

В. Босс

ЛЕКЦИИ *по*

МАТЕМАТИКЕ



## Дифференциальные уравнения

Краткое  
и ясное

изложение  
предмета



УРСС

В. Босс

**ЛЕКЦИИ** *по*  
**МАТЕМАТИКЕ**

---

**Дифференциальные  
уравнения**

---

Москва



УРСС

**Босс В.**

**Лекции по математике: дифференциальные уравнения.**

М.: Едиториал УРСС, 2004. — 208 с.

ISBN 5–354–00790–9

Книга отличается краткостью и прозрачностью изложения, вплоть до объяснений «на пальцах». Значительное внимание уделяется мотивации результатов и укрупненному видению. Помимо обычной для дифференциальных уравнений тематики рассматриваются: аттракторы и детерминированный хаос, бифуркации и катастрофы, солитоны. Просто и достаточно полно излагается теория устойчивости. Среди нововведений — ликбез по аналитической механике, начала теории регулирования, конусные методы, модели коллективного поведения. «Высокие материи» рассматриваются на доступном уровне. Определенная автономность частей позволяет ограничиться любым желаемым срезом содержания. Книга легко читается.


Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.  
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 23.08.2004 г.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 13. Зак. № 3-1492/665.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5–354–00790–9

© Едиториал УРСС, 2004

|   |  |
|---|--|
| <b>ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС</b><br>НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ                            |  |
|  | E-mail: URSS@URSS.ru<br>Каталог изданий<br>в Internet: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a><br>Тел./факс: 7 (095) 135-42-16<br>Тел./факс: 7 (095) 135-42-46 |

2550 ID 21643



9 785354 007905 1 >

## **Оглавление**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Предисловие</b> . . . . .                            | <b>7</b>  |
| <b>Глава 1. Вспомогательный материал</b> . . . . .      | <b>8</b>  |
| 1.1. Пространство $n$ измерений . . . . .               | 8         |
| 1.2. Линейные функции и матрицы . . . . .               | 10        |
| 1.3. Прямоугольные матрицы . . . . .                    | 13        |
| 1.4. Квадратичные формы . . . . .                       | 14        |
| 1.5. Нормы в $R^n$ . . . . .                            | 15        |
| 1.6. Функции и пространства . . . . .                   | 16        |
| 1.7. Принцип сжимающих отображений . . . . .            | 17        |
| <br>  |           |
| <b>Часть I</b>  |           |
| <b>ОСНОВЫ ТЕОРИИ</b>                                    | <b>19</b> |
| <b>Глава 2. Общая картина и опорные точки</b> . . . . . | <b>20</b> |
| 2.1. Объект изучения . . . . .                          | 20        |
| 2.2. Простейшие уравнения и примеры . . . . .           | 23        |
| 2.3. Существование и единственность . . . . .           | 29        |
| 2.4. Продолжимость и зависимость от параметра . . . . . | 33        |
| 2.5. О структуре и направлениях . . . . .               | 36        |
| 2.6. Движение по градиенту . . . . .                    | 41        |
| 2.7. Уравнения с частными производными . . . . .        | 42        |
| 2.8. Об уравнениях первого порядка . . . . .            | 45        |
| <br>  |           |
| <b>Глава 3. Линейные уравнения</b> . . . . .            | <b>50</b> |
| 3.1. Исходные понятия . . . . .                         | 50        |
| 3.2. Принципы суперпозиции . . . . .                    | 52        |
| 3.3. Уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .   | 55        |
| 3.4. Системы уравнений . . . . .                        | 57        |
| 3.5. Случай равных корней . . . . .                     | 58        |

---

|   |            |
|---|------------|
| 3.6. Неоднородные уравнения . . . . .             | 62         |
| 3.7. Матричная экспонента . . . . .               | 63         |
| 3.8. Теорема Лиувилля . . . . .                   | 67         |
| 3.9. Неавтономные системы . . . . .               | 68         |
| 3.10. Фрагмент из обобщенных функций . . . . .    | 70         |
| 3.11. Функция Грина и краевые задачи . . . . .    | 74         |
| 3.12. Операционное исчисление . . . . .           | 78         |
| <b>Глава 4. Устойчивость . . . . .</b>            | <b>81</b>  |
| 4.1. Основные понятия . . . . .                   | 81         |
| 4.2. Второй метод Ляпунова . . . . .              | 84         |
| 4.3. Неавтономный случай . . . . .                | 88         |
| 4.4. Уравнение в вариациях . . . . .              | 89         |
| 4.5. Обратные теоремы . . . . .                   | 92         |
| 4.6. Устойчивость в целом . . . . .               | 94         |
| 4.7. Диссипативные системы . . . . .              | 96         |
| 4.8. Проблема Рауса—Гурвица . . . . .             | 97         |
| 4.9. Линейные неавтономные системы . . . . .      | 99         |
| <b>Глава 5. Колебания . . . . .</b>               | <b>101</b> |
| 5.1. Гармонические сигналы . . . . .              | 101        |
| 5.2. Вынужденные колебания . . . . .              | 103        |
| 5.3. Резонансные явления . . . . .                | 106        |
| 5.4. Связанные системы . . . . .                  | 109        |
| 5.5. Автоколебания . . . . .                      | 112        |
| 5.6. Нелинейный маятник . . . . .                 | 115        |
| 5.7. Волны и солитоны . . . . .                   | 118        |
| <b>Глава 6. Возмущения и бифуркации . . . . .</b> | <b>122</b> |
| 6.1. Примеры и предостережения . . . . .          | 122        |
| 6.2. Бифуркации . . . . .                         | 123        |
| 6.3. Катастрофы . . . . .                         | 125        |
| 6.4. Структурная устойчивость . . . . .           | 126        |
| 6.5. Парадокс Циглера . . . . .                   | 129        |
| 6.6. Методы усреднения . . . . .                  | 130        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 7. Аттракторы и хаос . . . . .</b>    | <b>135</b> |
| 7.1. Эргодичность и перемешивание . . . . .    | 135        |
| 7.2. Ликвидация противоречий . . . . .         | 138        |
| 7.3. Адиабатические процессы . . . . .         | 140        |
| 7.4. Аттракторы и фракталы . . . . .           | 143        |
| 7.5. Странный аттрактор Лоренца . . . . .      | 146        |
| 7.6. Сложное в простом . . . . .               | 147        |
| <br>   |            |
| <b>Часть II</b>                                |            |
| <b>Дополнения и приложения</b>                 | <b>150</b> |
| <br>   |            |
| <b>Глава 8. Теория регулирования . . . . .</b> | <b>152</b> |
| 8.1. Практические задачи и примеры . . . . .   | 152        |
| 8.2. Передаточные функции . . . . .            | 154        |
| 8.3. О подводных рифах . . . . .               | 156        |
| 8.4. Частотные методы . . . . .                | 157        |
| 8.5. Задача компенсации . . . . .              | 159        |
| 8.6. Управляемость . . . . .                   | 161        |
| <br>   |            |
| <b>Глава 9. Механика . . . . .</b>             | <b>164</b> |
| 9.1. Обобщенные координаты и силы . . . . .    | 164        |
| 9.2. Уравнения Лагранжа . . . . .              | 168        |
| 9.3. Формализм Гамильтона . . . . .            | 169        |
| 9.4. Вариационные принципы . . . . .           | 171        |
| 9.5. Инвариант Пуанкаре—Картана . . . . .      | 172        |
| 9.6. Завершение картины . . . . .              | 174        |
| <br>   |            |
| <b>Глава 10. Конусные методы . . . . .</b>     | <b>177</b> |
| 10.1. Полуупорядоченность . . . . .            | 178        |
| 10.2. Монотонность оператора сдвига . . . . .  | 178        |
| 10.3. Гетеротонные системы . . . . .           | 182        |
| 10.4. Дифференциальные неравенства . . . . .   | 183        |
| 10.5. Супероднородность . . . . .              | 184        |
| 10.6. Примеры . . . . .                        | 186        |
| 10.7. Матричный конус . . . . .                | 187        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 11. Коллективное поведение . . . . .</b>      | <b>189</b> |
| 11.1. Содержательные примеры . . . . .                 | 189        |
| 11.2. Формальная модель . . . . .                      | 190        |
| 11.3. Системы с ограниченным взаимодействием . . . . . | 193        |
| 11.4. Гомогенные системы . . . . .                     | 195        |
| <b>Обозначения . . . . .</b>                           | <b>197</b> |
| <b>Литература . . . . .</b>                            | <b>199</b> |
| <b>Предметный указатель . . . . .</b>                  | <b>201</b> |

## Предисловие

*Есть три способа отвечать на вопросы:  
сказать необходимое, отвечать с приветливостью и наговорить лишнего.*

Плутарх

Время меняет ситуацию. Традиционные курсы дифференциальных уравнений стареют, и простого выхода из положения нет. С одной стороны, ясно, что тематику надо расширять, иначе «молодые побеги» — хаос, аттракторы, солитоны и т. п. — будут расти сквозь асфальт. С другой стороны, базовые курсы нуждаются в резком сокращении, поскольку для самих дифуров не так много места остается в этой жизни. Дискретная математика начинает теснить, виртуальные проблемы... Не говоря об экспансии юридического и сексуального пространства. В итоге одно противоречит другому — и стандартных мер недостает.

Единственное средство — тривиализация дисциплины. Математика, как и человек, — иногда надувает щеки, наряжается и творит мифы. Поэтому в дифурах немало лишнего, вычурного, случайного — и одно лишь наведение порядка высвобождает массу свободного места. Затем переосмысливание и переоценка. Потом отказ от второстепенных деталей. Не насовсем, конечно. Но из «основ» многое — что загромождает — можно и нужно вынести за скобки. Наконец, пора вспомнить, что успех достигается только играючи, вслед за удовольствием. Кто учится говорить с натугой — остается немым.

На этом фоне писался данный том, который, как и лекции в целом, адресован «всем», поскольку преподносит некую общую часть. Не простую и не сложную, но дающую представление об основах и позволяющую при необходимости двигаться дальше.

## Глава 1

### **Вспомогательный материал**

*Подготовительная часть работы занимает 90 % времени*

#### **1.1. Пространство $n$ измерений**

При изучении функций

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

переменные  $x_1, \dots, x_n$  называют *координатами*, набор  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  — *вектором*, — направляя мысль по пути ассоциаций с геометрией обычного пространства. Постепенно выясняется, что в аналогии заключено больше смысла, чем можно было бы ожидать.

Для  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  вводятся стандартные операции: *умножение на скаляр  $\lambda$* ,

$$\lambda \mathbf{x} = \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_n\};$$

*сложение и вычитание*,

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = \{x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n\},$$

а также *скалярное произведение*,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

с помощью которого задается *норма (длина вектора)*,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

В некоторых ситуациях для скалярного произведения используется специальное обозначение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , а также максимально простое  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  — там, где ясно, о чем идет речь.

Множество векторов, на которых введены перечисленные операции, называют  $n$ -мерным *евклидовым* пространством и обозначают  $R^n$ .

---

Сталкиваясь с вариациями обозначений, студенты иногда проявляют недовольство. Почему бы, мол, не стандартизовать? Вообще говоря, можно, избавляясь заодно от синонимов в разговорном языке.

Вариации позволяют учитывать обстоятельства. Например, «формула перемножения матрицы» с первого множителя на второй (см. далее),

$$(Ax, y) = (x, A^T y),$$

в отсутствие обозначения  $(x, y)$  оказывается «как без рук». Но в других ситуациях  $(x, y)$  выглядит чересчур громоздко. Вариант  $xy$  представляется самым экономным, однако точка в  $x \cdot y$  иногда придает формуле визуальную ясность. Полуужирный шрифт для обозначения векторов выглядит заманчиво, но если векторов много — рябит в глазах.

Поэтому любой стандарт, как и медаль, имеет две стороны.

Умножение на число растягивает ( $|\lambda| > 1$ ) или сжимает ( $|\lambda| < 1$ ) вектор, не меняя направления при  $\lambda > 0$ , и меняет его на противоположное при  $\lambda < 0$ . Сложение соответствует обычному правилу сложения векторов по правилу параллелограмма. Вычитание выводится из сложения:  $b - a$  определяется как вектор, который в сумме с  $a$  дает  $b$ .

На плоскости скалярному произведению соответствует перемножение длин векторов на косинус угла между ними. В общем случае такая интерпретация может быть сохранена благодаря известному *неравенству Коши—Буняковского*,  $x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , т. е.

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2},$$

которое дает возможность ввести понятие косинуса угла при любом  $n$ ,

$$\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Векторы  $x, y$  определяют как *ортогональные*, если их скалярное произведение равно нулю,  $x \cdot y = 0$ .

Важная роль ортогональности заключена в том, что с ее помощью определяется понятие *плоскости*, как множества векторов  $x$ , ортогональных некоторому вектору  $a$ ,

$$a \cdot x = 0, \quad \text{т. е.} \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Говорят, что множество векторов  $\{x^1, \dots, x^k\}$  *линейно зависимо*, если существуют такие коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , не все равные нулю, что

$$\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k = 0.$$



При этом, очевидно,

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Умножение  $A$  на  $B$  дает матрицу  $C = AB$  с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (1.1)$$

*Правило умножения матриц* возникает автоматически, если на матрицы смотреть как на линейные операторы. Вектор  $x$  под действием оператора  $B$  переходит в  $z = Bx$ , а вектор  $z$  под действием оператора  $A$  переходит в  $y = Az$ . Результирующее преобразование  $x$  в  $y$  определяется матрицей  $C = AB$  с элементами  $c_{ij}$ , формула вычисления которых (1.1) определяется обыкновенным приведением подобных.

Матрица  $A^T$  с элементами  $a_{ij}^T = a_{ji}$  называется *транспонированной* к  $A$ . Иногда вместо  $A^T$  используют обозначение  $A'$ .

*Обратной* к  $A$  называют матрицу  $A^{-1}$ , такую что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I,$$

где  $I$  — *единичная матрица*,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

определяющая тождественное преобразование  $Ix \equiv x$ . Иногда используют обозначение  $I = \text{diag} \{1, \dots, 1\}$ .

Единичный куб, построенный на векторах (ребрах)

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, \quad e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \quad \dots \quad e_n = \{0, 0, \dots, n\},$$

под действием матрицы (оператора)  $A = [a_{ij}]$  переходит в параллелепипед, построенный на вектор-столбцах

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Объем этого параллелепипеда естественно считать *коэффициентом искажения объема*  $\delta(A)$  линейного оператора (матрицы)  $A$ .

С тем же коэффициентом искажения объема происходит преобразование любого тела  $\Omega$ . Действительно,  $\Omega$  можно разбить на  $N$  мелких кубиков (со стороной  $\epsilon$  и объемом  $\epsilon^n$ ), и тем самым сколь угодно точно приблизить объем  $\Omega$  величиной  $N \cdot \epsilon^n$ . Каждый кубик под действием матрицы  $A$  перейдет в паралле-

лепипед объема  $\delta(A) \cdot \epsilon^n$ . Поэтому ясно, что матрица  $A$  искажает объем любого тела в  $\delta(A)$  раз.

Коэффициент искажения объема — со знаком плюс (минус), если векторы (1.2) образуют правую (левую) систему координат — называется *детерминантом*  $A$  и обозначается как  $\det A$ , либо  $|A|$ .

Из определения очевидно:

$$\det AB = \det A \det B.$$

Детерминанты в линейном анализе играют важную роль в первую очередь потому, что позволяют отличить *вырожденную матрицу*, для которой  $\det A = 0$ , от *невырожденной* ( $\det A \neq 0$ ).

*Вырожденная матрица  $A$ :*

- не имеет обратной  $A^{-1}$ ;
- сплющивает объемы (до нуля);
- любые  $n$  линейно независимых векторов переводит в линейно зависимые векторы;
- имеет (обязательно) линейно зависимые вектор-строки и линейно зависимые вектор-столбцы;
- приводит к уравнению  $Ax = b$ , которое не решается при  $b \neq 0$ , а при  $b = 0$  — имеет бесконечно много решений.

**Замена координат.** При переходе к другой (штрихованной) системе координат с помощью невырожденной матрицы  $T$ :

$$x = Tx',$$

соотношение  $u = Av$  после подстановки  $u = Tu'$ ,  $v = Tv'$  и умножения слева на  $T^{-1}$  переходит в

$$u' = T^{-1}ATv'.$$

Поэтому в новой (штрихованной) системе координат линейному оператору  $A$  соответствует матрица

$$A' = T^{-1}AT. \tag{1.3}$$

Исходя из (1.3) преобразование  $T$  пытаются выбрать так, чтобы матрица приобрела в новой системе координат наиболее простой вид.

Главными инвариантами матрицы  $A$  являются *собственные значения* — корни *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Другими словами, собственные значения<sup>3)</sup>  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  — это те значения параметра  $\lambda$ , при которых уравнение

$$Ax = \lambda x \quad (1.4)$$

имеет ненулевые решения, которые называют *собственными векторами* матрицы  $A$ .

Если существует  $n$  различных собственных векторов<sup>4)</sup>, то их можно принять за единичные орты новой системы координат, и тогда в этой системе матрица  $T^{-1}AT$  принимает диагональный вид,  $T^{-1}AT = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

Разумеется,  $T$  может содержать комплексные элементы, поскольку собственные значения могут быть комплексными.

*Рассмотрение комплексных векторов и матриц — в какой-то степени больной вопрос. Начинается-то все с обыкновенных чисел. Но в каких-то ситуациях без выхода в комплексную плоскость перестает решаться характеристическое уравнение. Потом возникают проблемы с собственными векторами. Затем — с функциями от матриц. В конце концов получается, что с самого начала проще махнуть рукой — и все считать комплексным. Тому, кто не проходит самостоятельно такой путь вынужденных уступок, комплексные матрицы кажутся злонамеренной выдумкой.*

*Логика комплексификации математического знания более-менее прослеживается в [8].*

### 1.3. Прямоугольные матрицы

Прямоугольную матрицу  $A$ , имеющую  $m$  строк и  $n$  столбцов, называют  $m \times n$  матрицей. Кое-что при переходе от квадратных матриц к прямоугольным теряет смысл (детерминант, например), но многое — сохраняется. С некоторыми уточнениями, конечно. Например, произведение  $C = AB$  вычисляется по той же формуле (1.1), но теперь при условии, что *число столбцов  $A$  равно числу строк  $B$* . В противном случае  $AB$  не имеет смысла.

Идеология прямоугольных матриц позволяет освободиться от разграничения матриц и векторов. Теперь все можно считать матрицами — но надо следить, какую «матрицу» представляет собой вектор — вектор-столбец или вектор-строку? Чтобы квадратную матрицу  $A$  умножить на  $x$  справа, надо, чтобы  $x$  был обязательно вектор-столбцом, который можно транспонировать, превратив его в вектор-строку  $x^T$ , — и тогда возможно  $x^T A$ .

Поэтому, как правило, векторы считаются вектор-столбцами. Скалярное произведение  $(x, y)$  при этом записывается в виде  $x^T y$ .

<sup>3)</sup> Множество собственных значений называют иногда *спектром*, а максимальное значение модуля  $|\lambda_k|$  — *спектральным радиусом* матрицы  $A$ .

<sup>4)</sup> Если не существует (что может быть лишь при наличии равных собственных значений), — приходится использовать жордановы формы [11].

Такая стандартизация удобна и постепенно становится общепринятой. Но у любого стандарта есть противники. Вопрос чисто психологический. Многим удобнее вектор записывать в строчку и так его и мыслить. А уж если в голове матрицы и векторы лежат на разных полочках, то их объединение в одну категорию — раздражает. Если кто-то знает, как с этим бороться, то у него широкое поле деятельности<sup>5)</sup>.

**1.3.1. Определение.** *Максимальное число линейно независимых вектор-строк либо вектор-столбцов матрицы  $A$  называется ее рангом и обозначается как  $\text{rang } A$ .*

В данном определении «заложена теорема», поскольку совпадение максимального числа линейно независимых строк и столбцов сразу неочевидно, но это так.

## 1.4. Квадратичные формы

При изучении линейных систем широко используются квадратичные функции (формы)

$$(Vx, x) = \sum_{i,j} v_{ij}x_i x_j,$$

задаваемые с помощью квадратной матрицы  $V$ , которая обычно предполагается симметричной<sup>6)</sup>,  $v_{ij} = v_{ji}$ , поскольку в разложении  $(Vx, x)$  коэффициент при  $x_i x_j$  равен  $v_{ij} + v_{ji}$  — и матрицу можно симметризовать, заменив  $v_{ij}$  на полусумму  $(v_{ij} + v_{ji})/2$ .

Но при необходимости рассмотрения скалярного произведения  $(Vx, y)$  симметризация не проходит, и тогда работает формула

$$(Vx, y) = (x, V^T y).$$

При переходе к другой (штрихованной) системе координат с помощью невырожденной матрицы  $S$ :

$$x = Sx',$$

функция  $(Vx, x)$  после подстановки  $x = Sx'$  переходит в

$$(Vx, x) = (VSx', Sx') = (S^T VSx', x') = (V'x', x'),$$

откуда ясно, что матрица  $V$ , задающая квадратичную форму, при линейной замене системы координат преобразуется по правилу

$$V' = S^T V S, \tag{1.5}$$

<sup>5)</sup> От внедрения метрической системы в Англии — до примирения католиков с протестантами.

<sup>6)</sup> Стандартом считается название «симметрическая».

что отличается от (1.3). Но для ортогональных преобразований<sup>7)</sup>

$$S^T = S^{-1},$$

и тогда формулы (1.3) и (1.5) совпадают.

## 1.5. Нормы в $R^n$

Норма может определяться не только как  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Вообще, *нормой вектора*  $x \in R^n$  называют *положительное* число  $\|x\|$ , удовлетворяющее следующим требованиям:

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*неравенство треугольника*);
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  для любого  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ .

Всякая норма порождает *метрику*  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Помимо евклидовой нормы  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  часто используется норма

$$\|x\|_V = \sqrt{(x, Vx)},$$

где  $V$  — положительно определенная матрица; а также

$$\|x\|_m = \max_i |x_i| \quad (\text{кубическая норма}),$$

и

$$\|x\|_l = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{октаэдрическая норма}).$$

Норма однозначно определяется указанием единичного шара, в качестве которого может быть «назначено» любое выпуклое центрально-симметричное тело.

Выбор нормы «под задачу», как правило, существенно облегчает решение. Основу свободного манипулирования нормами дает следующее утверждение.

**1.5.1.** *В  $R^n$  все нормы эквивалентны (с точки зрения сходимости), т. е. для любых двух норм  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  можно указать такие константы  $\alpha$  и  $\beta$ , что*

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

при любом  $x \in R^n$ .

<sup>7)</sup> При ортогональном преобразовании длина вектора не меняется, поэтому

$$(x, x) = (Sx, Sx) = (x, S^T Sx),$$

т. е.  $S^T S = I$ , что и означает  $S^T = S^{-1}$ .

◀ Норма однозначно определяется заданием единичного шара, а функция  $\varphi(x) = \|x\|_1$  на множестве  $\|x\|_2 = 1$  достигает своих минимального ( $\gamma > 0$ ) и максимального ( $\delta > 0$ ) значений<sup>8)</sup>. Поэтому

$$\gamma\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \delta\|x\|_2$$

при любом  $x \in \mathbb{R}^n$ , что и доказывает утверждение 1.5.1. ▶

*Нормой матрицы*  $A$  называют положительное число  $\|A\|$ , удовлетворяющее тем же самым условиям 1–3, если в них векторы заменить на матрицы.

Поскольку матрицы — это, по существу, линейные операторы в  $\mathbb{R}^n$ , дополнительно необходимо согласование норм векторов и матриц, чтобы была возможность оценки образов  $Ax$ . Норма матрицы  $\|A\|$  называется *согласованной* с нормой вектора  $\|x\|$ , если для любых  $A$  и  $x$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

и для любых матриц  $A$  и  $B$  выполняется неравенство  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Чтобы неравенство  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  давало хорошую оценку, оно должно быть неувлучшаемо. Это мотивирует выделение в самостоятельное понятие *подчиненной нормы* матрицы:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Нормам  $\|\cdot\|_m$  и  $\|\cdot\|_l$  подчинены, соответственно,

$$\|A\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{строчная норма}),$$

и

$$\|A\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{столбцовая норма}).$$

Евклидовой норме подчинена так называемая *спектральная норма матрицы*, равная квадратному корню из максимального модуля собственного числа матрицы  $A^T A$ . С вычислительной точки зрения это не совсем удобно — поэтому в «евклидовом случае» чаще используют согласованную норму  $\|A\| = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ , где суммирование идет по всем  $i, j$ .

## 1.6. Функции и пространства

Функцию  $f(x)$  называют непрерывной в точке  $x_0$ , если по любому  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

<sup>8)</sup> Речь идет о конечномерном пространстве.

Понятно, что  $\delta$  здесь определяется как величиной  $\epsilon > 0$ , так и  $x_0$ . Если  $\delta$  от  $x_0$  — не зависит, — говорят о *равномерной непрерывности*  $f(x)$ .

Если  $f$  зависит еще и от параметра  $t$ , т. е.  $f(x, t)$ , то указание  $\delta$  по  $\epsilon > 0$  и  $x_0$  определяется, в общем случае, еще и параметром  $t$ . Если от  $t$  не зависит, — говорят о *равностепенной непрерывности*  $f(x, t)$  по  $t$  в точке  $x_0$ .

Множество непрерывных функций  $x(t)$ , заданных на компактном множестве  $\Omega$ , с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in \Omega} |x(t)|$$

называют пространством непрерывных функций и обозначают  $C[\Omega]$ , либо просто  $C$ , если понятно, о каком  $\Omega$  идет речь.

Пространство непрерывно дифференцируемых функций  $x(t)$  с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in \Omega} \{|x(t)| + |x'(t)|\}$$

обозначают как  $C^1[\Omega]$ .

## 1.7. Принцип сжимающих отображений

Точку  $x^*$ , удовлетворяющую уравнению

$$x = f(x) \quad (x \in X),$$

называют *неподвижной точкой* оператора  $f$ .

Пара  $(X, \rho)$ , где  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , является *полным метрическим пространством*, если любая последовательность Коши сходится. Другими словами,  $(X, \rho)$  полно, если из  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$  вытекает существование предела у последовательности  $x_n$ .

**1.7.1.** *Отображение  $f$ , действующее в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ , называется сжимающим (сжатием), если существует такое  $\lambda < 1$ , что*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \quad \text{для любых } x, y \in X. \quad (1.6)$$

**1.7.2.** *Всякое сжимающее отображение  $f$ , действующее в полном метрическом пространстве, имеет неподвижную точку  $x^*$ , которая единственна. Последовательные приближения  $x^{k+1} = f(x^k)$  сходятся к  $x^*$  независимо от  $x^0$ .*

◀ Покажем, что любая последовательность  $x^k$ , определяемая итерационной процедурой  $x^{k+1} = f(x^k)$ , является последовательностью Коши. Очевидно,

$$\|x^n - x^m\| \leq \|x^n - f(x^n)\| + \|f(x^n) - f(x^m)\| + \|f(x^m) - x^m\|,$$

т. е.

$$\|x^n - x^m\| \leq \|\varphi(x^n)\| + \lambda \|x^n - x^m\| + \|\varphi(x^m)\|,$$

где  $\varphi(x) = \rho(x, f(x))$ .

Следовательно,

$$\|x^n - x^m\| \leq \frac{\varphi(x^n) + \varphi(x^m)}{1 - \lambda} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\varphi(x)$  на любой последовательности  $x^{k+1} = f(x^k)$  убывает до нуля, поскольку  $\varphi(x^{k+1}) \leq \lambda\varphi(x^k)$ , что вытекает из (1.6).

Остается заметить, что пространство  $(X, \rho)$  полно. Поэтому  $x_k \rightarrow x^*$ . В силу (1.6) оператор  $f$  непрерывен. Поэтому  $x^* = f(x^*)$ . Двух неподвижных точек быть не может, благодаря тому же неравенству (1.6). ►

# ЧАСТЬ I

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ

---

*Опасно понимать новые вещи  
слишком быстро.*

Дж. Уоррен

Изложение рассчитано на тех, кто с дифурами уже имел дело. В той или иной степени — но, так или иначе, приобрел первые навыки. Без этого любая попытка овладеть теорией «с листа» просто бессмысленна, в чем полезно отдавать себе отчет, чтобы не превратить жизнь в пустое занятие.

Никто же не учится танцевать, не вставая с постели. Математика в этом отношении ничуть не проще. Но и не сложнее, кстати. Практика дает потрясающие результаты, о чем большинство не подозревает.

В любом случае изначально требуются определенные самостоятельные шаги, чтобы «не читать иностранные книги, не зная языка». Привыкнуть к основным понятиям и повозиться с простейшими задачами — вот что необходимо на этапе предварительного знакомства с предметом. Успех дела на 90 % определяется собственными усилиями. Черед нормального учебника настает в тот момент, когда в результате самостоятельной работы потенциал недоумения достигает определенного накала.

## Глава 2

### **Общая картина и опорные точки**

#### **2.1. Объект изучения**

Дифференциальные уравнения (дифуры) — это уравнения, содержащие производные. Например, *обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка*,

$$\varphi(x^{(n)}, \dots, x', x, t) = 0,$$

где функция  $\varphi$  задана, а  $x(t)$  подлежит определению. Переменная  $t$  — как правило, время<sup>1)</sup>.

Для совокупностей функций  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  рассматривают *системы дифференциальных уравнений*<sup>2)</sup>

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_n, t), \quad k = 1, \dots, n,$$

что записывается в векторной форме как

$$\boxed{\dot{x} = f(x, t)} \quad (2.1)$$

и далее служит основным объектом изучения.

К виду (2.1) легко приводится дифур  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = \psi(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t) \quad (2.2)$$

с помощью замены  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $\dots$ ,  $x_n = y^{(n-1)}$ , которая дает систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_n = \psi(x_n, \dots, x_2, x_1, t). \quad (2.3)$$

---

<sup>1)</sup> Но изредка встречаются задачи с другой содержательной интерпретацией.

<sup>2)</sup> Точка сверху обозначает первую производную.

Специфика (2.3) такова, что дифференцируемость решения  $x$  влечет за собой  $n$ -кратную дифференцируемость координаты  $x_1 = y$ . Поэтому (2.2) и (2.3) действительно эквивалентны.

На практике существует много промежуточных форм дифференциальных уравнений. Например, системы уравнений второго порядка<sup>3)</sup>, которые можно изучать «как есть», а можно приводить сначала к виду (2.1). Или, скажем, уравнения  $\Phi(\dot{x}, x, t) = 0$ , не разрешенные относительно производной, где есть, конечно, своя специфика, но трудности вторичны<sup>4)</sup>. К тому же, если отвлекаться на осмотр каждого закоулка — леса за деревьями не увидишь.

**Фазовое пространство.** Систему (2.1) удобно трактовать как закон движения точки  $x$  в некоем  $n$ -мерном (вспомогательном, фиктивном) пространстве  $R^n$ , которое принято называть *фазовым*, а переменные  $x_i$  — фазовыми. В случае *автономной системы*<sup>5)</sup>,  $\dot{x} = f(x)$ , движению точки соответствует траектория в  $R^n$ . Совокупность всех таких траекторий называют *фазовым портретом*

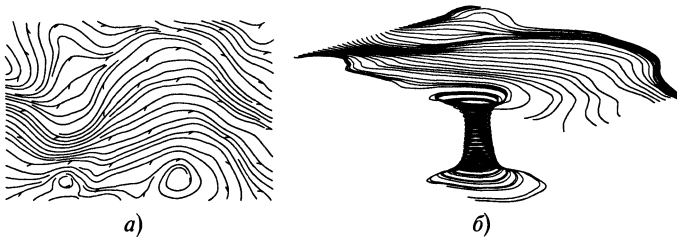


Рис. 2.1. Карта воздушных потоков (а), смерч (б)

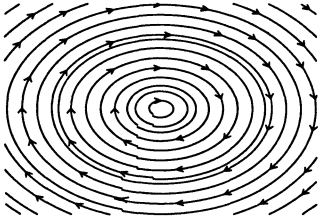
системы. Говорят также о *поле скоростей*  $f(x)$ , определяющем направление допустимого движения в каждой точке  $x$  фазового пространства. Фазовый портрет системы может выглядеть, например, как на рис. 2.1 а. Трехмерный вариант потоков при образовании смерча изображен на рис. 2.1 б.

Оба приведенных примера соответствуют тому относительно редкому случаю, когда фазовое пространство совпадает с обычным физическим простран-

<sup>3)</sup> Это особенно характерно для механических приложений.

<sup>4)</sup> Вторичные трудности бывают хуже первичных. Если уравнение  $\Phi(\dot{x}, x, t) = 0$  не везде разрешимо относительно  $\dot{x}$  и траектория  $x(t)$  подходит к точке неразрешимости, — возникает парадокс невозможности движения (например, парадокс Пенлеве при сухом скольжении тяжелой точки подвеса маятника [2]). Причина обычно заключается в неадекватности модели  $\Phi(\dot{x}, x, t) = 0$  реальной физической задаче.

<sup>5)</sup> Правые части которой, по определению, не зависят от времени.



**Рис. 2.2.** Траектории маятника в фазовом пространстве

ством. Чаще фазовые переменные имеют вспомогательный характер. Скажем, движение маятника  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  обычно переписывается в переменных  $\{x, y = \dot{x}\}$  в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

В итоге маятник движется «туда-сюда», но в переменных  $\{x, y\}$  — «положение-скорость» — траектории  $\{x(t), y(t)\}$  выглядят как на рис. 2.2.

Заметим, наконец, что неавтономная система,  $\dot{x} = f(x, t)$ , всегда может быть переведена в автономную добавлением к фазовым переменным времени  $t$  и, соответственно, добавлением к  $\dot{x} = f(x, t)$  еще одного уравнения  $\dot{t} = 1$ . Такой фокус дает возможность построить геометрическую картинку, но, разумеется, никак не устраняет принципиальную разницу между автономным и неавтономным движением. Например, весомую часть теории автономных систем,  $\dot{x} = f(x)$ , составляет изучение динамики в окрестности *точек равновесия*, характеризующихся обнулением скорости,  $f(x) = 0$ . Понятно, что у искусственной автономной системы,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

точки равновесия отсутствуют.

**Задача Коши.** Уравнение  $\dot{x} = f(x, t)$  всегда имеет множество (семейство) решений  $x(t)$ . Конкретная траектория  $x(t)$  может быть выделена каким-либо дополнительным условием — например, фиксацией значения  $x(t)$  в момент  $t = s$ . Такая задача,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(s) = x_0, \tag{2.4}$$

называется *задачей Коши*, решением которой, по существу, является  $x(t) = x(t; s, x_0)$ . Отображение  $U_{st}$  (эквивалентное обозначение  $U_{s,t}$ ), переводящее точку  $x(s) = x_0$  в  $x(t)$ ,

$$U_{st}(x_0) = x(t; s, x_0),$$

называют *оператором сдвига* по траекториям системы<sup>6)</sup>. Автономные системы характеризуются свойством

$$U_{st} = U_{t-s}.$$

**Полугрупповое свойство оператора сдвига,**

$$U_{st}U_{rs} = U_{rt},$$

означает, что движение из любой точки  $x_s$  не зависит от того, как система двигалась до этого. Другими словами, если  $x_t = U_{rt}x_r$  и «по дороге» в момент  $s$  система пришла в точку  $x_s$ , то о предыстории можно забыть и определить  $x_t$  как  $x_t = U_{st}x_s$ .

В автономном случае полугрупповое свойство приобретает вид

$$U_{\sigma}U_{\tau} = U_{\sigma+\tau}. \quad (2.5)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение  $\ddot{x} + x = 0$ , решением которого служит

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Определение констант  $c_1, c_2$  при начальных данных

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

дает  $x(t) = \sin t$ , при этом  $x'(t) = \cos t$ .

Решением  $x(s)$  с начальными данными

$$x(0) = \sin t, \quad x'(0) = \cos t$$

будет  $x(s) = \cos t \sin s + \sin t \cos s$ . Из (2.5) теперь следует известная тригонометрическая формула

$$\sin(t + s) = \cos t \sin s + \sin t \cos s.$$

## 2.2. Простейшие уравнения и примеры

Для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t)$$

<sup>6)</sup> В неавтономном случае, вообще говоря, через любую точку  $x_0$  проходит пучок траекторий, параметрически зависящий от  $s$  в (2.4).

решение сводится к обыкновенному интегрированию:

$$x(t) = \int f(t) dt + c,$$

где  $c$  — произвольная константа.

Еще одно простое уравнение,  $\dot{x} = f(x)$ , т. е.

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

эквивалентно уравнению<sup>7)</sup>

$$\frac{dx}{f(x)} = dt,$$

интегрирование которого дает

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int dt = t + c,$$

что неявно определяет функцию  $x(t)$ .

Например, для  $\dot{x} = \lambda x$  легко получаем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \lambda dt \Rightarrow \ln x = \lambda t + \text{const} \Rightarrow x(t) = ce^{\lambda t}.$$

Уравнение

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.6}$$

в общем случае уже не решается ни в элементарных функциях, ни в квадратурах<sup>8)</sup>. При этом «нерешаемыми» оказываются самые простые с виду уравнения. Например,  $\dot{x} = x^2 + t^2$ .

Тот факт, что дифур не решается аналитически, никаких фатальных последствий не имеет. Как правило, достаточно, и даже предпочтительно, располагать численными решениями, изображаемыми на экранах мониторов.

Тем не менее до сих пор большое внимание уделяется различным ухищрениям, позволяющим определенные уравнения решать аналитически. При этом нельзя сказать, что такой вид деятельности себя изживает в связи с компьютеризацией. Дело в том, что,

<sup>7)</sup> Благодаря тому, что с дифференциалами можно обращаться как с обыкновенными дробями, см. [7].

<sup>8)</sup> То есть решение не удастся записать даже с участием интегралов.

как это часто бывает, главная польза заключается в «побочных эффектах». Поиск решения вроде бы служит основным мотивом, но соответствующие манипуляции попутно дают нечто более существенное — умение преобразовывать уравнения, упрощать и выявлять их свойства.

Вот один из комфортно интегрируемых вариантов уравнения (2.6), называемый *уравнением с разделяющимися переменными*,  $\dot{x} = \varphi(x)\psi(t)$ . В эквивалентной записи

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = \psi(t) dt,$$

что ведет к решению в квадратурах

$$\int \frac{dx}{\varphi(x)} = \int \psi(t) dt,$$

неявно определяющему  $x(t)$ .

К разделению переменных могут приводить дополнительные ухищрения (замены переменных). Рассмотрим два характерных примера.

Уравнение<sup>9)</sup>

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y \tag{2.7}$$

не меняется под действием преобразований

$$x = x' - u, \quad y = y' - 2u,$$

которые не меняют также функции  $z = 2x - y$ . Поэтому замена  $z = 2x - y$  сразу упрощает (2.7), приводя к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{2 - z} = dx.$$

Вот более сложный пример. *Уравнение Абеля второго рода*

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} y, \tag{2.8}$$

как легко убедиться, инвариантно относительно преобразований

$$x = kx', \quad y = \frac{1}{k} y'.$$

Эти же преобразования не влияют на функцию  $z = xy$ . Поэтому переход от переменных  $(x, y)$  к  $(x, z)$  упрощает (2.8) и дает интегрируемое уравнение

$$\frac{z dz}{z^2 - 3z + 2} = \frac{dx}{x}.$$

---

<sup>9)</sup> Обозначение переменных здесь подчеркивает, что аргументом может быть не обязательно время.

(!) Последние два примера не имеют большого самостоятельного значения, а вот использованный инструмент заслуживает пристального внимания. Речь идет о выявлении инвариантности изучаемых уравнений к тем или иным преобразованиям. Это, как правило, дает полезную информацию о свойствах решений, наличии законов сохранения и т. п.

В качестве примеров обычно предпочитают что-нибудь взятое с потолка, но стерильное, нежели уравнения движения, скажем, механической системы. Необходимость вникать еще и в физику иногда раздражает. Тем не менее подключение физики чаще всего плодотворно. Более того, практически это едва ли не единственная путеводная нить, способная удержать от бессмысленных блужданий по лабиринту выдуманного знания. Примеры с потолка тоже полезны, но в меру.

**Колебания.** Если положение материальной точки массы  $m$  характеризуется координатой  $x$ , то второй закон Ньютона приводит к уравнению  $m\ddot{x} = F(x)$ , когда сила  $F$  зависит только от  $x$ , либо к уравнению

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

в более общем случае.

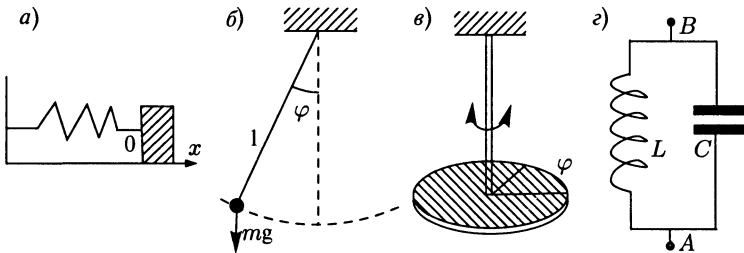


Рис. 2.3. Маятники

В частности, маятник на пружине — рис. 2.3 а — движется в соответствии с уравнением  $m\ddot{x} + kx = 0$ , где  $k$  — коэффициент упругости пружины,  $m$  — масса грузика.

Движение подвешенного маятника, изображенного на рис. 2.3 б, описывается так

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (2.9)$$

что для малых колебаний, в силу  $\varphi \approx \sin \varphi$ , переходит в

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (2.10)$$

Крутильные колебания — рис. 2.3 в — описывает такое же уравнение

$$I\ddot{\varphi} + J\varphi = 0$$

( $I$  — момент инерции диска,  $J\varphi$  — крутящий момент стержня).

В компанию механических маятников не случайно попадает и колебательный контур, — рис. 2.3 г — представляющий собой электрический маятник. Уравнение колебаний снова имеет тот же вид,

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

названия коэффициентов другие:  $q$  — электрический заряд,  $L$  — индуктивность,  $C$  — емкость. Место «возвращающей силы» занимает электрическое напряжение  $q/C$ .

Таким образом, малые колебания всех маятников единообразно описываются уравнением

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0.} \quad (2.11)$$

В конкретных задачах меняется лишь интерпретация переменных. Общим решением (2.11) служит

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\delta$  — сдвиг по фазе,  $\omega$  — круговая частота<sup>10)</sup>. Задание начальных условий определяет выбор констант  $A, \delta$ .

Вместо  $A \sin(\omega t + \delta)$  в качестве  $x(t)$  с тем же успехом используется  $A \cos(\omega t + \delta)$  либо

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t,$$

где выбором значений констант  $c_1, c_2$  можно удовлетворить любым начальным условиям<sup>11)</sup>:  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ .

Все эти варианты равносильны (сводятся один к другому подбором констант). Тот факт, что они удовлетворяют (2.11), легко проверяется. Отсутствие иных решений вытекает из теорем единственности (см. далее).

<sup>10)</sup> Величину  $\omega$  называют также просто частотой, хотя  $\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu$  — обыкновенная частота.

<sup>11)</sup> Конечно, в реальных задачах уравнение (2.11) служит лишь хорошей моделью малых колебаний. Но само по себе оно описывает колебания любой амплитуды.

Наряду с уравнением (2.11) *незатухающих колебаний* рассматривается также уравнение колебаний при наличии *вязкого трения*

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.12)$$

Все это примеры *линейных дифференциальных уравнений*, на которых еще недавно базировалась вся физика. Сейчас, конечно, вся эта богатая и красивая наука уже набилла оскомину. Колесо истории повернулось в сторону изучения нелинейных процессов. Но эмоции не меняют устройства мироздания. Многие природные явления по-прежнему линейны.

Обратим внимание на уникальную особенность, с которой сталкивается здесь теория. Примеры обычно отражают лишь некоторые грани общих моделей. В данном случае изучение линейных уравнений второго порядка (2.12) равносильно изучению любого конкретного примера: маятника (неважно какого), колебательного контура и т. п. Другими словами, с некоторой натяжкой маятник по богатству содержания не уступает линейным уравнениям второго порядка общего вида.

Систематически линейные уравнения рассматриваются в следующей главе. В то же время общие принципы усматриваются на «маленьком» примере (2.12), при решении которого уже не удастся обойтись тригонометрическими функциями, что естественно, ибо трение ведет к энергетическим потерям и колебания должны затухать. В качестве решения напрашивается  $e^{\lambda t}$ , поскольку дифференцирование экспоненты сводится к умножению на константу,

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}. \quad (2.13)$$

В результате подстановка  $e^{\lambda t}$  в (2.12) дает

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0.$$

Поэтому, если  $\lambda$  — корень уравнения

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0, \quad (2.14)$$

то  $e^{\lambda t}$  — удовлетворяет (2.12). Получается, что общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни (2.14).

В случае комплексных корней  $\lambda_1, \lambda_2$  возникает впечатление, что нашла коса на камень. Но тревога оказывается ложной. Более того, все разрешается наилучшим образом — эффективно и просто. Если  $e^{\lambda t}$  удовлетворяет уравнению (2.12) при  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , — то уравнению (2.12) удовлетворяет как действительная часть функции

$$e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t),$$

так и мнимая. Поэтому все действительные решения уравнения (2.12) исчерпываются семейством

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

*Несмотря на простоту, использование комплексной экспоненты  $e^{\lambda t}$  представляет собой выдающийся трюк, на котором базируется вся теория линейных дифференциальных уравнений. Если говорить об аналогиях, то уместно вспомнить позиционную запись числа*

$$a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0.$$

*Тоже совсем простая вещь, но что было бы с математикой при записи чисел римским способом?*

В векторном варианте линейное однородное уравнение имеет вид  $\dot{x} = Ax$ , а его решением, проходящим через точку  $x(0) = x_0$  является  $x(t) = e^{At} x_0$ , что в значительной мере определяет роль матричной экспоненты (см. далее).

## 2.3. Существование и единственность

Имеет ли задача решение? Этот естественный вопрос тысячи лет повсеместно выпадал из поля зрения. Выпадал до тех пор, пока на квадратуру круга и вечный двигатель не стало уходить слишком много сил. Сейчас такой вопрос стал обязательным. И хотя он не всегда изобилует красотами, но это элемент фундамента, который, как известно, нужен не потому, что в подвале жить хорошо.

**Существование решения.** Чтобы говорить о разрешимости уравнения  $\dot{x} = f(x, t)$  надо уточнить, какие имеются в виду функции  $f(x, t)$ , и что подразумевается под решением. Утрясти такие вопросы раз и навсегда не удастся, ибо по мере развития теории «аппетит возрастает». Обычно отталкиваются от ситуации непрерывных  $f(x, t)$ , а под решением

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.15)$$

подразумевают непрерывно дифференцируемую функцию

$$x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\},$$

удовлетворяющую (2.15).

Сказанное оставляет большую свободу толкования и, как правило, уточняется следующим образом. Предполагается, что речь идет не о какой-то функции  $x(t)$ , удовлетворяющей (2.15), а о решении  $x(t)$ , проходящем через заданную точку  $x_0$  в момент  $t_0$ , т. е. о задаче Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.16)$$

При этом подразумевается решение (2.16), определенное в некоторой окрестности точки  $t_0$ , т. е. имеется в виду факт *локального существования*. Вопрос о подходящих  $x(t)$ , определенных на всей оси времени (если  $t$  — это время), трактуют как задачу о *продолжимости* локальных решений.

В русле сказанного имеет место приятный факт.

**2.3.1. Теорема Пеано.** *Решение задачи Коши (2.16) существует всегда.*

Иными словами, для существования функции  $x(t)$ , удовлетворяющей (2.16) в некоторой окрестности точки  $\{x_0, t_0\}$ , ничего кроме непрерывности правой части  $f(x, t)$  в окрестности  $\{x_0, t_0\}$  предполагать не надо.

Однако расхотеть порох на доказательство результата в общей форме — не обязательно. На практике, как правило, выполняются чуть более жесткие требования, в которых доказательство становится проще, а выводы — сильнее (см. далее).

**Единственность.** Для обеспечения единственности решения требуются дополнительные условия. Одной непрерывности  $f(x, t)$  уже не достаточно.

Например, решением

$$\dot{x} = 2\sqrt{x}$$

в области  $x \geq 0$  служат функции  $x(t) = (t + C)^2$  при  $t \geq -C$ . Но в данном случае имеется также *особое решение*<sup>12)</sup>  $x(t) \equiv 0$ . Помимо этого, решениями будут еще функции, получаемые склеиванием  $x(t) \equiv 0$  с полупараболами  $x(t) = (t + C)^2$ , ( $t \geq -C$ ). Получается, что через любую точку оси  $x = 0$  проходит бесчисленное множество различных траекторий<sup>13)</sup> уравнения  $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ .

Легко заметить, что единственность в приведенном примере нарушается там, где частная производная  $f'_x(x, t)$  обращается в бесконечность, т. е. в тех точках, где поле  $f(x, t)$  бесконечно быстро меняется по  $x$ . Именно это обстоятельство часто служит источником неприятностей, и запрет на него сразу обеспечивает единственность решения (*теорема Пикара*). Результат сохраняет силу и в векторном случае — при условии ограниченности всех производных  $f'_{x_i}(x, t)$ .

Разумеется, речь идет о достаточных условиях. Через любую точку области  $x \geq 0$  проходит единственное решение уравнения  $\dot{x} = 2\sqrt{x} + 1$ , несмотря на то, что  $\left. \frac{\partial(2\sqrt{x} + 1)}{\partial x} \right|_{x=0} = \infty$ .

Более общий вариант теоремы Пикара не предполагает дифференцируемости правой части и опирается на предположение о *липшицевости*<sup>14)</sup>  $f(x, t)$ .

**2.3.2. Теорема.** Если  $f(x, t)$  удовлетворяет условию Липшица, то через любую точку рассматриваемой области проходит единственное решение задачи Коши (2.16).

◀ Липшицевость в доказательстве работает так. Задача Коши на промежутке  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  заменяется эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau, \quad (2.17)$$

которое получается интегрированием  $dx/d\tau = f(x, \tau)$  по  $\tau$  от  $t_0$  до  $t$ .

<sup>12)</sup> Особым называют решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

<sup>13)</sup> Множество всех решений задачи Коши в случае неединственности называют *интегральной воронкой*.

<sup>14)</sup> Функция  $f(x, t)$  называется *липшицевой* по  $x$ , если существует такая константа  $L$ , что

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|$$

для любых  $x, y, t$  в рассматриваемой области.

Правая часть (2.17) при  $\Delta t < L^{-1}$  ( $L$  — константа Липшица) представляет собой сжимающий оператор  $F$ , поскольку для  $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$

$$\left| \int_{t_0}^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| \leq L\Delta t \|x - y\|,$$

где под  $\|\cdot\|$  подразумевается норма в  $C[t_0, t_0 + \Delta t]$  — т.е.  $\|x(t)\| = \max |x(t)|$  по  $t$ . По той же причине  $F$  переводит в себя шарик из  $C[t_0, t_0 + \Delta t]$  с центром в точке  $x(t) \equiv x(t_0)$ . Далее решается ссылка на принцип сжимающих отображений. ►

*Переход от дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному (2.17) характерен для задач, касающихся изучения решений  $x(t)$  в целом. Дифференциальное уравнение как бы дает лишь мгновенную фотографию, и не очень удобно там, где нужна целостная информация о траектории. В интегральных уравнениях траектории «присутствуют» целиком, и для определенной категории проблем это удобнее.*

**Нелокальная теорема.** В теореме 2.3.2 установлено существование и единственность решения  $x(t)$ , определенного лишь на промежутке времени  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ . На самом деле, ничего не добавляя к предположениям, можно утверждать большее.

**2.3.3. Теорема.** Пусть  $f(x, t)$  на промежутке  $[0, T]$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ . Тогда через любую точку рассматриваемой области проходит единственное решение задачи Коши (2.16), определенное на  $[t_0, t_0 + T]$ .

◀ Положим для простоты  $t_0 = 0$  и вместо обычной нормы

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$$

возьмем эквивалентную норму<sup>15)</sup>

$$\|x\|^* = \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} |x(t)|.$$

Необходимое заключение следует из того, что оператор в правой части (2.17) сжимает по норме  $\|\cdot\|^*$  с коэффициентом  $1 - e^{-LT}$ , что вытекает из неравенства

$$\max_{t \in [0, T]} \left| e^{-LT} \int_0^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| \leq$$

<sup>15)</sup> Эквивалентную в силу неравенства

$$e^{-LT} \|x(t)\| \leq \|x(t)\|^* \leq \|x(t)\|.$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{L(\tau-t)} e^{-L\tau} L |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \|x - y\|^* \max_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{L(\tau-t)} L d\tau = (1 - e^{-LT}) \|x - y\|^*. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Достижимо ли равновесие за конечное время?** В условиях единственности решения — не достижимо. В противном случае при обращении времени <sup>16)</sup> (замене  $t$  на  $-t$ ) из равновесия выходило бы бесконечно много решений. Вот более точный результат.

**2.3.4. Теорема.** Если  $f(0, t) \equiv 0$ , то в условиях теоремы 2.3.2 нулевое равновесие системы  $x = 0$  не может быть достигнуто из ненулевого положения за конечное время.

◀ Предположим противное. Пусть  $x(0) \neq 0$ , но  $x(t) = 0$  при некотором  $t > 0$ . Тогда два решения  $x(t)$  и  $y(t) \equiv 0$  сливаются при  $t > 0$ , а при обратном течении времени нулевое решение раздваивается в момент  $-t$  на  $x(-t)$  и  $y(-t) \equiv 0$ , что противоречит единственности. ▶

Такого же сорта причины не дают системе достичь за конечное время предельных циклов и других инвариантных множеств.

## 2.4. Продолжимость и зависимость от параметра

**Продолжимость.** Традиционная концентрация внимания на локальном характере теорем существования и единственности породила миф о загадочных обстоятельствах, мешающих продолжимости решения.

На самом деле проблема довольно проста. Если в любой точке  $\{x, t\}$  выполняются условия, обеспечивающие существование решения у задачи (2.16), то продолжению  $x(t)$  сколь угодно далеко (вправо) может помешать единственная причина: *уход траектории  $x(t)$  за конечное время в бесконечность (либо выход на границу рассматриваемой области).*

Например, любое решение  $x(t) = \operatorname{tg}(t + c)$  уравнения

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

<sup>16)</sup> Сохраняюшем обычно условия единственной разрешимости задачи Коши.

определено лишь на промежутке длины  $\pi$  именно по причине ухода решения в бесконечность.

В случае  $\dot{x} = x^2$  общее решение  $x(t) = (c - t)^{-1}$  уходит в бесконечность за конечное время, если в начальном положении  $x(t_0) > 0$ , и бесконечно долго стремится к нулю при условии  $x(t_0) < 0$  (но оказывается непродолжимым влево, при движении по  $t$  к минус бесконечности).

Разумеется, «хороши» и те и другие уравнения — обеспечивающие продолжимость решений и не обеспечивающие. При исследовании динамических процессов взрывного характера, например, именно уход траекторий в бесконечность определяет причину главного эффекта<sup>17)</sup>.

Понятно, что невозможность продолжения траекторий связана с быстрым ростом правой части дифура при увеличении нормы  $x$ . Поэтому, скажем, условие  $\|f(x, t)\| \leq k\|x\|$  обеспечивает продолжимость решений  $\dot{x} = f(x, t)$  на всю ось  $t$ . Это вытекает из следующей теоремы.

**2.4.1. Теорема.** Пусть при любых  $x \in R^n$  и  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$x \cdot f(x, t) < L(x^2),$$

где функция  $L(\cdot)$  удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty L^{-1}(\varphi) d\varphi = \infty.$$

Тогда решение  $x(t)$  задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

при любом  $x_0 \in R^n$  определено при всех  $t \geq 0$ .

Доказательство опирается на следующий вспомогательный результат.

**2.4.2. Лемма о дифференциальном неравенстве.** Пусть скалярные функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  при  $t \in [0, T]$  удовлетворяют условиям

$$\dot{\varphi} = L(\varphi, t), \quad \dot{\psi} < L(\psi, t).$$

Тогда  $\psi(0) \leq \varphi(0)$  влечет за собой

$$\psi(t) \leq \varphi(t) \quad \text{при любом } t \in [0, T].$$

<sup>17)</sup> Уходят в бесконечность, конечно, траектории упрощенной модели.

◀ В предположении противного кривая  $\psi(t)$  должна пересечь  $\varphi(t)$  в некоторой точке  $t$ , как изображено на рис. 2.4, чего не может быть, поскольку в этом случае  $\dot{\psi}(t) \geq \dot{\varphi}(t)$ . ▶

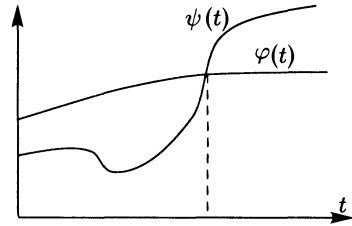


Рис. 2.4

◀ Теперь заметим, что для

$$\psi(t) = x^2(t) = \sum x_k^2(t)$$

в условиях теоремы 2.4.1 выполняется неравенство

$$\dot{\psi} = 2x \cdot \dot{x} = 2x \cdot f(x, t) < 2L(\psi),$$

а в силу  $\int \frac{d\varphi}{L(\varphi)} = \infty$  решения  $\varphi(t)$  уравнения  $\dot{\varphi} = L(\varphi)$  ограничены при конечном  $t$ . Доказательство теоремы завершает ссылка на лемму 2.4.2. ▶

**Зависимость от параметра.** Чтобы модель системы, которая всегда неточна, имела право на существование, — выводы (решения) должны слабо зависеть от параметров задачи.

◀ Остановимся сначала на зависимости решения задачи Коши (2.16) от начальных данных, т. е.  $x(t)$  от  $x(t_0)$ . Если  $f(x, t)$  удовлетворяет условию

Липшица по  $x$ , и  $F$  обозначает  $\int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau$ , то  $F$  — как было показано при доказательстве теоремы 2.3.2 — сжимает в пространстве  $C[t_0, t_0 + \Delta t]$  с коэффициентом  $\rho = \Delta t \cdot L < 1$ . Отсюда, если  $x(t)$  и  $y(t)$  — два различных решения, то

$$\|x - y\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \rho \|x - y\|,$$

откуда

$$\|x(t) - y(t)\| \leq (1 - \rho) \|x(t_0) - y(t_0)\|, \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta t],$$

что означает непрерывную зависимость  $x(t)$  от  $x(t_0)$ , т. е. непрерывность оператора сдвига  $U_{t_0, t}$ , но при достаточно малых  $t - t_0$ . Однако  $U_{t_0, t}$  при любом  $t$  можно представить в виде композиции

$$U_{t_0, t} = U_{t_0, t_1} \dots U_{t_{n-1}, t_n},$$

где  $|t_k - t_{k-1}| < \Delta t$ , что в итоге гарантирует непрерывную зависимость  $x(t)$  от начального положения при любом конечном  $t$ . ▶

◀ Проблема непрерывной зависимости решения  $\dot{x} = f(x, \varepsilon, t)$  от параметра(ов)  $\varepsilon$  на первый взгляд представляется более сложной,

но она сводится к предыдущей с помощью перехода к вспомогательной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \varepsilon, t), \\ \dot{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

**2.4.3. Теорема.** *Если  $f(x, \varepsilon, t)$  непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по  $x$ , то любое решение  $x(t)$  уравнения  $\dot{x} = f(x, \varepsilon, t)$  непрерывно зависит от  $\varepsilon$  и от  $x(0)$ .* ►

**Гладкость решений.** *Если  $f(x, t)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных  $m$  раз, то любое решение  $\dot{x} = f(x, t)$  непрерывно дифференцируемо  $m + 1$  раз.* Это простое следствие того, что интегрирование увеличивает порядок дифференцируемости на единицу, а решения  $\dot{x} = f(x, t)$  удовлетворяют интегральному уравнению (2.17).

Что касается дифференцируемости решений  $x(t, \varepsilon)$  уравнения  $\dot{x} = f(x, \varepsilon, t)$ , то их  $m$ -кратная дифференцируемость по  $\varepsilon$  вытекает из  $m$ -кратной дифференцируемости  $f(x, \varepsilon, t)$  по совокупности переменных<sup>18)</sup>.

## 2.5. О структуре и направлениях

Хорошо, когда сложная система организована иерархически. Крупные артерии, потом — мельче, мельче, и так вплоть до капилляров. Такое свойство особенно ценным представляется жителям Лондона, улицы которого образуют сплошную капиллярную сеть, и там без карты черт ногу сломит. О диффузах тоже хотелось бы иметь возможность мыслить укрупненно.

Поначалу кажется, что решение дифференциальных уравнений — основная магистраль. Но это не главное направление теории. Особенно, если говорить об аналитических методах, которые сейчас блекнут на фоне численного решения диффузов с помощью цифровой техники.

**О численных методах.** ◀ Одна из наиболее естественных идей численного решения задачи Коши,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

<sup>18)</sup> Детали см. в [27–29].

заключается в замене производной ее приближением и переходе к разностному уравнению

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = f(x(t_i), t_i)$$

при достаточно малых по модулю  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ .

В результате вычисление значений  $x_i = x(t_i)$  в моменты  $t_i$  сводится к итерационной процедуре

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i)\Delta t_i. \quad \blacktriangleright$$

Вариации этой идеи с акцентом на повышении точности счета иногда кажутся «архитектурными излишествами», но это не всегда так. Дело в том, что определение решений на больших промежутках времени требует очень большого числа шагов — и миллиметровые неточности могут порождать километровые ошибки.

◀ Другая естественная идея состоит в использовании метода последовательных приближений

$$x_k(t) = x(0) + \int_0^t f(x_{k-1}(s), s) ds \quad (2.18)$$

для эквивалентного исходной задаче интегрального уравнения (2.17).

Если  $f(x, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  с константой  $L$ , то невязка  $\delta_k(t) = |x_k(t) - x^*(t)|$ , где  $x^*(t)$  — искомое решение, удовлетворяет неравенству

$$\delta_k(t) \leq L \int_0^t \delta_{k-1}(s) ds \leq \dots \leq \frac{L^k t^k}{k!} \max_{\tau \in [0, t]} \delta_0(\tau).$$

Выходит, что последовательные приближения сходятся к  $x^*(t)$  быстрее любой геометрической прогрессии. В данном случае говорят о *факториальной сходимости*. ▶

*Обозрение прикладных задач показывает, что решение дифуров как таковое требуется довольно редко. Расчет движения космических тел, боевых ракет — вот примерный круг соответствующих*

потребностей. Еще одна область приложений такого рода — научные исследования, в которых на прицеле держатся совсем другие задачи, а решение диффузов используется в качестве пробного камня.

Гораздо чаще изучение дифференциальных уравнений имеет целью выявление и анализ качественных эффектов.

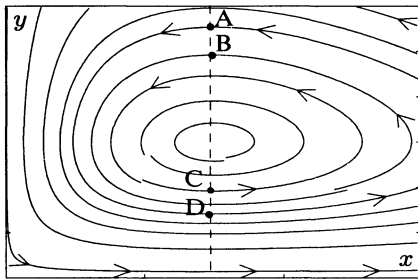
**Модель «хищник—жертва».** Перед биологами не раз возникали неожиданные задачи. Об увеличении численности волков, например, в результате отстрела. По здравому размышлению — бред, тем не менее — факт. Действуя без математики, некоторые исследователи терялись в догадках.

Дифференциальные уравнения легко вскрывают элементарную причину. Пусть  $x, y$ , соответственно, обозначают численности жертв и хищников (овец и волков). Правдоподобна следующая динамическая модель (Вольтерра — Лотка)

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x, \\ \dot{y} = (\gamma x - \delta)y. \end{cases} \quad (2.19)$$

Скорость  $\dot{x}$  пропорциональна рождаемости, а значит — численности  $x$ , но коэффициент пропорциональности  $\alpha - \beta y$  тем меньше, чем больше волков (поедających овец). И наоборот, коэффициент  $\gamma x - \delta$  роста популяции хищников тем больше, чем больше пищи, т. е. овец.

Анализ показывает, что решения (2.19) в окрестности равновесия имеют колебательный характер — система движется по замкнутым кривым (рис. 2.5). На практике такого сорта колебания действительно имеют место.



**Рис. 2.5.** Динамика модели «хищник—жертва»

Представим теперь, что в точке  $A$  производится отстрел волков и система перепрыгивает в точку  $B$ . Дальнейшее движение будет происходить по орбите меньшего размера, что интуитивно ожидаемо. Если же уменьшить численность волков в точке  $C$ , то система перейдет в  $D$  и будет двигаться по большей орбите. Амплитуда колебаний увеличится. Это уже противоречит интуиции, но как раз объясняет явление. Выясняется заодно, что результат определяется выбором момента отстрела.

*Нужно ли было для анализа решать диффуры? Вообще говоря, нет. Важна была качественная картина поведения. Разумеется, компьютер высветил на экране фазовый портрет, решив соответствующую задачу Коши для различных начальных данных. Но численные значения, даже приближительные, для анализа совсем не существенны. Не говоря о том, что сама модель очень далека от действительности.*

На этом фоне начинает казаться, что и сами дифференциальные уравнения совсем не обязательны. В какой-то степени это имеет под собой основание, но на той или иной стадии размышлений все равно возникнет вопрос об источнике происхождения рисунка 2.5.

Идею вторичности поиска решений дифузов хотелось бы особо выделить. Гипноз слова «уравнение» многое ставит с ног на голову. Раз уравнение — в первую очередь надо решить. А решать в 99 случаях из 100 как раз не надо. Задачи теории дифференциальных уравнений, в основном, никак не связаны с необходимостью определения  $x(t)$ .

На дифуры важно смотреть не только как на уравнения, но и как на соотношения между переменными. На этом пути, *не решая уравнений*, можно сделать массу полезных выводов. Получить, например, все физические законы сохранения. Это, конечно, впечатляет, но чересчур глобально. Рутинные задачи находятся уровнем ниже, но и там дифуры, как соотношения, играют важную роль. Фиксируя взаимосвязи переменных, они позволяют, не находя  $x(t)$ , определить период колебаний, критические значения параметров, усредненные характеристики и т. п.

Рассмотрим, для примера, *теорему вириала*, которая дает полезную характеристику движения механической системы.

#### ◀ Уравнения движения Ньютона

$$m_j \ddot{r}_j = F_j,$$

где  $r_j, F_j$  — векторы, умножим скалярно на  $r_j$  и запишем в виде

$$\frac{d}{dt}(m_j r_j \dot{r}_j) - m_j \dot{r}_j^2 = F_j r_j.$$

Суммируя теперь по  $j$  и интегрируя по  $t$ , получаем

$$\sum m_j r_j \dot{r}_j \Big|_t^{t+\tau} - \int_t^{t+\tau} \sum m_j \dot{r}_j^2 dt = \int_t^{t+\tau} \sum F_j r_j dt. \quad (2.20)$$

Если движение периодически и  $\tau$  — период, то первое слагаемое в (2.20) равно нулю. В результате среднее значение кинетической энергии за период

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum \frac{m_j \dot{r}_j^2}{2} dt$$

оказывается равным *вириалу сил*<sup>19)</sup>

$$V = -\frac{1}{2\tau} \int_t^{t+\tau} \sum F_j r_j dt,$$

что широко используется физиками.

### 2.5.1. Теорема вириала. $\langle T \rangle = V.$ ►

Легко убедиться, что результат сохраняет силу, если движение не периодично, но ограничено, а усреднение берется по бесконечному промежутку времени,  $\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , либо усреднение вообще не производится, но интегралы  $\int_t^\infty$  сходятся.

Если силы потенциальны,  $F_j = \nabla_j U$ , а потенциальная энергия однородна степени  $\nu$ , т. е.  $U(\lambda r) = \lambda^\nu U(r)$ , то получается<sup>20)</sup>

$$\langle T \rangle = \frac{\nu}{2} \langle U \rangle.$$

В частности, для линейных колебаний ( $U \sim r^2$ )  $\langle T \rangle = \langle U \rangle$  — средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, для движения в поле тяготения ( $U \sim 1/r$ )  $\langle T \rangle = -\langle U \rangle/2$ .

#### Упражнение

На решении задачи Коши

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = u, \quad q(0) = \dot{q}(0) = 0,$$

при любых значениях параметров выполняется равенство

$$R \int_0^\infty \dot{q}^2 dt = \frac{Cu^2}{2}. \quad (2.21)$$

В [19] пример интерпретируется как замыкание колебательного контура<sup>21)</sup> на постоянное напряжение  $u$ . Равенство (2.21) тогда означает, что половина энергии идет на зарядку конденсатора, другая половина выделяется в виде тепла на сопротивлении. Соотношение «50 на 50» не меняется при любом

<sup>19)</sup> Клаузиус (1870) вириалом называл величину  $-2V$ .

<sup>20)</sup> С опорой на известную (для однородных функций) формулу Эйлера [7]

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i = \nu U.$$

<sup>21)</sup>  $L$  — индуктивность,  $R$  — сопротивление,  $C$  — емкость.

варьировании  $L$ ,  $R$  и  $C$ . В этом трудно не заподозрить действие теоремы вириала. При механической интерпретации исходного уравнения это действительно так — работает теорема вириала на бесконечном промежутке времени (без усреднения).

## 2.6. Движение по градиенту

Довольно часто встречаются уравнения

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x), \quad (2.22)$$

где  $\nabla\varphi(x)$  — градиент  $\varphi(x)$ , т. е. вектор

$$\text{grad } \varphi(x) = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \right\}.$$

Один из источников происхождения систем (2.22) — численные процедуры поиска локальных максимумов функции  $\varphi(x)$ . На рис. 2.6 а изображен график некой функции  $z = \varphi(x, y)$  двух переменных — линии постоянного уровня  $\varphi(x, y)$  даны в проекции на плоскость  $\{x, y\}$ .

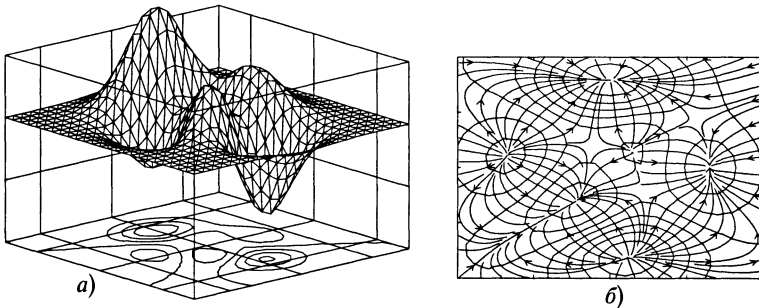


Рис. 2.6.  $z = \varphi(x, y)$

Соответствующий фазовый портрет (2.22) в плоскости  $(x, y)$  (на фоне контуров постоянного уровня) показан на рис. 2.6 б.

Движение (2.22) слишком наглядно и удобно, чтобы в каждом конкретном случае  $\dot{x} = f(x)$ , т. е.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x), \end{cases} \quad (2.23)$$

не попытаться найти такой потенциал  $\varphi$ , что  $\nabla\varphi(x) = f(x)$ . В случае успеха задача становится прозрачной. Успех обеспечивается равенством всех перекрестных производных,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j,$$

что случается не так часто. Однако наличия «точного» потенциала на самом деле не требуется (для прозрачности). Достаточно существования такого потенциала  $\varphi$ , что движение (2.23) происходит под острым углом к градиенту  $\varphi$ , т. е.  $(\nabla\varphi(x), f(x)) > 0$ . Удобства сохраняются, поскольку траектория также взбирается в гору, хотя уже и не строго перпендикулярно вверх. Движение можно характеризовать как *псевдоградиентное*.

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_2) - x_1, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1) - x_2, \end{cases}$$

и функции  $f_1, f_2$  монотонны,  $f'_1(x_2) > 0$ ,  $f'_2(x_1) > 0$ .

Тогда движение

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f'_2(x_1)[f_1(x_2) - x_1], \\ \dot{x}_2 = f'_1(x_2)[f_2(x_1) - x_2] \end{cases}$$

происходит под острым углом к исходному и имеет потенциальный характер, в силу равенства перекрестных производных у правых частей.

Соответствующий потенциал легко находится

$$\varphi(x) = f_1(x_2)f_2(x_1) - x_1f_2(x_1) - x_2f_1(x_2) - \int_0^{x_1} f_2(s) ds - \int_0^{x_2} f_1(s) ds.$$

## 2.7. Уравнения с частными производными

Производная по времени скалярной функции  $u(x)$  вдоль траекторий  $x(t)$  автономного уравнения

$$\dot{x} = f(x),$$

очевидно, равна

$$\dot{u} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(x) = \nabla u \cdot f(x),$$

т.е. скалярному произведению градиента  $u(x)$  на вектор  $f(x)$ .

Величину  $\nabla u \cdot f(x)$  называют еще *производной Ли*, а также *производной  $u(x)$  по направлению векторного поля  $f(x)$* , либо *производной в силу уравнения  $\dot{x} = f(x)$* .

**Первые интегралы.** Если производная  $\dot{u}(x)$  в силу  $\dot{x} = f(x)$  равна нулю, это значит, что траектории  $x(t)$  целиком располагаются на поверхностях постоянного уровня

$$u(x) = \text{const.}$$

В этом случае говорят, что  $u(x)$  является *первым интегралом* системы<sup>22)</sup>  $\dot{x} = f(x)$ .

Легко видеть, что можно сказать и по-другому. Любое (нетривиальное) решение  $u(x) \neq \text{const}$  *линейного уравнения с частными производными (ЧП-уравнения)  $\nabla u \cdot f(x) = 0$* , т.е.

$$\sum_i f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad (2.24)$$

является первым интегралом системы  $\dot{x} = f(x)$ .

Надо признать, что связь между (2.24) и *уравнением характеристик*<sup>23)</sup>  $\dot{x} = f(x)$  — больше дает первому уравнению, нежели второму. О каком из двух речь ни заходит, дело обычно заканчивается решением  $\dot{x} = f(x)$ . Поэтому ЧП-уравнение первого порядка (2.24) — это не столько вычислительный инструмент, сколько полезная категория мышления.

<sup>22)</sup> Первым интегралом неавтономной системы  $\dot{x} = f(x, t)$  называют первый интеграл автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ \dot{t} = 1. \end{cases}$$

<sup>23)</sup> Траектории  $\dot{x} = f(x)$  называют *характеристиками* уравнения (2.24).

Наличие первых интегралов у автономной системы, вообще говоря, редкость. В том смысле, что взятое наугад уравнение, как правило, не имеет первых интегралов<sup>24)</sup> — т. е. траектории  $x(t)$  не укладываются на поверхности. Соответственно, линейное уравнение (2.24) имеет нетривиальное решение лишь в исключительных случаях. Динамика физических систем дает многочисленные примеры таких исключений — сохранение энергии, количества движения и т. п. Обнаружение первых интегралов в большинстве случаев обеспечивает прорыв в решении задачи.

◀ Если говорить о достаточно малых окрестностях точек фазового пространства, то в них первые интегралы существуют «всегда», но от этого пользы уже не так много. Причина (локального существования) заключается в том, что в малой окрестности любой точки  $x = a$ , в которой  $f(a) \neq 0$ , траектории  $\dot{x} = f(x)$  почти параллельны, и их можно локальной заменой переменных (диффеоморфизмом) перевести в систему

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dots, \quad \dot{y}_n = 0, \quad (2.25)$$

имеющую  $n - 1$  интегралов движения:

$$y_2 = c_2, \quad \dots, \quad y_n = c_n.$$

Возможность локального преобразования гладкого движения  $\dot{x} = f(x)$  в параллельное вида (2.25) называют *теоремой о выпрямлении* векторного поля (см. например, [3, 27]), которая нередко оказывается удобным инструментом. ▶

*Каждый первый интеграл позволяет понизить порядок изучаемой системы на единицу.* Скажем, если  $u(x)$  — первый интеграл системы  $\dot{x} = f(x)$ , то выражая, например,  $x_n$  из уравнения  $u(x) = c$  (при надлежащем выборе константы  $c$ ), получим  $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Теперь остается решить систему

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (i = 1, \dots, n - 1),$$

что отражает суть идеи.

◀ Умножая уравнение<sup>25)</sup>

$$m\ddot{x} = -U'(x)$$

на  $\dot{x}$ , получаем эквивалентное —

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

<sup>24)</sup> Такого сорта утверждения, равно как и декларации о существовании неинтегрируемых уравнений, в стандартных курсах по дифференциальным уравнениям «повисают небоснованными», поскольку находятся на другой территории — в теории групп Ли.

<sup>25)</sup> Описывающее движение точки массы  $m$  в потенциальном поле.

которое после интегрирования дает

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (2.26)$$

Интеграл движения (2.26) в механической интерпретации представляет собой закон сохранения энергии, из которого в данном случае следует

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Таким образом, вместо исходного уравнения второго порядка<sup>26)</sup> остается проинтегрировать уравнение первого порядка. ►

Рассмотрение линейных ЧП-уравнений, стоящих особняком, дает в некотором роде превратное представление о предмете, если говорить об уравнениях с частными производными вообще. Дело в том, что уравнения более высоких порядков составляют костяк теоретической физики, и даже называются уравнениями математической физики.

Конечно, с точки зрения задач данного курса урматы<sup>27)</sup> расположены вдалеке, но их было бы неправильно отодвигать совсем за горизонт. Тем более, что в некоторых ракурсах — имеются тесные связи с обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. раздел 5.7).

## 2.8. Об уравнениях первого порядка

Дифференциальные уравнения начинались, естественно, с изучения простейших ситуаций. Точнее говоря, — с ситуаций, которые казались простейшими. К таковым в первую очередь были отнесены скалярные уравнения  $\dot{x} = f(x, t)$ , поделенные на ряд категорий. Всего две скалярные переменные — казалось бы, что может быть проще. Но не тут-то было.

Линейное уравнение

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

правда, легко решалось в общем виде<sup>28)</sup>.

Следующим шагом было уравнение *Риккати*

$$\dot{x} - 2a(t)x - b(t) + c(t)x^2 = 0, \quad (2.27)$$

<sup>26)</sup> Эквивалентного системе  $\dot{x} = y, \dot{y} = -U'(x)$ .

<sup>27)</sup> Жаргонное сокращение для уравнений математической физики.

<sup>28)</sup> Сначала решается однородное уравнение  $\dot{x} = a(t)x$  разделением переменных,  $d\mathbf{x}/\mathbf{x} = a(t) dt$ , а потом варьируется константа, см. раздел 3.6.

которое, как принято утверждать, возникает в огромном количестве прикладных задач. Определенная доля лукавства здесь состоит в том, что уравнение (2.27) появляется в любой области, где возникает желание учесть нелинейные эффекты, ограничиваясь простейшим вариантом квадратичной добавки. Но уравнение (2.27) интересно само по себе, с чисто математической точки зрения — как первый шаг в нелинейный океан.

Его популярности немало способствовала также принципиальная *теорема Лиувилля* о том, что решение (2.27) не всегда можно выразить в квадратурах от элементарных функций. Скажем, уравнение  $\dot{x} = x^2 - t$  не решается в квадратурах, — любопытно, что подстановка  $\dot{x} = \dot{u}/u$  сводит его к *линейному уравнению* второго порядка

$$\ddot{u} + tu = 0.$$

Сведение нелинейного уравнения к линейному с помощью нелинейной замены переменных не всегда возможно, но встречается довольно часто (в учебниках). Решение линейной системы уравнений, например

$$\begin{cases} \dot{u} = a(t)u + b(t)v, \\ \dot{v} = c(t)u - a(t)v, \end{cases}$$

при условии  $v(t) \neq 0$  на рассматриваемом промежутке времени, — дает решение  $x(t) = u(t)/v(t)$  общего уравнения (2.27).

Последний факт в комбинации с теоремой Лиувилля показывает, что *неавтономные* линейные уравнения второго порядка и выше тоже не всегда решаются в квадратурах от элементарных функций.

*Утверждения о неразрешимости иногда воспринимаются как нечто катастрофичное. Но все они относятся к разряду рациональной невыразимости диагонали квадрата через сторону, что не мешает измерению линейкой и приближенному вычислению.*

Использование дополнительных инструментов иногда превращает неразрешимые задачи в разрешимые. Вот как работает, например, квазилинеаризация<sup>29)</sup>. Подставляя

$$v^2 = \max_u [2uv - u^2]$$

<sup>29)</sup> Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.

в уравнение Риккати

$$\dot{v} + v^2 + p(t)v + q(t) = 0, \quad (2.28)$$

приходим к

$$\dot{v} = \min_u [u^2 - 2uv - p(t)v - q(t)].$$

Уравнение было бы линейным — не будь операции взятия минимума. Но минимизация не портит задачу окончательно. Линейное уравнение

$$\dot{w} = u^2 - 2uw - p(t)w - q(t)$$

с любой фиксированной функцией  $u(t)$  обладает тем свойством, что <sup>30)</sup>

$$v(0) = w(0) \Rightarrow v(t) \leq w(t).$$

В итоге

$$v(t) = \min_u \left\{ e^{-\int_0^t [2u(\tau) + p(\tau)] d\tau} \left[ v(0) + \int_0^t e^{\int_0^s [2u(\tau) + p(\tau)] d\tau} [u^2(s) - q(s)] ds \right] \right\}.$$

Интересно, что подавляющая часть населения воспринимает последнее выражение как решение исходного дифференциального уравнения (2.28). Меньшинство предпочитает считать решением многоэтажной минимизации — сведение ее к уравнению (2.28).

### Упражнение

Уравнение Бернулли

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad \alpha \neq 1,$$

подстановкой  $y = x^{1-\alpha}$  приводится к линейному.

**Интегрирующий множитель.** В тех случаях, когда дифференциальное уравнение проистекает из рассмотрения *не динамических* задач, функция и аргумент оказываются в определенном смысле равноправными — и тогда  $dy/dx = f(x, y)$  часто записывают в форме  $dy - f(x, y) dx = 0$ . Либо рассматривается более общий случай

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2.29)$$

Если левая часть (2.29) представляет собой дифференциал некоторой функции (потенциала)  $\varphi(x, y)$ , т. е.  $d\varphi = P dx + Q dy$ , что означает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y), \quad (2.30)$$

<sup>30)</sup> См. раздел 2.4 — о дифференциальных неравенствах.

то это сразу дает первый интеграл  $\varphi(x, y) = c$  и тем самым решает исходное уравнение.

Перекрестные производные у  $\varphi$ , как известно, равны,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$

откуда, в силу (2.30),

$$\boxed{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}, \quad (2.31)$$

что, собственно, и является достаточным условием существования потенциала<sup>31)</sup>  $\varphi(x, y)$ .

Поскольку умножение (2.29) на ненулевой множитель  $\mu(x, y)$  не меняет уравнения по сути, — потенциал  $\varphi$  существует и в том случае, когда условию типа (2.31) удовлетворяет уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0.$$

Тогда  $\mu(x, y)$  называют *интегрирующим множителем*, и  $\varphi$  определяют, интегрируя  $d\varphi = \mu P dx + \mu Q dy$ , а  $\mu$  предварительно находят, решая уравнение с частными производными

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x},$$

что в общем случае не менее сложно, чем решение исходного уравнения, — но при удаче проливает дополнительный свет на ситуацию.

Иногда проблема интегрирующего множителя возникает не в связи с решением дифференциального уравнения, а в связи с изучением приращения некоторой величины (функции)  $q$ ,

$$\delta q = P dx + Q dy.$$

Если условие (2.31) не выполняется, то  $\delta q$  не дифференциал, и  $q$  не определяется значениями  $x$  и  $y$ . Другими словами, переменные

---

<sup>31)</sup>  $\varphi = \int P dx + Q dy$ .

$\{x, y, q\}$  не характеризуют полностью состояние системы. Если же существует интегрирующий множитель  $\mu$ , то  $d\mu q = \mu P dx + \mu Q dy$  становится (говорят — полным) дифференциалом, и ситуация кардинально меняется. Параметры  $\{x, y, \mu q\}$  теперь однозначно определяют состояние системы. Историческим примером на эту тему является дифференциал энтропии  $dS = \delta q/T$ . Интегрирующий делитель  $T$  (абсолютная температура) обратил приращение тепла  $\delta q$  в полный дифференциал функции  $S$ .

## Глава 3

### **Линейные уравнения**

Линейные дифференциальные уравнения образуют маленькую теорию, изложение которой в деталях может занимать сотни страниц. Ядро теории поддается более короткому описанию.

#### **3.1. Исходные понятия**

В общем случае уравнение

$$\varphi(x^{(n)}, \dots, x', x, t) = 0$$

называют линейным, если функция  $\varphi$  линейна по переменным  $x^{(k)}$ . Здесь возможны несколько вариантов. *Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородное*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (3.1)$$

*и неоднородное*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t). \quad (3.2)$$

Если коэффициенты  $a_k$  зависят от  $t$ , то (3.1), (3.2) называют *уравнениями с переменными коэффициентами*.

Уравнения (3.1), (3.2) записывают также в виде

$$Lx = 0, \quad Lx = f(t),$$

где  $L$ ,

$$Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x,$$

называют *дифференциальным оператором*.

*Бывает, что такого рода стенографические трюки воспринимаются в штыки. Дескать, зачем вводить лишние понятия и названия — экономия чернил копеечная, а голова забывается. Русский же язык никто не пытается подменить стенографией. Однако в математике «стенография» — едва ли не главный инструмент. Переход на лаконичный стиль очень часто производит качественный скачок в свободе мышления и манипулирования. Оценить выгоды, конечно, можно лишь «в процессе», но легко представить, что имеется в виду. От детальной записи типа (3.1) рябит в глазах, и суть не видна, как не видны очертания материка пешеходу. Достаточно взять хотя бы само свойство линейности. С помощью  $L$  оно выражается просто, удобно и наглядно:*

$$L(x + y) = Lx + Ly.$$

*В сложных ситуациях, когда маленькие выгоды нанизываются одна на другую, — суммарный эффект бывает очень большим.*

В векторном варианте линейные уравнения также подразделяются на *однородные* вида

$$\dot{x} = Ax \tag{3.3}$$

и *неоднородные*,

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{3.4}$$

в том и другом случае — с *постоянными коэффициентами*, если элементы матрицы  $A$  — числа, и с *переменными коэффициентами*, если элементы матрицы  $A$  — функции от  $t$ .

Замена  $z_1 = x$ ,  $z_2 = x'$ , ...,  $z_n = x^{(n-1)}$  приводит (3.1) к линейной системе

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots, \quad \dot{z}_n = -a_1 z_n - \dots - a_{n-1} z_2 - a_n z_1,$$

т. е.  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

*Изучать линейные дифуры, конечно, имеет смысл с привлечением элементарных понятий линейной алгебры. В противном случае лучше заниматься другим делом. И причина даже не в том, что матричные инструменты дают большой выигрыш в краткости изложения. Просто линейные дифуры находятся на том этаже знания, где покординатная запись не улавливает суть явлений.*

Разумеется, жизнь может сложиться так, что изучать диффуры приходится без линейной алгебры в багаже. Тогда лучше всего не замахиваться на уравнения общего вида, и ограничиться изучением простейших систем типа (2.12), в крайнем случае — пары взаимосвязанных осцилляторов, чтобы аллергическая реакция не возникла раньше времени. Такое начало в обучении, может быть, даже оптимально, ибо «примеры более поучительны, чем правила» — и начинать с матриц без предварительного знакомства с примерами тоже плохо.

### 3.2. Принципы суперпозиции

Когда результирующий эффект от нескольких независимых воздействий представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, — говорят, что система удовлетворяет *принципу суперпозиции*.

Для линейных однородных уравнений (с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от времени) принцип суперпозиции обычно формулируется так. *Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — решения (3.1), то решением является также*

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

*при произвольных константах  $c_1, c_2$ , — что вытекает из линейности дифференциального оператора  $L$ . Действительно,  $Lx_1 = 0$ ,  $Lx_2 = 0$ , влечет за собой*

$$L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 Lx_1 + c_2 Lx_2 = 0.$$

То же самое справедливо для уравнения (3.3), которому соответствует линейный дифференциальный оператор

$$Lx = \dot{x} - A(t)x.$$

Неоднородные уравнения *такому* принципу суперпозиции не удовлетворяют, и поэтому, строго говоря, линейными не являются<sup>1)</sup>, хотя и принято их таковыми называть. Но они обладают другой важной особенностью, которая вполне соответствует данному выше «гуманитарному» определению принципа суперпозиции. Имеется в виду следующее: *если  $x_1(t)$  — решение уравнения  $Lx = f_1(t)$ , а  $x_2(t)$  — решение  $Lx = f_2(t)$ , то  $x_1(t) + x_2(t)$  — решение  $Lx = f_1(t) + f_2(t)$* . Благодаря этому<sup>2)</sup>, становится возможным

<sup>1)</sup> Так же как  $cx = b$  при  $b \neq 0$  является гиперплоскостью, но не плоскостью, ибо не проходит через начало координат. Соответственно, из  $cx = b$ ,  $cy = b$  не следует  $c(x + y) = b$ .

<sup>2)</sup> Что является следствием линейности обратного оператора  $L^{-1}$ .

решать уравнения  $Lx = f(t)$  на основе разложения правой части, например, в ряд Фурье: если  $x_k(t)$  — решение  $Lx = a_k \sin kt$  и

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kt,$$

то  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)$  — решение  $Lx = f(t)$ .

**Фундаментальная система решений.** Функции  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  (скалярные или векторные) определяются как *линейно независимые*, если невозможно подобрать такие константы  $c_1, \dots, c_n$ , среди которых не все нулевые, что

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \equiv 0.$$

В силу принципа суперпозиции, если найдены  $n$  *линейно независимых решений*,

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

линейного однородного уравнения, — общим решением того же уравнения будет

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad (3.7)$$

где констант как раз хватает, чтобы удовлетворить любому начальному условию. Совокупность линейно независимых решений (3.6) называют еще *фундаментальной системой решений*. Объединение столбцов (3.6) в таблицу

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

называют *фундаментальной матрицей решений*, которая, очевидно, представляет собой невырожденное<sup>3)</sup> решение матричного уравнения  $\dot{X} = A(t)X$ .

<sup>3)</sup> Невырожденное — потому, что столбцы линейно независимы.

Можно сказать еще, что фундаментальная система решений представляет собой набор стандартных блоков, из которых можно «собрать» любое решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0.$$

Линейная независимость столбцов (3.6) нужна, чтобы система уравнений (векторное уравнение)

$$c_1 x_1(0) + \dots + c_n x_n(0) = x_0$$

имела решение при любом  $x_0$ . Для этого линейная независимость требуется лишь в нулевой момент, — но тогда она сохраняется при любом  $t$ , как будет показано ниже.

*Фундаментальную матрицу  $X(t)$  удобно выбирать так, чтобы  $X(0) = I$ . В этом случае  $X(t)$  называют **матрицантом**. Матрицант позволяет записывать решение  $\dot{x} = A(t)x$  в виде  $x(t) = X(t)x(0)$ , т. е.  $X(t)$  представляет собой оператор сдвига  $U_{0,t}$ . Сдвиг по траекториям  $\dot{x} = A(t)x$  за время от  $s$  до  $t$  при этом равен  $U_{s,t} = X(t)X^{-1}(s)$ . Отсюда очевидно, что оператор  $U_{s,t}$  — **линеен**. Матрицу  $X(t)X^{-1}(s)$  называют **матрицей Коши**.*

Для уравнения (3.1) под задачей Коши понимают

$$L(x) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Поэтому под линейной независимостью скалярных решений  $x_i(t)$  уравнения (3.1) подразумевают линейную независимость векторов

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_n'(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Соответственно, под матрицей фундаментальных решений —

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Весь этот разговор становится излишним, если изначально перейти от уравнения (3.1) к системе (3.3) с матрицей (3.5). Тогда все получается автоматически.

Однако унификация имеет свои изъяны — ускользает интересная специфика, да и в книгах перестаешь видеть «знакомые лица».

Понятно, что вопрос о существовании фундаментальной системы (матрицы) принципиален. Всегда ли изучение линейного однородного уравнения сводится к поиску  $n$  линейно независимых решений? Проблема легко решается.

**3.2.1. Теорема.** *Фундаментальная система решений существует всегда.*

◀ Разумеется, у линейной системы  $\dot{x} = A(t)x$ , о которой идет речь, элементы  $a_{ij}(t)$  матрицы  $A$  подразумеваются непрерывными. В этом случае правая часть системы  $\dot{x} = A(t)x$  удовлетворяет условиям Липшица, и поэтому задача Коши

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0,$$

при любом  $x_0$  имеет единственное решение. Отсюда следует, что для построения фундаментальной матрицы достаточно взять в качестве столбцов *любые  $n$  решений* (3.6) с *линейно независимыми начальными данными*  $x_1(0), \dots, x_n(0)$ . Линейная независимость функций

$$x_1(t), \quad \dots, \quad x_n(t)$$

при  $t > 0$  будет сохраняться автоматически. В предположении противного найдутся такие константы  $c_1, \dots, c_n$ , не все равные нулю, что

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0$$

при некотором  $t > 0$ . Но это будет означать, что решение

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t),$$

выходящее из ненулевой точки  $x(0) = c_1 x_1(0) + \dots + c_n x_n(0)$ , за конечное время приходит в нуль, что невозможно по теореме 2.3.4. ▶

### 3.3. Уравнения с постоянными коэффициентами

Идея решения однородного уравнения рассматривалась в предыдущей главе в связи с примером (2.12). Частично повторяясь, опишем методику применительно к уравнению (3.1). В качестве решения напрашивается  $e^{\lambda t}$ , поскольку дифференцирование экспоненты сводится к умножению на константу,

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad (3.8)$$

и, благодаря этому обстоятельству, подстановка  $e^{\lambda t}$  в (3.1) дает

$$(\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda t} = 0.$$

Поэтому, если  $\lambda$  — корень *характеристического уравнения*

$$P(\lambda) = \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.9)$$

где  $P(\lambda)$  называют *характеристическим полиномом*, — то  $e^{\lambda t}$  удовлетворяет (3.1). Общим решением (3.1), в силу принципа суперпозиции, будет <sup>4)</sup>

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad (3.10)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корни (3.9).

В случае комплексного корня  $\lambda = \alpha + i\beta$  в (3.7) вместо  $ce^{\lambda t}$  войдет  $ce^{\alpha t} \cos \beta t$  либо  $ce^{\alpha t} \sin \beta t$ , поскольку уравнению (3.1) удовлетворяет как действительная часть функции

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

так и мнимая.

Возможна и другая позиция. С самого начала можно рассматривать уравнение (3.1) в области комплексных функций, что освобождает от необходимости «постоянных реверансов». Действительные решения в этом случае получаются как действительная часть комплексных. Но надо иметь в виду, что при этом вместе с  $e^{\lambda t}$  решением является и  $ie^{\lambda t}$ , что, собственно, и позволяет говорить о действительном решении просто как о действительной части комплексного:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + ic_2 e^{\lambda t}.$$

*О роли теорем единственности. В теории линейных уравнений иногда раздражает элемент угадывания. Решение как бы падает с неба. Возникает вопрос, нельзя ли действовать логичнее, шаг за шагом. Можно, конечно, но проще заглянуть в таблицу производных, где уже есть готовое (3.8). Метод угадывания плох, когда не исключена возможность, что за кадром остается «неугаданное». В данном случае ситуация иная. Теоремы единственности гарантируют, что если уж решение найдено, то других — быть не может.*

<sup>4)</sup> Случай равных корней рассматривается далее.

Чтобы оценить выгоды использования экспоненты  $e^{\lambda t}$ , полезно один раз найти решение «в лоб», например, уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0,$$

в виде  $x(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Тьма громоздких преобразований избавляет от некоторых иллюзий.

### 3.4. Системы уравнений

В ситуации (3.3), т. е.  $\dot{x} = Ax$ , процедура решения выглядит несколько по иному, хотя суть та же. Решение ищется в виде  $e^{\lambda t}v$ , где  $v$  — некоторый вектор, который, как потом выясняется, обязан быть собственным вектором матрицы  $A$ . Подстановка  $e^{\lambda t}v$  в (3.3) приводит к уравнению  $e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av$ , т. е.

$$Av = \lambda v,$$

что для  $v \neq 0$  возможно лишь в случае равенства

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (3.11)$$

которое, как и (3.9), называют *характеристическим уравнением* системы (3.3), а  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  *характеристическим полиномом*. В итоге общее решение (3.3) имеет вид

$$x(t) = c_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n v^n e^{\lambda_n t}, \quad (3.12)$$

где  $\lambda_k$  собственные значения<sup>5)</sup>, а  $v^k$  — собственные векторы матрицы  $A$ .

Понятно, что описанный метод работает, пока корни  $\lambda_k$  различны. При равенстве корней приходится углубляться в дебри линейной алгебры (см. далее). Но есть простой метод решения  $\dot{x} = Ax$ , основанный на использовании матричной экспоненты (раздел 3.7) и работающий всегда (независимо от того, каков спектр матрицы  $A$ , т. е. различны все собственные значения  $\lambda_k$  или нет).

<sup>5)</sup> Т. е. решения уравнения (3.11)

В силу  $(e^{At})' = Ae^{At}$  решением  $\dot{x} = Ax$  является

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

причем  $x(0) = x_0$ . Проще, как говорится, не бывает, но вопрос может упираться в желаемую форму результата. Матричная экспонента универсально определяется рядом

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (3.13)$$

и это вроде бы ничем не хуже задания рядом какого-нибудь синуса или логарифма, причем компьютер легко вычисляет  $e^{At}$  практически с любой точностью и для любых размерностей. Тем не менее решение в виде  $e^{At}x_0$  оставляет некоторые свойства системы завуалированными.

Именно по этой причине в линейной алгебре значительные усилия прилагаются к заданию функций от матриц с помощью конечного числа операций, что обеспечивает бóльшую прозрачность результатов в некоторых секторах. В частности, если все собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $A$  различны, то существует базис, в котором  $A$  имеет диагональный вид,

$$TAT^{-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

и тогда

$$e^{At} = T^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}T, \quad (3.14)$$

что во многом более наглядно (информативно), чем задание  $e^{At}$  с помощью ряда.

Представление (3.14) сохраняет силу в определенных ситуациях и при равных корнях. Для симметричных матриц, например, — что спасает механику от некоторых парадоксов<sup>6)</sup>, — а также для *нормальных матриц*, характеризуемых условием  $AA^* = A^*A$ .

### 3.5. Случай равных корней

Если у (3.9) какие-то корни оказываются равными, то в решении вида (3.7) перестает хватать констант (для разрешимости задачи

<sup>6)</sup> См. следующий раздел.

Коши с произвольными начальными данными). Другими словами, перестает хватать линейно независимых решений вида  $e^{\lambda t}$ . Образовавшуюся брешь заполняют решения  $t^p e^{\lambda t}$ . Точнее говоря, если  $\lambda_1$  является  $k$ -кратным корнем (3.9), то решениями (3.1) будут функции

$$e^{\lambda_1 t}, \quad t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad t^{k-1} e^{\lambda_1 t}, \quad (3.15)$$

чего как раз хватает для образования системы фундаментальных решений.

◀ Доказательство этого факта не так сложно, особенно, если опираться на «стенографические» приемы. Пусть  $P(\lambda)$  обозначает характеристический полином (3.9). Дифференцируя тождество

$$L(e^{\lambda t}) = P(\lambda)e^{\lambda t}$$

$p$  раз по  $\lambda$ , получаем <sup>7)</sup>

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} L(e^{\lambda t}) = L(t^p e^{\lambda t}) = \sum_{l=0}^{l=p} C_p^l P^{(l)}(\lambda) t^{(p-l)} e^{\lambda t},$$

откуда для  $p = 0, 1, \dots, k-1$  следует  $L(t^p e^{\lambda_1 t}) = 0$  тождественно по  $t$  (где  $\lambda_1$  —  $k$ -кратный корень характеристического уравнения), поскольку в этом случае

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0.$$

Это, собственно, и означает, что функции (3.15) являются решениями уравнения (3.1). ▶

### Пример

У характеристического полинома  $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$  уравнения

$$x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0 \quad (3.16)$$

есть два корня  $\lambda_{1,2} = i$  и два корня  $\lambda_{3,4} = -i$ . Поэтому в общее решение,

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t,$$

входят, как говорят, *вековые*, или *секулярные* члены вида  $t^p \sin \omega t$  и  $t^p \cos \omega t$ , представляющие собой колебания с неограниченно растущими амплитудами.

Обратим внимание, что характеристический полином близкого к (3.16) уравнения

$$x^{(4)} + (2 + \varepsilon)\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0 \quad (3.17)$$

<sup>7)</sup> С использованием формулы  $p$ -й производной произведения:

$$(fg)^{(p)} = \sum_{l=0}^{l=p} C_p^l f^{(l)} g^{(p-l)}.$$

при малых  $\varepsilon \neq 0$  имеет четыре различных корня

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{1 + \varepsilon},$$

что в итоге дает только ограниченные решения

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos \sqrt{1 + \varepsilon} t + c_4 \sin \sqrt{1 + \varepsilon} t,$$

периодические по  $t$  или непериодические — в зависимости от того, рационально  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  или нет.

Таким образом, уравнение (3.17), имеющее лишь ограниченные решения, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в уравнение (3.16), имеющее неограниченные решения.

Совершенно *иная ситуация* возникает в связи с системой уравнений (3.3). Часто ссылаются на ее эквивалентность однородному уравнению, но дьявол, как всегда, прячется в деталях. Уравнение (3.1) эквивалентно системе типа (3.3) — однако с матрицей конкретного вида (3.5). В свою очередь, система (3.3) последовательным исключением переменных может быть приведена к уравнению  $n$ -го порядка, но это будет весьма специфическое уравнение. Поэтому утверждения об обязательном появлении вековых членов в решении (3.3) не имеют под собой оснований. Могут появиться, а могут и не появиться.

Общий рецепт решения (3.3) иногда формулируют так. Если  $\lambda_1$  — собственное значение матрицы  $A$  кратности  $k$ , то ему соответствует решение вида

$$P_{k-1}(t)e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} c_{1(k-1)}t^{k-1} + \dots + c_{11}t + c_{10} \\ \vdots \\ c_{n(k-1)}t^{k-1} + \dots + c_{n1}t + c_{n0} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad (3.18)$$

что в результате суммирования по всем собственным значениям дает общее решение.

Понятно, что констант набирается слишком много ( $n^2$  вместо  $n$ ), и в результате решения задачи Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

их значения окажутся взаимозависимыми. Поэтому рецепт включает в себя большой объем черновой работы. Решение вида (3.18) с избыточным количеством неопределенных констант надо под-

ставить в  $\dot{x} = Ax$  — и задача в итоге сведется к решению алгебраической системы линейных уравнений<sup>8)</sup>.

Таким образом, рецепт эффективен, но не вполне удовлетворителен. Это довольно распространенная ситуация. Задача в принципе решается — однако туман не рассеивается. Константы определяются, но причины, по которым какие-то из них, скажем, равны нулю, остаются скрытыми — тогда как именно это во многих случаях представляет главный интерес.

Классический пример дает известная *ошибка в механике Лагранжа*<sup>9)</sup>, который в своей знаменитой книге обмолвился, что в консервативной системе со многими степенями свободы при равных частотах будут возникать секулярные члены — хотя заведомо ясно, что при отсутствии внешнего источника энергии — колебаний с бесконечно возрастающими амплитудами не может быть. Физические соображения здесь никак не противоречат математической стороне дела, поскольку такие системы описываются линейными уравнениями с нормальными матрицами, симметрия коэффициентов которых вытекает из законов механики. У нормальных же  $n \times n$  матриц всегда (независимо от того, есть равные собственные значения или нет) существуют  $n$  линейно независимых собственных векторов — и поэтому секулярные члены появиться не могут, поскольку  $\dot{x} = Ax$  в  $R^n$  не может иметь более  $n$  линейно независимых решений.

Другая ситуация возникает, например, в случае

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, & x_1(0) = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2, & x_2(0) = u_2, \end{cases}$$

где матрица  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$  не имеет двух линейно независимых собственных векторов.

Интегрирование первого уравнения дает  $x_1 = e^{\lambda t} u_1$ , что сводит определение  $x_2$  к интегрированию уравнения

$$\dot{x}_2 = e^{\lambda t} u_1 + \lambda x_2,$$

переходящего после умножения на  $e^{-\lambda t}$  в  $\frac{d}{dt}(x_2 e^{-\lambda t}) = u_1$ . Окончательно,

$$x_2 = u_1 t e^{\lambda t} + u_2 e^{\lambda t},$$

что наглядно демонстрирует механизм появления секулярного члена.

<sup>8)</sup> В которой неизвестных намного больше уравнений.

<sup>9)</sup> Не будь этой ошибки Лагранжа, ее бы, как говорится, надо было выдумать, чтобы привлечь внимание к проблеме.

### 3.6. Неоднородные уравнения

В силу принципа суперпозиции, общим решением неоднородного уравнения является

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + x_0(t),$$

где  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — фундаментальная система решений однородной системы, а  $x_0(t)$  — какое-нибудь, как говорят, *частное решение* уравнения (3.2) либо (3.4) — в зависимости от того, о чем идет речь.

Таким образом, чтобы решить неоднородное уравнение, надо найти хотя бы одно его частное решение и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного решения. Частное решение можно найти регулярным образом, если известна фундаментальная система решений. *В этом смысле решение однородного уравнения исчерпывает задачу.*

Пусть  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений уравнения

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Поиск решения неоднородного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3.19}$$

в виде  $x(t) = X(t)c(t)$  при подстановке  $x = Xc$  в (3.19) дает

$$\dot{X}c + X\dot{c} = AXc + f(t),$$

откуда следует, с учетом  $\dot{X}c = AXc$ ,

$$\dot{c} = X^{-1}f(t),$$

что в результате интегрирования дает

$$c(t) = c(0) + \int_0^t X^{-1}(s)f(s) ds.$$

В итоге

$$x(t) = X(t)c(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s) ds.$$

Выбор  $c(0)$  позволяет удовлетворить начальным условиям. Если  $X(0) = I$  (см. раздел 3.2), то

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s) ds. \quad (3.20)$$

### 3.7. Матричная экспонента

Функция  $e^{At}$  является решением задачи

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = I = \text{diag}\{1, \dots, 1\} \quad (3.21)$$

и может быть определена не как ряд

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots, \quad (3.22)$$

а, наоборот, как решение (3.21). Другое дело, что поиск этого решения в виде ряда

$$X(t) = \sum_0^{\infty} C_k t^k$$

с неопределенными матричными коэффициентами  $C_k$  — после подстановки в (3.21) дает

$$\sum_1^{\infty} k C_k t^{k-1} = \sum_0^{\infty} A C_k t^k.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при равных степенях  $t$ , получаем  $kC_k = AC_{k-1}$ , что в итоге опять приводит к (3.22).

И обратно, почленное дифференцирование ряда (3.22) показывает, что его сумма удовлетворяет уравнению (3.21).

Обсуждение матричной экспоненты традиционно задерживается на следующем факте.

**3.7.1.** Для справедливости  $e^{A+B} = e^A e^B$  необходимо и достаточно, чтобы матрицы  $A$  и  $B$  коммутировали, т. е.  $AB = BA$ .

При перемножении рядов  $e^A$  и  $e^B$  результат становится очевидным. Из позитивных следствий отметим групповое свойство экспоненты

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}.$$

С психологической точки зрения более важна «негативная» часть утверждения 3.7.1, ибо много ошибок совершается в связи с незаконным использованием равенства  $e^{A+B} = e^A e^B$ . В теории возмущений, например, решение  $X(t) = e^{(A+\varepsilon B)t}$  задачи

$$\dot{X} = (A + \varepsilon B)X, \quad X(0) = I$$

иногда разлагают по степеням  $\varepsilon$ , опираясь на  $e^{(A+\varepsilon B)t} = e^{At} e^{\varepsilon Bt}$ , чего нельзя делать в некоммутативном случае. Там приходится группировать по степеням  $\varepsilon$  члены ряда

$$e^{(A+\varepsilon B)t} = I + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} (A + \varepsilon B)^n t^n,$$

что оказывается нелегким и обременительным делом. Поэтому теория возмущений предпочитает окольные пути.

#### Упражнение

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Замена переменных.** На ситуацию

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

полезно посмотреть с другой точки зрения. Осуществим замену переменных  $x = Ty$  с помощью некоторой невырожденной матрицы  $T$ . Исходная задача перейдет в

$$\dot{y} = T^{-1}ATy, \quad y(0) = T^{-1}x_0.$$

Если  $T$  приводит  $A$  к диагональному виду<sup>10)</sup>

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

то система  $\dot{y} = T^{-1}ATy$  представляет собой совокупность независимых друг от друга скалярных уравнений  $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$ , интегрирование которых по отдельности дает

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} y_k(0).$$

**В** векторном виде это можно записать как

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} y(0).$$

**Возврат** в исходное пространство с помощью обратного преобразования  $y = T^{-1}x$  приводит к

$$x(t) = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}x(0),$$

**Что** и определяет матричную экспоненту, если по определению считать  $x(t) = e^{At}x(0)$ .

В данном контексте полезно обратить внимание на следующее. В пространстве переменных  $y$  матрица  $T^{-1}AT$  имеет полный набор собственных векторов

$$\{1, 0, \dots\}', \quad \{0, 1, 0, \dots\}', \quad \dots, \quad \{0, \dots, 0, 1\}',$$

<sup>10)</sup> Напомним, что это возможно, когда все  $\lambda_k$  различны, либо матрица  $A$  нормальна ( $A^*A = AA^*$ ). При этом столбцы матрицы  $T$  должны быть собственными векторами матрицы  $A$ . Элементы  $T$ , разумеется, могут быть комплексными.

переходящих в собственные вектора матрицы  $A$  при переходе к переменным  $x$  с помощью  $x = Ty$ . Поэтому можно сказать так: если у  $A$  есть  $n$  линейно независимых собственных векторов, то их надо принять за единичные орты новой системы координат, и тогда в новой системе  $A$  приобретет диагональную форму.

**Идея предельного перехода.** Простую и ясную картину нарушает «случай равных корней». Естественно, возникает желание рассмотреть его как предельный случай разных корней, поскольку равные корни всегда можно разнести, «слегка пошевелив» матрицу. Тогда можно отталкиваться от ситуации, когда  $A(\varepsilon)$  имеет различные собственные значения при любом  $\varepsilon > 0$ , и  $A(\varepsilon) \rightarrow A$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако надежда перенести выводы относительно  $A(\varepsilon)$  на  $A$  не всегда оправдывается. Беда заключается в том, что линейно независимые собственные векторы матрицы  $A(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  могут переходить — и в подавляющем числе случаев переходят — в линейно зависимые. Пар уходит в гудок — результат не достигается.

На волне отрицательных эмоций идея меркнет. Тем не менее она плодотворна в ситуациях, где наличие полного набора собственных векторов не обязательно. Например, формула

$$\boxed{\det e^A = e^{\operatorname{tr} A},} \quad (3.23)$$

больше известная своей красотой, нежели прикладной значимостью<sup>11)</sup>, — в случае диагонально представимой матрицы  $A$  очевидна, поскольку при линейном преобразовании  $T^{-1}AT$  ни детерминант, ни след

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

не меняются<sup>12)</sup>, а в диагональном случае (3.23) означает не более чем

$$e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

В то же время, если матрица  $A(\varepsilon)$  диагонально представима при любом  $\varepsilon$  и  $A(\varepsilon) \rightarrow A$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то соотношение вида (3.23) для  $A(\varepsilon)$  в результате предельного перехода переходит непосредственно в (3.23). Дополнительные предположения здесь не требуются.

<sup>11)</sup> Равенство инертной и гравитационной массы «до Эйнштейна» было просто красивым фактом.

<sup>12)</sup> Поскольку детерминант равен произведению, а след — сумме собственных значений матрицы.

### 3.8. Теорема Лиувилля

**Определитель Вронского.** Детерминант матрицы фундаментальных решений,  $W(t) = \det X(t)$ , называют *вронскианом*. В случае  $X(t) = e^{At}$ , в силу (3.23), имеем  $\dot{W} = \text{tr } A \cdot W$ , откуда

$$W(t) = e^{\text{tr } At} W(0). \quad (3.24)$$

◀ В неавтономном случае  $\dot{X} = A(t)X$  отрезок  $[0, t]$  можно разбить точками  $t_1, t_2, \dots$  на промежутки малой длины  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$  и считать матрицу  $A(t)$  на каждом  $\Delta t_i$  — приблизительно постоянной (с точностью до  $o(\Delta t_i)$ ). Тогда <sup>13)</sup> приближенно

$$W(t_1) = e^{\text{tr } A(t_1)\Delta t_1} W(0), \quad W(t_2) = e^{\text{tr } A(t_2)\Delta t_2} W(t_1), \quad \dots$$

Окончательно  $W(t) = e^{\sum \text{tr } A(t_i)\Delta t_i} W(0)$ , а после перехода к пределу при  $\Delta t_i \rightarrow 0$

$$W(t) = e^{\int_0^t \text{tr } A(s) ds} W(0). \quad \blacktriangleright \quad (3.25)$$

Когда источником служит дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка (3.1), то после перехода к эквивалентной линейной системе  $\dot{x} = A(t)x$  на диагональ матрицы (3.5) попадает лишь один элемент  $a_1(t)$ . По этой причине поведение вронскиана уравнения  $n$ -го порядка определяется одним коэффициентом уравнения, поскольку оказывается  $\text{tr } A(t) = a_1(t)$ .

**Изменение фазового объема.** Вектор-столбцы фундаментальной матрицы автономной системы  $\dot{x} = Ax$  образуют параллелепипед, объем которого (детерминант) меняется с течением времени по установленному выше закону  $\dot{W} = \text{tr } A \cdot W$ . Такова же динамика объема любого другого параллелепипеда, неважно большого или маленького, имеющего вершину в начале координат или не имеющего <sup>14)</sup>. Но тогда очевидно, что и объем  $V(t)$  любой области  $\Omega(t)$  фазового пространства меняется по тому же закону  $\dot{V} = \text{tr } A \cdot V$ ,

<sup>13)</sup> Наряду с (3.24), очевидно,  $W(t) = e^{\text{tr } A(t-s)} W(s)$ .

<sup>14)</sup> Одну вершину всегда можно поместить в нуль заменой системы координат. Ребра  $x(t)$  будут образовывать фундаментальную матрицу.

поскольку  $\Omega(t)$  можно представить сколь угодно точно в виде объединения маленьких параллелепипедов.

Пусть теперь речь идет об автономной нелинейной системе  $\dot{x} = f(x)$ . О движении в малой окрестности любой точки  $x_0$  можно судить по линейному приближению  $f(x)$ . Имеется в виду следующее. Если  $x(t)$  — решение  $\dot{x} = f(x)$ , а  $x(t) + \eta(t)$  — решение того же дифура, выходящее из точки  $x(0) + \eta(0)$ , то малые  $\eta(t)$  удовлетворяют уравнению (см. раздел 4.4)

$$\dot{\eta} = f'(x)\eta + o(\|\eta\|),$$

где  $f'(x) = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]$  — матрица Якоби. Таким образом локально движение определяется линейным уравнением<sup>15)</sup>  $\dot{\eta} = f'(x)\eta$ .

Поэтому, как и в чисто линейном случае, область  $\Omega(t)$  можно представить в виде объединения маленьких параллелепипедов  $V_i$ , объем каждого из которых меняется в соответствии с  $\dot{V}_i = \text{tr } f'(x) \cdot V_i$ . Разница с линейным случаем лишь в том, что для каждого  $V_i$  раньше матрица была одна и та же, теперь для каждого своя —  $f'(x)$ . Суммирование по всем  $V_i$  дает

$$\dot{V} = \int_{\Omega} \text{tr } f'(x) dV.$$

Теперь можно учесть, что  $\text{tr } f'(x)$  — это дивергенция  $f(x)$  [7]. Окончательный результат, таким образом, имеет форму

$$\dot{V} = \int_{\Omega} \text{div } f(x) dV,$$

что называют *теоремой Лиувилля*.

### 3.9. Неавтономные системы

По поводу уравнений  $\dot{x} = A(t)x$  остается заметить, что к уже сказанному принципиально добавить нечего. Существование матрицы

<sup>15)</sup> Уравнением в вариациях, см. раздел 4.4.

фундаментальных решений, формула (3.20) решения неоднородного уравнения, принципы суперпозиции — вот, собственно, все, что имеется в сухом осадке. В отличие от стационарной ситуации,  $A(t) \equiv A$ , неавтономное уравнение  $\dot{x} = A(t)x$  интегрируется в исключительных случаях.

Кстати, для интегрируемости  $\dot{x} = A(t)x$  достаточна «всего лишь» перестановочность  $A(t)$  со своим интегралом. Тогда

$$X(t) = e^{\int_0^t A(s) ds}$$

фундаментальная матрица решений. Действительно,

$$\dot{X}(t) = e^{\int_0^t A(s) ds} A(t) = A(t) e^{\int_0^t A(s) ds} = A(t)X.$$

С подходящими примерами, конечно, негусто. Один из немногих принадлежит Н. П. Еругину:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix}.$$

Отдельного упоминания заслуживает понятие *сопряженной системы*, каковой, по отношению к  $\dot{x} = A(t)x$ , служит

$$\dot{y} = -A^T(t)y. \quad (3.26)$$

Понятно, что  $\dot{x} = A(t)x$  и (3.26) взаимно сопряжены друг другу. Скалярное произведение любых двух решений  $x(t), y(t)$  взаимно сопряженных систем — постоянно,

$$x(t) \cdot y(t) \equiv \text{const},$$

что вытекает из

$$\frac{d}{dt}(x, y) = (\dot{x}, y) + (x, \dot{y}) = (Ax, y) - (x, A^T y) \equiv 0.$$

Поэтому общее решение любой из двух взаимно сопряженных систем определяет  $n$  первых интегралов другой.

#### Упражнения

- Если система  $\dot{x} = A(t)x$  самосопряжена,  $A^T = -A$ , то матрица Коши  $X(t)X^{-1}(s)$  ортогональна.

- Если  $K(t, s) = X(t)X^{-1}(s)$  — матрица Коши системы  $\dot{x} = A(t)x$ , то решением задачи Коши матричного уравнения

$$V = A(t)V(t) + V(t)A^T(t), \quad V(s) = W$$

является  $V(t) = K(t, s)WK^T(t, s)$ .

В прикладных задачах более естественно полагаться на численные методы интегрирования. Но это касается задач, где нужны сами решения, что случается довольно редко. Большей частью требуется выявление качественных свойств системы: наличие равновесия или периодического режима, их устойчивость и т. п. В такого рода вопросах «аналитическое манипулирование» играет существенно большую роль. И по этой причине различные слабо мотивированные на первый взгляд исследования представляют определенную ценность как основа общих представлений и потенциальный инструмент анализа других задач. Даже если они касаются очень узких секторов неавтономных систем и опираются на малореалистичные предположения. Изыскания, не имеющие ощутимого утилитарного значения, могут быть интересны с математической точки зрения — и это им дает не менее весомое право на существование.

*Дело в том, что математика — самоценная вещь. Ингредиент глубинного развития человека. Это очень важный аспект. Угол зрения типа «а какой толк от математики?» аналогичен взгляду на музыку как на средство повышения удоев молока, — что имеет основания, но не улавливает суть. Чисто прагматичный взгляд губит все, что попадает в фокус. Разумеется, конкретная польза от математики есть, но она — не столько в бухгалтерии и космических полетах, сколько — в психологии, что ли. Знание математики влияет на стиль жизни, мышления, решения бытовых и гуманитарных проблем. Незаметно, исподволь — но кардинальным образом. Знание математики — это другой фундамент для психологической надстройки. Амулет баланса и магнит стремления к абсолюту.*

### 3.10. Фрагмент из обобщенных функций

Обычное понятие функции  $y = f(x)$ , как все придуманное, в известной степени схоластично. Температура в точке не имеет смысла, — но это не такая уж беда. Хуже другое. Универсальная с виду идеология функциональных зависимостей иногда совсем не работает. Как математически выразить, например, плотность

точечного заряда? Знаменитая *дельта-функция* Дирака в свое время отчасти спасла положение, но — по большому счету — еще сильнее обострила проблему. Фундаментальный прорыв в понимании существа дела обеспечили С. Л. Соболев и Л. Шварц, построившие теорию обобщенных функций [9] и сыгравшие в какой-то мере роль Дедекинда на вещественной прямой.

Действительные числа существовали, конечно, и до Дедекинда, — если можно говорить о существовании чего-то, не имеющего ясного определения. Дедекинд внес понимание и логику в манипулирование числами [7]. То же самое сделали Соболев и Шварц с «противоестественными» объектами типа дельта-функции — на фоне предварительных успехов физиков, которые хороши там, где требуется нарушение правил. У них (физиков) нет комплексов, и они спокойно делят на нуль, если обстановка вынуждает. Черед математиков-законодателей наступает, когда из-за «лихих методов» правда начинает мешаться с ложью, ибо интуиция перестает работать, а законные и незаконные манипуляции выглядят одинаково, как оголенные провода — в том и другом случае.

Итоговое определение обобщенных функций опирается на понятие пространства  $\mathcal{D}$  *основных функций* — бесконечно дифференцируемых *финитных функций* — финитных в том смысле, что  $\varphi(x) \equiv 0$  вне ограниченной области (не общей для всех, а своей для каждой  $\varphi \in \mathcal{D}$ ).

*Обобщенные функции* далее определяются как *линейные функционалы*<sup>16)</sup>  $f$  над  $\mathcal{D}$ , ставящие любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  в соответствие число  $(f, \varphi)$ .

Простейший пример линейного функционала дает интегральное представление

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx, \quad (3.27)$$

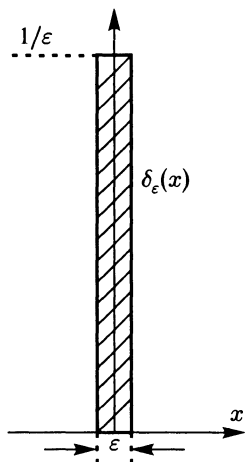
не исчерпывающее, однако, всех возможностей, а уточнения типа того, что пространство обобщенных функций — это пространство  $\mathcal{D}'$ , сопряженное к  $\mathcal{D}$ , в котором сходимость определяется слабой топологией, порождаемой скалярным произведением, — не годятся для первого знакомства.

Если уж цивилизация как единый биологический организм была вынуждена постигать обобщенные функции кустарными методами, то это тем более показано для индивидуального пути.

**Дельта-функция**  $\delta(x)$  служит тем эталоном, на котором становится ясной суть проблемы. Изначально  $\delta(x)$  определялась

<sup>16)</sup> Линейность  $f$  означает  $(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2)$  для любых действительных  $a_1$  и  $a_2$ .

как предел единичных импульсов<sup>17)</sup>  $\delta_\varepsilon(x)$ , прямоугольной формы (рис. 3.1) либо сглаженной (колоколообразной), — при стремлении к нулю ширины импульса,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



**Рис. 3.1.**  
Прямоугольный  
импульс  $\delta_\varepsilon(x)$

Трудность заключалась в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  никакого разумного предела вроде бы нет. Получается функция  $\delta(x)$ , равная бесконечности в нуле и нулю — в остальных точках.

Однако ситуации, в которых возникала потребность в чем-то подобном, всегда сводились к вариантам, когда  $\delta(x)$  стояла под интегралом. То есть  $\delta(x)$  нужна была не как функция, а как нечто, обеспечивающее при интегрировании определенный эффект. Но тогда и обыкновенный предел не нужен был. Достаточно было сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что позволяло определить дельта-функцию как предел  $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx. \quad (3.28)$$

Итак, обобщенная функция  $\delta(x)$  — это «нечто», действующее на функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  по правилу

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

<sup>17)</sup> Характеризуемых условием  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$ .

Что касается обычных функций  $f(x)$ , то они одновременно — и обобщенные, действующие на  $\varphi \in \mathcal{D}$  в рамках определения скалярного произведения  $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$ . Все множество обобщенных функций получается в результате пополнения множества обычных функций пределами  $f_\varepsilon \rightarrow f$  по типу (3.28). За уточнениями можно обратиться<sup>18)</sup> к [9].

Производные обобщенных функций определяются равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx, \quad (3.29)$$

что можно воспринимать как результат интегрирования по частям левого интеграла. Обращение в нуль слагаемого<sup>19)</sup>  $f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty}$  происходит из-за финитности  $\varphi(x)$ .

Для производной  $\delta'(x)$  равенство (3.29) приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\varphi(x) dx = \varphi'(0).$$

Следствием (3.29) является также важное соотношение

$$\theta'(x) = \delta(x),$$

где  $\theta(x)$  — функция Хэвисайда, единичная ступенька:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

<sup>18)</sup> Можно не обращаться, чтобы не терять темпа. Как бы крамольно это ни звучало — поход к врачам чреват болезнями. Трясина мелочей затягивает, — и вернуться к главному не всегда удастся.

<sup>19)</sup> Возникающего при взятии интеграла по частям.

◀ Действительно, для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0),$$

т. е. производная  $\theta'(x)$  действует на  $\varphi$  так же, как  $\delta(x)$ . ▶

Отметим в заключение формулы, получающиеся простой заменой переменной при интегрировании

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x) dx = \varphi(a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\varphi(x) dx = \frac{1}{a}\varphi(0).$$

### 3.11. Функция Грина и краевые задачи

Идея обращения дифференциального оператора с определенной точки зрения была посвящена вся глава. Например, формулу (3.20) можно рассматривать как обращение дифференциального оператора  $Lx = \dot{x} - A(t)x$  в задаче  $Lx = f(t)$ ,  $x(0) = x_0$ . Понятно, что говорить о чистом обращении  $L^{-1}$  не совсем корректно, поскольку дифференцирование не взаимно однозначно. Поэтому в множестве допустимых решений должен быть организован отсев. Задача Коши обеспечивает необходимый отсев фиксацией начальных данных.

Возможна и другая постановка. В некоторые моменты времени задаются значения части переменных. Такого сорта задачи называют *краевыми*, в частности *двухточечными*, когда для фиксации переменных используются два момента, например,  $t = 0$  и  $t = 1$ .

Обращение  $L$  в задаче  $Lx = f(t)$  обычно имеет вид (при определенных начальных или краевых условиях)

$$x(t) = L^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s) ds. \quad (3.30)$$

Функцию  $G(t, s)$  в (3.30) называют *функцией Грина*<sup>20)</sup>.

◀ Происхождение формулы (3.30) довольно прозрачно. Пусть  $x_s(t)$  обозначает решение уравнения  $Lx_s(t) = \delta(t-s)$ , где

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x$$

— некоторый дифференциальный оператор, а  $\delta(t-s)$  — единичный импульс.

<sup>20)</sup> О  $G(t, s)$  еще говорят как о *ядре интегрального оператора*.

Поскольку

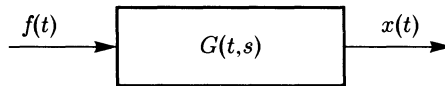
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s) ds, \quad Lf(s)x_s(t) = f(s)\delta(t-s)$$

и система удовлетворяет принципу суперпозиции, то решением уравнения  $Lx = f(t)$  будет<sup>21)</sup>

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)f(s) ds,$$

что и представляет собой (3.30), если положить  $x_s(t) = G(t, s)$ . ►

В теории автоматического регулирования  $G(t, s)$  называют *импульсной переходной функцией*, и на систему  $Lx = f(t)$  смотрят как на преобразование *входа*  $f(t)$  в *выходной сигнал*  $x(t)$  (рис. 3.2).



**Рис. 3.2.** Преобразование «вход-выход»

*Что в  $Lx = f(t)$  вход, что выход, — вроде бы дело вкуса. И математически так оно и есть. Но мало кто согласится, что в  $m\ddot{x} = F(t)$  ускорение  $\ddot{x}$  — вход, а сила  $F(t)$  — выход, — потому что сила причина движения, но не наоборот. В определенных обстоятельствах это дает о себе знать.*

Интересно, что в стационарном случае  $G(t, s)$  является функцией лишь одного параметра  $\tau = t - s$  (►). Это приводит к зависимости

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t-\tau) ds, \quad (3.31)$$

удивительной в следующем отношении. Уравнение

$$L_t G(t-s) = \delta(t-s),$$

<sup>21)</sup> Опора на принцип суперпозиции учитывает, что интегрирование представляет собой предельный вариант суммирования.

определяющее функцию  $G$ , после замены  $\tau = t - s$  переходит в<sup>22)</sup>  $L_\tau G(\tau) = \delta(\tau)$ , что определяет  $G(\tau)$  как реакцию системы на единственное импульсное воздействие  $\delta(\tau)$ , — которую достаточно зафиксировать один раз — и этого достаточно, чтобы вычислять впоследствии реакцию системы на любое внешнее (входное) воздействие  $f(t)$  по формуле (3.31).

Другими словами, чтобы идентифицировать систему — «вскрыть» черный ящик — достаточно одной дельта-функции. Надо лишь знать, что система линейна и стационарна. Тогда на вход подается один импульс — и объект «расшифрован».

В данной теме важны определенные уточнения, которые часто ускользают незамеченными. Для обострения вопроса рассмотрим простейшую *двухточечную задачу*

$$\ddot{x} = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (3.32)$$

◀ Решением (3.32) служит

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds,$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s \leq 1; \\ s(t-1), & 0 \leq s \leq t. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

*На фоне сказанного прежде — возникает (вроде бы) парадокс. Система  $Lx = \ddot{x}$  явно стационарна, но  $G(t, s)$  определяется отнюдь не разностью аргументов, как утверждалось выше.*

*Причина заключается в том, что понятие стационарности относится не к дифференциальному оператору, а к задаче целиком. Поэтому ситуация (3.32) не стационарна, ибо краевые условия записаны в «абсолютной» шкале времени, и при переходе от  $t$  к  $\tau = t - s$  трансформируются в  $x(-s) = x(1 - s) = 0$ .*

Такая же проблема возникает в задаче  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x|_{t=0} = x_0$ , которую обычно считают стационарной, но это не совсем так, дипломатично говоря. Задача переходит в разряд стационарных, если договориться, что при сдвиге

<sup>22)</sup>  $L_\tau = L_t$ .

шкалы времени  $\tau = t - s$  начальное условие заменяется другим,  $x|_{\tau=0} = x_0$ . Такая условность в автономном случае для задачи Коши естественна, и она всегда подразумевается. В двухточечной задаче ситуация иная.

*В задачах автоматического регулирования (глава 8) считается, что система (рис. 3.2) реагирует на импульс  $\delta(t - s)$  только с момента  $t = s$  прихода импульса — до этого «спит», т. е. выходной сигнал  $x(t)$  вместе со всеми производными равен нулю для  $t < s$ . Иными словами,  $G(t, s)$  является решением уравнения  $L_1 G(t, s) = 0$  со скользящими начальными условиями. И тогда, кстати,  $G(t, s) = 0$  для  $t < s$ , что называют условием физической реализуемости — система не может реагировать на будущие сигналы.*

Широкую популярность в свое время приобрела задача Штурма—Лиувилля:

$$\ddot{x} + \lambda q(t)x = 0, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (3.33)$$

возникающая в результате применения метода неопределенных множителей Лагранжа к минимизации функционала

$$\int_0^1 \dot{x}^2(t) dt$$

при ограничении

$$\int_0^1 q(t)\dot{x}^2(t) dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

В (3.33) требуется найти ненулевые решения  $x(t)$  и значения  $\lambda$ , при которых такие решения существуют.

Уравнение (3.33) долгое время служило простым и удобным эталоном, на котором отрабатывались методы изучения вариационных задач.

Другой источник задачи Штурма—Лиувилля — колебания распределенных систем. Например,

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0 \quad (3.34)$$

описывает колебание струны<sup>23)</sup>, закрепленной в точках  $x = a$  и  $x = b$ . Решением задачи являются собственные функции и собственные значения

$$u_k(x) = \sin \frac{k\pi}{b-a}x, \quad \lambda_k = \left( \frac{k\pi}{b-a} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

В квантовой механике (3.34) называется *уравнением Шрёдингера*.

Собственные значения связаны с возможными частотами  $\omega_k$  колебаний системы<sup>24)</sup>,  $\lambda_k = \omega_k^2$ . Совокупность  $\lambda_k$  обычно называют *спектром собственных значений*. С ростом  $b - a$  спектр становится все плотнее и в пределе, при  $b - a \rightarrow \infty$ , заполняет всю область  $(0, \infty)$ .

### 3.12. Операционное исчисление

Решение задач, в основе которых лежит дифференциальное уравнение  $Lx = f(t)$ , в разных вариантах опирается на идею представления  $f(t)$  в виде взвешенной суммы (интеграла) неких стандартных функций (сигналов) — с последующим использованием принципа суперпозиции. В предыдущем разделе это была сумма

взвешенных импульсов,  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s) ds$ . Преобразование Фурье,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

основывается на разложении  $f(t)$  в сумму гармонических сигналов.

#### Преобразование Лапласа

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (3.35)$$

<sup>23)</sup> Уравнение (3.34) получается из уравнения распространения волн в частных производных при поиске стационарных решений  $u(x, t) \equiv u(x)$ .

<sup>24)</sup> Идет ли речь о струне гитары или о возможных значениях энергии электрона в потенциальной яме.

где  $p = \sigma + i\omega$ , — усовершенствует этот метод. Функцию  $f(t)$  при этом называют *оригиналом*, а  $\widehat{f}(p)$  — *изображением*, что записывают обычно так  $f(t) \doteq \widehat{f}(p)$ .

Выгоды преобразования Лапласа по сравнению со стандартным *преобразованием Фурье* заключаются в том, что при больших  $\text{Re } p = \sigma$  метод (3.35) справляется с быстрорастущими функциями, тогда как преобразование Фурье упирается в расходящиеся интегралы<sup>25)</sup>.

Успех преобразования Лапласа при изучении линейных систем определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, линейностью:

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \doteq \lambda \widehat{f}(p) + \mu \widehat{g}(p).$$

Во-вторых, заменой дифференцирования умножением. Точнее говоря,

$$\dot{f}(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \dot{f}(t) dt = p\widehat{f}(p) - f(0),$$

где при взятии интеграла по частям действительная часть  $p$  выбирается настолько большой, чтобы  $e^{-pt} f(t)|_{t=\infty} = 0$ .

Естественно, что предпочтение отдается задачам, в которых  $f(0) = 0$ , и тогда  $\dot{f}(t) \doteq p\widehat{f}(p)$ .

Есть и другие удобные свойства, но они вторичны. Например, простое описание запаздывания

$$f(t - a) \doteq e^{-pa} \widehat{f}(p) \quad (a > 0).$$

К первичным свойствам относится, конечно, формула обращения<sup>26)</sup>

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp,$$

<sup>25)</sup> В этом, собственно, и заключается роль действительной части  $\sigma$ , которую можно выбирать и фиксировать по своему усмотрению, исходя из потребностей задачи. В частности, при  $\sigma = 0$  получается преобразование Фурье функции  $f(t)$ , если  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

<sup>26)</sup> И сам факт взаимной однозначности преобразования Лапласа.

где интегрирование идет вдоль вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ . Но этой формулой на практике уже никто не пользуется — имеются подробные таблицы изображений и оригиналов, введенные, к тому же, во многие компьютерные программы математического толка.

Преобразование Лапласа хорошо работает и в применении к многомерным системам. Например, преобразуя матричное уравнение  $\dot{x} = Ax$  в соответствии с (3.35), получаем

$$p\widehat{x}(p) - x(0) = A\widehat{x}(p),$$

откуда  $\widehat{x}(p) = (Ip - A)^{-1}x(0)$ , т. е.  $x(t) \doteq (Ip - A)^{-1}x(0)$ . Теперь сравнение с известным фактом  $x(t) = e^{At}x(0)$  дает

$$e^{At} \doteq (Ip - A)^{-1}.$$

В скалярном случае, когда  $A$  сводится к скалярной величине  $\lambda$ , последняя формула переходит в  $e^{\lambda t} \doteq 1/(p - \lambda)$ .

#### Упражнение <sup>27)</sup>

Пусть  $(Ip - A)^{-1} = \frac{N(p)}{\Lambda(p)}$ , где  $\Lambda(p) = \det(Ip - A)$ . Тогда

$$\operatorname{tr} e^{At} = \frac{\Lambda'(p)}{\Lambda(p)}.$$

<sup>27)</sup> См. Shui-Hung You // SIAM Rev. V. 40, № 3. P. 706–709.

## Глава 4

### **Устойчивость**

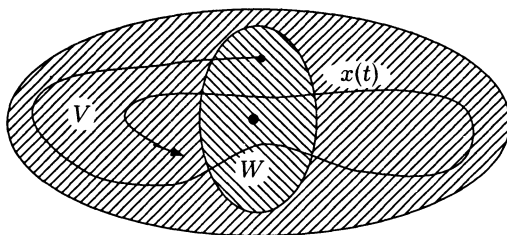
#### **4.1. Основные понятия**

Точки  $x^*$ , в которых система  $\dot{x} = f(x, t)$  перестает двигаться,  $f(x^*, t) \equiv 0$ , называются *равновесными*. Нижнее и верхнее положение равновесия маятника, например. Первое от второго, очевидно, сильно отличается. Нижнее — устойчиво, верхнее — неустойчиво. Для бытового понятия устойчивости существует строгий математический аналог.

##### **4.1.1. Определение.** *Положение равновесия системы*

$$\dot{x} = f(x, t)$$

*называется устойчивым по Ляпунову, если по любой его окрестности  $V$  можно указать такую его окрестность  $W$ , что любое движение, начинающееся в  $W$  не выходит за пределы  $V$  (рис. 4.1).*



**Рис. 4.1**

На рис. 4.2 изображены два фазовых портрета. Очевидно, равновесие слева неустойчиво (*седло*), справа — устойчиво (*устойчивый фокус*, переходящий — при замене направления движения на обратное — в неустойчивый).

На рис. 4.3 изображены *устойчивые узлы*, которые становятся неустойчивыми при обращении времени,  $t \rightarrow -\infty$ .

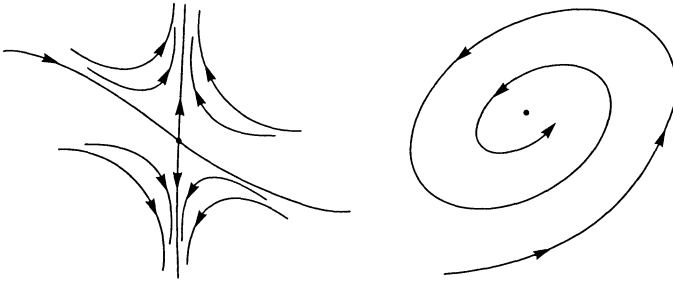


Рис. 4.2

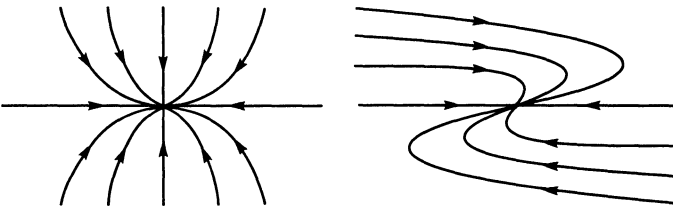


Рис. 4.3. Устойчивые узлы

Еще одна стандартная категория классификации точек равновесия — *центр*, имеющий замкнутые траектории в окрестности равновесия. Понятно, что ситуация «скользящая» — малейшее изменение правой части  $\dot{x} = f(x)$  может превратить замкнутые траектории в раскручивающиеся или скручивающиеся спирали.

В этой связке часто фигурирует понятие *сепаратрисы*. В варианте седла так называют решения, проходящие через равновесие. Вообще, термин «сепаратриса» несколько размыт. Первоначально имелись в виду траектории, входящие или выходящие из равновесия, когда близлежащие решения в равновесие не входят и не выходят. Потом это стали понимать шире, как решения в некотором смысле разделяющие траектории с разным поведением. Потом еще шире (при  $n > 2$ ) — как «разделяющие многообразия».

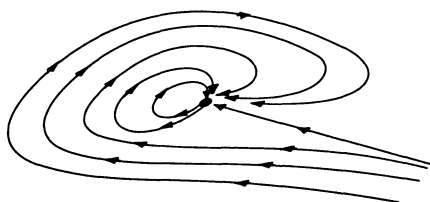
**4.1.2. Определение.** *Положение равновесия  $x^*$  системы*

$$\dot{x} = f(x, t)$$

называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение  $x(t)$ , начинающееся в достаточно малой окрестности  $x^*$ , стремится к  $x^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Иногда асимптотическую устойчивость называют *локальной*, а в том случае, когда  $x(t) \rightarrow x^*$  из любого начального положения, — говорят о *глобальной асимптотической устойчивости*, или *асимптотической устойчивости в целом*.

Равновесие считают **вполне неустойчивым** (полностью неустойчивым), если при обращении времени (направления движения) оно превращается в асимптотически устойчивое.



**Рис. 4.4.** Неустойчивое равновесие, хотя все  $x(t) \rightarrow x^*$

Может показаться, что в определении 4.1.2 требование устойчивости равновесия по Ляпунову излишне, ибо оно, мол, автоматически вытекает из условия  $x(t) \rightarrow x^*$ . Не вытекает. Все траектории могут сходиться к равновесию, но устойчивости не будет — на рис. 4.4 изображен пример.

В автономном случае,  $\dot{x} = f(x)$ , множество точек  $x(0)$ , из которых траектории  $x(t)$  сходятся к равновесию  $x^*$ , называется *областью притяжения*  $x^*$ . Область притяжения действительно является областью, в том смысле, что вместе с каждой точкой содержит некоторую ее окрестность. Это вытекает из непрерывной зависимости решений от начальных данных.

#### 4.1.3. В случае

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} < 0 \quad (4.1)$$

равновесие  $x^*$  системы  $\dot{x} = f(x)$  не может иметь ограниченную область притяжения.

◀ На границе  $\delta\Omega$  области притяжения  $\Omega$  поле  $f(x)$  направлено по касательной к поверхности  $\delta\Omega$ , иначе траектория либо попадет в  $\Omega$ , либо разойдется с близкими траекториями, начинающимися в  $\Omega$ , что вступит в противоречие с непрерывной зависимостью решений от начальных данных.

Поэтому скалярное произведение  $f(x)$  на элемент поверхности  $d\sigma$ , направленный по нормали к  $\delta\Omega$ , тождественно равен нулю на  $\delta\Omega$ . Но тогда

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x) dx = \oint_{\delta\Omega} f(x) d\sigma = 0,$$

что вступает в противоречие с (4.1). ▶

### Упражнение

Утверждение 4.1.3 сохраняет силу при замене строгого неравенства (4.1) нестрогим.

## 4.2. Второй метод Ляпунова

**Устойчивость равновесия.** Начнем с ситуации нулевого положения равновесия автономной системы<sup>1)</sup>

$$\dot{x} = f(x),$$

например,

$$\dot{x}_1 = -\sin x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2.$$

Предположим, в окрестности  $x^* = 0$  существует такая скалярная функция  $V(x)$ , что

$$V(0) = 0 \quad \text{и} \quad V(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

В этом случае говорят, что  $V(x)$  *положительно определена*.

Допустим, что  $V(x)$  непрерывно дифференцируема и

$$f(x) \cdot \operatorname{grad} V(x) < 0 \tag{4.2}$$

<sup>1)</sup> Предполагая выполненными условия единственной разрешимости задачи Коши при любом начальном положении.

при любом  $x \neq 0$ . Это означает, что функция  $V$  на траекториях  $\dot{x} = f(x)$  строго убывает<sup>2)</sup>, поскольку (4.2) — не что иное, как отрицательность производной функции  $V(t) = V[x(t)]$  по времени,

$$\dot{V} = \text{grad } V(x) \cdot \dot{x} < 0.$$

Поэтому любое движение  $\dot{x} = f(x)$ , начавшись в окрестности  $V(x) < \varepsilon$ , — в этой окрестности и остается, что обеспечивает устойчивость равновесия  $x^* = 0$ . Более того, имеет место также асимптотическая устойчивость равновесия, поскольку  $V(t)$  строго убывает, что приводит к  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если вместо (4.2) выполняется нестрогое неравенство, то асимптотической устойчивости может не быть, но устойчивость — сохраняется.

В этом месте имеет смысл остановиться и представить ситуацию визуально. Функция быстрее всего убывает — в направлении минус градиента. Движение под острым углом к минус градиенту<sup>3)</sup>, т. е.  $\nabla V(x) \cdot \dot{x} < 0$  — будет приводить к убыванию  $V$ . На рис. 4.5 пунктиром изображена касательная к поверхности  $V(x) = \varepsilon$ , ограничивающей область  $V(x) < \varepsilon$ . Движение  $\dot{x} = f(x)$  в силу (4.2) направлено внутрь заштрихованной области, из которой не может выйти в дальнейшем — иначе в точке выхода пришлось бы двигаться под тупым углом к  $-\text{grad } V(x)$ .

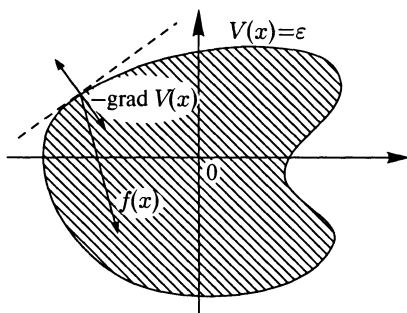


Рис. 4.5

Если особо не вникать, то все выглядит достаточно убедительно. Но «присматриваясь», легко обнаружить вопросы, требующие ответа. Почему, например, не может случиться так, что  $V(t)$ , строго убывая, не будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ? В принципе, это возможно, но не в данном случае.

<sup>2)</sup> Положительно определенные функции, убывающие на траекториях рассматриваемых уравнений, называются функциями Ляпунова.

<sup>3)</sup> Далее  $\nabla V(x) = \text{grad } V(x)$ .

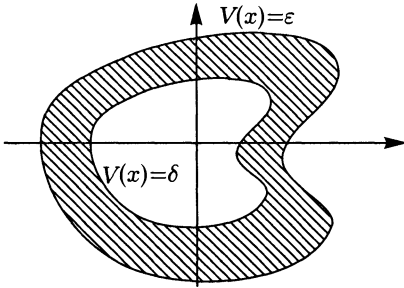


Рис. 4.6

не просто меньше нуля, а меньше некоторого отрицательного  $\gamma < 0$ , в силу непрерывности. Но при  $\dot{V} < \gamma < 0$  функция  $V(t)$  не может оставаться ограниченной снизу. ►

В случае неавтономной системы  $\dot{x} = f(x, t)$  и функции Ляпунова  $V(x)$ , не зависящей явно от  $t$ , — все остается почти без изменений. В отношении устойчивости ничего не меняется. Что касается асимптотической устойчивости, — необходимо уточнение. Теперь функция  $V$ , несмотря на  $\dot{V} < 0$ , может не добраться до нуля. Например, в скалярном случае

$$\dot{x} = -xe^{-t}$$

функция Ляпунова  $V(x) = x^2$  строго убывает,

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2x^2e^{-t} < 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

но система «быстро устает» (БУ-система), и решения

$$x(t) = ce^{e^{-t}}$$

останавливаются по дороге к равновесию, не достигая в пределе  $x^* = 0$ .

Таких ситуаций в скалярном случае ( $x$  — скаляр) можно избежать, запретив возможность

$$f(x, t) \rightarrow 0, \quad x \neq 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

но рецепт перестает работать уже на плоскости. Например, система (в полярных координатах)

$$\dot{r} = -re^{-t}, \quad \dot{\varphi} = 1$$

◀ Предположим противное,

$$V(t) \rightarrow \delta > 0.$$

Тогда в заштрихованном на рис. 4.6 кольце,

$$\delta \leq V(x) \leq V[x(0)],$$

в котором  $V[x(t)]$  обязана все время оставаться, функция

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x)$$

все время совершает оборот в секунду, но радиус-вектор  $r$  не убывает до нуля, хотя производная  $V(r) = r^2$  по времени строго отрицательна на любой траектории  $\{r(t), \varphi(t)\}$ .

Поэтому в многомерном случае выход из положения заключается в исключении ситуации

$$\nabla V(x) \cdot f(x, t) \rightarrow 0, \quad x \neq 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

что сводится к анализу скалярного уравнения  $\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x, t)$  с параметром  $x$ .

Отмеченный фактор «быстрого устания» системы лежит на поверхности, но довольно часто остается незамеченным, что приводит к неточным формулировкам теорем. Интересно, что особого вреда это не наносит<sup>4)</sup>. Математика, оказывается, устойчива к малым ошибкам.

**Неустойчивость.** Когда убывающую функцию Ляпунова не удастся подобрать, причины может быть две. Для выяснения второй — пригодился бы инструмент, позволяющий гарантировать неустойчивость.

Идеологическая основа годится прежняя. Если в окрестности равновесия  $x^* = 0$  системы  $\dot{x} = f(x)$  у непрерывно дифференцируемой функции  $V(x)$   $\{V(0) = 0\}$  область положительности  $V(x) > 0$  пересекается с любой сколь угодно малой окрестностью нуля и в этом пересечении  $\dot{V} > 0$ , в силу  $\dot{x} = f(x)$ , то равновесие  $x^* = 0$  неустойчиво<sup>5)</sup>.

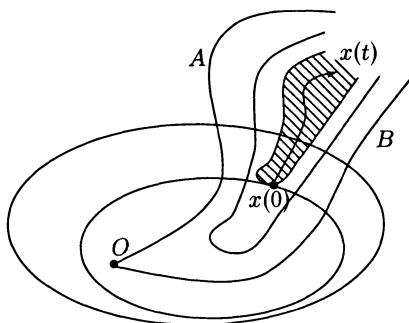


Рис. 4.7. Неустойчивое равновесие

◀ От функции Ляпунова у  $V(x)$  здесь осталось лишь обозначение. Положительной определенности не требуется. Просто через нуль проходит функция, у которой сектор  $V(x) > 0$  примыкает к нулю. На рис. 4.7 это сектор  $AOB$ . Если допустить устойчивость, то по окрестности  $\|x\| < \varepsilon$  — пусть на рисунке это будет

<sup>4)</sup> Ибо о неточностях вспоминают, когда они дают о себе знать.

<sup>5)</sup> Это автономный вариант теоремы Четаева.

внутренность большего эллипса — можно указать такую окрестность  $\|x\| < \delta$ , — внутренность меньшего эллипса, — что траектория, начинаясь во второй, — не выходит из первой. С другой стороны, если рассмотреть заштрихованную на рис. 4.7 область  $V(x) > \alpha > 0$ , касающуюся окрестности  $\|x\| < \delta$ , то в силу  $\dot{V} > 0$  траектория  $x(t)$  не сможет оставаться в  $\|x\| < \epsilon$ , ибо производная  $\dot{V}$  в пересечении кольца

$$\delta \leq \|x\| \leq \epsilon$$

с заштрихованной «территорией» — не просто положительна, а

$$\dot{V} = \nabla V \cdot f(x) > \gamma > 0,$$

благодаря непрерывности. ►

В неавтономном случае необходимы уточнения, аналогичные тем, которые делались выше.

### 4.3. Неавтономный случай

При рассмотрении системы  $\dot{x} = f(x, t)$  определенный интерес представляет ситуация выбора функции Ляпунова  $V(x, t)$ , зависящей от  $t$ . Если  $V(x, t)$  классифицировать как положительно определенную при условии  $V(x, t) > 0$ ,  $x \neq 0$ , то

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x, t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq 0$$

уже не гарантирует устойчивость равновесия  $x^* = 0$ . Поверхность  $V = V(x, t)$  в пространстве переменных  $\{V, x\}$  меняется с течением времени, и сползание изображающей точки  $x(t)$  по  $V$  теперь не обязательно связано с приближением  $x(t)$  к  $x^* = 0$ .

Но если существует положительно определенная функция  $W(x)$ , такая что  $V(x, t) > W(x) > 0$  при  $x \neq 0$ , то  $\dot{V} \leq 0$  влечет за собой устойчивость равновесия.

◀ Действительно, траектория  $x(t)$  не выйдет из окрестности  $\|x\| < \epsilon$ , если точка  $x(t_0)$  принадлежит окрестности  $\|x\| < \delta$ , где  $\delta$  определяется следующим образом. Пусть  $\inf W(x) = \alpha > 0$  на сфере  $\|x\| = \epsilon$ , и  $\delta$  выбрано из условия  $V(x, t_0) < \alpha$  при любом  $\|x\| < \delta$ . Тогда, если  $t_1$  обозначает первый момент выхода  $x(t)$  из шара  $\|x\| < \epsilon$ , то

$$\alpha \leq W[x(t_1)] \leq V(x(t_1), t_1) \leq V(x(t_0), t_0) < \alpha,$$

что дает необходимое противоречие. ►

Асимптотическая устойчивость требует дополнительных предположений. В частности, чтобы функция  $V(x, t)$  имела *бесконечно малый высший предел*<sup>6)</sup>, т. е. по любому  $\varepsilon > 0$  можно было бы указать такое  $\delta > 0$ , что  $V(x, t) < \varepsilon$ , как только  $\|x\| < \delta$  и  $t \in [t_0, \infty)$ . Плюс к тому, — чтобы система «быстро не уставала» (см. выше).

#### 4.4. Уравнение в вариациях

Если  $x(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

а  $x(t) + \eta(t)$  — решение того же диффура, выходящее из точки  $x(t_0) + \eta(t_0)$ , то  $\eta(t)$ , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\eta} = f(x(t) + \eta, t) - f(x(t), t). \quad (4.3)$$

**4.4.1. Устойчивостью (асимптотической устойчивостью) решения  $x(t)$  называется устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого равновесия (4.3).**

Уравнение (4.3) при малых по норме  $\eta(t)$  можно записать в виде

$$\dot{\eta} = f'_x(x(t), t)\eta + o(\|\eta\|).$$

Таким образом, линеаризация (4.3) дает

$$\dot{\eta} = f'_x(x(t), t)\eta, \quad (4.4)$$

что называют *уравнением в вариациях*.

Производная  $f'_x$  — это *матрица Якоби*

$$f'_x(x(t), t) = \left[ \frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x_j} \right],$$

<sup>6)</sup> Проще говоря, чтобы  $V(x, t)$  можно было сделать сколь угодно малой (равномерно по  $t$ ) выбором  $x$ , достаточно близких к равновесию.

поэтому уравнение в вариациях представляет собой неавтономную линейную систему  $\dot{\eta} = A(t)\eta$ .

Возвращаясь к определению, полезно обратить внимание, что устойчивость решения  $x(t) = U_{t_0,t}(x_0)$  есть не что иное, как равномерная по  $t$  непрерывность оператора сдвига  $U_{t_0,t}$  в точке  $x_0$ .

**Устойчивость по линейному приближению.** В автономном случае  $\dot{x} = f(x)$ , когда речь идет об устойчивости нулевого равновесия, уравнение (4.4) принимает вид  $\dot{\eta} = f'_0(0)\eta$ . Понятно, что здесь проще обходиться без введения  $\eta$ , сразу записывая исходную систему в форме

$$\dot{x} = f'(0)x + o(\|x\|)$$

и пытаясь судить об устойчивости равновесия  $\dot{x} = f(x)$  по линейному приближению  $\dot{x} = f'(0)x$ , поскольку в линейном случае вопрос решается исчерпывающе и достаточно легко.

**4.4.2. Теорема.** *Для асимптотической устойчивости нулевого равновесия линейной системы  $\dot{x} = Ax$  необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех собственных значений матрицы  $A$  были строго отрицательны.*

◀ Сходимость всех решений  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  очевидна из представления

$$x(t) = \sum c_k e^{\lambda_k t}.$$

Если все  $\lambda_k$  различны, то  $c_k$  константы. При равных  $\lambda_k$  (см. раздел 3.5)  $c_k$  могут полиномиально расти, но это не может перевесить экспоненциальное убывание множителей  $e^{\lambda_k t}$ .

Для сговорчивой части населения этого достаточно. Но, в принципе,  $x(t) \rightarrow 0$  еще не гарантирует устойчивость (см. рис. 4.4). В линейном случае, однако, так не бывает, что предлагается обосновать в виде упражнения<sup>7)</sup>. ▶

Исходная проблема, таким образом, сводится к вопросу, можно ли изучение окрестности равновесия системы  $\dot{x} = f(x)$  заменить изучением матрицы  $A = f'(0)$ . Интуитивно ситуация довольно прозрачна<sup>8)</sup>. Если действительные части всех собственных значений матрицы  $f'(0)$  строго отрицательны, то *асимптотически*

<sup>7)</sup> Подсказка: любое решение представляет собой линейную комбинацию  $n$  фундаментальных решений, сходящихся к нулю.

<sup>8)</sup> Разумеется, если интуиция в рассматриваемой области успела развиться.

устойчиво равновесие не только системы  $\dot{x} = f'(0)x$ , но и  $\dot{x} = f(x)$ . Если хоть одно  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , то равновесие обеих систем неустойчиво.

Если же все  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$ , и есть  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ , — случай пограничный. Даже линейная система  $\dot{x} = f'(0)x$  может быть неустойчива<sup>9)</sup>. Равновесие  $\dot{x} = f(x)$  может быть любым — все зависит от нелинейной добавки  $o(\|x\|)$ .

Интуиция в данном случае не подводит. Формальное доказательство асимптотической устойчивости  $\dot{x} = f(x)$  может опираться на приводимое ниже утверждение, имеющее самостоятельное значение.

**4.4.3. Лемма.** *Если любое решение  $\dot{x} = Ax$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то существует положительно определенная квадратичная форма  $\varphi(x) = (x, Vx)$ , производная которой в силу  $\dot{x} = Ax$  строго отрицательна при  $x \neq 0$ .*

◀ Очевидно,

$$\dot{\varphi} = (Ax, Vx) + (x, VAx) = (x, (A^T V + VA)x).$$

Поэтому достаточно показать, что матричное уравнение

$$A^T V + VA = -I \tag{4.5}$$

имеет решением положительно определенную матрицу  $V$ .

Левая часть (4.5) представляет собой линейный оператор  $\tilde{A}$ , действующий в пространстве матриц  $n \times n$ . Оператор  $\tilde{A}$  невырожден. В предположении противного существует такая ненулевая матрица  $V_0$ , что  $A^T V_0 + V_0 A = 0$ . Но тогда можно выбрать такое  $x_0 \neq 0$ , что  $\varphi(x_0) = (x_0, V_0 x_0) < 0$ . А это, в силу  $\dot{\varphi} = -x^2$ , противоречит сходимости  $x(t) \rightarrow 0$ , если  $x(0) = x_0$ .

Наконец, решением (4.5) может быть только положительно определенная матрица  $V$ . В противном случае существует ненулевое  $y_0$ , при котором

$$\varphi(y_0) = (y_0, V y_0) \leq 0,$$

что снова, в силу  $\dot{\varphi} = -x^2$ , вступает в противоречие с  $x(t) \rightarrow 0$  в случае  $x(0) = y_0$ . ▶

**Замечание.** Обратим внимание, что лемма 4.4.3 решает заодно упражнение, предложенное в обосновании теоремы 4.4.2, ибо доказанное существование функции Ляпунова  $\varphi(x)$  влечет за собой устойчивость (раздел 4.2).

---

<sup>9)</sup> Например,  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$ .

**4.4.4. Теорема.** *Если все собственные значения матрицы  $f'(0)$  строго отрицательны, то нулевое равновесие системы  $\dot{x} = f(x)$  асимптотически устойчиво.*

◀ Добавки второго порядка малости не меняют знака производной у функции  $\varphi(x)$ . ▶

## 4.5. Обратные теоремы

Теорема 4.4.4 дает повод задуматься, нельзя ли из асимптотической устойчивости нулевого равновесия системы  $\dot{x} = f(x)$  сделать вывод об асимптотической устойчивости того же равновесия в случае  $\dot{x} = f(x) + g(x)$ , если  $\|g(x)\| = o(\|f(x)\|)$ . Можно, причем обоснование идеологически остается прежним, но технически более сложным. Ключом к положительному решению вопроса может быть следующий факт.

**4.5.1.** *В области притяжения  $\Omega$  асимптотически устойчивого равновесия  $x^*$  системы  $\dot{x} = f(x)$  существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова  $V(x)$  (то есть положительно определенная функция, убывающая на траекториях рассматриваемого уравнения), у которой все поверхности постоянного уровня,  $V(x) = c$ , ограничены<sup>10</sup>).*

Утверждение 4.5.1 относится к разряду *обратных теорем* [14, 21], принципиальная роль которых определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, они гарантируют, что второй метод Ляпунова применим всегда (хотя и не всегда ведет к успеху, ибо для поиска  $V(x)$  нужна еще изобретательность и удача). Во-вторых, информация о существовании  $V(x)$  помогает доказывать другие теоремы — например, *о сохранении свойства асимптотической устойчивости равновесия при малом шевелении правой части*.

Наиболее далеко обратные теоремы были продвинуты, пожалуй, В. И. Зубовым [14], который пошел следующим путем. Если для изучаемой системы существует одна функция Ляпунова, то существует и много других, среди которых можно выбирать  $V(x)$ ,

<sup>10</sup>) От функций Ляпунова с неограниченными областями  $V(x) \leq c$  мало толку — траектории, уменьшая  $V(x)$ , могут уходить в бесконечность (см. след. раздел).

удовлетворяющие дополнительным требованиям<sup>11)</sup>. В частности, он показал, что в области притяжения  $\Omega$  нулевого равновесия системы  $\dot{x} = f(x)$  всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{V} = \varphi(x)(1 + V), \quad V(0) = 0, \quad (4.6)$$

где  $-1 < V(x) < 0$  при  $x \neq 0$ , а выбор  $\varphi(x) > 0$  должен удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Понятно, что в пику предыдущим определениям здесь речь идет о функции Ляпунова  $V(x)$ , которая отрицательна, а не положительна, — зато вдоль траекторий она растет, а не убывает (поэтому заменой  $V(x)$  на  $-V(x)$  можно восстановить традиционную ситуацию).

Поскольку

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x),$$

то (4.6) представляет собой уравнение в частных производных

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \varphi(x)(1 + V), \quad (4.7)$$

решая которое можно найти не только функцию Ляпунова, но и область притяжения.

Вот как это могло бы работать. Для

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2y - x, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

уравнение (4.7) в случае  $\varphi = x^2 + y^2$  приобретает вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}(2x^2y - x) + \frac{\partial V}{\partial y}(-y) = (x^2 + y^2)(1 + V).$$

Решением здесь является

$$V(x, y) = e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2(1-xy)}} - 1,$$

откуда видно, что границей области притяжения служит гипербола  $xy = 1$ .

В [14] приводится еще несколько примеров, но все они, конечно, напоминают «рояль в кустах». Надеяться на решение уравне-

<sup>11)</sup> Например, всегда можно ориентироваться на  $V(x) = \rho(x, x^*)$ , где  $\rho$  — метрика, эквивалентная исходной (см. обзор [21]).

ния (4.7) в реальной ситуации довольно трудно. Тем не менее, как уже не раз отмечалось, не только в решении конкретных уравнений заключаются проблемы.

#### 4.6. Устойчивость в целом

Об устойчивости в целом говорят, подразумевая асимптотическую устойчивость равновесия, область притяжения которого совпадает со всем фазовым пространством.

В скалярном случае  $\dot{x} = f(x)$ , если равновесие  $x^*$  асимптотически устойчиво и единственно, то оно асимптотически устойчиво в целом (►). Если функция

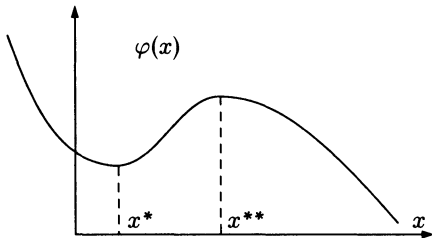


Рис. 4.8

функция Ляпунова  $V(x)$  убывает при любом  $x \neq x^*$ , то все траектории  $x(t)$  сходятся к  $x^*$  (►). Если некоторая функция  $\varphi(x)$  имеет в  $x^*$  локальный минимум и не имеет других экстремальных точек, то минимум в  $x^*$  является глобальным. Рис. 4.8 наглядно показывает: чтобы локальный минимум не был глобальным — должен быть еще локальный максимум.

Вся эта простота рушится в многомерном случае. Положительно определенная функция Ляпунова  $V(x)$  может строго убывать при любом  $x \neq x^*$ , но это не мешает траекториям  $x(t)$  уходить в бесконечность. Такого сорта примеры до сих пор способны вызывать чувство восхищения, — из-за того, что пространственное воображение у нас не слишком хорошо развито.

В первую очередь речь идет о взаимоотношении локальных и глобальных экстремумов. Пусть  $\varphi(x)$  имеет в точке  $x^*$  локальный минимум и не имеет других экстремальных точек, т. е.  $\nabla\varphi(x) \neq 0$  при  $x \neq x^*$ . Уже на плоскости минимум в  $x^*$  не обязан быть глобальным. Соответствующие примеры легко строятся на базе следующей конструкции.

Представим, что на полосе (рис. 4.9), ограниченной параллельными прямыми  $AB$  и  $CD$ , задана функция  $y = \varphi(x)$ , график которой представляет собой горный хребет, уходящий «тем выше — чем левее». Уровень  $\varphi(x)$  на прямых  $AB$  и  $CD$  — нулевой, а срезы  $\varphi(x) = c > 0$  — тем левее, чем больше  $c > 0$ . Наконец,  $\text{grad } \varphi(x)$  везде отличен от нуля.

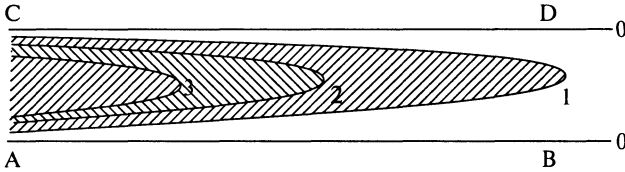


Рис. 4.9

Таким образом, полоса делит плоскость на две части (верхнюю и нижнюю), и  $\varphi(x)$  убывает по мере приближения к  $AB$  и  $CD$ . Точнее говоря, градиент  $\varphi(x)$  в близких к  $AB$  и  $CD$  точках направлен внутрь полосы. Это позволяет продолжать  $\varphi(x)$  на всю плоскость «нисходящим образом». Ниже  $AB$ , например, устроить локальный минимум (продавив воронку), а выше  $CD$  образовать склон  $\varphi(x)$ , уходящий, скажем, в минус бесконечность.

Следовательно, в многомерном случае при единственном локальном минимуме и отсутствии других критических точек — есть возможность «загнуть график вниз», избегая появления локальных максимумов, как на рис. 4.8.

Склон  $\varphi(x)$  выше  $CD$  можно не опускать ниже уровня  $\varphi(x^*)$ , — и тогда автономная система

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$$

будет иметь положительно определенную функцию Ляпунова  $\varphi(x) - \varphi(x^*)$ , везде (кроме  $x \neq x^*$ ) строго убывающую, но траектории  $x(t)$ , начинающиеся выше  $CD$ , будут уходить в минус бесконечность.

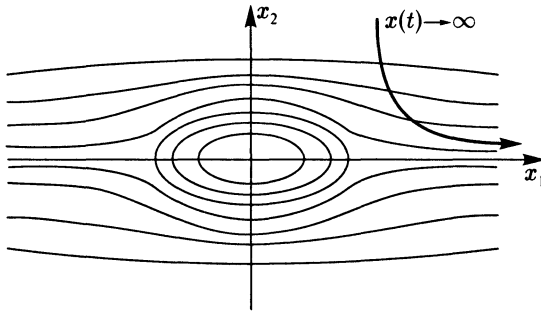


Рис. 4.10

Уход траекторий  $x(t)$  в бесконечность возможен и в том случае, когда единственный локальный минимум функции Ляпунова  $V(x)$  является глобальным, но не все области  $V(x) \leq c$  ограничены. Соответствующий пример дан на рис. 4.10, где изображены линии постоянного уровня функции типа

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2.$$

Траектория  $x(t) \rightarrow \infty$  выделена жирным. «Формульный вариант» имеется в [6].

Подобных «неприятностей» можно избежать в дополнительных предположениях.

**4.6.1. Теорема.** Пусть  $x^*$  — точка локального минимума функции  $\varphi(x)$ , причем  $\nabla\varphi(x) \neq 0$  при  $x \neq x^*$ , и выполнено одно из условий: либо

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty,$$

либо

$$\|\nabla\varphi(x)\| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq r_0 > 0.$$

Тогда в  $x^*$  достигается глобальный минимум функции  $\varphi(x)$ .

**4.6.2.** Если функция Ляпунова  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 4.6.1 и убывает на траекториях (не устающей быстро) системы  $\dot{x} = f(x, t)$ , то равновесие  $x^*$  асимптотически устойчиво в целом. (►)

## 4.7. Диссипативные системы

В данный контекст естественно вписываются *диссипативные системы*, характеризуемые тем, что все их траектории со временем входят в некий шар радиуса  $r$  и там остаются.

Наличие такого свойства бывает ясно из физических соображений, связанных так или иначе с диссипацией энергии. Конечно, если система из-за потерь на трение со временем стремится к равновесию, то она асимптотически устойчива и, тем более, диссипативна. Но у системы может быть источник энергии, который из-за ограниченной мощности не в состоянии компенсировать энергетические потери при больших скоростях, — и тогда движение будет спускаться «на Землю» из любых «заоблачных высот», вечно продолжаясь в рамках энергетического порога.

*Параллели с асимптотической устойчивостью в целом здесь заключаются в следующем. Если наблюдатель находится так далеко, что шар  $\|x\| \leq r$  кажется ему точкой, то система будет видаться ему асимптотически устойчивой в целом.*

**4.7.1.** Пусть функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 4.6.1 и убывает на траекториях (не устающей быстро) системы  $\dot{x} = f(x, t)$  вне шара  $\|x\| \leq R$ . Тогда система  $\dot{x} = f(x, t)$  диссипативна. (►)

Упомянутое выше соображение об использовании удаленного наблюдателя хорошо работает во многих ситуациях, и вполне может быть развито в строгий метод.

Из последней теоремы вытекает диссипативность системы

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

где матрица  $A$  устойчива, а нелинейная часть  $f(x)$  ограничена, т. е.

$$\|f(x)\| < M.$$

## 4.8. Проблема Рауса—Гурвица

Матрица  $A$ , у которой все собственные значения<sup>12)</sup>  $\lambda_k$  находятся строго в левой полуплоскости,  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , — называется *устойчивой*, или *гурвицевой*.

Теорема 4.4.2 гарантирует, таким образом, асимптотическую устойчивость нулевого равновесия линейной системы  $\dot{x} = Ax$  с устойчивой матрицей. Некоторый словесный каламбур здесь возникает из-за того, что определение устойчивой матрицы неравенствами  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$  было бы бессмысленно, — траектории  $\dot{x} = Ax$  в этом случае могли бы уходить в бесконечность (из-за секулярных членов).

Полиномы (многочлены)  $P(\lambda)$ , все корни  $\lambda_k$  которых удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , также называют *устойчивыми*, либо *гурвицевыми*, а задачу об устойчивости  $P(\lambda)$  — *проблемой Рауса—Гурвица*, которая имеет разнообразные по форме решения [24].

При подстановке  $\lambda = i\omega$  в

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

многочлен  $P$  записывается в форме  $|P(i\omega)|e^{i \arg P(i\omega)}$ , либо

$$P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega), \quad (4.8)$$

где  $g$  и  $h$  — многочлены от  $\omega$ . Например, в случае  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ ,

$$g(\omega) = -\omega^2 + a_2, \quad h(\omega) = a_1 \omega.$$

<sup>12)</sup> То есть корни характеристического полинома  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

Кривая (4.8) в комплексной плоскости, задаваемая параметром  $\omega$ , называется *амплитудно-фазовой характеристикой* полинома, либо *годографом Михайлова* (см. главу 8).

**4.8.1. Критерий Михайлова.** Если аргумент  $P(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  меняется на величину  $\frac{\pi}{2}$ , то многочлен  $P(\lambda)$  устойчив.

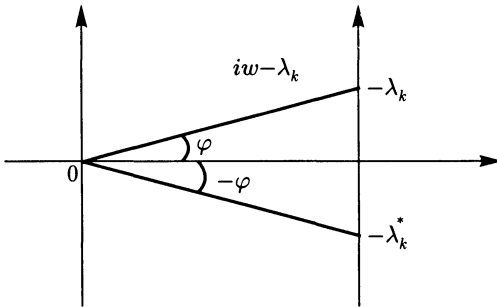


Рис. 4.11

что аргумент  $(i\omega - \lambda_k)$  меняется на  $\pi/2$  в случае действительного корня  $\lambda_k < 0$ , на  $\pi/2 - \varphi$  (рис. 4.11) в случае комплексного корня с вещественной частью  $\text{Re } \lambda_k < 0$  и на  $\pi/2 + \varphi$  в случае комплексно сопряженного корня  $\lambda_k^*$ .

Результирующая сумма получается равной  $n\pi/2$ . ►

◀ Из представления

$$P(i\omega) = (i\omega - \lambda_1) \dots (i\omega - \lambda_n)$$

видно, что изменение аргумента  $P(i\omega)$  равно сумме приращений аргументов сомножителей  $(i\omega - \lambda_k)$ . Изображающая точка  $(i\omega - \lambda_k)$  при изменении  $\omega$  от нуля до  $+\infty$  движется (по комплексной плоскости) вверх вдоль вертикальной прямой, проходящей через  $-\lambda_k$  (рис. 4.11). При этом ясно,

На рис. 4.12 даны примеры годографов устойчивых многочленов второго и третьего порядка. Для решения вопроса об изменении аргумента точность, понятно, не нужна. Достаточно прикинуть точки пересечения с осями и направление ухода в бесконечность. Это делается легко и быстро.

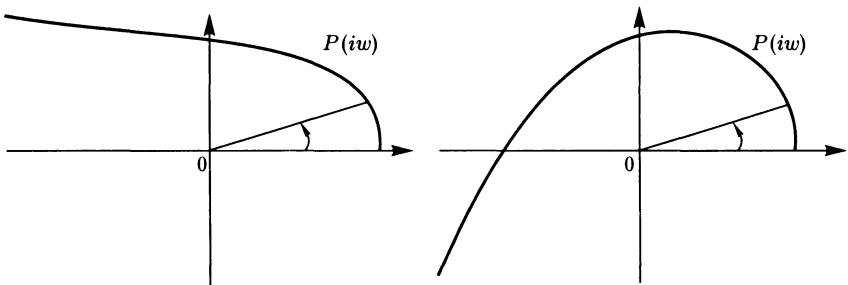


Рис. 4.12

## 4.9. Линейные неавтономные системы

Проблема устойчивости линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

является стержневой, поскольку к ней сводится, вообще говоря, вопрос об устойчивости решений системы общего вида

$$\dot{x} = f(x, t),$$

в силу линейности уравнения в вариациях<sup>13)</sup>.

Считается, что эту проблему покрывает *первый метод Ляпунова*, который — в отличие от «второго» — особой популярности не завоевал, но время от времени оказывается полезным.

Канва метода<sup>14)</sup> примерно такова. В основе лежит понятие *характеристического показателя*, определяемого для функции  $f(t)$  как верхний предел

$$\chi[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|.$$

Очевидно,  $\chi[e^{\alpha t}] = \alpha$ .

Характеристический показатель матрицы  $A(t) = [a_{jk}(t)]$  определяется формулой

$$\chi[A(t)] = \max_{j,k} \chi[a_{jk}(t)],$$

при этом, как выясняется,

$$\chi[A(t)] = \chi[\|A(t)\|].$$

Нечувствительность к выбору нормы здесь объясняется тем, что характеристический показатель ловит порядок роста функции, а все нормы в  $\mathbb{R}^n$  эквивалентны.

В случае ограниченной по норме матрицы  $A(t)$  любое решение  $x(t)$  системы  $\dot{x} = A(t)x$  имеет конечный характеристический показатель (*теорема Ляпунова*). Если  $A(t) = A$ , то характеристические показатели фундаментальных решений  $\dot{x} = Ax$  совпадают с действительными частями собственных значений матрицы  $A$ .

Все это красиво выглядит, но в большей степени является идеологическим оружием, поскольку вычисление показателей  $\chi$  в нетривиальных ситуациях весьма проблематично.

Работоспособные критерии устойчивости все-таки в основном опираются на второй метод Ляпунова. Возьмем, например,

<sup>13)</sup> Это более-менее ясно из раздела 4.4, хотя там и не расставлены все точки над  $i$ .

<sup>14)</sup> См. например, [12].

в качестве функции Ляпунова квадратичную форму  $V(x) = x^2$ . Ее производная вдоль траекторий  $\dot{x} = A(t)x$  равна

$$\dot{V}(x) = (x, A(t)x) + (A(t)x, x) = (x, (A(t) + A^T(t))x).$$

Поэтому, если  $\Lambda(t)$  обозначает максимальное собственное значение матрицы  $A(t) + A^T(t)$ , которая симметрична<sup>15)</sup>, — то

$$\frac{dx^2}{dt} \leq \Lambda(t)x^2,$$

что для решений  $x(t)$  после интегрирования дает *неравенство Вайековского*

$$x^2(t) \leq x^2(t_0) e^{\int_{t_0}^t \Lambda(s) ds}.$$

Понятно, что при  $\Lambda(t) < \Lambda_0 < 0$  нулевое равновесие системы  $\dot{x} = A(t)x$  будет асимптотически устойчиво.

#### Упражнения (см. [12])

- Для (асимптотической) устойчивости линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{4.9}$$

необходима и достаточна (асимптотическая) устойчивость нулевого равновесия однородной системы  $\dot{x} = A(t)x$ .

- Все решения (4.9) при любом  $f(t)$  устойчивы (вполне неустойчивы), если устойчиво (вполне неустойчиво) — хотя бы одно.
- Для устойчивости однородной системы  $\dot{x} = A(t)x$  необходима и достаточна ограниченность всех ее решений при  $t \rightarrow +\infty$ .
- Все решения устойчивой системы (4.9) при  $t \rightarrow +\infty$  либо ограничены, либо не ограничены<sup>16)</sup>.
- Для асимптотической устойчивости однородной системы  $\dot{x} = A(t)x$  необходимо и достаточно стремление к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  всех ее решений.
- Если матрица  $A$  гурвицева и  $B(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то система

$$\dot{x} = [A + B(t)]x$$

асимптотически устойчива.

<sup>15)</sup> И потому все ее собственные значения действительны.

<sup>16)</sup> Решения  $x(t) = t + ce^{-t}$  уравнения  $\dot{x} = 1 + t - x$  не ограничены, но асимптотически устойчивы.

## Глава 5

### **Колебания**

#### **5.1. Гармонические сигналы**

О колебаниях говорят, имея дело с *периодическими функциями*  $f(t)$ , характеризующимися наличием *периода колебания*  $\tau$ :

$$f(t + \tau) \equiv f(t).$$

При этом функция  $f$  считается  $\tau$ -*периодичной*.

Одним из эталонов периодического сигнала служит синусоидальная функция (имеющая период  $\tau = 2\pi/\omega$ )

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.1)$$

где  $a$  — *амплитуда*, аргумент синуса  $(\omega t + \varphi)$  — *фаза*,  $\varphi$  — *сдвиг по фазе*,  $\omega$  — *круговая частота*<sup>1)</sup>. Функцию (5.1) называют *гармоническим сигналом*. Понятно, что замена в (5.1) синуса на косинус равносильна сдвигу по фазе на  $\pi/2$  — и потому не меняет природу сигнала.

При сложении двух гармоник,

$$a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

получается снова гармонический сигнал (5.1) с амплитудой  $a$ ,

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

и некоторым сдвигом по фазе. Зависимость амплитуды суммарного сигнала от разности фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  представляет собой широко известное явление *интерференции*.

Гармонические сигналы дают стандартную основу для представления любых функций в виде бесконечных сумм или интегралов.

---

<sup>1)</sup> Здесь  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu = 1/\tau$  — обыкновенная частота,  $\tau$  — период колебания.

Разложение *периодических* функций  $f(t)$  по ортогональной тригонометрической системе (см. например, [7])

$$\{1, \cos nt, \sin nt\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

позволяет представлять  $f(t)$  в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (-\pi < t < \pi), \quad (5.2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

В случае непериодических функций аналогом (5.2) служит интегральное представление Фурье

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a_{\omega} \cos \omega t + b_{\omega} \sin \omega t) \, d\omega, \quad (5.3)$$

где

$$a_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (5.4)$$

$$b_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

При работе с синусами или косинусами использование комплексной экспоненты  $e^{i\omega t}$  экономит много сил — и на освоение этого приема имеет смысл выделить некоторое время.

В преобразовании Фурье, например, (5.3), (5.4) заменяются на

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega,$$

где

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt.$$

Незначительное с первого взгляда упрощение — в процессе работы оборачивается существенной экономией.

В дифурах известное преимущество экспоненты заключается в том, что ее дифференцирование снова дает экспоненту, тогда как производная синуса равна косинусу и наоборот, что порождает неразбериху.

Вот еще один показательный пример. При сложении когерентных колебаний, идущих от щелей дифракционной решетки, возникает сигнал

$$x(t) = \cos \omega t + \cos (\omega t + \varphi) + \dots + \cos (\omega t + n\varphi).$$

Задача суммирования здесь выглядит довольно сложной. Если же заметить, что  $x(t)$  является действительной частью суммы

$$z(t) = e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \varphi)} + \dots + e^{i(\omega t + n\varphi)},$$

проблема легко разрешается, поскольку  $z(t)$  представляет собой сумму геометрической прогрессии с показателем  $e^{i\varphi}$ .

## 5.2. Вынужденные колебания

Если в  $\dot{x} = f(x, t)$  вектор-функция  $f(x, t)$   $\tau$ -периодична по  $t$ , то естественно ожидать наличия в системе  $\tau$ -периодических решений.

**5.2.1.** Для существования  $\tau$ -периодических решений  $x(t)$  необходимо и достаточно, чтобы у оператора сдвига  $U = U_{0,\tau}$  была неподвижная точка  $x_0$ , т. е.  $U x_0 = x_0$ .

◀ Очевидно,  $x(t) = U_{0,t}(x_0)$  является  $\tau$ -периодическим решением. ▶

Рассмотрим пока однородную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.5}$$

с  $\tau$ -периодической матрицей  $A(t)$ . Решения (5.5), как известно (раздел 3.2), могут быть записаны в форме

$$x(t) = X(t)x_0,$$

где фундаментальная матрица  $X(t)$  есть оператор сдвига  $U_{0,t}$  —  $\tau$ -периодичность  $X(t)$  проверяется подстановкой в (5.5).

Матрицу  $X(\tau)$  (сдвиг на период) называют *матрицей монодромии*, а ее собственные значения — *мультипликаторами* системы (5.5).

Для системы  $\dot{x} = Ax$  с постоянными коэффициентами

$$X(\tau) = e^{A\tau},$$

а мультипликаторы  $\mu_k = e^{\lambda_k \tau}$ , где  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы  $A$ . Очевидно,

$$|\mu_k| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_k < 0.$$

Таким образом, если матрица  $A$  устойчива (все  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ), то оператор сдвига за период  $X(\tau)$  имеет спектральный радиус<sup>2)</sup>  $< 1$ , и поэтому — сжимает в некоторой норме. Это вытекает из следующего факта.

**5.2.2. Лемма.** *Если у матрицы  $B$  спектральный радиус  $\rho(B) < 1$ , то обязательно найдется норма  $\|\cdot\|_*$ , в которой  $\|B\|_* < 1$ .*

◀ В качестве  $\|\cdot\|_*$  можно взять

$$\|x\|_* = \max\{\lambda^{-k}\|B^k x\|: k = 0, 1, \dots\},$$

где  $\rho(B) < \lambda < 1$ , а  $\|\cdot\|$  — произвольная норма в  $R^n$ .

В этом случае, очевидно,

$$\|Bx\|_* = \lambda \max\{\lambda^{-(k+1)}\|B^{k+1}x\|: k = 1, 2, \dots\} \leq \lambda\|x\|_*. \quad \blacktriangleright$$

В неавтономном случае (5.5) матрица  $X(\tau)$  может быть определена аналитически в редких ситуациях, но численно — практически всегда, и с большой точностью.

Рассмотрим теперь неавтономную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{5.6}$$

с  $\tau$ -периодичными  $A(t)$  и  $f(t)$ . Распространенный вариант: матрица — не зависит от времени, а  $f(t)$  — внешнее периодическое воздействие на систему.

◀ Из (3.20) и утверждения 5.2.1 вытекает, что начальные условия  $x(0)$   $\tau$ -периодических решений (5.6) определяются уравнением

$$x_0 = X(\tau)x_0 + \int_0^\tau X(\tau)X^{-1}(s)f(s) ds,$$

<sup>2)</sup> Наибольший модуль собственного значения.

откуда

$$x_0 = [I - X(\tau)]^{-1} \int_0^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)f(s) ds,$$

для чего необходимо и достаточно, чтобы 1 не была мультипликатором системы (5.5).

При известном начальном условии периодическое решение определяется автоматически по формуле (3.20). ►

Если один из мультипликаторов равен 1, периодическое решение может не существовать. Теоретически этот вариант рассматривается элементарно — как случай разрешимости линейного уравнения  $[I - X(\tau)]x = b$  с вырожденной матрицей  $I - X(\tau)$ .

Устойчивость периодического решения — является обычно главным вопросом. В рассматриваемом случае проблема решается довольно просто.

**5.2.3. Теорема.** *Если все мультипликаторы системы (5.5) по модулю меньше единицы, то у системы (5.6) периодическое решение существует, единственно и асимптотически устойчиво.*

◀ Существование и единственность периодического решения  $x^*(t)$  были установлены выше.

Из (3.20) вытекает

$$x(t) - x^*(t) = X(t)[x(0) - x^*(0)],$$

где оператор сдвига  $X(t)$  по траекториям (5.5)  $\tau$ -периодичен, и поэтому, если  $t = k\tau + s$ , где  $s < \tau$ ,

$$X(t) = X(k\tau + s) = X^k(\tau)X(s),$$

что влечет за собой  $X(t) \rightarrow 0$ , т. е.  $x(t) - x^*(t) \rightarrow 0$ .

Помимо этого, в норме из леммы 5.2.2

$$\|X(t)\|_* < \lambda^k \|X(s)\|_*.$$

Поэтому  $X(t)$  стягивает в точку любой шар  $\|x\|_* \leq r$ , что обеспечивает устойчивость по Ляпунову. ►

Обратим внимание на следующие моменты. В нетривиальном случае <sup>3)</sup>:

- На замкнутой периодической траектории  $x^*(t)$  не любая, а единственная точка  $x(0)$  является неподвижной точкой оператора сдвига.

<sup>3)</sup> Когда  $f(t)$  действительно зависит от  $t$ .

- Все решения  $x(t)$  — в условиях теоремы 5.2.3 — сходятся не только к орбите (следу), но и к самому периодическому решению  $x^*(t)$ , т. е. происходит синхронизация с внешним периодическим воздействием.

Изложенный материал принято именовать *теорией Флоке*. В [15] можно найти дополнительные подробности.

### 5.3. Резонансные явления

*Резонансом* называют феномен резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к частоте одного из собственных колебаний системы.

При воздействии гармонического возмущения  $f \cos \omega t$  на простейший осциллятор динамика системы описывается уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (5.7)$$

где  $\omega_0$  обозначает *собственную частоту* осциллятора, а  $\gamma$  — коэффициент вязкого трения.

◀ К решению (5.7) приводит подстановка  $x = Ce^{i\omega t}$ , в результате которой получается

$$(-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2)Ce^{i\omega t} = fe^{i\omega t},$$

откуда

$$C = \frac{f}{-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2}.$$

Действительная часть  $Ce^{i\omega t}$  дает решение

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (5.8)$$

где

$$A = |C| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.9)$$

Устойчивость решения  $A \cos(\omega t - \varphi)$  по Ляпунову гарантирует теорема 5.2.3 (разумеется, если  $\gamma > 0$ , что обеспечивает устойчивость характеристического полинома). ▶

Из формулы (5.9) видно, что амплитуда  $A$  максимальна при совпадении собственной частоты  $\omega_0$  с частотой  $\omega$  внешнего воздействия и  $A \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow \omega_0$  и  $\gamma \rightarrow 0$ . Сдвиг по фазе  $\varphi$  при  $\omega = \omega_0$  равен  $\pi/2$ . Интересно, что при  $\omega < \omega_0$  маятник движется

с некоторым запаздыванием по фазе по отношению к вынуждающей силе, что интуитивно представляется естественным; при  $\omega > \omega_0$ , — наоборот, с опережением — как бы стремясь избежать воздействия, — что, в связи с неодоушевленностью маятника, кажется немного странным.

Решение (5.8) можно представить в эквивалентном виде<sup>4)</sup>

$$x(t) = A_a \sin \omega t + A_d \cos \omega t, \quad (5.10)$$

избавляясь от описания процесса сдвигом по фазе  $\varphi$ . Первое впечатление от такой замены, конечно, «что в лоб, что по лбу». Но математически тривиальные развилки часто приводят к тому, что исследование начинает идти по другому пути, достигая в итоге либо существенных результатов, либо, наоборот, упираясь в стену и теряя ориентир. В данном случае в результате перехода от (5.8) к (5.10) возникают новые категории мышления:  $A_a$  — *амплитуда поглощения* и  $A_d$  — *амплитуда дисперсии*. Составляющая  $A_a \sin \omega t$  отстает от вынуждающей силы  $f \cos \omega t$  на  $\pi/2$ , и ее среднее значение за период равно поглощаемой осциллятором мощности. Дисперсное колебание  $A_d \cos \omega t$  в точности следует по фазе за вынуждающей силой, и его интегральный вклад за цикл в поглощаемую мощность равен нулю<sup>5)</sup>.

Модель (5.7) фиксирует простые качественные закономерности и служит удобным эталоном при рассмотрении резонансных явлений вообще. В комбинации с принципом суперпозиции она позволяет делать выводы о резонансе в случае периодических сил негармонического характера. Определяющую роль при этом играет разложение внешней силы  $f(t)$  в ряд Фурье, поскольку для резонанса существенно не совпадение частот само по себе, а наличие в разложении

$$f(t) = \sum f_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

гармоник, близких к собственной частоте  $\omega_0$ .

<sup>4)</sup> Воспользовавшись формулой косинуса разности двух углов.

<sup>5)</sup> Поглощаемая мощность  $P(t)$  равна произведению силы  $f \cos \omega t$  на скорость  $\dot{x}(t)$ . Усреднение за период дает нуль в силу  $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$ , где угловые скобки обозначают среднее значение за период.

Распространенное «правило» о возникновении резонанса, если частота воздействия кратна собственной частоте,  $\omega = k\omega_0$ , — вообще говоря, неверно. Оно работает, если в разложении  $f(t)$  присутствует ощутимая гармоника с  $\omega = \omega_0$ . В случае

$$f(t) = \cos 3\omega_0 t + \cos 7\omega_0 t$$

частота воздействия в точности совпадает с резонансной ( $\nu = \nu_0$ ), но резонанса нет.

**Параметрический резонанс.** Иногда возмущение действует на систему косвенно — через параметры.

Рассмотрим, например, движение маятника, подвешенного на жестком стержне длины  $l$  (рис. 2.3 б). Пусть вертикальная координата  $x$  точки подвеса колеблется с (круговой) частотой  $\omega$  и малой амплитудой  $\varepsilon$ ,

$$x = \varepsilon \cos \omega t.$$

Сила инерции, действующая на маятник в вертикальном направлении, равна  $m\ddot{x}$ . Поэтому в уравнении (2.9), либо (2.10)<sup>6)</sup> к ускорению свободного падения  $g$  надо добавить

$$\ddot{x} = -\varepsilon\omega^2 \cos \omega t,$$

что и будет искомым уравнением движения. В частности, (2.10) перейдет в

$$\ddot{\varphi} + \frac{g - \varepsilon\omega^2 \cos \omega t}{l} \varphi = 0.$$

Внешней силы<sup>7)</sup>, таким образом, нет, но при определенных условиях маятник удастся раскачать — соответствующее явление называют *параметрическим резонансом*.

Если амплитуда колебаний  $\varepsilon$  достаточно мала, а частота  $\omega$  не слишком велика, можно считать (полагая  $l = 1$ ), что речь идет о дифференциальном уравнении *Матье*

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \varepsilon\omega^2 \cos \omega t)x = 0 \quad (5.11)$$

с малым  $\varepsilon$ . Другими словами, — об осцилляторе с периодически меняющейся собственной частотой.

При  $\varepsilon = 0$  нулевое равновесие (5.11) устойчиво по Ляпунову, и оба мультипликатора  $\mu_k$  системы равны по модулю единице, — что бывает критично. В результате сколь угодно малого возмущения

<sup>6)</sup> В зависимости от того, большие или малые колебания рассматриваются.

<sup>7)</sup> Действующей непосредственно на переменную состояния  $\varphi$ .

матрицы система может «соскользнуть» как в устойчивую ситуацию, оба  $|\mu_k| < 1$ , так и в неустойчивую, — хотя бы один  $|\mu_k| > 1$ .

Данный случай — исключение. Если частота  $\omega \neq k\omega_0/2$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , — то при достаточно малом  $\varepsilon$  мультипликаторы матрицы монодромии<sup>8)</sup>  $X(\tau)$  равны по модулю единице — система остается устойчивой, возбуждение колебаний невозможно.

◀ Причина заключена в специфике допустимого возмущения. Система (5.11) в переменных  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = x_2$  имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(\omega_0^2 + \varepsilon \cos \omega t)x_1, \end{cases}$$

т. е.  $\dot{x} = A(t)x$ , где у матрицы  $A(t)$  на главной диагонали нули, — в силу чего<sup>9)</sup>  $\det X(\tau) = 1$ . По этой причине характеристическое уравнение для матрицы монодромии  $X(\tau)$ :

$$\mu^2 + 2b\mu + 1 = 0. \quad (5.12)$$

При  $\omega \neq k\omega_0/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\varepsilon = 0$ , — легко проверяется, что коэффициент  $b$  меньше единицы — таким он остается и при малом возмущении (малом  $\varepsilon$ ). Поэтому корни (5.12) комплексно сопряжены и равны по модулю единице, в силу  $\mu_1\mu_2 = 1$ . ▶ Более обстоятельно рассуждение проведено в [3].

**Феномен вибрации.** Совершенно иная ситуация возникает, если точка подвеса маятника вибрирует, т. е. колеблется с малой амплитудой и большой частотой  $\omega \gg \omega_0$ . Здесь неожиданно верхнее положение маятника становится устойчивым (см. раздел 6.6.)

## 5.4. Связанные системы

Два линейно связанных друг с другом линейных осциллятора описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}\dot{x}_1 + b_{12}\dot{x}_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ b_{12}\dot{x}_1 + b_{22}\dot{x}_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases} \quad (5.13)$$

причем, если задача имеет физический смысл, то квадратичные формы  $A$  и  $B$ ,

$$\begin{cases} A = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \\ B = b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2, \end{cases}$$

<sup>8)</sup> Оператора сдвига за период.

<sup>9)</sup> См. (3.25), а также теорему Лиувилля.

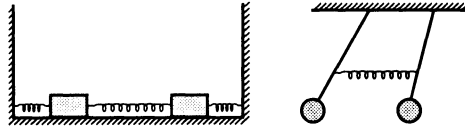


Рис. 5.1

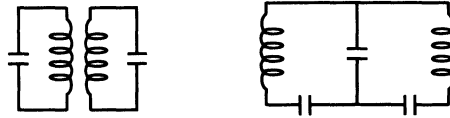


Рис. 5.2

представляют потенциальную и кинетическую энергию системы и потому — положительно определены.

Моделью движения (5.13) могут служить упруго связанные маятники (рис. 5.1) либо связанные контуры (рис. 5.2). Опять-таки, как и в случае одного маятника, в изображенных на рисунках моделях заключено все богатство содержания системы (5.13) общего вида.

Поиск решения (5.13) в форме

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t + \alpha)$$

приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - b_{11}\omega^2)c_1 + (a_{12} - b_{12}\omega^2)c_2 = 0, \\ (a_{12} - b_{12}\omega^2)c_1 + (a_{22} - b_{22}\omega^2)c_2 = 0, \end{cases}$$

совместной лишь в случае равенства нулю детерминанта,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - b_{11}\omega^2 & a_{12} - b_{12}\omega^2 \\ a_{12} - b_{12}\omega^2 & a_{22} - b_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.14)$$

что называют *секулярным*, или *вековым уравнением*.

Корни (5.14) дают две так называемые *нормальные частоты*<sup>10)</sup>  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В итоге решение (5.13) принимает вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos \omega_1(t) + \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} \cos \omega_2(t).$$

«Колебание», таким образом, может быть даже непериодическим — при несоизмеримости частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Интересно, что

<sup>10)</sup> Корни (5.14)  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  оказываются действительными и положительными.

при этом в системе присутствуют две «виртуальные» гармонические компоненты  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , не взаимодействующие друг с другом. Переменные<sup>11)</sup>  $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$  линейно выражаются через  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,

$$\xi = T x,$$

причем  $T$  «развязывает» систему (5.13), приводя ее к виду<sup>12)</sup>

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0. \end{cases}$$

За конспективным изложением здесь скрывается много интересных подробностей. Но традиционно эта тематика хорошо излагается (см. например, [10, 19]), причем общий случай,  $n$  связанных осцилляторов, оказывается даже проще<sup>13)</sup>. По этой причине мы не задерживаемся на деталях, тем более что рассматриваемая область в большей степени принадлежит теории колебаний, нежели дифференциальным уравнениям.

Остановимся кратко на одном важном аспекте. Помимо нормальных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  поведение связанных систем определяют также *парциальные частоты*<sup>14)</sup>

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{a_{11}}{b_{11}}} \quad \text{и} \quad \theta_2 = \sqrt{\frac{a_{22}}{b_{22}}}.$$

Иными словами, парциальная частота  $\theta_i$  — это собственная частота колебаний  $i$ -го маятника, если другой принудительно остановлен.

Совпадение парциальных частот порождает в системе некоторые удивительные явления, которые идеологически примыкают к понятию *внутреннего резонанса* (между разными степенями свободы). В случае, например, отклонения одного из маятников и  $\theta_1 = \theta_2$  при сколь угодно слабой связи (маятники в разных помещениях), через некоторое время происходит полная перекачка энергии — от первого ко второму. Математически — тривиальная

<sup>11)</sup> Их называют *нормальными координатами*.

<sup>12)</sup> Это то самое преобразование, которое в линейной алгебре приводит одновременно две квадратичные формы к диагональному виду.

<sup>13)</sup> Не потому, что координатная запись перестает мешать, а потому, что начинают преобладать атрибуты линейного мышления.

<sup>14)</sup> Тех и других в общем случае имеется  $n$  штук.

вещь [19], но физически (и даже философски) — удивительная. Почему перекачка не прекращается, когда энергия колебаний распределяется между маятниками поровну? Аналитически — ответ прост. Фазовая синхронизация оказывается такой, что первый маятник «даже на выдохе» успешнее раскачивает второй (толкает, когда надо, а второй — невпопад). Но для Вселенной, где так решаются линейные уравнения, это имеет принципиальное значение.

Не менее интересные явления возникают в многокомпонентных системах при изучении вынужденных колебаний (раздел 8.5).

### 5.5. Автоколебания

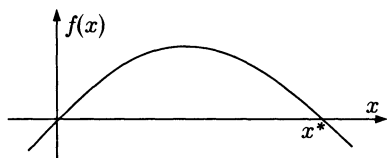


Рис. 5.3

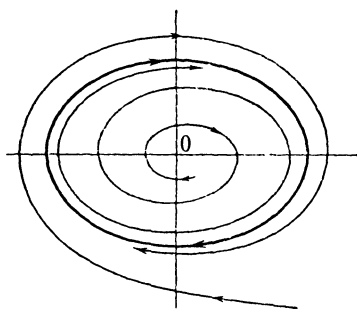


Рис. 5.4. Мягкий режим возбуждения

Одномерное движение  $\dot{x} = f(x)$  с функцией  $f(x)$ , изображенной на рис. 5.3, имеет нулевое неустойчивое равновесие и ненулевое  $x^*$  — устойчивое. Поэтому движение на плоскости

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases} \quad (5.15)$$

записанное в полярных координатах, имеет в нуле неустойчивый фокус и устойчивое периодическое решение  $\{r \equiv r^*, \varphi = t\}$  (рис. 5.4), называемое *автоколебанием*. Режим возбуждения получается *мягким* — малейшее отклонение системы от нулевого состояния покоя приводит к автоколебанию.

*Пример (5.15) исключителен в том смысле, что автоколебания в более реалистичных условиях неустойчивы по Ляпунову. При возмущении начальных данных время «оборота» в нелинейных системах обычно отличается от периода автоколебаний, — и эта разница нарастает с каждым разом. В пределе точка может двигаться по той же орбите, но с тем или иным опережением или отставанием по времени. Такое свойство называют *орбитальной устойчивостью*, которая и подразумевается, когда речь идет об автоколебаниях.*

Описанная выше ситуация характерна для диссипативных нелинейных систем с неустойчивым фокусом, область отталкивания<sup>15)</sup>  $\Omega_0$  которого ограничена, в силу диссипативности. В результате плоское движение

$$\dot{x} = f(x)$$

«выдавливает» любую траекторию из  $\Omega_0$  на границу  $\delta\Omega_0$ , которая оказывается орбитой автоколебания, поскольку решение  $x(t)$  не может уйти с  $\delta\Omega_0$  из-за непрерывной зависимости от начальных данных.

С другой стороны, в силу той же диссипативности, траектории  $x(t)$ , приходящие из бесконечности, вынуждены наматываться на некоторую орбиту  $\delta\Omega_\infty$ . При совпадении  $\delta\Omega_0 = \delta\Omega_\infty$  возникает описанная выше картина, с той лишь разницей, что орбита не обязана быть окружностью, как в примере (5.15).

Заметим, что диссипативность можно охарактеризовать как свойство полной неустойчивости «точки»  $\infty$  с областью отталкивания  $\Omega_\infty$ . В случае  $\delta\Omega_0 \neq \delta\Omega_\infty$  в «кольце» между  $\delta\Omega_0$  и  $\delta\Omega_\infty$  будут заключены еще несколько автоколебательных режимов. В рамках примера (5.15) это соответствует варианту, когда  $f(x)$  обращается в нуль несколько раз. Если при этом исключены структурно неустойчивые ситуации касания  $f(x)$  оси  $x$ , то понятно, что асимптотически устойчивые и вполне неустойчивые колебания будут чередоваться.

Если нулевой фокус устойчив, то ближайший к нему периодический режим вполне неустойчив, и только следующий — устойчив. В этом случае из состояния покоя в устойчивый режим автоколебаний система самопроизвольно не переходит — требуется «раскачка». При этом говорят о *жестком режиме возбуждения автоколебаний*.

Автоколебания на практике играют как положительную роль, так и отрицательную. Классический пример использования автоколебательного режима — генератор электромагнитных волн,

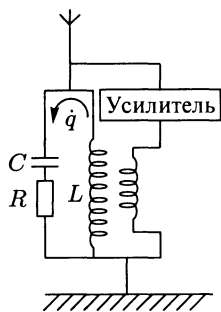
---

<sup>15)</sup> Область отталкивания неустойчивого фокуса — это область притяжения асимптотически устойчивого, который получается из первого при обращении направления движения на обратное.

рис. 5.5, где колебание в контуре с помощью взаимной индукции подается на вход усилителя и возвращается обратно после усиления. Уравнением колебаний в данном случае является

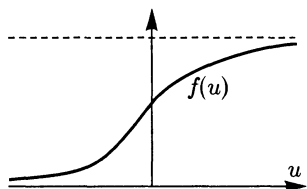
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = f(M\dot{q}),$$

где  $q$  — заряд на конденсаторе,  $\dot{q}$  — сила тока,  $M$  — коэффициент взаимной индукции,  $f(u)$  — характеристика усилителя «вход-выход» по напряжению (рис. 5.6). Хорошее усиление, разумеется, линейно, но это возможно лишь в определенных границах — далее  $f(u)$  входит в режим насыщения, что ограничивает выходную мощность. Поэтому система диссипативна — мощность автоколебаний не может превосходить поток энергии из усилителя.



**Рис. 5.5.**  
Генератор

Другой пример — флаттер-эффект, играющий разрушительную роль при движении различных конструкций в жидкости или газе. Крыло самолета, перископ подводной лодки, лопасти турбины или воздушного винта, — все это при определенном соотношении параметров способно входить в режим автоколебаний, опасный для целостности конструкции.



**Рис. 5.6.** Характеристика  
«вход-выход»

Заметим, что весь разговор в параграфе относится к системам второго порядка. При этом иногда возникает ожидание перехода к общему случаю — к системам более высокой размерности. Но автоколебания присущи именно системам второго порядка и некоторым механическим задачам. В общем случае при  $n > 2$  автоколебания — редкость.

Причины имеют топологический характер. Если область  $\Omega_0$  притяжения или отталкивания равновесия ограничена, то граница  $\delta\Omega_0$  инвариантна, поскольку движение  $\dot{x} = f(x)$  не может уйти с  $\delta\Omega_0$  из-за непрерывной зависимости от начальных данных. В случае  $n = 2$  граница  $\delta\Omega_0$  в типичных условиях оказывается контуром, двигаясь по которому система неизбежно совершает колебания.

При  $n > 2$  возможности движения по  $\delta\Omega_0$  существенно богаче — и ожидать наличия замкнутых траекторий, вообще говоря, не резон.

## 5.6. Нелинейный маятник

Изучению скалярного уравнения  $\ddot{x} = f(x)$  посвящаются целые книги, что комментировать можно по-разному. С одной стороны, Джером говорил: «Мы должны думать не о том, что может пригодиться, а о том, без чего нельзя обойтись», — и эта мысль иногда приходится кстати. С другой стороны, можно считать, что думать надо о том, о чем думается. И это соображение приходится кстати даже чаще.

Чем кончится эквилибристика с уравнением  $\ddot{x} = f(x)$  загадывать трудно. Не обязательно в самом уравнении могут обнаружиться чудеса, но «перебирание четок» наталкивает на полезные ассоциации <sup>16)</sup>.

Само исходное уравнение действительно в определенном отношении совсем просто. Повторим выкладку, которая уже делалась при выводе закона сохранения энергии (2.26). Полагая  $f(x) = -U'(x)$  и умножая  $\ddot{x} = -U'(x)$  на  $\dot{x}$ , приходим к «эквивалентному» уравнению <sup>17)</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

которое после интегрирования дает первый интеграл

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad (5.16)$$

откуда

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}, \quad (5.17)$$

что уже позволяет записать решение в квадратурах.

Казалось бы, о чем тут говорить. Маятник с нелинейной пружиной. Но природа за внешней простотой спрятала достаточно глубокие вещи.

В качестве примера рассмотрим популярное уравнение (2.9), т. е.

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad (5.18)$$

<sup>16)</sup> К чему привело упорное тасование примитивных схем в электронике — хорошо известно.

<sup>17)</sup> Умножение на производную  $\dot{x}$ , которая временами может обнуляться, порождает свою специфику. Очевидную, но требующую внимательности.

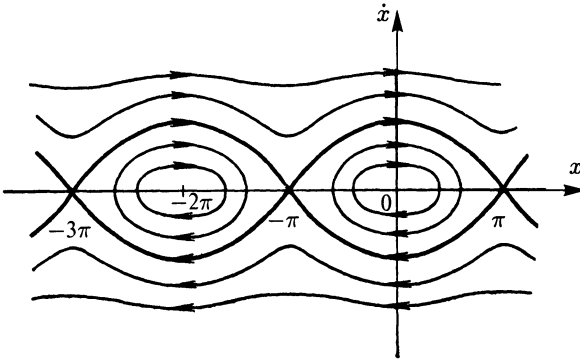


Рис. 5.7

где переменная обозначена буквой  $x$  (а не  $\varphi$ ), чтобы подчеркнуть, что специфика «угла» здесь никак не влияет на существо дела.

В данном случае потенциальная энергия  $U(x) = -\omega^2 \cos x$ , и при условии  $E \leq \omega^2$  — маятник (если это все же маятник) колеблется, а при  $E > \omega^2$  — вращается. В переменных  $\{x, \dot{x}\}$  фазовый портрет выглядит, как на рис. 5.7.

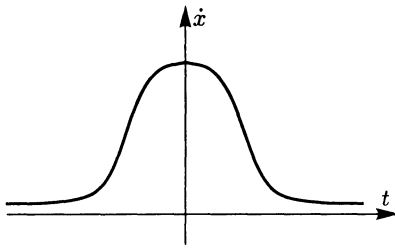


Рис. 5.8

Пограничную ситуацию  $E = \omega^2$  определяет сепаратрисное решение  $x(t)$ , которое при  $t \rightarrow \infty$  стремится к верхнему положению равновесия,  $x = \pi$ , но достичь его за конечное время не может<sup>18)</sup>. Подстановка

$$E - U(x) = \omega^2(1 + \cos x)$$

в (5.17) приводит к

$$\dot{x} = \pm 2\omega \cos \frac{x}{2},$$

что интегрируется в элементарных функциях и дает

$$x(t) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \omega t} - \pi,$$

откуда скорость на сепаратрисе

$$\dot{x} = \pm \frac{4\omega e^{\omega t}}{1 + e^{2\omega t}}$$

имеет вид *уединенной волны* (солитона, см. след. раздел) — рис. 5.8.

<sup>18)</sup> Теорема 2.3.4.

**Нелинейный резонанс.** Вынужденные колебания

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = \varepsilon \cos \omega t \quad (5.19)$$

подчиняются, естественно, другим законам, нежели линейные колебания (5.7).

Конечно, интерес представляют точные решения. Но жонглирование формулами иногда мешает открыть глаза, чтобы увидеть простую и ясную картину. Уравнение (5.19) описывает колебания обыкновенного маятника (качелей), физические представления о движении которого в некоторых аспектах перевешивают аналитику. Во-первых, очевидно, что период (частота) колебаний зависит от амплитуды (размаха)<sup>19)</sup>. Во-вторых, понятно, что совпадение частоты  $\omega$  с *текущей* частотой собственных колебаний маятника порождает *нелинейный резонанс*<sup>20)</sup>, очень похожий (в течение короткого промежутка времени) на обычный. Из-за нелинейности резонанс прекращается сам по себе, поскольку эффективная раскачка увеличивает амплитуду, а значит, уменьшает частоту собственных колебаний.

При диссипации энергии,

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega^2 \sin x = \varepsilon \cos \omega t,$$

ситуация меняется в том смысле, что трение, уменьшая амплитуду, толкает систему обратно к резонансу. В результате могут возникать циклические изменения интенсивности колебаний. Период этих циклов оказывается зависим от соотношения параметров и при увеличении  $\varepsilon$  испытывает различные изменения (бифуркационные удвоения периода с переходом в пределе к хаотическому поведению — см. главу 7).

Рассмотрение популярного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega^2 x + \gamma x^3 = \varepsilon \cos \omega t$$

с трением ( $\mu > 0$ ) или без ( $\mu = 0$ ) — обнаруживает примерно ту же картину. Физически это вполне ожидаемо, поскольку ясно, что характер колебаний обычного нелинейного маятника (5.19) определяется впадиной между двумя горбами

<sup>19)</sup> Если  $T$  — период,  $A$  — амплитуда, то  $T(A)$  монотонно возрастает, причем до бесконечности, когда  $A$  доходит до верхней точки.

<sup>20)</sup> Понятно ведь, что при попадании в такт — раскачивание качелей эффективно независимо от амплитуды.

синуса. Сам синус ни при чем. Картина принципиально не изменится, если вместо синуса взять похожую функцию.

Разумеется, поведение уравнения Дуффинга и (5.19) будут сильно отличаться друг от друга, если движение уйдет в область высоких потенциальных энергий.

## 5.7. Волны и солитоны

В задачах распространения волн классическим является *телеграфное уравнение*

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \quad (5.20)$$

описывающее *линейные волны* в различных средах (струны, звук, свет)<sup>21)</sup>.

Варианты описания *нелинейных волн* более разнообразны. Одним из эталонов здесь служит знаменитое *уравнение Кортвега—де Фриза (КдФ-уравнение)*

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Другой удобный эталон — *уравнение синус-Гордона*

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0.$$

◀ В двух последних случаях могут возникать *уединенные волны (солитоны)*, о которых слишком много говорилось, чтобы здесь повторять. Но если кто, по тем или иным причинам, прошел мимо — стоит иметь в виду, что история открытия солитонов, равно как и само явление, заслуживает внимания. Дело ведь не в том, что в ряду многочисленных находок появилась еще одна. Уединенные волны разрушили «линейное мировоззрение». Выяснилось, что в природе могут существовать немислимые по старым понятиям феномены. Особенно впечатляющим оказалось взаимодействие солитонов, которое напоминало взаимодействие частиц и подталкивало к мысли, что материя состоит из солитонов.

<sup>21)</sup> В многомерном случае производная

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

заменяется на  $\nabla^2 u$ .

Это породило значительный всплеск эмоций у философски настроенной части населения, поскольку в понимании устройства мира вариант Библии не всех устраивает. ►

Вернемся, однако, к ЧП-уравнениям. С отдаленных позиций они кажутся иногда чересчур загадочными. Чтобы избавиться от этого наваждения, полезно взглянуть хотя бы один раз на ситуацию изнутри и понять, что речь идет о совсем простых вещах. По крайней мере, — не более сложных, чем  $m\ddot{x} = f$ . Вот как выглядит вывод телеграфного уравнения.

◀ Пусть продольное колебание распространяется вдоль стержня, параллельного оси  $x$  (рис. 5.9),  $u(x, t)$  обозначает степень сжатия вещества<sup>22)</sup> в момент  $t$  в сечении  $x$ , имеющем площадь  $S$ ,  $\Delta V = S\Delta x$  — объем между сечениями  $x$  и  $x + \Delta x$ . Сила, действующая в сечении  $x$  на объем  $\Delta V$ , равна

$$kS \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

где коэффициент  $k$  определяется физикой задачи. Результирующей силой, действующей на  $\Delta V$ , будет

$$F = kS \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) = kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x,$$

и тогда закон Ньютона

$$m \cdot u_{tt} = F \quad (m = \rho S \Delta x)$$

— а речь идет о механических микродвижениях масс, составляющих стержень — дает волновое уравнение (5.20), т. е.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

где  $c = \sqrt{k/\rho}$  — скорость волны,  $u_{tt}$  — ускорение<sup>23)</sup>. ►

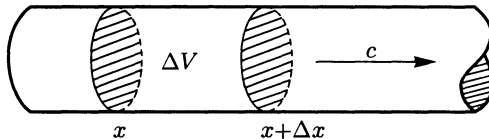


Рис. 5.9. Волна сжатия

Все приведенные уравнения имеют решения вида

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (5.21)$$

<sup>22)</sup> Из которого состоит стержень.

<sup>23)</sup> Бесконечно малой массы, заключенной в бесконечно малом объеме  $\Delta V$ .

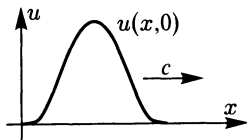


Рис. 5.10. Волна

представляющие собой плоские волны. Геометрически это выглядит так. Если в нулевой момент функция  $u(x, 0) = \varphi(x)$  имеет график, изображенный на рис. 5.10, то с течением времени этот график движется вправо со скоростью  $c$ , не меняя формы.

Подстановка (5.21) в (5.20) дает тождество. Это говорит о том, что телеграфному уравнению удовлетворяет любая функция (5.21). Для окончательного решения задачи надо учитывать те или иные краевые условия, которые у нас остаются за кадром.

Подстановка (5.21) в уравнения Кортвега—де Фриза и синус-Гордона приводит, соответственно, к обыкновенным уравнениям<sup>24)</sup>

$$-c\varphi' - 6\varphi\varphi' + \varphi''' = 0, \quad (1 - c^2)\varphi'' + \sin \varphi = 0, \quad (5.22)$$

которые приходится решать, и они, хотя и с техническими трудностями, решаются до конца.

Идеологически здесь все просто, и не выходит за рамки закона сохранения энергии, что для «синус-Гордона» сразу очевидно, а для «КдФ» — после предварительного интегрирования (5.22), приводящего к уравнению второго порядка

$$-c\varphi - 3\varphi^2 + \varphi'' = c_1,$$

умножение которого на  $2\varphi'$  и повторное интегрирование дает в итоге

$$(\varphi')^2 = 2\varphi^3 + c\varphi^2 + c_1\varphi + c_2.$$

Характер решения последнего уравнения зависит от расположения корней полинома, стоящего в правой части. На анализ различных возможностей обычно уходит много типографской краски. Но главный интерес представляет сепаратрисное решение, определяемое заданием краевых условий на бесконечности

$$\varphi, \varphi', \varphi'' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (5.23)$$

Условия (5.23) из всех возможностей выделяют ту, в которой у графика полинома три действительных корня и есть лунка — такая же, как у синуса между двумя горбами. На примере второго уравнения (5.22), т. е. по сути — колебания нелинейного маятника (5.18), — ситуация совершенно прозрачна. Запас энергии у маятника таков, что добраться до верхней точки он может только

<sup>24)</sup> Где штрихи обозначают дифференцирование функции  $\varphi$  по аргументу  $\tau = x - ct$ .

в пределе (оказывается — за бесконечное время). Это и порождает солитонное решение, изображенное на рис. 5.7. Ситуация с КдФ-уравнением принципиально не отличается от этой. Лунка другая, но суть та же (рис. 5.11).

Таким образом, «нужные» решения выделяются из возможных граничными условиями типа (5.23). То, что они оказываются сепаратрисными<sup>25)</sup>, — это уже следствие.

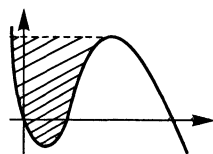


Рис. 5.11

В существование уединенной волны долгое время не верили, почему, собственно, КдФ-уравнение и пребывало в забвении чуть ли не целый век. Потом сразу все спохватились, поскольку стало ясно, что явление все-таки возможно и даже широко распространено.

Прежние сомнения опирались на избыток знаний. Дело в том, что линейное уравнение (5.20) описывает распространение волн в идеализированных условиях, в которых солитоны тоже возможны<sup>26)</sup>. Но в реальной среде всегда есть дисперсия — колебания разной частоты распространяются с разной скоростью. Поэтому любое возмущение довольно быстро распадается на гармоники. Для нелинейных волн было естественно ожидать того же эффекта — может быть, в другой аранжировке.

Теперь, конечно, любой теоретик объяснит, что в нелинейной среде скорость распространения еще зависит от амплитуды — и одна неприятность в точности компенсирует другую. Но это уже, так или иначе, разговор с натяжкой, ибо об амплитуде чего речь — не вполне ясно. Роль гармоник уже никакая. Скорость действительно зависит от амплитуды, но чего? — Солитона, сигнала совершенно определенной формы, которая «привязана» к скорости распространения. И поэтому любое возмущение довольно быстро распадается на... солитоны, которые начинают играть роль гармоник. Если один солитон догоняет другой, то на какое-то время они складываются, но «сумма» не удовлетворяет КдФ-уравнению и вынуждена раздвоиться на те же слагаемые. В результате один солитон проходит сквозь другой, почти не меняя формы.

Математическое подкрепление картины опирается на сведение задачи путем нелинейной замены к задаче Штурма—Лиувилля  $Lu = \lambda u$  с неким линейным дифференциальным оператором  $L$  и нулевыми условиями на бесконечности. Возникает спектр «энергий» и набор собственных функций (солитонов) — при этом говорят о бесконечной серии первых интегралов, или законов сохранения (что эффективно отпугивает начинающих).

Задним числом, понятно, легко все это объяснять. Но было время, когда что-либо подобное казалось невысказанным. За историческими и математическими подробностями можно обратиться к [18].

<sup>25)</sup> Пограничными между разными типами поведения.

<sup>26)</sup> С точки зрения (5.20) все возможно, поскольку любая функция  $\varphi(x - ct)$  — удовлетворяет уравнению.

## Глава 6

### **Возмущения и бифуркации**

#### **6.1. Примеры и предостережения**

Теоремы о непрерывной зависимости решений системы

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon)$$

от параметра  $\varepsilon$  — настраивают иногда на благодушный лад. При этом упускается из виду, что непрерывность  $x(t, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$  на конечном промежутке по  $t$  отнюдь не мешает кардинальной перестройке свойств системы.

Простейший пример: скалярное уравнение  $\dot{x} = \varepsilon x$ . При  $\varepsilon = 0$  все точки стоят на месте, при  $\varepsilon < 0$  — нулевое равновесие асимптотически устойчиво, при  $\varepsilon > 0$  — траектории уходят в бесконечность (как говорят, система идет вразнос). Тем не менее  $x(t, \varepsilon)$  при достаточно малом  $\varepsilon \geq 0$  сколь угодно близко к  $x(t, 0)$ .

*Пример Бореля* обескураживает сильнее. Маятник на пружине имеет интеграл энергии

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = E$$

и периодические (синусоидальные) решения. Сколь угодно слабая подкачка энергии  $\varepsilon t$  меняет уравнение движения на

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = E + \varepsilon t,$$

что после дифференцирования переходит в

$$(m\ddot{x} + 2kx)\dot{x} = \varepsilon. \quad (6.1)$$

Последнее уравнение исключает возможность  $\dot{x} = 0$  в силу  $\varepsilon > 0$ . Но тогда решение  $x(t)$  не может иметь ни максимума, ни минимума. Это означает, что не только колебания в системе пропали, но не осталось ничего похожего на колебательный процесс с растущей амплитудой. Решения стали возможны только монотонные, колебания испарились в мгновение ока.

Такие примеры, конечно, взбадривают, но их нельзя оставлять в ранге чудес. Элементарное переосмысливание здесь все ставит на свои места.

Уравнение (6.1) эквивалентно

$$m\ddot{x} + 2kx = \frac{\varepsilon}{\dot{x}},$$

а это уже совсем другая «история». Производная  $\dot{x}$  ушла в знаменатель, и теперь даже о непрерывной зависимости от параметра нельзя говорить.

Делая еще шаг назад (к причинам), остается признать, что равномерная энергетическая подкачка  $\varepsilon t$  осциллятора без качественных катаклизмов в системе — невозможна.

## 6.2. Бифуркации

*Бифуркацией* (от лат. bifurcus — раздвоенный) называют качественную перестройку системы

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon)$$

при переходе параметра  $\varepsilon$  через критическое значение  $\varepsilon_0$ . Вот несколько примеров.

В случае

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3$$

критическим (бифуркационным) значением является  $\varepsilon = 0$ . При  $\varepsilon \leq 0$  система имеет единственное нулевое равновесие, которое асимптотически устойчиво. При сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  это равновесие становится неустойчивым, а в его окрестности появляется два других, асимптотически устойчивых равновесия  $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ .

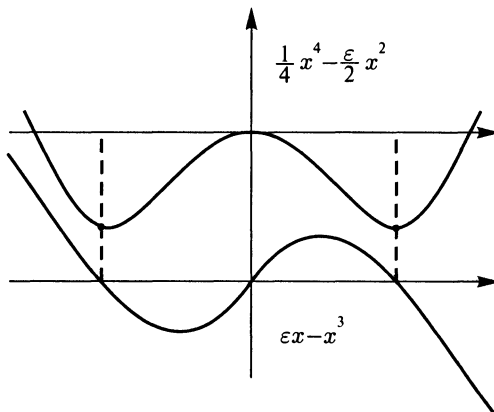


Рис. 6.1

В терминах потенциалов<sup>1)</sup> приведенный пример соответствует ситуации возмущения потенциала  $U(x) = \frac{1}{4}x^4$  добавкой  $-\frac{\epsilon}{2}x^2$  (рис. 6.1). Исходный нулевой минимум  $U(x)$  при  $\epsilon > 0$  превращается в локальный максимум, по бокам которого возникают локальные минимумы.

Большинство изучаемых бифуркаций имеет подобный локальный характер, связанный с изменением свойств равновесия и рождением или гибелью в его окрестности других равновесных точек.

Принципиально другой пример дает система

$$\dot{x} = \epsilon x^2 - x$$

с асимптотически устойчивым равновесием при любом  $\epsilon$ . Другими словами, с равновесием  $x = 0$  локально ничего «бифуркационного» не происходит. Но значение  $\epsilon = 0$  критично для системы в целом. В его окрестности рождается новое неустойчивое положение равновесия  $x = \epsilon^{-1}$  (приходящее из бесконечности). Более того, решения, начинающиеся в точках  $x(0) > \epsilon^{-1} > 0$ , оказываются непродолжимы вправо; в случае  $x(0) < \epsilon^{-1} < 0$  — влево.

В системах большей размерности возможности качественных изменений, разумеется, шире. В основном это появление или исчезновение колебаний и их характеристик, не говоря пока об аттракторах.

На практике часто встречается *бифуркация Андронова—Хопфа*, в которой фокус теряет устойчивость, и при этом рождается асимптотически устойчивый цикл. Такие системы были описаны в разделе 5.5. В частности, если в правой части системы уравнений (5.15) положить  $f(r) = \epsilon r - r^3$ , то получается как раз такая бифуркация при прохождении  $\epsilon$  через нуль. Это, конечно, «рояль в кустах» — зато максимально просто.

Более естественный пример — *уравнение Ван-дер-Поля*,

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (6.2)$$

или в записи для плоскости,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \epsilon(1 - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Линейное приближение (6.3) в окрестности  $x^* = 0$  определяется матрицей  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \epsilon \end{bmatrix}$ , откуда очевидна устойчивость нулевого равновесия при  $\epsilon \leq 0$  и неустойчивость при  $\epsilon > 0$ . Кроме того, при  $\epsilon > 0$  система диссипативна, хотя это

<sup>1)</sup> Когда  $f(x, \epsilon) = -U'(x, \epsilon)$ .

не так легко доказать аккуратно. С позиций удаленного наблюдателя все ясно, поскольку при больших по норме  $x$  во втором уравнении (6.3) начинает преобладать нелинейный член, «толкающий» систему к нулю — но это эвристика. При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  результат обеспечивает усреднение (см. раздел 6.6). В итоге получается бифуркация Андронова—Хопфа.

### 6.3. Катастрофы

В простейшей ситуации

$$\dot{x} = -U'(x, \varepsilon),$$

которая уже рассматривалась, казалось бы, ничего неожиданного быть не может. Локальные минимумы потенциала  $U(x, \varepsilon)$  — устойчивые равновесия, остальные критические значения — неустойчивые. Деформация графика  $U(x, \varepsilon)$  при изменении  $\varepsilon$  наглядно показывает, что происходит в системе.

Тем не менее, если параметр  $\varepsilon$  векторный, — возможны интересные явления. Рассмотрим, например, потенциал

$$U(x, \lambda) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda_2x^2 + \lambda_1x,$$

критические точки которого определяются уравнением

$$U'(x, \lambda) = x^3 + \lambda_2x + \lambda_1 = 0.$$

Это уравнение *катастрофы сборки*.

При различных параметрах  $\lambda_1, \lambda_2$  кубическое уравнение имеет или один действительный корень, или три. Если построить график «корень уравнения как функция параметров», — получается поверхность, изображенная на рис. 6.2. Можно ли эту поверхность считать графиком многозначной функции  $x(\lambda_1, \lambda_2)$ ? Вообще говоря, можно, но если за кадром стоит уравнение

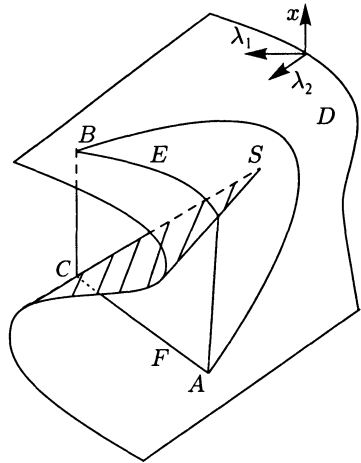


Рис. 6.2. Катастрофа сборки

$$\dot{x} = -U'(x, \lambda), \quad (6.4)$$

возникает «второе дно».

Система (6.4), находящаяся в равновесии — в локальном минимуме потенциала, при плавном изменении параметров движется вслед за дрейфующим минимумом. Конечно, если не происходит ничего катастрофического.

Например, если система в начальный момент находится в точке  $A$  (рис. 6.2), и параметр  $\lambda_2$  плавно увеличивается, то состояние системы меняется вдоль  $ACB$ . В точке  $C$ , однако, вынужденно происходит скачок (бифуркация)<sup>2)</sup>. При возвращении  $\lambda_2$  в исходное положение — состояние системы меняется по другому пути,  $BEF$ , и система попадает не в исходное состояние  $A$ , а в другое —  $F$ . Получается своеобразная петля гистерезиса. Но при специальной регулировке параметров  $\lambda_1, \lambda_2$  возможен плавный переход из  $A$  в  $B$  вдоль  $ADB$  — с возвратом в состояние  $A$ .

Кубическое уравнение задает канонический вид катастрофы сборки, к которому с помощью нелинейных замен координат сводятся различные другие уравнения. По первому впечатлению, различных типов особенностей может быть довольно много. Однако оказывается, что в типичных, *структурно устойчивых*<sup>3)</sup>, случаях при наличии двух параметров могут встречаться лишь два типа особенностей: катастрофа сборки и катастрофа складки. При трех и более параметрах различных особенностей несколько больше, но и там дается их полная классификация [25].

## 6.4. Структурная устойчивость

При изучении любых математических моделей принципиальную роль играет вопрос о том, насколько выводы критичны по отношению к исходным данным. Как сильно «ответ» зависит от условий задачи? Не могут ли малейшие возмущения кардинально изменить поведение модели? Если да, — то имеет ли смысл анализ?

Там, где модель в качественном отношении нечувствительна к малым возмущениям, — говорят о ее *структурной устойчивости*, или о ее *грубости*.

Если матрица  $A$  гурвицева, то движение  $\dot{x} = Ax$  качественно не меняется при малых возмущениях  $A$ . Фазовые портреты  $\dot{x} = Ax$  и  $\dot{x} = (A + \Delta A)x$  приблизительно одинаковы. Траектории приходят из бесконечности и втекают

<sup>2)</sup> Система в результате переходного процесса ищет и находит другое положение минимума.

<sup>3)</sup> См. след. раздел.

в нулевое равновесие. Асимптотическую устойчивость нуля не нарушают и нелинейные добавки типа  $\varepsilon x^2$ , но они могут изменить качественную картину при больших по норме  $x$ . Если же разрешить возмущения  $\sim \sqrt{|x|}$ , то устойчивость  $x^* = 0$  может нарушиться, зато при больших по норме  $x$  ничего принципиально не изменится.

Если  $A$  имеет собственные значения с нулевой действительной частью, то ситуация иная — малые возмущения могут существенно изменить фазовый портрет. Но и здесь, кстати, при определенных довольно жестких ограничениях на класс допустимых возмущений может обойтись без катаклизмов, что уже встречалось при анализе параметрического резонанса (раздел 5.3).

Наличие структурной устойчивости — как показывают примеры — зависит от того, чего мы хотим и что допускаем. Иными словами, для точного определения каждый раз необходимо указать, сохранение каких свойств требуется и какие возмущения разрешены.

Грубые ли уравнения механики? Без уточнения деталей вопрос не имеет ответа. Если кому-то угодно разрешить возмущения, содержащие третьи производные, то классическая механика становится бессмысленной. С другой стороны, обосновать запрет — не так легко. Решающий аргумент, конечно, критерий практики. Рецепт, дескать, работает — и потому правилен. Однако неправильные теории нередко дают верные результаты.

Проблема определения структурной устойчивости, понятно, в своей основе не математическая. Физическое чутье, здравый смысл, эвристика — здесь главные точки опоры и, одновременно, источники произвола толкования. Но до глубин понимания доходит, когда речь идет о применимости моделей на практике. Скажем, теорема 4.4.2 об устойчивости по линейному приближению — это теорема о структурной устойчивости. С формальной точки зрения — совершенно определенный и строго очерченный результат. Совсем другой вопрос, отвечает ли такое понимание грубости модели тем или иным практическим задачам. В одном случае — да, в другом, — может быть, нет.

Хотя в данном контексте структурно неустойчивые модели выглядят изгоями, их попадание в поле зрения нормального математического исследования — вещь естественная и часто обязательная. Бифуркационные значения параметра, например, это как раз те значения  $\varepsilon$ , при которых система структурно неустойчива в любом разумном смысле. Но именно такие ситуации, когда параметр системы проходит через критическое значение, широко распространены. Их приходится изучать.

Интересно, что при этом возникает вопрос о структурной устойчивости следующего порядка. Скажем, помимо катастрофы сборки существует большая масса весьма хитрых поверхностей, изучение которых расплыло бы исследование по бесконечной территории. Теория катастроф тогда задается естественным вопросом, какие поверхности структурно устойчивы по отношению к малым возмущениям потенциала. Классификация резко упрощается [25].

Одна из стандартных схем рассмотрения проблемы структурной устойчивости для уравнения

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.5)$$

выглядит так (вопрос освещается в бегло-информационном ключе).

При возмущении

$$\dot{x} = f(x) + \xi(x) \quad (6.6)$$

система (6.5) считается структурно устойчивой (грубой), если по любому  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что при возмущении  $\xi(x)$ , удовлетворяющем условию

$$\sum_i \left\{ |\xi_i| + \sum_j \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| \right\} < \delta,$$

существует гомеоморфизм<sup>4)</sup> фазового пространства, который сдвигает точки не более, чем на  $\varepsilon$ , и переводит траектории невозмущенной системы (6.5) в траектории возмущенной системы.

Требование структурной устойчивости для систем на плоскости существенно упрощает возможные структуры разбиения фазового пространства, так что все они становятся обозримыми, и каждая из них определяется конечным числом особых фазовых траекторий. Для структурной устойчивости систем на плоскости необходимым и достаточным оказывается выполнение следующих условий:

- *имеется конечное число положений равновесия, которые все являются простыми и среди которых нет центра;*
- *отсутствуют сепаратрисы, соединяющие два седла;*
- *имеется конечное число замкнутых траекторий, каждая из которых представляет собой предельный цикл, устойчивый или неустойчивый одновременно с обеих сторон.*

При малой размерности фазового пространства ( $n = 1, 2$ ) структурно устойчивые системы образуют всюду плотное множество. Часто упоминается негативный результат Смейла о том, что при  $n > 2$  почти все системы (6.5) структурно неустойчивы.

При сужении поля зрения до так называемых систем Морса—Смейла ситуация нормализуется — почти все системы оказываются структурно устойчивы при любом  $n$ .

<sup>4)</sup> Взаимно однозначное непрерывное в обе стороны отображение.

## 6.5. Парадокс Циглера

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 3\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + b(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + (2 - P)\varphi_1 + (P - 1)\varphi_2 = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1) - \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

описывает движение шарнирно соединенных стержней при наличии вязкого трения, характеризуемого коэффициентом  $b$ . За подробностями, несущественными в данном контексте, можно обратиться к [23].

Для определения в случае  $b = 0$  критической (бифуркационной) нагрузки  $P$ , при которой равновесие системы (6.7) теряет устойчивость, есть два пути. Можно сразу положить  $b = 0$ , и тогда получится, что равновесие устойчиво лишь при условии

$$0 \leq P \leq P^* \approx 2,1.$$

Более трудоемкий вариант: определяется критическая нагрузка как функция параметра  $b$ , затем делается переход к пределу при  $b \rightarrow 0$ . В результате получается  $P^* \approx 1,5$ .

Таким образом, разные способы решения задачи приводят к разным ответам, — что и составляет *парадокс Циглера*.

По сути ничего удивительного здесь нет, поскольку устойчивость по Ляпунову не является структурно устойчивым свойством. Поэтому множество «допустимых»  $P$  не обязано плавно зависеть от  $b$ , что и служит источником расхождения.

Правильный ответ, пожалуй,  $P^* \approx 1,5$ . В диапазоне

$$1,5 < P < 2,1$$

устойчива модель (6.7), но не реальная система. Наличие сколь угодно малого трения ( $b > 0$ ) превращает систему в неустойчивую (!) — и *этот парадокс гораздо сильнее* первого.

Дело в том, что трение обычно представляется благом с точки зрения устойчивости. В том смысле, что если уж система устойчива в отсутствие трения ( $b = 0$ ), то появление вязкого трения ( $b > 0$ ) лишь раздвигает границы устойчивости. Данный пример показывает, что это не всегда так.

Интересно, что второй парадокс был бы совершенно незаметен, если бы задача рассматривалась в стерильном виде — без физической интерпретации. Увеличение каких-то элементов матрицы приводит к потере устойчивости — ну и что?

## 6.6. Методы усреднения

Модели с параметром типа  $\dot{x} = f(x, t, \varepsilon)$  изучаются в теории возмущений с другой стороны. Никаких бифуркационных изменений, фазовые портреты меняются плавно, — однако требуется проследить за количественными изменениями решений при малых изменениях  $\varepsilon$ .

Один из технических приемов опирается на разложение правой части по степеням малого параметра  $\varepsilon$ ,

$$f(x, t, \varepsilon) = f_0(x, t) + \varepsilon f_1(x, t) + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \dots,$$

и представление решения в аналогичном виде,

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (6.8)$$

Задача тем самым переводится в русло последовательного уточнения решений.

Например, подстановка (6.8) в

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \quad x(0) = 1$$

для определения  $x_0(t)$  приводит к  $\dot{x}_0 = x_0$  с решением  $x_0(t) = e^t$ . Для определения  $x_1(t)$  — с учетом  $x_0(t) = e^t$  — к задаче

$$\dot{x}_1 = x_1 + e^{2t}, \quad x_1(0) = 1$$

с решением  $x_1(t) = e^{2t} - e^t$ . И так далее — вплоть до бесконечности. На практике, конечно, процесс обрывается на втором-третьем шаге.

Что касается обоснования, это болезненный вопрос в теории возмущений. Костяк теории составляют аккуратные результаты, но в реальности приходится делать шаг влево или вправо, — и становится неясно, сходятся ряды или нет. Физикам в этом отношении легче — им чаще везет.

Особое место в ряду таких инструментов занимают методы усреднения, которые уже на первой итерации дают иногда желаемый результат. Вот как это выглядит «издалека».

Система

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) \quad (6.9)$$

называется *стандартной*. Уравнение

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon) \quad (6.10)$$

приводится к виду (6.9) следующим образом. Пусть  $x_0(t, c)$  обозначает решение (6.10) при  $\varepsilon = 0$ . Тогда метод вариации произвольных констант  $c$  после подстановки  $x_0(t, c)$  в исходное уравнение и отбрасывания членов  $o(\varepsilon)$  приводит к

$$\dot{c} = \varepsilon \left( \frac{\partial x_0}{\partial c} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial f(x_0, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right],$$

что укладывается в рамки (6.9).

Теория усреднения заменяет (6.9) автономной системой

$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x) \tag{6.11}$$

с усредненной по времени правой частью,

$$f_0(x) = \langle f(x, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt,$$

и позволяет судить о движении (6.9) при малых  $\varepsilon$ , решая (6.11). Вопрос лишь в том — на каких промежутках времени?

Если порядка единицы<sup>5)</sup> (константы), то этого мало. Движение (6.9) происходит медленно, и если речь идет о  $t \sim 1$ , — изображающая точка за это время успевает сместиться всего лишь на расстояние  $\sim \varepsilon$ , и главные события не успевают разыгаться. Поэтому теория усреднения ориентируется на времена  $\sim \varepsilon^{-1}$ .

В описанной выше ситуации положительный результат достигается, если среднее  $\langle f(x, t) \rangle$  существует и все фигурирующие функции липшицевы. Точнее говоря, в этом случае по любым  $\eta$  и  $M$  можно указать такое  $\varepsilon_0$ , что для  $\varepsilon < \varepsilon_0$  и положительных  $t < M\varepsilon^{-1}$  будет

$$\|x(t) - x_0(t)\| < \eta,$$

где  $x(t)$  — решение (6.11), а  $x_0(t)$  — (6.9).

Доказательство подобного сорта результатов технически довольно громоздко. Обилие деталей вообще характерно для теории возмущений, почему ее излагают обычно в двух крайних вариантах. Либо совсем по верхам — и здесь выбран именно этот путь, либо с такой перегрузкой подробностями, что для

<sup>5)</sup> Что характерно для теорем о непрерывной зависимости от параметра.

чтения нужны очень серьезные мотивы. Компромиссный вариант можно найти у Арнольда [4], см. также [27].

Несмотря на то, что методы теории возмущений — не очень легкий в обращении инструмент, обойтись без них при рассмотрении многих задач практически невозможно. Поэтому здесь желательно наличие в арсенале, по крайней мере, общих представлений. Хороши, конечно, и два-три самых элементарных результата, но предпочтительнее общая картина, канва, стиль.

Очень важный аспект в теории усреднения — разделение движений на быстрые и медленные. В записи

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(x, y, t), \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases} \quad (6.12)$$

все ясно. По переменным  $y$  система движется быстро, по переменным  $x$  — медленно. По  $x$  система дрейфует, по  $y$  — вибрирует (дрожит). Естественно ожидать, что при изучении медленных движений — по быстрым можно усреднить, но не наоборот.

При расчете, скажем, влияния Луны на движение Земли вокруг Солнца — массу Луны можно размазать по ее орбите<sup>6)</sup>, и эффект такого усреднения, надо полагать, даст приемлемые результаты. Если же подобный фокус проделать с орбитой Земли, то это вообще перечеркнет возможность прогноза движения Луны.

Разумеется, природа не заботится о том, чтобы поставлять дифференциальные уравнения в удобном виде типа (6.12). На практике приходится каждый раз преодолевать массу трудностей, преобразуя уравнения и классифицируя переменные. Физики делают это довольно легко, поскольку им помогает физическое чутье. В математически стерильных ситуациях действовать намного сложнее. Но в том и другом случае этому все равно приходится учиться, решая задачи.

Чтобы продемонстрировать теорию усреднения в действии, вернемся к задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса (раздел 5.3). Не ограничиваясь анализом малых колебаний, вместо (5.11) рассмотрим уравнение

$$\ddot{\varphi} + (\omega_0^2 + \varepsilon\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi = 0 \quad (6.13)$$

с малым  $\varepsilon$  и  $\omega \gg \omega_0$ .

<sup>6)</sup> Заменяв Луну гравитационным кольцом.

В соответствии с идеологией усреднения представим решение  $\varphi(t)$  (6.13) в виде суммы  $\varphi = \psi + \xi$ , где  $\psi(t)$  — медленная составляющая движения (колебания маятника, обусловленные собственной частотой  $\omega_0$ ), а  $\xi(t)$  — быстрая (вынужденная осцилляция с частотой  $\omega$ ).

Подстановка  $\varphi = \psi + \xi$  в (6.13), с учетом

$$\sin(\psi + \xi) = \sin \psi + \xi \cos \psi + o(\xi) \quad (\varepsilon \omega^2 \ll 1),$$

приводит к <sup>7)</sup>

$$\ddot{\psi} + \ddot{\xi} = -\omega_0^2 \sin \psi - \varepsilon \xi \omega^2 \cos \psi \cos \omega t - \xi \omega_0^2 \cos \psi - \varepsilon \omega^2 \sin \psi \cos \omega t, \quad (6.14)$$

где

$$\ddot{\xi} + \xi \omega_0^2 \cos \psi = -\varepsilon \omega^2 \sin \psi \cos \omega t \quad (6.15)$$

описывает вынужденные колебания маятника с частотой  $\omega$  (из-за вибрации подвеса).

В силу  $\omega \gg \omega_0$  формулы (5.9) дают

$$\xi \sim \varepsilon \sin \psi \cos \omega t,$$

подстановка чего, вместе с (6.15), в (6.14) — с последующим усреднением по времени — приводит к уравнению медленного движения

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \sin \psi + \delta \sin \psi \cos \psi, \quad (6.16)$$

где опосредованный коэффициент  $\delta > 0$  мал, в силу малости  $\varepsilon$ .

Интегрирование по  $\psi$  правой части (6.16) с обратным знаком — дает усредненную потенциальную энергию колебаний маятника,

$$U(\psi) \sim -\cos \psi + \frac{\delta}{2} \sin^2 \psi,$$

которая имеет минимум как при  $\psi = 0$ , так и при  $\psi = \pi$ . Получается, что верхнее положение маятника тоже устойчиво.

Конечно, все это напоминает историю, рассказанную Даниилом Даниным в одной из своих книг. Экспериментатор звонит физику-теоретику: «Эксперимент показал, что  $A > B$ ». «Это потому-то», — объясняет теоретик. «Прости, перепутал, — спохватывается первый, —  $A < B$ ». «Это тем более понятно», — заявляет второй, и дает не менее убедительное объяснение.

Людьми, далекими от физики, история воспринимается как анекдот, хотя это сама жизнь. В каждой задаче за кадром стоят противоборствующие факторы. Определить, что перевешивает, —

<sup>7)</sup> С точностью до «о малого».

особенно в случае приближительного «равенства сил», — бывает нелегко, и заниматься этим на глазах у широкой публики — дело неблагодарное. Проще сконцентрироваться на одной стороне явления, лукаво не замечая вторую.

Еще один пример — уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

В переменных «действие–угол»

$$I = \frac{x^2 + \dot{x}^2}{2}, \quad \varphi = \arg(x + i\dot{x})$$

невозмущенное движение  $\ddot{x} + x = 0$  имеет вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Усреднение возмущенного движения

$$\dot{I} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}^2 = 2\varepsilon I(1 - 2I \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi$$

по фазе приводит к уравнению

$$\dot{I} = \frac{\varepsilon}{2} I(2 - I),$$

у которого неустойчиво нулевое положение равновесия, и асимптотически устойчиво — положение  $I = 2$ .

Отсюда с некоторой долей натяжки можно сделать вывод о существовании у исходного возмущенного уравнения автоколебательного режима, см. [4] и раздел 6.2.

## Глава 7

### **Аттракторы и хаос**

Энтузиазм по поводу детерминированного хаоса чем-то напоминает эпопею с теорией катастроф, где ожидание чудес рухнуло, как финансовая пирамида. Чем на этот раз закончится ажиотаж, трудно сказать, но симптомы те же.

Наблюдаемый бум в значительной мере определяется острой проблемой. Вопрос-то по существу Космический. Откуда в этом мире берется случайность — до сих пор не ясно. Поэтому любая попытка вывести хаотическое (случайное) поведение из детерминированного — воспринимается с энтузиазмом. Нынешний всплеск исследований и эмоций связан с открытием странных аттракторов, фракталов и некоторыми продвижениями в области кинетики и турбулентности. Соответствующие успехи в значительной мере обязаны повышению эффективности компьютеров, что, собственно, и определило поток новых результатов, — которые пока не устоялись, и чаще рассматриваются в гуманитарно повествовательном ракурсе, которому в главе отдается предпочтение.

#### **7.1. Эргодичность и перемешивание**

Все, конечно, начиналось со статистической физики, где эталоном для размышлений был газ, заключенный в ограниченный объем. Этакий трехмерный бильярд с молекулами в роли шаров.

Прямолинейные попытки вывести случайное поведение на классической базе не удавались. Основная беда была в обратимости времени. Уравнения Ньютона

$$m_k \ddot{x}_k + F_k(x) = 0$$

содержат только вторые (четные) производные по  $t$  — и потому «не ощущают» замену<sup>1)</sup>  $t$  на  $-t$ . Другими словами, микроскопическое поведение системы обратимо, тогда как макроско-

---

<sup>1)</sup> При возникновении трения  $\sim \dot{x}$  ситуация меняется, и время начинает течь от прошлого к будущему.

пическое — необратимо<sup>2)</sup>. Второй неприятностью был *парадокс возврата*, состоящий в противоречии макроскопической реальности с *теоремой Пуанкаре* о возвращении траектории в сколь угодно малую окрестность начального положения<sup>3)</sup>. Футбольный мяч к деформированному ударом состоянию не возвращается<sup>4)</sup>.

Долгое время почему-то казалось, что проблема упирается в доказательство *эргодичности*, каковой называют равенство для траектории среднего по времени среднему по фазовому пространству. Постепенно стало ясно, что эргодичность ни при чем<sup>5)</sup>, а все дело в *перемешивании*.

Пусть  $U_t$  обозначает оператор сдвига по траекториям, скажем, механической системы, а  $\Omega_0$  — некоторая область фазового пространства. Если при  $t \rightarrow \infty$  мера множества точек области  $\Omega_t = U_t(\Omega_0)$ , попадающих в любую наперед заданную

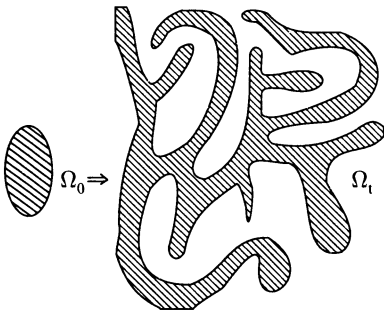


Рис. 7.1

область  $\Omega$ , стремится стать пропорциональной мере области  $\Omega$ , то система называется *перемешивающейся*, либо говорят, что система обладает *свойством перемешивания*. Визуально перемешивание выглядит как «беспорядочно равномерное» растекание областей фазового пространства — рис. 7.1.

Мы обходим стороной различные подробности. Теорема Лиувилля гарантирует сохранение фазового объема, но если движение механической системы происходит, скажем, по поверхности  $H$  постоянной энергии  $H = \text{const}$ , то мера

<sup>2)</sup> Газ в целом стремится к состоянию термодинамического равновесия, макровозмущения затухают, энтропия растет.

<sup>3)</sup> Это красивый, но совсем простой результат, легко вытекающий из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема.

<sup>4)</sup> Возражение в такой форме распространено, но нелогично. Однако здесь не место затевать симпозиум.

<sup>5)</sup> Фактически это было ясно с самого начала. Но психологическая ясность иногда отстает по фазе.

на этой поверхности выбирается таким образом,

$$\mu(\Omega) \sim \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{\|\text{grad } H\|},$$

чтобы  $\mu(\Omega_t)$  сохранялась при изменении  $t$ . При этом  $\mu(H)$  обычно нормируется на единицу. Тогда движение перемешивающегося типа определяется условием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_H f(\Omega_t) g(\Omega) d\mu = \int_H f(\Omega) d\mu \int_H g(\Omega) d\mu,$$

где  $f$  и  $g$  — любые измеримые функции.

Это означает, что перемешивание обнуляет (при  $t \rightarrow \infty$ ) корреляции. Точнее говоря, если на траекториях  $x(t)$  рассматриваются функции

$$u_t = f[x(t)] \quad \text{и} \quad v = g[x(0)],$$

то

$$\langle u_t v \rangle - \langle u_t \rangle \langle v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где угловые скобки обозначают среднее по фазовому пространству.

Таким образом, перемешивание обеспечивает корреляционную (линейную) независимость  $u_t$  и  $v$ . При этом в комментариях обычно говорится о расцеплении корреляций.

Перемешивание, как правило, связано со сверхчувствительностью к начальным данным, выражаемой неустойчивостью, характеризующейся экспоненциальным разбеганием траекторий:

$$\|U_t(x) - U_t(y)\| \sim \lambda^t \|x - y\|,$$

при близких<sup>6)</sup>  $x, y$ , малых  $t > 0$  и некотором  $\lambda > 1$ .

Для систем с дискретным временем,

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

где, например,  $f(x)$  — оператор сдвига за секунду,

$$\|f(x) - f(y)\| \sim \lambda \|x - y\|, \quad \lambda > 1.$$

Точнее говоря,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \lambda \|x - y\|$$

для достаточно близких  $x, y$ .

---

<sup>6)</sup> Условие близости  $x, y$  принципиально, поскольку при ограниченном фазовом объеме любое разбегание не может долго продолжаться.

Во всех случаях имеются в виду системы, *совершающие финитное движение*.

При  $\lambda \gg 1$  говорят об «очень хорошем перемешивании», но годится и простое  $\lambda > 1$ . Условию перемешивания удовлетворяет элементарная процедура

$$x_{k+1} = \{\lambda x_k\}, \quad \lambda > 1,$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа.

## 7.2. Ликвидация противоречий

По первому впечатлению перемешивание не спасает статистическую физику даже от парадоксов обратимости и возврата. Но обратимые уравнения Ньютона «необратимы» в том смысле, что простые области переводят в сложные (рис. 7.1), а сложные — в еще более сложные. Конечно, любая область  $\Omega_t = U_t(\Omega_0)$  при обращении времени снова «сожмется» в  $\Omega_0$ . Однако угадать заранее сложную область, которая бы сжалась в простую, практически нереально — и этому соображению можно придать более-менее строгую формулировку. Плюс к тому, перемешивание ставит на свои места все остальное.

Конечно, как говорится, легко сказка сказывается... Идиллия плохо укладывается в реальность. Динамику «трехмерного бильярда» определяют (вроде бы) индивидуальные траектории, о поведении которых перемешивание областей ничего не говорит. Поэтому необходимо решить, с чем мы имеем дело — с траекториями точек или областей? Традиционная привязка мировоззрения к движению точки, конечно, условность. Никто законы Ньютона не проверял с большой точностью, да и невозможно это в принципе, хотя бы потому, что понятие геометрической точки — идеализация. Какова должна быть точность задания начальных данных для прогноза движения? В случае перемешивания ответ бывает *шокирующим*.

Реальную термодинамическую систему пронизывают громадные потоки нейтрино. Движение частиц на далеких звездах посредством гравитации кардинальным образом меняет поведение молекул в любой «изолированной системе». Малое возмущение  $\varphi_0$  в направлении движения молекулы возрастает по экспоненциальному закону

$$\varphi_t = \varphi_0 \left( \frac{\lambda}{r_0} \right)^{t/\tau},$$

где  $\lambda$  — длина свободного пробега,  $r_0$  — радиус молекулы,  $\tau$  — время свободного пробега [16]. После нескольких столкновений  $\varphi_t$  становится больше  $4\pi$ . Э. Борель подсчитал<sup>7)</sup>, что перемещение массы 1 г на 1 см на какой-нибудь звезде, удаленной от Земли на несколько световых лет, произведет у Земли изменение гравитационного поля порядка  $10^{-100}$ , что в свою очередь не позволит предсказать направление движения молекул на времена свыше  $10^{-6}$  с.

Отсюда ясна оценка необходимой точности задания начальных данных. Сотого знака после запятой не хватает, а это уже — принципиальное фиаско.

Поэтому при механическом взгляде на термодинамическую систему вполне можно считать, что речь идет о движении областей. По крайней мере, траектория математической точки о реальности представления не дает. Интерпретация — дело вкуса. При желании сохранить классическое представление о движении системы — можно считать, что метание индивидуальной траектории по размешивающейся области происходит под действием причин другого уровня. Если эти причины не синхронизованы (злонамеренно)<sup>8)</sup> с размешиванием, система будет обнаруживать обычные статистические свойства.

*Об идеологии движения математической точки в уравнениях классической механики нужно сказать еще раз. Все понимают, что это идеализация, но вопрос в том — какая. Многие думают — такая, которая позволяет решать любую практическую задачу повышением точности вычислений. Но оказывается, что необходимая точность бывает (довольно часто, и в том числе — при малых размерностях) порядка  $10^{100}$ , что является принципиально непреодолимым барьером. В этих случаях говорить о движении областей не только более естественно, но практически — необходимо.*

Из-за фиксации внимания на фазовом пространстве, имеющем в статистической физике размерность порядка числа Авогадро  $\sim 10^{23}$ , из поля зрения иногда выпадают очевидные вещи. Взаимодействие термодинамического объекта со средой характеризует макроскопическое взаимодействие, — «управляемое», в той или иной степени, законом больших чисел. Если величины  $x_k$  имеют матожидания  $m$ , то при больших  $n$  сумма

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

стабилизируется возле значения  $m$  независимо от законов распределения  $x_k$  (с некоторыми оговорками). Вот, собственно, главная причина того, что имеет

<sup>7)</sup> Borel E. Introduction geometrique a physique. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

<sup>8)</sup> «Бог изощрен, но не злонамерен» (А. Эйнштейн).

смысл такой термодинамический параметр, как давление, — и перемешивание здесь принципиального значения не играет.

Наоборот, в случае  $x_{k+1} = \{\lambda x_k\}$  при  $\lambda \gg 1$  перемешивание замечательное, но никаких «термодинамических» проявлений не будет, если среда не реагирует на какой-нибудь агрегат типа  $\frac{1}{N}(x_n + \dots + x_{n+N})$ .

### 7.3. Адиабатические процессы

Надо иметь в виду, что на термодинамических проявлениях свет клином не сходится. Не раскрывая пока карт, рассмотрим популярную задачу о движении шарика между двумя стенками (рис. 7.2). Движение происходит по инерции с упругим отражением при ударе. Что происходит, если стенки медленно сближаются?

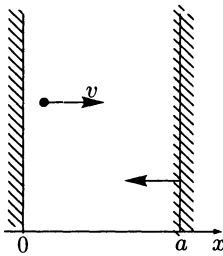


Рис. 7.2

Это маленький пример на тему *адиабатического* изменения параметров. Если параметры изменяются быстро, работают методы усреднения (раздел 6.6). Естественно ожидать, что медленное изменение параметров (медленное — по сравнению с изучаемым движением) — должно иметь свои преимущества.

И оно — имеет, но ситуация намного сложнее, чем при высокочастотном возмущении. Это уже видно по рассматриваемой задаче. Что значит медленно? Стенки можно сближать, но в момент удара вообще останавливать — тогда скорость шарика не будет меняться совсем (по модулю). Можно сближать равномерно, можно ускорять в момент удара. Во всех случаях результат будет разный.

Поэтому рассчитывать на однозначный закономерный эффект возможно лишь, когда скорость сближения не зависит от движения шарика (от моментов удара).

В этом случае можно полагаться на технику усреднения. Будем считать, для определенности, что левая стенка закреплена в положении  $x = 0$  и движется — только правая,  $\dot{a} < 0$ . Теорема вириала<sup>9)</sup> в этом случае приводит к

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2\tau} \int_t^{t+\tau} F a \, dt, \quad (7.1)$$

<sup>9)</sup> Теорема 2.5.1 основывается как раз на идеях усреднения.

где  $\langle T \rangle$  — среднее значение кинетической энергии  $T$ ,  $\tau$  — текущий период (время движения шарика «туда-обратно»),  $F$  — сила в момент удара<sup>10</sup>.

Из (7.1) следует  $\langle F \rangle = -2\langle T \rangle/a$ . Работа силы  $F$  идет на изменение энергии  $T$ , поэтому  $\Delta\langle T \rangle = -(2\langle T \rangle/a)\Delta a$ , откуда  $\Delta\langle T \rangle/\langle T \rangle = -2\Delta a/a$ .

Аналогично,  $\Delta\langle T \rangle/\langle T \rangle = 2\Delta v/v$ , что вытекает из

$$\langle T \rangle = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \Delta\langle T \rangle = mv\Delta v.$$

Подставляя теперь добытые соотношения

$$\frac{\Delta\langle T \rangle}{\langle T \rangle} = -2\frac{\Delta a}{a}, \quad \frac{\Delta\langle T \rangle}{\langle T \rangle} = 2\frac{\Delta v}{v}$$

в равенство

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta v}{v},$$

получаемое дифференцированием формулы для периода  $\tau = 2a/v$ , приходим к  $\Delta\langle T \rangle/\langle T \rangle = -\Delta\tau/\tau$ , т. е. к равенству дифференциалов

$$\frac{d\langle T \rangle}{\langle T \rangle} = -\frac{d\tau}{\tau},$$

интегрирование которого дает  $\langle T \rangle\tau = \text{const}$ , — равносильно:

$$\boxed{\frac{\langle T \rangle}{\nu} = \text{const}}, \quad (7.2)$$

где  $\nu = 1/\tau$  — частота колебаний шарика.

Так выводится адиабатический инвариант (7.2) в [19]. Рассуждение позволяет понять суть дела, но к нему можно предъявить много претензий. Движение шарика, строго говоря, не периодически, поэтому интервал усреднения аккуратно не определен. Если же усреднять по бесконечному промежутку, не проходят манипуляции с дельтами. Наконец, характер сближения стенок вообще остается за кадром. Неявно предполагается, что поведение  $\dot{a}$  дает основания для законности усреднения.

О сложности проблемы можно получить представление по разбору в [13] классической задачи — об изменении периода колебаний маятника при медленном изменении длины стержня,

<sup>10</sup>) Представляющая собой, разумеется, дельта-функцию, если удар абсолютно упругий.

на котором он подвешен<sup>11)</sup>. Получается тот же адиабатический инвариант (7.2), — возникающий «всегда» в задачах подобного толка. Однако лабиринты нюансов анализа уводят весьма далеко от исходной, на вид элементарной, постановки вопроса.

Нужно заметить, что в том и другом случае формула (7.2) легко получается в предположении равномерного изменения параметров. Но ограничиться этим, конечно, жалко, ибо результат остается справедливым в гораздо более широких предположениях, которые можно с определенной долей натяжки охарактеризовать как независимость изучаемого движения (шарика, маятника) от изменения внешних условий.

Особый интерес представляют ситуации, где такая независимость возникает (и усиливается с течением времени) автоматически. Рассмотрим следующую задачу. Легкий шарик раз за разом падает на массивную плиту и упруго отскакивает. Плита колеблется «вверх-вниз». При определенных условиях оказывается [13], что при отскоке шарик в среднем ускоряется, и его энергия растет<sup>12)</sup>.

Если бы шарик падал на плиту в случайные моменты, то факт его ускорения в среднем был бы легко объясним. По той же причине, по которой встречных машин всегда больше, чем попутных, — шарик бы чаще ударялся в те моменты, когда плита движется навстречу.

Но задача детерминирована. Тем не менее при определенных условиях имеется перемешивание, в результате чего моменты удара оказываются хаотично распределенными. Технические детали здесь довольно трудоемки [13], но в идеологическом отношении это хороший пример на тему рождения детерминированного хаоса<sup>13)</sup>.

Что касается условий, при которых в рассмотренной задаче обнаруживается эффект ускорения, — то это большие и малые частоты колебаний плиты. Если плита колеблется «пилообразно», со скоростью  $V$ , а  $v(t)$  — средняя скорость движения шарика, то при  $V \ll v(t)$  движения плиты и шарика становятся незави-

---

<sup>11)</sup> Либо об изменении частоты колебаний в контуре при медленном изменении емкости конденсатора [19].

<sup>12)</sup> Что является аналогом механизма, предложенного Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах.

<sup>13)</sup> Хаоса моментов удара. Рост средней скорости (энергии) шарика — это уже агрегированный (термодинамический) результат на базе хаотического распределения ударов.

симыми, корреляции расцепляются и моменты ударов становятся хаотично (случайно) распределенными.

## 7.4. Аттракторы и фракталы

*Аттрактор* — это притягивающее множество. Скажем, если отображение  $f$  — в том числе многозначное — преобразует в себя компакт  $X$ , то последовательные отображения  $f^k(X)$  оказываются вложены друг в друга,

$$\dots \subset f^k(X) \subset \dots \subset f(X) \subset X$$

и при  $k \rightarrow \infty$  будут сходиться к аттрактору  $A$ . При этом  $A$  будет неподвижным множеством<sup>14)</sup> отображения  $f$ , т. е.  $f(A) = A$ . Поэтому динамический процесс

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{7.3}$$

при  $x_0 \in A$  остается в  $A$ .

Если  $U_t$  — оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения  $\dot{x} = g(x)$  и  $U_t X \subset X$  при  $t > 0$ , то аттрактор  $A$  снова определяется как предельное множество<sup>15)</sup>,  $U_t(X) \rightarrow A$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При рассмотрении динамических систем с дискретным временем (7.3) на заднем плане часто подразумевается сдвиг по траекториям  $\dot{x} = g(x)$  в единицу времени.

Помимо аттракторов динамическая система может обладать и другими инвариантными (неподвижными) множествами, в частности, *репеллерами* — отталкивающими множествами.

Аттракторы простых динамических систем нередко оказываются довольно экзотическими образованиями. Например, *канторово множество*  $K$  представляет собой аттрактор двузначного отображения

$$f(x) = f_1(x) \cup f_2(x),$$

<sup>14)</sup> В частности, неподвижной точкой  $f$ .

<sup>15)</sup> Аттракторами являются асимптотически устойчивые равновесия, траектории автоколебаний, а также более сложные притягивающие множества.



Рис. 7.3

где

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$

преобразования подобия отрезка  $[0, 1]$ . В результате  $K$  можно описать как неподвижное множество преобразования  $f$ . Тот факт, что функции  $f_1$  и  $f_2$  являются преобразованиями подобия, влечет за собой *свойство самоподобия* множества  $K$  — и это характерно для многих аттракторов.

Здесь уместно повторить сказанное в [8] по этому поводу.

«Все во всем», — говорил Прокл, о чем-то догадываясь. На этом уровне так все и осталось до сих пор. Конечно, явление самоповторения целого в собственных частях, многократного включения своих копий, — обогатилось новыми фактами. Каждый фрагмент голограммы, например, при освещении лазерным лучом воспроизводит сфотографированный объект целиком. Этакая бесконечность, уходящая внутрь себя. Голографический «удар по мозгам» полвека назад был очень внушительен. А теперь еще аттракторы и фракталы, моделирующие бесконечное самовложение на любой вкус (пыль Кантора, ковер Серпинского, снежинка Кох, губка Менгера)<sup>16)</sup>.

Дэвид Бом экстраполировал идею целиком на Вселенную. Дескать, мир — это большая голограмма, каждая частичка которой содержит информацию о целом (так называемая *голономная парадигма*). Идея родилась как средство преодоления старого ЭПР-парадокса<sup>17)</sup> из области квантово-механических неприятностей. Суть парадокса в том, что в некоторых ситуациях элементарные частицы, благодаря уравниванию Шрёдингера, обязаны согласовывать поведение

<sup>16)</sup> Не говоря о природных явлениях (рис. 7.3).

<sup>17)</sup> Парадокс Эйнштейна—Подольского—Розена.

друг с другом, как бы мгновенно обмениваясь сигналами — в нарушение запрета сверхсветовых скоростей.

Бом повторил фокус с колумбовым яйцом. Парадокса нет, поскольку нет различных частиц. Частицы, мол, не отдельные объекты, а лишь разные лица чего-то единого. Поэтому никакого обмена сигналами вообще нет, как нет его между отражениями одного предмета в разных зеркалах.

Чтобы хоть как-то передать невыразимое, Бом «нарисовал» аналогию. Аквариум с рыбкой проецируется на два взаимно перпендикулярных экрана. Наблюдатель, которому видны только экраны, уверен, что есть две рыбки. Потом он замечает, что их поведение согласованно, и делает вывод о наличии мгновенного обмена сигналами.

Вот, собственно, и вся парадигма. Трюк с аквариумом играет решающую роль, и на его счет можно отнести всю популярность идеи, которая худо-бедно до сих пор тлеет. Самое интересное, что Бом, скорей всего, прав, но идея уперлась в глухую стену. Ситуация в чем-то напоминает атмосферу зарождения квантовой механики. Там что-то должно было колебаться. С мертвой точки ушли, решив: пусть колеблется «непонятно что», и тогда удалось придумать математический инструмент. Здесь пока все застопорилось на аквариуме.

Аттрактор не обязательно, но часто оказывается *фракталом*. Фракталами называют множества, имеющие *дробную размерность*. Разумеется, речь идет не об обычной размерности, а о так называемой *размерности по Хаусдорфу*, которая определяется следующим образом. Скажем, множество  $A$  в  $R^n$  покрывается кубиками со стороной  $\varepsilon$ . Если  $N(\varepsilon)$  обозначает минимальное число кубиков, необходимых для покрытия  $A$ , и  $N(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  растет пропорционально  $\varepsilon^{-d}$ , то величина  $d$  называется размерностью  $A$  по Хаусдорфу. У канторова множества эта размерность равна  $\log_3 2$ .

В рядовых ситуациях величина  $d$  равна обычной размерности.

Стандартный пример фрактала — кривая Кох. Ее построение начинается с единичного отрезка, который заменяется ломаной из четырех отрезков, каждый из которых имеет длину  $1/3$ , как на рис. 7.4. Далее с каждым звеном ломаной операция повторяется (с поправкой на коэффициент подобия) и т. д. Длина ломаной  $n$ -го порядка получается равной  $(4/3)^n$ , результирующая длина — бесконечна.

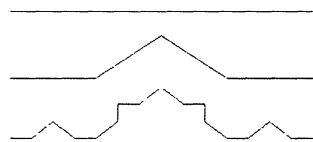


Рис. 7.4

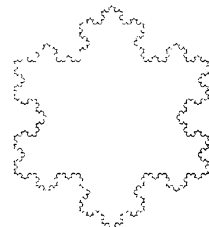


Рис. 7.5

Если построение кривой начинается с треугольника, получается снежинка Кох (рис. 7.5).

*Аттрактор*, являющийся фракталом, называют *странным*.

## 7.5. Странный аттрактор Лоренца

При изучении динамических систем значительный интерес представляет движение в пределах самого аттрактора. В случае непрерывного времени разнообразие возможностей *на плоскости* не очень велико. Причина проста. Требование единственности решения  $\dot{x} = g(x)$  не позволяет траекториям самопересекаться, и тогда варианты поведения не так многочисленны. В случае  $n \geq 3$  запрет самопересечения траекторий уже большой роли не играет, и сложные аттракторы возникают в довольно простых с виду системах.

Конечно, исторически первым странным аттрактором был сосуд с газом<sup>18)</sup>. Но этот пример постепенно перестал быть интересным. Определенный фурор в 1963 году произвел *аттрактор Лоренца*, открытый при изучении системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y, \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Изображение аттрактора Лоренца напоминает перекрученный моток ниток. Размерность — дробная, движение траектории — хаотичное, очень чувствительное к заданию начальных данных.

Изученная Лоренцем система имеет некоторое отношение к метеорологии. Убедившись в сверхчувствительности исследуемых траекторий, Лоренц написал статью «...может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии породить торнадо в Техасе?» — значительно облегчив жизнь синоптиков.

Открытие Лоренца часто восхваляют за обнаружение детерминированного хаоса в условиях малой размерности, что несколько

<sup>18)</sup> Здесь есть некоторое расхождение с определением фрактала как множества с дробной размерностью. Формально это исключает траектории броуновского движения, равно как и кривые Пеано, заполняющие квадрат.

путает карты. Траектория одномерной системы  $x_{k+1} = \{\lambda x_k\}$ , где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, при больших  $\lambda$  дает очень качественный пример хаотичного поведения, чрезвычайно критичного к заданию начальных данных. В непрерывном времени это соответствует движению по окружности,

$$\dot{\varphi} = \mu \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \mu t,$$

с естественной фиксацией угла по модулю  $2\pi$ .

Революционный характер находки Лоренца — в другом. Был обнаружен очень простой пример *невыдуманной* динамической системы со сложным поведением, которая возникла в рядовой вычислительной практике. Стало ясно, что детерминированный хаос — это не экзотика, а рутина, которую мы не замечали раньше из-за отсутствия вычислительных средств.

Если угодно, ситуация чем-то напоминает указание Вейерштрассом примера нигде не дифференцируемой функции, тогда как заведомо ясно, что почти все функции недифференцируемы.

В подобных ситуациях очень важно понимать, как может реализоваться та или иная возможность, и может ли. Детерминированный хаос мог бы возникать в системах лишь с очень сложным описанием, специально сконструированных, нереалистичных — и тогда бы мы имели дело совсем с другой Вселенной.

## 7.6. Сложное в простом

Надо признать, что эффективное изучение странных аттракторов без современной вычислительной техники едва ли было возможно. Роль компьютеров в математике вообще очень велика, хотя в большинстве случаев это и завуалировано. Примеры и численный эксперимент традиционно относились к разряду вспомогательных средств. Теперь же они постепенно переходят в категорию главенствующих факторов, определяющих успех исследования.

Вот довольно яркий пример простейшей итерационной процедуры

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), \tag{7.4}$$

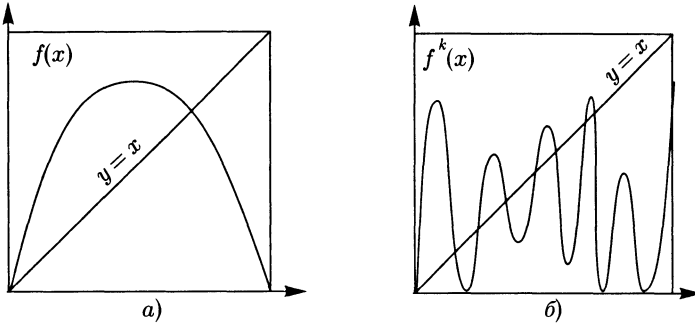


Рис. 7.6

в которой компьютеры позволили обнаружить удивительные явления. Для определенности пусть, например,

$$x_{k+1} = 4\lambda x_k(1 - x_k). \quad (7.5)$$

Понятно, что итерации функции  $f(x) = 4\lambda x(1 - x)$  приводят к полиномам возрастающей степени ( $f^k(x)$  — полином степени  $2^k$ ), причем  $f^k(x)$  при условии  $\lambda \in (0, 1)$  и любом  $k$  отображает  $[0, 1]$  в  $[0, 1]$ . У функции  $f(x)$  неподвижная точка одна ( $\lambda \leq 1/4$ ) либо две ( $1/4 < \lambda < 1$  — рис. 7.6 а). С увеличением количества итераций количество неподвижных точек (число пересечений прямой  $y = x$  с графиком функции  $f^k(x)$ ) может увеличиваться (рис. 7.6 б) — и определяется значением  $\lambda$ .

Неподвижная точка  $f^k(x)$  (решение уравнения  $x = f^k(x)$ ) — это цикл  $k$ -го порядка: после  $k$  итераций точка возвращается в исходное положение. При увеличении  $\lambda$  в системе происходит бесконечное число бифуркаций. Сначала процедура (7.5) сходится к одному из равновесий, потом начинают появляться циклы удвоения<sup>19)</sup>,  $C(2), C(2^2), \dots$ , затем при некотором  $\lambda_\infty$  наступает хаос, потом снова циклы и т. д.

Реализация широкого спектра возможностей на очень простой модели (7.5) сама по себе удивительна. Но еще более удивительно другое. В бифуркационной картине системы (7.5) обнаруживаются общие закономерности поведения систем вида (7.4), независимые в широком диапазоне от того, какова конкретно функция

<sup>19)</sup> Циклом  $C(p)$  длины  $p$  называют траекторию  $x_1, \dots, x_p$ , удовлетворяющую (7.5) и условию  $x_1 = x_p$ .

$f(x, \lambda)$ . В частности, в последовательности  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  бифуркационных значений параметра  $\lambda$  и даже в численном описании самих циклов  $C(p)$  выявляется наличие *универсальных констант*, чего до исследований Фейгенбаума<sup>20)</sup> никто не ожидал.

Еще одно удивительное явление — *иерархия циклов Шарковского*. Если в (7.4) из существования цикла  $C(m)$  следует существование  $C(n)$ , пишут  $m \succ n$ . Шарковский установил общую закономерность:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \dots \\ \dots \succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Таким образом, цикл  $C(3)$  как бы самый старший. Из его наличия вытекает существование любых других циклов<sup>21)</sup>.

Разнообразие нелинейностей опять до некоторой степени оказывается декорацией. Вот что по этому поводу говорилось в [8].

*Впечатление бесконечного многообразия нелинейностей, по-видимому, проистекает из привычки думать о функциях в категориях рядов Тэйлора, что порождает иллюзию неисчерпаемых возможностей. Во многих же задачах это не затрагивает существа дела. Там важно другое. Выпукла или вогнута функция, имеет ли экстремальные точки, насколько быстро растет по сравнению с линейной. В этом случае «тэйлоровский ассортимент» превращается в украшение, и остается не так много вариантов. Поэтому «нелинейная целина» обширна, но не настолько, как иногда кажется.*

<sup>20)</sup> Обнаружившего этот феномен.

<sup>21)</sup> Все эти результаты подробно и широко отражены в литературе.

## ЧАСТЬ II

# ДОПОЛНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

---

*Кино легко смотреть, но трудно делать.*

Дополнения и приложения бывают двух типов. Идеологические и технические. Первые — для кругозора, вторые — для тренировки. Избранный формат ориентируется на идеологию. Поэтому в прикладных областях намечаются лишь контуры.

Скажем, теория регулирования (глава 8) на собственной территории изобилует техническими подробностями, но они малоинтересны вне рамок узкой специализации. В то же время принципы и методы управления сегодня стали, пожалуй, необходимой частью конструктивного мышления. Поэтому в рамках курса дифференциальных уравнений естественно коснуться этой области хотя бы вскользь. Точнее говоря, не «хотя бы», а именно вскользь, потому что писать легко — читать трудно, и реакция на перегрузку хорошо известна. Есть даже физический закон Ле-Шателье: реакция системы всегда направлена против внешнего воздействия.

Механика — другое дело. Ее все знают, но — в рамках общей физики. Аналитическая механика (глава 9) — совсем другая наука. Другой этаж знания. Там механические задачи изучаются не по отдельности, а «сразу все вместе». Для мировоззрения — ценная вещь. Как пример стиля, глобального подхода... С точки зрения дифференциальных уравнений — вообще незаменимая область. Изучать ее надо, разумеется, по обстоятельным учебникам [5, 10], но для получения общих представлений больше подходит что-нибудь промежуточное.

Конусные методы (глава 10) остаются пока за бортом образовательной системы, что является результатом какого-то недоразумения. По приводимым в главе фрагментам легко судить, что речь идет о простых и эффективных методах решения нелинейных задач.

Модели коллективного поведения (глава 11) дают некоторое представление о возможностях и потребностях развития дифференциальных уравнений в нестандартных направлениях.

## Глава 8

### Теория регулирования

#### 8.1. Практические задачи и примеры

Размышлять об автоматическом регулировании удобно с некоторым запасом примеров, чтобы за абстракциями чувствовать реалии.

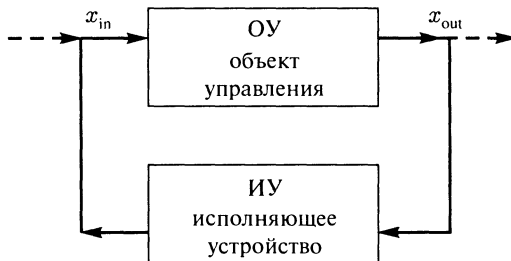


Рис. 8.1. Управление с обратной связью

Большая масса практических задач управления укладывается в схему, изображенную на рис. 8.1. Объектами управления могут быть:

- **Автопилот.** Вход  $x_{in}$  — положения рычагов, определяющих тягу, углы поворота элеронов и т. д. Выход  $x_{out}$  — параметры полета (скорость, курс, высота).
- **Химический реактор.** Вход  $x_{in}$  — концентрации реагентов, ингибиторов и катализаторов; температура, давление и т. п. Выход  $x_{out}$  — производительность или качество получаемого продукта, по измерению которого ИУ так или иначе влияет на вход (открывает вентили, подогревает и т. п.).
- **Экономика фирмы.** Вход  $x_{in}$  — распределение финансов и других ресурсов. Выход  $x_{out}$  — прибыль.

Это примеры, свидетельствующие о возможной «широте замаха». Для понимания существа дела лучше подходят более скромные задачи. Что-нибудь вроде центробежного регулятора Уатта,

который первоначально был ориентирован на управление паровой машиной (патент 1784 года), а потом широко использовался во многих системах для поддержания необходимой скорости вращения (турбин, двигателей).

Принцип действия отражает рис. 8.2. Вал регулятора соединяется с валом двигателя (напрямую или через зубчатые передачи). Центробежная сила вращения и натяжение пружины, противодействуя друг другу, влияют на расхождение шаровых грузов, которое, тем или иным способом, передается на вход регулируемой машины — меняя, скажем, давление пара, вращающего турбину<sup>1)</sup>.

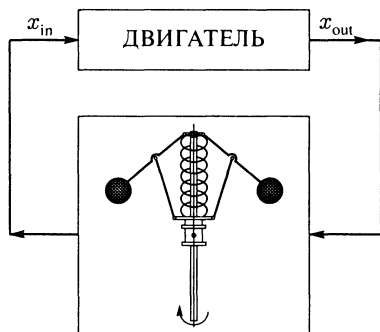


Рис. 8.2. Центробежный регулятор

Просмотр большого количества примеров показывает, что масса практических задач, несмотря на содержательное разнообразие, единообразно описывается схемой, изображенной на рис. 8.3, где  $L^0$  — дифференциальный оператор, описывающий поведение объекта управления,  $L^c$  — дифференциальный оператор исполнительного устройства<sup>2)</sup>. При этом дифференциальные операторы обычно преобразуют выход во вход, что в качестве описания выглядит несколько противоестественно. Реальное положение дел лучше отражают импульсные переходные функции  $G(t, s)$  (обратные операторы  $L^{-1}$ ), см. раздел 3.11, — действующие по направлению прохождения сигналов (рис. 8.4).

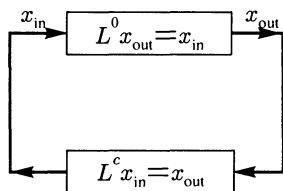


Рис. 8.3. Схема регулирования

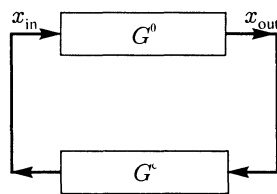


Рис. 8.4.  $G^0 x_{in} = x_{out}$ ,  
 $G^c x_{out} = x_{in}$

<sup>1)</sup> При определенных условиях расходящиеся грузы сами по себе могут влиять на частоту вращения, меняя нагрузку. Достаточно вспомнить балет или фигурное катание.

<sup>2)</sup> Которое может состоять из последовательно соединенных: датчика, усилителя, преобразователя, манипулятора.

## 8.2. Передаточные функции

Самым сложным в зарождении теории автоматического регулирования, конечно, была постановочная часть. Переход от переплетенной мешанины из датчиков и сервоприводов к структуризации задач, ясному видению, — такой качественный скачок просто так не дается<sup>3)</sup>.

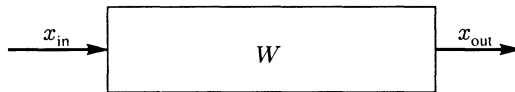


Рис. 8.5. Блок

Одним из важных шагов на этом пути было понимание<sup>4)</sup>, что реальные системы можно представлять в виде соединенных друг с другом блоков, или звеньев (рис. 8.5), каждый из которых описывается уравнением

$$Lx_{\text{out}} = Mx_{\text{in}},$$

где  $L$  и  $M$  — дифференциальные операторы.

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются **исключительно автономные системы**. Поэтому  $L$  и  $M$  — это дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Следующий шаг заключался в переоткрытии для нужд автоматического регулирования преобразования Лапласа, которое до этого было, скорее, философским украшением, нежели рабочим инструментом<sup>5)</sup>, — а тут эффективно заработало.

Преобразование Лапласа описания блока  $Lx_{\text{out}} = Mx_{\text{in}}$  дает

$$L(p)\widehat{x}_{\text{out}}(p) = M(p)\widehat{x}_{\text{in}}(p), \quad (8.1)$$

где  $L(p)$  и  $M(p)$  — это обычные характеристические полиномы. Например,

$$Lx = \ddot{x} + T_1\dot{x} + T_0x \quad \Rightarrow \quad L(p) = p^2 + T_1p + T_0.$$

<sup>3)</sup> С чем-то подобным в миниатюре все мы сталкивались, когда в шестом классе решали задачи на составление уравнений.

<sup>4)</sup> Пришедшее в результате длительных проб и ошибок.

<sup>5)</sup> При решении конкретного дифференциального уравнения преобразование Лапласа никаких особых выгод (по сравнению с классическими методами) не дает, хотя и принято таинственно утверждать обратное.

В результате (8.1) приводит к очень простому соотношению

$$\hat{x}_{\text{out}}(p) = W(p)\hat{x}_{\text{in}}(p),$$

где

$$W(p) = \frac{M(p)}{L(p)}$$

называют *передаточной функцией* блока.

Таким образом, если вместо сигналов  $x(t)$  рассматривать их изображения  $\hat{x}(p)$ , то выход каждого элементарного блока получается умножением входа на передаточную функцию. Каждый такой факт, взятый в отдельности, ничего особенного не представляет, но в совокупности — возникает ощутимый эффект. Если систему из десятка блоков при дифференциальном описании можно предлагать в качестве головоломки, то в терминах передаточных функций это не сложнее, чем «дважды два».

Хитросплетения соединений опять-таки подразделяются на небольшое число категорий.

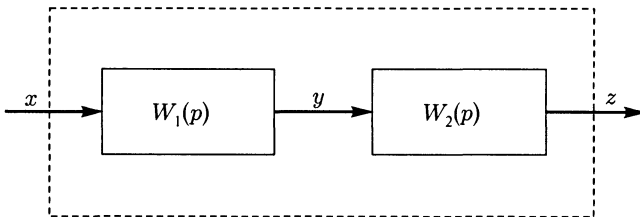


Рис. 8.6. Последовательное соединение

**Последовательное соединение** звеньев (рис. 8.6). Передаточная функция  $W$  блока, выделенного пунктиром, очевидно, равна

$$W = W_1 W_2,$$

что вытекает из  $\hat{z} = W_2 \hat{y} = W_2 W_1 \hat{x}$ .

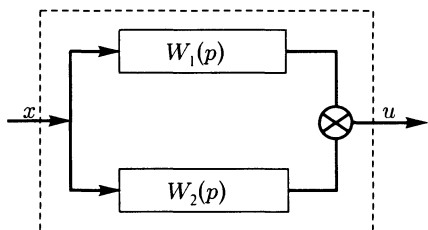


Рис. 8.7. Параллельное соединение

Параллельное соединение (рис. 8.7) также приводит к простой формуле

$$W = W_1 + W_2,$$

в силу  $\hat{u} = \hat{y} + \hat{z} = (W_1 + W_2)\hat{x}$ .

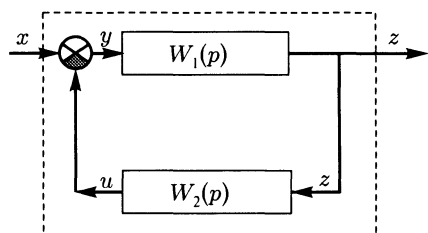


Рис. 8.8. Обратная связь

Наконец, обратная связь (рис. 8.8) порождает формулу<sup>6)</sup>

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2},$$

которая получается исключением  $\hat{u}$  и  $\hat{y}$  из очевидных соотношений

$$\hat{u} = W_2 \hat{z}, \quad \hat{z} = W_1 \hat{y}, \quad \hat{y} = \hat{x} - \hat{u}.$$

Минус в  $\hat{y} = \hat{x} - \hat{u}$  характеризует отрицательную обратную связь.

### 8.3. О подводных рифах

Использование блок-схем, с одной стороны, удобная вещь, с другой — опасная, ибо маскирует реальность. За абстракцией иногда не видны совсем простые вещи.

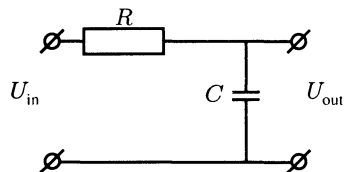


Рис. 8.9. Цепочка RC

Рассмотрим пример. Входное и выходное напряжение в RC-цепочке, изображенной на рис. 8.9, связывает дифференциальное уравнение

$$RC\dot{i}_{\text{out}} + u_{\text{out}} = RC\dot{i}_{\text{in}},$$

<sup>6)</sup>  $W$  обозначает передаточную функцию блока, выделенного пунктиром.

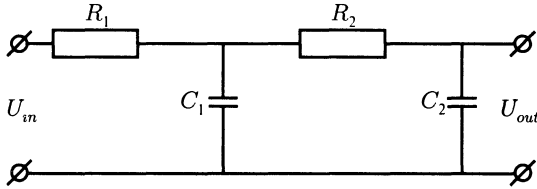


Рис. 8.10. Последовательное соединение?

которое получается исключением напряжения  $u_C$  на конденсаторе и тока  $I$  в цепи из соотношений

$$u_{in} = u_C + RI, \quad u_{out} = RI, \quad I = C\dot{u}_C.$$

В результате получается, что  $RC$ -цепочку можно считать блоком с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{Tp}{1 + Tp}, \quad T = RC.$$

Следующий шаг ведет к парадоксу. Последовательное соединение  $RC$ -цепочек (рис. 8.10) в соответствии с формулой  $W = W_1W_2$  должно было бы приводить к

$$W(p) = \frac{T_1T_2p^2}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)},$$

но чисто электрический (правильный) расчет дает [22]

$$W(p) = \frac{1}{(1 + T_1p)(1 + T_2p) + R_1C_2p}.$$

Причина заключается в том, что последовательное соединение четырех-полюсников не является таковым с точки зрения блок-схем. Вторая цепочка, как говорят электрики, подсаживает первую, — что приводит к возникновению обратной связи, охватывающей схему целиком.

## 8.4. Частотные методы

Для функций, равных нулю при <sup>7)</sup>  $t < 0$ , преобразование Фурье принимает вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

и является частным случаем преобразования Лапласа.

<sup>7)</sup> А именно такие функции рассматриваются в теории регулирования.

При подстановке  $p = i\omega$  в  $W(p)$  получается так называемая амплитудно-фазовая характеристика

$$W(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$

Физическая интерпретация здесь такова. Если на вход линейного звена с переходной функцией  $W(p)$  подать гармонический сигнал  $\sin \omega t$ , то на выходе будет сигнал  $A \sin(\omega t + \varphi)$ . Вместо синуса удобнее говорить о сигнале  $e^{i\omega t}$ , — и тогда на выходе будет просто  $W(i\omega)e^{i\omega t}$ .

*В устройстве мира имеется некоторое неудобство. «Подать» на вход системы гармонический сигнал нельзя. Если  $\sin \omega t$  не приходит из минус бесконечности, а возникает в нулевой момент времени, то это уже не гармонический сигнал. Поэтому в теории регулирования принято говорить, что  $\sin \omega t$  («включенный» в момент  $t = 0$ ) дает на выходе  $A \sin(\omega t + \varphi)$  после затухания в системе переходного процесса. Но для затухания переходного процесса требуется устойчивость системы — а это уже другая история. Вот так попытка отразить реальность (факт включения системы) влечет за собой необходимость массы оговорок и реверансов. Но тут уж бессмысленно жаловаться — так устроена вся жизнь.*

Таким образом, фиксация внимания на функциях равных нулю при  $t < 0$ , отражая одну сторону реальности, запутывает другую. Во избежание некоторых принципиальных ошибок лучше все-таки полагаться на стандартное преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.2)$$

В этом случае амплитудно-фазовая характеристика остается той же самой<sup>8)</sup>

$$W(i\omega) = \frac{M(i\omega)}{L(i\omega)},$$

соотношение между фурье-преобразованиями входа и выхода определяется формулой

$$\hat{x}_{\text{out}}(\omega) = W(i\omega)\hat{x}_{\text{in}}(\omega),$$

<sup>8)</sup> Где  $L(\cdot)$  и  $M(\cdot)$  — характеристические полиномы дифференциальных операторов  $L$  и  $M$  в описании объекта  $Lx_{\text{out}} = Mx_{\text{in}}$ .

и никакие оговорки не требуются. Потребность в уточнениях возникает при изучении условий причинности<sup>9)</sup>, но это совсем другая задача.

Амплитудно-фазовая характеристика несет на себе полную характеристику о системе, в том числе — об устойчивости равновесия. Последний вопрос сводится к изучению корней характеристического полинома  $L$ , стоящего в знаменателе  $W$ . Иногда возникающие надежды ликвидировать «нежелательные» корни полинома  $L$  подбором числителя  $M$  обычно несостоятельны, поскольку малейшее возмущение коэффициентов  $L$  или  $M$  превращает систему в неустойчивую.

Амплитудно-фазовая характеристика оказывается полезной при изучении переходных процессов в системе. Частотные методы вообще дают новое освещение многим задачам анализа динамических процессов. Полезные ракурсы открываются с первых шагов, начиная с самого частотного представления (8.2) сигнала  $f(t)$ , дающего важную информацию о спектральных свойствах функции  $f(t)$ . Данные о спектре, в свою очередь, могут служить для решения задач фильтрации и др.

## 8.5. Задача компенсации

До сих пор рассматривались автономные задачи регулирования, где регулятор в обратной связи полностью определял вход регулируемого объекта. Уровень воды падает, поплавков опускается, открывает кран, и т. д. Все рычаги управления в руках у поплавка. Но есть задачи, где система подвергается внешним воздействиям, и регулятор может лишь частично влиять на вход системы — а успех регулирования желателен полный.

Допустим, груз при транспортировке подвергается вибрации. Можно ли так замкнуть обратную связь, чтобы груз оставался в покое? По первому впечатлению — утопия. Тем не менее рассмотрим «механическую игрушку» из двух тел  $A$  и  $B$ , упруго соединенных как на рис. 8.11. К телу  $A$  с массой  $m_a$  приложена гармониче-

---

<sup>9)</sup> Отсутствие упреждающей реакции системы — входной сигнал еще не пришел, а система уже реагирует.

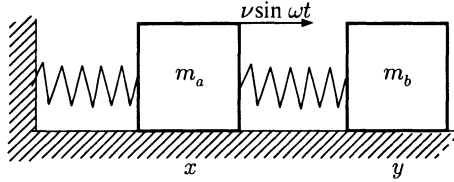


Рис. 8.11. Модель виброгасителя

ская сила  $f = \nu \sin \omega t$ . Движение грузов описывается системой уравнений

$$\begin{cases} m_a \ddot{x} + k_a x - k_b(y - x) = \nu \sin \omega t, \\ m_b \ddot{y} + k_b(y - x) = 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

решением которой служит, например,

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \quad (8.4)$$

где амплитуды  $a$  и  $b$  определяются подстановкой (8.4) в (8.3), что в итоге дает

$$a = \gamma^{-1} \nu (k_b - m_b \omega^2), \quad b = \gamma^{-1} \nu k_b, \\ \gamma = (k_b - m_b \omega^2) (k_a + (k_b - m_a \omega^2)) - k_b^2.$$

*Совершенно неожиданно, при*

$$k_b = m_b \omega^2$$

*амплитуда колебаний тела А оказывается нулевой. К телу приложена внешняя сила, но оно не движется.*

Обратим внимание, что второе тело — это настоящий регулятор, включенный в обратную связь. Никакой видимой «петли замыкания» нет, тело  $B$  со своей пружиной торчит протуберанцем — но система замкнута (по уравнениям движения). Рис. 8.12 отражает ситуацию в виде блок-схемы, на которой

$$L_a x = m_a \ddot{x} + (k_a + k_b)x, \quad L_b = m_b \ddot{y} + k_b y.$$

Конечно, исполненный фокус порождает больше вопросов, чем дает ответов. И все же, игрушечная модель достигает главного — обнаруживает идею. Далее можно двигаться без формул<sup>10)</sup>,

<sup>10)</sup> Если не надо писать диссертацию.

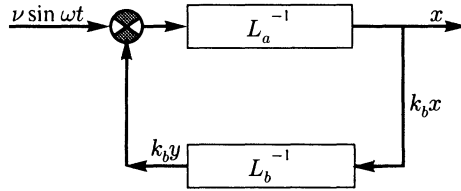


Рис. 8.12

полагаясь на эксперимент и «резонансные» категории мышления. Понятно, например, что в реальности трение ослабит эффект, зато расширит диапазон компенсируемых частот. Главный недостаток игрушечного *виброгасителя* — в том, что он реагирует на строго выделенную частоту. Как добиться охвата более широкого частотного диапазона? Конечно, за счет поглощения энергии колебаний, но что еще?

Если трезво взглянуть на суть эффекта, то от первого удивления не так много остается. Есть два упруго соединенных тела, у второго собственная (резонансная) частота  $\sqrt{k_b/m_b}$  совпадает с частотой вибрации  $\omega$  — оно (тело *B*), в идеале, и будет колебаться. Поэтому, если на VIP-груз поставить несколько «присосок» с разными собственными частотами — охват будет шире. Кроме того, саму резонансную частоту можно подстраивать за счет изменения, скажем, характеристик упругой связи.

Так или иначе, идея гашения вибраций с помощью упругого подсоединения к вибрирующему телу некоторого балласта весьма примечательна, и она широко используется на практике, о чем потребители обычно не подозревают <sup>11)</sup>.

## 8.6. Управляемость

Одна из стандартных систем управления имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (8.5)$$

где  $x$  характеризует состояние системы,  $u$  — управление,  $A$  и  $B$  — матрицы, размера, соответственно,  $n \times n$  и  $n \times m$ .

<sup>11)</sup> Кто догадывается на корабле о наличии в трюме успокоителя качки судна? Либо о запитании электрической цепи колебательным контуром (избирательно для частоты  $\omega^2 = 1/LC$ )?

Первый вопрос, который здесь возникает, можно ли перевести систему — управлением  $u(t)$  — из любого начального положения  $x(0) = x_0$  в любое желаемое, например,  $x(T) = 0$ ? Это называют *управляемостью* системы.

Конечно, если матрица  $B$  имеет размер  $n \times n$  и невырождена, то с помощью  $u$  в (8.5) можно обеспечить любое направление движения, — и ответ положителен. Но в реальности число управляющих воздействий бывает ограниченным — и тогда возникает проблема. Можно ли, скажем, меняя налог на прибыль, управлять одновременно инфляцией и ростом производства? Абстрактно это может выглядеть, например, так:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (8.6)$$

Управление, получается, напрямую действует только на  $x_1$ . На  $x_2$  влияние опосредованное. Возможно ли по обоим переменным двигаться в желаемых направлениях — не ясно, и геометрическая интуиция в таких задачах пасует.

Ответ, тем не менее, достаточно прост, но требует некоторых дополнительных сведений из линейной алгебры.

**О матричных функциях.** Матричные функции  $f(A)$  универсально представимы рядами<sup>12)</sup>, но в каждом конкретном случае (для конкретных  $f$  и  $A$ ) могут быть выражены через  $A$  в виде полинома степени  $n - 1$ .

Ограничимся рассмотрением случая *нормальной матрицы*  $A$ , в котором всегда имеет представление типа (3.14), т. е.

$$f(A) = T^{-1} \text{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\} T. \quad (8.7)$$

Из (8.7) видно, что  $f(A)$  определяется значениями  $f(\lambda)$  всего в  $n$  точках  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , что позволяет заменить  $f$  любой другой функцией, которая в этих точках принимает те же значения (если, конечно, речь идет о вычислении  $f(A)$  для данной конкретной матрицы  $A$ ). В частности,  $f(\lambda)$  можно положить равной интерполяционному полиному Лагранжа<sup>13)</sup>

$$f(\lambda) = P(\lambda) = a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

<sup>12)</sup> Типа (3.13).

<sup>13)</sup> Где

$$P(\lambda) = \sum_k f(\lambda_k) \prod_{j \neq k} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(A) &= T^{-1} \sum_k a_k \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\} T = \\ &= \sum_k a_k T^{-1} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^k T = \\ &= \sum_k a_k (T^{-1} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T)^k = \sum_k a_k A^k. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к системе (8.5) и запишем решение  $x(t)$  в момент  $T$ , считая управление заданным и  $x(T) = 0$ . В соответствии с (3.20) и  $X(t) = e^{At}$ ,

$$0 = x_0 + \int_0^T e^{-As} B u(s) ds.$$

Представляя  $e^{-As}$  в виде полинома, это можно переписать в виде

$$\int_0^T (a_0 B + a_1 A B s + \dots + a_{n-1} A^{n-1} B s^{n-1}) u(s) ds = -x_0, \quad (8.8)$$

откуда ясно, что «благополучие» системы (8.5) связано с прямоугольной матрицей<sup>14)</sup>

$$U = [B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B].$$

Незначительные ухищрения показывают, что условие  $\text{rank } U = n$  необходимо и достаточно для управляемости системы<sup>15)</sup> (8.5).

Система в примере (8.6) управляема, поскольку для нее матрица

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

невырождена.

<sup>14)</sup> Матрица  $U$  строится слева направо — добавляются столбцы  $A^k B$ . Число строк  $U$  равно  $n$ .

<sup>15)</sup> Т. е. для разрешимости (8.8) при любом  $x_0$ .

## Глава 9

### Механика

#### 9.1. Обобщенные координаты и силы

Аналитическая механика дает пример того, как далеко может уйти научная дисциплина, стартуя с крошечной площадки трех законов Ньютона, изучаемых в школе. Пример этот замечателен еще и тем, что он показывает, насколько ценны и продуктивны могут быть эквивалентные преобразования одних дифференциальных уравнений в другие.

**Голономные системы.** Пусть система состоит из  $N$  точечных масс  $m_\nu$ , имеющих координаты  $r_\nu = \{x_\nu, y_\nu, z_\nu\}$  и движущихся под действием *активных сил*  $F_\nu$  по известному закону  $m_\nu w_\nu = F_\nu$ , где  $w_\nu = \ddot{r}_\nu$  обозначает ускорение. При этом естественно говорить о движении системы (изображающей точки) в пространстве  $3N$  измерений.

На практике положения точечных масс, как правило, взаимозависимы, что регламентируется наличием связей<sup>1)</sup>:

$$f_\alpha(r_1, \dots, r_N) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d). \quad (9.1)$$

Скажем, точка  $r = \{x, y, z\}$  обязана двигаться по поверхности  $f(r) = 0$ . Либо две точки соединены жестким стержнем длины  $l$ , т. е.  $(r_1 - r_2)^2 = l^2$ , что можно представлять как движение системы по 5-мерной поверхности

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0.$$

Либо твердое тело приближенно мыслится состоящим из миллиона точечных масс — и там уравнений связи не счесть, равно как и соответствующих поверхностей, по пересечению которых обязана двигаться изображающая точка системы.

---

<sup>1)</sup> В более общем случае связи могут включать время и скорости,

$$f(t, r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N) = 0.$$

При отсутствии неинтегрируемых связей систему называют *голономной*.

Если говорить о возможной скорости  $v$  движения по поверхности  $f = 0$ , то она (скорость) должна лежать в касательной плоскости к  $f = 0$  в текущей точке  $r$ . Соответственно, в этой касательной плоскости будет находиться и любое (бесконечно малое) **возможное перемещение**  $\delta r = v \delta t$  системы. Другими словами, возможные перемещения  $\delta r$  ортогональны градиенту  $\nabla f(r)$ , что равносильно равенству нулю скалярного произведения  $\nabla f(r) \delta r = 0$ .

*Обратим внимание, что здесь рассматривается случай **стационарных связей**  $f(r) = 0$ , где для развития теории хватает понятия возможных перемещений. В нестационарном случае,  $f(r, t) = 0$ , возникает необходимость в использовании **виртуальных перемещений**, каковыми являются те же возможные перемещения, но при остановленном времени (см. [10]).*

Чтобы система оставалась на поверхности  $f(r) = 0$ , необходимо действие дополнительных сил  $R$  *реакции связей*. Обычно рассматривают только **идеальные (удерживающие) связи**, порождающие силы реакции, ортогональные поверхности  $f(r) = 0$  — другими словами, коллинеарные градиенту<sup>2)</sup>  $\nabla f$ , т. е.  $R = \lambda \nabla f$ , либо, что одно и то же,  $R \delta r = 0$ , где  $\delta r$  — любое возможное перемещение.

При этом на  $\nu$ -ю точечную массу будет действовать, соответственно, сила  $R_\nu = \lambda \nabla_\nu f$ , где

$$\nabla_\nu f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \frac{\partial f}{\partial y_\nu}, \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \right\}$$

представляет собой как бы  $\nu$ -ю часть градиента. При наличии  $d$  связей (9.1) результирующая сила реакции, приложенная к  $\nu$ -й точечной массе, будет равна

$$R_\nu = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_\nu f_\alpha,$$

где  $\lambda_\alpha$  — неизвестные параметры (множители Лагранжа). Уравнения движения

$$m_\nu w_\nu = F_\nu + R_\nu$$

<sup>2)</sup> Механики называют связь идеальной, если работа ее сил реакции  $R$  на возможных перемещениях  $\delta r$  равна нулю, т. е.  $R \delta r = 0$ , но это и есть перпендикулярность  $R$  любому  $\delta r$ , лежащему в касательной плоскости к  $f(r) = 0$ . Силы трения, таким образом, исключаются. Их включают в рассмотрение, относя к активным силам.

приобретают вид

$$m_\nu w_\nu = F_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_\nu f_\alpha$$

и называются *уравнениями Лагранжа первого рода*. Для решения конкретной задачи эти уравнения (в количестве  $3N$ ) надо решить совместно с условиями (9.1). Понятно, что на такое мероприятие мало кто отважится. Например, если жесткое килограммовое тело приближенно представляется в виде объединения однограммовых «точечных масс», то число уравнений будет равно  $3000 + d$ .

Эффективный путь совсем другой.

**Обобщенные координаты.** При наличии  $d$  уравнений связи<sup>3)</sup> (9.1) любые  $n = 3N - d$  из  $3N$  переменных

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (9.2)$$

могут быть выбраны независимо друг от друга, остальные  $d$  координат будут определяться решением системы уравнений (9.1). На роль независимых переменных можно взять также какие-нибудь более удобные параметры  $q_1, \dots, q_n$ , с помощью которых однозначно выражаются координаты (9.2), т. е.

$$r_\nu = r_\nu(q_1, \dots, q_n) \quad (\nu = 1, \dots, N).$$

Переменные  $q_1, \dots, q_n$  называют *обобщенными координатами*, они хороши тем, что «развязывают» задачу. Уравнения связи упраздняются, переменные становятся независимыми, все перемещения  $\delta q$  — возможными. Что касается возможных перемещений  $\delta r = \{\delta r_1, \dots, \delta r_N\}$ , они теперь определяются из соотношений

$$\delta r_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \nu = 1, \dots, N,$$

где  $\frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} = \left\{ \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right\}$ . В результате связанному ограничению движения исходной системы теперь отвечает *свободное*

<sup>3)</sup> Имеются в виду независимые и совместимые связи.

движение точки в координатном пространстве  $\{q_1, \dots, q_n\}$ . Каждая переменная  $q_i$  характеризует  $i$ -ю *степень свободы*.

В случае двойного маятника (рис. 9.1) на роль обобщенных координат подходят два угла  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Для описания твердого тела, насаженного на ось, достаточно одной обобщенной координаты (угла поворота).

Как правило, задача подбора обобщенных координат в механике относится к числу легких, поскольку всегда опирается на наглядные соображения.

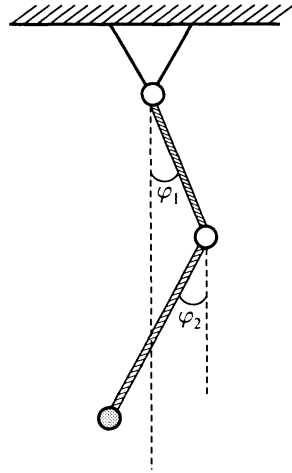


Рис. 9.1. Двойной маятник

**Обобщенные силы.** Переход к обобщенным переменным сам по себе еще проблему не решает. Исходную задачу необходимо преобразовать в удобную форму, которая бы использовала выгоды обобщенных координат и оперировала понятиями, имеющими естественную физическую интерпретацию. В первую очередь это касается перехода от обычных сил к обобщенным.

Работа активных сил на допустимых перемещениях может быть записана как

$$\delta A = \sum_{\nu} F_{\nu} \delta r_{\nu} = \sum_i \left( \sum_{\nu} F_{\nu} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i,$$

где

$$Q_i = \sum_{\nu} F_{\nu} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i}$$

называют *обобщенной силой*, соответствующей координате  $q_i$ .

Для фактического определения обобщенной силы  $Q_i$  используют обычно не формулу, а мысленный эксперимент. Приращение  $\delta q_i$  дается только координате  $q_i$  (остальные  $\delta q_j = 0$ ), затем вычисляется работа  $\delta A_i$  активных сил, и  $Q_i$  определяется из соотношения

$$\delta A_i = Q_i \delta q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

Вот простая иллюстрация. Твердое тело закреплено на оси. В точках  $r_1, \dots, r_m$  приложены силы  $F_1, \dots, F_m$ . При повороте вокруг оси на малый

угол  $\delta\varphi$ , очевидно, совершается работа

$$\delta A_\varphi = \sum_{j=1}^m F_j r_j \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$

откуда ясно, что  $Q_\varphi$  — есть результирующий момент приложенных сил.

## 9.2. Уравнения Лагранжа

В случае идеальных связей работа сил реакции на возможных перемещениях равна нулю,

$$R \delta r = \sum_{\nu} R_{\nu} \delta r_{\nu} = 0.$$

Поэтому уравнением движения системы, в силу  $F_{\nu} - m w_{\nu} = -R_{\nu}$ , можно считать

$$\sum_{\nu} (F_{\nu} - m w_{\nu}) \delta r_{\nu} = 0.$$

Работа активных сил известна,

$$\sum_{\nu} F_{\nu} \delta r_{\nu} = \sum_i Q_i \delta q_i.$$

Для полного перехода на рельсы обобщенных координат надо еще пересчитать работу сил инерции:

$$\delta A_I = - \sum_{\nu} m_{\nu} w_{\nu} \delta r_{\nu} = - \sum_i U_i \delta q_i.$$

Для вычисления  $U_i$  требуется небольшая формульная эквилибристика. Поскольку

$$\dot{r}_{\nu} = \sum_k \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_i},$$

то

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{\nu} m_{\nu} w_{\nu} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{d\dot{r}_{\nu}}{dt} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{d}{dt} \frac{\partial r_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{r}_{\nu} \frac{\partial \dot{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} r_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left( \sum_k \frac{\partial r_{\nu}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2.$$

Теперь

$$\sum_i (Q_i - U_i) \delta q_i = 0$$

— в силу произвольности  $\delta q_i$  — приводит к уравнениям движения Лагранжа<sup>4)</sup>

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если обобщенные силы  $Q_i$  потенциальны, т. е. существует такая функция (потенциал, потенциальная энергия)  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ , что

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

то уравнения Лагранжа могут быть переписаны в форме

$$\boxed{\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $L = T - \Pi$  называют функцией Лагранжа (лагранжианом) или кинетическим потенциалом.

### 9.3. Формализм Гамильтона

Величины

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9.3)$$

называют обобщенными импульсами.

<sup>4)</sup> Второго рода, но о «втором роде» обычно не упоминают.

В простейшей ситуации точечной массы  $m$ , движущейся вдоль оси  $x$ , лагранжиан имеет вид

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Pi(x).$$

Импульс  $p = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$  — оказывается равным «количеству движения».

С помощью  $p_i$  уравнения Лагранжа могут быть записаны в форме  $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$ . Другими словами, производная обобщенного импульса  $\dot{p}_i$  равна обобщенной силе<sup>5)</sup>  $\partial L / \partial q_i$ . Но с переменными здесь получается перебор. К координатам  $q$  и скоростям  $\dot{q}$  добавляются еще импульсы, а уравнений не прибавляется.

Гамильтон предложил исключить скорости  $\dot{q}$ , выразив их через импульсы  $p$  с помощью уравнений (9.3). Разрешимость системы (9.3) обеспечивается положительной определенностью гессиана

$$\left[ \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \right],$$

совпадающего в рассматриваемом случае с гессианом кинетической энергии. В переменных  $\{p, q\}$  уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (9.4)$$

и называются *уравнениями Гамильтона*. Гамильтониан  $H(p, q)$  здесь представляет собой *преобразование Лежандра* лагранжиана  $L(q, \dot{q})$  по переменным  $\dot{q}$ . Чтобы не отвлекаться на обсуждение преобразования Лежандра, можно сказать иначе. Гамильтониан  $H(p, q)$  есть функция

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}), \quad (9.5)$$

в которой скорости  $\dot{q}$  выражены через  $p$  с помощью уравнений (9.3).

<sup>5)</sup> Что по форме соответствует второму закону Ньютона, с той лишь разницей, что речь идет о движении в пространстве обобщенных координат.

Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа достаточно прост. В силу (9.5)

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i,$$

откуда

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

что, с учетом (9.3), приводит к уравнениям Гамильтона.

## 9.4. Вариационные принципы

Механическая интерпретация изложенных выше результатов, вообще говоря, не обязательна.

Рассмотрим абстрактную вариационную задачу поиска экстремали функционала

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (9.6)$$

на множестве гладких функций  $q(t)$ , принимающих на концах заданного промежутка времени  $[t_0, t_1]$  фиксированные значения  $q(t_0) = q^0$  и  $q(t_1) = q^1$ .

Совпадение обозначений считаем пока *случайным*. Функция  $L$  — просто какая-то функция.

Так же как в конечномерном случае на экстремали в нуль обращается градиент, здесь в нуль обязана обращаться вариация  $\delta W$ . Варьируя  $q(t)$  с помощью  $\delta q(t)$ , обращающейся в нуль на концах  $[t_0, t_1]$ , получаем<sup>6)</sup>

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0, \end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности вариации  $\delta q(t)$ , вытекает, что функция  $L$  обязана удовлетворять уравнениям Лагранжа.

<sup>6)</sup> Используя интегрирование по частям.

В случае, когда  $L$  — лагранжиан некой механической системы, интеграл (9.6) называют *действием по Гамильтону*. Из приведенной выкладки следует, что механическая система движется по экстремалиям действия, что называют *принципом Гамильтона*. Это еще одна удобная позиция, с которой некоторые механические закономерности лучше видны.

## 9.5. Инвариант Пуанкаре—Картана

Вывод уравнений Лагранжа и Гамильтона не так сложен, но прогресс — значителен. Правда, в данной точке пути это еще не так хорошо видно. Оценить «что имеем» — вообще трудно. А здесь пока — есть заявка, но нет исполнения.

К тому же иногда мешает постановка неправильных вопросов. Изучение с помощью уравнений Гамильтона простейших механических задач воспринимается часто как издевательство, потому что кроме лишних хлопот — никаких выгод. В результате начинает казаться, что вся эта аналитическая механика не стоит выеденного яйца. Потом, конечно, обнаруживаются задачи, где есть выигрыш, но это принципиально не меняет ситуацию. И песимистический взгляд сохраняет резон до тех пор, пока вопрос стоит так: чем «аналмех» может помочь в решении конкретной задачи?

На самом деле аналитическая механика культивирована не столько для решения отдельных задач, сколько для одновременного решения сразу «всех» задач. Разработка идеологии и общих принципов здесь стоит во главе угла. Инварианты движения, законы сохранения, поиск «оптимальных» типов переменных, связь механических задач с вариационными принципами — вот что находится в центре внимания.

Один из центральных вопросов — инварианты движения.

Сохранение фазового объема при движении механической системы следует из<sup>7)</sup>

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i},$$

<sup>7)</sup> Разумеется, при участии теоремы Лиувилля.

что влечет за собой равенство нулю дивергенции правой части уравнений Гамильтона:

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \right\} = 0.$$

Другой инвариант движения — *интегральный инвариант Пуанкаре—Картана*<sup>8)</sup>

$$I = \oint (p dq - H dt), \quad (9.7)$$

представляющий собой интеграл по произвольному контуру в  $(2n + 1)$ -мерном пространстве переменных  $\{p, q, t\}$ , и не меняющий своего значения при смещении контура вдоль «трубки тока» механической системы [5, 10].

◀ В (9.7)  $p dq$  обозначает скалярное произведение, т. е.

$$I = \oint \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right).$$

Инвариантность (9.7) представляет собой многомерный аналог сохранения циркуляции при течении несжимаемой жидкости, характеризуемой векторным полем  $v$ . Траектории, проходящие через контур  $C$  (рис. 9.2), образуют трубку тока. Если контур  $C'$  охватывает эту же трубку тока, то

$$\oint_C v \cdot dr = \oint_{C'} v \cdot dr, \quad (9.8)$$

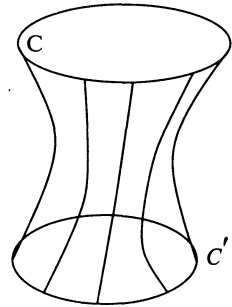


Рис. 9.2

поскольку по формуле Стокса циркуляция по любому контуру

$$\oint_C v \cdot dr = \int_{C(\sigma)} \text{rot } v \cdot d\sigma,$$

где  $C(\sigma)$  обозначает любую площадку, натянутую на  $C$ . Поток же ротора через любую замкнутую поверхность равен нулю, как равен нулю и его поток через поверхность трубки тока. Поэтому потоки  $\text{rot } v$  через основания  $C(\sigma)$  и  $C'(\sigma)$  «цилиндра», образуемого трубкой тока, — равны<sup>9)</sup>, что дает (9.8). ▶

<sup>8)</sup> Который часто называют *основным*.

<sup>9)</sup> Что является прообразом существования инварианта второго порядка. По теореме Ли Хуа-чжуна (1947), существует  $2n$  инвариантов — четные равны нечетным.

## 9.6. Завершение картины

Изложение в данном месте подходит к тому повороту, за которым необходимо перейти либо на более обстоятельный стиль, либо — на информационный. Объяснение «по верхам» перестает работать. Поэтому мы ограничимся краткими замечаниями об основных моментах, на которые стоит обратить внимание при знакомстве с предметом по более детальным источникам.

◊ При наличии у механической системы  $n$  первых независимых интегралов — движение происходит по поверхности  $n$ -мерного инвариантного тора<sup>10)</sup>. На этом торе можно выбрать ровно  $n$  базисных контуров  $C_k$ , которые непрерывно не переводятся друг в друга и не стягиваются в точку.

◊ Помимо (9.7) при движении механической системы сохраняется также *инвариант Пуанкаре* (без Картана, и без координаты  $t$ )

$$I = \oint_C \sum_i p_i dq_i. \quad (9.9)$$

◊ Если контур интегрирования в (9.9) стягивается в точку, то  $I = 0$ . Для базисных (неприводимых) контуров  $C_k$  существует  $n$  переменных

$$I_k = \oint_{C_k} \sum_i p_i dq_i,$$

называемых *переменными действия*, что имеет особое звучание, поскольку все  $I_k = \text{const}$ .

◊ На введение переменных действия можно взглянуть с другого конца:  $n$ -мерное инвариантное многообразие (тор) в  $2n$ -мерном фазовом пространстве описывается  $n$  интегралами  $S_1, \dots, S_n$  — и любую переменную  $I_k = I_k(S_1, \dots, S_n)$  можно считать переменной действия в том смысле, что  $I_k = \text{const}$  на траекториях движения, т. е.  $\dot{I}_k = 0$ . Остальные  $n$  независимых *переменных угла* будут определять движение по тору.

◊ Замена переменных — один из вопросов, который в аналитической механике находится в центре внимания. Обобщенные координаты могут быть определены с большой степенью произвола. Этой свободой целесообразно распорядиться так, чтобы получить дополнительные выгоды. Например, попытайтесь сделать гамильтониан независимым от максимально большого числа переменных. Такие переменные называют *циклическими*, соответствующие уравнения

<sup>10)</sup> Многомерный аналог поверхности обыкновенного бублика, которая представляет собой произведение двух окружностей.

имеют максимально простой вид  $\dot{p}_j = 0$ , что и служит главным мотивом для выделения переменных действия.

◊ Цели анализа механических задач бывают многообразны. Поэтому исследование не всегда заикликуется на циклических координатах. Значительный интерес представляют различные канонические преобразования, переводящие одни гамильтоновы системы в другие. Ограничимся примером из теории возмущений [10].

Если решения уравнений (9.4),

$$q_i = q_i(p^0, q^0, t), \quad p_i = p_i(p^0, q^0, t),$$

принять за формулы перехода от переменных  $\{p, q\}$  к переменным  $\{p^0, q^0\}$ , то такое каноническое преобразование переводит систему (9.4) в

$$\dot{q}_i^0 = 0, \quad \dot{p}_i^0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

а возмущенную систему

$$\dot{q}_i = \frac{\partial(H + \tilde{H})}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial(H + \tilde{H})}{\partial q_i}$$

в систему

$$\dot{q}_i^0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i^0}, \quad \dot{p}_i^0 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i^0}.$$

Таким образом, в новых переменных  $\{p^0, q^0\}$  невозмущенная система «стоит на месте», а возмущенная — определяется решением уравнений Гамильтона, в которых фигурирует *только гамильтониан возмущения*  $\tilde{H}$ . Другими словами, *возмущение гамильтоновой системы всегда можно представлять как возмущение начальных данных*. Это фундаментальный факт.

Подобная точка зрения проливает определенный свет на метание траектории по размещивающейся области системы с перемешиванием (глава 7). Из приведенного здесь результата следует, что такое метание можно рассматривать как скольжение по траекториям ансамбля невозмущенного движения. Сам же характер скольжения определяется внешними по отношению к модели факторами, каковые могут находиться внутри или вовне системы, в другом пространстве и в других категориях причин.

◊ Одна из важнейших задач аналитической механики — интегрируемость системы. Интеграл движения,  $H = \text{const}$  (сохранение энергии), получается сразу, поскольку производная  $H$  по времени в силу уравнений движения (9.4) равна нулю,

$$\dot{H} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} = 0.$$

Известные по курсу общей физики законы сохранения количества и момента количества движения — тоже легко выводятся. В определенных кругах принято

думать, что этого хватает для решения любой механической задачи, но это далеко не так.

Не интегрируются весьма простые, с виду, задачи. Например, задача о волчке — о вращении твердого тела, закрепленного в точке, — которая в некотором смысле неразрешима [5]. Интегрируются *волчки Эйлера (тело закреплено в центре тяжести)*, *Лагранжа (осесимметричный волчок с центром тяжести на оси)* и *Ковалевской (волчок, характеризуемый определенным соотношением моментов инерции и положения центра тяжести)* — см. [26]. В первых двух случаях задача решается относительно легко. В последнем — Ковалевская преодолела значительные технические трудности и нашла «недостающий» интеграл движения — с неясным механическим толкованием и не вполне ясными причинами успеха.

## Глава 10

### **Конусные методы**

Конусные методы эффективны при изучении динамических систем в довольно широком секторе. В частности, речь идет о задачах с функциями, имеющими определенную знаковую структуру. В качестве аванса приведем простой результат.

**10.0.1. Теорема.** Пусть матрица  $A(t)$  внидиагонально положительна<sup>1)</sup>,  $b(t) > 0$ , и система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

имеет единственное положение равновесия  $x^* > 0$ . Тогда  $x^*$  асимптотически устойчиво<sup>2)</sup>.

Формулировка могла бы заканчиваться восклицательным знаком, поскольку результат неожиданный. Устойчивость обеспечивается «почти без предположений», одной только положительностью коэффициентов. Никакой особой глубины здесь, конечно, нет, но пример показывает насколько действенной может быть знаковая структура задачи.

Иллюстрацией может служить система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\sin^2 t - 2)x_1 + \frac{\cos^2 t}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_2 = (1 + e^{-t})x_1 - \frac{2}{3}(1 + e^{-t})x_2 + x_3 + \frac{1}{2} + e^{-t}, \\ \dot{x}_3 = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x_1 + \left(1 + \frac{\sin^2 t}{6}\right)x_2 - \left(10 + \frac{2}{t}\right)x_3 + 1 - \frac{\sin^2 t}{2}, \end{cases}$$

имеющая асимптотически устойчивое равновесие  $x^* = \{1, 3, 1/2\}$ , поскольку все предположения теоремы 10.0.1 выполнены.

---

<sup>1)</sup> При  $i \neq j$  все  $a_{ij}(t) \geq 0$ .

<sup>2)</sup> Доказательство приводится в разделе 10.2.

### 10.1. Полуупорядоченность

Замкнутое выпуклое множество  $K$  линейного пространства называется конусом, если  $x \in K$ ,  $x \neq 0$  влечет за собой  $-x \notin K$  и  $\alpha x \in K$  при  $\alpha \geq 0$ . Простейший пример конуса — неотрицательный ортант<sup>3)</sup>  $R_+^n$ .

Конус  $K$  позволяет ввести *полуупорядоченность*:  $x \geq y$ , если  $x - y \in K$ . Если же  $x - y$  лежит внутри  $K$  (для чего требуется телесность конуса), то пишут  $x > y$ . Множество точек  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $v \leq x \leq w$ , называется *конусным отрезком* и обозначается  $\langle v, w \rangle$ .

*Монотонность*  $f(x)$  означает

$$f(x) \geq f(y), \quad \text{если } x \geq y.$$

Отображение (оператор)  $f(x)$  называют *положительным*, если

$$f(K) \subset K,$$

т. е.  $x \geq 0$  влечет за собой  $f(x) \geq 0$ . В случае

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

говорят, что оператор *сильно положителен*.

Общие определения даны для удобства комментариев и некоторых отступлений. Основная линия изложения опирается далее на ситуацию  $K = R_+^n$ . В этом случае векторное неравенство  $x > y$  означает  $x_j > y_j$  для всех  $j$ .

### 10.2. Монотонность оператора сдвига

Правую часть системы

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{10.1}$$

назовем *внедиагонально положительной*<sup>4)</sup>, если при любых  $x \geq 0$ ,  $t \in (0, \infty)$  и  $j = 1, \dots, n$

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n, t) \geq 0.$$

<sup>3)</sup> Множество точек  $x \in R^n$  с неотрицательными координатами.

<sup>4)</sup> Полуупорядоченность, если не оговорено противное, везде предполагается введенной с помощью неотрицательного ортанта.

Другими словами, значения  $f(x, t)$  при  $x \geq 0$  могут быть произвольными, но как только  $x$  попадает на границу  $R_+^n$  — вектору  $f(x, t)$  запрещается быть направленным вовне конуса.

**10.2.1. Теорема.** *Оператор сдвига  $U_{st}$  по траекториям внедиагонально положительной системы (10.1) — положителен.*

◀ Траектории вспомогательной системы

$$\dot{x} = f(x, t) + \varepsilon \quad (10.2)$$

со строго положительным вектором  $\varepsilon > 0$  — не могут выйти из конуса, так как в граничных точках направлены строго внутрь  $R_+^n$ . Поэтому оператор сдвига по траекториям (10.2) положителен. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  траектории (10.2) переходят в траектории<sup>5)</sup> (10.1). ▶

Правую часть (10.1) назовем *внедиагонально монотонной*, если при любых  $x \geq y$ ,  $t \in (0, \infty)$  и  $j = 1, \dots, n$

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n, t) \geq f_j(y_1, \dots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots, y_n, t).$$

Проще говоря, внедиагональная монотонность означает монотонность роста каждой  $f_i(x, t)$  по каждой координате  $x_j$ ,  $j \neq i$ . При непрерывной дифференцируемости это равносильно  $\partial f_i / \partial x_j \geq 0$  при  $j \neq i$ .

В линейном случае  $f(x, t) = A(t)x$  внедиагональная монотонность совпадает с внедиагональной положительностью, означая внедиагональную положительность матрицы  $A(t)$ .

**10.2.2. Теорема.** *Оператор сдвига  $U_{st}$  по траекториям внедиагонально монотонной системы (10.1) — монотонен.*

◀ Если  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют, соответственно,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{и} \quad \dot{y} = f(y, t),$$

то  $z(t) = x(t) - y(t)$  удовлетворяет системе

$$\dot{z} = f(y + z, t) - f(y, t) \quad (10.3)$$

с внедиагонально положительной правой частью.

Теорема 10.2.1 гарантирует  $z(t) \geq 0$  при условии  $x(0) \geq y(0)$ . ▶

<sup>5)</sup> Условия единственности решения задачи Коши подразумеваются.

Внедиагональная монотонность (положительность) правых частей  $f(x, t)$ , конечно, является частным случаем обыкновенной монотонности (положительности), но именно «внедиагональность» позволяет охватить практически интересные случаи, когда траектории не уходят монотонно в бесконечность, а стремятся к равновесию.

Для понимания результатов важен следующий факт.

**10.2.3. Лемма.** *Если траектория  $x(t)$  внедиагонально монотонной системы (10.1) начинает двигаться вперед (назад), то она все время будет двигаться вперед (назад).*

◀ Другими словами, из  $x(t) \geq x(0)$  при малых  $t \geq 0$  следует

$$x(t) \geq x(s) \geq x(0)$$

при любых  $t \geq s \geq 0$ .

В непрерывно дифференцируемом случае доказательство выглядит так. Пусть  $y = f(x, t)$ . Тогда, в силу (10.1), система уравнений

$$\dot{y}_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} y_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

удовлетворяет условиям теоремы 10.2.1, и потому  $y(t) \geq 0$ , если  $y(0) \geq 0$ , и  $y(t) \leq 0$ , если  $y(0) \leq 0$ .

Таким образом, если траектория  $x(t)$  начинает двигаться вперед, т. е.  $\dot{x}(0) = y(0) \geq 0$ , то она будет продолжать двигаться вперед, поскольку производная  $\dot{x}(t)$  все время положительна,  $\dot{x}(t) = y(t) \geq 0$ . Аналогично дело обстоит с движением назад.

Доказательство в общем случае легко получается с опорой на полугрупповое свойство и монотонность оператора сдвига  $U_{st}$ . ▶

Во внедиагонально монотонном случае из  $x \in \langle v, w \rangle$  следует (по теореме 10.2.2)

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t), \quad (10.4)$$

где  $v(t), x(t), w(t)$  — траектории (10.1), выходящие из точек

$$v(s) = v, \quad x(s) = x, \quad w(s) = w \quad (s \leq t).$$

Если дополнительно

$$f(v, t) \geq 0, \quad f(w, t) \leq 0,$$

то  $v(t) \geq v$ ,  $w(t) \leq w$ , причем  $v(t)$  монотонно растет, а  $w(t)$  — убывает, т. е. конусный отрезок  $\langle v, w \rangle$  оказывается инвариантным —  $v \leq x(t) \leq w$ , если  $x(0) \in \langle v, w \rangle$ .

◀ Последнее вытекает из следующих соображений. Если  $f(v, t) \geq 0$ , то (при условии вниагональной монотонности) система (10.1) удовлетворяет условиям теоремы 10.2.1 на «сдвинутом конусе», состоящем из точек  $x \geq v$ . Поэтому  $v(t) \geq v$  при любом  $t > 0$ . По аналогичной причине  $w(t) \leq w$ .

Теперь лемма 10.2.3 гарантирует монотонный рост  $v(t)$  и монотонное убывание  $w(t)$ . ▶

Заметим, что неравенство (10.4) означает *инвариантность конусного отрезка*  $\langle v, w \rangle$  для оператора сдвига  $U_{st}$ , т. е.

$$U_{st}(\langle v, w \rangle) \subset \langle v, w \rangle,$$

что, в свою очередь, влечет за собой (по *теореме Брауэра*<sup>6)</sup> существование у  $U_{st}$  неподвижной точки  $x^*$  при любых  $s$  и  $t$  — т. е. существование равновесия.

Если система имеет единственное равновесие  $x^*$ , то из монотонности роста  $v(t)$  и ограниченности (в силу  $v(t) \leq w(t)$ ) — следует  $v(t) \rightarrow x^*$ . По аналогичной причине  $w(t) \rightarrow x^*$ . Но тогда из сходимости крайних функций в (10.4) к одному пределу — следует

$$x(t) \rightarrow x^* \quad \text{при любом } x(0) \in \langle v, w \rangle.$$

При этом очевидна асимптотическая устойчивость<sup>7)</sup>  $x^*$ .

◀ Теперь доказательство теоремы 10.0.1 совсем просто. Достаточно заметить, что  $\dot{x} = A(t)x + b(t)$  оставляет инвариантным конусный отрезок  $\langle 0, \mu x^* \rangle$ , где  $\mu > 1$ , поскольку в предположениях теоремы

$$A(t)\mu x^* + b(t) = \mu \left( A(t)x^* + \frac{b(t)}{\mu} \right) < 0. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, наконец, что рассмотренные результаты в комбинации с теорией Флоке легко применимы к изучению вынужденных колебаний (см. раздел 5.2).

<sup>6)</sup> Теорема Брауэра гарантирует существование неподвижной точки у непрерывного оператора, отображающего в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество. Интересно, что принцип Биркгофа—Тарского [7] в данном случае гарантирует существование неподвижной точки без предположения о непрерывности.

<sup>7)</sup> Мы не отвлекаемся на обсуждение очевидных деталей, типа того, что система не должна быстро уставать, — см. по указателю «БУ-системы».

### 10.3. Гетеротонные системы

Отображение  $f(x)$  называется *гетеротонным*, если оно представимо в диагональном виде

$$f(x) = \widehat{f}(x, x),$$

причем *сопутствующий оператор*  $\widehat{f}(v, w)$  монотонно растет по  $v$  и убывает по  $w$ .

Подходящее расщепление оператора на диагонали возможно почти всегда. Например, если каждая компонента  $f_i(x)$  оператора  $f(x)$  монотонно или возрастает, или убывает по каждой в отдельности координате  $x_j$ , то в качестве сопутствующего оператора  $\widehat{f}$  можно взять отображение с компонентами  $\widehat{f}_i(v, w)$ , которые получаются из  $f_i(x)$  заменой  $x_j$  на  $v_j$ , если  $f_i(x)$  растет по  $x_j$ , и — на  $w_j$  — в противном случае. Такие операторы назовем *гетерогенными* — они охватывают все линейные отображения  $f(x) = Ax$  с постоянной матрицей.

Еще одна простая идея заключается в использовании представлений

$$f(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$$

с монотонно возрастающими и убывающими функциями  $\varphi$  и  $\psi$ .

Для монотонного оператора  $f(x)$  в качестве сопутствующего можно взять  $\widehat{f}(v, w) = f(v)$ , для антимонотонного (убывающего по  $x$ ) —  $\widehat{f}(v, w) = f(w)$ .

Композиция  $f(g(x))$  гетеротонных операторов — гетеротонна. Сопутствующий оператор —

$$\widehat{f}(\widehat{g}(v, w), \widehat{g}(w, v)).$$

Далее вводится оператор  $\widetilde{f}$ , сопоставляющий паре элементов  $(v, w)$  пару  $(\widehat{f}(v, w), \widehat{f}(w, v))$ . Легко видеть, что если теперь пространство  $R^{2n}$  пар  $(v, w)$  полуупорядочить ортантом  $R_{+-}^{2n}$ , первые  $n$  координат которого положительны, остальные отрицательны, то оператор  $\widetilde{f}(v, w)$  будет монотонным (по конусу  $R_{+-}^{2n}$ ).

В результате изучение  $f(x)$  может быть сведено к исследованию монотонного оператора  $\widetilde{f}(v, w)$  в расширенном пространстве.

Монотонность, конечно, очень сильное средство, но сама по себе (в голом виде) она мало что дает.

Действенные предположения легко возникают в русле теорем предыдущего раздела. Роль инвариантного конусного отрезка теперь играет *сильно инвариантный* конусный отрезок  $\langle v, w \rangle$ , определяемый неравенствами

$$\widehat{f}(v, w) \geq v, \quad \widehat{f}(w, v) \leq w. \quad (10.5)$$

Неравенства (10.5) обеспечивают обычную инвариантность конусного отрезка  $\langle (v, w), (w, v) \rangle$  для оператора  $\widehat{f}(v, w)$ .

Роль предположения о единственности равновесия теперь играет единственная разрешимость системы уравнений <sup>8)</sup>

$$\widehat{f}(v, w) = v, \quad \widehat{f}(w, v) = w. \quad (10.6)$$

В итоге, чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела при изучении, например, системы уравнений

$$\dot{x} = f(x) - x,$$

надо перейти к рассмотрению *сопутствующей системы*

$$\begin{cases} \dot{v} = \widehat{f}(v, w) - v, \\ \dot{w} = \widehat{f}(w, v) - w, \end{cases}$$

оператор сдвига по траекториям которой  $\widehat{U}_{ts}$  будет «половинкой» монотонного оператора

$$\widetilde{U}_{ts}(v, w) = \{\widehat{U}_{ts}(v, w), \widehat{U}_{ts}(w, v)\},$$

и при выполнении условий (10.5), (10.6) будут работать в  $\mathbb{R}^{2n}$  теоремы 10.2.1, 10.2.2 и лемма 10.2.3.

## 10.4. Дифференциальные неравенства

В скалярном случае неравенства

$$\dot{x} > \varphi(x, t), \quad \dot{y} < \varphi(y, t), \quad x(0) \geq y(0),$$

влекут за собой оценку  $x(t) > y(t)$  при  $t > 0$  (см. лемму 2.4.2).

Результат имеет многочисленные применения, но на  $n \geq 2$  не обобщается. В монотонном случае идея работает почти так же хорошо.

---

<sup>8)</sup> Просто разрешимость (10.6) вытекает из наличия сильно инвариантного конусного отрезка.

**10.4.1. Если**

$$\dot{x} \geq f(x, t), \quad \dot{y} \leq f(y, t), \quad x(0) \geq y(0)$$

и отображение  $f(x, t)$  внедиагонально монотонно, то  $x(t) \geq y(t)$  при  $t > 0$ .

◀ При доказательстве работает та же техника, что и в разделе 10.2. ▶

**10.4.2.** Пусть оператор  $f(x, t)$  гетеротонный и  $\widehat{f}(v, w, t)$  — сопутствующий для него. Тогда из

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \dot{v} \geq \widehat{f}(v, w, t), \quad \dot{w} \leq \widehat{f}(w, v, t), \quad v(0) \leq x(0) \leq w(0)$$

следует

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t) \quad \text{при } t > 0.$$

**10.5. Супероднородность**

Предположение о единственности равновесия, а тем более о единственной разрешимости системы (10.6), — легко сделать, но трудно проверить. Поэтому конструктивные результаты в соответствующем направлении представляют определенный интерес.

Монотонный сильно положительный оператор  $f(x)$  назовем *супероднородным*<sup>9)</sup>, если для любых  $x > 0$  и  $\tau \in (0, 1)$

$$f(\tau x) > \tau f(x). \quad (10.7)$$

Для гетеротонного сильно положительного оператора  $f(x)$  аналогом (10.7) является

$$\widehat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \widehat{f}(v, w) \quad (v, w > 0). \quad (10.8)$$

Обратное неравенство

$$\widehat{f}\left(\frac{1}{\tau} v', \tau w'\right) < \frac{1}{\tau} \widehat{f}(v', w') \quad (v', w' > 0)$$

следует из (10.8) с помощью замены  $v' = \tau v$ ,  $w' = \frac{1}{\tau} w$ .

<sup>9)</sup> В [15] такие операторы называются вогнутыми.

В случае (10.7) неподвижная точка  $y = f(x)$  на внутренности конуса единственна (если есть), а в случае (10.8) система (10.6) имеет не более одного решения при условии  $v, w > 0$ .

Усиление (10.8)

$$\widehat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau^\nu \widehat{f}(v, w) \quad (v, w > 0, \nu \in (0, 1)) \quad (10.9)$$

обеспечивает также существование решения.

При доказательстве перечисленных результатов эффективно использование метрики Биркгофа

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha: e^{-\alpha} x \leq y \leq e^{\alpha} x\} \quad (x, y > 0).$$

◀ Например, в ситуации (10.7)

$$f(x) \geq f(e^{-\rho(x,y)} y) \geq e^{-\rho(x,y)} f(y).$$

Аналогично,

$$f(y) \geq f(e^{-\rho(x,y)} x) \geq e^{-\rho(x,y)} f(x),$$

откуда

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y),$$

что влечет за собой единственность неподвижной точки,  $x^* = f(x^*)$ , если таковая существует. ▶

Ситуации (10.8) и (10.9) рассматриваются аналогично. При появлении показателя степени  $\nu \in (0, 1)$  операторы становятся сжимающими (с коэффициентом  $\nu$ ), что помимо единственности обеспечивает также существование.

### Упражнение

Пусть для гетерогенного оператора  $f(x)$  при любом  $x > 0$  и всех  $i$  выполняются неравенства

$$f_i(x) - \sum_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| x_j > 0.$$

Тогда справедливо (10.8).

Существенно, что в ситуациях (10.7), (10.8) при наличии неподвижной точки (равновесия)  $x^* > 0$  оговаривать существование

инвариантного и, соответственно, сильно инвариантного конусного отрезка не требуется. Таковым оказывается  $\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \right\rangle$  при любом  $\tau \in (0, 1)$ . Действительно, в общей ситуации (10.8), например,

$$\widehat{f}\left(\tau x^*, \frac{1}{\tau} x^*\right) > \tau \widehat{f}(x^*, x^*) = \tau x^*,$$

$$\widehat{f}\left(\frac{1}{\tau} x^*, \tau x^*\right) < \frac{1}{\tau} \widehat{f}(x^*, x^*) = \frac{1}{\tau} x^*.$$

## 10.6. Примеры

Рассмотрим оператор  $f(x)$  с компонентами

$$f_1(x) = 1 - e^{-x_1} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}},$$

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x_2)}{x_1}} + \sqrt[10]{\frac{x_2}{x_1}}.$$

Функция  $f_1(x)$  здесь монотонно возрастает по  $x_1$  и убывает по  $x_2$ , а  $f_2(x)$  — возрастает по  $x_2$  и убывает по  $x_1$ . Сопутствующим будет оператор  $\widehat{f}$  с компонентами

$$\widehat{f}_1(v, w) = 1 - e^{-v_1} + \sqrt{\frac{v_1}{w_2}},$$

$$\widehat{f}_2(v, w) = \sqrt{\frac{\ln(1+v_2)}{w_1}} + \sqrt[10]{\frac{v_2}{w_1}}.$$

Сильная положительность  $f$  и  $\widehat{f}$  очевидна. Условие (10.8) легко проверяется. Сильно инвариантным конусным отрезком является, например,  $\langle v, w \rangle$ , где  $v = (1, 1)$ ,  $w = (6, 6)$ . Поэтому  $f$  имеет на внутренности ортанта единственную неподвижную точку, асимптотически устойчивую с точки зрения (10.1).

Рассмотрим другой оператор  $f$ :

$$f_1(x) = \operatorname{arctg} x_1 + \sqrt[10]{\frac{x_2}{x_1}},$$

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{5 + x_1}} + \sqrt[10]{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Здесь нельзя сказать, что функции  $f_1, f_2$  монотонно возрастают или убывают по  $x_1$  или  $x_2$ . Тем не менее идея построения сопутствующего оператора может быть оставлена прежней. Каждое конкретное  $x_i$  (из тех  $x_i$ , которые неоднократно повторяются в записи функций  $f_1, f_2$ ) заменяются на  $v_i$  или  $w_i$ , в зависимости

от того, возрастает или убывает функция  $f_i$  по этому конкретному аргументу. Такое построение приводит к сопутствующему оператору с компонентами

$$\widehat{f}_1(v, w) = \operatorname{arctg} v_1 + \sqrt[10]{\frac{v_2}{w_1}},$$

$$\widehat{f}_2(v, w) = \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{5 + w_1}} + \sqrt[10]{\frac{v_1}{w_2}}.$$

Оператор снова получается супероднородным. Сильно инвариантным для  $\widehat{f}$  оказывается тот же конусный отрезок, что и в предыдущем примере. Существование, единственность и асимптотическая устойчивость<sup>10)</sup> равновесия при движении (10.1) — гарантируются.

## 10.7. Матричный конус

Идеи полуупорядоченности широко используются также за пределами рассмотренного круга задач. Особенно — в функциональных пространствах при изучении интегральных уравнений, но это слишком большая область, чтобы ее затрагивать вскользь.

Ниже рассматривается маленький пример с единственной целью показать более широкие возможности использования полуупорядоченности.

Легко проверить, что множество  $K$  положительно определенных матриц является конусом. Полуупорядочим с помощью  $K$  пространство  $E$  симметричных матриц. Будем считать элементы  $x \in R^n$  вектор-столбцами и рассмотрим оператор  $H: R^n \rightarrow E$ ,

$$H(x) = xx',$$

где штрих обозначает транспонирование.

Производная  $H(x)$  вдоль траекторий линейной системы  $\dot{x} = Ax$  равна

$$\frac{d}{dt}(xx') = xx'A' + Axx',$$

т. е.

$$\dot{H} = HA' + AH. \quad (10.10)$$

Подстановкой легко убедиться, что решением (10.10) служит

$$H(t) = e^{At}H(0)e^{A't}.$$

Из  $H_1(0) \geq H_2(0)$  следует

$$H_1(t) - H_2(t) = e^{At}[H_1(0) - H_2(0)]e^{A't} \geq 0,$$

<sup>10)</sup> На внутренности  $R_+^n$ .

что означает монотонность оператора сдвига по траекториям матричного дифференциального уравнения (10.10).

Для асимптотической устойчивости нулевого равновесия системы с монотонным оператором сдвига достаточно, чтобы нашлась точка  $X \in \text{int } K$ , идущая под действием оператора сдвига назад, и точка  $Y \in -\text{int } K$ , идущая вперед<sup>11)</sup>. Наличие таких точек в данном случае гарантирует разрешимость в  $\text{int } K$  уравнения

$$H_0 A' + A H_0 = -G_0 \quad (10.11)$$

при  $G_0 \in \text{int } K$ .

В случае гурвицевой матрицы  $A$  интеграл

$$H_0 = \int_0^{\infty} e^{At} G_0 e^{A't} dt$$

сходится и является решением (10.11).

Новых результатов для  $\dot{x} = Ax$ , естественно, не получилось — но открылась еще одна точка зрения на линейные системы<sup>12)</sup>. Оказалось, что самый общий случай укладывается в рамки идеологии полуупорядоченности. Это в какой-то степени свидетельствует, что последняя не так узка, как иногда кажется.

<sup>11)</sup> Обоснование этого факта почти не отличается от схемы рассуждений из раздела 10.2 в ситуации  $K = R_+^n$ .

<sup>12)</sup> Новая точка зрения, в свою очередь, открывает новые пути, опробование которых в данном случае быстро приводит к различным нелинейным обобщениям.

## Глава 11

### **Коллективное поведение**

#### **11.1. Содержательные примеры**

Пусть  $i$ -й элемент системы распоряжается выбором значения  $x_i$  и  $D_i(x_1, \dots, x_n)$  — его функция выигрыша. Один из вариантов поведения — двигаться в направлении условного максимума  $D_i(x)$  по собственной переменной  $x_i$ , что в случае непрерывного времени может быть описано как

$$\dot{x}_i \sim f_i(x) - x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.1)$$

где каждое *положение цели*  $f_i(x)$  определяется из условия

$$D_i(x_1, \dots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \dots, x_n) = \max_{x_i} D_i(x).$$

Поведение (11.1) в случае асимптотической устойчивости приводит в так называемое *равновесие игры по Нэшу*.

В рыночной модели тоже возникает динамика типа (11.1), если под  $x_i$  подразумевается цена  $i$ -го товара, а  $f_i(x) - x_i$  по знаку совпадает с разницей между спросом и предложением этого товара. Спрос выше предложения — продавец увеличивает цену, ниже — уменьшает. Как быстро — когда как, зависит от тысячи факторов.

Куда разговор клонится, видимо, понятно. К динамике систем, в которых существенную роль играет неопределенность. Направление движения определено, скорость — нет. В моделях игрового типа на скорость может влиять «с какой ноги встал». Там неопределенность присуща самой системе. В других случаях это может быть следствием приближительности знания. Скажем, в модели сосуществования биологических видов движение (11.1) характеризует изменение численности  $i$ -го вида в направлении стационарной

численности  $f_i(x)$ . Реальная динамика, возможно, более-менее определена, но точные уравнения неизвестны.

Если перечисленные примеры кому-то кажутся чересчур «значительными», спектр задач легко приземлить. Душевые колонки подключены к одному стояку,  $x_i$  — положение крана горячей воды. Каждый крутит свой кран, мешая соседям добиться желаемой температуры. Устойчива ли система?

## 11.2. Формальная модель

Задачи рассматриваемого типа укладываются в рамки описания

$$\text{sign } \dot{x}_i = \text{sign} (f_i(x) - x_i) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.2)$$

где  $f_i(x)$  иногда мы будем называть положением цели  $i$ -го элемента, но это лишь для удобства разговора. Ни о каких элементах и целях можно не думать.

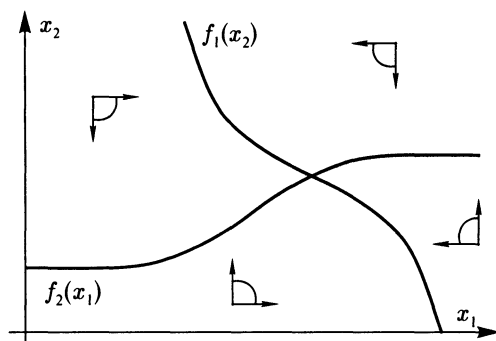


Рис. 11.1

Важно, пожалуй, представлять геометрическую картину, стоящую за кадром. Рис. 11.1 изображает пример на плоскости. В четырех помеченных точках движение возможно в любом направлении в пределах выделенных секторов. Выбранная для примера ситуация, когда  $f_i(x)$  не зависит от  $x_i$ , необязательна. Но такого сорта предположение естественно в рассматриваемых моделях.

Дело в том, что описание

$$\text{sign } \dot{x}_i = \text{sign } g_i(x)$$

остается тем же по сути в случае замены  $g_i(x)$  на  $h_i(x)$ , если

$$\text{sign } g_i(x) = \text{sign } h_i(x).$$

Поэтому в (11.2) можно подразумевать сделанной замену  $g_i(x)$  на  $f_i(x) - x_i$ , где функция  $f_i(x)$  (не зависящая от  $x_i$ ) определена из условия

$$g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0,$$

что возможно в естественных предположениях.

Модель в записи (11.2), разумеется, неудобна, поскольку траектория  $x(t)$  может останавливаться «раньше времени», не говоря о том, что само определение решения здесь имеет свои сложности. Поэтому мы заменим (11.2) «чуть-чуть» другой системой:

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t)[f_i(x) - x_i] \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.3)$$

считая функции  $\gamma_i(t)$  строго положительными и такими, что

$$\int_0^{\infty} \gamma_i(t) dt = \infty \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11.4)$$

Расходимость интегралов (11.4) гарантирует, что система (11.3) быстро не устает, т. е.  $x(t)$  не может сходиться к неравновесной точке.

Вместо  $f_i(x) - x_i$  в (11.3) может фигурировать любая другая функция-индикатор  $g_i(x)$ , совпадающая по знаку с  $f_i(x) - x_i$ . Запись (11.3) никаких особых преимуществ не имеет, за исключением лаконичности некоторых формулировок и объяснений.

*Принципиальное отличие модели (11.3) от обычных систем дифференциальных уравнений заключается в том, что здесь в поле зрения находится целый ансамбль систем. Каждой системе отвечает свой набор функций  $\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$ . Если речь идет об асимптотической устойчивости равновесия (11.3), то это подразумевает сходимость  $x(t) \rightarrow x^*$  всех траекторий ансамбля. Устойчивость по Ляпунову — означает, что по любой окрестности  $V$  можно указать такую —  $W$ , что, стартуя из  $W$ , ни одна система ансамбля не может вывести траекторию из  $V$ .*

Векторная запись системы (11.3) имеет вид

$$\dot{x} = \Gamma(t)[f(x) - x], \quad (11.5)$$

где  $\Gamma(t) = \text{diag}\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$ .

Стержневой вопрос в рассматриваемых моделях — асимптотическая устойчивость равновесия. По первому впечатлению обычно кажется, что ответ может быть только отрицательным, поскольку системе «дозволяется» уж очень свободно себя вести. Тем не менее, если существует потенциал  $\varphi(x)$ , такой что

$$f(x) - x = -\text{grad } \varphi(x),$$

то движение (11.5) при любом  $\Gamma(t)$  происходит под острым углом к минус градиенту — и потому локальные минимумы  $\varphi(x)$  асимптотически устойчивы.

Действительно, на траекториях (11.5) в неравновесных точках

$$\dot{\varphi} = -\text{grad } \varphi(x)\Gamma(t)[f(x) - x] = -\sum_i \gamma_i(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 < 0.$$

Существуют ли другие классы устойчивых моделей за пределами этой возможности? С одной стороны — да, поскольку следующие параграфы указывают такие классы. С другой стороны, как это часто бывает, при внимательном рассмотрении «да» переходит в размытое «нет». Причина заключается в следующем. В [21] доказываются обратные теоремы для ансамблей динамических систем, гарантирующие в случае асимптотической устойчивости существование функции Ляпунова  $\varphi(x)$ , убывающей на траекториях (11.5), т. е. (мы здесь не вникаем в детали)

$$\sum_i \gamma_i(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} [f_i(x) - x_i] < 0. \quad (11.6)$$

Но в (11.6) не может быть ни одного положительного слагаемого

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} [f_j(x) - x_j] > 0,$$

иначе для системы ансамбля с очень большим  $\gamma_j$  и малыми  $\gamma_i$  ( $i \neq j$ ) неравенство (11.6) перевернулось бы. Естественный (но не единственный) выход из положения:

$$\text{sign} [f_i(x) - x_i] = -\text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Это означает, что существует потенциал  $\varphi(x)$ , минус градиент которого представляет собой набор функций индикаторов для рассматриваемой модели. Иными словами, существует набор положительных «интегрирующих множителей»  $\mu_i(x) > 0$ , таких что

$$g_i(x) = \mu_i(x)[f_i(x) - x_i]$$

становятся компонентами градиента некоторого потенциала.

Но это, конечно, идеология. На практике требуются более удобные инструменты.

### 11.3. Системы с ограниченным взаимодействием

Отсутствие взаимодействия между элементами системы характеризует условие

$$f_i(x) \equiv x_i^* \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.7)$$

означающее независимость положения цели каждого элемента от состояния системы. Устойчивость равновесия в этом случае — тривиальный факт.

Условие (11.7) еще можно охарактеризовать как  $\partial f_i / \partial x_j \equiv 0$ . Поэтому ограничения производных естественно трактовать как ограниченность межэлементного взаимодействия в системе.

Вот два условия <sup>1)</sup>

$$\sum_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1, \quad \sum_j \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| < 1, \quad (11.8)$$

каждое из которых обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом равновесия  $x^*$ , если таковое существует. При замене

<sup>1)</sup> Суммирование идет по всем  $j$ , а справедливость неравенств предполагается при любом  $i$ .

в (11.8) неравенства  $< 1$  на  $< 1 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) — факт существования  $x^*$  можно присовокупить к выводам.

Для простоты разговора будем считать, например,

$$\sum_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \quad (11.9)$$

В этом случае по одной из теорем о среднем [7] оператор  $f(x)$  является сжимающим по кубической норме<sup>2)</sup>

$$\|f(x) - f(y)\|_m \leq (1 - \varepsilon)\|x - y\|_m. \quad (11.10)$$

Существование и единственность равновесия вытекают из принципа сжимающих отображений. В силу (11.10) вектор  $f(x) - x$  в любой граничной точке шара  $\|x - x^*\|_m \leq r$  направлен внутрь шара (рис. 11.2). При этом из-за специфики нормы  $\|\cdot\|_m$  (шар представляет собой куб со сторонами, параллельными осям координат) умножение  $f(x) - x$  на  $\Gamma(t)$  принципиально не меняет ситуацию — вектор  $\Gamma(t)(f(x) - x)$  остается направленным внутрь шара. Поэтому

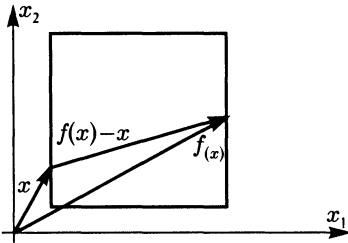


Рис. 11.2

$$\varphi(x) = \|x - x^*\|_m$$

является в данном случае функцией Ляпунова, которая убывает на траекториях любой системы ансамбля (11.5).

В случае

$$\sum_j \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (11.11)$$

$f(x)$  сжимает по октаэдрической норме<sup>3)</sup>  $\|x\|_l = \sum_i |x_i|$ , которой подчинена как раз столбцовая норма матрицы.

Существование и единственность равновесия снова вытекают из принципа сжимающих отображений. Что касается динамики, то данная ситуация визуально

<sup>2)</sup> Для  $\|x\|_m = \max_i |x_i|$  подчиненной является строчная норма матрицы

$$\|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

<sup>3)</sup> Которая двойственна кубической.

менее очевидна. В качестве упражнения предлагается доказать, что при условии (11.11) функцией Ляпунова может служить

$$\varphi(x) = \sum_i |f_i(x) - x_i|.$$

С тем же успехом динамику систем с ограниченным межэлементным взаимодействием можно изучать, отправляясь не от условий (11.8), а от

$$\sum_j \mu_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < \mu_i, \quad \sum_j \mu_j \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| < \mu_j, \quad (11.12)$$

где существование строго положительных констант  $\mu_1, \dots, \mu_n$  предполагается. «Хитрость» такого обобщения заключается в линейной замене координат, приводящей (11.12) к виду (11.8).

## 11.4. Гомогенные системы

Если иметь в виду содержательные интерпретации задачи, то на практике довольно часто встречаются системы с однотипным, однородным (гомогенным) взаимодействием элементов, что соответствует одинаковости знака всех производных  $\partial f_i / \partial x_j$ . Например, в рыночной модели с валовой заменимостью товаров [20] все  $\partial f_i / \partial x_j \geq 0$ , с валовой дополнителем —  $\partial f_i / \partial x_j \leq 0$ .

**Пример.** К источнику с внутренним сопротивлением  $r$  и ЭДС  $E$  подключены  $n$  электрических сопротивлений  $x_i$ , снабженных регуляторами и находящихся в распоряжении участников  $A_i$ . Цель каждого оператора состоит в поддержании на своем сопротивлении напряжения  $v_i^0$ . Глядя на стрелку личного вольтметра,  $A_i$  обычно крутит регулятор в соответствии со знаком функции индикатора

$$g_i(x) = v_i^0 - \frac{E x_i}{r + \sum_j x_j}.$$

При  $i \neq j$  все  $\partial g_i / \partial x_j \geq 0$ , равно как и  $\partial f_i / \partial x_j \geq 0$ .

Описанная «игрушка» при условии  $\sum_i v_i^0 < E$  — устойчива (что легко следует из приводимых ниже результатов) — и достижение равновесия (индивидуальных целей) не вызывает затруднений. Возможны, разумеется, другие электрические схемы, в том числе неустойчивые. Последние используются для проверки коллективов на психологическую совместимость. Регулировать «свое напряжение» в неустойчивой схеме — нелегкое занятие, способное довести участника до нервного срыва.

◀ Если монотонный оператор  $f(x)$  имеет на инвариантном конусном отрезке<sup>4)</sup>  $\langle v, w \rangle$  единственную неподвижную точку<sup>5)</sup>, то (лемма 10.2.3) любая траектория  $v(t)$  любой системы ансамбля (11.5), начинающаяся в точке  $v$ , монотонно возрастает, сходясь к  $x^*$  снизу. Аналогично,  $w(t)$  — монотонно убывает и сходится к  $x^*$  сверху. Траектория  $x(t)$  с началом в любой точке  $\langle v, w \rangle$ , будучи зажатой между  $v(t)$  и  $w(t)$  (см. (10.4)), тоже будет сходиться к  $x^*$ .

При всем при этом любой конусный отрезок  $\langle v(t), w(t) \rangle$  остается инвариантным для  $f$ . Поэтому  $\langle v(t), w(t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$  представляет собой семейство инвариантных множеств, стягивающихся к  $x^*$ , что обеспечивает устойчивость. ▶

Если монотонный сильно положительный оператор  $f(x)$  супероднороден — удовлетворяет неравенству (10.7) — и имеет неподвижную точку  $x^* > 0$ , то единственность равновесия и существование сколь угодно большого инвариантного конусного отрезка на внутренности  $R_+^n$  можно не оговаривать — они следуют автоматически (см. раздел 10.5).

<sup>4)</sup> То есть  $f(v) \geq v$ ,  $f(w) \leq w$ .

<sup>5)</sup> Другими словами, система (11.5) имеет на  $\langle v, w \rangle$  единственное равновесие  $x^*$ .

## Обозначения

- ◀ — обозначает начало рассуждения, темы, доказательства.
- ▶ — обозначает конец рассуждения, темы, доказательства.
- (▶) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки».

$A \Rightarrow B$  — из  $A$  следует  $B$

$x \in X$  —  $x$  принадлежит  $X$

$X \cup Y$ ,  $X \cap Y$ ,  $X \setminus Y$  — объединение, пересечение и разность множеств  $X$  и  $Y$

$\bar{\Omega}$  — замыкание области  $\Omega$

$\text{int } \Omega$  — внутренность  $\Omega$

$R^2$  — плоскость,  $R^3$  — трехмерное,  $R^n$  —  $n$ -мерное пространство

$i$  — мнимая единица,  $i^2 = -1$

$z = x + iy$  — комплексное число,  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  — его тригонометрическая запись,  $x = \text{Re } z$  — действительная часть,  $y = \text{Im } z$  — мнимая;  $z^* = x - iy$  — комплексное сопряженное число

$x = \{x_1, \dots, x_n\}$  — вектор,  $x_i$  — его координаты

$xy$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ ,

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Для скалярного произведения используются также эквивалентные обозначения  $x \cdot y$  и  $(x, y)$

$A^T = A'$  — транспонированная матрица  $A$  ( $a_{ij}^T = a_{ji}$ )

$A^*$  — сопряженная матрица — для получения  $A^*$  матрица  $A$  транспонируется, и ее элементы заменяются на комплексно сопряженные

$\text{tr } A$  — след матрицы  $A$  (сумма диагональных элементов)

$\frac{df(x)}{dx}$  — производная функции  $f(x)$  в точке  $x$ , эквивалентное обозначение  $f'(x)$

для производной по времени вместо  $x'(t)$  чаще используется  $\dot{x}$ , а для второй производной  $\ddot{x}$

$\frac{\partial u}{\partial x}$  — частная производная функции  $u$  по переменной  $x$ . Эквивалентное обозначение  $u'_x$

$\nabla f(x)$  — градиент функции  $f(x)$ , т. е. вектор

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

который направлен по нормали к поверхности постоянного уровня функции  $f(x)$  и численно равен скорости максимального роста  $f(x)$  в точке  $x$

$\langle x \rangle$  — среднее значение  $x$  — по времени или по фазовому объему, зависит от контекста

$\langle v, w \rangle$  — конусный отрезок, т. е. множество векторов  $x$ , для которых выполняются неравенства  $v \leq x \leq w$

$\int^{\infty}$  — обозначает несобственный интеграл по бесконечному промежутку, когда значение нижнего предела не играет роли

## **Литература**

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., 1981.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. М., 1960.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2000.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., 1979. Изд. 5. М.: УРСС, 2003.
6. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
7. *Босс В.* Лекции по математике. Анализ. М.: УРСС, 2004.
8. *Босс В.* Интуиция и математика. М., 2003.
9. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., 1966.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1988.
12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
13. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
14. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М., 1973.
15. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
16. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики. М., 1950. Изд. 2. М.: УРСС, 2003.
17. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004.
18. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М., 2000.
19. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М., 1972.
20. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М., 1972.
21. *Опойцев В. И.* Обращение принципа сжимающих отображений // Успехи матем. наук. 1976. 31, вып. 4.

22. Основы автоматического управления / Под ред. В. С. Пугачева. М., 1974.
23. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М., 1979.
24. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М., 1981. Изд. 2. М.: УРСС, 2004.
25. *Постот Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М., 1980.
26. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: УРСС, 2001.
27. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2003.
28. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004.
29. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2003.

## **Предметный указатель**

- Автоколебание** 112  
автономная система 21  
адиабатические процессы 140  
амплитуда 27, 101  
— дисперсии 107  
— поглощения 107  
амплитудно-фазовая характеристика 98, 158  
асимптотическая устойчивость 83, 89  
аттрактор Лоренца 146
- Базис** 10  
бифуркация 123  
— Андронова—Хопфа 124  
БУ-система 86
- Вековое уравнение** 110  
вековые члены 59  
виртуальное перемещение 165  
внедиагональная монотонность 179  
— положительность 178  
внутренний резонанс 111  
возможное перемещение 165  
вронскиан 67  
входной сигнал 75  
вынужденное колебание 103  
выходной сигнал 75
- Гамильтониан** 170  
гармонический сигнал 101, 158  
гетеротонный оператор 182  
гиперплоскость 10  
годограф Михайлова 98
- голономная система 164  
грубость модели 126
- Двухточечная задача** 74, 76  
действие по Гамильтону 172  
дельта-функция 71  
детерминант 12  
дисперсия 121  
диссипативная система 96  
дифференциальный оператор 50
- Евклидово пространство** 8
- Жесткий режим** 113
- Задача Коши** 22, 30  
— Штурма—Лиувилля 77  
задача Коши 22
- Идеальная связь** 165  
изменение фазового объема 67  
импульсная переходная функция 75  
инвариант Пуанкаре 174  
— Пуанкаре—Картана 173  
интегральная воронка 31  
интегрирующий множитель 48  
интерференция 101
- Катастрофа сборки** 125  
квадратичная форма 14  
КдФ-уравнение 118  
кинетический потенциал 169  
коллинеарные векторы 10  
конус 178

- конусный отрезок 178  
 круговая частота 27, 101
- Линейная независимость функций** 53  
 линейно зависимые векторы 9  
 линейные волны 118  
 линейный оператор 10  
 липшицевость 31
- Матрица** 10  
 — вырожденная 12  
 — гурвицева 97  
 — единичная 11  
 — Коши 54  
 — монодромии 103  
 — нормальная 58  
 — обратная 11  
 — транспонированная 11  
 — устойчивая 97  
 — Якоби 89  
 матрицант 54  
 метод удаленного наблюдателя 97  
 метрика 15  
 — Биркгофа 185  
 монотонность 178  
 мультипликатор 103  
 мягкий режим 112
- Невязка** 37  
 нелинейные волны 118  
 нелинейный резонанс 117  
 неподвижная точка 17  
 неравенство Важевского 100  
 — Коши—Буняковского 9  
 неустойчивость вполне 83  
 — полная 83  
 норма вектора 8, 15  
 — кубическая 15  
 — матрицы 16  
 — октаэдрическая 15  
 — подчиненная 16  
 нормальные координаты 111
- Область отталкивания** 113  
 — притяжения 83  
 обобщенная функция 70, 71  
 обобщенные координаты 166  
 обобщенные силы 167  
 обобщенный импульс 169  
 обратная связь 156  
 — — отрицательная 156  
 — теорема 92  
 оператор гетерогенный 182  
 — положительный 178  
 — сдвига 23  
 — сильно положительный 178  
 орбитальная устойчивость 112  
 особое решение 31  
 ошибка Лагранжа 61
- Парадокс возврата** 136  
 — Циглера 129  
 параметрический резонанс 108  
 первый интеграл 43  
 — метод Ляпунова 99  
 передаточная функция 155  
 переменные действия 174  
 — угла 174  
 — циклические 174  
 перемешивание 136  
 период колебания 101  
 периодическая функция 101  
 плоскость 9  
 полином гурвицев 97  
 — устойчивый 97  
 положительно определенная функция 84  
 полуупорядоченность 178  
 потенциал 169  
 преобразование Лапласа 78  
 — Лежандра 170  
 — Фурье 79, 157

- пример Бореля 122  
принцип сжимающих отображений 17  
продолжимость траектории 33  
производная Ли 43  
— обобщенной функции 73  
— по направлению векторного поля 43  
псевдоградиентное движение 42
- Равномерная непрерывность** 17  
равнотепенная непрерывность 17  
размерность 10  
— дробная 145  
— по Хаусдорфу 145  
ранг матрицы 14  
реакция связи 165  
резонанс 106  
репеллер 143  
ряд Фурье 102
- Самоподобие аттракторов** 144  
седло 81  
секулярное уравнение 110  
секулярные члены 59  
сепаратриса 82  
сжимающее отображение 17  
система быстро устающая 86  
скалярное произведение 8  
собственная частота 106  
собственное значение 12  
собственный вектор 13  
солитон 116, 118  
сопряженная система 69  
сопутствующая система 183  
сопутствующий оператор 182  
спектр матрицы 13  
спектральная норма 16  
спектральный радиус 13  
стационарная связь 165  
степень свободы 167
- столбцовая норма 16  
странный аттрактор 146  
строчная норма 16  
структурная устойчивость 126  
суперпозиции принцип 52
- Телеграфное уравнение** 118  
теорема Брауэра 181  
— вириала 39, 140  
— Лиувилля 46, 68  
— Ляпунова 99  
— о выпрямлении 44  
— Пеано 30  
— Пикара 31  
— Пуанкаре 136  
теория Флоке 106  
 $\tau$ -периодичность 101
- Уединенная волна** 118  
узел 81  
управляемость 162  
уравнение Абеля 25  
— Бернулли 47  
— в вариациях 89  
— Ван-дер-Поля 124  
— Кортвега—де Фриза 118  
— Матье 108  
— Риккати 45  
— с разделяющимися переменными 25  
— синус-Гордона 118  
— характеристик 43  
— Шрёдингера 78  
уравнения Гамильтона 170  
— Лагранжа 169  
— — первого рода 166  
условие физической реализуемости 77  
устойчивость 89  
— в целом 94  
— по линейному приближению 90

— по Ляпунову 81  
устойчивый фокус 81

**Фаза** 101

фазовое пространство 21  
фазовый портрет 21  
факториальная сходимос-  
ть 37  
финитная функция 71  
фрактал 145  
фундаментальная матрица реше-  
ний 53  
— система решений 53  
функция Грина 74  
— Лагранжа 169  
— Ляпунова 85, 92  
— Хэвисайда 73  
функция-индикатор 191

**Характеристический показатель**  
99

— полином 56, 57  
характеристическое уравнение 56,  
57  
холономная парадигма 144

**Центр** 82

**Частота нормальная** 110  
— парциальная 111  
численные методы 36

**Эквивалентность норм** 15  
эргодичность 136

**Ядро интегрального оператора** 74

## Издательство УРСС

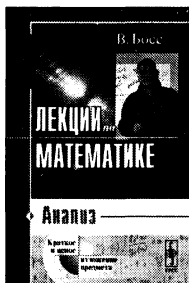
специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



### Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:



*В. Босс*

#### Лекции по математике: анализ

Книга отличается краткостью и прозрачностью изложения, вплоть до объяснений «на пальцах». Значительное внимание уделяется мотивации результатов и укрупненному видению. В первой части дается обширный материал стандартных курсов математического анализа. Во второй, «необязательной», части излагаются — в стиле обзоров и очерков — примыкающие к анализу предметы: аналитические функции, топология и неподвижные точки, векторный анализ. «Высокие материи» рассматриваются на доступном уровне. Книга легко читается.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

#### *В. Босс. Лекции по математике*

*Планируются к изданию следующие тома:*

- Линейная алгебра
- Геометрические методы нелинейного анализа
- Дискретные задачи
- Теория вероятностей
- ТФКП
- Вычислимость и доказуемость
- Оптимизация
- Уравнения математической физики
- Функциональный анализ
- Алгебраические методы
- Случайные процессы
- Топология
- Численные методы

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:  
тел./факс (095) 135-42-16, 135-42-46  
или электронной почтой URSS@URSS.ru  
Полный каталог изданий представлен  
в Интернет-магазине: <http://URSS.ru>

## Издательство УРСС

*Научная и учебная  
литература*



Представляет Вам свои лучшие книги:

Дифференциальные и интегральные уравнения

- Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений.  
*Понтрягин Л. С.* Дифференциальные уравнения и их приложения.  
*Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.  
*Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений.  
*Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения.  
*Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.  
*Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.  
*Амелькин В. В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.  
*Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях.  
*Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.  
*Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений.  
*Кузьмина Р. П.* Асимптотические методы для обыкновенных диф. уравнений.  
*Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.

*В. Босс. Наваждение*

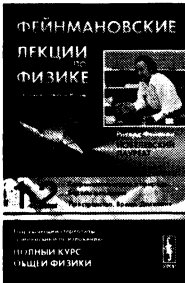
- Жуков А. В.* Вездесущее число «пи».  
*Вейль А.* Основы теории чисел.  
*Вейль Г.* Алгебраическая теория чисел.  
*Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел.  
*Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр.  
*Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.  
*Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.  
*Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей.  
*Боровков А. А.* Теория вероятностей.  
*Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия.  
*Смирнов Ю. М.* Курс аналитической геометрии.  
*Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Т. 1–3.  
*Клейн Ф.* Неевклидова геометрия.  
*Клейн Ф.* Высшая геометрия.  
*Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.  
*Крыжановский Д. А.* Изопериметры. Свойства геометрических фигур.  
*Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными.  
*Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ.  
*Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.  
*Боярчук А. К. и др.* Справочное пособие по высшей математике (Антидеמידович). Т. 1–5.  
*Краснов М. Л. и др.* Вся высшая математика. Т. 1–6.  
*Краснов М. Л. и др.* Сборники задач с подробными решениями.



Издательство УРСС



Представляет Вам свои лучшие книги:



*Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.*

**Фейнмановские лекции по физике. В 9 т.**

**Задачи и упражнения с ответами и решениями. В 2 т.**

Внимание читателя предлагается знаменитый курс лекций по общей физике, который выдающийся американский физик, Нобелевский лауреат Ричард Фейнман читал в Калифорнийском технологическом институте.

Лекции Фейнмана, записанные вначале на магнитофон, а затем «переведенные» на «письменный английский» профессорами М. Сэндсом и Р. Лейтоном, не похожи ни на один известный курс. Они отличаются оригинальным методом изложения, в котором отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике,

его умение заразить читателей интересом к науке. Последовательность изложения и выбор материала также отличаются от традиционных. В лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что современный читатель уже знает или слышал. Зато в них увлекательно рассказывается о том, как человек изучает окружающую его природу, какое положение занимает физика в ряде других наук, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

Курс будет полезен преподавателям, заставив их по-новому взглянуть на процесс обучения физике; студентам, которые найдут много нового в дополнение тому, что они узнают на лекциях; школьникам, у которых сформирует интерес к физике и поможет им войти в современную науку; а также всем интересующимся физикой.

*Стивен Вайнберг*

## МЕЧТЫ ОБ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ

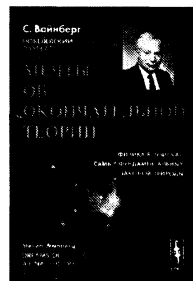
**Физика в поисках**

**самых фундаментальных законов природы**

В своей книге «Мечты об окончательной теории» Стивен Вайнберг — Нобелевский лауреат по физике — описывает поиск единой фундаментальной теории природы, которая для объяснения всего разнообразия явлений микро- и макромира не нуждалась бы в дополнительных принципах, не следующих из нее самой. Электромагнитные силы и радиоактивный распад, удержание кварков внутри нуклонов и разлет галактик — все это, как стремятся показать физики и математики, лишь разные проявления единого фундаментального закона.

Вайнберг дает ответ на интригующие вопросы: Почему каждая попытка объяснить законы природы указывает на необходимость нового, более глубокого анализа? Почему самые лучшие теории не только логичны, но и красивы? Как повлияет окончательная теория на наше философское мировоззрение?

Ясно и доступно Вайнберг излагает путь, который привел физиков от теории относительности и квантовой механики к теории суперструн и осознанию того, что наша Вселенная, быть может, сосуществует рядом с другими вселенными.





Представляет Вам свои лучшие книги:



*Брайан Грин*

**ЭЛЕГАНТНАЯ ВСЕЛЕННАЯ**  
Суперструны, скрытые размерности  
и поиски окончательной теории

Книга Брайана Грина «Элегантная Вселенная» — увлекательнейшее путешествие по современной физике, которая как никогда ранее близка к пониманию того, как устроена Вселенная. Квантовый мир и теория относительности Эйнштейна, гипотеза Калуцы—Клейна и дополнительные измерения, теория суперструн и браны, Большой взрыв и мульти-вселенные — вот далеко не полный перечень обсуждаемых вопросов.

Используя ясные аналогии, автор переводит сложные идеи современной физики и математики на образы, понятные всем и каждому. Брайан Грин срывает завесу таинства с теории струн, чтобы представить миру 11-мерную Вселенную, в которой ткань пространства рвется и восстанавливается, а вся материя порождена вибрациями микроскопических струн.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов естественно-научных дисциплин, так и у широкого круга читателей.

*Роджер Пенроуз*

**НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ**

**О компьютерах, мышлении и законах физики**

Монография известного физика и математика Роджера Пенроуза посвящена изучению проблемы искусственного интеллекта на основе всестороннего анализа достижений современных наук. Возможно ли моделирование разума? Чтобы найти ответ на этот вопрос, Пенроуз обсуждает широчайший круг явлений: алгоритмизацию математического мышления, машины Тьюринга, теорию сложности, теорему Геделя, телепортацию материи, парадоксы квантовой физики, энтропию, рождение вселенной, черные дыры, строение мозга и многое другое.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов, так и у широкого круга читателей.



**Издательство  
УРСС**

**(095) 135-42-46,  
(095) 135-42-16,  
URSS@URSS.ru**

**Наши книги можно приобрести в магазинах:**

- «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (095) 925-2457)
- «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (095) 203-8242)
- «Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. (095) 229-7355)
- «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (095) 238-5083, 238-1144)
- «Дом деловой книги» (м. Пролетарская, ул. Марxisстская, 9. Тел. (095) 270-5421)
- «Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (095) 939-4713)
- «У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чайнова, 15. Тел. (095) 973-4301)
- «СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 311-3954)

**УРСС**  
*«не верит  
глазам  
своим»:*



В. Босс — автор замечательной книги «Интуиция и математика» — предложил нам издавать его «Лекции по математике». Пока выходят первые два тома — «Анализ» и «Дифференциальные уравнения». Но до этого — были раздумья. Сразу стало ясно, что «Лекции» очень эффективны, но нетрадиционны. Поэтому мы решили: соберем отклики. Разослали сто экземпляров рукописи, и теперь «не верим глазам своим». Отзывы «зашкаливают»!

**Из интервью В. Босса**

- *Чельзя ли в двух словах о главной особенности «Лекций»?*
- Дialeктика обучения во взаимодействии сторон. Понимание – умение. Суть – детали. «Лекции» добиваются понимания.
- *Как?*
- *Правдами и неправдами (улыбается). Очень важно, например, поместить проблему «целиком в кадр». Чтобы видно было «сразу все».*
- *Объяснениями на пальцах?*
- *Когда как, только «коротко и ясно». Упрощения, недомолвки. Но главное – обнажение сути.*
- *А что посоветуете, если завтра экзамен, а в голове пусто?*
- *Таблетку димедрола.*



Это очень хорошие учебники. Из тех, что ругают в стенах ВУЗов, но зачитывают до дыр.

*Доцент Ю. Сингин*

О загадке книг В. Босса. «Интуиция и математика» читается как детектив. «Лекции» на кафедре шли нарасхват. В чем дело – не понимаю. Какие-то скрытые пружины.

*Аспирант В. Жеглов*

«Лекции» В. Босса опасны. Автор просто так отдает то, чего студенты должны добиваться годами. На легких хлебах хороших специалистов не выращивают.

*Профессор М. Штольц*

Передайте В. Боссу благодарность от студентов Казахстана. Ксероксы в Алма-Ате перереваются. Книги замечательные.

*Студенты Политеха*

Все как на ладони. Где Босс раньше был?

*Студент Д. Петров*

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**  
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16  
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



2550 ID 21643



9 785354 1007905 >

Любые замечания и предложения по изданию, а также замеченные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru). Полный список замеченных опечаток можно будет увидеть на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>

