествознании. Ценность математики в этих научных направлениях заключается скорее в ее формирующем воздействии на системность мышления исследователя и на поведение практика (анализ ситуаций и последующие действия), нежели в точности формулировок и изображении действительности с помощью математических моделей (когда полагают, что модель — это суть феномена)[1].

Рассмотрим, когда и в связи с какими потребностями возникают подобные «плохо соотносимые с естественно-научными требованиями к математизации» научные направления.

История развития научного познания свидетельствует, что количество относительно самостоятельных научных направлений постоянно увеличивается, вселенная научного знания расширяется. На этом пути есть несколько «знаковых рубежей»: относящихся к эпохам античности, Нового времени, промышленной революции, технологической революции XX в. и, наконец, к эпохе современных достижений в областях изучения сложных систем: мега- и микромира, жизни и человека, социальных, материальных и информационных искусственных систем. Не отдельные научные направления, но именно *эпоха* диктует свое понимание того, что такое научное знание, каким должен быть процесс научного познания (используемые методы исследований; допустимая конфигурация исследовательского сообщества; признание авторства; выявление основных результатов и научное признание; механизмы обмена информацией; кодексы научной честности; принципы иных добровольных ограничений, которые накладывают на себя исследователи), как следует применять результаты познания на практике. Поэтому соотносимые с научным познанием понятия, такие как «концепция», «очевидность», «доказа-

[1] *Налимов В.В.* Непрерывность против дискретности в языке и мышлении. Тбилиси, 1978.

тельство», «знание», «теория», «наблюдение», «эксперимент», «обоснованный результат», «исследование», «подтверждение» и др., поразному истолковываются представителями научных направлений, появившихся в разные эпохи: философами и математиками, физиками и химиками, биологами и психологами, экономистами и юристами, социологами и менеджерами, и т.д.

Возникновение старейших научных направлений — философии, математики, астрономии, географии, медицины, истории, права — привело к установлению высокого стандарта требований, предъявляемых к познанию и его интеллектуальным продуктам: истинность (для философского, умозрительного дискурса), доказательство (для математики), догматический (для права), наблюдение и описание (для астрономии, географии, истории), наблюдение, описание и рекомендация (для медицины). Продукты этого научного познания — концепции, теоремы, факты, карты, сведения, события, нормы, рецепты — прочно заняли свое место в науке и ее истории, и представители указанных научных направлений до сих пор полагают, что если в исследованиях в некоторой области познания нет концепций и умозрительного дискурса, либо доказательств и теорем, либо наблюдений и установленных фактов, либо описаний и карт, либо установленных событий, либо рекомендаций и рецептов, либо принятых норм, то область познания не может называться научной.

В Новое время появились принципиально иные научные направления, возникшие в результате соединения математики и активно осуществляемого наблюдения (эксперимента). Намеренное создание ситуаций и испытание специально подготовленных для исследования объектов, фиксация (измерение) результатов испытаний, математическая обработка результатов и выявление «законов природы» как формул, имеющих физический смысл, привело к возникновению высшей математики, ориентированной на эксперимент и на вычисления, физики (экспериментальной и теоретической), экспериментальной и теоретической химии, биологии, геологии, многих других направлений естествознания. Сформировалось представление, что наука — это такое направление познания, в котором проводятся эксперименты, собираются данные, происходит обработка данных и их моделирование, строятся «математизированные» теории (теории с использованием математического аппарата). Собственно сами понятия «теория», «данные», «эксперимент», «модель» происходят из этой эпохи, и многие представители естествознания и так называемой «философии науки» полагают, что наука появилась только в Новое время, и что предшествующее состояние научного познания

следует охарактеризовать как «допарадигмальное». Нельзя сказать, что в Новое время были полностью отвергнуты стандарты научных исследований предшествующей научной эпохи: они были дополнены новыми стандартами и переработаны. Так, в математике Нового времени появился анализ переменных (функций), которые с самого своего появления (Ньютон) имели естественно-научное содержание (скорость, пройденное расстояние, ускорение, элементы площадей и объемов, далее — частота колебаний, температурные градиенты, и т.п.). Математика помимо доказательств пополнилась вычислениями (взятие интегралов, производных, суммирование рядов) и решениями уравнений и их систем, что имело явный естественно-научный смысл. Или же, физика от умозрительных рассуждений (аристотелевская физика) перешла к экспериментам и анализу массивов экспериментально установленных фактов с помощью математического аппарата. Важно отметить, что в начале эпохи был этап критики предшествующей «античной науки» как схоластической, умозрительной, и только потом произошла адаптация «архаичных» стандартов к новым требованиям: проводить эксперименты, обрабатывать данные, делать расчеты, строить модели. Но во время этапа критики старых стандартов научных исследований в первоначальный период развития науки Нового времени была и обратная критика, так сказать «обратное течение»: многие представители «старых школ» философии, математики, аристотелевой физики, права, описательной географии и истории не признавали новые веяния, требовали вернуться к прежним методам исследования.

Эпоха промышленных революций (XIX в.) и эпоха технологической революции (XX в.) не только соединили науку с производством (XIX в.), но и породили ряд новых научных направлений технического плана (XIX–XX вв.), от аэродинамики и электротехники, и до материаловедения и промышленного дизайна. Значимость возникших научных направлений определялась не истинностью их утверждений, не проверкой результатов в вычислениях, не соответствием теорий природным объектам, а использованием «придуманных» технологий в производствах. Приоритетным стало установление работоспособности созданных опытных образцов (машин, материалов, конструкций), возможность массового производства этих опытных образцов, заинтересованность потребителя в продукции. Понятия «технология», «воспроизводимость», «прикладная значимость», «востребованность», «применимость», «окупаемость» и др. характеризуют содержание методов, используемых в этих научных направлениях. Здесь выясняется то, что и как надо делать,

чтобы производить такую продукцию, которую в широком смысле «купят». Вопрос: «зачем проводить эксперименты, которые не приведут к созданию новых прорывных технологий?» был бы воспринят с удивлением в естествознании, но для технических научных направлений он естествен. Эпоха промышленных революций изменила облик тех научных дисциплин, которые возникли ранее. Расчетные методы усложняются, эксперименты становятся комплексными и многоступенчатыми (для разных образцов, их поведения), просчитываются вероятности сбоев и отказов, в математике быстро развиваются математическая статистика и прикладная теория вероятностей, оптимальные методы. В физике создаются цепочки «от теорий к техническим устройствам», в экономике место вербальных рассуждений о феноменах экономической жизни занимают математические модели и расчеты экономических последствий принимаемых решений, инструментализуются остальные дисциплины социального профиля (т.е. для них методы исследования и прикладные результаты, возможности «внедрения» становятся важнее «разговоров» о предмете исследования). Для представителей научных направлений технологического профиля естественно глубинное недоверие к классической науке: если научное направление не порождает технологию, то оно бесполезно.

Наконец, последняя в череде ускоряющихся эпох, определяющих появление новых кластеров научных исследований, связана с изучением тех сложных систем, для которых унифицированные технологии «массового производства» неприменимы. Поведение сложных систем слишком разнообразно, они уникальны, они могут реагировать на попытки их изменения, и та технология, которая «сработала» в первый раз, в следующий раз уже не будет успешной. Эксперименты и тестовые испытания превращаются здесь в проекты, результаты не абсолютны, риски последствий должны оцениваться, эффективность уже сделанного относительна. Строительство огромной и дорогостоящей системы по поиску новых элементарных частиц, коллайдера — это не только и не столько запрос физиков-теоретиков, но и уникальный социальный проект, и цепочка производств и технологий, и надежда на появление новых идей по масштабному производству «дешевой» энергии, новых технических устройств и продукции, и т.д. Методы исследования в научных направлениях «новейшей эпохи» суть проекты, сбор данных и их обработка не самостоятельная цель, а шаг на пути к реализации проекта, эффективность проектов относительна. Вопрос об истинности решения для проекта не первостепенен, решений, так или иначе приемлемых, может быть много. Вместо вопроса

об истинности решения главными становятся вопросы о полезности решения, о твердости намерений его реализовать, о том, чтобы это решение не привело к разрушению сложной системы.

Именно к таким «проектным» научным направлениям можно отнести современную экологию, информатику, биомедицину, физику (точнее, комплексные проекты по изучению) мега- и микромира, менеджмент и государственное (публичное) управление и т.д. Они разрабатывают новые методы проектных исследований, одновременно стремясь адаптировать к своим потребностям имеющиеся методы предыдущих эпох (наблюдения, описания, эксперименты, сбор и обработку данных, построение моделей и т.п.). В настоящее время, на начальном этапе развития новых научных направлений, наблюдается значительная критика этих направлений со стороны ранее возникших, стремление «навязать» им свое, относительно традиционное, видение предметов и методов исследования. Но это — временное явление, эпоха исследования сложных уникальных систем только начинается. Предстоит (если опираться на опыт прежних эпох развития научных направлений) укоренение новых, проектных методов исследований и их признание, а также инкорпорирование ранее возникших методов в новые методы. Собственно, это естественный ход событий: новые методы исследования возникают после выявления новых объектов и формирования соответствующих предметов исследования.

Отметим, что именно в научных направлениях, связанных с изучением сложных уникальных систем, активно применяются те разделы математики, которые менее связаны со стандартной естественно-научной схемой математизации, да и сама стандартная схема математизации плохо «приживается». Здесь более важны такие разделы математики, как математическая статистика, прикладная теория вероятностей, различные статистические пакеты (софт), теория графов как основа построения системных альтернатив, и т.д., т.е. то, что так или иначе связано с вариативностью мышления и поведения субъекта, с оценкой межсубъектного взаимодействия, взаимодействия субъекта со сложными природными комплексами[1]. Можно сказать, что указанные научные направления как бы подталкивают математику в сторону неклассического ее развития, к выходу за рамки такого «ядра», которое традиционно находится в центре внимания математической общественности (хороший критерий:

[1] *Макаров А.А.* Использование программ обработки данных в преподавании курсов теории вероятностей, прикладной статистики и информатики. М., 2008.

именно в рамках данного «ядра», как правило, присуждаются премии Филдса[1]). Исходя из этой тенденции, математика в настоящее время начинает разделяться не просто на теоретическую и прикладную, как обычно принято считать, а на два потока: традиционную теоретическую и прикладную, и новую прикладную, а возможно, и новую теоретическую математику. Дисбаланс этих двух потоков очевиден: один представлен аксиоматически построенными теориями, коренится в развитом естествознании, привел к значительнейшим достижениям в создании технических устройств, изменивших нашу жизнь. Второй поток не укладывается в классическую аксиоматику «бурбакистского толка», связанные с его математическими конструктами исследования и практики возникли недавно и могут быть сравнены с первыми шагами естествознания Нового времени: плоды этих исследований и практик только начинают менять нашу жизнь.

3. Гипотеза о бытийном статусе абстрактных объектов научных направлений, в которых исследуются сложные уникальные системы: в них в схематическом виде присутствует субъект-объектное взаимодействие

Чтобы понять, в чем заключается специфика абстрактных объектов научных направлений, для которых математизация осуществляется «нетрадиционным» образом, совершим экскурс в онтологию.

Если не принимать в расчет формально-логические теории онтологии (Фреге, Рассел, Уайтхед, Куайн, и др.[2]), а остановиться на содержательном (контекстуальном) истолковании онтологии, то к ней относятся знания о предельных основаниях бытия, включая знания о существующем (почему существующее существует) и несуществующем (почему несуществующее не существует). Вопрос «почему?» акцентирует внимание именно на знании оснований существования и несуществования, ответ на этот вопрос предполагает предъявление некоей схемы (устройства) бытия как такового. Теории причинности, структуры бытия, объективности, безграничности/границ (включая бесконечность бытия или его конечность), сущности пространства и времени, делимости бытия, его связности — основные элементы онтологии.

---

[1] *Монастырский М.И.* Лауреаты премий Филдса / Историко-математические исследования. Вып. XXXI. М., 1989.

[2] *Quine W.* Theories and Things. Harvard University Press, 1981.

Исторически сложившаяся близость логики, математики и онтологии, а также естествознания и онтологии заключается, во-первых, в том, что их объекты, законы, сам язык этих наук очень часто употреблялись для формулировки онтологических утверждений. Вне логики, математики и естествознания у нас не было бы столь развитых рациональных языковых средств для формулировки онтологических утверждений.

Но, помимо этого, имеются еще два взаимосвязанных аспекта взаимодействия онтологии и указанных наук, определяющих наши представления о предельных основаниях бытия. Естествознание, математика и логика предопределяют наши представления об объектах и законах бытия: объекты существуют сами по себе, они в чем-то схожи с натуральными числами и геометрическими фигурами, а законы неизменяемы, они аналогичны фундаментальным законам естествознания. С этим убеждением связано и второе убеждение, не менее фундаментальное: онтология не определяется субъектом, она выявляется нами в процессе взаимодействия с реальностью. Деятельность дает нам непререкаемое представление о реальности, и все люди имеют одинаковое представление о причинности, о структуре, о делимости, об объективности, о связности объектов реальности. Эти категории внеэмпиричны, внеисторичны и общезначимы. Как пишет В.Я. Перминов, «Категории... отражают бытие лишь в тех характеристиках, которые выявляются деятельностью самой по себе, независимо от ее предметного содержания». И чуть далее: «Категории образуют первичную и абсолютно автономную сферу представлений, обусловленную включенностью человека в деятельность. Мы будем называть эту сферу представлений категориальной онтологией. Категориальная онтология представляет собой первичный и определяющий уровень априорного знания»[1]. Для оправдания объективизма часто также применяется аргумент «от противного»: если бы субъект определял конфигурацию реальности, то не было бы «сопротивления реальности» нашим желаниям.

В отличие от указанных представлений о предельных основаниях реальности современные научные направления, связанные с изучением сложных уникальных систем, задают иные представления о реальности. Начнем с того, что меняются вопросы, которые задаются в этих дисциплинах. Рассмотрим те научные направления, которые

[1] *Перминов В.Я.* Надежность и строгость математического доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М., 2014. С. 71.

изучают сложные системы социального и гуманитарного вида. Например, в области публичного управления вместо вопроса «в чем суть явления?» ставится иной исследовательский вопрос «что должно быть сделано?», смыкающийся с потребностями администрирования[1]. Если взять шире, то такие направления сосредоточены на человеческом бытии, на формировании норм и ценностей этого бытия[2]. Продвигаясь еще дальше, многие гуманитарные дисциплины изучают более сокровенные, индивидуализированные, но при этом социально значимые вселенные творчества, прекрасного, ритма и гармонии, звука и цвета, характера и поступка, и т.д. Здесь также объект вне субъекта не мыслим, исследуемые феномены на абстрактном уровне представлены как субъект-объектные «кентавры», в которых описания элементов действительности вплетены в описания способов поведения, действия, в оценки, в смыслы артефактов (например, в художественные произведения). Наконец, для научных направлений, изучающих сложные уникальные системы природного характера (экологические, информационные, биомедицинские, системы микро- и мегамира), присутствие наблюдателя не только неустранимо, но и проявляется в функционировании этих систем: наблюдатель становится действующим элементом системы.

Можно предположить, что спецификой абстрактных объектов научных направлений, изучающих сложные уникальные системы, выступает их двоякость (амбивалентность), в которую объект привносит условия нашего действия, себя и свои ценности, а само действие накладывает на внешние условия требования достичь цели и возможности вариативного исполнения. Соответственно, законы здесь иные: это не непреложные объективные законы (подобные естественно-научным, как мыслил законы общества К. Маркс), а требования к желаемой конфигурации сложной системы, например к организации общества, творчества, или же образцы поведения, или же условия наблюдений и признания объектов исследования существующими, либо, наконец, наделенные смыслами артефакты, основанные на понимании должного и приемлемого, прекрасного и ценного, законного и свободного, достойного и постыдного. Реальность, а отсюда и ее предельные основания, предстает в указанных научных направлениях не так, как в математике и естествознании, не в логике предикатов: она творима, ее формирует деятельность. Здесь говорят не о причинности, а о целях; не об объективности, а о достижимости; не о дробимости, а о

[1] *Waldo D.* The Administrative State. San Francisco, 1948. P. 48.
[2] Ibid. P. 181.

вариативности; не об объектах и границах, а о связях и действиях; не о независимом от нас внешнем мире, а о сложном и включающем нас мире, прекрасном, порочном, несправедливом мире; не о предметах, а о наделенных художественными смыслами артефактах... Опасность «соскальзывания» в солипсизм при таком подходе не грозит: никому из исследователей в этих научных направлениях и в голову не приходит, что мы своим существованием определяем реальность, что реальность суть наша фантазия. Здесь верен иной подход: мы формируем реальность, используем ее, согласуем реальность со своими замыслами, делаем реальность рукотворной. В этих научных направлениях исследователи стремятся изобрести инструменты преобразования социальной и природной реальности, использовать эти инструменты для придания абстрактным объектам нужных свойств, пользуясь их амбивалентностью, трансформировать реальность, сформировать онтологию как комплекс «знаний—действий—оценок», задающих предельные основания *потребного бытия*.

Парадоксально, что многие представители этих научных направлений (в частности, публичного управления) находятся под сильным методологическим влиянием математики и естествознания, классических представлений об онтологии, и истолковывают указанную выше специфику своих абстрактных объектов как свидетельство того, что эти дисциплины еще не «дозрели» до уровня парадигмальной науки, если только не расширить понятие парадигмы до достаточно аморфного представления о главенствующих теориях в данной области знания[1]. Если же исходить именно из такого — расширительного — понимания парадигмы, навеянного ущербностью представлений о том, какими должны быть абстрактные объекты, то оказывается, что в научных направлениях, изучающих сложные уникальные системы, имеются альтернативные, параллельно со-существующие парадигмы, отношения между которыми варьируются от их несоизмеримости по подходам и методам, и вплоть до кооперации парадигм. Учитывая сформулированную выше специфику онтологии как комплекса представлений о потребном бытии и абстрактных объектов научных направлений, изучающих сложные уникальные системы, можно предположить, что вариативность парадигм для этих направлений суть прямое следствие вариативности целей и действий по преобразованию сложных уникальных систем, отсутствие единственно-

[1] *Riccucci N.* The Logic of Inquiry in the Field of Public Administration // Handbook of Research Methods in Public Administration. SRC Publ. 2008. P. 25–26.

сти действий, ведущих к потребным результатам. Здесь нет истины, а имеется спектр допустимых действий, целесообразного поведения, разных ценностей, множественность оценок сделанного, сотрудничество разных субъектов действия.

4. Проверка гипотезы об особом бытийном статусе абстрактных объектов научных направлений, в которых исследуются сложные уникальные системы: примеры количественных абстрактных объектов, включающих в себя субъект-объектное отношение

Чтобы проверить ранее выдвинутую гипотезу о том, что в научных направлениях, исследующих сложные уникальные системы, встречаются количественные абстрактные объекты, которые включают в себя субъект-объектное отношение, приведем примеры таких абстрактных объектов.

Этапы проверки гипотезы (выявления примеров) будут следующими. Во-первых (п. 4.1), выделим одно из новых научных направлений, связанных с анализом сложных уникальных систем. Во-вторых (п. 4.2), укажем исследовательские методы этого научного направления, при реализации которых возникает потребность в количественных абстрактных объектах. В-третьих (п. 4.3), рассмотрим те количественные данные, которые получаются при использовании этих исследовательских методов. Наконец, в-четвертых (п. 4.4), покажем на примере, что эти количественные данные только поверхностно предстают как объективные, независимые от субъект-объектного отношения. По-настоящему же, в каждом из таких данных заложено субъект-объектное отношение в его численной оценке, т.е. количественно оцененное по степени интенсивности, или же эффективности, или же целевой направленности данного субъект-объектного отношения.

4.1. Обратимся к одному из новых научных направлений, рассматривающих сложные уникальные системы. Выберем в качестве такого направления *государственное управление*. В этом направлении исследуются сложные уникальные системы, в состав которых входят органы управления, управленческие кадры, нормативные основания принятия управленческих решений, правоприменительная практика,

материально-технические и финансовые средства управления, а также субъекты управления (организации, граждане, материальные и нематериальные объекты). Среди предметных полей государственного управления выделим некоторые предметные поля (суб-направления), в которых наиболее часто встречаются количественные данные и соответствующие аналитические методы работы с данными. Эти предметные поля[1]:

- государственные и муниципальные заказы, управление государственной собственностью, земельными и иными ресурсами;
- государственные программы и политики;
- управление человеческими ресурсами;
- антикризисное управление;
- регионалистика, управление территориями, городское управление и экономика города;
- управление в здравоохранении, соответствующие секторальные аспекты социальной политики;
- управление в науке и образовании, культуре, соответствующие секторальные аспекты социальной политики;
- инновационное управление, управление инновациями, инновационная политика (вне пределов социальной политики);
- информационные технологии в государственном управлении;
- социальная защита;
- управление природными ресурсами (включая энергетические политики, регулирование экологии) и устойчивое развитие.

4.2. Особенностью методов исследования в данных предметных полях выступает то, что исследователи стремятся оценить, например, правильно ли тратились ресурсы, эффективно ли осуществлялись федеральные целевые программы, насколько результативна была профессиональная служебная деятельность государственных служащих, насколько велики управленческие риски реализации возможных (тех или иных) управленческих решений, велик ли уровень коррупции, насколько потенциально коррупциогенны проекты разрабатываемых нормативных правовых актов, какова степень открытости и прозрачности функционирования государственных органов, каковы потребные средства для обеспечения социальной защиты граждан (например, каким должны быть приемлемые размеры и способы формирования и расходования средств пенсион-

[1] *Барабашев А.Г.* Технологии развития исследовательских компетенций: предметные поля и методы исследования // Инновации в публичном управлении / Под ред. А.Г. Барабашева. М., 2013. С. 14–15.

ного фонда), как оценить качество управления инновациями, и т.д. Общая оценка современных тенденций развития этих методов и теоретических оснований их применения содержится в цитированной выше работе[1].

Без проведения таких исследований практика управления оказывается «слепой», управленческие решения приобретают волюнтаристский характер и могут привести к катастрофическим последствиям, к разрушению сложных систем управления. Более того, здесь нет универсальных решений: то, что подходит для одной системы управления в определенных культурных, социальных, экономических, природных, информационных обстоятельствах, не подходит для другой системы управления, поскольку может породить неприемлемые общественные ожидания, или массовое отторжение гражданами предлагаемых «управленческих рецептов», или же некачественную реализацию вследствие неподготовленности управленческих кадров.

4.3. Во всех указанных предметных полях исследования «начинаются», как правило, со сбора, кодификации и выбора способов хранения количественных данных (организация баз данных). Поясним, какие количественные данные здесь собираются. Это могут быть данные, например, по количеству жалоб граждан на предоставление определенной государственной услуги, по проценту возвращенных (неизрасходованных) средств, выделенных на государственную целевую программу, по значению индекса коррупции в отдельном регионе, по уровню профессионального образования госслужащих, по значениям достигнутых показателей развития, по средней величине экономии в результате тендерной реализации государственных закупок в некоторой области, по количественной оценке экологического риска, по окупаемости бюджетных средств, вложенных в развитие некоторой инновационной технологии, и т.д. Указанные данные — это безразмерные или размерные величины: в определенных единицах измерения или же проценты, балльные показатели и т.п. Так, если собираются данные относительно частоты наступления событий, например оценок гражданами управленческих ситуаций разного рода, то для уже произошедших событий можно говорить об «объективном Байесианизме», а если для предполагаемых последствий, то о «субъективном Байесианизме»[2]. Далее собранные количественные данные кодифицируются (т.е. распределяются по категориям и группам дан-

[1] Там же. С. 15.

[2] *Williamson J.* In Defense of Objective Bayesianism. Oxford, 2010.

ных) и накапливаются (сохраняются, как правило, в виде электронных баз данных).

Количественные данные являются основой аналитики, требующейся для принятия вариативных управленческих решений (зачастую «вне и до» применения статистики, например классификационные методы, методы графического представления данных, и т.д.). Обработка данных (аналитика) может осуществляться с помощью методов оценки рисков ex-aunt[1], включая метод Форсайта[2], а может и с помощью методов оценок ex-post[3]. «Математика», которая здесь применяется, достаточно специфична: она связана с множественными выборами вариантов и «идеологически» родственна теории графов: выбор варианта управленческого решения как переход от одной вершины графа к другой вершине.

Особый «жанр» обработки данных в сфере исследований публичного управления — применение методов статистического анализа (включая рандомизацию, расчет регрессии и т.д.), а также методов кросс-секторального анализа (сравнение независимых и зависимых переменных внутри секторов, в зависимости от обстоятельств, и между секторами, когда независимые переменные в одних секторах оказываются зависимыми в других секторах). Эта разновидность математизации не «выше» и не «ниже» других, ее ценность двояка: либо с помощью указанных методов формируются «подсказки» для принятия решений соответствующими государственными органами (прикладная функция аналитики), либо создаются особые теоретические конструкты — модели в рамках теорий публичного управления (например, модель административной регламентации оказания государственных услуг; модель управления как бизнес-процесса, ориентированного на результат, и т.д.).

В результате обработки данных получаются количественные абстрактные объекты следующего уровня, такие как уровень доверия граждан к власти, уровень прозрачности принятия решений, уровень клиентоориентированности государства, индекс коррупции в данной стране, уровень профессионализма госаппарата, и т.д. Эти данные вы-

[1] Ex-aunt оценки являются основой недавно появившейся теории Anticipatory Governance, предлагающей перестроить всю аналитику публичного управления на основе предварительного расчета рисков. Эта теория следует из практики анализа рисков, развитой в США (в особенности, в Government Accountability Office, и в Ministry of Defense).

[2] *Fuerth L.* Operationalizing Anticipatory Governance / Prism. Vol. 2. N 4. Sept. 2011.

[3] *Pirog M.* (Ed). Journal of Policy Analysis and Management Classics Series: Social experimentation, program evaluation and public policy. Hoboken; New Jersey, 2008.

глядят как объективные количественные показатели, установленные аналитическими методами. На их основе выстраиваются управленческие решения, поведение власти.

Рассмотрим, например, (в прикладном плане) ситуацию принятия управленческого решения. Есть несколько вариантов такого решения. Какой вариант решения правильный? Это вопрос странный. Чтобы уменьшить странность вопроса, прибегают к трюку, спрашивая: какое решение БУДЕТ правильным? То есть истинность откладывают «на потом». Но это не спасает. Дело в том, что в любом случае, при любом выборе, получится некоторый результат, который может быть защищен, поскольку не факт, что иной вариант решения привел бы к худшему (наоборот: к лучшему) результату. Прошлое «не переиграешь», разные варианты решений последовательно проверить не удастся. Следует признать, что всюду, где существует действие (физическое или ментальное) по выбору варианта поведения (физического или ментального), где присутствует сложная уникальная система, в неявном виде присутствует субъект как часть исследуемого объекта, и действие субъекта уникально. Для всех таких решений их истинность должна меняться на нечто иное, например на «допустимость».

4.4. Объективны ли эти количественные абстрактные объекты? Действительно ли они характеризуют сложную уникальную систему (в данном случае государственное управление) независимо от субъекта? Указанные количественные абстрактные объекты не «просто числа», а характеристики ситуативного взаимодействия субъектов и объектов системы управления. Рассмотрим такой пример. Проводится опрос граждан, насколько они доверяют государству, причем все условия опроса соблюдены: вопросы нейтрально сформулированы, выборка репрезентативна, тестовые (контрольные) вопросы корректны, основные понятия сформулированы однозначно и не допускают разночтений. Получены количественные значения уровня доверия. Казалось бы, эти значения объективны. Но это не совсем правильно, надо сформулировать более аккуратный вывод о бытийном статусе полученного количественного абстрактного объекта. Так, утверждение, что «объективный показатель уровня доверия граждан к представителям органов исполнительной власти РФ составляет 18%»[1], неверно. Данный показатель заведомо субъективен в том смысле, что этот уровень является не только и не столько следствием личного общения с органами власти, но опосредован

[1] Данные Всероссийского социологического опроса, проведенного совместно ВШЭ и ВЦИОМ, 2009 год.

оценками в средствах массовой информации, мнениями окружающих, традициями скепсиса, и т.д. Это — объективно посчитанное, но субъективное по своей природе количественное значение. Отличие этого количественного абстрактного объекта («процент доверия») от количественных абстрактных объектов естествознания заключается в том, что он получен в результате оценки взаимодействия объектов и субъектов, обладающих определенной свободой действия и коллективными ситуативными предпочтениями. Из-за этого возникают парадоксы резкого (панического) изменения значений показателей. Количественные абстрактные объекты (их значения), полученные в результате исследования сложных уникальных систем, не объективны, и заранее сказать на основе анализа их значений, когда и почему наступит нестабильность сложной и уникальной системы, не удается.

Приведем другой пример количественного абстрактного объекта, казалось бы, полностью не зависящего от субъекта. Это — уровень страновой управленческой коррупции, на который столь часто ссылаются при оценке качества государственного управления как на объективный показатель. Поскольку никто из государственных служащих, совершающих коррупционные действия, не сознается в этом во время опросов (даже анонимных), то используются косвенные способы «вычисления» уровня страновой коррупции: мнения граждан; косвенные подсчеты цены госконтрактов «с коррупционной накруткой» и возможной цены без таковой; частота публикаций о коррупции в прессе; соотношение количества открытых коррупционных дел и дел, доведенных до суда; и прочее. Эти способы субъективны, и если бы граждане считали (например), что дача взятки — в порядке вещей, что это административная рента, обеспечивающая эффективность работы государства, то и уровень коррупции в стране был бы ниже при том же скрытом валовом объеме коррупционных средств.

Наконец, чтобы не заслужить упрек в сведении всех количественных абстрактных объектов субъект-объектного взаимодействия исключительно к направлению государственного управления, приведем хорошо известный пример количественного абстрактного объекта, возникшего при изучении таких сложных уникальных систем, как экологические системы. Этот абстрактный объект — показатель устойчивости (резистентной и упругой) экологической системы. Граница между неустойчивостью и упругой устойчивостью зависит от того, какой период времени, требующийся для восстановления экологической системы после нарушения ее структуры, считается

приемлемым, эта граница конвенциальна. То же самое относится и к определению границы между резистентной и упругой устойчивостью экологической системы: если восстановление системы происходит «почти сразу», за короткий промежуток времени, то отнесение данной устойчивости к резистентной или упругой устойчивости является условным, зависящим от того, что мы собираемся делать с данной экологической системой.

Заключение

Итак, в научных направлениях, связанных с изучением сложных уникальных систем, главенствуют иные представления о квантификации, об объективности количественных абстрактных объектов, об измеримости, о математических моделях и их применимости, о месте математического аппарата в этих направлениях.

Общая тенденция процессов математизации в этих направлениях представляется такой: 1) используются по преимуществу другие, не классические разделы математики и прилегающих к ней областей (информатика, теория систем...); 2) нет восхождения от более низкой к более высокой ступени математизации; 3) математика — не язык, а один из аргументов в выборе лучшего действия, шире, в выработке субъективной оценки ситуации. Математические модели оценивают не истинность, а допустимость действия. Они помогают оправдать действие; 4) современная теоретическая математика, базовые разделы ее «ядра» для научных направлений, связанных с изучением сложных уникальных систем, не работают. Это не означает отрицание их значимости для развития культуры мышления любого специалиста данного научного направления. Но там, где математизация начинает идти новой дорогой, рано или поздно следует ожидать появления новых фундаментальных математических теорий. На основе этих теорий, возможно, когда-нибудь возникнет иное рациональное мышление, способное «работать» со сложными уникальными системами более продуктивно, нежели системно-логическое «объективирующее» мышление.

Библиографический список

Алексеев И.С. Методологические замечания о происхождении и функционировании онтологических знаний в системе теории // Алексеев И.С. Деятельностная концепция познания и реальности. Избранные труды по методологии и истории физики. М., 1995.

Барабашев А.Г. О прогнозировании развития математики посредством анализа формальных структур познавательных установок // Стили в математике: социокультурная философия математики / Под ред. А.Г. Барабашева. М.; СПб., 1999.

Барабашев А.Г. Технологии развития исследовательских компетенций: предметные поля и методы исследования // Инновации в публичном управлении / Под ред. А.Г. Барабашева. М., 2013.

Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев, 1976.

Бурбаки Н. Архитектура математики / Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971.

Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Сочинения. Т. 3. М., 1964.

Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984.

Налимов В.В. Непрерывность против дискретности в языке и мышлении. Тбилиси, 1978.

Макаров А.А. Использование программ обработки данных в преподавании курсов теории вероятностей, прикладной статистики и информатики. М., 2008.

Монастырский М.И. Лауреаты премий Филдса // Историко-математические исследования. Вып. XXXI. М., 1989.

Перминов В.Я. Надежность и строгость математического доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М., 2014.

Fuerth L. Operationalizing Anticipatory Governance // Prism. Vol. 2. N 4. Sept. 2011.

Pirog M. (Ed). Journal of Policy Analysis and Management Classics Series: Social experimentation, program evaluation and public policy. Hoboken; New Jersey, 2008.

Quine W. Theories and Things. Harvard University Press, 1981.

Riccucci N. The Logic of Inquiry in the Field of Public Administration // Handbook of Research Methods in Public Administration. SRC Publ. 2008.

Tait W. Reflections on the concept of a priori and its corruption by Kant // Proof and Knowledge in mathematics. Ed. by M. Detlefsen. N.Y., 1992.

Waldo D. The Administrative State. San Francisco, 1948. P. 48.

Williamson J. In Defense of Objective Bayesianism. Oxford, 2010.

Е.А. Зайцев

КАТЕГОРИЯ КОЛИЧЕСТВА В ФИЗИКЕ АРИСТОТЕЛЯ, СРЕДНЕВЕКОВОЙ НАТУРФИЛОСОФИИ И НЕМЕЦКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ[1]

Введение

Вопрос о связи математики с реальностью может быть сформулирован как вопрос о месте категории количества в теоретической структуре этой реальности или о связи количества с другими категориальными понятиями. Решение последнего вопроса не может быть получено чисто логическим путем (*in abstracto*), ибо представления о связи количества с другими категориями претерпевали в ходе исторического развития существенные изменения.

Аристотель, создавший первое учение о категориях, считал причастными (непрерывному) количеству только пространственную и (опосредованно через пространство) временную протяженность. Строго говоря, к количеству он относил лишь геометрические величины — линии, поверхности и тела. Стагирит резко противопоставлял количество другим категориям, полагая, что между ними нет ничего общего. Иначе подошел к трактовке количества и его места в системе категорий Гегель, который считал, что в природной действительности наряду с протяженностью (понятийным выражением которой является *экстенсивное количество*) существует особый момент, выражаемый при помощи *интенсивного количества*. Формально понятие интенсивного количества Гегель отнес к категории количества, на деле же он использовал его в качестве звена, *опосредующего* между количеством и качеством.

Введение понятия интенсивного количества в систему категорий (в явном виде это произошло уже в XVIII в.[2]) было обусловлено необходимостью в экспликации нового, неизвестного классической античности представления о том, что квантификация допустима не только по отношению к протяженным вещам, но и к сущностям, ко-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 12-03-00340а).

[2] *Kleinschmidt E.* Die Entdeckung der Intensität. Geschichte einer Denkfigur im 18. Jahrhundert. Göttingen, 2004.

торые по своей природе протяженными не являются. Развитие этого представления в значительной степени связано с научной революцией XVII в., в ходе которой непротяженные (качественные) понятия скорости, веса, давления, а затем теплоты оказались «переведенными» на язык количеств. Однако появление идеи квантификации непротяженного восходит еще к эпохе Средневековья.

Не претендуя на исчерпывающее изложение вопроса, мы дадим в этой статье обзор трех исторических точек зрения на место категории количества в общей теоретической структуре реальности. Первая из них была сформулирована в физике Аристотеля, вторая — в системе средневековой натурфилософии, третья — в рамках немецкой классической философии.

1. Квантификация качества, действия и движения в физике Аристотеля

Трактуя (непрерывное) количество как особую категорию, Аристотель противопоставлял его другим категориям абсолютным образом, полагая, что всякое сказывание количества о качестве, действии или движении носит несобственный, *привходящий* характер. Иными словами, оно не выражает специфику объектов, принадлежащих этим категориям. По настоящему количество может сказываться только о пространственно-временной протяженности. Эта мысль наиболее ярко выражена в следующем фрагменте трактата «Категории»: «Количеством в собственном смысле называется только то, что указано выше (т.е. числа, слова, линии, поверхности, время и т.д. — *Е.З.*); все остальное называется так привходящим образом; в самом деле, имея в виду те, которые были указаны, мы называем количествами и остальное; так, *белое* называется *большим*, потому что поверхность большая, и *действие — продолжительным*, потому что оно совершается долгое время, и точно так же *движение — значительным*: каждое из них называется количеством не само по себе. Так, если кто-то указывает, сколь продолжительно действие, он определит его временем, указывая, что это действие длится год или что-то в этом роде; равным образом, указывая, что белое есть некоторое количество, он определит его через поверхность: как велика поверхность, такое же по величине, скажешь ты, и белое» (VI; 5a 37 — b 8)[1].

Различие количества и качества проявляется также в различном характере *движения* в рамках этих категорий. Движением в категории количества является *увеличение* (лат. *augmentum*, ср.-век. лат.

[1] *Аристотель.* Категории // Аристотель. Сочинения: В 4 т. Т. 2. М., 1978. С. 63–64.

augmentatio) и *уменьшение*, а в категории качества — *изменение* (ср.-век. лат. *alteratio*)[1].

Понятие увеличения Аристотель обычно использует для описания роста живых организмов. Это достаточно сложный вид движения, который не может быть представлен в виде прибавления одной порции количества к другой, подобно увеличению геометрического отрезка. Ибо рост живых организмов происходит посредством пропорционального увеличения входящих в его состав частей.

Особое внимание Аристотель уделяет качественному изменению. Некоторые «качества допускают бóльшую и меньшую степень. Об одном белом говорят, что оно более бело или менее бело, чем другое, и об одном справедливом — что оно более справедливо или менее справедливо, чем другое. Да и самому качественно определенному доступно приращение, ибо нечто, будучи белым, может стать еще более белым...» (VIII; 10b 26–29)[2]. Иными словами, среди качеств есть такие, степень интенсивности которых может быть изменена без утраты самого качества. Более пространное объяснение мы находим в «Физике»: «Изменение [в пределах] одной и той же формы к большей или меньшей [степени] есть качественное изменение...» (V 2; 226b 1–2)[3]. И далее: «Ведь качество изменяется, поскольку оно может восприниматься чувствами, а чувственно-воспринимаемые [свойства] — это те, которыми тела отличаются друг от друга, как, например, тяжесть, легкость, твердость, мягкость, звучность, беззвучность, белизна, чернота, сладость, горечь, влажность, сухость, плотность, разреженность и промежуточные между этими [свойства], равным образом и другие [свойства], воспринимаемые чувствами, к которым относятся также теплота и холод, гладкость и шероховатость. Все это состояния лежащего в основе качества; ведь мы говорим, что [тела] качественно изменяются нагреваясь, становясь слаще, плотнее, суше, белее...» (VII 2; 244b 6–10)[4].

Качествами, допускающими изменение (своей интенсивности), являются те, у которых есть противоположное (т.е. качества третьего вида), а также некоторые качества первого вида, например, справед-

---

[1] О различии между *увеличением* количества и *изменением* качества см. «О возникновении и уничтожении» (I 5; 320a 7 — 322a 35). *Аристотель.* О возникновении и уничтожении // Аристотель. Сочинения. Т. 3. М., 1981. С. 395–401. Движением Аристотель называл также возникновение и уничтожение субстанций. В Средние века этот вид *движения* рассматривался совершенно отдельно по причине своего *мгновенного* характера.

[2] Аристотель. Категории // Аристотель. Сочинения. Т. 2. С. 77.

[3] Аристотель. Физика // Аристотель. Сочинения. Т. 3. С. 165.

[4] Там же. С. 210.

ливость или знание геометрии[1]. Отметим, что среди качеств третьего вида Аристотель упоминает тяжесть и плотность, которые, начиная с Нового времени, понимаются количественно. Сам Аристотель такой трактовки, как мы видим, не допускал.

Следующий фрагмент относится к вопросу о квантификации силы и скорости перемещения. Это пятая глава седьмой книги «Физики» (249b 27 — 250b 8)[2]. Уточним, что Аристотель говорит в этом фрагменте не о скорости (в современном понимании этого термина), а о быстроте или о быстром (движении), у которого есть противоположное — медленное (движение). Иными словами, он понимает скорость не как количество, а как качество третьего вида[3]. Смысл этого фрагмента состоит в указании, говоря современным языком, на линейный характер зависимости между движущей силой и скоростью движения и одновременно на ограниченный характер применимости этого «математического закона».

Аристотель ставит следующий вопрос. Предположим, что некоторое движущее *A* перемещает движимое *B* на расстояние *G* за время *D*. Что произойдет с величинами *G* и *D* при кратном увеличении или уменьшении *A* и *B*? Очевидно, что при удвоении движущего A или уменьшении наполовину движимого B произойдет либо удвоение пути *G*, либо уменьшении наполовину времени *D*, а при одновременном уменьшении наполовину *A* и *B* путь и время останутся неизменными.

Это рассуждение обычно трактуется как пример неправильного понимания Аристотелем связи между силой и скоростью (ибо согласно современным представлениям, прямой пропорциональной зависимостью связаны сила и ускорение). Более тонкие интерпретаторы (в попытке «реабилитировать» Аристотеля) указывают на то, что Стагирит имел в виду движение в вязкой жидкости, скорость которого действительно пропорциональна приложенной силе. Обе эти интерпретации далеки, однако, от мысли самого Аристотеля, ибо опираются на идею собственной квантификации движения. А это именно то, против чего возражает Аристотель во фрагменте, являющемся продолжением приведенного рассуждения.

---

[1] В трактате «Категории» Аристотель называет качествами первого вида устойчивые или преходящие свойства, например знание и добродетель или здоровье и болезнь. Качествами третьего вида он называет претерпеваемые свойства и состояния — сладость, горечь, тепло, холод, белизна, чернота и т.д. (VIII 8b 26 — 9a 14; 9a 29 — 9b 9). *Аристотель.* Категории // Аристотель. Сочинения. Т. 2. С. 72–74.

[2] *Аристотель.* Физика // Аристотель. Сочинения. Т. 3. С. 219.

[3] Скорость может обратиться в нуль, а быстрота нет; кроме того, скорость является количеством, поэтому у нее нет противоположного.

Соотношение пропорциональности между силой и скоростью, замечает Аристотель, выполняется, вообще говоря, не всегда. Так, неверно, что при уменьшении *A* наполовину происходит удвоение времени *D*, ибо «может случиться, что никакого движения не будет. Ведь из того, что целая сила продвинула [тело] на определенную длину, не следует, что половина силы продвинет [это же тело] на сколько-нибудь в какое бы то ни было время; иначе один человек мог бы двигать судно, если только силу гребцов и длину, на которую они все двигали его, разделить на их число». Другой пример нарушения пропорциональности между силой и действием этой силы Аристотель видит в парадоксе Зенона о медимне зерна. Зенон полагал (как передает Аристотель), что существует противоречие между тем, что медимн зерна при своем падении производит шум, а одно зерно (или часть зерна) — нет. На самом деле, возражает Аристотель, противоречия нет, ибо медимн зерна не есть механическая сумма находящихся в нем зерен, точно так же, как команда судна не есть механическая сумма гребцов. Стагирит пишет об этом так: «Поэтому неправильно рассуждение Зенона, что любая часть просяного зерна произведет шум, так как вполне возможно, что ни в какое время оно не приведет в движение воздух, который привел в движение при своем падении медимн. И даже той частички [воздуха], которую она двинула бы в составе *целого*, не приведет в движение, если будет падать *сама по себе*. Ведь она вообще не существует иначе как в *возможности* в составе *целого*» (курсив мой. — *Е.З.*).

Такая трактовка откровенно противоречит современному подходу к пониманию механического движения. С точки зрения Аристотеля определяющими для движения являются не его количественные акциденции (длина пути и затраченное время), а *форма* движущего А. Само тело А, рассматриваемое *in abstracto*, т.е. только как тело, есть, разумеется, механическая совокупность своих частей (команда гребцов или медимн зерна). Однако рассматриваемое *in concreto*, в связи с производимым им *действием*, движущее А такой совокупностью не является. На аристотелевском языке это означает, что его *форма* не есть сумма *форм* составляющих его частей. Можно провести это рассуждение в «обратном направлении». Каждая часть движущего, рассматриваемая как тело — отдельный гребец или зерно, — есть, разумеется, результат механического деления тела А на число его частей (гребцов или зерен). Однако полученная часть — один гребец или одно зерно, — если она рассматривается *in concreto*, как *действующая*, не есть частное от деления действия А на это число. Иначе говоря, *форма* части не есть *форма* целого, деленная на число частей. Дей-

ствие одного гребца или одного зерна не есть действие целой команды или медимна, уменьшенное в соответствующее число раз. Именно это обстоятельство Аристотель имеет в виду, когда говорит «ведь она (часть просяного зерна) вообще не существует иначе как *в возможности* в составе *целого*». Часть целого существует как *действующая* (по типу действия целого) только в составе этого целого. Если же часть (один гребец или одно зерно) рассматривается отдельно, то сама по себе она не обладает свойствами целого. Приведенное рассуждение является следствием общего тезиса Аристотеля, согласно которому целое онтологически предшествует своим частям. Этот тезис — сформулированный здесь по отношению к механическому *соединению* — тем более верен по отношению к *смешению*, при котором происходит более тесное взаимодействие частей (см. ниже).

Характерно, что в приведенном фрагменте Аристотель избегает квантификации скорости. Он нигде не говорит о ее удвоении или делении пополам. Причина в том, что, допустив квантифицируемость скорости, он должен был бы признать, что скорость, подобно протяженному количеству, состоит из механического соединения однородных частей. Но такое допущение неприемлемо, поскольку скорость, будучи свойством целого, не сводима к сумме до и вне этого целого существующих частей.

В данном фрагменте все же есть два понятия, которые, не будучи количествами, подвергаются квантификации. Это «движущая сила» и «тяжесть», по отношению к которым говорится о кратном увеличении и уменьшении. Однако из контекста ясно, что кратное изменение силы происходит не само по себе, но вследствие пропорционального увеличения или уменьшения числа телесных носителей этой силы (гребцов или зерен), т.е., в конечном итоге, увеличения или уменьшения протяженного количества. Таким образом и здесь количество сказывается о «силе» и «тяжести» *привходящим* образом.

Следующий фрагмент (точнее, два фрагмента) из трактата «О возникновении и уничтожении» затрагивает вопрос о квантификации частей, находящихся в *смешении* (mixis) (I, 10; 326b 30 — 328b 24; II, 7; 334a 15 — 334b 30)[1]. По свидетельству Аристотеля, досократики понимали смешение механически, как процесс составления целого из совокупности своих частей. При этом они считали, что части, даже в случае невозможности их извлечения (скажем, в силу крайнего измельчения), полностью сохраняют свою природу в составе смеси.

[1] *Аристотель.* О возникновении и уничтожении // Аристотель. Сочинения. Т. 3. С. 413–416, 430–431.

Этой позиции Аристотель противопоставил точку зрения, согласно которой смешение — это соединение, которое сопровождается изменением природы частей под влиянием *формы* целого. Такая точка зрения влекла принятие нескольких положений. Во-первых, как и в случае механического соединения (гребцов, зерен), находящиеся в составе смеси части существуют лишь в *возможности* (327b 24-26). Во-вторых, часть, находясь в составе смеси, приобретает свойства, которых у нее не было до вхождения в смесь. В-третьих, *форма* смеси обусловливает не только свойства входящих в нее частей, но и характер их взаимодействия друг с другом[1].

Указанные обстоятельства делают по сути невозможным математическую трактовку смеси. Неприемлемым, в частности, является ее истолкование в терминах отношений между объемами входящих в ее состав частей. Этот тезис Аристотель иллюстрирует тремя примерами. В первом он рассматривает случай, когда одна из частей полностью изменяется в другую, преобладающую над ней: «капля вина не смешивается с 10 тысячами мер воды, но теряет свою *форму* и изменяется целиком в воду» (328b 26–27). Очевидно, что в данном случае говорить о количественных оценках вообще не приходится[2]. Количественный подход также неприемлем в случае, когда противоположные свойства — в приводимом Аристотелем примере говорится о теплом и холодном — присутствуют в смеси с одинаковой интенсивностью. Ибо тогда они просто взаимно уничтожают друг друга. Третий пример относится к случаю, когда одна из частей смеси преобладает над другой, но при этом «они (т.е. участвующие во взаимодействии тела. — *Е.З.*) в какой-то мере равны по своей силе». Количественная оценка и здесь некорректна, потому что при смешении «каждое из них изменяет свою природу в направлении преобладающего, но становится не другим предметом, а чем-то средним и общим им обоим» (328b 28–31). Происходящее при таком смешении изменение природы частей затрагивает их *форму*, т.е. выходит на уровень, описание которого в терминах количества (относящегося к протяженной субстанции) в принципе невозможно.

Есть, правда, один фрагмент, в котором Аристотель коротко говорит о том, что «промежуточное» между холодным и теплым «[может быть] в возможности в два, в три и в большее число раз

---

[1] Для Аристотеля вопрос о смешении относится, прежде всего, к биологии: его интересует, как из сочетания элементов образуются ткани живого организма. Отсюда примат органического целого над частями.

[2] Строго говоря, указанное соединение частей не есть *смешение* (по Аристотелю). Тем не менее приводимый пример ярко свидетельствует о недопустимости механического, чисто количественного подхода к вопросу о соединении вообще.

более теплым, чем холодным» (334b 13–15)[1]. Трудно сказать, что здесь имеется в виду, так как идея не получила развития — данный фрагмент является единственным, в котором говорится о квантификации качеств самих по себе (без упоминания телесных носителей). Трудность, которую, судя по приведенным выше фрагментам, хорошо осознавал Аристотель, состоит в том, что, хотя между количествами (например, объемами) телесных элементов можно установить математические соотношения, эти соотношения не способны выразить суть отношений между свойствами элементов, ибо эти свойства претерпевают изменения при вхождении элементов в смесь. Не количественные соотношения между протяженными телами, из которых составлена смесь, определяют взаимодействие входящих в нее частей, но *форма* того целого, которое образуется при смешении.

Теоретическая несостоятельность количественного подхода к описанию объектов, принадлежащих другим категориям, вытекала также из сформулированного во «Второй аналитике» запрета «метабазиса». В соответствии с этим принципом, ставшим парадигмальным для натурфилософии и науки Античности, запрещалось использование методов, развитых в одной области знания, для объяснения феноменов из других областей (I, 7; 75a 37 — 75b 20)[2]. Запрет метабазиса исключал, в частности, возможность использования математического метода в физике. Математический метод, развитый по отношению к *неподвижным* количествам, не мог считаться научным при применении в области знания, в которой основным был вопрос о причинах *движения*. Его можно было использовать только как средство для «спасения феноменов», т.е. в качестве рационального описания, пригодного для практических целей, но не претендующего на истинность. Именно такое применение математики допускалось в Античности и Средние века в так называемых «промежуточных» науках (scientiae mediae) — находящихся «между» математикой и физикой — астрономии, оптике, механике, где вопрос об адекватности моделей был практически неразрешим[3].

---

[1] Ср. также приведенный в «Метафизике» пересказ мнения Эмпедокла, согласно которому кость (костная ткань) «существует через отношение [элементов], а это у него суть ее бытия и сущность ее» (I 10; 993a 17). *Аристотель.* Метафизика // Аристотель. Сочинения. Т. 1. М., 1976. С. 92.

[2] *Аристотель.* Вторая аналитика // Аристотель. Сочинения. Т. 2. С. 270–271.

[3] О «спасении феноменов» в античной и средневековой астрономии см.: *Duhem P.* Sauver les phénomènes. Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. Sozein ta phainomena. Paris, 2005.

2. Квантификация качеств в Средние века (начало)[1]

Представление о том, что в терминах (протяженных) количеств можно описывать «вещи», которые по своей природе не являются протяженными, возникло в Средние века в связи с необходимостью теоретического освоения реальности нового типа, незнакомого классической Античности. Вместо телесного космоса, являвшегося главным объектом изучения античной науки и философии, на горизонте философского исследования появляется пара разнородных объектов, первым из которых является бестелесный Творец, а вторым — телесный протяженный мир. Для теоретического описания мира (сохранявшего в Средние века черты античного космоса) существовала развитая система категорий (строго говоря, таких систем было несколько, но мы говорим только об одной — аристотелевской). Для описания Творца и его отношений с миром такой системы не было.

В раннем христианстве вопрос о Боге и мире, точнее, о Боге и человеке — ибо в конечном счете речь шла о спасении человека — оставался прерогативой живого религиозного опыта. Выражением этого опыта служили тексты (принадлежавшие традиции Св. Писания или создававшиеся вновь), которые выступали в качестве «символов», обеспечивающих общение Бога и человека. Понятия, встречавшиеся в этих текстах, лишь в очень редких случаях становились предметом специального анализа.

Однако уже в V в. и сами тексты, и содержащиеся в них понятия превращаются в объект самостоятельного исследования, не связанного непосредственно с религиозным опытом (здесь и далее речь идет о развитии в рамках западноевропейской традиции). При этом исследование приобретает отчетливо выраженный семантический характер, т.е. направляется на прояснение смысла текстов, их фрагментов и значений отдельных встречающихся в них терминов. Одной из трудностей, с которой столкнулась при этом западная мысль, был вопрос о том, как правильно истолковать широко распространенную в Св. Писании (в частности, в Ветхом завете) практику приписывания Богу предикатов, относящихся к телесным вещам. Особенно остро этот вопрос встал перед основным представителем западной традиции того времени — Августином, интеллектуальное становление которого прошло под знаком манихейства — дуалистического учения, в котором отсутствовало представление о бестелесном сущем.

---

[1] Основополагающими трудами по средневековой теории квантификации качеств являются: *Duhem P.* Études sur Léonard de Vinci (in 3 Vols.). Vol. 3. Paris, 1955; *Maier A.* Zwei Grundprobleme der scholastischen Naturphilosophie. 3. Aufl. Roma, 1968.

С проблемой «квантификации Творца» была тесно связана серия вопросов, касающихся отношений между конкретными проявлениями Его (непротяженной) силы и воспринимающей эту силу (протяженной) тварью. Одним из наиболее сложных был вопрос об *изменении* Божественной благодати (*gratia*) или милосердия (*caritas*) (см. ниже)[1]. С попыток преодоления противоречий доктринального характера, возникавших вследствие приписывания Богу количественных предикатов, а благодати или милосердию — изменения, начинается оригинальное развитие латинской мысли, итогом которого стало формирование — сначала в богословии, а затем в философии и науке — представления о возможности квантификации непротяженных сущностей.

Конкретный толчок этому развитию дали два необычные словосочетания, введенные в обиход западной традиции Августином. Это «*количество* добродетели/силы» (quantitas virtutis) и «*увеличение* милосердия» (caritas *augeri*). С точки зрения аристотелизма оба выражения противоречивы. Обладающие количественными коннотациями — первое прямо говорит о *количестве*, второе об *увеличении* (которое, согласно Аристотелю, относится к количеству), — оба содержат в качестве объекта (количественной) предикации «вещи», которые не являются протяженными.

Для правильного истолкования смысла, который Августин вкладывал в выражение «*количество* силы», обратимся к текстам из трактата «О Троице». Обсуждается вопрос, как следует понимать предикат «великий» (magnus), когда тот приписывается бестелесному Богу. В первом тексте дается такой ответ: «Бог [...] называется [...] великий, благой [...]; [однако] он велик не [телесным] размером, но добродетелью (или силой)» (VI 7). Здесь Августин просто противопоставляет выражение quantitas virtutis («количество силы») выражению quantitas molis («количество массы»), которое в точности соответствует аристотелевскому протяженному количеству (quantitas dimensionis). Во втором тексте Августин коротко останавливается на смысле, который следует в данном случае приписать прилагательному «великий»: «В тех [вещах], чье величье не в телесном [размере], быть бóльшим означает быть лучшим» (VI 8)[2].

Революционное значение выражений «количество силы» и «увеличение милосердия»[3] для развития западного богословия, а затем —

---

[1] Схоласты Средневековья фактически отождествили благодать и милосердие Божие.

[2] *Августин Аврелий*. О Троице (пер. А.А. Тациана). Краснодар, 2004. С. 158–159 (я чуть изменил перевод. — *Е.З.*).

[3] Словосочетание «*увеличение* милосердия» появляется в контексте фразы «*увеличение* милосердия (Божия) заслуживается» (caritas meretur *augeri*). *Au-*

натурфилософии и науки, состояло в том, что они санкционировали перенос теоретических понятий, выработанных для объяснения телесной реальности, на реальности, которые телесностью не обладали. Разумеется, такой перенос был невозможен без изменения смысла этих понятий. В частности, в отношении категории количества появляется следующая семантическая двойственность. Если количественная предикация относится к протяженной вещи, то она представляет собой суждение о «количестве массы» или «количестве в отношении размера». Если же количественная предикация относится к непротяженной вещи, то она представляет собой суждение о степени близости этой «вещи» к абсолютному совершенству («количество силы» обычно отождествляется в Средние века с «количеством совершенства» — quantitas perfectionis).

Несмотря на краткость, высказывания Августина, касающиеся «количества силы» и «увеличения милосердия» пользовались огромной популярностью в Средние века, служа «классическим местом» ссылок для всей последующей схоластической традиции. Редкий автор этой традиции обходил их вниманием. С них собственно и начинается неклассическое применение категории количества, т.е. такое использование количественной предикации, которое не предполагает наличия у предицирумых сущностей телесной протяженности.

Следующий шаг по пути неклассического применения категории количества был сделан в середине XIII в. в ходе полемики католической ортодоксии с катарами. Учение катаров опирались на тезис о том, что существует самостоятельное темное начало, силы которого соизмеримы с силами Божественного начала. Католики противопоставили этому тезису его формальное отрицание, т.е. догмат о творении и положение о «неархимедовости» тварных сил в сравнении с силой Творца. Более точно: ортодоксальная точка зрения состояла в том, что никакое *кратное увеличение* тварных сил не способно привести к превосходству над *бесконечной* силой Творца.

В формулировке этого положения мы встречаем два предиката — *бесконечное* (по отношению к силе Творца) и *кратное увеличение* (по отношению к тварной силе). Особенность этих предикатов состоит в том, что, будучи традиционно закрепленными за протяженными количествами, они в рамках данного доктринального положения оказались отнесенными к непротяженным «вещам».

Приведем фрагмент одного из полемистов с католической стороны Ричарда Фишакра (ок. 1245 г.): «То, что Бог бесконечен по [своей]

---

gustinus. Epistola 186, ad Paulinum. Это положение широко обсуждалось в средневековом католичестве, а затем в полемике католиков с протестантами (с акцентом на слово «заслуживается»).

интенсии (infinitus intensione), ясно из вышесказанного; ибо сила или добродетель (potentia vel bonitas) твари интенсивна в некоторой небольшой степени (aliquantulum intensa), и, если эта интенсия удваивается, утраивается и так до бесконечности, то интенсия Его силы или добродетели [все же] не будет достигнута»[1].

Остановимся сначала на предикате «бесконечный». Согласно Аристотелю, этот предикат может быть присвоен собственным образом только протяженным количествам (речь идет об их бесконечной делимости)[2]. Возникает вопрос: является ли использование бесконечности по отношению к непротяженной силе Творца случайной «манерой выражения» или же за этим стоит осознанная позиция? Ответ на этот вопрос дает сам Фишакр, который прямо указывает на то, что, приписывая Божественной силе предикат «бесконечный», он поступает вопреки мнению Аристотеля, полагавшего (следует ссылка на «Физику»), что бесконечное сказывается только о количестве.

Что касается представления о кратном увеличении силы, то само по себе оно как будто не выходит за рамки аристотелевской трактовки, ибо и Аристотель, как мы видели, использовал выражения «удвоенная» и «половинная» сила. Некоторое тонкое различие все же есть. Дело в том, что когда Стагирит предицирует силу терминами «удвоенная» или «половинная», он предполагает, что за изменением силы стоит пропорциональное увеличение или уменьшение телесной протяженности — числа гребцов на судне. У Аристотеля сила квантифицируется не сама по себе, но опосредованно, через квантификацию телесного носителя (который есть у всякой движущей силы). Представления же о кратном увеличении силы как таковой у Аристотеля нет.

Фишакр же, когда квантифицирует силу (посредством предикатов «удвоенная», «утроенная» и т.д.), ничего не говорит об изменении ее телесного носителя. Вполне возможно, что и у него за увеличением силы стоит увеличение телесности (ибо наш схоласт хорошо знаком с «Физикой» Аристотеля). Характерно, однако, что в тексте Фишакра это обстоятельство никак не отмечено. Объясняется это тем, что стоящий за тварной силой телесный момент не интересует Фишакра — ведь, в конечном итоге, он сравнивает эту силу не с другой тварной силой (тогда было бы уместно сравнивать протяженности носителей), а с силой Творца, за которой, разумеется, никакой про-

---

[1] *Richard Fishacre*. Commentarium in Librum Sententiarum (Dist. 2 Cap. 1) / Ed. Charles J. Ermatinger // The Modern Schoolman. 1958. Vol. 35. P. 213–235; on P. 217). Цит. по: *Davenport A.A*. The Catholics, the Cathars and the Concept of Infinity in the Thirteenth Century // Isis. 1997. Vol. 88. P. 262–295; on P. 285.

[2] Phys. I 2; 185a 33 — 185b 5. *Аристотель*. Физика // Аристотель. Сочинения. Т. 3. С. 63.

тяженности не стоит. Сравнение двух сил разного вида — телесной и бестелесной — предполагает, с логической точки зрения, наличие некоторого общего рода, в рамках которого происходит сравнение. В данном случае общим родом является понятие «количество силы» (по Августину).

Использование предикатов телесного количества (*бесконечное* и *удвоенное*) по отношению к сущностям, не обладающим протяжением, и к сущностям, абстрагированным от реального протяжения своих носителей, свидетельствует о том, что «количество силы» превратилось в середине XIII в. из *ad hoc* метафоры в практически полезную катахрезу. Следующее поколение схоластов превратит эту катахрезу в настоящее научно-философское понятие.

3. Развитие представлений о квантификации качеств и сил в средневековой схоластике

Новый импульс развитие представлений о квантификации сил (вне связи с телесным носителем) получило в третьей четверти XIII в. благодаря полемике вокруг одного вопроса Петра Ломбардского из «Книги сентенций»[1]. Требовалось дать теоретическое объяснение факту *увеличения* или *уменьшения* (Божественного) милосердия (сам факт изменения милосердия имел обоснование в текстах Св. Писания и авторитетных авторов, в первую очередь Августина). Вопрос был сформулирован так: «Если милосердие есть святой Дух, то следует ли признать, что, поскольку милосердие в человеке *увеличивается* (*augeatur*) и *уменьшается* [...], святой Дух в человеке также увеличивается или уменьшается?»[2] Трудность, сформулированная в этом вопросе, состояла в том, что претерпевающее изменение милосердие отождествлялось со св. Духом, который по определению не мог претерпевать изменения. В ходе полемики оформилась серия стандартных (школьных) решений этого вопроса, каждое из которых внесло определенный вклад в дальнейшее развитие представлений о неклассической квантификации. В рамках данной статьи невозможно проанализировать все эти позиции (и их модификации). Поэтому мы остановимся только на одной — оказавшейся

[1] «Книга сентенций» Петра Ломбардского (Liber Sententiarum, 1150 г.) являлась в Средние века стандартным руководством по богословию, комментирование которого было обязательным для будущих магистров. Преподавателям при этом вменялось в обязанность составление к ней письменных комментариев. Практически все известные католические богословы писали комментарии к «Сентенциям».

[2] *Petrus Lombardus.* Liber Sententiarum I Dist. 17. Cap. V. Переводы и парафразы из средневековых текстов, если не отмечено особо, сделаны мною. Латинские оригиналы доступны в Интернете.

наиболее плодотворной для продвижения идеи квантификации непротяженного. Это восходящая к Дунсу Скоту *теория прибавления благодати* (additio). Получившая в конце XIII в. распространение в среде францисканцев, она к началу Нового времени стала признанной практически всеми схоластическими школами (включая томистов)[1].

Для того чтобы еще теснее связать милосердие с количеством, необходимо было сделать следующий принципиально важный шаг — признать, что увеличение и уменьшение милосердия происходит точно так же, как увеличение и уменьшение геометрических величин, т.е. путем *прибавления* дополнительной части и, соответственно, вычитания некоторой части. Этот шаг был сделан около 1270 г. главой францисканской школы Бонавентурой. Сформулированная им теория прибавления милосердия открыла новые возможности не только для богословского, но и для натурфилософского развития. В значительной степени появление этих возможностей было обусловлено тем, что в качестве модели, объясняющей увеличение милосердия, Бонавентура использовал увеличение света. В дальнейшем эта аналогия получила широкое распространение. Причем применялась она в обе стороны. Можно было делать выводы об увеличении благодати на основании наблюдения за изменением света. А можно было делать выводы о характере увеличения света, используя доктринальные положения об изменении благодати.

Приведем ключевой текст из комментария Бонавентуры к «Книге сентенций». После перечисления различных (ошибочных) мнений касательно характера увеличения милосердия Бонавентура формулирует правильное, с его точки зрения, решение: «Милосердие *увеличивается* посредством *присоединения* [дополнительной части] (caritas *augetur per appositionem*)». Характер *присоединения* Бонавентура разъясняет, используя аналогию со светом: «Подобное этому происходит со светом, который [обычно] прямо уподобляется милосердию. Отсюда: подобно тому как посредством *прибавления* бóльшего света к меньшему (*additum* minori) происходит увеличение последнего (ipsum *auget*), так и дополнительно *прибавленное* милосердие (caritas *superaddita*) увеличивает малое [милосердие] (*auget* minorem)»[2].

---

[1] Помимо теории прибавления существовали еще две теории, объяснявшие увеличение милосердия. Это теория «последовательной смены» (successio) состояний и теория партиципации Фомы Аквинского. *Maier A.* Zwei Grundprobleme der scholastischen Naturphilosophie. 3. Aufl. Roma, 1968; *Sylla E.D.* The Oxford Calculators and the Mathematics of Motion, 1320–1350: Physics and Measurement by Latitudes. N.Y., 1991.

[2] *Bonaventura.* In Librum Sentent. I, Dist. 17. Pars 2. Art. unicus. Теория прибавления (в отношении милосердия) на раннем этапе развития схоластики содержалась также в работах Альберта Великого и Пьера де Тарантезе — будущего папы Иннокентия V. *Maier A.* Zwei Grundprobleme. S. 16–22. Уподобление

Итак, согласно Бонавентуре, милосердие — которое, как он пишет далее, «не имеет количественных частей, подобно *количеству массы*, но имеет [таковые] подобно *количеству силы*»[1], — увеличивается подобно увеличению света путем прибавления некоторой новой части. Аналогия со светом имеет важное «методологическое» значение: она позволяет выйти за рамки богословского дискурса (не предполагавшего рационального толкования) и обратиться к обычному «земному» опыту, для теоретического осмысления которого существовала разработанная Аристотелем система категорий. Возникавшие при анализе этого опыта проблемы носили более конкретный характер, а их решения могли быть верифицированы при помощи рассудка. Сказанное, однако, не означает, что аргументы для такой верификации заимствовались исключительно из данных опыта. Зачастую при выборе моделей решающую роль играли все те же доктринальные положения.

Если милосердие подобно свету (и наоборот), то для решения вопроса о его увеличении следует предварительно решить вопрос о том, как на деле происходит увеличение света. Или более точно: каким образом достигается его прибавление? В тексте Бонавентуры приведены два варианта ответа на этот вопрос. Во-первых, увеличение света происходит, когда один источник света присоединяется к другому (например, свеча к свече). Такое увеличение, очевидно, предполагает увеличение соответствующей экстенсии — числа телесных носителей света (свечей). Заметим, что это примерно то же, что и увеличение силы посредством увеличения протяженности ее носителей (например, гребцов у Аристотеля). Однако возможен другой вариант, при котором увеличение света происходит без увеличения числа источников и соответственно без увеличения телесной протяженности. Это многократное отражение света от системы зеркал (можно, например, расположить свечу между двумя параллельными зеркалами) или его фокусирование посредством зажигательного зеркала. Из двух моделей, объясняющих увеличение милосердия, Бонавентура выбирает многократное отражение света, исходящего из одного источника. Что же касается объяснения увеличения света посредством прибавления дополнительного источника, то таковое он решительно отвергает: «Но в этом (т.е. в способе увеличения. — *Е.З.*) они (милосердие и свет. — *Е.З.*) не подобны; ибо: различие между [находящимися] в воздухе источниками света возникает в связи с различием в отношении происхождения, например, когда [горит] много свечей; в

благодати и милосердия физическому свету — общее место католической традиции, начиная с Августина.

[1] Ссылка на два вида количества по Августину.

случае же милосердия, это не так (ибо части милосердия не различаются в отношении своего происхождения. — *Е.З.*)»[1].

Поясним смысл сказанного. Согласно Бонавентуре, между милосердием и светом существует подобие, служащее основанием для распространения на милосердие идеи *прибавления* (ибо увеличение света происходит именно посредством *прибавления*). Однако наличие подобия между милосердием и светом не может служить основанием для распространения на милосердие того или иного конкретного механизма *увеличения* света. В частности, недопустимо увеличение милосердия уподоблять увеличению света, происходящему посредством прибавления источников. Данный тезис Бонавентура обосновывает, опираясь на сугубо богословские соображения. При увеличении света посредством прибавления источников каждый из них и, значит, каждая новая часть света, имеет, как выражается Бонавентура, свое «происхождение». Ссылка на «происхождение» есть напоминание о том, что всякая тварная субстанция, представляющая собой комбинацию из формы и материи, возникает в результате индивидуации, главную роль в которой играет материя. Но в случае милосердия соображения, связанные с материальным носителем, отсутствует — его увеличение происходит посредством прибавления частей, имеющих одно и то же «происхождение» (или один и тот же источник индивидуации) — совершенное милосердие Творца. Поэтому в рамках аналогии, существующей между милосердием и светом, предпочтение отдано многократному отражению света, которое не предполагает увеличения числа телесных носителей. И хотя у Бонавентуры нет еще представления о возможности существования физического качества отдельно от телесного носителя, выбор модели, в которой увеличение света не связано с увеличением телесной протяженности, указывает на то, что развитие средневековой мысли в этом направлении уже началось.

Остается добавить, что средневековые критики ставили в упрек теории *прибавления* ее «механистический» характер, указывая на то, что она не объясняет, *почему* две «вещи», будучи соединенными вместе, образуют единую «вещь» (unum fieri). Ведь при сложении нескольких камней получается не один новый камень, но куча камней (конечно, при определенных условиях эта куча может стать, например, домом, но основанием для этого является уже не материальная, а целевая причина). На это возражение Бонавентура отвечает все тем же богословским аргументом: сумма двух милосердий всегда будет милосердием, ибо в отличие от камней, имеющих разное «происхождение», милосердие по своему «происхождению» едино.

---

[1] *Bonaventura.* In Librum Sentent. Ibid.

* * *

В XIV в. теория *прибавления*, непосредственным источником которой был вопрос об увеличении милосердия, вышла за границы богословской полемики и была распространена на обычные физические качества. Сначала сформировалась общая концепция, охватывающая оба вида качеств — естественные и сверхъестественные, а затем на ее основе возникла настоящая натурфилософская теория прибавления качества. Попутно произошло расширение круга комментируемых источников (напомним, что все средневековые теории носили сугубо книжный характер). Если на ранних этапах теория *прибавления* развивалась почти исключительно в связи с толкованием «Сентенций», то теперь она обсуждается и в рамках комментаторской традиции «Физики» Аристотеля. Процесс переноса основных положений этой теории с милосердия на физические свойства происходил сложно и противоречиво. Поэтому во всей полноте он не может быть освещен в данной статье. Здесь мы представим только некоторую схему, отражающую одно из направлений развития[1].

В противоположность античной философии и науке, соблюдавших запрет метабазиса, средневековая мысль систематически использовала перенос теоретических конструкций из одной области в другую. В эпоху высокой схоластики (XIII в.) это был вообще стандартный прием рассуждения. Обычно такой перенос осуществлялся при помощи рассуждений по аналогии, оправданием для которых служила многозначность терминов, использовавшихся по отношению к объектам сразу нескольких родов (а зачастую и категорий, которые в Средние века понимались как высшие роды)[2]. Теоретическим оправданием переноса количественных предикатов с милосердия на физические качества была полисемия термина *движение*, который, согласно Аристотелю, распространялся на три категории — количество, качество и место.

---

[1] Две другие теории увеличения благодати — «последовательной смены» и «партиципации» — также были «перенесены» на физические качества. Кроме того, для описания их изменений была разработана оригинальная теория «примешивания» противоположных качеств (admixtio), восходящая к теории *смеси* Аристотеля. К этой теории восходит математическая трактовка движения посредством функции Брадвардина. *Sylla E.D.* The Oxford Calculators and the Mathematics of Motion, 1320–1350: Physics and Measurement by Latitudes. N.Y., 1991.

[2] О средневековых аналогиях см.: *Ashworth E.J.* Medieval Theories of Analogy // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2013 Edition). E.N. Zalta (ed.). URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/analogy-medieval/>.

Конкретная схема такого переноса действовала следующим образом. Милосердию, которое является *качеством* первого вида, в рамках категориального рода «качество» сопоставлялись *качества* третьего вида — теплота, холод, влажность, сухость, освещенность, гладкость, шероховатость и т.д. Сопоставление разных видов в рамках одного рода является одним из стандартных приемов средневековых авторов. Теперь о милосердии и физических качествах можно судить по аналогии.

Общим для видов качества является понятие *изменения* (alteratio), которое может сказываться и о милосердии, и о физических качествах. Такова стандартная аристотелевская (или точнее, квазиаристотелевская, ибо милосердие бестелесно) точка зрения. Заметим, что, если бы в формулировке Петра Ломбардского было бы использовано слово «изменение», то никакого категориального развития не последовало бы, поскольку милосердие (по крайней мере в контексте обсуждения вопроса из «Сентенций») оставалось бы в разряде качества и не получило бы количественных коннотаций. Однако вместо «изменения» Петр Ломбардский (за которым стоит Августин) применяет по отношению к *движению* милосердия понятие «увеличения», описывающее *движение* в сфере количества. Тем самым милосердию придается количественный оттенок. Здесь необходимо отметить следующую тонкость. Из того, что милосердию придается количественный оттенок не следует, что милосердие *становится* видом количества. Речь идет лишь о том, что оно *изменяется* подобно *изменению* количества. Общим для милосердия и количества является лишь характер их *движения*, которое в обоих случаях происходит как *увеличение* (или *уменьшение*) посредством *прибавления* (или *вычитания*) частей.

Далее, как указано выше, физические качества аналогичны милосердию, поэтому их *движение* также аналогично *движению* милосердия[1]. Движение же милосердия есть *увеличение*. Значит движение физических свойств также есть *увеличение*. Таким образом, вслед за милосердием количественный оттенок получали обычные физические качества. И снова придание физическим качествам количе-

[1] В комментарии к «Сентенциям» Фома Аквинский, например, писал: «*Увеличение* милосердия подобно *увеличению* естественных качеств» (*augmentum* caritatis simile est *augmento* qualitatum naturalium). *Thomas Aquinas.* Scriptum super libros Sentent. I. d. 17 q. 2 a. 1. Аквинат был в числе тех, кто отвергал теорию прибавления благодати. Одновременно он был сторонником этой теории по отношению к естественным габитусам, полагая, что человек становится более сведущим в геометрии за счет прибавления (знаний).

ственного оттенка не означает, что эти качества *становятся* видом количества. Такое отождествление произойдет только в XVII в. и то лишь в отношении так называемых механических качеств — скорости, тяжести и т.д. Пока же речь идет лишь о том, что физические качества *изменяются* подобно тому, как *изменяются* количества. Общим для физических качеств и количества является характер их *движения*, которое и в том, и в другом случае происходит как *увеличение* (или *уменьшение*). С точки зрения сторонников теории прибавления такое увеличение или уменьшение происходит в обоих случаях посредством *прибавления* или *вычитания* частей. Аналогичное представление было распространено и на скорость движения. И снова скорость не отождествлялась с количеством (как в механике Нового времени). Речь шла лишь о том, что *изменение* скорости подобно *изменению* количества: и в том и в другом случае оно происходит как *увеличение* или *уменьшение* путем *прибавления* или *вычитания* некоторой части. Отождествление количества и качества шло таким образом не на субстанциональном, а на функциональном уровне (если пользоваться языком Э. Кассирера).

Функциональный перенос понятий из одной области в другую не был, однако, связан исключительно с логической сферой. Средневековые схоласты понимали, что для переноса представлений из одной области в другую недостаточно простого указания на наличие у этих областей общих свойств. Для того чтобы рассуждение по аналогии могло претендовать на доказательность, необходимо было установить онтологическую «соизмеримость» этих областей посредством выделения общих для них *существенных* свойств. В частности, для переноса представлений, выработанных в отношении милосердия, на обычные физические качества требовалось найти общий род, в рамках которого такой перенос мог быть теоретически оправдан. Но как найти общий род у объектов, которые имеют противоположную природу, причем по признаку, являющемуся ключевым для различения Творца и твари? Как «соизмерить» лишенное телесной протяженности милосердие и физические качества, которые — будучи акциденциями материальных субстанций — необходимым образом связаны с протяженностью своих носителей?

Соизмеримость этих «вещей» могла быть обеспечена лишь признанием того, что физические качества, подобно милосердию, могут существовать отдельно от своих телесных носителей. Только в этом случае представление о возможности увеличения качества, не связанного необходимым образом с увеличением телесной протяженности,

получало необходимое теоретическое основание[1]. Средневековая схоластика в лице наиболее последовательных своих представителей сделала и этот шаг.

Впервые тезис об увеличении физических качеств посредством прибавления частей, но без прибавления телесных носителей, был сформулирован Уильямом из Уэра (Willam of Ware) в «Комментарии к Сентенциям» (начало XIV в.). Отправной точкой послужила, как обычно, теория прибавления милосердия, которому на этот раз был сопоставлен не свет, а теплота. Эта, на первый взгляд незначительная, деталь является, однако, весьма показательной. Дело в том, что, если в случае света можно представить ситуацию, когда увеличение качества не сопровождается увеличением телесного носителя (см. выше), то по отношению к теплоте такое представление проблематично. Ибо теплота связана со своим носителем значительно теснее, чем свет.

Схематично ход рассуждения Уильяма из Уэра выглядит так. Сначала наш схоласт приводит стандартный аргумент противников теории прибавления, согласно которому прибавление одной порции теплой воды к другой не ведет к повышению теплоты, ибо при этом не теплота прибавляется к теплоте, а один протяженный носитель теплоты соединяется с другим. Однако, продолжает Уильям, этот аргумент неубедителен, ибо можно представить ситуацию, когда теплота увеличивается без увеличения носителя. Рассуждает он так (передаю почти дословно): можно взять теплоту от одного тела, затем теплоту от другого и поместить эти две теплоты в третье тело, проследив, чтобы протяженность при этом не увеличивалась. В этом случае, указывает Уильям, сама теплота, а не протяженность носителя, будет увеличена путем прибавления[2]. Развернутое рассуждение на эту тему содержится также в «Комментарии к Сентенциям» другого сторонника теории прибавления — Иоанна Бассолиса[3].

Ни тот, ни другой автор прямо не говорит о том, что теплота существует вне телесной субстанции. Однако логика их рассуждений необходимо влечет принятие такого предположения. Ибо описанные ими манипуляции с теплотой возможны лишь в случае ее отделимо-

---

[1] Другой вариант — предположение о том, что благодать имеет телесные коннотации, — был, разумеется, неприемлем с доктринальной точки зрения.

[2] Фрагмент приведен: *Duhem P.* Études sur Léonard de Vinci (3 Vols.). Vol. 3. Paris, 1955. P. 333.

[3] Ibid. P. 335–339; см. также: *Clagett M.* Richard Swineshead and Late Medieval Physics // Osiris 1951. Vol. 9. P. 131–161, on P. 137.

сти от материального носителя, или, говоря языком средневековой схоластики, существования качеств вне субстанций.

Возникновение этого необычного представления — несовместимого с точкой зрения классического аристотелизма — объясняется общей логикой развития средневековой схоластики в направлении квантификации непротяженного. Однако для его становления существовала и конкретная историческая причина. Среди тезисов, преданных осуждению в 1277 г. епископом Этьеном Тампье, было положение о том, что Бог не может сотворить качество вне телесной субстанции. И хотя само осуждаемое положение не является аристотелевским (ибо Аристотель вообще не упоминал творения), оно все же хорошо согласуется с аристотелевским представлением о том, что качество, будучи акциденцией субстанции, необходимым образом связано с ней. Отвергая же это положение, католическая ортодоксия, по сути, признавала, что качество без субстанции может существовать. Такой вывод следовал, в частности, из номиналистического тезиса об абсолютном могуществе Бога (potentia Dei absoluta), получившего в XIV в. широкое распространение. Согласно этому тезису, Творец может создать любую «вещь», в определении которой не содержится формального противоречия. Аргументом в пользу самостоятельного существования качеств служило также представление о том, что качества хлеба и вина (акциденции «вещества таинства») лишаются своих телесных носителей после Трансубстанциации.

4. Экстенсивное и интенсивное количество в немецкой классической философии

Средневековое развитие не привело, однако, к полному преодолению сформулированной Аристотелем антитезы количества и качества. Распространив на качества ряд количественных характеристик, в том числе представление об увеличении посредством прибавления, схоластика не сделала при этом следующего важного шага. Она не приняла положения о том, что при увеличении качества участвующие в прибавлении части являются *однородными*[1]. Окончательно тезис об однородности частей качества, позволявший трактовать качества как настоящие протяженные количества, был оформлен только в ходе развития научного знания в XVII в., да и то лишь по отношению к небольшому числу так называемых «механических»

[1] *Solère J.-L.* The Question of Intensive Magnitudes According to Some Jesuits in the Sixteenth and Seventeenth Centuries // The Monist. 2001. Vol. 84 (4). P. 582–616.

качеств — скорости, силе, весу, плотности (впоследствии — к теплоте). Указанные качества перешли при этом в категорию количества. Остальные же качества не только не сблизились с количеством, но еще больше отдалились от него. Об этом свидетельствует субъективистская трактовка так называемых вторичных качеств в философии XVII–XVIII вв.

Следующий этап в развитии представлений о количестве и его месте в системе категорий связан с немецкой классической философией, в центре внимания которой оказались те качества, которые в ходе развития математического естествознания XVII–XVIII вв. получили выражение в терминах количества. Категориальный анализ этих «количественных» качеств (или «качественных» количеств) был осуществлен И. Кантом и Г.В.Ф. Гегелем при помощи понятийной пары «интенсивное и экстенсивное количество» (величина).

Интенсивная и экстенсивная величина (Кант)

Согласно Канту, во всяком явлении (вещи субъекту) следует различать два аспекта — *простое восприятие* и *созерцание*[1]. Каждому из этих аспектов соответствует свой вид непрерывной величины: *восприятию* явления соответствуют интенсивные величины, а его *созерцанию* — экстенсивные[2]. Следуя порядку, которого придерживался Кант, начнем с естественных для математики экстенсивных величин.

Первое основоположение аналитики Кант сформулировал в виде *аксиомы созерцания* — «*все созерцания суть экстенсивные величины*», — сопроводив его следующим «доказательством»:

«Все явления по своей форме содержат некоторое созерцание в пространстве и времени, a priori лежащее в основе их всех. Поэтому они могут быть схвачены, т.е. восприняты в эмпирическое сознание, не иначе как посредством синтеза многообразного, который создает представления об определенном пространстве или времени, т.е. посредством *сложения однородного* (курсив мой. — *Е.З.*) и осознания синтетического единства этого многообразного (*однородного*). Но осознание многообразного *однородного* в созерцании вообще [...] есть понятие величины (quanti). Следовательно, даже восприятие объекта как явления возможно лишь посредством того именно синтетиче-

---

[1] *Кант И.* Критика чистого разума (пер. Н. Лосского). М., 1994 (Кн. 2, гл. 2, разд. 3: Системы основоположений чистого рассудка).

[2] «Все явления вообще суть величины непрерывные — экстенсивные величины с точки зрения их созерцания, интенсивные величины с точки зрения одного лишь восприятия». Там же. С. 140.

ского единства многообразного [содержания] данного чувственного созерцания, посредством которого мыслится единство сложения многообразного *однородного* в понятии *величины;* иными словами, все явления суть величины, и притом *экстенсивные величины,* потому что как созерцания в пространстве или времени они должны быть представляемы посредством того синтеза, которым определяются пространство и время вообще».

Вслед за «доказательством» следует развернутое определение «экстенсивной величины»:

«Экстенсивной я называю всякую величину, в которой представление о целом делается возможным благодаря представлению о частях (которое поэтому необходимо предшествует представлению о целом). Я могу себе представить линию, как бы мала она ни была, только проводя ее мысленно, т.е. производя последовательно все [ее] части, начиная с определенной точки, и лишь благодаря этому создавая ее образ в созерцании. То же самое относится и ко всякой, даже малейшей, части времени. Я мыслю в нем лишь последовательный переход от одного мгновения к другому, причем посредством всех частей времени и присоединения их друг к другу возникает наконец определенная величина времени. Так как чистое созерцание во всех явлениях есть или пространство, или время, то всякое явление как созерцание есть экстенсивная величина, ибо оно может быть познано только посредством последовательного синтеза (от части к части) в схватывании. Уже поэтому все явления созерцаются как *агрегаты* (*множества заранее данных частей*) (курсив мой. — *Е.З.*), что, однако, имеет место не для всякого рода величин, а только для тех, которые представляются и схватываются нами как *экстенсивные*»[1].

Таким образом, экстенсивной называется величина, которая характеризуется составленностью из однородных частей. Иными словами, это такая величина, которая, как целое, конструируется из своих частей и, таким образом, полностью исчерпывается их совокупностью. Именно это свойство (аддитивность в строгом математическом смысле) и делает возможным созерцание экстенсивных величин в формах протяженности (пространства и времени).

Что же касается интенсивных величин, то их наличие является условием, или, как выражается Кант, антиципацией (простого) восприятия: «*Реальное, составляющее предмет ощущения, имеет во всех явлениях интенсивную величину, т.е. степень*». Этому тезису дается следующее «доказательство»:

[1] Там же. С. 135–136.

«Восприятие есть эмпирическое сознание, т.е. такое сознание, в котором есть также ощущение. [...] Схватывание исключительно посредством ощущения наполняет *только одно мгновение* (курсив мой. — *Е.З.*) [...]. Стало быть, ощущение как нечто такое в явлении, схватывание чего не есть последовательный синтез, идущий от частей к целому представлению, не имеет экстенсивной величины [...]» Тем не менее ощущение «все же имеет некоторую величину [...]», которая характеризуется тем, что ее «схватывание [...] не идет от частей к целому»[1]. Ее Кант и называет интенсивной величиной или степенью, приводя в качестве примера (красный) цвет, теплоту, (момент) тяжести, скорость.

Интенсивная величина является, таким образом, противоположностью экстенсивной: это есть некоторое целое, которое не составлено из частей и которое, соответственно, не обладает аддитивностью. Целостность интенсии связана, как отмечает Кант, с мгновенным характером (простого) восприятия, в котором явление схватывается сразу и целиком, а не посредством последовательного присоединения одной части к другой, как это происходит в созерцании.

С точки зрения кантовских определений, из двух видов величин только экстенсивные величины являются предметом «математики протяженности (геометрии) с ее аксиомами, a priori выражающими условия чувственного созерцания, при которых только и может осуществляться схема чистого понятия внешнего явления [...].[2]» Что же касается интенсивных величин, то поскольку они сами по себе не входят в сферу созерцания, их математическое представление является проблематичным.

Противопоставляя интенсивные и экстенсивные величины, Кант, однако, признает, что наличие интенсивности является реальностью в том смысле, что соответствующие качества *объективно* воздействуют на органы чувств. Иными словами, они создают в восприятии некоторый «образ», который затем может получить оформление в терминах экстенсивных величин (когда к восприятию подключается созерцание). Между интенсивной и экстенсивной величинами есть таким образом отношение первого (в восприятии) и последую-

[1] Там же. С. 138–139. Ср. из рукописного архива Канта: «Величина чего-либо, если оно представлено как множество, экстенсивна; [а если представлено] как единство — интенсивна. Пространство и время экстенсивны. Скорость интенсивна». *Kant I.* Gesammelte Schriften. Bd. 18. Berlin; Leipzig, 1928. S. 241 (N 5587).

[2] «[И]менно благодаря этому основоположению чистая математика со всей ее точностью становится приложимой к предметам опыта...». *Кант И.* Критика чистого разума. С. 137.

щего (в созерцании). В принципе, если удается «перевести» некоторую интенсивную величину (восприятия) в экстенсивную величину (созерцания), то тем самым эта интенсивная величина становится опосредованным образом доступной математическому анализу. В опубликованных работах Канта указанный ход мысли не получил достаточного развития. Однако его следы отчетливо обнаруживаются в его рукописном наследии. Среди тезисов, относящихся к понятиям интенсивной и экстенсивной величины, мы встречаем, например, следующее пожелание: «И все же, *все* интенсивные величины *должны* быть, *в конечном счете*, сведены к экстенсивным [величинам]» (курсив мой. — *Е.З.*)[1].

Интенсивное и экстенсивное количество (Гегель)

В отличие от Канта Гегель сосредоточил внимание на единстве понятий интенсивного и экстенсивного количества[2]. Вопрос о соотношении двух видов количества смыкается в гегелевской системе с главной проблемой философии природы (как ее понимал Гегель) — показать в категориальных терминах процесс «свободного самоотпускания» духа в инобытие природы. Интенсивность в рамках этого процесса выражала существенный момент со стороны (непротяженного) духа, а экстенсивность была существенным свойством его (протяженной) природной ипостаси. Основное положение, сформулированное Гегелем относительно связи между интенсией (духа) и экстенсией (природы), состояло в том, что «интенсивность без экстенсивности отношений есть бессодержательная абстракция, ибо экстенсивность составляет *наличное бытие* (Dasein) интенсивности»[3].

В рамках данной статьи нет возможности детального обсуждения тех формальных определений, которые Гегель дает понятиям

---

[1] *Kant I.* Gesammelte Schriften. Bd. 18. S. 242 (N 5590).

[2] Ранее идея единства интенсивного и экстенсивного количества была сформулирована И.Г. Фихте: «Сообразно этому, интенсивность и экстенсивность связаны синтетически, и необходимо отказаться от попыток вывода одной [из них] без [вывода] другой. Всякая сила необходимо наполняет (не сама по себе, [ибо] она не принадлежит пространству и является в себе (an sich), без внешнего проявления, вообще ничем, но посредством необходимым образом присущего ей следствия (Product), которое представляет собой синтетическое основание для объединения интенсивности и экстенсивности) некоторое место в пространстве; и само это пространство существует лишь как наполненное или ожидающее наполнения (zu erfüllende) этими следствиями». *Fichte J.G.* Grundriss des Eigenthümlichen der Wissenschaftslehre, in Rücksicht auf das theoretische Vermögen // Fichte J.G. Sämmtliche Werke. Bd. 1. Berlin, 1845/1846. S. 401.

[3] *Гегель Г.В.Ф.* Философия духа // Гегель Г.В.Ф. Сочинения. Т. 4. М., 1959. С. 155.

интенсивного и экстенсивного количества. В этом нет, впрочем, особой необходимости, ибо и сам Гегель полагал, что понятия по-настоящему наполняются содержанием, когда участвуют в конкретике своего использования. Поэтому мы обратимся непосредственно к примерам «конкретизации» интенсий при помощи экстенсий, содержащимся в гегелевских работах. Эти примеры Гегель заимствует, в основном, из областей, охваченных математизацией в XVII–XVIII вв. Характерно, что в большинстве из них Гегель выстраивает аргументацию в одном направлении — от интенсии к экстенсии (хотя его концепция предполагает, что природа в итоге поднимается до уровня духа). Это неудивительно, ибо для Гегеля интенсия духа первична, а протяженная природа, являющаяся моментом его саморазвития, вторична.

Приведем некоторые из этих примеров. «Оказывающая давление масса» есть интенсивная величина («*степень* давления»), которая может быть измерена «известной численностью фунтов, которую она способна сдвинуть с места», т.е. величиной экстенсивной. Другой пример относится к теплоте, которая «имеет некоторый *градус*, но этот градус существует также и как *экстенсивная* величина, как расширение некоторой жидкости, например ртути в термометре; [...] более высокая степень температуры выражается как более длинный ртутный столбик... (кроме того), она нагревает большее пространство таким же образом, как меньшая степень температуры нагревает лишь меньшее пространство». Или по отношению к звуку: «Более высокий *тон* как более *интенсивный* есть вместе с тем *бóльшее число* колебаний; [...] более громкий тон, которому приписывается более высокая *степень*, слышен в более обширном пространстве». Аналогично дело обстоит и с интенсивностью цвета: «Более интенсивной *краской* можно окрасить одинаковым образом бóльшую поверхность, чем более слабой краской; [...] *более светлое*, представляющее собой другой вид интенсивности, видно далее, чем менее светлое, и т.д.»[1].

Закончив перечень примеров, посвященных «конкретизации» интенсивного в экстенсии природы, Гегель замечает, что аналогичный «переход» совершается и на следующей ступени развития духа, когда тот отпускает себя в инобытие человеческой культуры: «Равным образом и в области *духовного высокая интенсивность* характера,

[1] *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики // Сочинения Т. 5. М., 1937. С. 247. Только в одном из примеров интенсивной величине — давлению, создаваемому некоторой массой, предшествует экстенсивная величина — вес этой массы, выраженный в фунтах, центнерах и т.д.

таланта, гения имеет соответственно *широкий* охват, соответственно *широкое* действие и *многосторонние* соприкосновения»[1]. Завершает изложение этой темы указание на общелогический характер «конкретизации» интенсивного в экстенсии: «*Наиболее глубокое* понятие обладает *наиболее общим* применением и значением»[2]. Разнообразие сфер, в которых проявляется взаимный переход интенсивного и экстенсивного количества, свидетельствует о том, что диалектика двух видов количества занимает в гегелевской категориальной схеме особое место, сопоставимое по значимости с диалектикой дискретного и непрерывного (которой значительно больше повезло в учебниках философии).

Гегелевская идея «конкретизации» интенсивного посредством экстенсивного, преодолев границы спекулятивной метафизики (куда она попала из математического естествознания), получила практическое применение в политической экономии К. Маркса. Анализируя понятие стоимости, Маркс пришел к выводу, что это понятие, которое по своей природе является интенсивным — ибо условием превращения вещи в товар является наличие у нее потребительных качеств — получает свою конкретизацию во временной экстенсии — *продолжительности* простого (неквалифицированного) труда.

Заключение

Односторонность гегелевской диалектики интенсивного и экстенсивного количеств проявляется в игнорировании реального исторического процесса, приведшего сначала к необходимости различения, а затем синтеза этих понятий. Тексты соответствующих разделов «Науки логики» и «Энциклопедии философских наук» создают впечатление, что единство интенсивного и экстенсивного количества, например температуры и длины ртутного столбика в термометре, есть некоторая абсолютная, т.е. внеисторическая данность, смысл которой — именно потому, что она вне истории — может и должен быть раскрыт исключительно средствами логического анализа. Преодолению односторонности этой точки зрения посредством «выхода» в реальную историю становления понятий экстенсивного и интенсивного количества и посвящена эта статья.

Хорошим дополнительным аргументом в пользу представленной в ней позиции было бы конкретное историко-научное исследование,

---

[1] Там же. С. 247–248. Ср.: *Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук. Т. 1 (Наука логики). § 103. М., 1974. С. 251.

[2] Ср. там же. С. 249–251.

показывающее, что ртутный термометр, на который ссылается Гегель, в принципе не мог быть создан ни в Античности, ни в Средние века. Ибо таковой является специфическим продуктом переворота, произошедшего в научно-философском сознании в Новое время.

Библиографический список

Августин Аврелий. О Троице (пер. А.А. Тациана). Краснодар, 2004.

Аристотель. Сочинения: В 4 т. М., 1976–1984.

Гегель Г.В.Ф. Сочинения: В 14 т. М., 1929–1959.

Гегель Г.В.Ф. Энциклопедия философских наук. Т. 1 (Наука логики). М., 1974.

Кант И. Критика чистого разума (пер. Н. Лосского). М., 1994.

Ashworth E.J. Medieval Theories of Analogy // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2013 Edition). E.N. Zalta (ed.). URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/analogy-medieval/>.

Clagett M. Richard Swineshead and Late Medieval Physics // Osiris 1951. Vol. 9. P. 131–161.

Davenport A.A. The Catholics, the Cathars and the Concept of Infinity in the Thirteenth Century // Isis. 1997. Vol. 88. P. 262–295.

Duhem P. Études sur Léonard de Vinci (3 Vols.). Vol. 3. Paris, 1955.

Duhem P. Sauver les phénomènes. Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. Sozein ta phainomena. Paris, 2005.

Fichte J.G. Grundriss des Eigenthümlichen der Wissenschaftslehre, in Rücksicht auf das theoretische Vermögen // Fichte J.G. Sämmtliche Werke. Bd. 1. Berlin, 1845/1846.

Kant I. Gesammelte Schriften. Bd. 18. Berlin; Leipzig, 1928.

Kleinschmidt E. Die Entdeckung der Intensität. Geschichte einer Denkfigur im 18. Jahrhundert. Göttingen, 2004.

Maier A. Zwei Grundprobleme der scholastischen Naturphilosophie. 3. Aufl. Roma, 1968.

Richard Fishacre. Commentarium in Librum Sententiarum (Dist. 2 Cap. 1) / Ed. Charles J. Ermatinger // The Modern Schoolman. 1958. Vol. 35. P. 213–235.

Solère J.-L. The Question of Intensive Magnitudes According to Some Jesuits in the Sixteenth and Seventeenth Centuries // The Monist. 2001. Vol. 84 (4). P. 582–616.

Sylla E.D. The Oxford Calculators and the Mathematics of Motion, 1320–1350: Physics and Measurement by Latitudes. N.Y., 1991.

А.А. Крушинский

КОМПОЗИЦИОНАЛЬНОСТЬ КАК ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МАТЕМАТИЗАЦИИ

Под «композициональностью» я имею в виду обычно возводимый к Г. Фреге семантический принцип, согласно которому значение сложного языкового выражения детерминируется — находится в функциональной зависимости от значений образующих его составляющих. Очевиден конструктивистский пафос подобной семантической комбинаторики, конструирующей все мыслимые значения с помощью композиции в некотором смысле более первичных значений.

Похоже, что от степени реализации принципа композициональности тем или иным типом естественного языка (имеется в виду письменный аспект языка) напрямую зависит предрасположенность к математизации соответствующей языковой картины мира. Наблюдается четкая корреляция между непоследовательным (мягко говоря) проведением принципа композициональности языками, опирающимися на алфавитное письмо и достаточно вымученной математизацией отвечающих им представлений о действительности, с одной стороны, и тотальной математизацией традиционной китайской языковой картины мира, в значительной мере предопределенной спецификой китайского иероглифического письма, методически осознанно руководствовавшегося указанным принципом — с другой.

Дело в том, что колоссальные оперативные преимущества фонетического письма достигнуты ценой отказа от принципа композициональности уже на базовом уровне перехода от отдельных букв к образуемым из них элементарнейшим композициям. В самом деле, первичные единицы текста, а именно **буквы**, по самой своей природе не обладают никаким собственным смыслом (являясь знаками знаков, они предназначены для обозначения фонем), а потому осмысленность буквенной транскрипции минимальной смысловой единицы (морфемы) есть результат композиционально не мотивированной конвенции. Иными словами, речь здесь идет не более чем об условной[1] письменной фиксации некоего осмысленного (в силу

[1] «Символической» в общепринятой ныне терминологии Ч.С. Пирса.

весьма далеких от прозрачности исторических обстоятельств) набора звуков.

Само собой напрашивающейся экстралингвистической проекцией подобного символического означивания оказывается представление о бесструктурном объекте/хаотичном наборе таких объектов в качестве естественного референта семантически неразложимого первичного единства звука и смысла (каковым выступает морфема, взятая в своей номинативной функции). Таким образом, интуиция понятия класс/принадлежность к классу в мереологическом (собирательном) или стандартном ныне разделительном смысле коренится в индивидуирующем характере референции общих терминов[1]. Хотя эта лингвистически мотивированная интуиция, закономерно породившая в свое время силлогистику и родовидовую схематику, была со временем математизирована, тем не менее, по справедливому наблюдению Э. Кассирера, попытка редукции центрального для математического мышления понятия числа к «логическому» понятию класса «является, в конце концов, тонкой и последовательно проведенной попыткой овладеть с помощью всеобщего схематизма родовых понятий проблемой, которая по своему значению и объему принадлежит новой предметной области и предполагает иное понятие о познании»[2].

Показательна стойкая нерасположенность мейнстрима европейской словесной культуры к математической образности как возможной альтернативе вербальному мышлению (инспирированный египетской — в том числе иероглифической — мудростью пифагореизм скорее маргинален для вербально центрированной античности[3]). Эра господства античной риторики, так же, как и период засилья средневековой схоластики, — вплоть до эпохи Возрождения и галилеевского откровения насчет математизированности «Книги природы» — прошли под знаком риторической рациональности и аристотелевской логики.

Уже в Новое время крайне негативная позиция Г. Гегеля в отношении математической символики как постоянного конкурента философскому логосу четко увязывалась им с противостоянием иероглифического и фонетического письма (постоянной мишенью его

[1] См., например, многочисленные работы У.В.О. Куайна, посвященные проблемам квантификации, референции общих терминов и естественноязыковым предпосылкам теоретико-множественной парадигмы.

[2] *Кассирер Э.* Познание и действительность (Понятие о субстанции и понятие о функции). СПб., 1912. С. 76.

[3] Прекрасное введение в «риторическую рациональность» можно найти у такого знатока античности, как С.С. Аверинцев (См., например, его «Древнегреческую поэтику и мировую литературу»: введение // Поэтика древнегреческой литературы. М., 1981. С. 3–14. Особенно: *Аверинцев С.С.* Риторика как подход к обобщению действительности // Там же. С. 15–46.

критики становится Г. Лейбниц в качестве автора проекта универсального письма нефонетического типа)[1]. Примечательно, что великий диалектик усматривал одно из серьезных преимуществ буквенного письма над «аналитичностью» (т.е. композициональностью. — *А.К.*) идеограмм[2] как раз в принципиальной некомпозициональности буквенного представления слов естественного языка (т.е. в семантической бесструктурности и потому немотивированности имен)[3].

Гегель в этой своей заочной полемике с Лейбницем прямо ссылается на китайские реалии (триграммы/гексаграммы, по-китайски

---

[1] «Лейбница привлекала идея в совершенстве разработанного графического языка, созданного по иероглифическому способу, что, частично правда, имеет место и при буквенном письме (как и в наших знаках чисел, планет, химических веществ и т.п.); он считал его весьма желательным в качестве всеобщего языка для сношений между собой народов, и особенно ученых. Следует предполагать, однако, что общение народов (которое, быть может, происходило уже в Финикии и в настоящее время происходит в Кантоне, см. Путешествия Макартнея из Стаунтона) вызвало скорее потребность в буквенном письме и возникновение именно этого последнего» (*Г.В.Ф. Гегель.* Философия природы. § 459. М., 1977. Т. 3. С. 297).

[2] Опять-таки в четкой конфронтации с таким приверженцем идеалу рациональной комбинаторики, каковым был Г. Лейбниц, естественно стоявший на позициях последовательного так сказать «композитивизма»: «Мне же, беспокойному, уже давно со всей очевидностью представилось и нечто более важное, а именно что все человеческие мысли вполне разрешаются на немногие, как бы первичные; что если бы этим последним были поставлены в соответствие характеры, то из них могли бы образовываться характеры производных понятий» («Основы исчисления рассуждений» // Г.В. Лейбниц. Соч.: В 4 т. М., 1984. Т. 3. С. 502).

[3] «Да и вообще нельзя мыслить себе единого всеобъемлющего готового иероглифического письма. Чувственные предметы допускают, правда, фиксированные знаки, но по отношению к знакам духовной сферы ход образования мыслей, прогрессирующее логическое развитие влекут за собой изменение воззрения на внутренние отношения мыслей и тем самым на их природу, так что в связи с этим потребовалось бы другое иероглифическое определение знаков. В самом деле, ведь и знаки чувственно воспринимаемых предметов, их наименования в звуковом языке часто меняются, как, например, относительно предметов химии и минералогии. Когда забыли, что представляют собой **имена как таковые**, а именно, что **сами по себе они есть *лишенные всякого смысла внешности*, лишь в качестве *знаков* приобретающие известное значение,— тогда вместо настоящих имен стали требовать выражения своего рода дефиниций** (выделено жирным мной. — *А.К.*). Эти дефиниции в свою очередь зачастую образовывали произвольно и случайно, и тогда стало изменяться и обозначение, т.е. только связь знаков родового определения или других свойств, долженствующих быть характерными, в зависимости от различия взгляда на этот род или какое-либо другое свойство, долженствующее иметь специфическое значение. Только застойности китайской духовной жизни подходит иероглифический язык этого народа. Этот род книжного языка, кроме того, может быть уделом лишь незначительной части народа, считающей себя исключительной носительницей духовной культуры» (там же. С. 297–298).

именуемые «гуа», и образующие их два вида черт — непрерывная и один раз прерванная): «Имя есть простой знак для подлинного, т.е. простого, не разложимого на свои определения и не сложенного из них, представления. Иероглифический знак возникает не из непосредственного анализа чувственных знаков, подобно буквенному письму, но из предшествующего анализа представлений. Отсюда легко приходят затем к мысли, что все представления могут быть сводимы к их элементам, к простым логическим определениям, так что из избранных для этой цели элементарных знаков (как у китайских гуа — простая прямая и на две части разделенная черта) через их соединение и мог образоваться язык иероглифов. Этот факт аналитического обозначения представлений в иероглифическом письме, побудивший Лейбница признать это письмо более совершенным, чем письмо буквенное, скорее представляет собой то, что противоречит основной потребности языка вообще, имени — потребности иметь для непосредственного представления,— которое, как бы богато ни было заключенное в нем содержание, для духа в имени является простым,— также и простой непосредственный знак. Этот знак сам по себе не дает повода для мышления и должен лишь обозначать и чувственно представлять простое представление как таковое»[1].

Подобная адресация к символизму «Канона Перемен» (*Ицзин*) далеко не случайна и продиктована тем удельным весом, который занимает в логико-семиотических размышлениях Лейбница тема двоичного счисления, неотразимо убедительно репрезентируемого, по его мнению, именно этим экзотическим символизмом[2].

---

[1] Там же. С. 299.

[2] Великий немецкий математик и философ был потрясен возможностью представления 64 гексаграмм «Канона Перемен» как последовательности 64 натуральных чисел (от нуля до 63), записанных в открытой им двоичной системе счисления. В работе с красноречивым названием «ОБЪЯСНЕНИЕ ДВОИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, употребляющего лишь символы 0 и 1, с замечаниями о пользе его и о том, что оно открывает смысл древних китайских начертаний Фуси» (Мемуар Наук, 1703) Лейбниц писал: «Что поразительно в этом исчислении, это то, что данная арифметика, основанная на 0 и 1, заключает, оказывается, в себе тайну черточек древнего царя и философа по имени Фуси, который, как полагают, жил более четырех тысяч лет тому назад и которого китайцы считают основателем их государства и их наук. Существуют различные линейные начертания, которые ему приписываются; все они сводятся к этой арифметике, но здесь достаточно привести схему “восьми *гуа*”, как ее называют, которая считается основополагающей, и дать к ней объяснение, которое очевидно, если принять прежде всего условие, что целая черта (-----) означает единицу, или 1, и что, во-вторых, прерванная черта (-- --) означает нуль, или 0... Итак, поскольку в Китае считают, что Фуси является также создателем китайских иероглифов, хотя и сильно изменившихся с течением времени, его достижение в арифметике позволяет судить, что здесь вполне могло содержаться еще кое-что значительное,

Враждебность арифметики и понятийного мышления — одна из ведущих тем гегелевской семиологии, увязывающей понятийность/логос исключительно с буквенным письмом: именно отсюда его постоянная критика математизма (отождествляемого им с формальной рассудочностью), пифагореизма и всякой иероглифичности (олицетворяемой Лейбницем с его амбициозным замыслом математизации языка — а тем самым и мысли[1] — плюс эксцентричной синофилией). «Было бы далее излишним и неблагодарным трудом пользоваться для выражения мысли таким неподатливым и неадекватным материалом, как пространственные фигуры и числа, и насильственно трактовать этот материал так, чтобы он подходил для этой цели. Простейшие первые фигуры и числа могут, не вызывая недоразумений, быть применены в качестве символов благодаря их простоте; они, однако, всегда оказываются для мысли чужеродным и малоудовлетворительным способом выражения. Первые попытки чистого мышления прибегали к этому крайнему средству: *пифагорейская* система чисел является знаменитым примером такого применения. Но для выражения более богатых понятий эти средства оказываются совершенно недостаточными, так как внешний характер их сочетаний и случайность их связи делают их вообще неадекватными природе понятия и приводят к тому, что становится совершенно неясным, какие из многочисленных отношений, возможных в составных числах и фигурах, должны быть приняты нами во внимание. Да и помимо этого текучесть понятия выдыхается в таком внешнем материале, в ко-

---

касающееся чисел и идей» (*Лейбниц Г.В.* Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления (Предисловие, переводы и примечания В.М. Яковлева). М., 2005. С. 210, 212).

[1] «Для введения универсального исчисления необходимо придумать для каждого термина характеристический знак, так чтобы из последующей связи знаков сразу же можно было установить истинность предложений, построенных из этих терминов. Наиболее удобными знаками я считаю числа. Характеристические числа каждого данного термина образуются в том случае, когда характеристические числа терминов, из которых складывается понятие данного термина, будучи помноженными друг на друга, производят характеристическое число данного термина» (Исследования универсального исчисления // Г.В. Лейбниц. Соч.: В 4 т. М., 1984. Т. 3. С. 533); «...даст нам даже полную свободу поиска новой характеристики, которая предстанет вытекающей из характеристики Фуси и положит начало анализу идей и тому удивительному логическому исчислению (calcul de raison), план которого у меня есть... Характеристика, которую мы сможем построить на этой основе и которая **свяжет идеи с числами** (выделено мной. — *А.К.*), будет обладать одновременно тем достоинством, что ими (идеями) можно будет оперировать, как и числами, и это превосходит все, что можно было ожидать в этой области и что немало людей полагали — не без видимого основания — невозможным» (Лейбниц — И. Буве (Берлин, 18 мая 1703 г.) // Лейбниц Г.В. Письма и эссе о китайской философии и двоичной систем исчисления. С. 173).

тором каждое определение впадает в равнодушную внеположность. Вышеуказанная сомнительность могла бы быть устранена только посредством *объяснения*. Но тогда существенным выражением мысли явится это объяснение и математическая символика окажется бессодержательным излишеством»[1].

Китайская традиция занимает совершенно иную, нежели западная мысль (типичным представителем которой в нашем случае выступает Гегель), позицию в кардинальном вопросе взаимоотношений математической (в частности, числовой) образности и понятийного мышления. Достаточно рано сложившийся в Китае стиль мышления основывается на первенстве пространственно-образных когнитивных стратегий над вербальным мышлением, когда первые фактически выступают в качестве исторически реализованной логико-методологической альтернативы традиционной западноевропейской рациональности.

Принципиальная ограниченность речевого мышления является одной из стержневых интуиций китайской логико-методологической мысли. Ее эксплицитную формулировку («письменная фиксация речи[2] не исчерпывает речей, а речи не исчерпывают помыслов» *шу бу цзинь янь, янь бу цзинь и* 書不盡言，言不盡意), утверждающая, во-первых, неадекватность самой устной речи в качестве средства выражения мысли, а во-вторых, — неспособность ее письменной фиксации передать всю полноту исходного речевого содержания, можно найти уже в *ицзиновском* «Комментарии привязанных слов»[3].

Согласно сердцевинной для конфуцианского Китая идеологии *Ицзина* именно **образы**[4] (*сян* 象), а отнюдь не устная речь, являются единственным адекватным средством выражения несказанно глубоких идей, помысленных совершенными мудрецами древности. «Учитель (т.е. Конфуций. — *А.К.*) сказал: “Письменная фиксация речи не

---

[1] *Гегель Г.В.Ф.* Философия природы. § 259. Т. 2. С. 57–58.

[2] Под «письменной фиксацией речи» (*шу* 書) имеется в виду иероглифика, уже утратившая (к моменту написания «Комментария привязанных слов») свою первоначальную пиктографически-идеографическую самодостаточность и превратившаяся в инструмент записи устной речи.

[3] Пожалуй, наиболее известной и авторитетной формулировкой контраста между самоудостоверительностью природных образов и недостоверностью вербального дискурса (скорее затемняющего, чем проясняющего), где подчеркивается превосходство так сказать «показа» над «рассказом», является пассаж из конфуциевых «Бесед и суждений», в котором он заявляет о своем нежелании продолжать устные наставления (予欲无言). Его мотивация: «Разве Небо говорит? Четыре времени года действуют благодаря ему, сотни вещей рождаются благодаря ему. Разве Небо говорит? (*Тянь хэ янь цзай. Сыши син янь, байу шэн янь. Тянь хэ янь цзай.* 天何言哉。四時行焉，百物生焉。天何言哉). *Луньюй чжэньи* («Беседы и суждения» в ортодоксальном понимании) // ЧЦЦЧ. Т. 1. Пекин, 1988. С. 379.

[4] Причем числа трактуются здесь как «предельные образы» (*чжи сян* 至象).

исчерпывает речей. Речи не исчерпывают помыслов". Раз так, то получается, что (из-за отсутствия адекватного средства выражения. — *А.К.*) [смыслы] помысленные совершенномудрыми не смогут быть восприняты? Учитель сказал: "Совершенномудрые установили образы для исчерпания [помысленных ими] смыслов. Расположили триграммы и гексаграммы для исчерпания действительности и фальши[1]. Сопроводили их словесными формулировками для исчерпания, того что может быть сказано о них..."»[2].

Тем самым ранней китайской мыслью было решено, что глубочайший смысл передается только посредством образно-наглядного представления и конструирования. При этом письменной фиксации устной речи совершенно недвусмысленно отводится лишь второстепенная роль комментария к неисчерпаемой смысловой глубине образов, безоговорочно первенствующих в качестве средства передачи важнейших смыслов культуры.

Понятно, что в случае идеографии (образующей ядро к настоящему времени семиотически достаточно неоднородной китайской иероглифики), где идеограммы отсылают непосредственно к объектам или понятиям и практически каждому графическому элементу плана выражения отвечает семантическая единица плана содержания, именно условие композициональности выступает исходным и решающим конструктивным принципом. Поскольку главнейшей функцией идеограммы является или структуризация хотя и изображаемой ей, но существующей до и независимо от нее предметности, или же перформативное порождение отвечающей ей, так сказать, «рукотворной» предметности, постольку композициональная структура идеограммы с необходимостью транслируется в оба указанных типа предметности.

Прозрачный пример подобной трансляции графической композиции в социально-политическую реальность дает принадлежащая *Дун Чжуншу* (II в. до н.э.) каноническая трактовка иероглифа 王 (*Ван*, Царь) согласно которой Царь (представляемый вертикальной чертой графемы 王) является тем **единственным** из людей, кто, пронизав со-

---

[1] «Действительность и фальшь» суть взаимопротивоположные характеристики, с одной стороны, контрастирующих друг с другом гексаграммных **позиций**, а с другой — двух видов **черт**, которые могут занимать эти позиции. Всевозможные графические конфигурации, образуемые взаимодействием этих двух факторов (т.е. гексаграммных позиций и гексаграммных черт), представляют собой исчерпывающее картографирование пространства человеческих судеб — траекторий рождений и смертей, проклятий и благословений, побед и поражений, возвышений и падений».

[2] *Чжоу И чжэньи* (*Чжоу И* в ортодоксальном понимании) // ШСЦЧШ. Т. 1. Шанхай, 1935. С. 82.

бой Небо, Землю и Человека (изображаемых тремя горизонтальными чертами 三 анализируемой идеограммы), сводит их в единое целое.

Нормативное пространственное взаиморасположение частей графемы (только что проиллюстрированное случаем с графемой 王) играет ведущую роль в идеографической артикуляции идеи «правильности», взыскуемой центральной для конфуцианской логико-методологической (равно как и социально-политической) мысли стратегией «выправления имен». Впечатляющее раскрытие композиционального ракурса данной стратегии (когда правильность целого детерминируется нормативной композицией отдельных частей этого целого) мы обнаруживаем в послании, закодированном графикой гексаграммы № 37 **Домашние** 家人, которая имеет следующий вид: .

Она представляет собой криптографическое изображение картины идеальных семейных отношений, равно как и рекурсивного процесса выстраивания на базе образцовой (т.е. минимальной) социальной общности устойчивого социального бытия. Образы правильной внутрисемейной иерархии визуализируются взаиморасположением гексаграммных черт (непрерывная пятая черта изображает супруга, а прерванная вторая черта — супругу) и пары триграмм (нижняя триграмма *Ли* ☲ обозначает среднюю дочь, а верхняя триграмма *Сюнь* ☴ — старшую), составляющих рассматриваемую гексаграмму. Супруг (пятая черта) главенствует над супругой (второй чертой)[1], а старшая из сестер, как ей и подобает — высится над средней сестрой (ведь триграмма *Сюнь* ☴ располагается **над** триграммой *Ли* ☲).

Что касается сына, то в ицзиновском символизме ему отвечает третья гексаграммная позиция. В анализируемой гексаграмме в третьей (т.е. нечетной) позиции стоит непрерывная (т.е. нечетная же черта), а совпадение четности позиции с четностью занимающей ее черты выражает идею соответствия поведения сына его семейному статусу[2].

Как видим, важнейшим средством изображения иерархичности (в данном случае — внутрисемейной) служат пространствен-

---

[1] Графически это доминирование изображается тем, что пятая черта располагается выше второй черты.

[2] Эта согласованность/рассогласованность *инь/янского* характера черты с четностью той позиции, которую она занимает, именуется «уместностью/неуместностью триграммно/гексаграммной черты» соответственно. Руководящая идея **правильности** (*чжэн* 正) — сквозная для всей проблематики выправления имен — артикулируемая как раз посредством представления об «уместности/неуместности черты» — проецируется здесь в наглядный графический образ неукоснительного соблюдения всеми членами семьи (репрезентируемыми триграммами и гексаграммными чертами), предписанного совершенномудрыми и освященного традицией семейного порядка.

ные отношения верха/низа, а ведущее для всей китайской логико-методологической проблематики «выправления имен» понятие **правильности** (как соразмерности номинального реальному) репрезентируется посредством представления об уместности/неуместности триграммно/гексаграммных черт — предельно наглядной визуализации этой идеи адекватности/неадекватности.

Итак, «правильность» семьи изображается в графеме правильной композицией ее отдельных составляющих (репрезентирующих различных членов семьи): «В [гексаграмме] **Домашние** женщина занимает правильную позицию во внутренней [триграмме], а мужчина — правильную позицию во внешней. <...> Среди домашних имеются авторитарные правители — это отец и мать. [Когда] отец — отец, сын — сын, старший брат — старший брат, младший брат — младший брат, супруг — супруг, супруга — супруга, тогда *Дао* семьи правильно»[1].

Еще немного о стратегии «выправления имен» в связи с гексаграммой **Домашние**. Прежде всего поясню смысл установки на «выправление имен». Обеспечение «правильности», т.е. адекватности, термов, заявленное уже самим названием рассматриваемой концепции *чжэн мин* — «выправление имен», осознавалось и декларировалось китайскими мыслителями в качестве главнейшего требования к **введению** социально значимых **предметностей**. Ведь, по словам Конфуция, «если имена неправильны, то и речи некстати; а если речи некстати, то и дела неблагоуспешны»[2].

Здесь следует особо отметить один принципиальнейший момент: в учении о «выправлении имен» имеется в виду не столько тривиальное соответствие обозначающего знака обозначаемому им объекту или положению вещей в духе теории отражения, а скорее нечто совершенно противоположное. Выдвигается требование приведения к исполнению и осуществлению того предписания, которое закодировано самим графическим устройством терма и направлено на реализацию конструкции, подразумеваемой этим термом. Вектор направлен не от сущности, обозначаемой термом, к его значению, а ровно наоборот — от его значения к возникающей благодаря этому значению сущности. Цель так понимаемого именования не в пассивной регистрации уже каким-то образом существующего (до и независимо от всякого именования) бытия, а в **создании** бытия.

Наиболее отчетливо эта проективно-конструктивная нацеленность акта именования раскрывается в следующей лаконичной мак-

---

[1] *Туаньчжуань* к гексаграмме № 37 в *Чжоу И чжэньи* (*Чжоу И* в ортодоксальном понимании) // ШСЦЧШ. Т. 1. С. 50.

[2] *Луньюй чжэньи*. С. 283.

симе, которой Конфуций ответствовал на вопрос правителя царства *Ци* о правильном способе правления: «Правитель [должен быть] правителем, а подданный — подданным, отец [должен быть] отцом, а сын — сыном»[1]. Обратим внимание, что этот конфуциев императив представляет собой прямую отсылку к текстовому обрамлению обсуждавшейся выше гексаграммы **Домашние**. Отличительной чертой приведенного выше канонического предписания, неоднократно отмечавшейся исследователями, является достаточно отчетливо просматривающаяся **прескриптивная** компонента смысловой структуры высказывания/терма — требование коррекции социальной реальности в случае ее отклонения от той фактичности/предметности, которая подразумевается нормативной референцией высказывания/терма. Иначе говоря, движение направляется не от положения дел или объекта к изображающему его высказыванию/терму (что предполагается дескриптивностью), а наоборот — от структуры высказывания/терма (в свою очередь изображающей видение референта этого высказывания/терма создателями последнего) к реальности, которая должна (в директивном порядке) ему соответствовать[2].

Ясно, что само по себе понятие проекта, уже предполагает его реализацию, т.е. построение отвечающей ему реальности. Но почему конструирование оказывается возможным не только в математике, где оно вполне уместно и естественно, но и в главной сфере интересов древнекитайских мыслителей — в социально-этической и политической предметных областях? Ответ состоит в указании на такую своеобразную функцию языковых выражений, как их перформативность[3], когда само произнесение слова создает соответствующую реальность. Отмеченное своеобразие перформативных высказываний получило у Э. Бенвениста, который одним из первых осознал и описал этот феномен, название **аутореферентности** — способности языкового вы-

---

[1] Там же. С. 271.

[2] Как видим, предложенная Конфуцием внешне безобидная рекомендация «всего лишь» приведения в соответствие фактического положения дел (фактического поведения или статуса того или иного человека) нормативному наименованию этого положения дел (номинальному статусу данного человека — той или иной предписанной ему социальной роли) на самом деле была равносильна радикальному требованию **создания** новой (часто разительно отличной от современной «некоронованному царю») социальной реальности.

[3] Перформативные высказывания — это клятвы, присяги, завещания, обещания, извинения, приглашения, заключение сделки, объявления войны, открытие собраний, приказы и т.д. Например, высказывание «я клянусь» в отличие от утверждения «он клянется» не имеет истинностного значения потому, что смысл этого высказывания не есть утверждение о чем-то находящемся вне него, а то, о чем оно говорит, есть результат произнесения самой этой фразы. Таким образом, произнесение этой фразы не есть сообщение о чем-то, уже существовавшем до момента ее произнесения. Это некое действие, создающее новую реальность.

ражения соотноситься как со своим референтом с той реальностью, которую оно само же и создает[1]. Т.е. благодаря перформативным выражениям конструирование в определенном смысле становится возможным в достаточно далеких от математики предметных областях.

Как мы выяснили, конструирование вполне осуществимо и в области социокультурных и социально-политических предметностей. Вот только в качестве необходимой предпосылки успешности этого предприятия следует ужесточить требования к референции соответствующих социально-политических термов («имен»), представляющих собой своего рода строительные блоки, которыми оперирует правитель, возводя или, по крайней мере, упорядочивая вверенное ему хозяйство. Действительно, любые серьезные отклонения от предписанной, нормативной референции терма — если бы, например, словом «правитель» вздумали вдруг титуловать самозванца — в самой своей основе подрывают возможность того социального конструирования посредством формирования системы социальных ролей, за которую столь настоятельно ратовал Конфуций.

Яркое описание негативных последствий неправильного употребления имен содержится в следующем замечательном пассаже из «Весен и осеней господина *Люйя*»: «Представим себе, что некий человек, которому понадобился бы буйвол, стал [буйволом] именовать коня, а когда ему понадобился бы конь, стал [конем] именовать буйвола — несомненно, он не получил бы искомого. Если бы при этом он продолжал требовать с угрозами и гневом, то должностные лица начали бы роптать и огорчаться, и даже среди самих буйволов и коней возникли бы волнение и беспокойство. Чины царств и представляют собой этих должностных лиц, а тьма вещей подобна табуну буйволов и коней. Когда их имена неправильно [употребляются], когда их должностные обязанности четко не распределены, а наказания и штрафы применяются в избытке — нет хаоса большего, чем этот. Если о ком-то говорят как о мудром и понимающем, а на самом деле он исключительно рассеян и забывчив, если о ком-то идет молва как о возвышенном и достойном, а в действительности он подл и низмен, если кого-то восхваляют за целомудрие и чистоту, а между тем добродетель его весьма сомнительна, если кого-то назначают на должность, чтобы он блюл законы ради общего блага, а вместо этого он погрязает в корыстолюбии и злоупотреблениях, если кого-то берут на службу, предполагая за ним мужество и отвагу, а на поверку он оказывается малодушным и трусливым, то все эти пять случаев представляют собой явления того же порядка, что и казус с буйволами, превращающимися (в результате несоответствия между обозначением и обозна-

[1] *Бенвенист Э.* Общая лингвистика. М., 1974. С. 398.

чаемым. — *А.К.*) в коней, и конями, превращающимися (в результате несоответствия между обозначением и обозначаемым. — *А.К.*) в буйволов. [Это все издержки] неправильного [употребления], имен»[1]. Здесь стоит заметить, что правильность введения как социально-этических, так и всех прочих предметностей является центральной проблемой китайской логико-методологической мысли[2].

Когда же — при «неправильном именовании» — нарушается нормативность референции и термы перестают указывать на то, на что они должны указывать (например, референтом терма буйвол ошибочно оказывается конь), происходит подмена **базиса** индуктивного определения подразумеваемой предметности базисом индуктивного же определения совсем иной — зачастую совершенно нежелательной — предметности. Именно такой семантический казус описывается в приведенной выше намеренно абсурдной истории о коллизии интенции и ее исполнения, вызванной путаницей с референцией термов. Лицо, фигурирующее в этой истории, не получает желаемого, несмотря на свои неоднократные попытки. Почему? Потому что отказывает привычный механизм выражения подразумеваемой им предметности. Мы уже знаем устройство этого механизма (индуктивное определение) и поэтому легко можем найти то место, где происходит сбой. Это базисный пункт индуктивного определения.

В самом деле, изначально неверное исполнение интенции гипотетического персонажа — предоставление ему коня вместо желаемого им буйвола — как раз и означает, что в качестве исходного объекта берется объект, на самом деле **не** относящийся к подразумеваемой предметности. Все дальнейшие неудачные попытки незадачливого персонажа путем угроз и нажима получить желаемое (т.е. буйвола или буйволов) следует интерпретировать как реализацию индуктивного пункта индуктивного определения: добавление все новых экземпляров исходной предметности — лошадей. Т.е. как безуспешные усилия продвинуться дальше в построении искомой им предметности на основе неверно выбранного базиса (начальной ложной идентификации коня как буйвола). Иначе невозможно объяснить упор автора текста на процессуальность, растянутость во времени происходящего

---

[1] *Люй Бувэй. Люйши чуньцю* (Весны и осени господина *Люя*) // ЧЦЦЧ. 1988. Т. 6. С. 199.

[2] Объем общего терма (соответствующий «род» — *лэй* 類) в классическом китайском языке стандартно задается с помощью конструкции, которая с точки зрения современной логики идейно близка структуре фундаментального индуктивного определения. См. подробнее: *Крушинский А.А.* Логика Древнего Китая. М., 2013. Простейшим примером такого определения, как известно, служит определение натурального числа n по Д. Гильберту, где базисом является единица 1, а индуктивным шагом — итерация (т.е. последовательное добавление) единицы: 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, ..., n + 1.

недоразумения («продолжал требовать»). Как видно из приведенной мной выше цитаты, там всячески подчеркивается, что проблема вовсе не в случайных эпизодических ошибках, а в систематическом, возрастающем по масштабам системном сбое — раз за разом повторении «неверного именования», когда, по словам цитировавшегося выше источника, «хотят белого, а увеличивается черное, настойчиво добиваются чего-либо, но не получают этого»[1].

Доходчивый образ, изображающий обескураживающую своей нелепостью ситуацию контрпродуктивной работы стандартного механизма формирования предметности, дает популярная китайская притча о путешественнике, имевшем намерение добраться до южного царства *Чу*, но при этом направлявшимся на север, т.е. в противоположную сторону («[Развернув] оглобли на север, направляться в [южное царство] Чу» — *Бэй юань ши Чу*北轅適楚). Так что, чем успешнее осуществлялось его путешествие, тем больше удалялся он от своей цели. Соответственно, в нашей ситуации «неверного именования» (т.е. выбора неверного базиса индуктивного определения) алгоритм, реализующий индуктивное правило — вне зависимости от его эффективности — будет лишь тиражировать ошибку, тем самым увеличивая масштабы начальной ошибки. Хуже того. В упомянутой древней притче отличное качество лошадей, щедрость дорожных расходов и умелость возницы работали против путешественника, лишь удаляя его от желанного *Чу*. Сходным образом, эффективность алгоритма, реализующего порождающее правило, будет лишь форсировать построение предметности отличной (вплоть до противоположности, как в обсуждаемой нами истории с неправильным именованием) от искомой.

Вот почему при конструировании социально-политической реальности так важен выбор именно **первого** шага. Прежде всего, необходимо найти такой — в некотором смысле **минимальный** — предмет из числа членов монотонно возрастающей последовательности социальных объектов, подлежащих пересозданию, который в силу своей минимальности должен быть выставлен в качестве **первого**, а потому **базисного** члена этой последовательности.

Если оставаться в границах собственно *социальных* образований, то **наименьшим** таким образованием оказывается не что иное, как **семья**. Именно этим объясняется ее выбор в качестве парадигмального примера социального конструирования. Проективно-конструктивный смысл гексаграммы **Домашние** раскрывается исключительными по прозрачности образами и алгоритмами, представленными последовательностью шагов «Великого учения»: «У вещей есть корень и

[1] Там же. С. 199.

верхушка. У дел есть конец и начало. Если знаешь, что раньше, а что позже, то приближаешься к Пути. В древности желавшие высветлить светлую добродетель в **Поднебесной** предварительно упорядочивали свое **государство**, желавшие упорядочить свое государство предварительно выравнивали свою **семью**, желавшие выровнять свою семью предварительно исправляли **себя**... когда **сам** исправен, тогда и **семья** выровнена; когда **семья** выровнена, тогда и **государство** упорядоченно; когда **государство** упорядоченно, тогда и **Поднебесная** умиротворена. Для всех и каждого — от сына неба и до простолюдина — исправление **себя** является корнем»[1].

Богатейший ресурс для математизации языковой картины мира предоставляет открытость иероглифической композициональности для проецирования на нее календарных циклов (возможно являясь даже первоисточником подобной математизации). Календарь выступает эффективным инструментом наиестественнейшего оцифровывания объектов произвольной природы за счет вписывания их в тот или иной календарный круг[2].

Несмотря на всю самоочевидность приведенного мной ранее рассуждения *Дун Чжуншу*[3], в той части, где речь идет об **уникальности** царя (в его роли посредника между Небом, Землей и Человеком), оно далеко не столь беспроблемно, как может показаться на первый взгляд. Ведь не намного менее авторитетный, чем «*ханьский* Конфуций», мыслитель — *Ян Сюн* (53 г. до н.э. — 18 г. н.э.) утверждает, что «приведение к единому знаменателю» Неба, Земли и Человека по плечу любому настоящему ученому: «Сводящий [воедино] Небо, Землю и Человека называется “ученым”. Сводящий [воедино] Небо и Землю, но не постигающий Человека, называется “умельцем/технарем”»[4]. Так что же: объединение всех трех планов бытия вовсе

---

[1] *Дасюэ* (Великое учение) // ШСЦЧШ. 1935. Т. 2. С. 1673. Прослеживая гексаграммные истоки канонической возрастающей последовательности социальных объектов (семья, государство, Поднебесная), необходимо учитывать китайскую общекультурную пресуппозицию структурного взаимоподобия семьи и государства: внутрисемейная иерархия, выстраиваемая определяющим для патриархата отношением отец—сын, будучи экстраполирована на общество в целом, принимает вид государственной «властной вертикали», задаваемой патерналистским отношением между правителем и его подданными.

[2] Вообще, числовое кодирование объектов дискурса, широко практикуемое китайскими учеными древности, органично для иероглифического дискурса: его цель — стандартизация правил композиции (способов комбинирования этих объектов) путем сведения их к элементарным числовым алгоритмам.

[3] Достигаемую графической наглядностью предмета этого рассуждения.

[4] *Ян Сюн*. «Ян-цзы фаянь» («Образцовые изречения» учителя Яна) // ЧЦЦЧ. Пекин, 1988. Т. 7. С. 39.

не является исключительно царской прерогативой, и хрестоматийный постулат *Дун Чжуншу* об уникальности царя просто ошибочен? Оба мнимо взаимопротиворечивых тезиса удается благополучно согласовать. Выясняется, что неповторимость Царя вовсе не в том, что он способен объединить собой три главные сферы бытия, а в том, что он проделывает это «канонически». Хотя прозрачный намек на эту «каноничность» просматривается уже в указании на срединность (вспомним, что берутся именно «**середины** Неба, Земли и Человека»), а середина **единственна** в отличие от контрастирующей с ней **множественностью** точек периферии. Но отчетливее всего смысл этой «каноничности» раскрывается во взаимоотношениях именно **числовых кодов**, приписываемых с одной стороны Небу, Земле и Человеку, а с другой — царю, их объединяющему. Каковы же эти числовые коды и что за отношение их друг с другом связывает?

Дело в том, что существует любопытный **числовой** алгоритм[1], арифметически фундирующий приведенную выше интерпретацию идеограммы Царь. Триаде Небо—Земля—Человек (а стало быть, и трем горизонтальным чертам пиктограммы царь, изображающим эту триаду) традиционно приписывались следующие числа: 9 в качестве числа Неба (верхняя горизонталь), 6 в качестве числа Земли (нижняя горизонталь), и 8 в качестве числа Человека (средняя горизонталь). Поэтому числовое значение Царя однозначно вычисляется по числовым параметрам коррелируюей с ним триадической классификации и **равно семидесяти двум** = НОК[2] [6, 8, 9][3].

Поскольку в специально-математическом ракурсе «сведение» (*тун* 通) означает приведение к ОК[4] (и в частности, к НОК), постольку число, характеризующее любого персонажа, «сводящего воедино» Небо, Землю и Человека, обязано быть ОК чисел, кодирующих эти позиции троичной классификации. Т.е. оно должно быть ОК (или может быть даже НОК) чисел 9, 8, 6. Однако ясно, что если вообще существует ученый, способный объединить Небо, Землю и Человека и при этом не являющийся Царем, — а это, очевидно, предполагается вышецитированным рассуждением об ученых и «умельцах», — то

[1] Позволяющий по числовым кодам сводимых царем воедино сущностей однозначно вычислить числовой код **результата** подобного сведения.

[2] Т.е. наименьшим общим кратным.

[3] Математическая релевантность подобного очисливания иероглифических графем разительно контрастирует с полным отсутствием хоть какой-нибудь внутренней связи между любым буквенным словом и его числовым двойником, полученным в результате замены каждой буквы ее порядковым номером в том алфавите, буквами которого записано исходное слово.

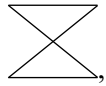
[4] Общему кратному.

его число должно быть всего лишь ОК, но никак не НОК указанной тройки чисел.

Другими словами, числовые значения, приписываемые отличным от царя объединителям трех позиций троичной классификации, составляют множество чисел, кратных 72. Таким образом, характеристическое число Царя уникально тем, что оно представляет собой **наименьшее** из всех возможных ОК чисел, кодирующих позиции Неба, Земли и Человека в троичной классификации.

Возвращаясь к заявленной ранее теме календарной подоплеки того или иного конкретного оцифровывания тех или иных объектов, заметим, что число 72, являющееся кодовым номером Царя совпадает с числом дней всего годового цикла, взятого по модулю пять (и равного 360/5). Таким образом, число 72 внезапно открывается нам как календарно обусловленная продолжительность попеременного царствования (в пределах одного и того же года) каждой из пяти стихий. В связи с чем можно утверждать, что графема Царь прочитывается китайской традицией как идеографическая репрезентация годового круга[1].

Алгоритмическая нацеленность китайского числового кодирования в некоторых замечательных случаях запечатлена самой графической структурой числовых значков, например, статусная роль пятерицы как числового обозначения **центра** (в частности, центра квадрата) визуализировалась ее древним начертанием

 ,

изображающим перекрестье диагоналей квадрата. Этой пространственной срединности отвечает центральная позиция пятерицы в структуре впервые открытого китайцами магического квадрата:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Тотальная математизация традиционной китайской языковой картины мира, с которой я начал свою статью, предполагает достаточно своеобразное — по крайней мере, альтернативное привычной

[1] Еще в «Каноне документов» (*Шуцзин*), а гораздо позднее и гораздо более развернуто у *Дун Чжуншу*, четко зафиксирована коррелятивность **царского** правления и сезонного прохождения именно **годового** круга.

нам естественно-научной традиции — понимание «математизации»[1].

[1] Следует заметить, что характер этой математизации до сих пор является открытой проблемой и даже предметом острых дискуссий. По экстравагантному мнению М. Гране (ныне активно пропагандируемому чудаковатыми отечественными эпигонами творившего в начале XX в. французского синолога), «в философских рассуждениях китайцев идея количества не играет, можно сказать, никакой роли. <...> каковы бы ни были арифметические или геометрические знания отдельных профессиональных групп — землемеров, строителей, архитекторов, музыкантов — ни один из мудрецов никогда не согласился бы их использовать. <...> Каждый стремился манипулировать числами, словно символами». В подтверждение своей смелой гипотезы французский синолог ссылается на следующий пространный пассаж из *Хуайнань-цзы*: «Небо — единица, земля — двоица, человек — троица. Утроенная троица [дает] девятерицу. Удевятиренная девятерица [дает] восемьдесят один. Единица главенствует над солнцем/днями. [Количество] солнц/дней сосчитывается десятерицей (десятеричным календарным циклом «десяти небесных стволов». — *А.К.*). Солнце/день главенствует над людьми. Поэтому люди рождаются на десятый месяц [беременности]. Восьмикратная девятерица [дает] семьдесят два. Двоица главенствует над четом. Чет преемствует нечету. Нечет главенствует над двенадцатеричным циклом *Чэнь*. Двенадцатеричный цикл *Чэнь* главенствует над луной/месяцами. Луна/месяцы главенствует над лошадьми. Поэтому лошади рождаются на двенадцатый месяц [беременности]. Уседмеренная девятерица [дает] шестьдесят три. Троица главенствует над созвездием Большой Медведицы. Созвездие Большой Медведицы главенствует над собаками. Поэтому собаки рождаются спустя три месяца [после зачатия]. Ушестиренная девятерица [дает] пятьдесят четыре. Четверица главенствует над [четырьмя] временами года. [Четыре] времени года главенствуют над кабанами. Поэтому кабаны родятся через четыре месяца [после зачатия]. Упятиренная девятерица [дает] сорок пять. Пятерица главенствует над [пятерицей] звуков [в пентатонике]. Звуки главенствуют над обезьянами. Поэтому обезьяны рождаются после пяти месяцев [беременности]. Учетверенная девятерица [дает] тридцать шесть. Шестерица главенствует над [двенадцатью эталонными трубками-флейтами] *Люй*. [Двенадцать эталонных трубок-флейт] *Люй* главенствуют над оленями. Поэтому олени рождаются после пяти месяцев [беременности]. Утроенная девятерица [дает] двадцать семь. Седмерица главенствует над тиграми. Поэтому тигры рождаются на седьмой месяц [беременности]. Удвоенная девятерица [дает] восемнадцать. Восьмерица главенствует над ветром. Ветер главенствует над насекомыми. Поэтому насекомые меняют свои формы на восьмой месяц [года]». *Хуайнань-цзы* (Философы из Хуайнани) // ЧЦЦЧ. Пекин, 1988. Т. 7. С. 60.

Два десятилетия спустя Дж. Нидэм во втором томе своей фундаментальной «Науки и цивилизации в Китае» диагностировал «пифагорейский душок» у приведенного текста, приписав ему «нумерологическую игру с числами, в ходе которой связываются друг с другом вещи, не имеющие, как нам теперь известно, никаких простых взаимоотношений» (*Needham J.* Science and civilisation in China. Vol. 2. Cambridge, 1956. P. 271).

Обратим внимание на то, что в обличаемом здесь Нидэмом «числовом мистицизме» естественно-научно мыслящего британского историка науки возмущает именно дикая неадекватность (по его мнению) предложенного китайскими мыслителями древности взаимоувязывания чисел и **вне**математической реальности, т.е. их концептуализация **природных феноменов** посредством простейших арифметических действий. Действительно, биологические закономерности (сроки по-

явления на свет человека и разных там зверушек) — с точки зрения современного естествознания совершенно безосновательно — подверстываются к элементарным правилам умножения, кодифицированными последней строкой знакомой всем еще со школы таблицы умножения: 9×9 = 81, 8×9 = 72, 7×9 = 63, 6×9 = 54, 5×9 = 45, 4×9 = 36, 3×9 = 27, 2×9 = 18.

Но при всем своем отторжении того, что он трактует как «нумерологические игры», британский синолог никоим образом не ставит под вопрос математическую законосообразность числовых выкладок (относящихся исключительно к связи чисел с **числами** же!) приведенного выше фрагмента древнего текста. Если прославленный историк китайской науки и не считает подобное употребление чисел «подлинной математикой», то лишь по той несомненной для него причине, что такое их использование, по его мнению, не имеет никакого отношения к **реальности**, а вовсе не из-за каких-либо сомнений в их арифметической справедливости.

Совсем иное дело Марсель Гране. В отличие от Дж. Нидэма с его зацикленностью на естественно-научной проблематике внимание пытливого французского гуманитария приковывают к себе странности китайской арифметики, обнаруживающие себя в философском и общекультурном дискурсе. Пафос всей его главы о числах (открываемой приведенной выше пространной китайской цитатой, как раз и призванной проиллюстрировать «неквантитативное» понимание чисел философами Древнего Китая) — это не более и не менее как проблематизация самой **математической осмысленности** тех числовых выкладок, которые столь обильно представлены в данной цитате. Французский синолог оспаривает **математическую корректность** самих арифметических вычислений, окрестив фигурирующие в них равенства (81 = 1= 10, 72 = 2 = 12 , 63 = 3, 54 = 4, , 1 = 81 = 9 = 3) некой «символической равнозначностью» (см.: *Гране М.* Китайская мысль. М., 2004. С. 103). В самом деле, ведь сногсшибательное открытие Гране как раз-таки и состоит в обнаружении поразительной историко-культурной аномалии: якобы, у китайцев «числа — это всего лишь символы» (там же, с. 192), мол, китайцы «остерегаются видеть в них абстрактные и стеснительные знаки количества» (там же).

Между тем, если отвлечься от снисходительно шутливого тона, только и приличествующего просвещенному европейцу, снисходящему до обсуждения диковинных туземных бредней, то обнаружится, что всего-то навсего мы имеем здесь, во-первых, грубейшее **смешение** арифметических вычислений (9×9 = 81 = 1, 8×9 = 72 =12 = 2, 9×7 = 63 = 3, ..., 2×9 = 18 = 8) с числовым кодированием («Небо равнозначно единице; Земля — двум; человек равноценен трем» и т.п.). Во-вторых, досадный пробел в математическом образовании самого придирчивого критика китайских «числовых игр», помешавший ему осознать лежащую на поверхности **математическую** справедливость равенств 9×9 = 81 = 1, 8×9 = 72 = 12 = 2, 9×7 = 63 = 3, ..., 2×9 = 18 = 8. Потому что все эти таинственные «символические равнозначности» представляют собой не более, чем тривиальнейшие математические равенства в арифметике вычетов по модулю десять. Вот почему — без всякой мистики, совершенно рутинным образом — 81 будет равно 1 (8×9 = 72 =12 = 2, 9×7 = 63 = 3, ..., 2×9 = 18 = 8).

Рассуждения с опорой на арифметики вычетов по разным модулям — обычнейшее дело в древнекитайском математическом и философском дискурсе. Ничуть не удивительно: ведь одна из центральных теорем арифметики остатков так и называется — «**китайская** теорема об остатках». Данное название обязано своим происхождением **приоритету** китайской математики в открытии математического алгоритма, фигурирующего в данной теореме.

Здесь математика — это не та стандартно понимаемая математика **величин**, которая исторически связана с успехами применения теоретико-математических конструктов в классическом естествознании, и в первую очередь в физике и механике. В этой связи уместно вспомнить важное наблюдение Г. Вейля относительно одного достаточно известного способа мышления (которое он в духе своего времени весьма поверхностно охарактеризовал как «магию чисел»). «То, что имеет значение в магии чисел, — это их *теоретико-числовые* свойства; то, что имеет значение в естествознании, — их свойства в качестве *величин*. С точки зрения величины нет особой разницы, будет ли число жителей идеального платоновского города (которое он положил равным 5040 = 7!) 5040 или 5039; с точки зрения теории чисел между ними расстояние, как от земли до неба; например, число $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ имеет много частей, тогда как 5039 — простое число. Если в идеальном платоновском городе ночью умрет один житель и число жителей уменьшится до 5039, то весь город сразу придет в полный упадок. Пожалуй, одно из наиболее фундаментальных обстоятельств, которому Лейбниц пытался найти выражение в своем принципе непрерывности, состоит в том, что числа входят в объяснение природы благодаря тому, что они имеют характер величин, а не благодаря своим теоретико-числовым свойствам»[1].

Нетрудно заметить, что тот контекст применения математики, который обсуждался в данной статье, принципиально иной, нежели в естествознании. Числа и фигуры в китайском традиционном дискурсе (не сводящемся к технически-ремесленным и узко прикладным аспектам культуры) широко представлены в **гуманитарных** (говоря современным языком), в частности **социо-этических,** сферах

Как видим, элементарное математическое невежество почтенного французского мэтра (усугубленное общей небрежностью анализа), сподвигло его на сколь смелые, столь и рискованные культурологические обобщения. Однако то, что было в какой-то мере извинительно в начале прошлого века — можно сказать, в ювенальную пору синологии, — **сегодня**, спустя почти столетие, должно быть расценено не иначе как анекдотический анахронизм. Сторонники дилетантски «культурологического» — в стиле Гране — подхода к логико-методологическим мотивам древнекитайской мысли даже не пытаются серьезно отнестись к **математическому** аспекту китайского коррелятивного мышления. Все связанные с этим типом рассуждений числа и вычисления либо квалифицируются ими как математически бессмысленная и логически иррелевантная «нумерология», либо — при попытке их рационализации — дело ограничивается поверхностными и уводящими в сторону аналогиями и параллелями с концепциями и конструкциями новоевропейского или современного математического естествознания, опирающимися на трактовку чисел как **величин**. Совершенно упускаются из виду **алгебраические** аспекты чисел, используемых в «коррелятивном мышлении», когда эти числа выступают в качестве числовых кодов объектов произвольной природы.

[1] *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989. С. 67–68.

традиционной китайской мысли, а также в отвечающих им практиках. Таким образом, предметами математизации (в указанном смысле этого слова) оказываются столь нетрадиционные для привычной нам математики феномены как, например, сюжеты, эмоции, образы, межсубъектные взаимодействия, социальные нормы, управленческие действия, и т.д.

Я думаю, что китайский панматематизм предопределен ярко выраженной композициональностью китайской идеографии. Теоретически отрефлексированной и систематически последовательной реализацией подхода к композициональности как к основополагающей методологеме является триграммно-гексаграммный символизм «Канона Перемен».

Что касается Европы, то тут ситуация гораздо менее транспарентна, ввиду уже отмечавшейся выше серьезной непоследовательности алфавитного письма в проведении принципа композициональности. Г. Лейбниц сколь проницательно, столь и неожиданно усмотрел глубочайший источник композициональности (а стало быть, и математичности) для христианской цивилизации в основополагающем библейском догмате о сотворении мира Богом из ничего. Именно к данной вероучительной истине (в небесспорной с богословской точки зрения лейбницевой интерпретации) апеллировал великий математик, подыскивая внематематические резоны для открытого им и замечательного своим, если можно так выразиться, «композициональным совершенством»[2] двоичного счисления (лишенного, однако, во времена Лейбница какой-либо практической ценности)[3].

Библиографический список

Аверинцев С.С. Древнегреческая поэтика и мировая литература: введение // Поэтика древнегреческой литературы. М., 1981. С. 3–14.

Аверинцев С.С. Риторика как подход к обобщению действительности // Поэтика древнегреческой литературы. М., 1981. С. 15–46.

Бенвенист Э. Общая лингвистика. М., 1974.

Вейль Г. Математическое мышление. М., 1989.

---

[2] Представляющего, как известно, простейшую — требующую минимальное количество исходных символов — из всех числовых позиционных систем.

[3] «Простое утверждение, что все числа образуются из сочетания единицы и ничто и что ничто является достаточным чтобы разнообразить их, представляется столь же правдоподобным, как и утверждение, что Бог создал все вещи из ничего, не пользуясь никакой первоматерией (matière primitive); и что существуют только эти два первопринципа — Бог и Ничто: Бог — что касается совершенств, и Ничто — относительно несовершенств» (Лейбниц — И. Буве. Брауншвейг, 15 февраля 1701 г. // Лейбниц Г.В. Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления (Предисловие, переводы и примечания В.М. Яковлева). М., 2005. С. 92).

Гегель Г.В.Ф. Философия природы. М., 1977. Т. 2–3.
Гране М. Китайская мысль. М., 2004.
Granet M. La penseé chinoise. Paris, 1934.
Дасюэ (Великое учение) // ШСЦЧШ. 1935. Т. 2.
Кассирер Э. Познание и действительность (Понятие о субстанции и понятие о функции). СПб., 1912.
Крушинский А.А. Логика Древнего Китая. М., 2013.
Лейбниц Г.В. Соч.: В 4 т. М., 1984. Т. 2–3.
Лейбниц Г.В. Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления (Предисловие, переводы и примечания В.М. Яковлева). М., 2005.
Луньюй чжэнъи («Беседы и суждения» в ортодоксальном понимании) // ЧЦЦЧ. Т. 1. Пекин. 1988.
Люй Бувэй. Люйши чуньцю (Весны и осени господина *Люя*) // ЧЦЦЧ. 1988. Т. 6.
Needham J. Science and civilisation in China. Vol. 2–3. Cambridge, 1956–1959.
Хуайнань-цзы (Философы из Хуайнани) // ЧЦЦЧ. Пекин, 1988. Т. 7.
Чжоу И чжэнъи (Чжоу И в ортодоксальном понимании) // ШСЦЧШ. Т. 1. Шанхай, 1935.
Ян Сюн. Ян-цзы фаянь (Образцовые изречения учителя Яна) // ЧЦЦЧ. Пекин, 1988. Т. 7.

Список сокращений

ШСЦЧШ — Шисаньцзин чжушу (Тринадцатиканоние с комментариями и толкованиями).

ЧЦЦЧ — Чжуцзы цзичэн (Собрание [сочинений] всех мудрецов).

Г.Я. Красников, Е.С. Горнев,
И.В. Матюшкин

ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ ФАКТОР В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В ОБЛАСТИ НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

Как известно, задача о кенигсбергских мостах породила теорию графов. Тогда в одном лице Леонард Эйлер совмещал и математика, и расчетчика, и постановщика задачи. По мере специализации науки вначале потребовалось разделение труда в математическом моделировании (ММ) — чистого или прикладного математика и специалиста в конкретно-предметной области. Еще в 70-х гг. Конрад Цузе[1] прозорливо отметил возникновение и третьей фигуры — специалиста по программированию, программному обеспечению (ПО) и вычислительной технике. Если учесть проникновение ММ в экономические и гуманитарные дисциплины, то целесообразно выделение и четвертой фигуры — концептуалиста, пытающегося четче выявить логические связи и среду, с которой ассоциирована задача или проблема (в экономике это консалтинговые услуги). Для ММ естествознания функция концептуализации деперсонализирована, будучи распределенной между остальными участниками ММ, однако в нанотехнологиях и наноинженерии роль организации работы исследовательской группы и, в частности, организации ММ будет возрастать. Таким образом, математическое моделирование становится необходимо-коллективной деятельностью, схематично представляемой нами через тетраэдр акторов[2] «Математик — Программист — Специалист — Концептуалист».

Отсюда возникает человеческий фактор, связанный с взаимным недопониманием, различными интересами и целями участников, что чревато потенциальными конфликтами. Попытка взглянуть на внутреннюю «кухню» ММ, на коллективный характер этого вида чело-

[1] *Zuse K.* Calculating Space, MIT Technical Translation (Proj. MAC). Cambridge, Mass. 02139, Feb. 1970. http://www.idsia.ch/~juergen/digitalphysics.html

[2] Актор — действующий субъект, «актёр»; здесь — участник ММ. Термин взят из литературы по технологиям разработки ПО. Актор, за некоторыми исключениями, задается нами как некая абстракция, а не как живой человек.

веческой деятельности составляет оригинальность работы, так как обычно ММ рассматривается в дискурсе технологии, классификации моделей или соотнесения с реальностью. Разумеется, человеческий фактор не следует понимать как случайное, субъективное и как нечто, связанное с катастрофами, хотя, конечно, пренебрежение им скорее всего будет означать неудачу в ММ (что может закончиться падением какого-нибудь спутника[1]). Пытаясь раскрыть функционирование тетраэдра ММ, нам придется начать с неоднозначности семантики понятия «математическое моделирование», поскольку именно здесь кроется источник большей части недопонимания между участниками ММ.

1. Многозначность понятия «математическое моделирование»

Каждый актор ММ субъективен в понимании ММ, исходя из своего опыта и общих представлений. Наиболее часто встречающееся зафиксировано А.Г. Севостьяновым: «Математической моделью называется совокупность математических соотношений, уравнений, неравенств и т.п.»[2]. При этом неявно полагается, ММ — это какое-либо оперирование с математической моделью (Мм), «решение» этих уравнений. Такое естественное понимание упускает из вида системный характер модели, возможность различных ее интерпретаций. Оставаясь по-прежнему естественным, оно получило детализацию в известной триаде А.А. Самарского «модель — алгоритм — программа»[3].

Существуют более редкие (по частоте встречаемости у акторов) и более глубокие определения Мм и ММ. И.Т. Фролов отмечал, что «моделирование означает материальное или мысленное имитирование реально существующей системы путем специального конструирования аналогов (моделей), в которых воспроизводятся принципы организации и функционирования этой системы»[4]. Такая точка зрения, от аналогии и подобия, разделялась и В.А. Штоффом[5]. Наконец,

---

[1] Основной причиной падения 05.12.2010 трех спутников ГЛОНАСС в Тихий океан стали лишние полторы-две тонны топлива, которые залили в разгонный блок ракеты-носителя. Причина была в том, что использовалась расчетная формула, полученная для более старой модели ракеты-носителя — http://www.echo.msk.ru/news/734934-echo.html

[2] *Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А.* Моделирование технологических процессов: Учебник. М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

[3] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 11.

[4] *Фролов И.Т.* Гносеологические проблемы моделирования. М.: Наука, 1961. С. 20.

[5] *Штофф В.А.* Моделирование и философия. М.: Наука, 1966.

К.Э. Плохотников[1] пишет: «...модель — это некоторая минимальная и в то же время нетривиальная конструкция, которая позволяет сделать значимые высказывания о предмете исследования». Выделим две особенности этого определения: а) умышленно не указывается путь получения знания (обычно это так называемый «вычислительный эксперимент»); б) нетривиальность конструкции имплицитно предполагает специфику получения Мм.

Заслуживает внимания весьма мудрая, на наш взгляд, позиция П.С. Краснощекова и др.[2]: «Поэтому авторы — противники того, чтобы давать определения таким фундаментальным понятиям, как модель, система, принцип и т.п. Для нас и вся теоретическая физика — модель вполне конкретной реальности, и классическая механика, часть физики — модель определенной совокупности процессов и явлений физической реальности, и уравнения сплошной среды — модель движения жидкости, и математическое описание конкретной задачи, например задачи определения подъемной силы крыла, — тоже модель». Таким образом, предполагается широкий спектр понимания ММ. Ему можно сопоставить, исходя из общего онтогенетического закона, последовательные стадии математизации[3]: а) математическая обработка эмпирических (экспериментальных) данных; б) ММ; в) построение математической теории определенного класса, аксиоматизирующей предметную область. ММ попадает в регион двойного применения математики — как служанки (Белл[4]) и как царицы (Гаусс).

В самом узком смысле ММ получает статус «интерполяции», задача которой сводится к поиску аналитической формулы, описывающий ряд экспериментальных данных. В самом широком смысле любая теоретизирующая научная деятельность является моделированием, а когда она сопряжена с формулами, то автоматически становится ММ. Наиболее удачно служебно-инструментальный характер математики выражен А.Н. Крыловым[5]: «Для геометра математика

---

[1] *Плохотников К.Э.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент: методология и практика // Интеллектуальные системы. Т. 13. Вып. 1–4. 2009. С. 6–32.

[2] *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 7.

[3] *Сухотин А.К.* Философия в математическом познании. Томск: Изд-во Томского университета, 1977.

[4] *Белл Э.Т.* Творцы математики: предшественники современной математики / Пер. с англ. В.Н. Тростникова. Под ред. С.Н. Киро. М.: Просвещение, 1979.

[5] *Крылов А.Н.* Значение математики для кораблестроения // Мои воспоминания. М.: Изд-во АН СССР, 1963 / Сост. Н.И. Барбашев и С.А. Шерр. http://militera.lib.ru/memo/russian/krylov_an/index.html

сама по себе есть конечная цель, для инженера — это есть средство... Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать... Так вот геометра, который создаст новые математические выводы, можно уподобить некоему воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу; он делает все, начиная от кувалды и кончая тончайшим микроскопом и точнейшим хронометром».

Различие между «чистой» и «прикладной» математикой, по-видимому, аксиологическое: первая требует следования логике развития самого математического аппарата (теория квадратичных вычетов как развитие теории сравнений), а вторая желает удобства использования теорем на практике (теорема Котельникова в радиотехнике, принцип максимума Понтрягина в теории управления). Теорема Пифагора в геометрии или Центральная Предельная теорема в теории вероятностей, имеющие важное значение и для теории, и для практики, показывают бесполезность поисков этого различия в содержании теорем. Пример квантовой механики, потребовавшей создания (а вернее, счастливой находки среди трудов Д. Гильберта) принципиально нового инструмента в виде теории операторов — наиболее высокое применение искусства ММ.

Гораздо чаще инструмент уже имеется, но его нужно немного заточить, понизив уровень абстракции теорем. Но еще чаще все необходимые теоремы и уравнения известны, как, например, уравнение Навье—Стокса в гидродинамике, а нужно лишь для конкретной физической системы специфицировать граничные условия. В наноэлектронике уравнения заранее «зашиты» либо в достаточно общих программных системах мультифизики (AnSYS или Comsol[1]), либо в специализированных пакетах. И тогда мы наблюдаем процесс вульгаризации, когда ММ из высокого искусства превращается вначале в лишенную эстетики симуляцию (так называемые имитационные модели[2]), что подтверждается в англоязычных статьях подменой слов: modeling на simulation, а затем становится промышленно-штамповочным ремеслом, сводящимся к расчету на освоенном Программистом ПО. При формальном признании роли математического моделирования многие специалисты в конкретно-предметной области относятся к нему пренебрежительно, зачастую видя в нем наукообразную обертку — «ну вы там что-то нам посчитайте для отчета».

---

[1] *Pryor R.W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach, Jones and Bartlett Publishers LLC, 2009.

[2] *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем — искусство и наука. М.: Мир, 1978.

Не умаляя актуальности проблем научной визуализации и достижения практически значимых цифр, например по профилю распределения примесей в кремниевой подложке, такое промышленное (не путать с индустриальным, по признаку предметной области) моделирование, осуществляемое средствами коммерческого ПО, оказывается лишенным научного значения. **Промышленное моделирование**, таким образом, является естественным результатом понижения абстракции и усечения маршрута ММ. Одновременно в нанотехнологиях получил распространение термин «**многоуровневое моделирование**» (multilevel/multiscale modeling), которое в некотором смысле восстанавливает потерю абстракции.

На рис. 1 показан механизм понижения абстракции в различных видах ММ (при движении слева направо). Под «фундаментальной системой уравнений» понимается совокупность математических соотношений, традиционно характерная для данной предметной области (термин взят нами из симуляторов для физики полупроводников). Акторы «Концептуалист» и «Специалист» объединены нами в одно целое. При обычном ММ, если так можно выразиться, актор «Математик» и составление ММ из известных соотношений имеют центральное значение. В промышленном моделировании, где зафиксировано относительно жесткое ядро уравнений, численных методов, реализованных заранее в программном коде, центр тяжести ММ переносится на Программиста. В схеме рис. 1 показаны не все связи и этапы моделирования (например, тестирование или верификация, интерпретация полученных результатов).

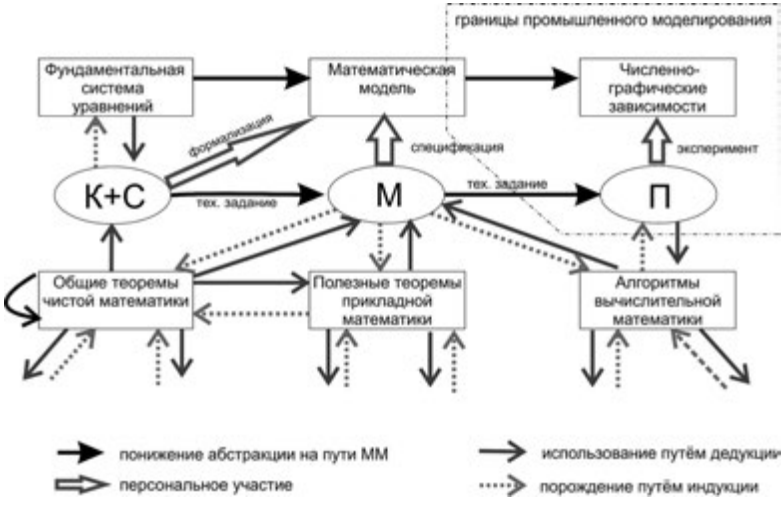


Рис. 1. Схема понижения абстракции и акторы ММ. М — Математик, П — Программист, К+С — Концептуалист и Специалист

Можно говорить об ММ в некотором «среднем» смысле, где наиболее трудоемок этап формализации, а именно по мере понижения абстракции в цепи: чистая математика → прикладная математика → ММ → вычислительный эксперимент → расчет на промышленном САПР. К сожалению, обратное движение, требующее усилия мысли и временного ресурса, редко наблюдается. Например, когда требуется в сжатый срок численно решить систему дифференциальных уравнений, пренебрегают предварительным исследованием этой системы качественными методами. Рыночные условия, постоянная гонка не позволяют и полноценно проводить вычислительный эксперимент.

Многозначность ММ носит не только и не сколько субъективный характер, сколько отражает объективное состояние вещей, и демонстрирует феномен полисемии, когда под одним термином объединены различные явления. В частности, специфика предметной области вместе с целью ММ влияет на конкретные требования, предъявляемые к акторам и их коллективному со-действию в рамках тетраэдра акторов.

2. Тетраэдр моделирования

Обращаясь к трудам отца немецкого компьютинга К. Цузе, добавившего к условным фигурам Математика и Физика (М↔С), творящим в тесном взаимодействии Мм, фигуру Программиста, названного в английском переводе[1] «expert on data processing and automation theory», можно задаться вопросом: выделился ли Программист из прежнего Математика по пути банальной специализации (М→М+П) или же этот актор представляет независимую составляющую в ММ (→П)? Судя по всему, Цузе склонялся ко второму варианту ответа. Такая же дилемма справедлива в отношении происхождении актора Концептуалиста — из прежнего Специалиста (С→С+К) или даже Математика (М→М+К), или же вполне автономном (→К)? Мы полагаем, что вполне можно присоединиться к Цузе.

На рис. 2 изображен тетраэдр моделирования, где показано взаимодействие четырех акторов. Нужно, однако, учитывать неполную выделенность в настоящее время актора «Концептуалист», функции которого примерно поровну поделены между Математиком и Специалистом, хотя организацию работы группы естественнее всего поручить именно Концептуалисту, лучше ориентирующемуся в комплексности проблемы и четко представляющему себе задачи ММ (собственно говоря, он и формулирует их). Другая функция Концептуалиста — контрольная, отслеживающая взаимодействие, например,

[1] *Zuse K.* Calculating Space. P. 16.

Специалиста и Математика; Концептуалист может инициировать, в частности, проведение численных оценок для отсеивания пренебрежимо малых факторов или нахождения быстрых и медленных переменных (что, например, пришлось делать авторам[1] одновременно с формулировкой модели ионной имплантации).

Поэтому лишь в редких случаях мы сталкиваемся с тетраэдром, чаще всего он повернут к нам одной своей гранью или даже ребром, когда элиминированы одна или две вершины. Рассмотрим такую ситуацию, когда вершина П имеет пренебрежимо малое влияние, а ММ происходит главным образом в плоскости КСМ, будучи все-таки искусством, а не ремеслом. При этом, поскольку этап программирования Мм неизбежен, значение П ненулевое, более того — язык и спецификация Мм должны заранее учитывать предстоящее программирование.

Рис. 2. Тетраэдр акторов моделирования

ММ в плоскости КСМ свойственно не только гуманитарным наукам, не только там, где математизация только-только начинается, но и там в естествознании и технике, где в силу комплексности задачи ну-

[1] *Матюшкин И.В.* и др. Клеточно-автоматный подход к моделированию дефектообразования при ионной имплантации // Материалы IV Всероссийской конференции «Физические и физико-химические основы ионной имплантации». Новосибирск, 23–26 октября 2012 г. С. 49.

жен эвристический поиск схемы действия. Такой сферой может быть моделирование цепных реакций синтеза или распада органических и биоорганических молекул, например, с участием белковых катализаторов, где каждая элементарная стадия в общем виде известна, но существо проблемы связано с системностью или многоуровневостью регуляции. В наноэлектронике примерами таких недавно изобретенных схем действия является анализ аналого-цифровых микросхем, поиск оптимальной топологии, применение фильтров частот для модуляции сигнала в комбинаторных схемах (соответственно возникает математическая абстракция «передаточная функция» $W(p)$ из теории автоматического управления; интересно заметить, что последняя содержит помимо математических объектов и прикладные рецепты их применения).

В давней и известной работе[1] авторы писали: «Таким образом, часто не хватает “материала” интеллектуального, а не экспериментального. Нужна концепция — определенное видение изучаемой реальности, которое и придает экспериментальным данным содержательный смысл, превращает экспериментальный материал в объективную информацию о реальности. Это видение изучаемой реальности, конечно, не может возникнуть на голом месте. Оно формируется у исследователя в результате его личного практического опыта и в громадной мере — в результате воспитания и образования». Даже в предельно математизированной теорфизике нельзя сказать «уравнения думают за нас». Ненаивность физики проявляется в «несуществующих» экситонах, поляронах и других квазичастицах. Здесь нужно такое же системное мышление, что и при разговоре о транспортных пробках, существующих на дорогах.

К.Э. Плохотников рассуждает в плоскости КСМ: «Критическое отношение к природе элементов модели и ее целостности заслуживает внимание также и потому, что с него начинается рождение новой модели, а сам акт рождения составляет скорее предмет искусства»[2]. Там же автор, выходя из этой плоскости, справедливо подмечает эмоциональную связь акторов с находящейся в их руках Мм: «В более широком смысле компьютер — устройство, порождающее виртуальную реальность... Под комплексом творца можно понимать то, что оператор (модельер, пользователь) благодаря модели и ее воплощению в форме виртуальной реальности переживает то, что характеризуется в качестве атрибутов творца, то есть атрибутов воли, свободы, силы и власти». Автор даже вводит понятие сверхмодели, стремясь

[1] *Краснощеков* и др. Указ. соч. С. 260.
[2] *Плохотников К.Э.* Указ. соч.

учесть субъектный характер ММ: «Дихотомия модель — сверхмодель, заключенная в определении метода моделирования, похожа на аналогичные конструкции, которые появляются при изучении структуры научных теорий... Смысл подобных дихотомий сводится к тому, чтобы определить и формализовать присутствие субъекта (субъекта-модельера, субъекта-оператора) (*примеч. — в нашей терминологии акторы «Математик/Концептуалист» и «Программист»*) в научной теории». **Главная проблема ММ в плоскости КСМ — это проблема (взаимо)понимания.**

За последние десятилетия разработка программного обеспечения превратилась в научную дисциплину, обогащенную формальным инструментарием, вершиной которого, по-видимому, является метаязык UML[1]. В рамках CASE-технологий легко обнаруживается коллективный характер[2] разработки ПО, причем более тесный и в чем-то более простой, чем коллективизм ММ. Необходимость концептуализации, т.е. построения словесной, а затем и графической, модели существует и при разработке ПО (модель трансформируется в текст программы), и при ММ (модель приобретает математический вид). Концептуализация является разновидностью системотехнического проектирования. Мы слишком перегрузили бы смысл термина ММ, если бы включили в него всякую проектную деятельность, но определенные аналогии имеют место. Так, в разработке ПО выделяют схемы с разделением ответственности и с деперсонифицированной ответственностью, а также схемы с перекрестным контролем (например, программисты обмениваются текстами программ друг друга и вычитывают их на предмет обнаружения ошибок). Хочется спросить: а как проводится верификация ММ на этапе её создания, не дожидаясь последующего численного эксперимента? По-видимому, никак. Современное проектирование и САПР предусматривают обеспечение для пользователей коллективного доступа и разработки проектов. Таким проектом может быть и разработка Мм, неявная тенденция к чему существует для многоуровневого (многомасштабного — multiscale) ММ. Коллекти-

[1] UML закономерно возник в 90-х гг. на базе стихийных графических формализмов, начиная от диаграмм «сущность—связь», широко известных в науке о базах данных, до серии стандартов IDEF. Само название претенциозно — Unified Modeling Language, как бы предлагая себя Концептуалисту для использования в ММ. Однако внедрение UML в практику протекает тяжело — опять человеческий фактор!

[2] *Тудер И.Ю.* Коллективное моделирование предметной области большой размерности: Дисс. ... канд. техн. наук. М.: НИЦЭВТ, 2002; См. также: *Скопин И.* Основы менеджмента программных проектов: курс лекций. М.: ИНТУИТ, 2004.

визм ММ может обнаруживаться не только в выделении четырех акторов, но и в мультиплицировании каждого.

Перейдем в плоскость МПС, где ММ отчетливо приобретает черты ремесла и сводится к промышленному ММ. Нередко происходит, выражаясь по-шахматному, перегрузка — один человек выполняет функцию трех или даже четырех акторов, причем функция П является ведущей. Потеря функций сопряжена с автоматизацией, фиксацией прошлого опыта создателями ПО. Сама Мм уходит в тень, скрываясь в недрах зачастую коммерческого ПО; собственно говоря, она есть, но никому не известна. Программист становится Пользователем, квалифицированно нажимая на галочки в боксах для выбора граничных условий, внешних воздействий, способа генерации сетки, учета или не учёта действия какого-либо физического фактора. Опыт ММ множества таких ситуаций гарантирует уровень квалификации, но при его отсутствии легко впасть в обезьянничество и в рабство к manual-у. Тогда нередко вырождение, когда получаются красивые картинки, не имеющие ничего общего с реальностью. При всей важности правильного использования инструментария, подчас скорее ограничивающего наши возможности, **центральной проблемой ММ в плоскости МПС является параметризация**.

Формально параметризацию можно рассматривать как интерпретацию количественного типа для Мм. Данная точка зрения, на наш взгляд, лишь ведет к ошибочным воззрениям (в рамках парадигмы подобия[1]); более адекватным было бы считать параметризацию, т.е. определение числовых значений параметров, важным звеном общего маршрута ММ. Поскольку одни цифры зависят от других, не всегда достоверно известных, поскольку параметризация модели определяет результат, то рождается скепсис по отношению к ММ — «что заложишь, то и получишь». В моделях аналитического толка коэффициентов немного, и проблема не выглядит острой; в наноэлектронике при моделировании даже одного транзистора число параметров, называемых SPICE-параметрами, исчисляется несколькими десятками. При моделировании химических и/или фазовых превращений, особенно в наноразмерной области, значения констант скоростей и равновесия отдельных стадий реакций, энергий активации, например, диффузионных процессов зачастую неизвестны. Расчеты коэффициентов ab initio не всегда точны, вычислительно трудоемки и требуют особых навыков, трудных для усвоения техническими специалистами.

[1] *Штофф В.А.* Моделирование и философия.

3. ММ как коллективное действие малой группы

Мансур Олсон, введший в литературу «парадокс безбилетника», писал: «Мнение, что группы действуют во имя собственных интересов, по-видимому, основывается на предположении, что индивиды группы действуют в соответствии со своими личными интересами. Если бы индивиды оказались альтруистами и отодвинули на второй план собственное благосостояние, то они вряд ли бы нашли для себя что-нибудь привлекательное в общегрупповых интересах... пока не существует какого-либо принуждения или группа недостаточно мала, рациональные, своекорыстные индивиды не будут прилагать никаких усилий к достижению общегрупповых целей... В малых группах возможно добровольное содействие индивида продвижению цели группы; однако в большинстве случаев оно прекратится быстрее, чем достигнет оптимального для группы уровня»[1]. Численность коллектива, участвующего в ММ, обычно мала даже для малой группы, однако предостережение Олсона, хотя и в ослабленном виде, действенно. Каждый актор должен иметь стимул к коллективному действию. А если он недостаточен?

К написанию этой статьи нас подвиг конкретный опыт общения с нижегородскими коллегами[2] по моделированию ионной имплантации с применением нестандартного для данной области математического аппарата клеточных автоматов. Основная сложность состояла в том, чтобы пробиться сквозь непонимание коллег (и это при позитивном их настрое!), вызванное в конечном итоге нежеланием совершить усилие к обучению. Запомнился их наивный вопрос, свидетельствующий о глубине непонимания: «А нельзя ли для повышения точности дискретизации углов рассеяния (с 30° до приемлемых 10°) заменить шестиугольники, допустим, десятиугольниками?» (ответ: нельзя, так как плоскость замощается без перекрытий только правильными 3-, 4-, 6-угольниками). Перед обсуждением проблем коммуникации пока отметим, что акторы могут иметь дополнительные, не обязательно противоречащие цели группы, цели. Пример: Математик непременно хочет применить излюбленные им клеточные автоматы, в то время как, возможно, эффективнее было применить технику функций Грина. Второй пример, иллюстрирующий недостаточность стимулов: Специалист передал Программисту неверное значение модуля Юнга для изгиба поликремниевой наноразмерной балки, поскольку поле-

---

[1] *Олсон М.* Логика коллективных действий. Общественные блага и теория групп / Пер. с англ. М.: ФЭИ, 1995.

[2] *Матюшкин И.В.* и др. Указ. соч.

нился почитать специальную литературу и взял значение из справочника по сопромату.

Рассмотрим вершины целей и проблемные ребра тетраэдра моделирования. Специалист либо является, либо назначается главой группы заказчиком ММ. Его цель в получении интересующих цифр (если отвлечься от неформализуемого — например, саботажа НИР), а его функция в группе — предоставление знаний по предметной области и предоставление результатов расчетов аналогичных систем. Если предметная область уже достаточна математизирована, то он обязан указать её традиционный математический аппарат и часто приводимые в литературе соотношения. Целью Концептуалиста, если его функция не передана Специалисту, является создание концептуальной модели, возможно, с использованием формально-графических средств. Также в функции Концептуалиста входит её объяснение Математику для перевода её в математизированную форму. Целью и интересом Математика является исследование вводимых в Мм математических объектов. Таким объектом может быть и нестандартная вычислительная сетка, и устойчивость численного решения. Функция Математика в группе — написать соотношения модели и прописать их «физический» смысл. Цель и интерес Программиста — получение опыта и навыка в использовании утилит (в том числе исполняемых на суперкомпьютерах или grid/cloud-сервисах). Его функция в группе состоит в реализации скриптов, проверки их корректности и проведении вычислительного эксперимента.

Несмотря на то, что сложно увидеть противоречие целей участников ММ, они (и инициированные ими скрытые конфликты) акцидентно могут возникать в живой практике, да и банальные симпатии-антипатии нельзя сбрасывать со счетов. Кроме того, возможны субкультурные или даже мировоззренческие (в чем, например, видится смысл научной деятельности?) различия между участниками ММ, а также недостатки организации труда. К организационным[1] причинам конфликтов относят перегрузку работой, неточные инструкции, неясные компетенции или ответственность, противоречащие друг другу цели, постоянные изменения правил и предписаний для отдельных участников коммуникации, глубокие изменения или переструктуризацию укоренившихся позиций и ролей. Линии потенциальных конфликтов и напряжения возникают по вопросам:

1) «Специалист — Математик»: произвольность коэффициентов модели, подгонка исходных параметров;

[1] Теория культуры: Учебное пособие / Под ред. С.Н. Иконниковой, В.П. Большакова. СПб.: Питер, 2008. С. 336.

2) «Математик — Программист»: проверка адекватности скриптов уравнениям, подбор тестовых примеров, модификация текста программы, удобство интерфейса, избыточность или недостаточность объема вычислительного эксперимента;
3) «Специалист — Программист»: объем и сроки реализации расчетов, цена программного обеспечения, плохая визуализация, некорректность входных данных;
4) «Концептуалист — Математик»: правильность/согласия понимания ситуации и справедливость пренебрежения какими-то факторами, адекватность математического аппарата;
5) «Концептуалист — Специалист»: правильность/согласия понимания ситуации и справедливость пренебрежения какими-то факторами, нечеткость формулировки первоначальной задачи;
6) «Концептуалист — Программист»: взаимная недооценка деятельности коллеги, планирования вычислительного эксперимента.

4. Проблемы понимания

Коллективность ММ, прежде всего на ребрах С↔К и С↔М, ставит нетривиальные задачи дидактического плана. Я.А. Коменский определял дидактику как универсальное искусство всех учить всему[1]. В этой связи нетривиальность усматривается: а) в двойственности связи «учитель—ученик», когда ученик в одном становится учителем в другом, а также в недетской психологии ученика; б) в невозможности системности в обучении из-за сжатых сроков; в) в возможном отсутствии признака активности обучения. Последнее легко уясняется из соответственного перефраза высказывания С.Л. Рубинштейна: «Мыслить человек начинает, когда у него появляется потребность что-то понять». Упомянутый нами вопрос о гексагонах был следствием нежелания коллег открыть страничку Википедии про игру «Жизнь». Поняв эту игру, они бы мгновенно поняли клеточно-автоматную парадигму моделирования.

Незазорно отсылать коллег к чтению некоторых учебных текстов, важно только, чтобы объем чтения не был чрезмерно большим. Отсылка же к Интернету будет воспринята как оскорбительно-пренебрежительное. «А.Н. Соколов считает существенным моментом понимания затрудненного текста построение гипотез и догадок, принятие которых создает логическую последовательность мыслей, при которой антиципация становится безошибочной. Последние два звена соответствуют стадии смутного понимания в классификации отчетливости понимания. Выделяется стадия непосредственного по-

[1] *Джибладзе Г.Н.* Философия Коменского. М.: Прогресс, 1982.

нимания текста, на которой в сознании читателя все значения слова объединяются в одно единое значение — сплав значений. Мыслительные операции при этом сокращены, а восприятие и мышление сливаются в единый во времени процесс. Этот этап соответствует субъективному пониманию, переживаемому как достигнутое, но не выраженное в словесной форме»[1]. Исходя из собственного опыта понимания предметных областей, можно указать еще две особенности когнитивного процесса: а) по мере прочтения накапливается бессознательный, непустотный фон целокупности впечатлений и нечетких догадок; б) затем картинка целого проступает последовательно в сознании некоторыми логическими блоками при стойком ощущении еще непроясненности целого. Это в какой-то степени противоречит мнению А.Н. Соколова — целое проступает ассоциативно связанными блоками, а не после молниеносного «Эврика!». Во всяком случае для постижения сложной области возникает множество «эврик», а не одна. Процесс ММ облегчает то обстоятельство, что упомянутые гипотезы могут быть проверены обращением к живому носителю.

Нельзя не согласиться здесь с Н.С. Автономовой[2], хотя слово «объяснение» в отрывке используется в дильтеевском, а не в дидактическом контексте: «Соответственно, для философов второй половины XX в. характерно не столько противопоставление “объяснения” и “понимания”, как это было у неокантианцев или Дильтея, но, скорее, стремление заново обнаружить их взаимодополнительность. Так, Рикёр ставит саму эту дихотомию под вопрос и предлагает поискать новые формы взаимодействия ее элементов — это будут уже не взаимоисключающие полюса, а относительные моменты в сложном процессе, называемом интерпретацией. И эта мысль многократно, в разных вариантах, повторяется. Настаивать на разрыве объяснения и понимания могли бы, по Рикёру, лишь узко мыслящие структуралисты, ограничивающиеся анализом внутренних формальных функций текста в отрыве от намерений автора, восприятия читателя и от содержания передаваемого сообщения, или же представители “романтической герменевтики”, которые верят в понимание, напоминающее телепатический обмен мыслями между автором и читателем либо живой диалог с глазу на глаз. На самом же деле структурный анализ форм и философия субъективности опосредованы герменевтикой и обращены друг к другу».

---

[1] *Наролина В.И.* К проблеме уровней понимания // Вопросы психологии. 1982. № 6. С. 125–127.

[2] *Автономова Н.С.* Познание и перевод. Опыты философии языка. М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2008. С. 569.

В конечном счете вынужденная внешней целью групповая коммуникация участников ММ приводит к взаимному обогащению: Специалист, сталкиваясь с железной логикой Концептуалиста, начинает лучше понимать собственную область; Математик радуется приложению его отвлеченных знаний на пользу людям; Концептуалист еще раз убеждается, что живая практика сложнее, чем о ней мыслится; Программист выходит за рамки виртуальной реальности, пытаясь понять что-то реальное.

5. Промышленное и многоуровневое моделирование в микро- и наноэлектронике

Назовем ММ индустриальным, если оно применяется в промышленности. Промышленное моделирование предполагает: а) усеченный путь ММ при пониженной абстракции; б) реализацию на стороннем ПО, зачастую коммерческом; в) сжатые сроки выполнения; г) произведенное ранее моделирование аналогов в условиях а—б—в. Нередко оба вида ММ совпадают. Как мы писали выше, когда требуется в сжатый срок численно решить систему дифференциальных уравнений, пренебрегают предварительным исследованием этой системы качественными методами. Рыночные условия, постоянная гонка не позволяют и полноценно проводить вычислительный эксперимент. Путь восхождения абстракции, отмеченный на рис. 2 пунктирными стрелками, становится малореализуемым. Однако приведем пример промышленного моделирования, не являющегося индустриальным — квантово-химическое, допустим, в программе HyperChem. Вышеупомянутый пример с ионной имплантацией, наоборот, относится к индустриальному, но никак не к промышленному, моделированию.

Как бы мы ни относились к промышленному моделированию, оно закономерно существует как результат частичной автоматизации ММ. Если позволительна такая аналогия, оно относится к традиционному так же, как квантовый компьютер относится к персональному, а именно оно бессильно при решении простых задач, но эффективно при решении сложных. Возьмем, например, мощный пакет моделирования TCAD Sentaurus для микроэлектроники. Можно сформировать командный файл, детализирующий технологические операции окисления, отжига, ионной имплантации и т.д., в результате исполнения которого пользователь получает двумерную или даже трехмерную приборную структуру с рассчитанными профилями распределения примесей после завершения технологического маршрута (или по крайней мере большей его части). Запустив иной компонент пакета, можно для полученной структуры вывести пробойные напряжения и

прочие поведенческие характеристики транзисторов и даже логических схем. Однако это промышленное моделирование, эффективное и бессмысленное. Рассмотрим внимательнее операцию термического окисления. В этой предметной (под)области фундаментальная система состоит из одного уравнения. Уравнение Дила-Гроува является обыкновенным дифференциальным

$$dh/dt = B/(A + 2h),$$

где A, B — константы, t — время, $h(t)$ — толщина пленки окисла. Компьютер с легкостью вычисляет, например, $h(t = 30$ сек), ибо таков типичный «рецептурный» вопрос технолога. Попросим его построить график $h(t)$ для первых 30 секунд. Вместо однократного решения уравнения на отрезке [0; 30], как сделал бы программист на C++ или даже MATLAB, компьютер будет запускать решатель дифференциального уравнения от нуля до t-й точки 30 раз, получая последовательно точки графика $h(1)$, $h(2)$, ... $h(30)$ как финальные. Этот пример лучше всего иллюстрирует, как промышленное ММ ужасающе эффективно при ответах на стандартные вопросы и насколько оно беспомощно при нетипично заданном вопросе.

При промышленном ММ тетраэдр акторов редуцируется до ребра С-П или даже точки П. Вместе с тем полномочия Программиста расширяются, хотя технология его работы выглядит простой; например, в САПР мультифизики (AnSYS) — прорисовка геометрии, задание свойств материалов (числовых констант, жесткости или нежесткости, прозрачности или непрозрачности), учет только электрических и тепловых процессов, или же еще вдобавок диффузионных, задание граничных условий, автоматическая генерация сетки, выбор точек слежения/мониторов, указание желаемых типов графиков вывода результатов и пр. Сравнительно легко обучиться этим действиям недели за две, хотя, конечно, все возможности ПО нельзя освоить и за год. Вместе с тем, вряд ли самим Программистом-пользователем осознается, что косвенно он, действуя из консоли или в интерфейсных окнах, творит Мм (например, через выбор нужных ему экземпляров фундаментальных уравнений), что косвенно он творит виртуальную реальность.

По мере перехода к нанотехнологиям ММ возвращается на путь повышения абстракции. Во-первых, это связано с появлением особого вида моделей, которые называют в литературе по-разному: компактными, макромоделями, reduced-on-order models. Теперь решение систем уравнений и прочих математических прелестей (см. дефиницию ММ Севостьянова[1]) становится чрезмерно трудоемким

[1] *Севостьянов А.Г.* Указ. соч.

даже на суперкомпьютерах, поэтому точные методы заменяются приближенными, эмпирическими, учитывающих опыт прежних расчетов в аналогичных ситуациях. Макромодели вносят потерянный интеллектуализм и неформальность в ММ, а центральный вопрос можно сформулировать так: «Как аккумулировать прежний опыт моделирования в относительно простые графические зависимости, формулы или даже простые интегральные и дифференциальные соотношения?»

Во-вторых, иерархия материального мира приводит и к иерархии Мм, т.е. к многоуровневому ММ. В качестве примера можно привести НЭМС, наноэлектромеханические системы. Как доказательно проектировать нанодвигатель в виде углеродной нанотрубки, по которой путешествует от холодного конца к горячему полимерная органическая молекула, натянутая на нее подобно манжете и перевозящая на себе «полезный груз», допустим, кластер атомов металла? Можно ли здесь пользоваться понятием «сила трения»? Если да, то как рассчитывать коэффициент трения? Как связать его с квантовыми расчетами сил молекулярного притяжения, очевидно, неизбежными в данном случае? И мы видим, что необходим новый виток концептуализации в области НЭМС, а ММ снова вернется к потерянному тетраэдру акторов.

В заключение следует отметить, что для успешного ММ необходима готовность участников не только к декларируемым шагам навстречу, но и к усвоению кажущимися ими лишними сведений: Специалист может оказаться консервативен для прочтения сведений об игре «Жизнь» (чтобы ему понять на примере ограничения и предпосылки аппарата клеточных автоматов), Математик может высокомерно отказаться от усвоения принципов организации GPU-вычислений и параллелизма алгоритмов и т.д.

Библиографический список

Автономова Н.С. Познание и перевод. Опыты философии языка. М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2008. С. 569.

Белл Э.Т. Творцы математики: предшественники современной математики / Пер. с англ. В.Н. Тростникова. Под ред. С.Н. Киро. М.: Просвещение, 1979.

Джибладзе Г.Н. Философия Коменского. М.: Прогресс, 1982.

Иконникова С.Н., Большаков В.П. (ред.). Теория культуры: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2008.

Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983.

Крылов А.Н. Значение математики для кораблестроения // Мои воспоминания. М.: Изд-во АН СССР, 1963 / Сост. Н.И. Барбашев, С.А. Шерр. http://militera.lib.ru/memo/russian/krylov_an/index.html

Матюшкин И.В. и др. Клеточно-автоматный подход к моделированию дефектообразования при ионной имплантации // Материалы IV Всероссийской конференции «Физические и физико-химические основы ионной имплантации». Новосибирск, 23–26 октября 2012. С. 49.

Наролина В.И. К проблеме уровней понимания // Вопросы психологии. 1982. № 6. С. 125–127.

Олсон М. Логика коллективных действий. Общественные блага и теория групп / Пер. с англ. М.: ФЭИ, 1995.

Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент: методология и практика // Интеллектуальные системы. Т. 13. Вып. 1–4. 2009. С. 6–32.

Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Моделирование технологических процессов: Учебник. М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

Скопин И. Основы менеджмента программных проектов: курс лекций. М.: ИНТУИТ, 2004.

Сухотин А.К. Философия в математическом познании. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977.

Тудер И.Ю. Коллективное моделирование предметной области большой размерности: Дисс. ... канд. техн. наук. М.: НИЦЭВТ, 2002.

Фролов И.Т. Гносеологические проблемы моделирования. М.: Наука, 1961.

Шеннон Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука. М.: Мир, 1978.

Штофф В.А. Моделирование и философия. М.: Наука, 1966.

Zuse K. Calculating Space, MIT Technical Translation (Proj. MAC). Cambridge, Mass. 02139, Feb. 1970. http://www.idsia.ch/~juergen/digitalphysics.html

Pryor R.W. Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach, Jones and Bartlett Publishers LLC, 2009.

Раздел
5

ОТ ОНТОЛОГИИ К ЛОГИКЕ

*С.Л. Катречко**

МАТЕМАТИКА КАК «РАБОТА» С АБСТРАКТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ: ОНТОЛОГО-ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ СТАТУС МАТЕМАТИЧЕСКИХ АБСТРАКЦИЙ[1]

В статье[2] из сборника Московского семинара по философии математики 2014 г. был представлен трансцендентальный анализ математики. Здесь я попробую, опираясь на уже полученные результаты, провести комплементарный по отношению к предыдущему концептуальный анализ математического познания как работы с абстрактными объектами[3] и последующим «подключением» кантовской мысли с целью прояснения тезиса Е. Вигнера о «*непостижимой эффективности математики...*».

* * *

Начнем с вопроса о дифференциации разных типов познания с тем, чтобы выявить специфику математического способа познания. Первая классификация наук восходит к Платону[4], однако более прозрачным и релевантным для целей нашего анализа выступает подход Аристотеля, который в своем трактате «О душе» различает *физический*, *математический* и *метафизический* (т.е. философский)

* Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики» (НИУ ВШЭ).

[1] Данное научное исследование выполнено при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант № 12-03-00503а), а также поддержано программой «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг. (гранты № 14-01-0195, 14-09-0199).

[2] *Катречко С.Л.* Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике, 2014. С. 86–120.

[3] Впервые такое понимание математики было представлено в моих докладах на Московском семинаре по философии математики «*Мета-философский подход к философии математики: математика как "работа" с абстрактными объектами*» (18.06.2010) и «*Трансцендентальный анализ математического знания: математика как "работа" с абстрактными объектами* (*Платон, Аристотель, Кант, Фреге, Гильберт, Гудстейн, Хинтикка, Залта*)» (18.03. 2011).

[4] О платоновском понимании математики (в рамках его концепта «четырехчастного отрезка») мы будем говорить ниже.

способы познания[1]. Согласно Аристотелю, *физик* (*рассуждающий о природе*) изучает «состояния такого-то тела и такой-то материи», например «что дом состоит из камней, кирпичей и бревен», т.е. реально существующие, или *конкретные*, объекты (со стороны их *материи* (химия) и/или *движения* (физика)), в то время как *математик* изучает «свойства, которые хотя и неотделимы от тела, но, поскольку они не состояния определенного тела и берутся отвлеченно от тела», или *формы* тела (в их «отвлечении» от материи/движения), например *геометрические формы*, т.е. *абстрактные объекты*, а *метафизик* изучает *сущее как таковое*, «отделенное же от всего телесного». Тем самым можно выделить *три* типа «объектов», конституирующие соответствующие типы познания: 1) *конкретные* объекты «физики»; 2) *абстрактные* объекты «математики»; 3) *идеальные* метафизические концепты. Нас здесь будет интересовать статус математических предметов в их отличии от физических объектов.

Трансцендентализм [Канта], который выступает как исследование, «*занимающееся не столько предметами, сколько способами* (в том числе и *математическим*. — *К.С.*) *нашего познания предметов как возможными a priori*» [B 25][2] в целом принимает это различение, хотя вместе с тем и уточняет его, и обосновывает его. В составе нашего способа познания (resp. сознания как познавательной способности) Кант выделяет два основных «ствола познания»: чувственность и рассудок, определенное сочетание которых и задает специфику того или иного вида познания. И если *опытное естествознание* начинается с *чувственного созерцания* (resp. эмпирического предмета), которое (который) впоследствии осмысляется рассудком посредством понятий (соответственно, схема естествознания такова: «чувственность (созерцаемый предмет) + рассудок (понятие о нем)»), то математику Кант конституирует как «познание посредством конструкции [из] понятий» [B 741], что указывает на совместную работу *рассудка* и *воображения*, но в обратном по отношению к естествознанию порядке. Тем самым Кант выделяет два типа *предметного* познания: «физику» как эмпирическое познание и «математику» как формально-абстрактное познание. Предметом изучения первой выступают *конкретные* предметы (природы), а предметом второй — *абстрактные объекты-конструкты*, которые *создаются* человеческим умом, поскольку в самой «природе нет *кругов*, *квадратов*»

---

[1] *Аристотель*. О душе // Аристотель. Сочинения. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 374.

[2] *Кант И*. Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994. С. 56.

(Галилей), — которые имеют разный онтологический статус[1]. Это платоно—аристотелевско—кантовское различение представляется чрезвычайно важным для понимания сути математического познания, которое, при всей своей природной направленности, все же не представляет собой познание природы самой по себе.

Обратимся к *проблеме* абстрактных объектов, которые во многом предопределяют специфику математики. *Проблема* же состоит в том, что предложенный Аристотелем и закрепленный в этимологии термина «абстрактный» его смысл как отвлечения от конкретного (реально существующего) содержания, хотя феноменологически и фиксирует различие между конкретным и абстрактным, но предполагает при этом уж слишком наивный способ генезиса абстрактного. Те же математические *квадраты*, *круги* или *точки* и т.п. не являются непосредственным результатом абстрагирования/отвлечения, поскольку *идеальных* геометрических фигур типа «круг», а тем более *точек*, в природе не существует. Сам язык подсказывает нам, что *абстрактное* является, скорее, результатом не абстрагирования/отвлечения, а *идеализации*. Хотя и термин *идеализация* тоже не совсем точен, поскольку и он предполагает первичным эмпирически-конкретное, которое затем каким-то, более сложным по сравнению с абстрагированием, образом идеализируется или преобразуется в идеальное. Конечно, подобная эмпирическая предопределенность абстрактного/идеального позволяет тривиально решить поставленную Кантом проблему обоснования адекватности наших представлений (понятий), т.е. их возможность использования в опыте, однако ее простота не является решающим аргументом в пользу принятия подобного *наивного эмпиризма*. По крайней мере, *возможна* и противоположная концепция соответствия, пусть даже это лишь такая возможность, которая впоследствии будет опровергнута. Она предполагает, что используемые в познании средства, каковыми выступают в том числе и интересующие нас математические *абстрактные* концепты, являются в общем случае *произвольно-априорными* (в самом слабом, этимологическом смысле), т.е. взятыми не из опыта, а придуманные нами самими; или *идеальными* (но неидеализированными), не-эмпирическими. Конечно, при этом проблема соответствия (или обоснования) встает в свой полный рост, но зато у нас появляется возможность, поставив под вопрос теорию «отражения» во всех ее разновидностях, рассмотреть разные механизмы генезиса абстрактного и выбора среди них наиболее обоснованного.

---

[1] Если существование *конкретных объектов* удостоверяется нами путем их восприятия, то подобное удостоверение существования *абстрактных объектов* невозможно, и для них надо предложить другой онтологический критерий.

Вместе с тем *проблема абстрактного* имеет и еще одну, возможно, не менее фундаментальную трудность, которая связана с тем, что изначально абстрактное (уже на уровне логического рассмотрения) определяется как нечто неконкретное, т.е. полагается негативно. И возникает вопрос: чем же является абстрактное в позитивном смысле? Современный анализ этой проблемы, данный, например, в российской «Новой философской энциклопедии» [М. Новоселов[1]] или on-line энциклопедии Стэнфордского университета (Rosen[2]), показывает, что: 1) существуют разные «типы» абстрактного[3], которые нельзя подвести под одно определение, поскольку абстрактное представляет собой довольно размытое понятие типа «семейного сходства» Витгенштейна; 2) для всего многообразия абстрактного не удается предложить единого [универсального] критерия его выделения (Розен[4]). «Прототипом» (Дж. Лакофф) для абстрактного выступают, прежде всего, математические концепты типа *числа*, *множества*, *бесконечности* и т.д., и эта взаимосвязь концептов *математического* и *абстрактного* вселяет определенный оптимизм в поисках критерия абстрактного, по крайней мере в сфере математического[5].

* * *

Начнем наше обсуждение математического способа познания с анализа одной аналогии Р. Гудстейна (1912—1985), выражающей новое понимание математики как «работы» с абстрактными объектами, которое начинает складываться в конце XIX в. в работах Г. Кантора (1845—1915), Г. Фреге (1848—1925), Ф. Клейна (1849—1925), а чуть позже — в работах Д. Гильберта (1862—1943) и др., и являющейся на наш взгляд определяющим трендом в развитии современной математики (теория множеств, «проект» Бурбаки, теория категорий)[6].

---

[1] См.: http://iph.ras.ru/elib/0019.html/

[2] См.: http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/

[3] Так, Новоселов [*Новоселов М.М.* Логика абстракций. М.: ИФРАН, 2000], выделяет абстракцию неразличимости, абстракцию индивидуации, изолирующую абстракцию (Аристотель), абстракцию отождествления и др.

[4] В статье Г. Розена «Абстрактные объекты» рассматриваются различные критерии абстрактного: абстрактное как непространственно-невременное, абстрактное как каузально неэффективное и др. и показывается их неуниверсальность.

[5] Далее мы будем развивать принцип абстракции Юма—Фреге (http://en.wikipedia.org/wiki/Hume's_principle).

[6] Заметим, что в первом советском сборнике по философии математики (ред. С.А. Яновской 1936 г.) указанная тенденция к повышению абстрактности математики фиксируется как изменение стиля математического знания и переход к «новой» (теория множеств — П. Александров) или «современной» (аксиоматический метод — А. Колмогоров) математике.

В своей «Математической логике»[1] Гудстейн, проясняя вопрос о природе концепта *числа*, сравнивает математику с игрой в шахматы и, используя эту аналогию, риторически вопрошает: могут ли *предметом* правил шахматной игры быть *материальные* шахматные фигурки (например, *король*), т.е. «куски дерева определенной формы»? Отвечая на этот вопрос, Гудстейн пишет: «Предварительный ответ таков, что *правило* не может относиться к определенному куску дерева, так как мы могли бы потерять этот кусок дерева и все же играть в шахматы, заменив его куском сахара... Но если шахматный король не есть определенный предмет на определенной доске, то что же он такое? Если число два не есть цифра "2", то что же оно такое? Или — чтобы придать вопросу другое направление — благодаря чему определенный предмет в определенной шахматной игре становится королем? Это не внешний вид фигуры... и не положение фигуры в игре [на шахматной доске]. Нет, то, что делает фигуру королем, — это *те ходы, которые она совершает*. Так что мы можем сказать, что шахматный король — это одна из *ролей*, которую фигура играет в шахматной партии [так же как Король Лир — это роль в драме Шекспира; актер, играющий Короля, является королем в силу той роли, которую он исполняет[2]]... Точно так же различные роли, которые цифры играют в языке, это и есть числа. Арифметические правила, аналогично шахматным правилам, формулируются в терминах дозволенных **преобразований числовых знаков**. Так, например, правило, что сумма двух и трех есть пять, является формулировкой — в терминах ролей — того факта, что формула "2 + 3 = 5" доказуема в арифметике. Если же мы поменяем ролями цифры 2 и 5, так что каждая будет играть роль другой, то доказуемой будет формула "5 + 3 = 2", которая по-прежнему будет выражением правила, что сумма двух и трех есть пять. — *и далее Гудстейн заключает, что* — Формулировка в терминах ролей вскрывает те **инвариантные факторы**[3], которые при других формулировках

---

[1] *Гудстейн Р.Л.* Математическая логика. М.: ИЛ, 1961.

[2] Вставка в [...] взята из другого изложения метафоры: *Гудстейн Р.Л.* Рекурсивный математический анализ. М., 1970. С. 88.

[3] С.А. Яновская (ред. перевода) замечает в этой связи, что «суть дела [математики] все же не в самом числовом знаке... а в «инвариантном факторе», который скрывается за правилами оперирования с цифрами и позволяет отражать с помощью цифр различные (прежде всего, количественные) соотношения вещей» [Гудстейн, 1961. С. 22]. Здесь обратим внимание на концептуальное соотнесение абстрактности и инвариантности, которое составляет основание для так называемого «нового логицизма», который специфицирует математическое знание как «работу» с инвариантными структурами (тезис Тарского—Шер).

скрыты под покровом меняющихся обозначений»[1] (выделено полужирным мной. — *К.С.*).

Прежде чем переходить к собственно анализу данной аналогии, заметим, что она удивительным образом коррелирует с известным афоризмом Д. Гильберта, в которой он поясняет суть *аксиоматического метода* в математике говоря о том, что «справедливость аксиом и теорем ничуть не поколеблется, если мы заменим привычные термины “точка, прямая, плоскость” другими, столь же условными: “стул, стол, пивная кружка”!»[2]. А этот афоризм в свою очередь отсылает к известному замечанию Г. Фреге о том, что «мы никогда не сможем посредством наших определений (принципа абстракции Юма. — *К.С.*) решить, соответствует ли [некоторому] понятию число *Юлий Цезарь* или является числом этот знаменитый покоритель галлов или же нет»[3], которое получило название *проблемы Юлия Цезаря*. Приведем также в этой связи цитату из работы С. Клини «Введение в метаматематику» (написанную в том же 1957 г.): «Если об объектах системы мы ничего не знаем, кроме соотношений, имеющихся между ними в системе, то такая система называется *абстрактной*. В этом случае устанавливается только структура системы, а природа ее объектов остается неопределенной во всех отношениях, кроме одного, — что они согласуются с этой системой. Всякая дальнейшая спецификация природы объектов дает *представление* (или *модель*) этой абстрактной системы, т.е. систему объектов, удовлетворяющих соотношениям абстрактной системы и, кроме того, обладающих, вообще говоря, и другими свойствами. [Причем] эти объекты не обязаны быть более конкретными, потому что они могут быть выбраны из некоторой другой абстрактной системы (или даже из той же самой, но при новой

---

[1] [Гудстейн, 1961. С. 22—23]. Эта же метафора приводится Гудстейном в книге «Рекурсивный математический анализ». Изложение там практически совпадает с анализируемым нами пассажем из «Математической логики» (оба написаны в 1957 г.), они различаются деталями, хотя и немаловажными, о чем мы здесь не можем говорить подробно. Главное концептуальное различие этих двух описаний — два подчеркнутых нами фрагмента. Для нас более важен второй из них, в котором формулируется *платонистический* тезис о выражаемых посредством математических абстракций «инвариантных факторах», в то время как во фрагменте из «Рекурсивного математического анализа» (см. первое подчеркивание) Гудстейн развивает, скорее, номиналистическую мысль о том, что природа числа (как абстрактного предмета) связана с «игрой» под названием математика, а «объектом» в рекурсивной теории чисел является не само число, а «правила преобразования числовых знаков» (т.е. цифр) [Гудстейн, 1970. С. 88].

[2] Абстрактность «новой» математики как раз и связана с используемым в ней *аксиоматическим методом*.

[3] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск: Водолей, 2000. С. 83.

интерпретации соотношений)»[1]. В нашем дальнейшем анализе будем учитывать приведенные выше корреляции и уточнения.

Первым важным и лежащим на поверхности смыслом предпринятого Гудстейном соотнесения математики с игрой в шахматы является то, что для математики важна не *материя*, а *форма* используемых ею объектов, посредством которой выражаются скрытые «под покровом обозначений... *инвариантные факторы*», или «правила преобразования числовых знаков»», что и составляет настоящий предмет математической деятельности. Так, используемые в математике *цифры* (resp. *чертежи*) — это *символы* чисел (resp. геометрических фигур), а те в свою очередь, по Гудстейну (с чем можно и не согласиться), — *символы* скрытых за ними математических отношений. Но именно подобное отвлечение от *материи* и есть решающий признак абстрактности по Аристотелю.

Следствием такой отвлеченности выступает условность (resp. *конвенциональность*) используемых в математике *предметов*. Математика имеет дело не с какими-то определенными — конкретными — объектами, а с *неопределенными* или *недоопределенными* (т.е. абстрактными) (квази)объектами, которые в процессе математической работы различным образом доопределяются (= конкретизируются) и понимаются вполне определенным образом. Соответственно, возникает вариабельность возможных интерпретаций (моделей), что в современной математике фиксируется/эксплицируется посредством *теоремы Лёвенегейма—Сколема*. Это важный с философской (методологической) точки зрения результат, проясняющий, наряду с теоремами Геделя и др. результатами (теорема Тарского, Россера, Тьюринга, Черча)[2], природу математического знания, суть которого состоит в том, что синтаксис теории не предопределяет однозначно ее семантику (интерпретацию), а его парадоксальность связана с тем, что система аксиом, изначально предназначенная для описания некоторой системы математических объектов, не выполняет (точнее: перевыполняет) свое предназначение, поскольку любая система аксиом (согласно данной теореме) допускает существенно больше разных возможных интерпретаций (или нестандартных моделей),

---

[1] *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. С. 30 (§ 8 «Системы объектов»).

[2] Теорему Левенгейма—Сколема можно рассматривать как «оборотную сторону» теоремы Геделя о неполноте математики: поскольку формальная арифметика и реальность не совпадают, то можно предложить не только разные, хотя и неполные, системы формализации, но и разные (равноправные) неизоморфные интерпретации (модели) формальной системы.

чем допускалось при ее создании[1], т.е. математика в общем случае *некатегорична* (ср. с *проблемой Юлия Цезаря*). В частности, фраза «Кошка находится (сидит) на коврике» может обозначать не только описанную в этой фразе ситуацию, т.е. *стандартную* интерпретацию: *кошка сидит на коврике*[2], но иметь также и *нестандартную* интерпретацию, а именно значить: *вишня находится (висит) на дереве* (пример Х. Патнэма[3]). Более того, неопределенность математического присуща не только аксиоматическим формализмам, но и математическим предметам, которые по своей природе являются не индивидуальными, а безличными. Геометр, например, рассуждает о геометрической точке вообще, которая неотличима от любой другой, а арифметик отождествляет между собой разные записи/цифры одного и того же числа.

Более того, если придерживаться аристотелевской теории абстрагирования, то имеет место *двойная неопределенность* математических объектов. Во-первых, неопределенность присуща самому акту абстрагирования, в результате которого мы получаем некий абстрактный объект, который в принципе мог бы быть и другим. И поэтому связь между абстрактным и конкретным не является однозначной, о чем и говорит теорема Лёвенгейма—Сколема. Во-вторых, вариабельность/условность абстрактного проявляется и в ходе в каком-то смысле обратного по отношению к абстрагированию процесса, который может быть назван *реализацией* или *конкретизацией* абстрактного объекта, о чем собственно и говорит Гудстейн: число *два* в рамках той или иной формальной системы не обязательно обозначается стандартным «кодирующим» числовым знаком, каковым для нас выступает цифра «2», а может быть заменено другой ее реализацией[4].

---

[1] Излагается по: *Клайн М.* Математика. Утраты определенности. М.: Мир, 1984. С. 316.

[2] Эта стратегия в современной математике/логике фиксируется посредством восходящей к аристотелевскому пониманию истины как корреспонденции, концепция истины А. Тарского как простого «раскавычивания» синтаксических выражений.

[3] О философском значении и «выводах» из теоремы Лёвенгейма—Сколема см. работы Х. Патнэма (его концепцию «внутреннего реализма»). См. также обзор результатов Патнэма и обсуждение теоремы Лёвенгейма—Сколема в работе В.В. Целищева «Философия математики», в которой автор сетует на то, что она, хотя и сопоставима по своей значимости с теоремами Геделя, не получила должного освещения в современной философии математики.

[4] Отмеченное нами указание на двойную неопределенность математического позволяет избежать двух крайностей в ее понимании, представленное, например, в недавней полемике В. Арнольда и Ю. Манина (см.: *Арнольд В.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008. Одна из этих тенденций (эмпирическая), представленная В. Арнольдом, излишне офизичивает математику, другая из них (формалистское и номиналистическое понимание математики), представленная

В последнем отношении метафора Гудстейна отсылает к основополагающей интуиции понимания природы математического, которая впервые была эксплицирована Платоном. Речь идет о его концепте «четырехчастного отрезка» (*the Divided Line*) из кн. 6 «Государства», который выступает не только концептуальным основанием известного мифа о пещере, но и квинтэссенцией платоновского учения в целом. С третьей частью данной *Линии* Платон соотносит рассудочное познание (*διάνοια*), основным модусом которого выступает математическое познание (геометрия). Вот как Платон определяет его суть:

«Те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее... [И] когда *они пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит* [чертеж же является «образным выражением [подобием] того, что можно видеть не иначе как мысленным взором» (там же)]. *Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили...*» [510c — 511a; вставки и выделение курсивом мои. — *С.К.*][1].

Здесь хотелось бы обратить особое внимание на то, что отношение между конкретным (физическим) и абстрактным (математическим) у Платона, по сути, переворачивается: абстрактно-математические предметы являются не отвлечением от конкретно-физических вещей, но, если не онтологически первичными, то, по крайнем мере, 1) самостоятельными и 2) *реализуемыми* посредством особого рода конкретно-наглядного, каковым выступают математические чертежи. Тем самым *предметный* характер математического способа познания имеет более сложный характер по сравнению с физическим, поскольку нужно различать собственно математические предметы: фигуры сами по себе (Платон) или «инвариантные факторы» (Гудстейн) и их *конкретно-предметные реализации*, причем двойного типа: 1) ментальные реализации («образы») и 2) квази-физические реализации пространственно-временного типа чертежей или цифр, каждую из которых можно ошибочно принять за собственно математические предметы, что характерно, соответственно, для интуиционистского и формалистического взгляда на природу математики. Хотя, конечно, это переворачивание не означает, что математические абстракты «порождают» физические объекты: речь идет, скорее, о

Ю. Маниным, слишком сближает математику с лингвистикой (математика представляет собой «игру» со знаками). Обе эти крайности, на наш взгляд, неверны.

[1] Подробнее см.: *Катречко С.Л.* Платоновский четырехчастный отрезок (линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА. Т. 14. Вып. 3. 2013. С. 172—177.

том, что математические абстрактные объекты имеют особый статус своего *существования* и *со-существуют* со своими ментальными и квази—физическими реализациями, а не порождаются в результате аристотелевского абстрагирования.

Вместе с тем современная мысль (в лице, например, того же Гудстейна) делает два существенных уточнения по сравнению с концепцией математики Платона. Первое из них связано с тем, что математический предмет (например, треугольник сам по себе) и его реализация (чертеж треугольника) не обязательно находятся, как пишет Платон, в отношении *подобия*, которое представляет собой лишь простейший случай взаимосвязи математического предмета и его реализации, а в общем — связь между ними носит условно-знаковый характер, и, более того, современные концепты не всегда допускают существование соответствующего чувственно-ментального образа: как, например, представить себе четырех или более n-мерное пространство (ср. с замечанием Декарта о невозможности ментального представления хилигиона)? Второе — математические абстракции (в силу их принципиального [онтологического] отличия от реально-конкретного) не должны необходимо мыслиться как объекты, т.е. представлять собой те же *фигуры*, но взятые в своем идеально-абстрактном, отвлеченном от пространства, модусе[1]. В нашем языке абстрактное фиксируется, скорее, не посредством выражения «треугольник сам по себе», а посредством термина «треугольность», которую вряд ли можно трактовать как *объект*[2]. Тот же Гудстейн мыслит математическую абстракцию как символ скрывающегося за ним инвариантного фактора, что концептуально точнее соотнести уже с категорией не *объекта*, а *отношения*.

Остановимся на этом подробнее, ибо «*Философия математики... есть онтология математических объектов*» (Э. Бет)[3]. В современной литературе, посвященной онтологическому статусу математических абстракций, можно найти целый спектр их различных трактовок. Для их упорядочивания можно использовать разные основания, но для целей нашего анализа выберем онтолого-категориальную тройку «объект — свойство — отношение», которая, заметим, определенным образом коррелирует с различением «действительное — возмож-

---

[1] Обратим внимание на то, что в своем диалоге «Парменид» Платон предостерегает «молодого Сократа» от трактовки идеальных предметов как аналогов физических вещей, например от трактовки общей идеи как объемлющей «парусины».

[2] В силу этого точнее называть математические абстракции не объектами, а предметами.

[3] *Beth E.* Mathematical Thought. Dordrecht; Reidel, 1965. P. 176.

ное — фиктивное», а также с тройкой возможных решений проблемы универсалий «реализм — концептуализм — номинализм».

Первая из них может быть названа «полнокровным [математическим] платонизмом/реализмом», которая представлена, например, взглядами К. Геделя и П. Бернайса или Р. Пенроуза. В ней математические предметы понимаются как особые объекты, существующие в особом [идеальном] мире (например, в уме Бога), которые даются нам посредством особой математической интуиции. С философско-методологической точки зрения эта позиция выглядит достаточно слабой, поскольку у нас нет достаточных оснований (аргументов) приписывать такой сильный онтологический модус существования математическим абстракциям и/или соотносить математическое с божественным.

Примыкает к нему и современный *неологицизм* (*неофрегеанство*)[1], который можно рассматривать как ослабленный вариант реализма. Логико-математические «объекты» рассматриваются в нем не как результат абстракции (отвлечения) от эмпирических объектов, а как образованные по *принципу абстракции Юма*[2]*—Фреге*, который можно выразить формулой:

$$\textit{для любых}\ (\alpha)(\beta)\ [(\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)) \leftrightarrow (\alpha \approx \beta)],$$

где $\Sigma(\alpha)/\Sigma(\beta)$ обозначает вновь вводимый абстрактный объект с помощью символа метаязыка Σ[3]. Парадигмальным здесь выступает фрегевский пример образования нового понятия «*направление* (прямой)», обозначаемого посредством $D(\alpha)/D(\beta)$, которое «получается» из [уже известной] понятийной конструкции более низкого уровня «*параллельность* прямых a и в»: $D(\alpha) = D(\beta) \leftrightarrow$ прямая α параллельна прямой β. Однако и при таком введении/понимании математических предметов возникает ряд методологических трудностей, связанных с упрощенной трактовкой математических предметов как полноценных объектов по аналогии с реально существующими объектами.

Перейдем теперь к обсуждению других концептуальных вариантов математического. Хотелось бы обратить особое внимание на оригинальную трактовку математических абстракций Э. Залты и

---

[1] Представителями современного неологицизма/неофрегианства выступают К. Райт, Р. Хэйл, Дж. Булос и др. В Стэнфорде функционирует Лаборатория метафизических исследований (http://mally.stanford.edu) с целью исследования метафизических (= математических) объектов.

[2] Вот его изначальная формулировка: «Когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаем их равными...» [*Юм Д.* Трактат о человеческой природе // Юм Д. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1965. Т. 1. С. 128 (ч. 1, гл. 3)].

[3] Посредством скобок $(\alpha)/(\beta)$ в формуле обозначается квантор всеобщности.

В. Линского, которая может рассматриваться как ослабленная версия платонизма[1]. В ней абстрактные объекты полагаются как субстантивированные наборы *свойств*[2], что, однако, оставляет открытым вопрос о том, свойствами *чего* являются математические абстракции, каковыми, видимо, неявно полагаются (физические) объекты. Безусловно заслуживающим внимания в этой концепции (и проясняющим природу абстрактного в отличие от конкретного) представляется восходящее к Э. Малли[3] и эксплицированное Э. Залтой следующее «расщепление» стандартной предикации на два типа: *экземплификацию* и *кодирование*. Стандартным образом предикация «x есть F» выражает экземплификацию предиката (свойства) F в [физическом] объекте x: [объект] x обладает свойством F, т.е. *экземплифицирует* (проявляет) его. Соответственно, этот тип предикации может быть записан как $F(x)$. В случае же с абстрактными объектами, к которым, помимо математических, можно отнести также персонажи литературных произведений типа *Шерлока Холмса*, дело обстоит иначе. С одной стороны, эти объекты *неполны* (или *недоопределены*), поскольку у них нет полного набора свойств, характеризующих конкретные объекты[4]. С другой — выражение «x есть F» представляет собой *кодирование* свойства F посредством вводимого объекта x[5]. Так, выражение «2 есть простое число» следует понимать как введение объекта «2» (двойки), который *кодирует* свойство «быть простым числом», что можно записать посредством $(x)F$. Если «двойка» вводится по определению как *простое четное число*, то никаких других характеристик, кроме задаваемых в определении (таковыми являются свойства простоты

[1] *Linsky B., Zalta E.* Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism // Journal of Philosophy. 1995. XCII. N 10. P. 525—555.

[2] Именно так мы и понимаем платонизм: платоновские идеи являются не чем иным как свойствами, а причастность вещей к идеям означает обладание вещью того или иного свойства.

[3] См.: *Mally E.* Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik. Leipzig, 1912.

[4] Указание на неполноту математических абстракций представляет интерес с точки зрения отличения универсалий от абстракций. Абстрактные объекты являются не общими, а неопределенными a-объектами (здесь a — неопределенный артикль) и моделируются в математике посредством переменных, которая, в конечном итоге, должна быть заменена индивидом, т.е. полноценным определенным the-объектом. В «Основоположениях арифметики» Фреге соотносит такие логико-математические «объекты» как числа с *неопределенными предметами*, т.е. a-объектами, каковым выступает понятие (точнее его «объем»).

[5] Ср. с замечанием Гудстейна о том, что математические «объекты» (например, числа) служат для выражения скрывающихся за ними глубинных инвариантных факторов. Вместе с тем по своей структуре и функционалу «кодирование» Залты напоминает введение некоторой сущности по определению и/или по принципу Юма—Фреге.

и четности) у «двойки» нет: содержание абстрактных сущностей беднее, чем конкретных предметов, зато все их «закодированное» содержание *полностью* содержится в их дефиниции. А сами абстрактные «объекты» представляют собой, скорее, не предметы, а созданные человеческим умом *инструменты познания*, выражающие (кодирующие) собой свойства или отношения.

Наконец, самой многочисленной по количеству публикаций выступает концепция *математического структурализма*, активно развиваемая во второй половине XX в. (Л. Витгенштейн, П. Бенацерраф, М. Резник, С. Шапиро[1] и др.), которая выдвигает тезис о квазиобъектном, или даже без-объектном характере математического знания: предметом математики являются не *объекты*, а *структуры*, которые и определяют относительное место/позицию/функциональную роль математических (квази)объектов в составе структур, а собственно математических объектов как полноценных сущностей *нет*. Так, например, *тройка* — это не самостоятельный математический объект (resp. число), а функциональное «место» между двойкой и четверкой[2]. Причем такое слабое онтологическое понимание математических абстракций вполне достаточно для решения главной задачи математической деятельности, а именно: выполнения математических операций, например ответ на вопрос типа «тройка больше двойки?»[3]. Понятно, что при этом математические объекты трактуются в модусе не действительности *возможности* (Дж. Хеллман[4] и др.). В своих же радикальных версиях структурализм выдвигает тезис о том, что математика и вовсе может обойтись даже без структур (Х. Филд, Дж. Хеллман, Дж. Берджес[5] и др.), что сближает его с крайним *номинализмом*, *инструментализмом* и даже *фикционализмом* (Х. Филд[6]). Тем самым в структурализме представлена третья возможная трактовка математических абстрактов в качестве не *объектов* или *свойств*, а *отно-*

---

[1] *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford University Press, 1997.

[2] Подобную трактовку числа предложил П. Бенацерраф, автор известной статьи «Чем числа не могут быть» (*Benacerraf P.* What Numbers Could not Be), которая стала манифестом структуралистского подхода в 70-е гг. XX в.

[3] Заметим, что к структуралистской концепции близок и Р. Гудстейн в разбираемом выше фрагменте.

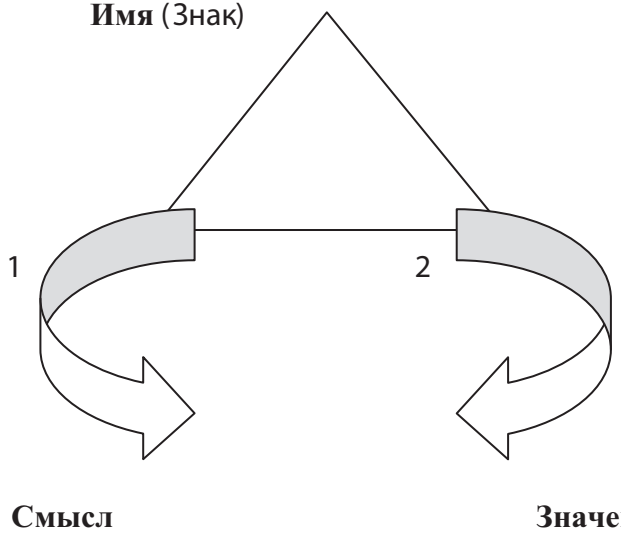
[4] *Hellman G.* Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. New York: Oxford University Press, 1989.

[5] *Field H.* Science without Numbers: a Defense of Nominalism. Blackwell, 1980; *Hellman G.* Structuralism without Structures // Philosophia Mathematica (3). Vol. 4. N 2 (May 1996). P. 100—123; *Burgess J., Rosen G.* A Subject with No Object: Strategies for Nowinalistic Interprefation of Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

[6] *Field H.* Realism, Mathematics & Modality. Blackwell, 1989.

шений[1]. Это приводит и к изменению «языка (resp. базового уровня) математики»: вместо развиваемой с конца XIX в. в качестве таковой *теории множеств*, которая предполагает «объектный» взгляд на мир (объекты + их свойства), а с середины XX в. на это претендует более релевантная для онтологии отношений *теория категорий*. При этом во всех своих вариациях структурализм тяготеет к *антиреализму*: или *номиналистское* понимание математических структур как структур нашего языка (формализм), или их *концептуалистское* понимание как наших ментальных конструкций (интуиционизм).

Для того чтобы прояснить особый онтологический статус абстрактных объектов воспользуемся еще одной идеей Г. Фреге. В своей работе «Смысл и значение»[2] он вводит так называемый *семиотический треугольник* (в лингвистике его называют также треугольником Огдена—Ричардса), согласно которому с каждым знаком (именем) можно соотнести две его характеристики: смысл и денотат (значение знака).



Можно сказать, что в этом треугольнике абстрактный (математический) объект соответствует смыслу знака, в то время как конкретный (физический) объект — его денотату. Или другими словами, в случае эмпирически-конкретного объекта (в пределе, обозначаемого

[1] Подробнее от этом типе онтологии см.: *Katrechko S.* Ding-Ontology of Aristotle vs. Sachverhalt-Ontology of Wittgenstein // Papers of the 31st International Wittgenstein Symposium (Band XVI). Kirchberg am Wessel (Austria), 2008. P. 169—172.

[2] *Frege G.* Uber Sinn und Bedeutung. 1892.

именем собственным) данный треугольник вырождается (по стрелке 2) в бинарную конструкцию «имя — значение» (без смысла), а в случае абстрактного объекта — вырождается (по стрелке 1) в бинарную конструкцию «имя — смысл» (без значения). Подобное соотнесение относительно независимых абстрактных и конкретных объектов как соотнесение смысла и значения можно рассматривать как своеобразный «коперниканский переворот», преодолевающий эмпирический взгляд, в рамках которого абстрактный объект понимается как результат абстрагирования (отвлечения) от конкретного объекта. Более того, здесь допустима и более сильная трактовка: не предмет (значение знака) определяет смысл знака (понятие о предмете), а смысл знака в некотором роде «задает» значение (предмет) знака. Хотя не надо приписывать области смысла самостоятельного онтологического статуса типа платоновского мира идей. Скорее это мир *возможности*, чем действительности, а абстрактные объекты — возможностные объекты-инструменты нашего осмысления (познания) действительности, без которых «нам некуда будет направить свою мысль»[1]. Вместе с тем, как мы показали выше, абстрактные предметы не только выполняют эпистемологическую функцию, но и обладают особым онтологическим статусом, который фиксируется, например, в концепции «трех миров» К. Поппера и/или в концепции «интенциональной реальности» Э. Гуссерля.

Методологическая же сложность анализа математического (по) знания, как, впрочем, и любого другого теоретического знания, использующего абстрактно-идеальные теоретические конструкты, связана с использованием в нем абстракций, или абстрактных объектов, которые как бы обрамлены, с одной стороны, их реализациями посредством каких-то конкретных объектов (пример-аналогия: персонажа Шерлока Холмса играет какой-то актер), выступающими в данном случае не в своем изначальном модусе конкретности, а в качестве *символов* абстрактного (что приводит к их *произвольному* (Фреге) или конвенцилальному (Гильберт, Пуанкаре) характеру), а с другой — скрывающимся за них смыслом, что, в свою очередь, делает их самих символами этого смысла, или «инвариантного [математического] содержания». Собственно, абстрактные объекты выступают как *объективированный* (в некотором предмете) смысл (ср. с кодированием Залты) и занимают промежуточное положение между именами и собственно объектами (денотатами) и было ошибочно отождествлять их как с языковыми, так и с реальными сущностями.

Предлагаемый нами «коперниканский переворот» в понимании абстрактных «объектов» требует серьезного пересмотра концепций

[1] *Платон*. Парменид.

генезиса абстрактного, восходящих к теории абстракции Аристотеля. Наиболее интересными альтернативами выступают здесь *принцип абстракции* Юма и *концепция кодирования* Залты, в которых фиксируется тот факт, что абстрактные «объекты» представляют собой объектное кодирование некоторого [абстрактного] свойства или отношения: см. уже приводившийся фрегевский пример образования понятия «направление» или его же концепцию числа как числовой характеристики всех «равномощных» множеств или «объемов» понятий. Однако эти концепции оставляют в стороне вопрос о психологическом «механизме» генезиса абстрактного. Ответ на этот вопрос можно найти у Э. Гуссерля, который постулирует, если говорить в общем, особую «эйдетическую интуицию» для схватывания подобных, прежде всего математических, смысловых сущностей или «инвариантных факторов».

Речь идет о гуссерлевской теории абстракции, развиваемой им, прежде всего, в его «Логических исследованиях», хотя к данному вопросу он обращается постоянно и в своей более поздней работе «Идеи—I»[1], и в небольшом манускрипте «О варьировании», включенном в посмертно изданный сборник «Опыт и суждение»[2]. В главе 2 из «Логических исследований» «Идеальное единство вида и современные теории абстрагирования» Гуссерль подробно рассматривает различные теории абстрагирования (Локка, Беркли, Юма, Дж.С. Милля и др.) и показывает, что все подобные концепции, имеющие эмпирическую направленность (восходящую к теории абстракции Аристотеля), неудовлетворительны. Генезис абстракции нельзя объяснить ни *обобщением* (локковская теория «общего треугольника»), ни *индуктивным обобщением* (Юм), ни *вниманием*, которое выделяет «главное» и отвлекается от второстепенного (Ст. Лесневский). Точнее, подобные теории предполагают в качестве своей предпосылки уже осуществленный акт абстрагирования как узрения некоего эйдоса (вида). Психологический же механизм подобного узрения эйдоса, или эйдетической интуиции, или «метода прояснения сущности» [«Идеи—I», § 69] состоит в *процедуре варьирования* (или *свободном фантазировании*) [«Идеи—I», § 70]. Она предполагает анализ данного предмета (или группы предметов, образующих «вид»), различение в его составе главных («самостоятельных») и вспомогательных («несамостоятельных») частей и варьирование последних, что и позволяет нам «схватить» эйдос данного предмета (или его платоновскую идею, или в терминологии Гудстейна/Яновской его глубинный «ин-

[1] *Гуссерль Э.* Идем к чистой феноменологии и феноменологической философии. Т. 1. М.: ДИК, 1999.

[2] *Гуссерль Э.* О варьировании // Воображение в свете философских рефлексий. М.: Полиграф-Информ, 2008. С. 327—365.

вариантный фактор»). Например, если нам дан какой-то конкретный треугольник, то, варьируя такие его второстепенные характеристики, как размеры сторон и величину углов, мы сможем схватить *эйдос* треугольника, или *треугольность как таковую*. Хотелось бы особо подчеркнуть, что процедура варьирования иллюстрируется Гуссерлем на математических предметах, которые выступают для него парадигмой абстрактного.

* * *

Анализ метафоры Р. Гудстейна, который позволил нам ответить на вопрос о специфике математики как работе с абстрактными объектами, вплотную подвел нас к кантовской концепции математики. Здесь мы будем опираться на последний раздел *Критики* «*Трансцендентальное учение о методе*» (глава «*Дисциплина чистого разума в догматическом применении*»), в котором Кант дает подробный анализ математической деятельности, «основательность [которой] зиждется на *дефинициях, аксиомах и демонстрациях*»[1].

Остановимся подробнее на первом члене этой триады — *математических дефинициях*, которые «***создают*** само [математическое] понятие»[2], и, тем самым, «дают *первоначальное* и *полное* изложение вещи [т.е. действительного предмета] в его *границах*»[3], а не только *объясняют* его, как это происходит в естествознании и философии. Это гарантирует *математическим понятиям* их полное соответствие с [математическими] *предметами*, в то время как *эмпирические понятия* [естествознания] и *априорные понятия* [метафизики] таким соответствием в общем случае не обладают: в естествознании вещи как правило «богаче» своих понятий (например, *стол* и *понятие о столе* не совпадают, а понятие о столе не может передать всю информацию о реальном столе, о всех нюансах его существования), а метафизические понятия (категории) — «богаче» своего эмпирического применения, поскольку могут применяться не только к предметам нашего чувственного созерцания, т.е. *вещам-для-нас*, но и к «вещам вообще». Основанием для такого полного соответствия является тождество математических *предметов* и *понятий*, поскольку первые задаются, или «создаются», посредством вторых (resp. дефиниций). Вместе с тем это проясняет «измененный метод мышления» (resp. коперниканский переворот) Канта, суть которого состоит в том, «что мы a priori познаем о вещах лишь то, что́ вложено в них нами самими»[4]: если по

---

[1] *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994. С. 536.

[2] Там же. С. 537.

[3] Там же. С. 537, прим.

[4] Там же. С. 24.

отношению к природным (физическим) объектам [восприятия] кантовский тезис кажется слишком уж радикальным, то по отношению к математическими предметам-понятиям он является тривиальным. Наше знание математических предметов подобно «знанию» мастера, который создает ту или иную вещь. Вместе с тем любая математическая дефиниция имеет *конструктивный* характер, содержащая в себе способ порождения своего объекта, или, как говорит Кант, «содержащая в себе произвольный синтез, который может быть конструирован a priori (...в созерцании)»[1]. В главе о схематизме Кант уточняет, что в «основе наших *чистых чувственных* [т.е. математических! — *К.С.*] понятий лежат не образы предметов, а *схемы*...., [которые] не могут существовать нигде, кроме как в *мысли*, и означают *правило синтеза воображения* [например, геометрических предметов как фигур в пространстве. — *К.С.*]»[2]. Тем самым в основе математической деятельности лежат некие *ментальные действия* сознания, а математические понятия представляют собой *схемы*, задаваемые конструктивно. Так, например, *окружность* определяется Кантом с помощью *конструктивной дефиниции* как «линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от центра»[3].

По сути дела, Кант своим введением математических объектов через дефиниции специфицирует их в противовес *конкретным* (физическим) объектам в качестве *абстрактных*, т.е. получаемых посредством *принципа абстракции Юма—Фреге* (см. его формулировку выше). На сходство принципа абстракции с [кантовской] дефиницией указывает то, что мы можем записать его в форме (квази)определения: для любых $(\alpha)(\beta)((\Sigma(\alpha)=\Sigma(\beta))$ [Dfd] $=_{df}$ $(\alpha\approx\beta)$ [dfn]); и даже в виде стандартного определения $\Sigma(\alpha/\beta) =_{df} (\alpha\approx\beta)$, правда с потерей части информации о том, как этот объект конструируется. Тем самым принцип абстракции Юма—Фреге представляет собой некоторый модус кантовской дефиниции (и поэтому может быть назван принципом абстракции Юма—Канта—Фреге), в котором эксплицируется *способ* конструирования (генезиса) абстрактного объекта и информация о чем является определяющей при осуществлении [кантовского схематического] конструирования понятия. Так, если снова обратиться к кантовской дефиниции *окружности*, то она представляет собой мета-объект — *линию*, составленную из объектов более низкого уровня — *точек*, равноудаленных от центра, где *признак* «равноудаленности от центра» является *основанием* или дефиниенсом (в формуле: $\alpha \approx \beta$)

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. С. 538.
[2] Там же. С. 158.
[3] Там же. С. 540.

для порождения этой [новой] абстракции (resp. нового дефиниендума *Dfd* окружности; в формуле: $\Sigma(\alpha)$).

Однако в принципе абстракции не прояснены два важных момента: механизм образования вводимой новой абстракции, т.е. вопрос о том, что (= какое действие?) скрывается за выражением «$\alpha \approx \beta$» (ср. с теорией абстрагирования Гуссерля, которая также решает эту проблему), и вопрос об эпистемологической специфике получаемых таким образом математических понятий. Ответы на эти вопросы дает [кантовский] трансцендентализм, направленный на анализ сознательных «механизмов», лежащих в основе такого вида нашего представления, как абстракция. Можно сказать, что в отличие от преобладающего в настоящее время *логико-формального* подхода к анализу математики Кант развивает *прагматический* подход, направленный на выявление специфики математики как человеческой деятельности, «математики с человеческим лицом».

Кантовский подход к пониманию математических абстракций существенно отличается от стандартных теорий абстрагирования, в том числе и от «эйдетической интуиции» Гуссерля, основанной на процедуре варьирования. Точнее, варьирование у Канта тоже присутствует в качестве одной из основных операций, но (и в этом состоит первая кантовская новация) это варьирование принципиально другого типа.

Математические предметы, вводимые посредством кантовской дефиниции, представляют особый тип предметов, отличный от стандартных абстракций [естественных наук], которые, судя по всему, получены отвлечением (абстрагированием) от тех или иных характеристик конкретных объектов (Аристотель), или посредством эйдетической интуиции (Гуссерль), или путем кодирования того или иного свойства (Э. Залта). В общем, любое понятие, по Канту, представляет собой *синтез*, объединение в своем составе многих сходных предметов (по той или иной его характеристике) и *обобщение* этого сходства именно в данном *понятии*. Специфика же математики (по Канту) состоит в том, что ее «чистые чувственные понятия», каковыми являются математические абстракции, представляют собой *обобщения по сходству действия* (resp. отношения). В общем случае *первичным* математическим действием, обозначаемое символом $\approx$ в формальной записи, является отношение типа равенства («равно», «тождественно», «изоморфно», «конгруэнтно» и т.д.), в основе которого лежит *операция сравнения*. Соответственно, в случае с фрегевским «*направлением*» таковым является *действие* по проверке (или обнаружению) *параллельности* прямых, а в случае с кантовской *окружностью — действие* по проверке (обнаружению) *равноудаленности* точек от центра.

Кант определяет такие [математические] понятия как *схемы*. Вот что он пишет по этому поводу: «*Так, если я полагаю пять точек одну за другой... то это образ числа пять. Если же я мыслю только число вообще, безразлично, будет ли это пять или сто, то такое мышление есть скорее представление о методе* (*каким представляют в одном образе множество, например тысячу*) *сообразно некоторому понятию, чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием. Это представление об общем способе* [т.е. алгоритме построения. — *К.С.*]*... я называю схемой этого понятия*»[1]. При этом в полученной абстракции/схеме это действие как бы «угасает», перемещается с поверхностного (Dfd) на глубинный (Dfn) уровень[2], однако для человека, который не только читает математическую символику, но и практикует математическую деятельность, за этой символикой угадывается образующее его математическое действие. Например, в [натуральном] числе — это *сумма* его единиц или *произведение* его множителей и т.д.

Основанием для этой революционной новации Канта в понимании абстракции является его трансцендентализм, одна из главных предпосылок и тезисов которого — выделение в составе нашей познавательной способности двух «основных стволов познания»: чувственности и рассудка, принципиально не сводимых друг к другу. В данном случае это означает, что за любым результатом познания, каковым и является рассудочное понятие, мы должны искать некоторое (ментальное) «действие», возможно уже относящееся к чувственности (воображению), как его трансцендентальное условие или основание. И поэтому абстракция является не операцией по отвлечению от некоторых признаков исходного понятия с целью получения более абстрактного понятия, схожей по своему действию с операцией логического обобщения (принцип абстракции Юма—Фреге), и не эйдетической интуицией Гуссерля[3], а некоторым пред-рассудочным [ментальным] *действием*[4], связанным с построением созерцательного аналога пред-понятия — кантовской *схемы*. Так, в основе (образования) математической абстракции *окружности* (которые, как мы вслед за Галилеем помним, в «природе не встречаются») лежит неко-

---

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. С. 158.

[2] Ср. с различением «поверхностная vs. глубинная информация» Хинтикки [*Хинтикка Я.* Поверхностная информация и глубинная информация // Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980. С. 182—228].

[3] Заметим, что Кант отвергает любые типы интеллектуальной интуиции и оставляет только чувственную интуицию, хотя гуссерлевская процедура («действие») варьирования вполне вписывается в кантовский *трансцендентальный прагматизм*.

[4] Рассудок, по Канту, «работает» с уже готовыми понятиями и суждениями.

торое действие по равноудаленному расположению точек от центра окружности. Тем самым Кант вместо *логического подхода* к анализу математики (в том числе и к образованию математических абстракций), характерного для современных — логизированных — программ обоснования математики (логицизма, формализма, конструктивизма и даже структурализма; интуиционизм в этот список не входит!) предлагает (в рамках своего трансцендентализма) *трансцендентально-прагматический* подход, суть которого выражается следующей максимой: за каждым рассудочным концептом ищи соответствующее, т.е. обосновывающее ее [ментальное] действие. Правомерность вводимых математических абстрактов обосновывается Кантом не посредством *аксиоматического метода* (хотя о нем Кант применительно к математике также говорит), за счет чего неявно задаются свойства абстрактного объекта, а посредством поиска лежащих в основании той или иной абстракции «[ментальных] действий» по ее построению: характеристики и область применения той или иной абстракции обусловливаются *возможными действиями* с той или иной абстракцией и/или запретом тех [математических] действий, которые невозможны, т.е. несовместимы-дефиницией абстракции. [И здесь опять можно указать на сходство кантовской мысли с античным (нео)платонизмом, с подходом к обоснованию математики неоплатоника Прокла, который впервые поставил и рассмотрел вопрос об особом статусе математических объектов, неприменимости к ним физических действий и необходимостью постулировать для «работы» с ними особые «фантазийные» действия: например, геометрическая точка не может двигаться обычным физическим образом и для нее необходимо постулировать особый механизм движения путем истечения[1].]

Обратим внимание на то, что по своей прагматической направленности трансцендентализм Канта схож с программой *эрлангенского конструктивизма* (как одной из программ обоснования математики: П. Лоренцен[2] и другие), но его принципиальное отличие в статусе «действий»: это не какое-то физическое действие («конструкция»), обосновывающее то или иное математическое понятие, например соотнесение «прямой» с лучом света, а некий ментальный способ процедурной развертки декларативного понятия под именем схем. При этом можно показать, что кантовский трансцендентализм лежит в основе известных программ обоснования математики XX в.: формализма (формальное задание объектов), конструктивизма и интуиционизма (опора на чувственные созерцания), — хотя концептуально

[1] См.: *Гайденко П.П.* История греческой философии в ее связи с наукой. М.: ПЕР СЭ, 2000. С. 154.

[2] *Lorenzen P.* Konstruktive Wissenschaftstheorie. Frankfurt, 1974.

наиболее близок математическому *интуиционизму*[1]. Хотя, как мы покажем ниже, трансцендентализм отличается от интуиционизма в одном важном отношении, поскольку по своему онтологическому статусу *трансцендентальное* отличается не только от эмпирически-объективного (трансцендентного), но и от субъективно-ментального (имманентного).

Еще одной новацией Канта, выступающей продолжением и следствием первой, и проявлением его трансцендентально-прагматического подхода является его трактовка математики в качестве «*познания посредством конструирования понятий*»[2].

Важнейшая в этой связи глава «Критики» — «*Об основании различения всех предметов вообще на phaenomena и noumena*»[3] [особенно, фрагменты B 298—300 и далее], где в концентрированном виде излагается суть как трансцендентализма в целом, так и кантовская позиция относительно «семантики» математического способа познания. Здесь Кант подчеркивает, что без *предмета* (resp. эмпирического созерцания) *понятия*, в том числе и «чистые чувственные» понятия математики, «не имеют никакого смысла (объективной значимости) и совершенно лишены содержания» [B 298], поскольку они «суть лишь игра воображения или рассудка своими представлениями» [там же]. И потому «необходимо сделать *чувственным всякое* **абстрактное понятие** (выделено полужирным мной. — *К.С.*), т.е. показать соответствующий ему объект в созерцании, так как без этого понятие... было бы *бессмысленным*, т.е. лишенным значения» [B 299]. И Кант продолжает: «...математика выполняет это требование, конструируя фигуру, которое есть явление, принадлежащее нашим чувствам, хотя и созданное a priori» [B 299; ср. с фрагментом B 741 ниже]. А ключевым является следующий фрагмент, на который мы уже неявно опирались выше:

«Математическое знание есть знание посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие — значит показать a priori соответствующее ему созерцание. Следовательно, для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие... Единичная нарисованная

[1] См.: *Катречко С.Л.* Кантовы основания программ обоснования математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15—16 июня 2007. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 69—71.

[2] Там же. С. 528.

[3] Там же. С. 234—248.

фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его **всеобщности**[1], так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только **действие по конструированию понятия**[2], для которого многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь от этих разных [определений], не изменяющих понятия треугольника» [B 741][3].

Для прояснения своего тезиса Кант в качестве примера приводит доказательство теоремы о равенстве суммы углов треугольника 180 градусам[4]. При этом исходное (декларативное) понятие треугольника уже как предмета (= фигуры, состоящей из трех углов) «разлагается» на свои составляющие: отрезки прямых и углы, — что позволяет осуществить дополнительное построение (проведение прямой через одну из его вершин) и привлечь для доказательства информацию о равенстве углов. За счет этого введения новых объектов и действий с ними[5] удается синтезировать новое знание о треугольнике, т.е. доказать искомую теорему о том, что сумма углов произвольного треугольника [на евклидовой плоскости] равна 180 градусам. Вслед за И. Лакатосом[6] имеет смысл различать собственно *доказательство* [как набор математических действий] и его *логическое оформление*, которое есть последовательность шагов, каждый из которых или представляет собой аксиому, или получен из предшествующих по одному из правил вывода (определение логического вывода по Гильберту). Однако первое нельзя полностью сводить ко второму, поскольку задачей логического *«образа»* доказательства является не непосредственное моделирование собственно математической деятельности (resp. реального процесса доказательства), а лишь обеспечение логической *правильности* его осуществления. Поэтому следует различать

---

[1] Ср. с пониманием специфики математики у Платона выше.

[2] Ср. с кантовскими «действиями чистого рассудка (мышления)» [B81]; трансцендентальный прагматизм.

[3] Кант наряду с описанным *остенсивным* конструированием, опирающимся на пространственную интуицию, выделяет *символическое конструирование* (алгебра), в основе которого лежит априорное время. Оно имеет более абстрактный характер, что связано использованием в нем 1) особых символов для арифметических операций (в том время как геометрические построения производятся реально) и 2) особого «языка *x-ов* и *y-ов*» (переменных).

[4] Там же. С. 528.

[5] В своем анализе Кант говорит, что при доказательстве геометр руководствуется только «созерцанием» [там же, с. 530], что представляется не совсем корректным. Точнее надо бы сказать, что созерцание является одним из необходимых условий осуществления математических действий: геометрических построений и последующих усмотрений [равенств].

[6] См.: *Лакатоса И.* Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967.

структуру реального процесса [математического] доказательства и его логическое оформление в некотором формальном метаязыке.

При обсуждении метафоры «математика как шахматы» мы уже выяснили, что отличительной чертой математики является то, что она работает со своими абстракциями (понятиями) не напрямую, а посредством их *реализации* в каком-то чувственном материале, т.е. математика «работает» с математическими *предметами* (что, собственно, и позволяет отнести математику, наряду с физикой, к модусу *предметного познания*). Приведенный кантовский тезис о необходимости «конструирования [математических] понятий», наряду с приведенным выше платоновским замечанием из «Государства», говорят, по сути, о том же. Однако характер этой реализации, который не является, по Канту, чем-то условным и/или конвенциальным (как это полагают более современные мыслители-математики Фреге, Гильберт, Гудстейн и др.), принципиально иной, ибо, как это требует Кант, необходимо «сделать *чувственным всякое* **абстрактное понятие**» [B 298—300] или (уточняет Кант) «сконструировать» понятие посредством общезначимого созерцания (каковым выступает кантовская *схема*), т.е. представить рассудочное понятие в качестве предмета в созерцательной среде. Задача такой реализации — эксплицировать заложенный (скрытый) в понятии «инвариантный фактор», или процедурный смысл, задаваемый посредством кантовской «абстрактной» дефиниции, что делает возможным производить над этим математическим предметом те или иные [математические] действия (например, алгебраические вычисления или геометрические построения), которые имеют теперь не единичный, а универсально-всеобщий характер. Понятно, что в ходе математической деятельности (в этой среде) исходный математический предмет может претерпевать порой существенные преобразования и/или дополняться «конструированием» других предметов, что позволяет (в общем случае) говорить о синтетическом, а не аналитическом характере этих действий, поскольку в ходе подобной «работы» происходит приращение информации, что выражается в получении некоторого [математического] результата.

Тем самым математика полагается Кантом в качестве *сложного* двухуровневого (и двухкомпонентного) способа познания. Она начинается с создания посредством дефиниций «чистых чувственных понятий», которые как представления рассудка отличаются и от эмпирических понятий теоретического естествознания, и от чистых рассудочных понятий метафизики. Их сущностная специфика состоит в том, что они образованы посредством «произвольного [свободного]

синтеза [нашего ума]»[1], т.е. содержат в себе некоторое *математическое* [ментальное] *действие*. Далее, при *конструировании понятий* осуществляется ***спуск*** на уровень (квази)чувственности (или воображения; уровень «глубинной информации») и соотнесение понятия с общезначимым созерцанием — *схемой*. Здесь, как бы при обратном прочтении (слева направо) принципа абстракции, происходит *декодирование* понятия: оно представляется как набор объектов более низкого уровня, находящихся в некоторой [пространственно-временной] *среде* и связанных между собой отношением типа «равенства». При этом возможно, что процесс спуска/декодирования будет осуществляться несколько раз (в зависимости от уровня абстрактности понятия и поставленной задачи[2]). Причем именно здесь и совершается *творческая* математическая деятельность соответствующего типа: геометрические построения, алгебраические вычисления или логико-математические доказательства, каждая из которых в свою очередь представляет некоторую совокупность допустимых в этой среде локальных действий-операций (типа проведения прямых, деление чисел или применение правила *modus ponens* в логическом выводе). Можно сказать, что на этом этапе задействуется пространственная и/или временная чувственная *интуиция*. За счет этого происходит выход за пределы первоначального понятия и [синтетическое] приращение знаний, поскольку любое [динамическое] *действие* (в отличие от статичных понятий и созерцаний) представляет собой *синтез*, по крайней мере, двух представлений[3]. А результат этого синтеза путем

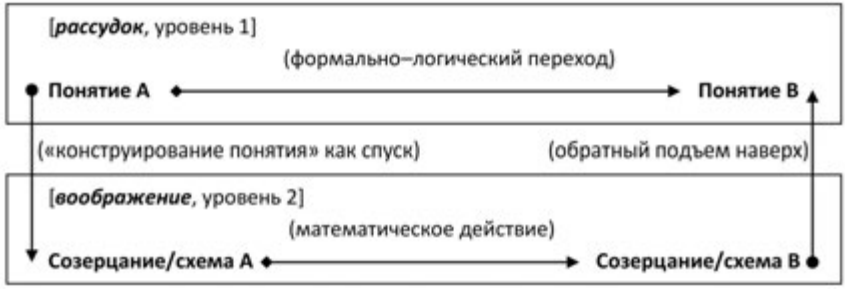
---

[1] Там же. 538 [B757]; вставки в квадратных скобках мои. — *К.С.* Ср. с гуссерлевским варьированием!

[2] Соответственно, и конкретизирующие эти абстракции «спуски» также будут многоуровневыми, причем промежуточные «спуски» будут спусками на уровень не чувственности (воображения), а предшествующий рассудочный уровень: см. фрагмент [A 109]. Однако в конечном итоге необходимо «сделать чувственным всякое абстрактное понятие» [B 298], т.е. осуществить «спуск» на уровень чувственного созерцания, т.е. к единичному ментальному образу или к геометрическому чертежу.

[3] Трансцендентальный прагматизм проясняет тезис Канта о синтетическом характере математических суждений. Структурно любое действие может быть представлено как пара «начальное состояние — конечное состояние». Поэтому любое действие синтетично. В частности, синтетично суждение «5 + 7 = 12» как результат операции сложения двух чисел. Его синтетичность связана именно с действием сложения, которое объединяет в единое целое (сумму) члены сложения: «действие» [сложение] и придает сумме синтетический характер. Поэтому нельзя, как это делает Фреге (см. его «Основоположения арифметики») трактовать запись «5 + 7 = 12» лишь как формальное равенство [рассудка], поскольку за ним скрыто реальное [ментальное] действие по конструированию понятия, или сложение, которое происходит на уровне [чувственного] созерцания как объединение единиц, содержащихся в 5 и 7. В этом смысле математический знак «=» означает не равенство левой и правой части формулы, а переход (= действие сло-

обратного возврата (*подъема*) на рассудочный (понятийный) уровень фиксируется как формальный результат построения, вычисления или доказанной теоремы. Схематически математическую деятельность, по Канту, можно представить так:



Обратим еще раз внимание на важное различие кантовской прагматико-конструктивной концепции и современного логизированного подхода к пониманию математики. На приведенной схеме мы различили собственно математическую деятельность (т.е. реальный процесс математического построения, вычисления или доказательства) как «действие» в созерцательных средах (пространства и времени) в нижней части схемы и ее *логическое оформление*, которое может быть представлено в верхнем блоке схемы как формально-логический переход от понятия (формулы) *A* к понятию (формуле) *B*, причем первое нельзя полностью свести ко второму. Заметим также, что кантовское *конструирование понятий* как отсылка к выполнению некоторых (допустимых!) действий над математическими предметами, в ходе которых они могут преобразовываться согласно математическим правилам, привлекательно и в следующем отношении. Спектр логических действий с *понятиями* ограничен: они могут изменяться лишь *логически* в небольшом диапазоне (разделение, пересечение и объединение понятий), а кантовский «спуск» на уровень созерцаний (как процедура «конструирования» понятий) позволяет расширить спектр возможных действий или преобразований с уже математическими предметами: например, поделить треугольник пополам или провести через одну из его вершин прямую, а также соотнести его с

жения) от левой части математического выражения к ее правой части (как результата этого действия). На приведенной ниже схеме переход от понятия **A** к понятию **B** является аналитическим на «поверхностном» (логическом) уровне, но является синтетическим на «глубинном» уровне математических действий.

другими предметами-созерцаниями или разложить исходный предмет на составные части.

* * *

Проведенный анализ математической деятельности позволяет предложить трансцендентальное решение проблемы онтологического статуса математических абстракций. Наивно реалистическая (= эмпиристская) онтология полагает существующим лишь то, что воспринимается (либо посредством наших органов чувств, либо посредством приборов) и может быть выражена максимой «существовать — значит быть воспринимаемым» (Дж. Беркли и др.). Однако, как мы уже отмечали выше, этот онтологический критерий не может претендовать на статус универсального, поскольку он не применим ни к математическим абстракциям, ни к теоретическим абстракциям современной науки. Кроме того, трансцендентальный анализ показывает, что само по себе *восприятие*, т.е. обнаружение на «экране» нашего сознания тех или иных содержаний [сознания], еще не гарантирует *объективного существования* этого содержания, поскольку для подобного приписывания мы должны быть уверены, что наше восприятие является результатом «внешнего» воздействия, а не (само)воздействием на нашу способность восприятия активных компонентов нашего сознания (каковым, по Канту, является рассудок). Тем самым возникает проблема отличения *объективного* (resp. *реального*) от *субъективного* (resp. *воображаемого*), поскольку, возможно, что мы выдаем за объективно-воспринятое порождения собственной фантазии. Причем здесь идет речь о родовом недостатке любого *восприятия*, в том числе и с помощью физического *прибора* (например, осциллографа), на экране которого вместо изображения *внешних* сигналов может быть представлен результат некоторой *внутренней* (*a la* субъективной) активности самого прибора, например результат сбоя его работы. Это означает, что одного критерия воспринятости для решения онтологической проблемы [существования предметов, в том числе и математических] недостаточно и он должен быть дополнен критерием отличения восприятия от псевдовосприятия, сна от яви (Декарт), или явлений реальных от воображаемых (Лейбниц).

Более того, в непосредственном восприятии нам не дан *объект* как таковой. Воспринимая, например, то, что мы именуем *камнем*, мы не воспринимаем *объект* под именем *камень*, поскольку наши органы чувств/приборы предназначены для восприятия не *объектов* [т.е. сущностей], а [их] *свойств*. Как говорит Кант, мы воспринимаем *чувственное многообразие*, которые при познании мы *интерпретируем* как восприятие [одного] объекта. [*Объективное*] существование

объекта постулируется нами, а условием этого выступает *трансцендентальное единство апперцепции*, «благодаря которому все данное в созерцании многообразное объединяется в понятие об объекте»[1]. Точнее, трансцендентальным условием нашего *предметного* (или «объектного») способа познания выступает, по Канту, *трансцендентальный предмет*, благодаря которому, по меткому выражению Э. Кассирера, «*мы познаем* не предметы, но познаем явления предметно!», т.е. трансцендентальный предмет выступает *предметной функцией*, посредством которой мы воспринимаем окружающий мир как состоящий из предметов.

Вместе с тем признание *a la субъективного* (необъективного) характера нашего восприятия не приводит с неизбежностью к субъективному идеализму берклиевского типа, т.е. к полной субъективации всех наших чувственных данных (проблема «первичные vs. вторичные качества»), ибо, как пишет Кант в § 19 2-го изд. «Критики», «связка *есть* имеет в суждении своей целью отличить **объективное единство данных представлений** от субъективного»[2]. Тем самым совокупный опыт, зафиксированный в структуре нашего языке, говорит нам об *объективном* [= объектном] существовании содержаний наших восприятий и поэтому причина нашей неудачи состоит в неверном выборе онтологического критерия, неявно принимаемом наивной мыслью (реализмом), который полагает, что для существования чего-либо достаточно постулировать возможность его *восприятия*.

Следуя интенции коперниканского переворота, предложим другой критерий *объективного существования*, возможно кардинально отличающийся от точки зрения обыденного рассудка с его наивно-реалистическим тезисом: «существовать — значит быть объектом возможного восприятия, т.е. быть в принципе воспринимаемым». Суть трансцендентализма Канта состоит в анализе нашего знания, а «всякое знание требует понятия... [которое] по своей форме есть нечто общее, служащее *правилом*»[3]. Реализуя этот кантовский подход, выберем в качестве парадигмы «объекта» не природные (физические) объекты (которые рассматривала в качестве парадигмальных вся предшествующая метафизика (как мета-физика), а математические объекты, которые имеют *конструктивный* способ своего *существования*. Соответственно, должен измениться и критерий объективного/объектного существования, который теперь будет звучать так: **существовать — значит быть конструируемым предметом**, т.е.

[1] Там же. С. 130, 132, 628—632.
[2] Там же. С. 133.
[3] Там же. С. 628.

построенным по некоторому правилу. Заметим, что этот критерий универсален, поскольку он применим к любым объектам, в том числе и к физическим предметам/феноменам, которые, в соответствии с коперниканским переворотом Канта, также не *даны*, а *заданы*.

В тексте «Критики» есть немало примеров подобных конструкций[1], но парадигмальным выступает следующий пример, посредством которого Кант иллюстрирует вводимый концепт трансцендентального предмета (resp. предмета/объекта вообще), который наряду с системой кантовских категорий лежит в основании трансцендентальной онтологии: «Так, мы мыслим треугольник как **предмет**, когда сознаем сочетание трех прямых линий согласно **правилу**, соответственно которому такое созерцание всегда может быть показано»[2]. И именно этот критерий конструируемости — правилосообразности (со смысловым акцентом на втором термине) Кант и кладет в основу *объективности*: *объективно значимым* выступает то, что является *правилосообразным* [т.е. подчиняется некоторому *правилу*], или *всеобще—необходимым*. Явным образом Кант говорит об этом в своих «Пролегоменах»: «Таким образом, *объективная значимость и необходимая общезначимость* (*для каждого*) *суть взаимозаменяемые понятия*, и хотя мы не знаем объекта самого по себе, но когда мы рассматриваем суждение как общезначимое и, стало быть, необходимое, то под этим мы разумеем объективную значимость»[3], — эта мысль проходит красной нитью через всю кантовскую «Критику»[4].

При этом в трансцендентализме существенно пересматривается смысл понятия *объективного/объектного* [существования]: *объективным* (= имеющим место в объекте) является *общезначимое*, т.е. имеющее место не только для нас, нашего единичного [субъективного] сознания, но для «*сознания вообще*» (= *трансцендентального* сознания). Таковыми выступают *формальные объекты-конструкции*, парадигмальным примером которых и являются математические абстракции. При этом трансцендентализм (resp. *трансцендентальный конструктивизм*) представляет собой разновидность *формальной онтологии* как науки об объектах вообще, которая получила свое даль-

---

[1] Там же. С. 423—430, 124—125, 103, 112 и др.

[2] Там же. С. 630.

[3] *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Кант И. Соч.: В 8 т. Т.4. М.: Чоро, 1994. С. 56. И далее Кант продолжает: «Объект сам по себе всегда остается неизвестным; но когда связь представлений, полученных от этого объекта нашей чувственностью, определяется рассудочным понятием как общезначимая, то предмет определяется этим отношением и суждение объективно».

[4] Ср. с: «Эти представления связаны в объекте, т.е. безотносительно к состояниям субъекта» [*Кант И.* Критика чистого разума. С. 134 (B 142)]; см. также: [там же, с. 95, 97, 102, 104, 105, 132—133, 155, 183 и др.].

нейшее развитие в феноменологии (Мейнонг, Гуссерль) и, более того, новый тип онтологии.

Вместе с тем трансцендентальный подход не является феноменализмом (субъективным идеализмом) берклиевского типа. Трансцендентальное — это не индивидуально-субъективное, а транс-субъективное. Тем самым в онтологическом отношении трансцендентальное занимает промежуточное положение между трансцендентным (объективным) и имманентным (субъективным), что сближает кантовское трансцендентальное с *интенциональной реальностью* Э. Гуссерля или *третьим миром* [знания] К. Поппера (Г. Фреге).

Достаточно точно онтологический статус трансцендентального выражает восходящая к Г. Фреге аналогия с телескопом (или другим измерительным прибором). Допустим, что у нас есть телескоп, посредством которого мы наблюдаем какую-то звезду. Реальная звезда будет соответствовать кантовской вещи-самой-по-себе, наш ментальный образ звезды, воспринятый с линзы телескопа, — эмпирически-субъективному представлению (образу) звезды. А вот каков статус изображения звезды на линзе («экране») телескопа? Понятно, что это и не объективно существующая звезда, но и не ее субъективное представление нашей психики. Она обладает трансцендентальным статусом, имеющим объективную значимость: кантовская вещь-для-нас, которая представляет вещь-саму-по-себе (т.е. саму звезду), выступает способом ее феноменальной данности для нашего сознания. Тем самым кантовская вещь-для-нас — это не некая самостоятельно существующая вещь, а та же реальная вещь (= вещь-сама-по-себе), хотя и данная нам посредством познавательной способности уже как вещь-для-нас: за являющейся нам вещью-для-нас «просвечивает» реальная вещь, причем она не «скрывается» от нас этим феноменом, а именно дается нам, правда, с помощью *посредника*, каковым у Фреге является телескоп, а у Канта — познавательный «инструмент» в качестве нашей «способности». При этом нужно иметь в виду, что телескоп в познании выполняет двоякую функцию: он является и познавательным орудием и средством представления результата познавательного акта. Последнее мы соотнесли с кантовской вещью-для-нас, а собственно трансцендентальное можно соотнести с «орудийной» составляющей нашей познавательной способности. В данном случае важно подчеркнуть ее особый онтологический статус. Например, если мы (как действующие субъекты) копаем землю, то *объектом* при этом выступает земля, а статус используемого нами орудия (лопаты) будет a la трансцендентальным, поскольку орудие [познавательного] действия концептуально не является ни «объектом» или «субъектом» познания, а выступает связующим звеном между ними. Правда, в отличие от телескопа или лопаты наши по-

знавательные «орудия», прежде всего кантовские априорные формы (в том числе и математические абстракции), изначально ментальны, а не объективны[1]. И точно так же, как телескоп или лопата превращаются из объектов в орудия, наши познавательные способности: чувственность, воображение, рассудок (и его сердцевина: апперцепция), — приобретают в ходе познания не эмпирико-психический, а транс-субъективный, или трансцендентальный статус.

Подобным трансцендентально-инструментальным статусом обладают и математические абстрактные предметы. С одной стороны, они принципиально отличаются от более привычных для нас конкретно-физических объектов и не должны рассматриваться как отвлеченные от них «копии». С другой стороны, это и не наши произвольные выдумки (фантазии), а своеобразные *инструменты познания*, посредством которых мы познаем мир и которые обеспечивают [вполне постижимую с точки зрения трансцендентализма] *эффективность математики в естественных* [и других] *науках a la* Вигнер.

Подытожим наше исследование, сформулировав «максиму» трансцендентального решения проблемы Вигнера о «*непостижимой эффективности математики...*»: математические абстракции/предметы являются не аналогами (или «копиями») физических объектов, а созданными нашим сознанием [трансцендентальными] особыми «ключами», посредством которых мы можем «вскрывать» замки природы (проблема соответствия наших *представлений предметам* реальности) и тем самым адекватно познавать ее.

Библиографический список

«Абстракция», «абстрактный объект»: статьи из «Новой философской энциклопедии»: http://iph.ras.ru/elib/0019.html

Аристотель. О душе // Аристотель. Сочинения. М.: Мысль, 1975. Т. 1.

Арнольд В.И. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008.

Гайденко П.П. История греческой философии в ее связи с наукой. М.: ПЕР СЭ, 2000.

Гудстейн Р.Л. Математическая логика. М.: Изд-во ИЛ, 1961.

Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970.

Гуссерль Э. О варьировании // Воображение в свете философских рефлексий. М.: Полиграф—Информ, 2008. С. 327—365.

Гуссерль Э. Идем к чистой феноменологии и феноменологической философии. М.: ДИК, 1999.

Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994.

Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 4. М.: Чоро, 1994.

[1] В этом состоит некоторая неточность данной метафоры: трансцендентальное «происходит» не из сферы реально-объективного, а из сферы ментально-субъективного.

Катречко С.Л. Платоновский четырехчастный отрезок (Линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА. Т. 14. Вып. 3. 2013. С. 172—177.

Катречко С.Л. Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. М.: КД, «ЛИБРОКОМ», 2014. С. 86—120.

Катречко С.Л. Кантовы основания программ обоснования математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15—16 июня 2007. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 69—71.

Клини С. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. С. 30.

Клайн М. Математика. Утраты определенности. М.: Мир, 1984.

Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967.

Новоселов М.М. Логика абстракций (методологический анализ). М.: ИФРАН, 2000.

Сборник статей по философии математики / Под ред. С.А. Яновской. М., 1936.

Фреге Г. Основоположения арифметики (логико-математическое исследование понятия числа). Томск: Изд. «Водолей», 2000.

Целищев В.В. Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002.

Хинтикка Я. Поверхностная информация и глубинная информация // Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980.

Юм Д. Трактат о человеческой природе // Юм Д. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1965. Т. 1.

Benacerraf P. What Numbers Could not Be // The Philosophical Review. Vol. 74. N 1 (Jan. 1965).

Beth E. Mathematical Thought. Dordrecht, Reidel, 1965.

Burgess J., Rosen G. A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

Field H. Science without Numbers: a Defense of Nominalism. Blackwell, 1980.

Field H. Realism, Mathematics & Modality. Blackwell, 1989.

Frege G. Uber Sinn und Bedeutung // Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritik. Leipzig, 1892.

Hellman G. Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. New York: Oxford University Press, 1989.

Hellman G. Structuralism without Structures // Philosophia Mathematica (3). Vol. 4. N 2 (May 1996). P. 100—123.

Katrechko S. Ding-Ontology of Aristotle vs. Sachverhalt-Ontology of Wittgenstein // Papers of the 31st International Wittgenstein Symposium (XVI). Kirchberg am Wessel, 2008. P. 169—172.

Linsky B., Zalta E. Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism // Journal of Philosophy. 1995. XCII. N 10. P. 525—555.

Mally E. Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik. Leipzig, 1912.

Rosen G. Abstract Objects: http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/.

Shapiro S. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford University Press, 1997.

С.М. Кускова

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Различные программы обоснования математики выявляют аргументацию, предваряющую введение, изменение или отмену того или иного принципа математической теории. Философский анализ этих аргументов, устанавливающий их истинность, связь с некоторыми эпистемологическими и онтологическими подходами, внутренний или внешний для математики характер, помогает видеть общую картину развития соответствующего раздела математики.

Следует разграничить философские проблемы математики, дающие материал для развития новых направлений научной философии, но решаемые средствами математики; и проблемы философии, обнаруживаемые с помощью значимого математического положения, для самой математики не создающего никаких проблем. Они должны решаться средствами философии. К проблемам второго рода относится вопрос о единственности натурального ряда.

Например, в трансцендентальной эпистемологии единственность натурального ряда обеспечивается схематизмом деятельности рассудка, опирающегося на созерцание чистой формы чувственности. Для построения порядкового числа недостаточно одних логических средств, нужны также формы созерцания. Априорные свойства этих форм придают необходимый характер синтетическим утверждениям математики. Необходимость трёх измерений пространства — не предубеждение, а закономерное следствие использования свойств созерцания трансцендентального субъекта. Варьируя эти свойства, можно получить иное созерцание пространства как предмет альтернативной геометрической теории, не выходя за рамки трансцендентализма. Не выполняется это лишь потому, что трансцендентальная философия считает вариативными только эмпирические свойства, а априорные — и аналитические, и синтетические — постоянными. Заслуга этой эпистемологии — отделение формальных (логических и полученных из чистого созерцания) свойств математических предметов от привходящих свойств эмпирической интерпретации. Так, существование единственного ряда натуральных чисел обосновано не

фактами устройства мира и человека, а трансцендентальными условиями деятельности построения предмета по схеме. Это философское утверждение, оправданное внутри одной теоретико-познавательной программы, не обязательно принимается в альтернативных программах.

Современный логицизм противопоставляет характеристики математических объектов и теорий, имеющие обоснование в логике и доказуемые чисто логическими средствами, и внелогические характеристики, специфически содержательные для математики как особого типа предметности.

Такие характеристики с позиции логицизма считаются контингенными, не детерминированными логическими правилами, а потому оспоримыми.

Только те свойства числа и натурального ряда, которые не зависят от устройства человеческого сознания и общественной практики (как и от любых фактов материального мира), составляют фундамент программы обоснования математики Г. Фреге и Б. Рассела. Согласно Фреге[1], математическое мышление работает не с предметами, а с понятиями о предметах. Понятия принадлежат объективному миру идеальных сущностей, независимому от первого физического мира и второго мира психических переживаний. Математические понятия принадлежат третьему миру, упорядочены жёсткими идеальными связями. Человек может их использовать в деятельности счёта, нумерации, измерения. Но сущность этих предметов не сводится к традиции их употребления, а подчиняется законам бытия истины, т.е. логике. Главная тема «Основоположений арифметики» — раскрытие сущности натурального числа. Это индивиды, отличающиеся друг от друга внутренними свойствами и независимые от эмпирических индивидов, к которым применяются для счёта. В отличие от Канта Фреге не использует схемы созерцания для анализа числового ряда, а определяет ряд после числа. «Место в ряду не может быть основанием различения предметов, поскольку последние, чтобы их можно было упорядочить в ряд, уже должны быть как-то различены»[2]. Предметы любой природы отделены друг от друга актами подведения под понятие. Наблюдая на ветке ворону и голубя, мы не заявляем сразу, что воспринимаем «два». Сначала подводим отдельные представления под общий род «птица», а потом говорим «две птицы». Нет непосредственного перехода от индивидов к их количеству. Для Канта посредник — чистая форма внутреннего созерцания, а для Фреге — общее понятие. «Собирательная сила понятия далеко превосходит объеди-

[1] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000.
[2] Там же. С. 71.

няющую силу синтетической апперцепции. Посредством последней невозможно связать в единое целое граждан германского государства; но зато их можно подвести под понятие “гражданин германского государства” и сосчитать»[1]. Ребёнок учится считать однородные в некотором смысле вещи, после того как усвоил один род, которому они принадлежат. Сначала надо абстрагироваться от уникальных свойств индивидов, а потом взять отдельную характеристику полученного общего понятия, итогом будет абстракция второго уровня. Числа получают в платонистическом мире место выше общих понятий, и дальше, чем понятия, отстоят от эмпирических предметов. Но предварительно для демонстрации примера понятия требуется какая-либо предметная область и набор признаков, потому что первые понятия, с которыми мы знакомимся, определяются через общий род и видовое отличие. Поэтому Фреге говорит об изолированных предметах a и в, подпадающих под понятие С, но распространяет это рассуждение на все понятия вообще, в том числе определяемые не явно.

Натуральное число у Фреге — это идеальный объект, соответствующий экстенсиональному свойству понятия. Понятие — минимальная форма мысли, основной предмет идеального «третьего мира» чистой логики. Определение понятия числа Фреге строит на базе учения о понятии вообще.

По объёму выделяются понятия пустые и непустые, единичные и общие. Экстенсиональная характеристика понятия кодируется натуральным числом. Но это не количество эмпирических индивидов, абстрагируясь от уникальных свойств которых мы впервые получили понятие. В биографии учащегося наблюдение предметов предшествовало формированию понятия, но объективно понятие уже обладает объёмом и содержанием — характеристиками, определяющими, какие в принципе предметы могут под него подпадать.

Понятиям «естественный спутник Земли», «планета Солнечной системы» и «спутник Венеры» сопоставляются числа 1,9 и 0 a posteriori, но Фреге строит понятия, объёмы которых заданы a priori и гарантированы их логической структурой. Например, число 0 сопоставляется самопротиворечивому понятию. Фреге оговаривает, что это не количество вещей, а самостоятельный объект, поставленный в соответствие пустому понятию. «Понятию соответствует число 0, когда под него не подпадает ни один предмет... понятию соответствует число 0, если при любом a предложение, что a не подпадает под это понятие, имеет всеобщее значение.

Сходным образом можно сказать: Понятию *F* соответствует число 1, если при любом a предложение, что a не подпадает под *F*, не имеет

[1] Там же. С. 77.

всеобщего значения, и если из предложений «a подпадает под *F*» и «*b* подпадает под *F*» всегда следует, что *a* и *b* суть одно и то же. (Фреге разными способами разъясняет, как понятие приводится в соответствие с 0 и как с 1. — *С.К.*).

Остаётся ещё дать общее объяснение переходу от некоторого числа к последующему... Понятию *F* соответствует число $(n + 1)$, если существует предмет a, подпадающий под *F*, причём понятию «подпадающий под *F*, но не *a*» соответствует число n[1]. Здесь использованы термины «тот же самый» и «различный», о значениях которых можно договариваться по-разному. Переход к числу, следующему за данным, иллюстрируется обнаружением нового предмета *a*, не подпадающего под прежнее понятие. Новое понятие может быть построено не единственным способом из-за конвенциональности правил отождествления и различения предметов.

Пусть понятию «Планета Солнечной системы, но не Плутон» соответствует 8.

Тогда понятию «Планета Солнечной системы» двумя способами устанавливается объём, в зависимости от решения считать Плутон планетой или астероидом.

Если Фреге связывает переход к следующему числу с построением нового понятия путём пополнения объёма исходного понятия тем или иным элементом, то он допускает разнообразие способов такого построения. Значит, нельзя считать, что так понимаемый переход от n к $n + 1$ единственный. Фреге признаёт, что результаты применения этого перехода во всех возможных случаях не будут однозначными.

«Прежде всего сомнение вызывает последнее определение; ибо взятый в точном значении смысл выражения “понятию *G* соответствует число *n*” нам также не известен, как и смысл выражения “понятию *F* соответствует число $(n + 1)$”. Конечно, мы можем при помощи данного и предпоследнего объяснения сказать, что означает “Понятию *F* соответствует число 1 + 1”, и затем, используя это, задать смысл выражения “Понятию F соответствует число 1 + 1 + 1”»[2], но мы не можем показать, что индивиды, используемые в этих определениях, обозначают именно числа, а не тела или какие иные вещи. Мы считаем, что такое определение индуктивного перехода зависит от внелогических допущений, которые и навязывают единственность его реализации.

Таким допущением является рассмотрение объёма понятия как совокупности индивидов. Оно оправдано при двух условиях: 1) индивиды составляют простейшую систему — множество — взаимо-

[1] *Фреге Г.* Указ. соч. С. 82.
[2] Там же. С. 83.

связями между элементами которого можно пренебречь, и 2) это множество конечное. Понятиям «красное» или «жизнь» мы не можем сопоставить множества индивидов, хотя знаем, что они не пусты. Чисто логически объём не конструируется из индивидов, а абстрагируется от структуры самого понятия как экстенсиональная характеристика. В результате её гипостазирования получается особая структура — число, которую только в отдельных случаях можно представить как множество множеств. Располагая только средствами логики, Фреге признаёт, что «для нас понятие числа ещё не установлено, но прежде должно быть определено при помощи нашего объяснения. Наше намерение — образовать содержание суждения, которое могло бы пониматься как равенство, так, чтобы каждая сторона этого равенства являлась числом. Мы, стало быть, хотим объяснить равенство не для данного случая, но при помощи уже известного понятия равенства, получить то, что рассматривается как равное»[1]. Отношение равенства встречается не только среди чисел, поэтому оно предшествует понятию числа, так же, как и отношение «объём понятия А шире, чем объём понятия В» является родовым для числового отношения «больше». Например, анализ отношения параллельности прямых приводит к установлению равенства их направлений, а эквивалентность формул сводится к равенству их истинностных значений. Равенство не дано в созерцании, как может быть дано совпадение сторон двух треугольников, а выявляется в анализе наблюдаемого отношения. Созерцание не необходимо и недостаточно для построения математических объектов.

Сравнение объёмов понятий Фреге производит не путём взаимного соотнесения их элементов, а установлением определений, ограничивающих равенство так, чтобы оно выполнялось только для чисел.

«Итак, предложение: Объём понятия «равночисленно понятию *F*» равен объёму понятия «равночисленно понятию *G*» всегда истинно тогда и только тогда, когда и предложение «Понятию *F* соответствует то же самое число, как и понятию *G*» является истинным»[2].

Из равночисленности *F* и *G* Фреге выводит существование отношения Ф, которое взаимнооднозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие *F*, с предметами, подпадающими под понятие *G*. Отсюда:

Выражение «n есть число» означает «Существует понятие такое, что есть соответствующее ему число». Цель построить число из одних лишь понятий, минуя области индивидов и их расположение в порядке счёта, достигается следующим определением:

---

[1] Там же. С. 88.
[2] Там же. С. 93.

0 — это число, соответствующее понятию «равно 0 и не равно 0».

(*Фреге принимает иную формулировку, но тоже использует исключительно логические термины: 0 — это число, соответствующее понятию «не равное себе». Он допускает и иное понятие, под которое ничего не подпадает, в частности, противоречивое. — С.К.*)

1 — число, соответствующее понятию «равное 0».

2 — соответствует «равно 0 или равно 1».

Важнейшее отношение «в натуральном ряду чисел n непосредственно следует за m» определяется так: «Понятие *F* и подпадающий под него предмет x существуют таким способом, что n — это число, соответствующее понятию *F*, и что *m* — это число, соответствующее понятию "подпадающий под *F*, но не равный *x*"»[1].

а) Сначала строится понятие «подпадающий под "равное нулю", но не ноль».

б) Ему сопоставляется число 0.

в) Отождествляется индивид, указанный в а), и число, введённое в б).

Пункт в) считается само собой разумеющимся, поэтому в натуральном ряду 1 непосредственно следует за 0.

Фреге отмечает, что n есть число в том же смысле, в каком m есть число, потому что понятие, соответствующее n, на данном этапе не построено, и нельзя из этого определения получить, что $n = m + 1$, так как величина шага зависит от выбора средств перехода от одного понятия к другому. Следовательно, на каждом шаге построения ряда имеется выбор, какое именно понятие строить дальше, и насколько его объём будет шире предыдущего.

Новое понятие выбирается так, что его содержание указывает на пройденную часть ряда.

Число, следующее за n, соответствует понятию «принадлежащий ряду, оканчивающемуся на n». Ряд строится добавлением члена дизъюнкции. Здесь важно использование только логических средств при определении каждого числа. Каждое следующее число характеризует понятия о числах, относящихся к понятиям, поэтому описывается в метаязыке. Следующее число $n + 1$ достигается, если из предшествующего понятия и логических операций получено новое понятие. Например, из понятия об индивидах ранга n строится понятие о понятиях, которые станут элементами ранга n объёма нового понятия. Построение натурального ряда требует движения от понятий к понятиям о понятиях, выражаемого в переходе к новому языку более высокого уровня, чем язык, в котором определено предыдущее число. Спуститься на уровень ниже, вычесть 1, означает перейти к объект-

[1] *Фреге Г.* Указ. соч. С. 100.

ному языку и исключить один элемент из множества *A* или *B* или *C*. Это можно сделать разными способами: удаляя дизъюнктивный член справа или слева, как позволяет логика. Но требование устранить вполне определённый член так, чтобы число, непосредственно предшествующее данному, оставалось единственным, уже не аналитическое.

Фреге ограничивается такими понятиями, объём которых имеет простейшую структуру — множество индивидов. Но бывают понятия, экстенсионал которых задан сразу в нескольких универсумах и не представляет собой множества однородных предметов.

Например, понятие «здоровый» обобщает признаки организма, образа жизни, цвета лица, питания и т.д. Аналогично понятие «футбольный» применимо к понятиям «матч», «игрок», «мяч» и т.д. Объёмная характеристика подобного понятия включает отношения между универсумами «людей» и «вещей», а не объединения их подмножеств. Сложная структура экстенсионалов таких понятий указывает на сложную структуру соответствующих им чисел, которые нельзя считать индивидами вроде точек на прямой.

Если имеется понятие *F* и взаимно-однозначное отношение Ф, сопоставляющее элементы универсума, на котором задан объём F, с индивидами другого универсума, то можно задать число, непосредственно следующее за числом, соответствующим F.

Если для каждого x, подпадающего под *F*, имеется a такой, что Ф (x, a), и существует y, не подпадающий под *F*, то y следует в Ф-ряду за x.

«Так как отношение Ф остаётся неопределённым, то ряд необязательно мыслить в форме пространственного или временного расположения, хотя этот случай не исключается»[1]. Здесь неединственность ряда связывается не только с вариантами обобщения понятий путём дизъюнктивного присоединения того или иного признака, но также с выбором отношения Ф, сопоставляющего элементы объёма фиксированного понятия *F* с предметами, которые только предстоит подвести под понятие.

Натуральные числа Фреге представляются нам разнокачественными сущностями, поскольку каждое требует своего языка, особым способом сопоставляющего символ идеальному предмету. Ряд изначально строится не как единый универсум чисел, а как иерархия универсумов, включающих следующее число, поэтому метод Фреге не предполагает единственности натурального ряда.

Понимание природы математических структур Л. Витгенштейн связывает с философским анализом языковых игр, чётко ограничи-

[1] Там же. С. 103.

вая сферу компетенции философии в решении проблем специальных наук: лингвистики, логики, математики.

«124. Философия никоим образом не смеет посягать на действительное употребление языка, в конечном счёте она может только описывать его. Ведь дать ему вместе с тем и какое-нибудь обоснование она не может... И математику она оставляет такой, какая она есть, не может продвинуть ни одно математическое открытие. Ведущая проблема математической логики остаётся для нас проблемой математики, как и любая другая.

125. Не дело философии разрешать противоречие посредством математического, логико-математического открытия. Она призвана ясно показать то состояние математики, которое беспокоит нас, — состояние *до* разрешения противоречия»[1]. Поэтому нельзя философскими средствами установить a priori, что математический объект должен иметь такое, а не иное, свойство, а на отношение объектов следует наложить такое, а не иное ограничение. Математика философии ничего не должна.

Отсюда можем заключить, что требование единственности для натурального ряда есть ограничение, налагаемое метафизикой, которую можно либо реконструировать, либо обнаружить среди действующих в культуре. Некая философия «продвинула математическое открытие», т.е. содержательное суждение о предметах не своей области. Добавлять новую информацию в науку на трансцендентальных основаниях нельзя, но прояснять аргументацию самой науки в пользу того или иного суждения — нужно.

Витгенштейн замечает, что наши представления о всяких словах формируются на основе первоначального опыта усвоения значений имён посредством указания на предмет. Когда мы экстраполируем этот способ денотации на любые выражения языка, оказываемся в метафизической ловушке. Так же, научившись одной игре, мы стремимся искать её свойства у других игр, но, обнаруживая, что ни одно свойство, такое как «состязательность» или «развлекательность», не присуще всем играм в мире, решаем, что невозможно понять, *что такое* игра.

Не происходит ли с нашим пониманием сущности математических объектов подобной ошибки?

Согласно Витгенштейну, объёмы таких понятий, как «игра», «язык», «слово», «понятие», представляют сложные системы отношений между множествами элементов, объединёнными общими признаками. Такие системы имеют много измерений, в которых каждая

[1] *Витгенштейн Л.* Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. М., 1994. С. 130.

совокупность получает особое значение. В частности, цвет можно рассматривать как пространство, разделённое на плавно переходящие друг в друга области красного, жёлтого, синего оттенков. Тогда каждая вещь занимает в этом пространстве определённое место. Порядок расположения тех же вещей в ином пространстве, например на шкале весов, будет отличаться от их порядка в пространстве цветности. Семейное сходство представляется так: А имеет тот же цвет, что и *B*, *B* имеет тот же вес, что и *C*, *C* имеет ту же твёрдость, что и *A*. Понятие X, обобщающее предметы *A*, *B* и *C*, имеет объём, ограниченный значениями параметров *A*, *B* и *C* в трёх измерениях.

Понять, что такое «игра» — значит установить все измерения, в которых рассматриваются признаки игр, и установить, какие игры имеют общие признаки.

«А результат этого рассмотрения таков: мы видим сложную сеть подобий, накладывающихся друг на друга и переплетающихся друг с другом, сходств в большом и малом»[1].

Витгенштейн показывает «семейную» структуру видов чисел, совокупность которых только в простейшем случае порождается дизъюнкцией, а в общем обнаруживает много отношений между универсумами объёмов понятия числа.

«И так же образуют семью, например, виды чисел. Почему мы называем нечто “числом”? Ну, видимо, потому, что оно обладает родством со многим, что уже называлось числом; и этим оно, можно сказать, обретает косвенное родство с чем-то другим, что мы тоже называем так. И мы расширяем наше понятие числа подобно тому, как при прядении нити сплетаем волокно с волокном. И прочность нити создаётся не тем, что какое-нибудь одно волокно проходит через неё по всей её длине, а тем, что в ней переплетаются друг с другом много волокон»[2]. Поэтому нельзя задать понятие числа через род и видовое отличие, и нельзя задать его объём объединением классов рациональных чисел, кардинальных чисел и т.д. Общее, что есть у всех чисел, — это общее в разных правилах построения.

От способа применения правила зависит, что именно получится в результате: конкретный элемент класса или схема произвольного элемента класса. Правило, по которому совершается переход от одного объекта к другому, можно понимать или как гипотезу, описывающую употребление знаков, или как соглашение о том, что считать выполнением предписания.

Наша привычка устанавливать соответствия между данными в таблице не гарантирует от иных способов соотнесения. Витген-

[1] Там же. С. 111.
[2] Там же.

штейн рассматривает два примера пользования таблицей как равноправные:

Так же равноправны будут варианты восстановления чёткого изображения фигуры по нечёткому, с размытыми границами. У нечёткого границы имеют толщину. Чёткие изображения будут отличаться площадью. Эти иллюстрации показывают, что игра предусматривает некоторую свободу действий игрока, не продиктованную правилами. Отдельный ход той или иной шахматной фигуры в данной партии определяет сам игрок, а направление хода связано с видом фигуры правилами игры. Знания правил перемещения фигур по доске недостаточно, чтобы стать шахматистом. Людей обучают выигрышным стратегиям, т.е. правилам того, как надо использовать собственные правила шахмат. «Но как выглядит игра, полностью ограниченная правилами, не допускающими ни тени сомнения, игра, которую всякое отклонение заклинивает? — Разве нельзя представить себе правило, регулирующее применение данного правила? А также сомнение, снимающее это правило, — и так далее?»[1]. Для этого нужно разграничить внутренние правила действия с объектами, и внешние правила, например устанавливающие последовательность применения правил внутренних. В роли внешних правил могут выступать нормы глубинной грамматики языка, описывающего процесс.

Та или иная степень наглядности грамматики обусловливает усмотрение предметных связей и наш способ их представления. Безотносительно к языку нельзя сказать, что А соответствует В. В языке должен быть метод проекции, соотносящий А и В. Витгенштейн считает принудительную силу фрагмента картины навязывать именно такое её продолжение не логической, а психологической. Мы склонны достраивать числовой ряд 1, 0, 3, 2 так: 5, 4, 7, 6, а не так: 6, 5, 4, 7, потому что обращали внимание только на один случай и не подозревали о других решениях.

Если требуется быстро дописать последовательность, человек не вспоминает различные формулы, пробуя с их помощью вывести данный фрагмент и используя для выведения следующих чисел. Важно

[1] Там же. С. 119.

не то, что он не делает это фактически, а то, что нет логического перехода от частного к общему, от нескольких чисел в строчке до общей формулы нахождения члена со сколь угодно большим номером. В таком случае используется «трансцендентальная схема» ряда.

Что именно схватывает человек, понявший, как надо продолжать ряд 1, 5, 11, 19, 29? Или он испытал формулу $a_n = n^2 + n - 1$, или увидел, что разности следующего и предыдущего числа образуют ряд 4, 6, 8, 10. Он ранее овладел техникой данной последовательности и сумел свести сложную задачу к простой. Правило построения ряда неформально такое: «прибавляй чётное число на 2 больше того, что прибавил на предыдущем шаге». Оно обладает большей наглядностью, чем формула.

Принцип может быть понят в разных формах и привести к неодинаковым результатам. Вспомним замечание Б. Рассела о формуле последовательности, «выведенной» из последовательности номеров такси, в которых человек ездит каждый день в течение месяца. Эта формула не предскажет, какие номера машин попадутся пассажиру в будущем. Так и ученик, используя для продолжения ряда недемонстративное умозаключение от одного фрагмента последовательности к другому или к формуле, не всегда делает одно и то же.

Учитель даёт задание продолжить ряд чётных чисел до 1000. Ученик делает правильно, но после 1000 пишет 1004, 1008, т.е. увеличивает шаг, уверяя, что он делает как раньше, правильно. Учитель его поправляет, но ученик убеждён, что и после 1000 продолжает действовать как раньше. Согласно Витгенштейну, два человека не приходят к согласию, чья последовательность соответствует начальному правилу. Оба одинаково понимают правило построения ряда и операцию «следующий за», но используют разные мета-правила применения правил. На обозримом интервале ряд, построенный двумя людьми или одним человеком в разное время, тождествен самому себе. Но нет оснований считать, что он не будет расщепляться за пределами фактически осуществимого числа.

При однозначном контекстуальном определении «0», «$\downarrow$», «N» возможны несколько способов употребления этих определений, порождающие разные натуральные ряды. В метаязыке есть правила использования переменных и констант, установления соответствия содержимого ячеек таблицы, меток на линейке с границами измеряемой вещи. Эти правила применения правил конвенциональны в отличие от правил действий с объектами. Значения отдельных терминов, по Витгенштейну, зависят от употребления в языковой игре. «Что значит “определять длину”, мы узнаём без предварительного

выяснения, что такое *длина* и что такое *определять*; значение слова "длина" постигается, в частности, посредством усвоения того, что значит определение длины»[1].

Так и значение понятия «натуральное число» проясняется анализом значения «Правило построения ряда натуральных чисел».

В рассмотренных выше примерах математическая игра развёртывается на готовом материале: имеются числа, формулы и учителя, знающие как надо действовать. И в таких благоприятных условиях возникают проблемы отождествления и различения объектов.

Но сам ряд, число и исходная операция задаются на пустом месте. Поэтому сложностей на начальном этапе больше: числа, построенные по индукции, отличаются «статусом» от чисел, нумерующих индуктивные шаги. Операция не задана на множестве, а порождает множество. Переход от одного объекта к другому имеет не ту же самую логическую структуру, какую имеет переход от другого объекта к третьему.

Опыт других языковых игр налагает ограничения на организацию игр математических. Например, схема числовой прямой задаёт видение чисел как точек на прямой. Если мы умеем проводить прямую линию по двум точкам, то привносим похожее правило в построение натурального ряда.

Чтобы применять метод полной индукции, надо задать не одно число, а два различных, например 0 и 1. Сохранение «длины шага» между ними обеспечивает логика: дизъюнктивное присоединение нового элемента к множеству. Ненадёжность аналогии ряда чисел с прямой линией проявляется в восприятии различий между числами. Ноль от единицы отличается сильно, как отсутствие предмета от его присутствия. Отличие 1 от 2 заметнее, чем отличие 7 от 8. Очень большие числа различить сложно, они сливаются, вызывая у нас идею бесконечности.

Воспринимаемые числа:
0 1 2 3 4 5 6 7.....
Номера шагов индукции
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10....

Первая схема навязывает мнение, что весь ряд уже завершён, вторая показывает, что осмысленно говорить можно лишь о конечных объектах.

[1] *Витгенштейн Л.* Указ. соч. С. 313.

Соблюдая единственное правило построения натурального ряда, но подвергая рефлексии правило применения правил, получим натуральный ряд неединственным способом.

Рассматривая математику как знание, мы принимаем постулат, что «все переходы уже сделаны», и следуем линейным порядком с заданным извне шагом. Но если математика также есть деятельность, нет оснований считать ряд в себе завершённым и метод его прохождения принудительным.

Внесоциальных, логических оснований для предпочтения именно этой структуры альтернативным нет.

Связь принципа единственности натурального ряда с гипотезой о его актуальной завершённости показывает А.С. Есенин-Вольпин[1]. Он разработал ультраинтуиционистскую программу метаматематики, не допускающую необоснованных утверждений в доказательствах. Эта программа сочетает интуиционизм в логике и логицизм в математике (неоспоримыми будут только те утверждения, которые получены логическими средствами без привлечения предметных суждений о специфике математических объектов).

Абстракция потенциальной осуществимости подвергается пересмотру. Проверка триллиона предложений так же невозможна ни для людей, ни для машин, как и проверка бесконечного множества предложений. Абстракция от ограниченности имеющихся в нашем распоряжении времени, места и материалов позволяет рассматривать колоссальные числа типа 10^{12} так же, как 5 или 6, хотя реально те числа не могут быть построены. Принятие данной абстракции Есенин-Вольпин называет традиционной точкой зрения, а учёт практической невыполнимости очень больших чисел действий — откровенной точкой зрения. Применение или отказ от данной абстракции связаны с некоторыми правилами математического мышления. Никаких внутриматематических доводов в пользу или против этой абстракции нет. Значит, принимая концепцию ультраинтуиционизма, надо от неё отказаться или ограничить её использование некоторыми разделами. «Не вызывает возражения, например, употребление гёделевых номеров в математической логике. Но в теории алгоритмов злоупотребление абстракцией потенциальной осуществимости недопустимо. В самом деле, что сказать по поводу “вычислимой” функции, значение которой, даже при аргументе, равном двум, потребовало бы... больше времени, чем просуществует наша солнечная система? <...> мы находим неясным, в каком смысле следует понимать непротиворечивость

[1] *Есенин-Вольпин А.С.* Анализ потенциальной осуществимости // Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека. М., 1999.

формальной системы, если противоречие в этой системе возможно лишь в такое громадное количество шагов, как, скажем, 10^{12}!!! Имея дело с такой системой, мы были бы практически убеждены в её непротиворечивости, если бы этому не препятствовали какие-нибудь теоретические соображения»[1].

Здесь проблема смещается от существования к предъявлению противоречий, как в социальной утопии, предписывающей принимать политические решения по укреплению государства и товарного производства, ведущие на 10^{12} шаге к идеальному состоянию общества, когда не будет ни денег, ни государства.

Для классической науки большое или малое количество не имеет значения, но для откровенной философии математики, как и для неклассического естествознания, «очень много» и «очень мало» различаются допустимыми правилами действий.

Если число отражает характеристики понятий, то понятия с расплывчатым объёмом, такие как «куча» или «лысый», соответствуют особому пониманию числа. «Ребёнок через секунду наверняка останется ребёнком, и всё же он может дожить до 70 лет, и никто тогда уже не назовёт его ребёнком; и это несмотря на то, что 70 лет содержат конечное число секунд»[2]. Таким же свойством, по мнению Есенина-Вольпина, обладают понятия «выполнимый», «вычислимый», «достижимый».

Критика учёным правила индукции направлена на её недемонстративный характер и двусмысленность прочтения квантора общности как, например, «все рассказы можно прочесть за день» и «каждый рассказ можно прочесть за день». Считается, что для натуральных чисел трактовка квантора безразлична, потому что их множество имеет простейшую структуру. «Иными словами, почему из утверждений $P(0)$ и $\forall n(P(n) \supset P(n+1)$ мы делаем вывод, что $P(n)$ для всякого n? По-видимому, всё дело в том, что мы уверены в выполнимости каждого отдельного шага того рассуждения, которое нужно при произвольно данном n, и делаем отсюда вывод, что выполнима последовательность из n таких шагов, хотя бы n равнялось триллиону... Если верить в выполнимость триллиона шагов, то почему тогда не поверить и в выполнимость бесконечного числа шагов? Ведь на самом деле ни то, ни другое не выполнимо, а что касается “мыслимости” или “изобразимости” триллиона, то ведь и число $\aleph_0$ обладает этими свойствами не в меньшей мере. Более того, число $\aleph_0$ мы фактически представляем себе лучше, чем триллион»[3].

---

[1] Там же. С. 121.

[2] Там же. С. 126.

[3] *Есенин-Вольпин А.С.* Указ. соч. С. 122.

На наш взгляд, в умозаключении используются скрытые посылки об операции сложения, которую надо определять индуктивно посредством операции x', т.е. принцип построения натурального ряда требует предварительного знания о нём: нумерация шагов индукции, выполняемая в метаязыке, должна совпадать с нумерацией чисел как объектов построения.

Ясность представления чисел и действий над ними зависит от наглядности используемых символов. Есенин-Вольпин показывает, что мы сводим объективную мыслимость предмета к информации о нём, выраженной в его обозначении. Запись информирует нас о некоторых свойствах числа. Так очевидно, что 1000! делится на 365, но неочевидные свойства надо устанавливать в течение долгого времени. Наглядность знака конвенциональна и зависит от правил определения свойств числа по форме записи (если сумма цифр числа делится на 3, то оно делится на 3). Но перечислить показанные структурой выражения свойства — не значит помыслить объект. Для кого-то и знак «∞» наглядный, но ему не следует заявлять, что он мыслит бесконечность. Есенин-Вольпин считает, что представления о бесконечности сформировались от невозможности достичь какого-то объекта. «Понятие бесконечности в математике может быть заменено понятием неосуществимого»[1]. Понятие фактически осуществимого объекта используется для доказательства непротиворечивости теории типов.

Инструментом рассуждения служит интуиционистская логика.

Абстракция потенциальной осуществимости принимается с оговорками, не налагающими на неё ограничений (не привносящими дополнительную информацию), а указывающими только некоторые, но не все, свойства абстракции.

Однажды выполненные построения — выполнимы.

Принимается гипотеза осуществимости следующего шага: раз применённую операцию всегда можно повторить. В частности, от натурального числа можно перейти к непосредственно следующему за ним.

Но отсюда не следует, что возможно совершить любое число таких шагов.

Проиллюстрируем операцию «'» схемой отображения множества $\aleph_0$ на подмножество $\aleph_0 \setminus \{0\}$:

X' 1 2 3.....ω
↑
X 0 1 2.....ω

[1] Там же. С. 124.

Обычно представляется, что всё множество разом отображается на подмножество, но фактически мы выполняем отображение поэлементно и не сможем выполнить шаг с конечным, но очень большим значением. Нельзя единственно правильным образом сопоставить неосуществимое число A и неосуществимое число $A^{|}$. Отказ от идеи бесконечности влечёт отказ от единственности натурального ряда.

Выделяются два вида осуществимости.

1. Объект A осуществим относительно $B_1,..., B_n$ если A может быть осуществлён в предположении, что осуществлены $B_1,..., B_n$.

2. $A*B$ осуществимо относительно операции «*», если осуществимо слово с буквами «A», «B» и «*». Сумма 10^9+10^9 осуществима относительно функции «+», но не «$^{|}$». Произведение $132 \cdot 625$ мы не выполняем путём сложения 132 раза числа 625, а пользуемся правилами умножения. Степень не сводится к умножению, умножение к сложению, сложение к «следованию за».

Есенин-Вольпин вводит понятия чисел, осуществимых относительно тех или иных операций. Объект, осуществимый относительно данных объектов и операций, надо интерпретировать как «объект, получаемый из данных объектов путём применения конечного числа данных операций»[1] . Бесконечность он понимает не как «очень много», а как невозможность завершить процесс, определяемый операцией, даже если процесс состоит из двух шагов. Так,

1) число «0» осуществимо;

2) для произвольного x, если x осуществимо, то $x^{|}$ осуществимо;

3) существуют неосуществимые числа.

Из 1) и 2) не следует, что x осуществимо для всякого x.

Противоречие 2) и 3) возникает только при допущении единственности ряда, или «достигается в неосуществимое число шагов» — как видно из этой фразы, фактически не достигается.

Осмысленность слов «и так далее» сомнительна не только потому, что неизвестно, *до каких пор* далее, но и *как* далее? Возможны разные ответы:

1) с тем же шагом;

2) с тем же коэффициентом изменения шага;

3) пока x достижим, переход тот же самый, что и к каждому числу меньшему x.

Неосуществимое число понимается как очень большое, потому что оно зависит от действия, выполняемого между полаганием одного числа и полаганием следующего. Выделяются два типа предметов: индивиды $a(0)$, $a(1)$,..., $a(z)$, где z — неосуществимое число. Из индивидов строятся множества. Множество $P(x)$ может содержать z

[1] Там же. С. 146.

элементов и быть осуществимым относительно {}, $P(x)$, но z не осуществимо относительно 0 и «|». Взятие множества { $a(0)$, $a(1)$,..., a(z)} есть один акт сознания, а переход от индивида $a(0)$ через «|» к индивиду $a(z)$ требует z иных актов. «Переход от $a(n)$ $a(n+1)$ никак не связан с теоретико-множественными операциями и потому может мыслиться как неизмеримо более сложный, чем построение каких угодно мыслимых множеств»[1].

Для построения арифметики приходится вводить новые гипотезы осуществимости чисел относительно каждой вводимой операции.

Две последовательности натуральных чисел равнообъёмны, если каждому осуществимому элементу одной соответствует осуществимый элемент другой. Но эти последовательности могут не совпадать, если они различаются неосуществимыми элементами. Множества равнообъёмны, если все их осуществимые элементы совпадают. Неосуществимым элементом может быть только индивид. Равнообъёмность можно иллюстрировать так:

Осуществимые числа Неосуществимые
A:_____ z
0 1 *n*
B: _____
0 1 *n*
A = *B*

Так, ряды могут совпадать осуществимыми частями, но различаться неосуществимыми в разных смыслах элементами. В частности, возможны числа, осуществимые относительно неосуществимого z и одних типов операций, а возможны и числа, неосуществимые относительно неосуществимого z и других операций.

Нерешённость вопроса о существовании наименьшего неосуществимого y<z позволяет полагать несравнимые числа z, лежащие на продолжениях натурального ряда «разных измерений».

A:_____ z_1

0 1 *n*

Осуществимые числа Неосуществимые

B:_____ z_2

0 1 *n*

A и *B* неизоморфны.

[1] Там же. С. 141.

В ситуации обучения счёту учитель останавливается на том числе из совпадающего для A и B интервала, которое ученик освоил. Число k освоено, если в силу откровенного довода заданная формула $F(k)$ истинна или ложна. Например, если доказуемо, что число k чётное или нечётное. Но неосуществимые числа в этом смысле не освоены. Нельзя сказать, равны ли они или одно «больше» другого. Если x — осуществимое множество, включающее z, то метатеоретически истинно $F(z)\vee\neg F(z)$[1], т.е. для обоснования этого мы не строим неосуществимое число предметов, предшествующих z, а учитываем только логическую форму закона. Средствами же интуиционистского предметного языка такие утверждения недоказуемы. Возможно, метатеория, обосновывающая полную математическую индукцию и свойства ряда номеров её шагов, опирается на классическую логику. Само же множество конструктивных объектов — чисел как индивидов, а не множеств, подчиняется интуиционистской логике.

На наш взгляд, выбор языка влияет на осуществимость математического объекта. Число 10^9 как индивид, входящий в множество натуральных чисел, и 10^9 как число шагов применения операции «$|$» требуют разных уровней языков. В первом случае язык содержит операции сложения, умножения, степени, позволяющие символически осуществить 10^9, во втором случае — не содержит.

Операция «$|$» не задана на готовом множестве, как «+», а участвует в построении множества, поэтому её применение за пределами осуществимости не гарантирует единственности результата. Роль операции «$|$» в арифметике резко отличается от роли рекурсивных функций, заданных на имеющемся множестве. Если последние, используя пример Витгенштейна, подобны ходам шахматных фигур, то порождающая натуральный ряд операция «$|$» подобна расстановке фигур на доске до игры. В её определение включён момент конвенциональности: социальных норм, интуиции пространства-времени, ограниченности ресурсов — всех внелогических факторов, принуждающих отождествлять возможно различные натуральные ряды.

Библиографический список

Витгенштейн Л. Философские исследования // Философские работы. М., 1994.

Есенин-Вольпин А.С. Анализ потенциальной осуществимости // Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека. М., 1999.

Фреге Г. Основоположения арифметики. Томск, 2000.

[1] Там же. С. 150.

С.С. Минков

ПРОБЛЕМЫ ПОНЯТИЯ «ВЫСОКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ СУЖДЕНИЯ»

Io dirò cosa incredibile e vera
Я расскажу о верном и невероятном
Данте, «Божественная комедия»,
XVI песнь «Рая»

Мне кажется, что существуют две редко обсуждаемые, но очень досадные детали, которые делают само использование слов «высокая вероятность научной гипотезы» или «правдоподобие теории» крайне затруднительным.

Первая деталь: *индивидуальные факты не имеют вероятности*. Зачастую ускользает из виду, что утверждение «Жизнь на Марсе существует с вероятностью 3%» не имеет особого смысла. Само понятие вероятности было введено строго только для повторяющихся событий с обозримым числом возможных исходов (в так называемой аксиоматике Колмогорова). Скажем, в примере с игральным кубиком можно приписать каждому элементарному исходу (выпадению конкретного числа) вероятность 1/6; понятно, что при большом числе повторений бросаний кубика доля выпадания любого числа все ближе к 1/6. Когда нет никаких повторений, нет и никакой вероятности. И ее нет не по причине какой-то неопределенности в терминах, а существенным образом. Попробуем понять, как определить вероятность, есть ли жизнь на Марсе. Проблема в том, что ответы, конечно, либо «ДА», либо «НЕТ», но тут нет никакого повторяющегося эксперимента. Пойдем путем сведения задачи к похожей на предыдущую. Зададим вопрос: пусть у планеты такой-то вес (с точностью до каких-то процентов) и такое-то расстояние до Солнца (опять же, примерно). С какой вероятностью на ней есть жизнь? Теперь вероятность определить просто. Надо поделить число всех планет такого типа, на которых есть жизнь, на число планет такого типа вообще. (Тут есть техническая проблема: а как мы узнаем, что на них есть жизнь? Но пусть нам инопланетяне дали общую статистику, а по конкретным планетам данных нет.) Получилась какая-то вероятность. Но потом мы решили уточнить вопрос и добавили к весу и расстоянию до Солнца еще и данные по составу атмосферы. И вероятность получилась совсем другой. Потом еще уточнили вопрос, добавили данные о числе спутников, о числе солнц и так далее. И вероятности будут получаться все время разные, они будут

«скакать» сколь угодно сильно, может быть, иногда превышая 90%, а уже со следующим уточнением параметра падая ниже 10%, чтобы потом снова вернуться, скажем, к 95%.

Вторая проблема состоит в том, что *учет влияния опыта на гипотезу требует введения неких «априорных» вероятностей*. Действительно, формула Байеса позволяет рассчитать, насколько данное наблюдение делает гипотезу более или менее вероятной — но только если начальное распределение вероятностей задано. Именно поэтому математики зачастую расценивают эту формулу как «сильно скомпрометированную безосновательными попытками ее применения», а попытки опереться на нее в философии — «неутихающим колоброжением вокруг формулы Байеса»[1]. Нижеприведенное рассуждение поясняет, какие бывают тонкости в понятии априорного распределения.

Знаменитый пример с индукцией ворон состоит в следующем. Пусть мы проверяем гипотезу «Все вороны черные». Это утверждение равносильно такому: «Все, что не черное — не ворона». Можно проверять всех ворон, можно — все нечерные предметы, а это кажется контринтуитивным. Формула Байеса, однако, говорит, как я представляю, что одинаковую убедительность дает проверка одинаковой доли среди ворон или среди нечерных предметов. А поскольку нечерных предметов очень много, то и проверка их займет очень много усилий.

Предельный случай с интуицией согласуется хорошо: если мы проверили все нечерные предметы и не нашли среди них ворон, то все вороны черные. Пока формула Байеса решала наши трудности. Но посмотрим на более экстравагантный пример.

Предположим, мы живем на Острове; Остров перегорожен Пустыми горами, делящими его на две равные части — Север и Юг. В Пустых горах ничего нет, а на Севере и Юге есть разные предметы в равном числе. Мы живем на Юге и нам известно, что на Юге ворон нет. Вороны живут на Севере, причем половина живет в Темном лесу, а половина — в других местах Севера. В Темный лес мы не пойдем ни при каких условиях. Как и прежде, нас интересует проверка гипотезы «Все вороны черные». Черный цвет распределен на Острове примерно равномерно на Севере и на Юге.

План № 1. Проверять ворон. Для этого надо отправиться на Север и проверить все доступные места. Так как Темный лес для нас закрыт, то мы переберем половину ворон. Половина полной индукции проведена.

---

[1] *Босс В.* Лекции по математике. Вероятность. Информация. Статистика. М.: КомКнига, 2005. С. 19.

План № 2. «Все вороны черные» = «Все, что не-черное, не ворона». Будем проверять все нечерные предметы. Можно обойти весь Юг, проверяя нечерные предметы. Так как нечерные предметы распределены примерно равномерно, то мы проведем половину от полной индукции, как и в плане № 1.

Но этот план можно еще существенно улучшить. Действительно, зачем проверять предметы на Юге? Мы и так знаем, что ворон на Юге нет. Поэтому заведомо нечерные предметы — не вороны. Поэтому даже не надо ничего делать, чтобы получить половину перебора.

Абсурдная картина, когда перебор всех доступных ворон ничего не дает по сравнению с умозрительным рассуждением, разумеется, основана на прямом подлоге. В этой конструкции неявно предполагалось, что всякий предмет может с равной вероятностью быть вороной; но это не так. Мы знаем, что вероятность того, что предмет на Севере будет вороной, ненулевая; а на Юге — нулевая.

Проблема в том, что психология научного рассуждения часто основана на таком же подлоге. Например, вожди восстания ихэтуаней уверяли, что истинного китайца пуля не берет — она просто отскакивает от следующих китайскому учению. Естественно, европейцу это кажется абсурдным, хотя вряд ли он хоть раз в жизни видел, как стреляют в китайца и что при этом случается. Можно подумать, что рассуждение основано на силлогизме:

Все мягкие тела могут быть пробиты пулями.
Тела китайцев — достаточно мягкие.

Следовательно, их можно пробить пулями.

Проблема в том, как получена общая посылка. Как европейцу стало известно, что только твердое тело не может быть пробито пулями? Очевидно, так, что он проверял все тела, от которых пули отскакивали, и все они оказались твердыми. При этом ему совершенно не важно было, следует ли тело китайскому учению или нет.

Тут картина полностью аналогична ситуации на Острове. Как там игнорирование разной вероятности встретить ворону на Севере и на Юге стало причиной ошибки, так и тут, вполне возможно, игнорирование разной вероятности для следующих китайскому учению и не следующих китайскому учению может быть фатальным. В конце концов, ихэтуани согласились бы, что из всего виденного европейцем только твердые предметы могут отражать пули. Опыт европейца не противоречит опыту ихэтуаня; противоречие возникает из-за неправомерного обобщения.

Хиллари Патнэм писал по этому поводу, сравнивая гипотезы иллюзорности и реальности мира: «Мы должны признать, что выбрали позицию, согласно которой эта гипотеза a priori менее вероятна, чем наша обычная гипотеза». Выбор позиции представляется ему делом неизбежным, от которого невозможно отказаться и который неизбежно сводится к проблеме «экстраполяции опыта»[1].

Во всяком случае это «неправомерное» обобщение неизбежно, если надо применять формулу Байеса — откуда-то же надо брать начальное распределение вероятностей? В нашем примере европеец взял его равномерным по всем параметрам, кроме твердости — причем априорно. И выбора у него нет — он не может не обобщать события потому, что для индивидуальных фактов, как выше было показано, вероятность вообще не определена. Думаю, что самое главное, в конечном счете, не то, что автор гипотезы должен выбирать важные и неважные параметры и стартовое распределение вероятностей еще до начала проверки; самое важное — что обобщающий характер таких утверждений находится не в природе вещей, а в природе суждений. Утверждение «Все кошки смертны» существует в такой форме не потому, что кошки имеют одинаковую структуру, и потому проходят одинаковые фазы роста и старения, а потому, что в такой форме эта фраза востребована. Милль писал похоже, хотя и по другому поводу, что фраза «Все люди смертны» означает только «Каждый человек из живших до меня умер»[2], замечая, что правильно выбранный язык и данные определения являются существенной частью научной работы. Однако в вопросе первичности языка и опыта при таком раскладе приходится вернуться к еще домиллевской философии Кондильяка, говорившего о первенстве языка[3]. Мы бы могли использовать, скажем, не слово «люди», включающее Сократа, а слово «элюди», включающее всех людей, кроме Сократа. И тогда никакой индуктивный переход не состоялся бы.

Утверждение «Смертны все кошки, кроме Бастет» с точки зрения проверяемости в условиях недоступности Бастет приводит к тем же результатам, что и «Все кошки смертны». Становится даже непонятно, в каком смысле существование бессмертной кошки Бастет называется нарушением законов природы и чудом; ведь противоречие

---

[1] *Патнэм Х.* Философия сознания. М.: Дом интеллектуальной книги, 1999. С. 139—142.

[2] *Милль Дж.Ст.* Система логики силлогистической и индуктивной: Изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования. М.: ЛЕНАНД (URSS), 2011. С. 178—179.

[3] Там же. С. 173.

здесь не с индивидуальным фактом и не с опытом, а с первоначальным априорным распределением вероятностей.

Библиографический список

Босс В. Лекции по математике. Вероятность. Информация. Статистика. М.: КомКнига, 2005.

Милль Дж.Ст. Система логики силлогистической и индуктивной: Изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования. М.: ЛЕНАНД (URSS), 2011.

Патнэм Х. Философия сознания. М.: Дом интеллектуальной книги, 1999.

В.Х. Хаханян

ИСТИНА, МАТЕМАТИКА, НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ[1]

Введение

До середины XVIII в. достоверность (истинность) математических утверждений не вызывала у математиков никаких сомнений. Однако в созданном Г. Кантором учении о множествах (теории множеств) были обнаружены противоречия. С тех пор одним из центральных вопросов философии математики является вопрос об истинности математических теорий. Предложенные основоположниками (Расселом—Уайтхедом, Гильбертом, Брауэром, Цермело и Френкелем, Марковым-младшим и рядом других математиков) возможные выходы из создавшейся в математике ситуации (в её наиболее абстрактных разделах) не привели к полному согласию среди математиков и вызвали трудности различного характера.

В статье будут изложены (с опорой на последние достижения в математике) основные причины неудач в вопросе обоснования математики и предложен некоторый вариант выхода из создавшегося положения (который также, наверняка, будет принят не всеми математиками).

1. Немного истории

1.1. Кризисы в математике

В истории развития математики не раз возникала ситуация, требовавшая введения новых математических объектов или разъяснения новых, кажущихся парадоксальными, получаемых результатов. Описанные ниже кризисы в основаниях математики наиболее значимы для развития математики и философских взглядов (это, без сомнения, принимается всеми математиками, которые

[1] Заметки из докладов на Московском семинаре по философии математики 19 октября 2007 г., 16 мая 2008 г. и 19 октября 2012 г., на семинаре «Онтология науки» Института философии РАН 24 февраля 2009 г. и на Третьей Всероссийской научной конференции «Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность» 27—28 сентября 2013 г.

это развитие оценивали). Исторически первым было открытие несоизмеримых отрезков и появление нового класса чисел — иррациональных. Открытие понятия несоизмеримости и сформулированные несколько позднее Зеноном Элейским апории поставили перед математиками и философами того времени совершенно новый вопрос: возможна ли математика как точная наука, что дало основание говорить о кризисе греческой математики[1].

Другой заметный кризис, приведший к новым математическим и философским взглядам в математике, заключался в попытках доказательства выводимости пятого постулата в аксиоматической системе геометрии Евклида. Безуспешность этих попыток привела математиков к открытию новых геометрических систем и, в итоге, к вопросу о том, что представляет собой, с точки зрения геометрии, реальное пространство Вселенной. В конце XVIII — начале XIX в. Гаусс, Лобачевский и Бойяи сделали первый и очень робкий, не понятый ещё полностью тогда никем, шаг к полной формализации геометрической науки. Шаг, который, будучи доведённым до логического завершения, дал бы возможность не только доказывать, что что-то существует, но уметь также обосновывать, что чего-то не существует. Последующая полная формализация была проведена впервые Д. Гильбертом в 1899 г. также для геометрии Евклида и позднее предложена им же в качестве существенной составляющей его программы обоснования всей математики[2].

Ещё один значительный кризис в основаниях математики был порождён противоречивыми результатами, полученными в исчислении бесконечно малых в XVII—XVIII вв., которое не удавалось удовлетворительного обоснования в течение продолжительного времени (одни математики считали бесконечно малые величины нулями, другие — нет). Однако здесь нас более интересует кризис, связанный с геометрией.

Программа обоснования математики стала особенно необходимой после того, как в учении Г. Кантора о множествах («наивная» теория множеств)[3] были обнаружены противоречия. Это, конечно, был самый мощный (третий из рассматриваемых) кризис в математике, так как этот кризис затронул глубинные основы математики (противоречие, обнаруженное Б. Расселом в 1902 г. и не только оно; ниже оно приводится полностью). Не описывая в деталях сложившуюся ситуа-

---

[1] *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1999. С. 58—60.

[2] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л.: ОГИЗ, 1948; *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

[3] *Кантор Г.* Указ. соч.

цию, заметим, что было предложено значительное число возможных выходов из создавшегося положения, но, к сожалению, не удалось сохранить первоначальный, «наивный», вариант учения Г. Кантора о множествах. Системы аксиоматической теории множеств Б. Рассела — А. Уайтхеда (простая теория типов TT), бестиповые системы теории множеств Цермело (Z), Цермело—Френкеля (ZF), Куайна (NF), теория классов Неймана—Бернайса—Гёделя (NBG) и ряд других, не получивших столь широкой известности, как перечисленные выше, а также новые философские точки зрения по вопросу обоснования математики Б. Рассела и Г. Фреге (логицизм), Л.Е.Я. Брауэра (интуиционизм или, более точно, неоинтуиционизм), Д. Гильберта (формализм и финитизм)[1], конструктивные направления в математике, развиваемые А.А. Марковым-младшим и его школой[2], Е.Бишопом, Дж. Майхиллом, Х. Фридманом, М. Бизоном и некоторыми другими математиками (см., например, для обзора Beeson M.[3]), и некоторые современные взгляды на возможное обоснование математики ряда математиков и философов — например, обращение к релевантной логике[4] или аналогичная попытка, но к релевантной арифметике[5], которые не приводят нас к желаемому, приемлемому для всех выходу из новейшего кризиса в основаниях математики.

1.2. Две тенденции в развитии математики

Отметим две важные тенденции в развитии математики, которые заметной линией проходят через всю историю последней. Во-первых, это стремление к всё более формализованному аксиоматическому изложению различных математических дисциплин, вызванному возрастающими требованиями к строгости математических доказательств, ведущему своё начало от геометрической аксио-

---

[1] *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936; *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966; *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.

[2] *Марков А.А.* О конструктивной математике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. LXVII. Проблемы конструктивного направления в математике. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 8—14; *Кушнер Б.А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.

[3] *Beeson M.* Problematic Principles in Constructive Mathematics. Preprint N 185, Department of Mathematics, University of Utrecht, February 1981, part 2 “Some different philosophies of constructive mathematics”. P. 9—15.

[4] *Meyer R.K., Mortensen C.* Inconsistent models for relevant arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 49 (1984). P. 917—929.

[5] *Friedman H., Meyer R.K.* Whether relevant arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 57 (1992). P. 824-831.

матики Евклида и получившему мощный новый толчок с появлением неевклидовой геометрии Лобачевского—Бойяи. Постепенно такое изложение, приобретая всё большую степень формальности, достигает современного состояния у Д. Гильберта (также в геометрии), в работах К. Гёделя и ряда других современных математиков, в первую очередь математических логиков.

Во-вторых, происходило постоянное противоборство (особенно заметное за последние два века) между двумя видами бесконечности, а именно актуальной (один из самых ярких представителей — Г. Кантор и созданное им учение о множествах) и потенциальной (тут в качестве таких представителей можно назвать Л.Е.Я. Брауэра и А.А. Маркова-младшего). Именно в связи с принятием и развитием Г. Кантором неограниченной абстракции актуальной бесконечности в созданной им «наивной» теории множеств (учении о множествах) и возникли противоречия. Отметим наиболее известные из этих противоречий. В «наивной» теории множеств (при интуитивном понимании понятия «множество»[1]) противоречивым является существование: во-первых, множества всех множеств (противоречие с тем фактом, что мощность множества подмножеств данного множества строго больше мощности исходного множества (теорема Г. Кантора, который и открыл это противоречие в 1899 г.)); во-вторых, существование множества всех множеств, не являющихся элементами самих себя (автор — Б. Рассел, опубликовавший это противоречие в письме к Г. Фреге 16 июня 1902 г.). Казалось бы, возникает вопрос об отказе от принятия понятия актуальной бесконечности, но ситуация не так проста. Если мы примем концепцию потенциальной бесконечности или, что является ещё более конструктивным предположением, существование очень больших, и, тем самым, практически недостижимых, натуральных чисел (такое положение фактически имеет место в современных криптографии, дискретной математике и в ряде других наук, в широкой степени опирающихся на «конечную» математику и не требующих обращения к полной абстракции потенциальной бесконечности), то мы не сможем, не добавляя каких-либо «естественно-приемлемых» дополнительных принципов, например тезиса Чёрча и принципа Маркова в традиционном конструктивизме А.А. Маркова-младшего[2], получить даже самые начальные фрагменты математического анализа и тех математических дисциплин, которые используют результаты и следствия из математического анализа так, как это де-

[1] *Кантор Г.* Указ. соч. С. 173.
[2] *Кушнер Б.А.* Указ. соч.

лается с помощью даже не самых сильных вариантов аксиом, базирующихся на понятии актуальной бесконечности, например ограниченной формы аксиомы выбора AC_{ω}[1]. Именно с такими трудностями и сталкиваются интуиционисты и конструктивисты любого направления, принимающие ту или иную трактовку понятия потенциальной бесконечности.

1.3. Формализм Д. Гильберта и финитная точка зрения

Возможный и очень многообещающий выход из создавшегося на рубеже XIX—XX вв. положения в основаниях математики, связанного с обнаружением противоречий в «наивной» теории множеств Г. Кантора, был предложен выдающимся немецким математиком того времени Д. Гильбертом[2]. Его концепция доказательства непротиворечивости математики заключалась в первоначальном разделении всех объектов в математике на реальные (действительные) и идеальные. Не выбрасывая последних, Гильберт предложил, во-первых, полностью формализовать математику, а фактически арифметику, или теорию натуральных чисел, так как к тому времени выяснилось, что все остальные разделы математической науки можно (в смысле построения моделей и доказательства непротиворечивости) свести к арифметике (арифметизация всей математики). Имея теперь дело с полностью формализованной арифметикой, т.е. с синтаксическими объектами (финитными образованиями), можно было бы попытаться доказать непротиворечивость полученного исчисления арифметики, т.е. доказать невозможность вывода некоторого синтаксического объекта (предложения), семантически выражающего в построенном формализме непротиворечивость арифметики. При этом (условие корректности) все выводимые в предложенном формализме утверждения (теоремы) должны быть истинны в некоторой естественной семантике, например на понимаемой привычным образом структуре натурального ряда. Используемые при этом внешним образом математические средства (Гильберт не дал их точного описания) признавались всеми математиками (так называемый финитизм или финитная точка зрения). Однако оказалось, что существуют истинные, но не выводимые утверждения рас-

[1] *Кановей В.Г.* Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М.: Наука, 1984. С. 4—9, 30 (окончание самого верхнего предложения).

[2] *Hilbert D.* Uber dieGrundlagender Logik und der Arithmetik. Verhanndlungen des Dritfen Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom. 8 bis 13. August 1904. Leipzig, 1905. P. 175—185 (приложение VII из книги Гильберта «Основания геометрии». С. 322—337).

смотренного арифметического формализма при условии непротиворечивости последнего (К. Гёдель, 1930 г.[1]) и, как следствие этого факта, была установлена принципиальная невозможность доказать непротиворечивость арифметического формализма средствами данного формализма (вторая теорема К. Гёделя, 1930 г.[2]). Анализ доказательства второй теоремы показал, что результат остаётся верным и для других, более слабых систем, (например, арифметики Робинсона), не говоря уже о сильных аксиоматических системах, формализующих математическую теорию действительного числа или теорию множеств. Отметим, что **до сих пор не удалось построить достаточно содержательную аксиоматическую теорию, в которой можно было бы доказать её собственную непротиворечивость.** Таким образом, хотя программа выхода из создавшегося в конце XIX — начале XX в. кризиса в основаниях математики, предложенная Гильбертом, и сыграла значительную роль в развитии математики (главным образом, математической логики), основная цель её создания достигнута не была. О дальнейших попытках «обойти» запрещающий результат К. Гёделя и связанных с этими попытками математических результатах (см. Аппендикс).

2. Возможный подход к обоснованию теории множеств

2.1. Современное состояние оснований математики (теории множеств)

Итак, положение дел в теории множеств можно охарактеризовать следующим образом. С одной стороны, совершенно ясно, что возврат к «наивному» варианту теории множеств невозможен при современном состоянии вопроса о доказательстве непротиворечивости формализованных систем. С другой стороны, исчерпаны, казалось бы, все возможные разумные выходы из создавшегося положения, которые не были приняты безоговорочно всеми математиками и философами, работающими в основаниях теории множеств. В книге А. Френкеля и И. Бар-Хиллела[3] (крупнейших специалистов в области оснований математики) мы читаем: **«Во взглядах на то, каким образом можно было бы достигнуть удовлетворительного обоснования, все ещё имеется большое расхождение и громадное**

---

[1] *Gödel K.* Zur intuitionistishen Arithmetik und Zahlentheorie Ergebnisse eines math. Koll., 1931—1932. S. 34—38.

[2] Ibid.

[3] *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Указ. соч. С. 416.

количество возникающих в этой связи проблем ещё далеко не решено. И все же подавляющее большинство математиков отказывается считать, что идеи Кантора были всего лишь болезненным бредом. Несмотря на то, что основания теории множеств все еще довольно шатки, эти математики продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты теории множеств в большей части разделов анализа и геометрии, и даже отчасти в арифметике и алгебре, твердо веря, что работы по обоснованию теории множеств приведут в конце концов к реабилитации теории множеств в полном (или, по крайней мере, почти полном) её классическом объёме. Эта позиция отнюдь не исключает готовности интерпретировать теорию множеств совсем не так, как это обычно делается, что соответствует, очевидно, существующей потребности в пересмотре интерпретации логики и математики вообще». Отметим, что процитированные строки были написаны почти полвека назад и, конечно, не могли учесть всех современных достижений в теории множеств (читай: в основаниях математики, так как появились и другие математические дисциплины, претендующие на роль, которую играла и играет в основаниях математики теория множеств). Учитывая сказанное, отметим, что первая часть вывода авторов **«…к реабилитации теории множеств в полном (или, по крайней мере, почти полном) её классическом объеме…»** кажется (и казалась и ранее) излишне оптимистичной, также как и возможность полного пересмотра интерпретации логики и математики, так как никаких удачных идей такого пересмотра (и направлений пересмотра) пока не удалось даже наметить. Но тем не менее уже нашло себе место направление (ниже приведены примеры для арифметики, теории действительного числа и теории множеств), заключающееся в локальной формализации той или иной части (раздела) математики и изучении с определённой метаматематической и философской точек зрения этой части (раздела), причём используемая метаматематика зависит, как правило, от философских взглядов того или иного исследователя, не исключающего разумности и аргументированности предлагаемого им подхода к основаниям математики. Взаимоотношение различных метаматематических разделов также может изучаться с формальной точки зрения (т.е. возникает метаматематика формализованных систем метаматематик).

Стоит отметить, что собственно **«…проблема устранения парадоксов** (лучше сказать — противоречий (автор)) **поглощается более широкой проблемой обоснования математики и логики. Какова природа математической истины? Какой смысл имеют математиче-**

ские предложения и на какого рода доказательствах они основаны? С этой широкой проблемой или комплексом проблем философия имеет дело (и будет иметь дело всегда по мере развития наших представлений о природе математического знания (автор)) **независимо от того факта, что в окраинных областях математики появились парадоксы** (противоречия (автор))»[1]. Ниже сделана попытка предложить некоторый подход к обоснованию теории множеств, но сначала, для примера, для арифметики (несмотря на кажущуюся простоту последней и готовность практически всех математиков верить в непротиворечивость некоторого расширения арифметики, такого, что доказательство непротиворечивости исходного арифметического формализма может быть дано в рамках этого расширения) и затем для теории действительного числа. Используя это положение (этот метод), можно применить его для арифметики с подлежащей интуиционистской логикой, именуемой арифметикой Гейтинга HA. Применить именно для интуиционистских систем, обоснование которых в начале XX в. вызывало меньше сомнений, чем систем классических[2].

2.2. HA как базисный вариант

HA — это аксиоматическая теория арифметики Пеано PA, но в системе логических схем аксиом которой отсутствует закон снятия двойного отрицания, так широко используемый в математических доказательствах. Не вдаваясь в детали, опишем идею подхода для обоснования арифметики HA и те дополнительные принципы, которые при таком подходе будут использованы. Сам предлагаемый подход можно применить и для обоснования значительно более мощных аксиоматических теорий, таких, как математический анализ (теория действительных чисел) и теория множеств (которая может быть рассмотрена как с подлежащей интуиционистской логикой, так и с классической, что и сделано ниже). В качестве базисной теории, которая с нашей точки зрения является ясной, хорошо понимаемой и не требующей обоснования, будет выбрана именно интуиционистская арифметика HA. В качестве дополнительных принципов мы рассмотрим: CT — тезис Чёрча с выбором (или его более слабый вари-

---

[1] *Клини С.К.* Указ. соч. С. 44.

[2] Колмогоров. Юбилейное издание в 3 кн. / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М.: Физматлит, 2003. Кн. 1. Истина — благо. Биобиблиография. С. 35; *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 45—69 (Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646—667).

ант CT!; тот и другой принципы утверждают, что существуют только вычислимые функции на натуральных числах); принцип P, который имеет вид $[\neg\psi\rightarrow\exists y\varphi(y)]\rightarrow\exists y[\neg\psi\rightarrow\varphi(y)]$, где формула ψ не содержит переменную y свободно (здесь мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда для конструктивного обоснования берутся не все вычислимые функции, как в обосновании с CT, а только функции из заранее заданного замкнутого подмножества множества вычислимых функций; принцип P выражает некоторую узко конструктивную точку зрения); ECT — тезис Чёрча для частично-вычислимых (т.е. не всюду определённых) функций натурального аргумента; принцип конструктивного подбора M (А.А. Маркова-младшего и также в сильной форме и в слабом варианте M^{-}); этот принцип утверждает, что поиск подбора нужного натурального числа с заданным свойством, при условии, что такое число не может не существовать, обязательно завершится. Все точные математические формулировки и подробные комментарии к ним можно найти в работе А.Г. Драгалина[1]. Там же можно найти все доказательства приводимых ниже утверждений, которые и являются в определенной степени обоснованием предлагаемого подхода для аксиоматической системы арифметики HA.

Итак, сделаем некоторые выводы, основывающиеся на математических результатах из работы Драгалина. Теория HA является базисной теорией и допускает разного рода расширения, которые имеют разную семантику и зачастую просто противоречат друг другу. В арифметике HA+M можно интерпретировать следующие аксиоматические теории, приводимые ниже. Это формальная классическая арифметика Пеано PA, это традиционный конструктивизм А.А. Маркова-младшего HA+CT!+M и различные варианты модификаций традиционного арифметического конструктивизма, это антитрадиционный конструктивизм HA+P+CT, это «арифметика реализуемости» HA+ET+M (принцип необходим только в случаях, когда он присутствует в расширенной теории). Как уже упоминалось выше, подробности и уточнения см. в работе Драгалина. Отметим дополнительно, что базисная система арифметики HA обладает рядом свойств, резко отличающих её от арифметики классической, а именно HA обладает свойствами дизъюнктивности (если в HA выводится предложение $\varphi\vee\psi$, то в HA выводится предложение φ или в HA выводится предложение ψ; в классической арифметике PA это свойство нарушается, так как выводим некоторый пример закона исключённо-

[1] *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, Физ.-мат. литература, 1979.

го третьего, ни один из дизъюнктивных членов которого не является выводимым) и нумерической экзистенциальности (если в HA выводится предложение $\exists x\varphi(x)$, то для некоторого натурального числа n в HA выводится формула $\varphi(n)$; в арифметике PA это свойство также нарушается); в HA нарушается и принцип существования наименьшего элемента (если существует число n со свойством $\varphi(n)$, то существует и наименьшее число с таким свойством; последнее присуще всем теориям с подлежащей интуиционистской логикой, даже теориям множеств; в таких теориях принципы существования с единственностью в посылке оказываются дедуктивно слабее тех же принципов без единственности, например в HA+CT! не выводится CT и последнее объясняется как раз отсутствием принципа существования наименьшего элемента).

Мы видим, что различные расширения интуиционистской арифметики HA, описанные выше, являются непротиворечивыми относительно базисной системы HA. Поэтому решить вопрос об абсолютной непротиворечивости какой-либо из этих арифметических теорий не представляется возможным. Следовательно, произносимая иногда фраза «HA (или PA или ещё какая-либо из рассмотренных теорий) непротиворечива» просто неверна. Перейдём теперь к рассмотрению разных формализаций теории действительного числа.

2.3. Теории действительного числа

Для теорий действительного числа ситуация меняется как по выбору базисной теории, основанной на интуиционистской логике (собственно, почему именно на интуиционистской логике? Может быть, можно взять другую логику, причем, может быть удастся обойти теорему Гёделя и доказать собственную непротиворечивость в рамках самой арифметики, но с другой лежащей в основании логикой? Этот вопрос ещё далеко не исследован, но пока достаточно содержательных формальных теорий с таким свойством (доказательством своей собственной непротиворечивости нет), так и по количеству её различных расширений (будут приведены далеко не все известные расширения даже из работы А.Г. Драгалина[1]). Поэтому наше описание будет очень кратким и мы дадим сводку результатов для анализа, опираясь только на монографию Драгалина[2]. Одной из базисных теорий, формализующих интуиционистский подход к теории действительного числа, является система BSK — базисная

[1] *Драгалин А.Г.* Указ. соч., раздел математического анализа.
[2] Там же.

система Клини. С.К. Клини принадлежит и теория FIM (основания интуиционистской математики), которую мы здесь не рассматриваем, но отметим, что именно теория FIM является одним из расширений системы BSK. Система BSK допускает и классическую модель, в отличие от теории FIM. Другую теорию, хорошо формализующую идеи Л. Брауэра для теории действительного числа, предложил Дж. Майхилл (теория MM). Эта теория очень точно формализует оригинальные замыслы Л. Брауэра относительно понятия действительного числа с помощью схемы Крипке (см. для точных формулировок ту же работу Драгалина[1]). Третий базисный вариант — теория в языке с функциональными символами и конструктивными операторами, IDB (индуктивные определения Брауэра) может быть расширен двумя (как минимум) разными способами: как формальная теория последовательностей, заданных законом CS (Крайзель, см. для точной ссылки ту же работу[2]) и как теория беззаконных последовательностей LS (Крайзель, 1958, точная ссылка в той же работе[3]).

Завершая на этом очень краткое описание формализованных теорий интуиционистского анализа, отметим, что разнообразие оттенков толкования последовательностей натуральных чисел представляет из себя еще более сложную, прямо-таки паутинообразную, картину по сравнению с аналогичной картиной, возникающей около базисной системы арифметики HA. С другой стороны, стратегическая схема исследования в области формализованного интуиционистского математического анализа та же, что и для формализованной интуиционистской арифметики: отыскивается базисное формализованное исчисление (для анализа таких базисных исчислений два: BSK и IDB) и около него строятся различные расширения (в том числе и классического характера), которые, как и в случае с интуиционистской арифметикой, иногда просто противоречат друг другу. Исследуются взаимные отношения большого числа разных принципов, непротиворечивость относительно базисной системы расширений, получаемых с помощью этих принципов, доказательство которой сопровождается построением большого количества моделей алгебраического и топологического характера (и не только таких), позволяющих достичь очень тонких различий в толковании свойств эффективности для исследуемых исчислений. При исследовании формализованных теорий множеств, т.е. теорий более высокого порядка, эта стратегическая схема исследования в полной степени будет сохранена. Отметим так-

[1] Там же.
[2] Там же. С. 173.
[3] Там же. С. 178.

же, что ряд расширений базисных систем формализованных теорий действительного числа (за исключением основанных на подлежащей классической логике), обладает хорошими эффективными свойствами (например, уже упоминавшимися выше свойствами дизъюнктивности, нумерической и полной экзистенциальностей; определение последнего свойства дано ниже).

2.4. Типовые и бестиповые теории множеств

Сначала отметим, что все результаты, которые были приведены для HA и её расширений, а также для теорий действительного числа, могут быть «подняты» на уровень бестиповой теории множеств типа Цермело—Френкеля с подлежащей интуиционистской логикой (теория ZFI или IZF). Какие именно из результатов можно «поднять» и точный математический, а также и философский, смысл этих результатов для теории множеств описан ниже.

Мы не будем рассматривать типовые аксиоматические системы теории множеств, так как очень многие (практически все) результаты, полученные для интуиционистских формализованных систем теории действительного числа (такие теории могут быть представлены как интуиционистская арифметика второго порядка), можно перенести на арифметику любого конечного порядка, на типовую теорию HA_ω (арифметика всех конечных типов) и на теорию типов TT Рассела—Уайтхеда. Поэтому сразу переходим к бестиповым аксиоматическим системам теории множеств типа Цермело—Френкеля.

Рассматриваемый базисный вариант (БВ) аксиоматической теории множеств ZFIR + DCS = БВ включает арифметику Гейтинга HA, систему Клини BSK, стандартные аксиомы и схемы аксиом теории множеств Цермело—Френкеля ZF и аксиому двойного дополнения множеств DCS, которая утверждает, что для каждого множества существует множество его не-не-элементов (для классической логики — очевидный факт; более точное формальное описание см. в моей работе[1]). Первые наиболее удачные варианты бестиповой теории множеств появились в работах Фридмана[2] и Майхилла[3]. Было доказано, что такие системы могут обладать свойством полной экзистенциальности (если доказано, что существует единственное мно-

[1] *Хаханян В.Х.* Дисс. на соиск. учёной степени канд. физ.-мат. наук: Модели интуиционистской теории множеств. М., 1982.

[2] *Friedman H.* Some applications of Kleene's method for intuitionistic systems. Lecture Notes in Mathematics. 1973. N 337. P. 113—170.

[3] *Myhill J.* Constructive set theory // The Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. 40. N 3. P. 347—382.

жество со свойством φ, то найдётся (эффективно по φ) формула ψ, определяющая это множество). Эти системы теории множеств допускают разного рода эффективные расширения для содержащихся в них арифметики и теорий действительного числа и для собственно теории множеств, например принцип униформизации UP, который говорит, что если для всякого множества (но не натурального числа!) существует натуральное число со свойством j, то существует единое натуральное число для всех множеств со свойством j. Таким образом, натуральные числа являются чётко определёнными объектами, а множества являются «размытыми», что противоречит классическому пониманию понятия множества. Впервые этот принцип был введён A. Troelstra в 1973 г. Существуют также расширения для систем теории множеств, сохраняющие математический анализ в том виде, в каком он присутствует в классических теориях (при добавлении ограниченной формы аксиомы выбора AC_{ω}). Классическая теория множеств Цермело-Френкеля ZF равно непротиворечива с БВ. Полную сводку имеющихся результатов, полученных не только автором, но и в литературе за последние 39 лет, можно найти в моих работах[1]. Дадим очень краткую сводку наиболее важных из этих результатов. Итак, для теории БВ были:

- исследованы свойства класса ординалов;
- исследованы соотношения ряда дополнительных постулатов интуиционистского, конструктивного и теоретико-множественного характера;
- построены обобщённые модели типа предикатов реализуемости для теории множеств;
- исследован ограниченный вариант аксиомы выбора AC_{ω} на вопрос совместности и независимости с теорией множеств БВ;
- построен класс функциональных алгебраических моделей для теории БВ и доказана теорема о корректности для этого класса моделей.

3. Предлагаемое обоснование

Итак, с одной стороны, как отмечалось, возврат к канторовскому («наивному») варианту теории множеств невозможен. Невозможен в рамках как классической, так и интуиционистской и, возможно, релевантной логик, но, может быть, не других логик (см. также пункт 5 ниже о теории «New Foundation» W.V. Quine'a).

[1] *Хаханян В.Х.* Дисс. на соиск. учёной степени кандидата...; *Хаханян В.Х.* Дисс. на соиск. учёной степени доктора философских наук.

С другой стороны ясно, что пока нет такого выхода из создавшегося положения, который бы устроил всех исследователей (хотя бы потому, что нет никакой возможности доказать непротиворечивость не только теории множеств (читай: всей математики), но и даже маломальски содержательной аксиоматической теории). Что же можно предпринять в такой ситуации? Кажется естественным обратиться к таким математическим принципам, которые не вызывают сильных сомнений ни со стороны математиков, ни со стороны философов-математиков. Похожий подход как раз проповедовался самим Д. Гильбертом и спор состоял только в том, какие именно принципы и методы, используемые в математике, можно считать финитными (читай: надёжными). Именно такого рода подход, но только в формализованном и достаточно эффективном (неклассическом) аксиоматическом варианте, и предлагается в данном сообщении. Конкретно: вся внешняя метаматематика должна укладываться в рамки аксиоматической системы БВ. Последняя не является чем-то застывшим и может расширяться (или сужаться) в зависимости от получаемых в математике (в первую очередь, в теории множеств с интуиционистской логикой) результатов.

4. Некоторые замечания, связанные с обоснованием классической теории множеств ZF

В столь краткой статье невозможно, конечно, обозреть все возможные варианты по обоснованию собственно теории множеств и математического знания в целом. Дать формальное (математическое) доказательство непротиворечивости не удастся, на мой взгляд, никогда (даже если и удастся тем или иным способом «обойти» вторую теорему Гёделя). Доказать относительную непротиворечивость какой-либо отдельной ветви математики строго (т.е. используя аксиоматический метод и сведя ее к другой ветви) практически возможно всегда. Например, как уже отмечалось, можно сводить математические дисциплины с классической логикой к аналогичным с интуиционистской логикой. Техника такого сведения развита достаточно хорошо. Первые результаты в этом направлении, связанные с исследованием именно логик, были получены А.Н. Колмогоровым[1] и В.И. Гливенко[2]. Основной метод

[1] *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur...

[2] *Гливенко В.И.* О логике Брауэра. Sur la logique de M. Brouwer. Academie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, ser 5, 14 (1928). P. 225—228;

сведения (не-не-интерпретация) был предложен К. Гёделем. В частности, можно считать аксиоматическую систему теории множеств Цермело—Френкеля ZF хорошо обоснованной, так как её можно проинтерпретировать в системе теории множеств БВ, описанной выше, при условии, что последняя система считается хорошо обоснованной. Следовательно, необходим критерий выбора либо философских основ математического знания (например, философских установок Л. Брауэра или А.А. Маркова-младшего), либо ряда классических принципов, которые кажутся нам достаточно надёжными (конечно, и в аксиоматических системах с подлежащей интуиционистской логикой выбор принципов занимает ведущее место). Принимая последнюю точку зрения и обозревая полученные к настоящему времени результаты (в первую очередь в дескриптивной теории множеств, см., например, работы Джеча[1] и Канамори[2]), можно попытаться выбрать наиболее приемлемые принципы, исключив тем самым недостаточно надёжные или «экзотические» принципы (например, аксиому выбора в полном объёме или некоторые утверждения о существовании так называемых «больших» кардиналов), которые приводят к очень странным и плохо представляемым с «наивной» точки зрения математическим результатам. Подробности см., например, в работе Кановея[3], в которой обосновывается для классической системы теории множеств Цермело—Френкеля положение, что замена полного варианта аксиомы выбора на счётный вариант AC_ω и добавление к полученной системе теории множеств аксиомы детерминированности AD (которая противоречит полной форме аксиомы выбора и из которой выводится счётная форма аксиомы выбора) представляют очень естественный вариант аксиоматической теории множеств не только для сохранения математического анализа в стандартном духе без появления таких неприятных «монстров», как множество Витали (в приведённой теории все множества оказываются измеримыми по Лебегу), но и позволяют также получить ряд результатов в духе «наивной» теории множеств Г. Кантора. Отметим, что ряд вопросов, заданных в кон-

---

Гливенко В.И. О некоторых аспектах логики Брауэра. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Academie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, ser 5, 15 (1929). P. 183—188.

[1] *Jech T.* Set theory. (English summary) The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[2] *Kanamori A.* The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginning. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[3] *Кановей В.Г.* Указ. соч.

це работы[1] автором, в настоящее время решён и, с одной стороны, подтверждаются очень многие, высказанные автором, гипотезы, а с другой — отклоняются также и некоторые авторские сомнения. Использование «хороших», не эффективных и плохо обоснованных (с математико-философской точки зрения) дополнительных математических принципов вызвало к жизни целый ряд работ, в которых авторы пытаются доказать противоречивость расширяемых такими принципами теорий множеств (причем иногда пытаются опровергать и достаточно привычные принципы; см. для ссылки **Аппендикс**). Однако, в противовес сказанному, имеются «работы» (т.е. не являющиеся проверенными публикациями), в которых «доказывается» непротиворечивость не только классической арифметики, но и теории множеств (также см. **Аппендикс**). Пока эти попытки и тех и других безуспешны (доказательства либо не достаточно ясные, либо плохо проверяемые, ибо используют «наивную» технику доказательств в духе первоначальной теории множеств Г. Кантора и избегают точных установок аксиоматического метода).

5. Замечания, связанные с обоснованием бестиповой теории множеств «New Foundations» W.V. Quine'a

Совершенно необычную, резко отличающуюся от стандартной теории множеств Цермело—Френкеля, но сильно похожую на теорию множеств Кантора, однако сформулированную аксиоматически и технически связанную с теорией типов Рассела—Уайтхеда, предложил в 1937 г. В. Куайн[2]. Арифметика, которая может быть развита в этой аксиоматической системе теории множеств, обозначаемой NF, которая основывается на классической логике, является практически стандартной. Однако математические теории более высокого порядка требуют дальнейшего исследования, так как NF обладает рядом свойств, совершенно непривычных для стандартного математического мышления (т.е. мышления в рамках ZF). Следовательно, и обоснование этой теории требует особого подхода, поскольку должно учитывать философскую и техническую основы NF. Здесь мы вынуждены ограничиться этими краткими замечаниями, поскольку вопрос требует дальнейшего математического исследования. Наконец отметим, что теория Куайна NF не является единствен-

[1] Там же, последние три страницы.

[2] *Quine W.V.* New foundations for mathematical logic // Amer. Mathem. Monthly. 44. S. 70—80.

ной, особо стоящей по отношению к другим, хорошо изученным, теориям множеств (см., например, работу В.Е. Шестопала[1]).

Аппендикс

Данное дополнение к статье связано с тем, что за последний год появились новые факты в математической науке и в ряде статей по философии математики, которые не выходят за рамки выводов, изложенных в данной статье, но которые требуют их отдельного обсуждения и пояснения. Это растущая сложность доказательств и затруднённость проверки этих доказательств; новые статьи, связанные со второй теоремой Гёделя и новые предложения по выходу из кризиса по обоснованию математики, а также с некоторыми уточнениями позиции автора по последнему вопросу.

Наконец, это различные точки зрения (достаточно уже известные и даже некоторые из них опубликованы в первом сборнике, посвящённом конференции по философии математики[2]) по вопросу «противоречивы ли некоторые аксиоматические системы теории множеств или нет», которые в математической своей части достаточно туманны.

1. Рассмотрим сначала вопросы, связанные с возможностью «обойти» или поправить вторую теорему Гёделя или привести некоторые «упрощения» в формулировке предложения, выражающего непротиворечивость классической (или интуиционистской, это не существенно) арифметики (можно рассматривать и расширения этих формальных систем, а также и некоторые, достаточно сильные, сужения этих систем, например арифметику Робинсона RA). Доказательство Гёделя теоремы о неполноте арифметики является, вероятно, первым, которое вызвало трёхлетнюю проверку Д. Гильберта и П. Бернайса. Отметим в связи с этим растущую сложность доказательств ряда решённых известных математических проблем (гипотеза четырех красок (не все математики считают эту проблему решённой!), Великая теорема Ферма, гипотеза Пуанкаре (М. Фридман для $n = 4$ и Г. Перельман для n = 3), наконец, ABC — гипотеза, решение которой проверяется).

Философскую значимость второй теоремы Гёделя переоценить невозможно, ибо для философии математики более интересного результата пока не получено. Попытки как-либо «обойти» этот феномен обречены на неудачу (как при возможных «поправках» самого предложения, выражающего непротиворечивость формальной арифме-

---

[1] *Шестопал В.Е.* Теория элементов и множеств. М.: Препринт Института теоретической и экспериментальной физики ИТЭФ 90-8, 1990.

[2] *Белякин Н.В.* О несуществовании больших кардиналов // Число: Сб. статей. М.: Макс-Пресс, 2009. С. 169—192.

тики[1], так и при попытках предложить другие подходы формального плана для обоснования математики[2]). В связи с последней статьёй, в которой ставится ряд достаточно жёстких условий, при которых можно было бы доказать непротиворечивость какой-либо формальной теории и «обойти» вторую теорему Гёделя, получив математическое обоснование этой формальной теории, приведём один контрпример. Речь идёт о работе Хайека[3] в которой рассматривается система теории множеств типа Цермело—Френкеля с подлежащей логикой, чьи истинностные значения есть отрезок [0,1] действительных чисел. В такой логике, например, **теорема о дедукции не верна**, но, тем не менее, автору этой статьи удалось доказать, что в этой аксиоматической теории множеств **всё же выполняется вторая теорема Гёделя!**

2. Фактически весь предыдущий текст данной статьи направлен к тому, что вопрос о непротиворечивости математики в целом **НЕ МОЖЕТ** быть решён в рамках самой математики, а обязательно нужно задействовать какие-либо «внешние» положения или постулаты. Система аксиоматической теории множеств БВ, приведённая выше, никак не решает проблему обоснования в целом. Поэтому сам собой напрашивается вывод: обосновать **достоверность** (читай **непротиворечивость**) математического знания (математики) внутри (т.е. средствами самой математики) **НЕВОЗМОЖНО**, да этого и не требуется. Математика существует не менее трех тысячелетий и возникающие в ней проблемы и потрясения решаются по мере их поступления и дальнейшего осмысления работающими в ней математиками. Вопросы же обоснования являются философскими вопросами и должны быть «решены» именно с философской точки зрения. Краеугольным камнем такой точки зрения **является вера в устойчивость здания математической науки,** которая поддерживается в нас уже три тысячелетия. Здесь хотелось бы отметить подход Л.Е.Я. Брауэра (но далеко не всех его последователей) к обоснованию математики[4]. Брауэр пре-

---

[1] *Бессонов А.В.* К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. Философия, социология, политология. 2011.№ 4(16). С. 177—189 (раздел Монологи, Диалоги, Дискуссии).

[2] *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики: недомогания и лечение: Монография. Новосибирск: Параллель, 2007. С. 25, пункты 3.10—3.13 и «исчисление задач».

[3] *Hajek P.* Towads Metamathematics of Weak Arithmetic over Fuzzy Logic. Volume of abstracts, Non-Classical Mathematics 2009, Hejnice, 18—22, June 2009. P. 27.

[4] *Плиско В.Е., Хаханян В.Х.* Интуиционистская арифметика. Введение. С. 9—12. Принято к печати; *Хаханян В.Х.* Философия интуиционистской математики // Логико-философские исследования. Вып. 4. М., 2010. С. 192—194; *Хаханян В.Х.* Интерпретации существования в математике // Философские науки. 2011. № 12. М.: Гуманитарий. С. 120—123.

жде всего философски исследовал проблему самого математического мышления и, опираясь на вытекавшие отсюда следствия, сформулировал свою программу выхода из кризиса оснований математики. Нетрудно видеть, что в основе этой программы лежит именно **ВЕРА** в необходимую (по Брауэру) ясность и логичность процесса математического мышления.

На этой ноте и позволю себе завершить статью.

Библиографический список

Белякин Н.В. О несуществовании больших кардиналов // Число: Сб. статей. Макс-Пресс, 2009. С. 169—192.

Бессонов А.В. К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. Философия, социология, политология. 2011. № 4(16). С. 177—189 (раздел Монологи, Диалоги, Дискуссии).

Гейтинг А. Обзор исследований по основаниям математики. ОНТИ НКТП СССР, 1936.

Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.

Гливенко В.И. О логике Брауэра. Sur la logique de M. Brouwer. Academie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, ser 5, 14 (1928). P. 225—228.

Гливенко В.И. О некоторых аспектах логики Брауэра. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Academie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, ser 5, 15 (1929). P. 183—188.

Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, Физ.-мат. литература, 1979.

Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Современная философия математики: недомогания и лечение. Монография. Новосибирск: Параллель, 2007.

Кановей В.Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М.: Наука, 1984. Серия ПНТП.

Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.

Колмогоров. Юбилейное издание в 3 кн. / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М.: Физматлит, 2003. Кн. 1. Истина — благо. Биобиблиография.

Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 45 — 69 (или Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646—667).

Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.

Марков А.А. О конструктивной математике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. LXVII. Проблемы конструктивного направления в математике × 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 8—14.

Плиско В.Е., Хаханян В.Х. Интуиционистская арифметика. Введение. Принято к печати.

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1999.

Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.

Хаханян В.Х. Модели интуиционистской теории множеств: Дисс. на соиск. учёной степени кандидата физико-математических наук. М., 1982.

Хаханян В.Х. Интуиционистская логика и теория множеств: Дисс. на соиск. учёной степени доктора философских наук. М., 2004.

Хаханян В.Х. Философия интуиционистской математики // Логико-философские исследования. Вып. 4. М., 2010. С. 192—194.

Хаханян В.Х. Интерпретации существования в математике // Философские науки. 2011. № 12. С. 120—123.

Шестопал В.Е. Теория элементов и множеств. М.: Препринт Института теоретической и экспериментальной физики ИТЭФ 90-8, 1990.

Beeson M. Problematic Principles in Constructive Mathematics. Preprint № 185, Department of Mathematics, University of Utrecht, February 1981, part 2 "Some different philosophies of constructive mathematics". P. 9—15.

Friedman H. Some applications of Kleene's method for intuitionistic systems // Lecture Notes in Mathematics. 1973. N 337. P. 113—170.

Friedman H., Meyer R.K. Whether relevant arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. 1992. Vol. 57. P. 824—831.

Gödel K. Zur intuitionistishen Arithmetik und Zahlentheorie Ergebnisse eines math. Koll., 1931—1932. S. 34—38.

Hajek P. Towads Metamathematics of Weak Arithmetic over Fuzzy Logic. Volume of abstracts, Non-Classical Mathematics 2009, Hejnice, 18—22, June 2009. P. 27.

Hilbert D. Uber dieGrundlagender Logik und der Arithmetik. Verhanndlungen des Dritfen Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom.8 bis 13. August 1904, Leipzig 1905. P. 175—185.

Jech T. Set theory. (English summary) The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

Kanamori A. The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginning. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

Meyer R.K., Mortensen C. Inconsistent models for relevant arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. P. 917—929.

Е.В. Щепин

В ПОИСКАХ УТРАЧЕННОГО АНАЛИЗА

В последнее время предпринимается все больше попыток ревизии стандартного начального курса анализа. Имеется, по крайней мере, два типа претензий к современному курсу анализа: первый тип касается трудности восприятия основных понятий теории пределов и второй касается его недостаточной конкретности — современные студенты плохо умеют считать.

В качестве примеров претензий второго типа приведу два высказывания авторитетных ученых. Андре Вейль[1]: «Наши студенты-математики могли бы получить гораздо больше из Эйлерова "Introductio in analysin infinitorum", чем из любого доступного современного учебника». Дональд Кнут[2] в посвященной Эйлеру «Конкретной математике» пишет: «Математика, которая требовалась для досконального и обоснованного истолкования компьютерных программ, совершенно отличалась от той, которую автор изучал в колледже в качестве профилирующей дисциплины». Претензии к трудности курса анализа возрастают в связи с общей деградацией математического образования в мире. «Эпсилон-дельта» язык теории пределов весьма нелегок для восприятия и даже попросту непосилен для большинства студентов. Так, в некоторых университетах США вообще запрещают применять «эпсилон-дельта» язык при объяснении пределов. А один опытный преподаватель сказал так: «эпсилон-дельта» и линейная независимость векторов — вот две вещи, которые не в состоянии понять инженеры.

Современный курс анализа пришел на место курса анализа Эйлера после кризиса в основаниях анализа, вызванного расширением понятия функции. Математики от Ньютона до Эйлера под функцией понимали то, что в современной математике называется аналитической функцией. Возможность выразить аналитическим выражением (тригонометрическим рядом) произвольно нарисованную линию, как это предполагал Д. Бернулли в знаменитом споре о колебаниях стру-

[1] *Hairer E., Wanner G.* Analysis by Its Hystory. Springer, 1995.

[2] *Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

ны, была отвергнута и Эйлером и Д'Аламбером. Теория рядов Фурье показала правоту Бернулли и привела к утверждению современного понятия функции. С новым понятием функции основы исчисления бесконечно малых у Эйлера были подорваны, а теория расходящихся рядов вообще лишилась смысла. Вместо исчисления бесконечно-малых Коши, Больцано, Абелем и Вейерштрассом была построена теория пределов, позволившая по-новому обосновать большую часть результатов предшественников. Позднее, с построением современной теории аналитических функций, удалось обосновать и Эйлерову теорию расходящихся рядов.

А «нестандартный анализ» реабилитировал и ключевое для курса Эйлера понятие «бесконечно-малая величина».

Курс Эйлера гораздо менее абстрактен по сравнению с современным: Эйлер прежде всего учит считать. А после Вейерштрасса курс анализа в значительной степени превратился в курс математической логики и «контрпримеров в анализе». Если по отношению к математическим факультетам такой крен в логику еще можно как-то оправдать, то для физиков, биологов и прочих естественников, которым анализ прежде всего должен давать средства вычислений, оправдать это трудно. Прикладникам надо уметь вычислять, а не доказывать теоремы существования. Типичная задача из теории рядов в современном курсе анализа — доказательство сходимости какого-нибудь ряда. В книгах Эйлера[1] вообще нет задач на сходимость. Зато прочитавший эти книги в состоянии суммировать точно и приближенно огромное количество рядов, включая расходящиеся. Причем приемы, даваемые Эйлером, с одной стороны, вполне доступны для восприятия и студентами, не способными овладеть критерием сходимости Коши, а с другой — не известны большинству современных профессоров математики.

Недостаточно мотивированные и слишком абстрактные определения — вот бич современного курса анализа. Естественный (исторический) порядок возникновения основных понятий дифференциального исчисления таков: интеграл — производная — предел[2]. А в современном курсе анализа порядок их введения прямо противоположен историческому. Во всяком случае, понятие суммы ряда определяется как предел последовательности частных сумм и поэтому излагается после теории пределов последовательностей. Понятие последовательности, конечно, очень простое и удобное понятие, но оно

---

[1] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых. М.: ОНТИ, 1936; *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

[2] *Hairer E., Wanner G.* Op. cit.

более абстрактно, чем понятие суммы ряда, поэтому с педагогической точки зрения последнее должно предшествовать первому, а не наоборот. Современный курс анализа начинается с учения о пределах. Как же может быть иначе, если и производная, и интеграл, и сумма ряда определяются на основе понятия предела?

Понятие предела трудно для понимания. Точнее, труден переход от интуитивного понятия «стремления» к точным эпсилон-дельта формулировкам, которые только и позволяют работать с этим понятием. Вообще, чем более абстрактным является понятие, тем труднее его усвоить. Поэтому начинать изучение абстрактного надо с его наиболее конкретных проявлений.

Одним из наиболее конкретных проявлений предела является сумма ряда. Если ряд положительный, то его полная сумма является супремумом частичных сумм, т.е. в этом случае понятие предела сводится к понятию супремума. Поэтому хорошо начинать с определения суммы бесконечного положительного ряда как наименьшего такого числа, которое превосходит все частичные суммы (слово «супремум» при этом даже не произносится).

Это соответствует истории: математика древних греков, не знавшая учения о пределах, вместо этого применяла так называемый метод исчерпывания, который представляет собой технику работы с супремумом. При этом строгость у греков была абсолютной.

Учение о рядах, не основанное на понятии сходимости, изложено в книгах Эйлера[1].

Логику, лежащую в основе всех вычислений Эйлера, можно было бы назвать *формальной*, тогда как для современного курса анализа типична *арифметическая* логика, основанная на четко определенных числовых операциях с бесконечными множествами. Для Эйлера арифметические соотношения (например, понятие суммы ряда) определяются через формальные (аналитические), а не наоборот, как это делается в современном курсе анализа. Т.е. из аналитического равенства (например, из формального разложения функции в степенной ряд) вытекают числовые равенства, получаемые посредством подстановки конкретного числового значения вместо переменной. То, что при подстановке такого рода может, например, получиться расходящийся ряд, т.е. соотношение, не имеющее смысла с арифметической точки зрения, для Эйлера несущественно. В этом случае он просто делает вывод, что суммой получившегося расходящегося ряда как раз и является значение другой части рассматриваемого функ-

[1] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых; *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление.

ционального равенства. Как теперь известно[1], такого рода подход не приводит к логическим противоречиям.

Вычисления Эйлера основаны на *аналитических преобразованиях* формулы, задающей функцию, к другой формуле, задающей ту же самую функцию. Таковым, например, является умножение числителя и знаменателя дроби на одну и ту же функцию. С современной точки зрения такое преобразование не является эквивалентным, потому что, в общем случае, меняет (сужает) область определения. Для Эйлера понятие области определения было чуждым: функция может задаваться многими формулами, с различными областями определения. И если различные формулы задают одну и ту же функцию, то из этого вытекает лишь их *согласованность*, выражающаяся в том, что результаты, полученные с помощью этих формул, совпадают там, где они обе применимы. Так, если подстановка какого-то значения в формулу, определяющую функцию, приводит к отношению нулей (особая точка), это совсем не значит, что функция, представленная этой формулой, не определена в данной точке, а значит лишь, что значение этой функции нельзя определить в данной точке с помощью данной формулы непосредственно. И для определения искомого значения функции в особой точке следует попытаться разрешить особенность, поискав другую формулу для той же самой функции. Например, дробь $\frac{x^2-1}{x-1}$ для $x = 1$ дает неопределенность $0/0$. Однако эту же функцию можно задать формулой $x + 1$, которая уже не имеет особенности в единице и потому, подставляя в последнее выражение единицу, мы находим и значение дроби. Иными словами, мы вначале выполняем деление функций глобально (в данном примере многочленов), а потом уже подставляем в результат деления интересующее нас значение переменной. Т.е. глобальное влечет локальное, а не наоборот, когда функция определяется через совокупность своих значений в точках, как это делается при современном определении функции.

Помимо обычных чисел значения функций определяются с помощью задающих их формул и для бесконечно малых, и для бесконечно больших чисел, что в современном анализе соответствует вычислению пределов функций при аргументе, стремящемся к нулю или бесконечности. Алгоритмы вычисления пределов в духе Эйлера по существу совпадают с алгоритмами, которые используются и в наше время.

В качестве простейшего примера рассмотрим определения значения дроби $\frac{\omega}{\omega+1}$ для $\omega = \infty$. Прямая подстановка бесконечности в эту формулу приводит к неопределенности типа ∞/∞. Но если поделить

[1] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Иностранная литература, 1951.

и числитель, и знаменатель на ω, то мы получим эквивалентную формулу $\frac{1}{1+1/\omega}$, прямая подстановка в которую $\omega = \infty$ уже приводит к определенному значению.

А вот как Эйлер доказывает теорему о единственности разложения функции в степенной ряд в своем «Introductio»[1]:

«Здесь может возникнуть такое сомнение. Если два ряда между собой равны

$$A + Bz + Cz^2 + D\,z^3 + \ldots = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \ldots ,$$

то следует ли отсюда неизбежно равенство между собой коэффициентов одинаковых степеней z; т.е. будет ли $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, ... Это сомнение легко устранится, если мы примем во внимание, что это равенство должно существовать, какое бы значение ни получило переменное z . Если $z = 0$, то ясно, что $A = A'$. Отняв от обеих частей эти равные члены и разделив оставшееся уравнение на z , получим

$$B + Cz + Dz^2 + \ldots = B' + C'z + D'z^2 + \ldots ,$$

откуда следует $B = B'$; подобным же образом покажем, что $C = C'$, $D = D'$ и т.д. до бесконечности».

Искушенный современный математик сразу увидит пробел в этом доказательстве с точки зрения теории пределов: не хватает доказательства непрерывности степенного ряда в нуле. Но приведенное Эйлером доказательство неявно опирается на приоритет глобального определения функции над локальным. Это доказательство вполне удовлетворяло математиков до Абеля и, без сомнений, вполне убедительно для неискушенных студентов. То же самое можно сказать и про доказательства Эйлера, использующие бесконечно большие и бесконечно малые величины. Эти доказательства можно рассматривать как упрощенный вариант современных доказательств, основанных на теории пределов.

Эквивалентным преобразованием Эйлер считает и разложение функции в бесконечный степенной ряд. Вот, например, как Эйлер развертывает экспоненту в степенной ряд, исходя из биномиального[2]:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3}x^3 + \ldots$$

Поскольку написанное выше разложение справедливо для любого конечного n, постольку, заключает Эйлер, оно справедливо и для бес-

[1] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых (пункт 214).
[2] Там же.

конечно большого n. Подстановка бесконечно большого значения n в это равенство превращает его в

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots$$

Современное доказательство, в сущности, следует этой же схеме, но при этом оперирует таким нелегким понятием, как равномерная сходимость.

Понятие бесконечно малой величины у Эйлера не было достаточно формализованным. Поэтому он прилагал максимум педагогического мастерства, чтобы подготовить читателя к его восприятию. Помимо рядов, которые давали читателю первый опыт обращения с бесконечностью, Эйлер предпосылал дифференциальному исчислению теорию конечных разностей. Он получал различные формулы для исчисления разностей с заданным шагом, которые потом превращались в формулы дифференциального исчисления при подстановке в них бесконечно малого шага. Современное понятие предела весьма отчетливо формализовано, но по существу оно является столь же трудным для восприятия, как и понятие бесконечно малой величины у Эйлера, и готовить его введение следовало бы с не меньшей тщательностью, чем это делал Эйлер. И теория конечных разностей тут тоже была бы вполне уместна. Тем более что в последнее время теория конечных разностей широко востребована в физике и в computer science.

Вообще, некоторый ореол таинственности у понятия бесконечно малой величины совсем неплох с педагогической точки зрения. Он стимулирует процесс познания. Другая особенность курса Эйлера — отсутствие в нем точных определений основных понятий. Ни Эйлерово определение функции как аналитического выражения, ни суммы ряда как значения функции, из разложения которой возник этот ряд, не являются достаточными с современной точки зрения. И тем не менее оказывается вполне возможным работать с этими понятиями. Как пишет в своей книге английский математик Г. Харди «Математики восемнадцатого столетия не любили определений... Современному математику и не придет в голову, что какое-либо соединение математических символов может иметь “смысл” до того, как ему придан смысл с помощью определения. Но это не было тривиальностью даже для наиболее выдающихся математиков восемнадцатого века. Определения не были в их обычае; Математики до Коши спрашивали не “как определить

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots?$$

”, а “что есть $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots?$”»[1]

[1] *Харди Г.* Указ. соч.

Наивный подход математиков XVIII в. к смыслу математических выражений, очевидно, естествен для неискушенного в современной математике. Поэтому его можно культивировать и у студентов. И вопрос типа «что есть 1-1+1-1+...?» может возбудить воображение и послужить хорошим поводом для дискуссии. К точным определениям следует прийти, в конце концов. Данные в самом начале эти определения недостаточно мотивированы и трудно усваиваются.

В курсе Эйлера органически присутствуют комплексные числа: без них неполна теория элементарных функций. Введение комплексных чисел в начальном курсе анализа многократно апробировано автором и хорошо себя зарекомендовало[1]. С одной стороны, комплексные числа позволяют удивлять и лучших студентов, а с другой — вычисления с ними вполне доступны весьма посредственным.

Итак, автор полагает, что студентов, для которых математика не является профильным предметом, стоило бы учить анализу в духе Эйлера, даже не пытаясь излагать им современной теории пределов. А для студентов-математиков начинать курс анализа в духе Эйлера и лишь позднее, во втором или третьем семестре, излагать им теорию пределов и заново доказывать уже полученные ранее формулы. Такой подход должен облегчить восприятие теории пределов и постепенно подвести студентов к современным требованиям математической строгости.

В последнее время автору приходилось сталкиваться с разного рода новациями в области построения теории интеграла. Так, в одном из университетов США для упрощения конструкции интеграла Римана вместо верхних и нижних интегральных сумм предлагалось рассматривать правые и левые суммы. А в одном мексиканском образовательном журнале, напротив, предлагалось чуть-чуть усложнить определение интеграла Римана (до интеграла Данжуа—Перрона), чтобы обеспечить интегрируемость по возможности более широкого класса функций. Автор же пришел к глубокому убеждению, что теория интеграла нужна для курса анализа ничуть не более, чем теория вещественных чисел. Т.е. от нее легко можно отказаться вообще. Для математиков, конечно, можно устроить дополнительный курс теории меры и интеграла, но этот курс можно читать совершенно независимо от курса анализа.

Замечательный советский тополог В.А. Рохлин многие годы читал курс анализа для инженеров, в результате чего пришел к убеждению, что нет никакой необходимости в построении теории интеграла: «интеграл — это площадь, а убеждать инженера в том, что он не знает, что такое площадь — себе дороже выйдет». Автор успешно реализо-

[1] *Shchepin E.* Uppsala lectures on calculus — http://at.yorku.ca/i/a/a/z/20.htm

вал этот подход Рохлина к изложению учения об интегралах в своем вводном курсе анализа. В результате за время, необходимое для изложения теории интеграла, была изложена теория контурных интегралов. Неизмеримых множеств и неизмеримых функций нет. Интеграл существует для всякой ограниченной неотрицательной функции. Этот тезис можно обосновать двояко. Во-первых, в анализе не возникают неизмеримости, потому что операция предельного перехода не порождает неизмеримостей. Во-вторых, в некоторой аксиоматике (с аксиомой детерминированности вместо аксиомы выбора) все множества измеримы.

Таинственность анализа бесконечно-малых была развеяна теорией пределов, построение которой начал О. Коши и завершил К. Вейерштрасс. «Эпсилон-дельта» язык установил новые стандарты строгости в анализе. Успехи в основаниях анализа далее привели к созданию теории множеств, язык которой лег в основу всей современной математики. А в области образования эти научные достижения породили «бурбакизацию»: чрезмерную абстрактность и формализацию. Здесь есть многое от ситуации, когда «над победами нашими встают пьедесталы, которые выше побед».

Итак, мы обозрели потери, понесенные современным курсом анализа по сравнению с Эйлеровым. Перейдем теперь к более подробному анализу приобретений.

Для сильных студентов, специализирующихся в абстрактных областях современной математики, современный курс анализа безусловно весьма полезен. Так, автор этих строк после изучения теории пределов уже на первом курсе механико-математического факультета смог приступить к самостоятельной научной работе в области теоретико-множественной топологии, легко овладев весьма абстрактным понятием предела по базису фильтра для любых топологических пространств. Но автор этих строк был знаком с очень умными людьми, которые были отчислены с первого курса механико-математического факультета главным образом по причине неспособности восприятия понятия предела. Как реакция на эту трудность возник «нестандартный анализ», реабилитировавший актуальные бесконечно-малые величины, применявшиеся во времена Лейбница—Эйлера. Вычисления производных и пределов аналитических функций с помощью актуально бесконечно-малых алгоритмически достаточно просты и могут выполняться студентами, неспособными к восприятию «эпсилон-дельта». Такого рода вычисления мы и находим у Эйлера. Однако изложение основных теорем о непрерывных функциях в рамках нестандартного анализа представляется автору этих строк методологически бесперспективным. Учение о непрерывных функциях в

нестандартном анализе представляет интерес главным образом для логиков, а не для аналитиков.

Как говорят, есть три степени понимания сказанного: первая — когда вы чувствуете удовольствие от того, что понимаете то, что вам говорят, вторая — когда вы можете самостоятельно повторить приведенное рассуждение, и третья — когда вы можете его опровергнуть. Рассуждения Эйлера дают богатый простор для разнообразной глубины понимания происходящего. Они достаточно просты, чтобы их смогли повторить даже на других примерах средние студенты. А сильные студенты, если и не сумеют их опровергнуть, то будут лучше подготовлены впоследствии оценить мощь и величие теории пределов.

Библиографический список

Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М.: ОНТИ, 1936.

Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Иностранная литература, 1951.

Hairer E., Wanner G. Analysis by Its Hystory. Springer, 1995.

Shchepin E. Uppsala lectures on calculus — http://at.yorku.ca/i/a/a/z/20.htm

Содержание

Предисловие (*Кричевец А.Н.*) 5

Раздел 0
ВВОДНЫЙ

Философия применения математики: конфигурация особой области исследования? (*Шапошников В.А.*) 15

Раздел 1
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОНТОЛОГИЯ. ДВА ПОЛЮСА

Деятельностное обоснование математического реализма (*Перминов В.Я.*) 55

Пример последовательного антиплатонизма: Витгенштейн о теореме Гёделя и диагональной процедуре Кантора (*Сокулер З.А.*) 84

Раздел 2
ПОСТИЖИМА ИЛИ НЕПОСТИЖИМА ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ?

«Предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» (*Визгин Вл.П.*) 99

Размышления о постижимости эффективного применения математики (*Григорян А.А.*) 121

Бытие и реальность в контексте математического познания (*Жаров С.Н.*) 142

Аргумент неустранимости Куайна–Патнема, непостижимая эффективность математики и жизненный мир (*Кричевец А.Н.*) 162

Место математики в физике (*Липкин А.И.*) 179

Взаимодействие математики и физики: реализованные и упущенные возможности (*Маневич Л.И.*) 186

Онтологические основания вариационных принципов и метода интегралов по траекториям (*Терехович В.Э.*) 201

Об отношениях между математикой и реальностью (*Чусов А.В.*) 218

Раздел 3

ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ РАЗЫСКАНИЯ

Реализм, антиреализм и идея третьей линии в философии математики (*Бажанов В.А.*) 231

Применимость математики как философская проблема (*Бычков С.Н.*) 253

О достоверности постулатов естествознания и математики (*Гутнер Г.Б.*) 263

Математика – это язык? (*Косилова Е.В.*) 282

Проблема математической реальности в контексте культуры научного мышления (*Невважай И.Д.*) 293

Число: онтологическое значение (*Цофнас А.Ю.*) 309

Раздел 4

ОТ ЦЕНТРА ПРОБЛЕМЫ К ВАЖНОЙ И ЭВРИСТИЧНОЙ ПЕРИФЕРИИ

Новые горизонты применения математики: альтернативная математизация (*Барабашев А.Г.*) 329

Категория количества в физике Аристотеля, средневековой натурфилософии и немецкой классической философии (*Зайцев Е.А.*) 348

Композициональность как достаточное условие математизации (*Крушинский А.А.*) 376

Человеческий фактор в математическом моделировании в области наноэлектроники (*Красников Г.Я., Горнев Е.С., Матюшкин И.В.*) 397

Раздел 5

ОТ ОНТОЛОГИИ К ЛОГИКЕ

Математика как «работа» с абстрактными объектами: онтолого-трансцендентальный статус математических абстракций (*Катречко С.Л.*) . 417

Проблема единственности натурального ряда (*Кускова С.М.*) 449

Проблемы понятия «высокая вероятность суждения» (*Минков С.С.*) 467

Истина, математика, непротиворечивость (*Хаханян В.Х.*) 472

В поисках утраченного анализа (*Щепин Е.В.*) 492

Научное издание

МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНОСТЬ.
ТРУДЫ МОСКОВСКОГО СЕМИНАРА
ПО ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Под редакцией В.А. Бажанова,
А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова

Редактор *Л.В. Кутукова*
Художник *Н.Н. Аникушин*
Художественный редактор *Г.Д. Колоскова*
Технический редактор *З.С. Кондрашова*
Корректор *Л.В. Кутукова*
Верстка *Л.В. Тарасюк*

На обложке использован фрагмент картины французского художника Тома Дежоржа (Thomas Degeorge, 1786–1854) «Смерть Архимеда» (1815), которая находится в Музее изобразительных искусств Роже-Кийо (Клермон-Ферран, Франция).

Подписано в печать 08.12.2014. Формат 60×90$^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Офсетная печать.
Гарнитура Школьная. Усл. печ. л. 31,5.
Уч.-изд. л. 30,4.
Тираж 300 экз. Изд. № 10 236. Заказ №

Издательство Московского университета.
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5.
Тел.: (495) 629-50-91. *Факс:* (495) 697-66-71.
Тел.: (495) 939-33-23 (*отдел реализации*).
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru

Сайт Издательства МГУ:
www.msu.ru/depts/MSUPubl2005
Интернет-магазин: http://msupublishing.ru

Адрес отдела реализации:
Москва, ул. Хохлова, 11 (Воробьевы горы, МГУ).
E-mail: izd-mgu@yandex.ru. *Тел.:* (495) 939-34-93

Отпечатано в типографии МГУ.
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 15

Очередной том трудов Московского семинара по философии математики посвящен отношениям математики с реальностью. О какой реальности, однако, идет речь? Уже для древних греков реальность имела, по крайней мере, два смысла: горний и дольний. На первой стороне переплета книги изображена смерть Архимеда, одного из величайших математиков античности. Архимеда также два: Архимед древней легенды и Архимед истории науки. Архимед истории – лицо и символ прикладной математики, человек, гениальным образом соединивший в себе математика с физиком и инженером. Архимед же легенды настолько поглощен горней реальностью математики, что, не обращая внимания на то, что его родные Сиракузы взяты войсками Марцелла, продолжает размышлять над своей задачей. Когда же перед ним вырастает римский воин, он восклицает только: «Не тронь мои чертежи!» и падает замертво от меча разгневанного солдата. Архимед легенды противопоставляет горнюю реальность математики дольней реальности, воплощенной в римском воине и его смертоносном мече. В легенде о смерти Архимеда конфликт двух реальностей явлен в наивысшем его накале. Архимед легенды падает жертвой несовместимости горнего с дольним, однако Архимед истории успешно их сочетает.

Представленные на страницах этой книги размышления о способах, которыми математика связана с реальностью, также неизбежно вращаются вокруг незримой оси, задаваемой напряжением между двумя полюсами. Первый из них – это полюс горней реальности платоновского мира, вечной, неизменной и гарантирующей математике ее достоверность и «непотопляемость» в волнах истории. Второй – полюс дольней реальности многообразных применений математики в повседневной жизни, а также исторически изменчивых, но весьма часто на диво успешных научных практик, на математике основанных. Что же может сказать философская рефлексия по поводу успехов тех архимедов, которых явила нам история? Возможно ли примирить два названных полюса в философии математики?

МГУ
Издательство Московского университета

ISBN 978-5-19-010959-7
9 785190 109597