Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ 1

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
«МИФРИЛ»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1996

ББК 517.8
Г11
УДК 519.2(075.8)

Пискунов Н. С.: Дифференциальное и интегральное исчисления.
Учеб.: В 2-х т. **Т. 1**— СПб.: Мифрил. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996. — 416 с.
ISBN 5-86457-020-6 (т. 1).

Оригинал-макет подготовлен К. Е. Панкратьевым в системе TrueTEX, *разработанной в ЛВМ мех.-мат. факультета МГУ. Москва, Воробьевы горы, МГУ, сектор "А", комн. 12–18*

ЛР №070819 от 15.01.1993.
Подписано в печать 11.09.96. Формат $60\times88^{1}/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,0. Тираж 6000 экз. Заказ № 1293.
ТОО «Мифрил». 194223, Санкт-Петербург, ул. Курчатова, 10.
Отпечатано с готовых диапозитивов в АООТ «Типография „Правда"».
191126, С.-Петербург, Социалистическая ул., 14.

ISBN 5-86457-020-6 (т. 1)
ISBN 5-56457-032-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ГЛАВА IV
НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

ГЛАВА V
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА VI
КРИВИЗНА КРИВОЙ

ГЛАВА VII
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА X
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА XI
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА XII
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Девятое издание данного учебника отличается от его 8-го издания. Это издание полностью соответствует программе по математике для втузов, расчитанной на 400-450 часов.

В учебник включены две новые гл. XX и XXI.

Гл. XX «Элементы теории вероятностей и математической статистики» содержит материал, предусмотренный соответствующим разделом обязательной программы по математике МВССО СССР.

Гл. XXI «Матрицы. Матричная запись систем и решений систем линейных дифференциальных уравнений» также содержит материал, предусмотренный обязательной программой. Но, кроме того, в этой главе обращено большое внимание на матричную запись систем линейных дифференциальных уравнений и решений систем линейных дифференциальных уравнений. Использована матричная запись последовательных приближенных решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этот материал необходимо поместить в курсе дифференциального и интегрального исчисления для втузов потому, что в настоящее время во многих книгах по электротехнике, радиотехнике, автоматике исследование решений систем дифференциальных уравнений производится с использованием аппарата теории матриц.

Написаны новые §§ 26, 27, 28 гл. XVI. Здесь рассмотрен метод последовательных приблежений решения дифференциальных уравнений, доказывается теорема о существовании решения дифференциального уравнения и теорема единственности. Обращено внимание на строгость изложения всей главы о дифференциальных уравнениях.

Параграф 31 гл. XIII «Понятие о теории устойчивости Ляпунова» значительно расширен. В этом издании он называется так: «Понятие о теории устойчивости Ляпунова. Поведение траекторий дифференциального уравнения в окрестности особой точки». Здесь параллельно с рассмотрением устойчивости решений систем дифференциальных уравнений рассмотрено поведение траекторий вблизи особой точки на фазовой плоскости. Это необходимо было сделать потому, что при изучении соответствующих вопросов в курсах электротехники, радиотехники, автоматики этими понятиями необходимо свободно пользоваться. Заново написаны некоторые параграфы с изложением теории комплексных чисел. Существенно расширен § 2 гл. XI, где дано доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции. Написан дополнительный § 11 гл. XI «Интегрирование комплексной функции действительной переменной». Написаны новые §§ 24 и 25, гл. XVI, посвященные рядам с комплексными членами и степенным рядам с комплексной переменной. Написан новый § 12 гл. XVII, посвященный рядам Фурье в комплексной форме. Расширено изложение вопроса об интеграле Фурье. Освещены понятия, используемые в специальной прикладной литературе (спектр, спектральная функция). Написаны новые § 15 «Ряд Фурье по ортогональной системе функций» и § 16 «Понятие о линейном функциональном пространстве. Аналогия между разложением функций в ряд Фурье и разложением векторов» в гл. XVII. Этот материал изложен таким образом, чтобы студенты и инженеры могли понимать материал других дисциплин, опирающихся на этот математический аппарат.

В гл. XIX написан новый § 20 «Дельта-функция и ее изображение».

В гл. VIII помещен § 19 «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов». Содержанием этого параграфа ранее являлось Приложение I, помещавшееся в конце первого тома этого учебника.

В гл. VII даны § 10 «Интерполяционная формула Ньютона» и § 11 «Числленное дифференцирование». Содержанием этих параграфов ранее являлось Приложение II.

Произведены некоторые дополнения в гл. V, VII, IX, XII, XIII.

Глава XIII «Дифференциальные уравнения» целиком перенесена во второй том.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В пятом издании сохранен без изменений весь текст четвертого издания, но этот материал разделен на два тома (для удобства использования настоящего и предыдущего изданий учебника нумерация глав тоже оставлена без изменения).

Содержание всего учебника определяется программами курса математики для втузов, рассчитанными на 300–450 часов. Учебник предназначается для изучения курса математики как в стационарных, так и в заочных втузах. Это учитывалось при изложении материала; в частности, с этой целью в учебнике разобрано много примеров, иллюстрирующих изложенный теоретически материал и дающих образцы решения задач.

Первый том содержит материал, соответствующий программе 1-го курса втуза, за исключением главы XII «Дифференциальные уравнения», которая, как правило, проходится на 2-м курсе. Но так как в некоторых втузах предварительные сведения о дифференциальных уравнениях, необходимые для последующих дисциплин, даются на 1-м курсе, то часть этой главы (§§ 1–28) и помещена в первом томе.

Отметим, что материал, содержащийся в программе втузов, рассчитанный на число часов порядка 300, почти полностью содержится в первом томе (но в нем содержится и материал, выходящий за рамки этой программы).

Второй том — конец главы XIII (§§ 29–34), главы XIV–XIX — содержит материал, соответствующий программе 2-го курса втуза.

Первые две главы первого тома — «Число. Переменная. Функция» и «Предел. Непрерывность функции» написаны в пределах возможного кратко. Некоторые вопросы, обычно излагаемые в этих главах, без ущерба для дела перенесены в третью и последующие главы. Это дало возможность раньше перейти к основному понятию дифференциального исчисления — производной, что требуют другие дисциплины втузовского курса (целесообразность такого расположения материала подтверждается опытом работы).

В связи с включением во втузовскую программу по высшей математике вопросов, необходимых для обеспечения курсом математики втузовских дисциплин, связанных с автоматикой и вычислительной техникой, в учебнике подробно изложены соответствующие разделы: « Численное интегрирование дифференциальных уравнений»*), «Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений», «Понятие о теории устойчивости Ляпунова», «Оператор Гамильтона», «Интеграл Фурье» и т. д.

В гл. XVIII рассмотрены основные уравнения математической физики. Обращено большое внимание на выяснение характера физических явлений, приводящих к уравнениям различных типов и соответствующим краевым задачам. Большое внимание уделено численным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В главе XIX излагаются основные понятия операционного исчисления и операционный метод решения дифференциальных уравнений. Это требуется для многих последующих дисциплин, и особенно электротехнических.

В учебник включено большое количество задач и примеров для упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами. Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Это обстоятельство также делает книгу удобной для самостоятельного изучения курса математики, в частности для студентов-заочников.

Шестое издание отличается от пятого только тем, что в конце первого тома дано приложение, где изложен важный для инженеров вопрос: «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов».

Седьмое издание отличается от шестого только тем, что в конце первого тома дано приложение «Интерполяционная формула Ньютона. Численное дифференцирование».

---

*) Обычно излагаемые численные методы анализа также изложены в данном учебнике.

Глава I
ЧИСЛО, ПЕРЕМЕННАЯ, ФУНКЦИЯ

§ 1. Действительные числа. Изображение действительных чисел точками числовой оси

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности и на протяжении длительного времени подвергалось расширению и обобщению.

Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль называются *рациональными числами.* Каждое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{p}{q}$ двух целых чисел p и q, например $\frac{5}{7}$, $1,25 = \frac{5}{4}$.

В частности, целое число p можно рассматривать как отношение двух целых чисел $\frac{p}{1}$, например

$$6 = \frac{6}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами*: таковы числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ и т. д.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) чисел. Действительные числа ***упорядочены по величине***, т.е. для каждой пары действительных чисел x и y имеет место одно, и только одно, из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется бесконечная прямая, на которой выбраны: 1) некоторая точка O, называемая началом отсчета, 2) положительное направление, которое указывается стрелкой, и 3) масштаб для измерения длин. Чаще всего мы будем располагать числовую ось горизонтально и положительное направление выбирать слева направо.

Если число x_1 положительно, то его изображают точкой M_1, лежащей справа от точки O на расстоянии $OM_1 = x_1$; если число x_2 отрицательно, то его изображают точкой M_2, лежащей слева от точки O на расстоянии $OM_2 = -x_2$ (рис. 1). Точка O изображает число нуль. Очевидно, что каждое действительное число изображается определенной точкой числовой оси. Два различных действительных числа изображаются различными точками числовой оси.

Справедливо также утверждение: каждая точка числовой оси является изображением только одного действительного числа (рационального или иррационального).

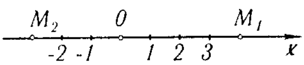


Рис. 1

Таким образом, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому числу соответствует единственная изображающая его точка и, наоборот, каждой точке соответствует единственное изображаемое ею число. Это дает возможность во многих рассуждениях в некотором смысле равнозначно употреблять понятие «число x» и понятие «точка x». Последним обстоятельством мы будем широко пользоваться в курсе.

Укажем без доказательства следующее важное свойство совокупности действительных чисел: *между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.* В терминах геометрических это предложение формулируется так: *между двумя произвольными точками числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные точки.*

В заключение отметим следующую теорему, представляющую в известном смысле «мостик между теорией и практикой».

Теорема. *Каждое иррациональное число α можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.*

В самом деле, пусть иррациональное число $\alpha > 0$ и пусть требуется вычислить α с точностью до $1/n$ (например, до $1/10$, до $1/100$ и т. д.).

Каково бы ни было α, оно заключается между двумя действительными числами N и $N+1$. Разделим отрезок между N и $N+1$ на n частей; тогда α окажется между рациональными числами $N + \frac{m}{n}$ и $N + \frac{m+1}{n}$. Так как разность этих чисел равна $1/n$, то, следовательно, каждое из них выражает α с заданной степенью точности: первое с недостатком, а второе — с избытком.

Пример. Иррациональное число $\sqrt{2}$ выражается рациональными числами:

$1{,}4$ и $1{,}5$ — с точностью до $1/10$,

$1{,}41$ и $1{,}42$ — с точностью до $1/100$,

$1{,}414$ и $1{,}415$ — с точностью до $1/1000$ и т.д.

§ 2. Абсолютная величина действительного числа

Введем нужное для дальнейшего понятие абсолютной величины действительного числа.

Определение. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям

$$|x| = x, \quad \text{если } x \geqslant 0;$$
$$|x| = -x, \quad \text{если } x < 0.$$

Примеры: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Из определения следует, что для любого x справедливо соотношение $x \leqslant |x|$.

Рассмотрим некоторые свойства абсолютных величин.

1. *Абсолютная величина алгебраической суммы нескольких действительных чисел не больше суммы абсолютных величин слагаемых*:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство. Пусть $x + y \geqslant 0$, тогда

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y| \text{ (так как } x \leqslant |x| \text{ и } y \leqslant |y|).$$

Пусть $x + y < 0$, тогда

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|,$$

ч. т. д.

Проведенное доказательство легко распространяется на любое число слагаемых.

Примеры:

$$|-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ или } 1 < 5;$$
$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ или } 8 = 8.$$

2. *Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого*:

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|, \quad |x| > |y|.$$

Доказательство. Положим $x - y = z$, тогда $x = y + z$ и по доказанному

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

откуда

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

ч.т.д.

3. *Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей:*

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. *Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Последние два свойства непосредственно следуют из определения абсолютной величины.

§ 3. Переменные и постоянные величины

В результате измерения таких физических величин, как время, длина, площадь, объем, масса, скорость, давление, температура и т. п., определяются численные значения физических величин. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания. В дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду их численные значения. В различных явлениях некоторые величины изменяются, т.е. меняются их численные значения, другие величины сохраняют свое численное значение. Так, при равномерном движении точки время и расстояние меняются; скорость остается постоянной.

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется *постоянной величиной*. В дальнейшем переменные величины мы будем обозначать буквами x, y, z, $u, \ldots$ и т. д., постоянные величины будем обозначать буквами a, b, с,$\ldots$ и т. д.

Замечание. В математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все численные значения одинаковы.

Следует отметить, что при рассмотрении конкретных физических явлений может иметь место такое положение, что величина с одним и тем же названием в одном явлении оказывается постоянной, в другом — переменной. Например, скорость равномерного движения есть величина постоянная, а скорость равномерно ускоренного движения — величина переменная. Величины, которые сохраняют свое значение в любом явлении, называются *абсолютными постоянными.* Например, отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная $\pi = 3,14159\ldots$

Как мы увидим на протяжении всего курса, понятие переменной величины является основным понятием дифференциального и интегрального исчислений.

§ 4. Область изменения переменной величины

Переменная величина принимает различные числовые значения. В зависимости от характера рассматриваемой задачи совокупность этих значений может быть различная. Например, температура воды, подогреваемой в обычных условиях, будет меняться от комнатной температуры, равной 15–18°C, до точки кипения, 100°C. Переменная же величина $x = \cos\alpha$ может принимать все значения от -1 до $+1$.

Значения переменной величины геометрически изображаются точками числовой оси. Так, значения переменной $x = \cos\alpha$ при всевозможных значениях α изображаются совокупностью точек отрезка числовой оси, от -1 до 1, включая и точки -1 и 1 (рис. 2).

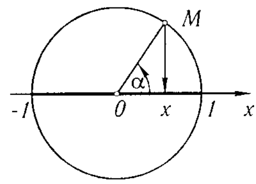


Рис. 2

Определение. Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной.

Отметим следующие области изменения переменной величины, которые часто будут встречаться в дальнейшем.

Промежутком, или *интервалом*, называется совокупность всех чисел x, заключенных между данными числами a и b ($a < b$), при этом сами эти числа ***не принадлежат*** рассматриваемой совокупности чисел; его обозначают так: (a, b) или с помощью неравенств $a < x < b$.

Отрезком, или *сегментом*, называется совокупность всех чисел x, заключенных между двумя данными числами a и b, причем оба числа a и b ***принадлежат*** рассматриваемой совокупности; его обозначают так: $[a, b]$ или с помощью неравенств $a \leqslant x \leqslant b$. Иногда отрезок называется *замкнутым промежутком*, или *замкнутым интервалом*.

Если одно из чисел a или b, например a, присоединяется к промежутку, а другое — нет, то получается *полузамкнутый промежуток*, его можно задать неравенствами $a \leqslant x < b$ и обозначить $[a, b)$.

Если присоединяется число b и не присоединяется число a, то получается полузамкнутый промежуток $(a, b]$, который можно задать неравенствами $a < x \leqslant b$.

Если переменная x принимает всевозможные значения, большие чем a, то такой интервал обозначают $(a, +\infty)$ и задают условными неравенствами $a < x < +\infty$. Так же рассматриваются бесконечные интервалы и полузамкнутые бесконечные интервалы, задаваемые условными неравенствами

$$a \leqslant x < +\infty, \quad -\infty < x < c, \quad -\infty < x \leqslant c, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Пример. Области изменения переменной $x = \cos\alpha$ при всевозможных значениях α есть отрезок $[-1, 1]$ и определяется неравенством $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Данные выше определения можно сформулировать, используя вместо понятия «число» понятие «точка», например:

Отрезком называется совокупность всех точек x, заключенных между данными точками a и b (*концами отрезка*), причем концы отрезка принадлежат рассматриваемой совокупности.

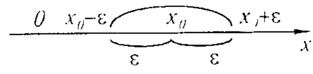


Рис. 3

Окрестностью данной точки x_0 называется произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку внутри себя, т.е. интервал (a, b), концы которого удовлетворяют условию $a < x_0 < b$. Часто рассматривается окрестность (a, b) точки x_0, для которой x_0 является серединой. Тогда x_0 называется *центром окрестности*, величина $(b-a)/2$ называется *радиусом окрестности*. На рис. 3 изображена окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 с радиусом ε.

§ 5. Упорядоченная переменная величина. Возрастающая и убывающая переменные величины. Ограниченная переменная величина

Будем говорить, что переменная x есть *упорядоченная переменная величина*, если известна область изменения этой переменной величины и про каждое из двух любых ее значений можно сказать, какое значение предыдущее и какое последующее. Здесь понятия «предыдущее» и «последующее» не связаны со временем, а являются способом «упорядочения» значений переменной величины, т.е. установления порядка соответствующих значений переменной величины.

Частным случаем упорядочения переменной величины является переменная величина, значения которой образуют *числовую последовательность* x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... Здесь при $k' < k$ значение $x_{k'}$ — «предшествующее», а значение x_k — «последующее» независимо от того, какое из этих значений больше.

Определение 1. Переменная величина называется *возрастающей*, если каждое последующее ее значение больше предыдущего ее значения. Переменная величина называется *убывающей*, если каждое ее последующее значение меньше предыдущего.

Возрастающие переменные величины и убывающие переменные величины называются *монотонно изменяющимися* переменными величинами или просто *монотонными величинами*.

Пример. При удвоении числа сторон правильного вписанного в круг многоугольника площадь s этого многоугольника является возрастающей переменной величиной. Площадь правильного описанного около круга многоугольника при удвоении числа сторон является убывающей переменной величиной. Заметим, что не всякая переменная величина является непременно возрастающей или убывающей. Так, например, переменная $x = \sin\alpha$, если α есть возрастающая величина на отрезке $[0, 2\pi]$, не является монотонной величиной. Она сначала возрастает от 0 до 1, затем убывает от 1 до -1, и, наконец, возрастает от -1 до 0.

Определение 2. Переменная величина x называется *ограниченной*, если существует такое постоянное $M > 0$, что все *последующие* значения переменной, *начиная с некоторого*, удовлетворяют условию

$$-M \leqslant x \leqslant M, \quad \text{т. е.} \ |x| \leqslant M.$$

Иначе говоря, переменная величина называется ограниченной, если можно указать такой отрезок $[-M, M]$, что все *последующие* значения переменной, *начиная с некоторого*, будут принадлежать этому отрезку. Однако не следует думать, что переменная величина будет принимать непременно все значения отрезка $[-M, M]$. Например, переменная величина, принимающая всевозможные рациональные значения на отрезке $[-2, 2]$, ограничена, тем не менее она не принимает всех значений на $[-2, 2]$, а именно иррациональных.

§ 6. Функция

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть *функция* времени.

Рассмотрим другой пример. Известно, что площадь круга выражается через радиус так: $Q = \pi R^2$. Если радиус R будет принимать различные числовые значения, то площадь Q также будет принимать различные числовые значения. Таким образом, изменение одной переменной влечет изменение другой. Здесь площадь круга Q есть функция радиуса R. Сформулируем определение понятия «функция».

Определение 1. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть *функция* от x или, в символической записи, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом.* Зависимость переменных x и y называется *функциональной зависимостью.* Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Вместо записи $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ и т.д. иногда пишут $y = y(x)$, $u = u(x)$ и т.д., т.е. буквы y, u и т.д. обозначают и зависимую переменную, и символ совокупности операций над x.

Запись $y = C$, где C — постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и то же и равно C.

Определение 2. Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила $f(x)$, называется *областью определения функции* (или *областью существования функции*).

Пример 1. Функция $y = \sin x$ определена при всех значениях x. Следовательно, ее областью определения будет бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$.

Замечание 1. Если имеем функциональную зависимость двух переменных величин x и $y = f(x)$ и если x и $y = f(x)$ рассматривать как упорядоченные переменные величины, то из двух значений функции $y^* = f(x^*)$ и $y^{**} = f(x^{**})$, соответствующих двум значениям аргумента x^* и x^{**}, последующим значением функции будет то, которое соответствует последующему значению аргумента. Поэтому естественно, например, следующее определение.

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*. Аналогичным образом определяется *убывающая* функция.

Пример 2. Функция $Q = \pi R^2$ при $0 < R < +\infty$ есть функция возрастающая, так как большему значению R соответствует большее значение Q.

Замечание 2. Иногда в определении понятия функции допускают, что каждому значению x, принадлежащему некоторой области, соответствует не одно, а несколько значений y или даже бесконечное множество значений y. В этом случае функцию называют *многозначной* в отличие от определенной выше функции, которую называют *однозначной*. В дальнейшем, говоря о функции, мы будем иметь в виду только ***однозначные*** функции. Если в силу необходимости придется иногда иметь дело с многозначными функциями, то мы будем делать специальные оговорки.

§ 7. Способы задания функции

I. **Табличный способ задания функции.** При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента x_1, x_2, …, x_n и соответствующие значения функции y_1, y_2, …, y_n.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

В результате экспериментального изучения явлений также могут получиться таблицы, выражающие функциональную зависимость между измеряемыми величинами. Так, например, в результате измерения температуры воздуха на метеорологической площадке в определенный день получается следующая таблица:

Значение температуры T (в градусах) в зависимости от времени t (в часах)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	−1	−2	−2	−0,5	1	3	3,5	4

Эта таблица определяет T как функцию t.

II. **Графический способ задания функции.** Если в прямоугольной системе координат на плоскости имеем некоторую совокупность точек $M(x, y)$, при этом никакие две точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy, то эта совокупность точек определяет некоторую однозначную функцию $y = f(x)$; значениями аргумента являются абсциссы точек, значениями функции — соответствующие ординаты (рис. 4).

Совокупность точек плоскости (xOy), абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется *графиком данной функции.*

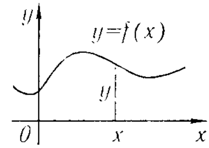


Рис. 4

III. **Аналитический способ задания функции.** Сначала разъясним понятие «аналитическое выражение». *Аналитическим выражением* будем называть символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные или переменные величины.

Отметим, что под совокупностью известных математических операций будем понимать не только математические операции, известные из курса средней школы (сложение, вычитание, извлечение корня и т. д.), но и те, которые будут определяться по мере изучения курса.

Аналитическими выражениями, например, являются:

$$x^4 - 2, \quad (\lg x - \sin x)/(5x^2 + 1), \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}$$

и т. д.

Если функциональная зависимость $y = f(x)$ такова, что f обозначает аналитическое выражение, то говорят, что функция y от x *задана аналитически.*

Примеры функций, заданных аналитически: 1) $y = x^4 - 2$, 2) $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$, 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, 4) $y = \sin x$, 5) $Q = \pi R^2$ и т. д.

Здесь функции заданы аналитически с помощью одной формулы (под формулой понимается равенство двух аналитических выражений). В таких случаях можно говорить о ***естественной*** области определения функции.

Естественной областью определения функции, заданной аналитически, является совокупность значений x, при которых имеет вполне определенное значение стоящее справа аналитическое выражение. Так, естественной областью определения функции $y = x^4 - 2$ является бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$, так как функция определяется при всех значениях x. Функция $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$ определена при всех значениях x, кроме значения $x = 1$, так как при этом значении знаменатель обращается в нуль. Для функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ естественной областью определения будет отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и т. д.

Замечание. Иногда бывает нужно рассматривать не всю естественную область определения функции, а только некоторую ее часть. Так, зависимость площади Q круга от радиуса R определяется функцией $Q = \pi R^2$. Областью определения данной функции при рассмотрении данного геометрического вопроса является бесконечный интервал $0 < R < +\infty$. Естественной же областью определения данной функции является бесконечный интервал $-\infty < R < +\infty$.

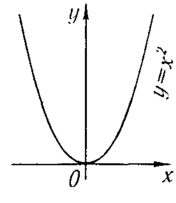


Рис. 5

Если функция $y = f(x)$ задана аналитически, то она может быть изображена графически на плоскости координат xOy. Так, графиком функции $y = x^2$ является парабола, изображенная на рис. 5.

§ 8. Основные элементарные функции. Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие, аналитическим способом заданные функции.

I. *Степенная функция*: $y = x^\alpha$, где α — действительное число*).

II. *Показательная функция*: $y = a^x$, где a — положительное число, не равное единице.

III. *Логарифмическая функция*: $y = \log_a x$, где основание логарифмов a — положительное число, не равное единице.

IV. *Тригонометрические функции*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Обратные тригонометрические функции*:

$$y = \arcsin x, \ y = \arccos x, \ y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x, \ y = \operatorname{arcsec} x, \ y = \operatorname{arccosec} x.$$

Рассмотрим области определения и графики основных элементарных функций.

Степенная функция, $y = x^\alpha$.

1. α — целое положительное число. Функция определена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Графики функции в этом случае при некоторых значениях α имеют вид, изображенный на рис. 6 и 7.

---

*) При α иррациональном эта функция вычисляется путем логарифмирования и потенцирования: $\log y = \alpha \log x$. При этом предполагается, что $x > 0$.

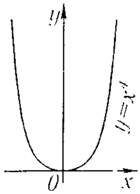


Рис. 6

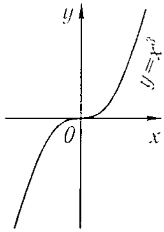


Рис. 7

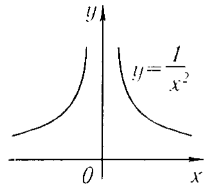


Рис. 8

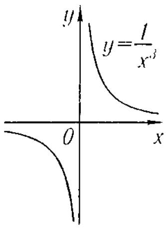


Рис. 9

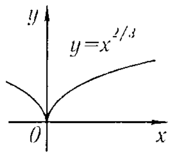


Рис. 10

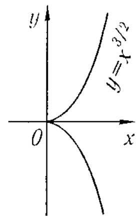


Рис. 11

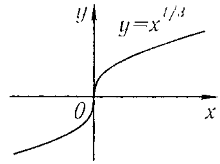


Рис. 12

2. α — целое отрицательное число. В этом случае функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Графики функций при некоторых значениях α имеют вид, изображенный на рис. 8 и 9.

На рис. 10, 11, 12 изображены графики степенной функции при дробно-рациональных значениях α.

Показательная функция, $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при всех значениях x. График ее имеет вид, изображенный на рис. 13.

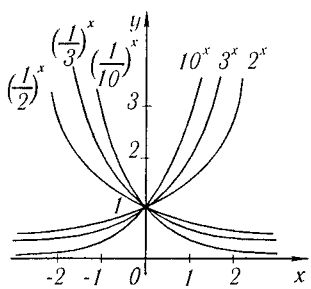


Рис. 13

Логарифмическая функция, $y = \log_a x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при $x > 0$. График ее изображен на рис. 14.

Тригонометрические функции. Независимая переменная x в формулах $y = \sin x$ и т.д. выражается в радианах. Все перечисленные тригонометрические функции — периодические. Сформулируем более общее определение периодической функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число C, от прибавления (или вычитания) которого к аргументу x значение функции не изменяется: $f(x + C) = f(x)$. Наименьшее такое число называется *периодом* функции; в дальнейшем будем обозначать его $2l$.

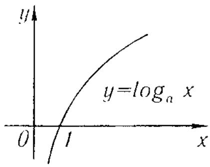


Рис. 14

Из определения непосредственно следует, что $y = \sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Период $\cos x$ также равен 2π. Период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены при всех значениях x; функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sec x$ определены всюду, кроме точек

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ определены при всех значениях x, кроме точек

$$x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Графики тригонометрических функций изображены на рис. 15–19.

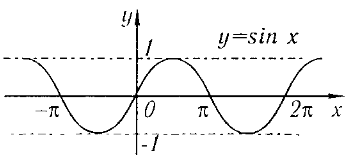


Рис. 15

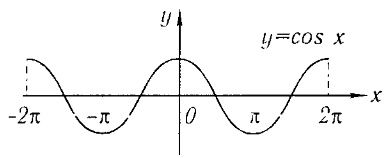


Рис. 16

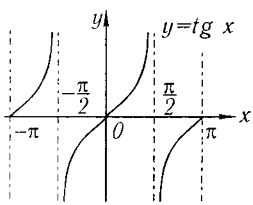


Рис. 17

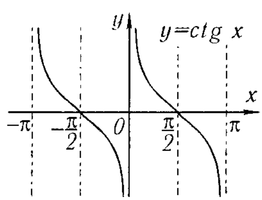


Рис. 18

Обратные тригонометрические функции будут нами подробно рассмотрены позднее.

Введем, далее, понятие функции от функции. Если y является функцией от u, а u в свою очередь зависит от переменной x, то y также зависит от x. Пусть $y = F(u)$ и $u = \varphi(x)$. Получаем функцию y от x

$$y = F[\varphi(x)].$$

Последняя функция называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Пример 1. Пусть $y = \sin u$, $u = x^2$. Функция $y = \sin(x^2)$ является сложной функцией x.

Замечание. Областью определения функции $y = F[\varphi(x)]$ является или вся область определения функции, $u = \varphi(x)$, или та ее часть, в которой определяются значения u, не выходящие из области определения функции $F(u)$.

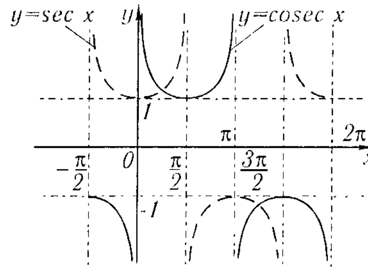


Рис. 19

Пример 2. Областью определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$) является отрезок $[-1, 1]$, так как $u < 0$ при $|x| > 1$ и, следовательно, функция $\sqrt{u}$ не определена при этих значениях x (хотя функция $u = 1 - x^2$ определена при всех значениях x). Графиком этой функции является верхняя половина окружности с центром в начале координат и радиусом единица.

Операция «функция от функции» может производиться не один, а любое число раз. Например, функция $y = \ln[\sin(x^2 + 1)]$ получается в результате следующих операций (определения следующих функций):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Определим, далее, понятие элементарной функции.

Определение 2. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

На основании определения следует, что элементарные функции являются функциями, заданными аналитически.

Примеры элементарных функций:

$$y = |x| = \sqrt{x^2}, \quad y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}, \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\operatorname{tg} x}{10^x - x + 10}.$$

Пример неэлементарной функции:

Функция $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ($y = f(n)$) не является элементарной, так как количество операций, которое нужно произвести для получения y, увеличивается с увеличением n, т.е. не является ограниченным.

Замечание. Функция, изображенная на рис. 20, является элементарной, хотя она и задается с помощью двух формул:

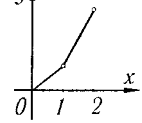


Рис. 20

$$f(x) = x, \ \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1, \ \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Эту функцию можно задать и одной формулой:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}|x - 1| = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^2}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 2$. (См. также примеры 130–144 в упражнениях к гл. V.)

§ 9. Алгебраические функции

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида:

I. **Целая рациональная функция** или **многочлен**

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — постоянные числа, называемые *коэффициентами*; n — целое неотрицательное число, называемое *степенью многочлена*. Очевидно, что эта функция определена при всех значениях x, т.е. определена на бесконечном интервале.

Пример 1. $y = ax + b$ — *линейная функция*. При $b = 0$ линейная функция $y = ax$ выражает пропорциональную зависимость y от x. При $a = 0$, $y = b$ функция есть постоянная.

Пример 2. $y = ax^2 + bx + c$ — *квадратичная функция*. График квадратичной функции есть парабола (рис. 21).

Эти функции подробно рассматривались в аналитической геометрии.

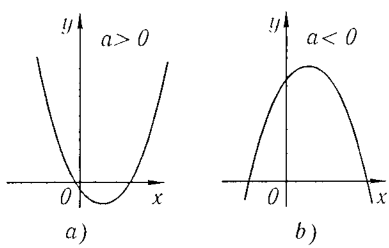


Рис. 21

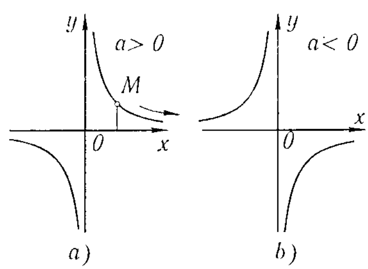


Рис. 22

II. **Дробная рациональная функция**. Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Дробной рациональной функцией является, например, функция $y = a/x$, выражающая обратную пропорциональную зависимость. Ее график изображен на рис. 22. Очевидно, что дробная рациональная функция определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

III. **Иррациональная функция**. Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется *иррациональной*. Примеры иррациональных функций: $y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$, $y = \sqrt{x}$ и т. п.

Замечание 1. Перечисленные три вида алгебраических функций не исчерпывают всех алгебраических функций. *Алгебраической функцией* называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \tag{1}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots$, $P_n(x)$ — некоторые многочлены от x.

Можно доказать, что каждая из функций перечисленных трех видов удовлетворяет некоторому уравнению вида (1), но не всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (1), является функцией одного из перечисленных видов.

Замечание 2. Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Примеры трансцендентных функций: $y = \cos x$, $y = 10^x$ и т. п.

§ 10. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определять с помощью так называемой *полярной системы координат*.

На плоскости выбираем некоторую точку O, называемую *полюсом*, и выходящую из этой точки полупрямую, называемую *полярной осью*. Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами: числом ρ, выражающим расстояние точки M от полюса, и числом φ — величиной угла, образованного отрезком OM с полярной осью. Положительным направлением отсчета угла φ считается направление против часовой стрелки. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M (рис. 23).

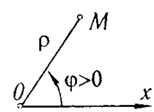


Рис. 23

Радиус-вектор ρ будем всегда считать неотрицательным. Если полярный угол φ брать в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то каждой точке плоскости, кроме полюса, соответствует вполне определенная пара чисел ρ и φ. Для полюса $\rho = 0$, φ — произвольное.

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox — с полярной осью. Из рис. 24 непосредственно следует:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

и, обратно, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$.

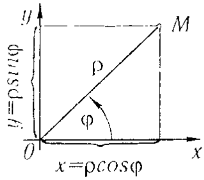


Рис. 24

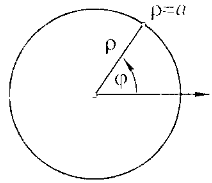


Рис. 25

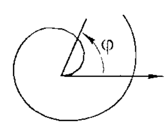


Рис. 26

Примечание. При нахождении φ нужно учитывать, в какой четверти находится точка, и брать соответствующее значение φ.

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

Пример 1. Уравнение $\rho = a$, где $a = \text{const}$, определяет в полярных координатах окружность с центром в полюсе и радиусом a. Уравнение этой окружности (рис. 25) в прямоугольной системе координат, расположенной так, как указано на рис. 24, будет:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ или } x^2 + y^2 = a^2.$$

Пример 2.

$$\rho = a\varphi, \text{ где } a = \text{const}.$$

Составим таблицу значений ρ при некоторых значениях φ:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

Соответствующая кривая изображена на рис. 26. Эта кривая называется *спиралью Архимеда.*

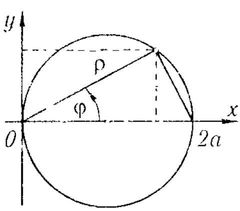


Рис. 27

Пример 3.

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

Это уравнение окружности радиуса a, центр которой находится в точке $\rho_0 = a$, $\varphi = 0$ (рис. 27). Напишем уравнение этой окружности в прямоугольных координатах. Подставляя в данное уравнение $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, будем иметь: $\sqrt{x^2+y^2} = 2a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Упражнения к главе I

1. Дана функция $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Проверить, что $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Вычислить значения: а) $f(4)$. *Отв.* 17. б) $f(\sqrt{2})$. *Отв.* 3. в) $f(a+1)$. *Отв.* $a^2 + 2a + 2$. г) $f(a) + 1$. *Отв.* $a^2 + 2$. д) $f(a^2)$. *Отв.* $a^4 + 1$. е) $[f(a)]^2$. *Отв.* $a^4 + 2a^2 + 1$. ж) $f(2a)$. *Отв.* $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = (x-1)(3x+5)^{-1}$. Написать выражения: $\varphi(1/x)$ и $1/\varphi(x)$. *Отв.* $\varphi(1/x) = (1-x)(3+5x)^{-1}$; $1/\varphi(x) = (3x+5)(x-1)^{-1}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Написать выражения: $\psi(2x)$ и $\psi(0)$. *Отв.* $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$. Проверить равенство $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Проверить равенство $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \lg x$; $\varphi(x) = x^3$. Написать выражения: а) $f[\varphi(2)]$. *Отв.* $3\lg 2$. б) $f[\varphi(a)]$. *Отв.* $3\lg a$. в) $\varphi[f(a)]$. *Отв.* $[\lg a]^3$.

8. Найти естественную область определения функции $y = 2x^2 + 1$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

9. Найти естественные области определения функций: а) $\sqrt{1-x^2}$. *Отв.* $-1 \leqslant x \leqslant +1$. б) $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$. *Отв.* $-3 \leqslant x \leqslant 7$. в) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[5]{x-b}$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$. г) $\dfrac{a+x}{a-x}$. *Отв.* $x \neq a$. д) $\arcsin^2 x$. *Отв.* $-1 \leqslant x \leqslant 1$. е) $y = \lg x$. *Отв.* $x > 0$. ж) $y = a^x$ $(a > 0)$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

Построить графики функций:

10. $y = -3x + 5$. **11.** $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$. **12.** $y = 3 - 2x^2$. **13.** $y = x^2 + 2x - 1$. **14.** $y = 1/(x-1)$. **15.** $y = \sin 2x$. **16.** $y = \cos 3x$. **17.** $y = x^2 - 4x + 6$. **18.** $y = \dfrac{1}{1-x^2}$. **19.** $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **20.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. **21.** $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x$. **22.** $y = \operatorname{ctg}(x/4)$. **23.** $y = 3^x$. **24.** $y = 2^{-x^2}$. **25.** $y = \log_2(1/x)$. **26.** $y = x^3 + 1$. **27.** $y = 4 - x^3$. **28.** $y = 1/x^2$. **29.** $y = x^4$. **30.** $y = x^5$. **31.** $y = \sqrt{x}$. **32.** $y = (\sqrt{x})^{-1}$. **33.** $y = \sqrt[3]{x}$. **34.** $y = |x|$. **35.** $y = \log_2|x|$. **36.** $y = \log_2(1-x)$. **37.** $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **38.** $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

39. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ следующим образом:

$$f(x) = 1 + x \quad \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0;$$
$$f(x) = 1 - 2x \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

40. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; 2]$ следующим образом:

$$f(x) = x^3 \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$f(x) = x \quad \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Построить кривые, данные полярными уравнениями:

41. $\rho = a/\varphi$ (*гиперболическая спираль*). **42.** $\rho = a^\varphi$ (*логарифмическая спираль*). **43.** $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (*лемниската*). **44.** $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (*кардиоида*). **45.** $\rho = a\sin 3\varphi$.

Глава II
ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. Предел переменной величины. Бесконечно большая переменная величина

В этом параграфе мы будем рассматривать упорядоченные переменные величины, изменяющиеся специальным образом, который определяется терминами «переменная величина стремится к пределу». Во всем дальнейшем курсе понятие предела переменной будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа — производная, интеграл и др.

Определение 1. Постоянное число a называется *пределом* переменной величины x, если для каждого наперед заданного произвольно малого положительного числа ε можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Если число a есть предел переменной величины x, то говорят, что x стремится к пределу a, и пишут:

$$x \to a \text{ или } \lim x = a^{*)}.$$

В терминах геометрических определение предела может быть сформулировано следующим образом:

Постоянное число a есть *предел* переменной, если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке a и радиусом ε найдется такое значение x, что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находиться в этой окрестности (рис. 28). Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

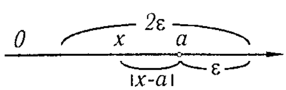


Рис. 28

Пример 1. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 + 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2},\ x_3 = 1 + \frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n = 1 + \frac{1}{n},\ \ldots$$

---

*) «lim» есть сокращение латинского слова limes — предел.

Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Имеем

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n, где $1/n < \varepsilon$, или $n > 1/\varepsilon$, будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

Заметим, что здесь переменная величина стремится к пределу, убывая.

Пример 2. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2},\ x_2 = 1 + \frac{1}{2^2},\ x_3 = 1 - \frac{1}{2^3},\ x_4 = 1 + \frac{1}{2^4},\ \ldots,\ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Эта переменная имеет предел, равный единице. Действительно,

$$|x_n - 1| = |(1 + (-1)^n/2^n) - 1| = 1/2^n.$$

Для любого ε, начиная с номера n, удовлетворяющего соотношению $1/2^n < \varepsilon$, из которого следует

$$2^n > 1/\varepsilon,\ n \lg 2 > \lg(1/\varepsilon),\ \text{или } n > \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg 2},$$

все последующие значения x будут удовлетворять соотношению $|x_n - 1| < \varepsilon$. Отметим, что здесь значения переменной величины то больше, то меньше предела. Переменная величина стремится к пределу, «колеблясь вокруг него».

Замечание 1. Как указывалось в § 3, гл. I, постоянную величину с часто рассматривают как величину переменную, все значения которой одинаковы: $x = \text{c}$.

Очевидно, что предел постоянной будет равен самой постоянной, так как всегда выполняется неравенство $|x - \text{c}| = |\text{c} - \text{c}| = 0 < \varepsilon$ при любом ε.

Замечание 2. Из определения предела следует, что переменная величина не может иметь двух пределов. Действительно, если $\lim x = a$ и $\lim x = b$ $(a < b)$, то x должен удовлетворять сразу двум неравенствам:

$$|x - a| < \varepsilon \text{ и } |x - b| < \varepsilon$$

при произвольно малом ε, а это невозможно, если $\varepsilon < (b - a)/2$ (рис. 29).

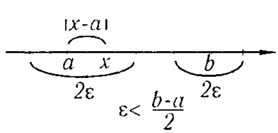


Рис. 29

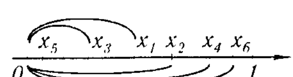


Рис. 30

Замечание 3. Не следует думать, что каждая переменная величина имеет предел. Пусть переменная величина x последовательно принимает следующие значения:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1 - \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{8},\ \ldots,\ x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}},\ x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(рис. 30). При достаточно большом k значение x_{2k} и все последующие значения с четными номерами будут отличаться как угодно мало от единицы, а следующее значение x_{2k+1} и все последующие значения x с нечетными номерами будут как угодно мало отличаться от нуля. Следовательно, переменная x не стремится к пределу.

В определении предела указано, что если переменная величина стремится к пределу a, то a — постоянное число. Но понятие «стремится» употребляется и для характеристики другого способа изменений переменной величины, что видно из следующего определения.

Определение 2. Переменная x стремится к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x, начиная с которого все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x| > M$.

Если переменная x стремится к бесконечности, то ее называют *бесконечно большой* переменной величиной и пишут $x \to \infty$.

Пример 3. Переменная величина x принимает значения

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ \ldots,\ x_n = (-1)^n n,\ \ldots$$

Это — бесконечно большая переменная величина, так как при произвольном $M > 0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше M.

Переменная величина x «стремится к плюс бесконечности», $x \to +\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $M < x$.

Примером переменной величины, стремящейся к плюс бесконечности, может служить переменная величина x, принимающая значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$, ...

Переменная величина x «стремится к минус бесконечности», $x \to -\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $x < -M$.

Например, переменная x, принимающая значения $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, ..., $x_n = -n$, ..., стремится к минус бесконечности.

§ 2. Предел функции

В этом параграфе будем рассматривать некоторые случаи изменения функции при стремлении аргумента x к некоторому пределу a или к бесконечности.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. *Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b ($y \to b$) при x, стремящемся к a ($x \to a$)*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству*)

$$|x-a|<\delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

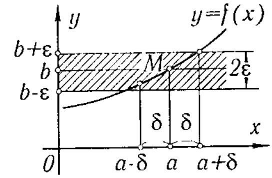


Рис. 31

Если b есть *предел функции* $f(x)$ при $x \to a$, то пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Если $f(x) \to b$ при $x \to a$, то на графике функции $y = f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис. 31): так как из неравенства $|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее чем на δ, точки M графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b-\varepsilon$ и $y = b+\varepsilon$.

Замечание 1. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ можно определить и следующим образом.

Пусть переменная величина x принимает значения так (упорядочена так), что если

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

то x^{**} есть последующее, а x^* — предыдущее значение; если же

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ и } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

то $\bar{x}^{**}$ есть последующее, а $\bar{x}^*$ — предыдущее.

Другими словами, из двух точек числовой прямой последующей является та точка, которая ближе к точке a; при равных расстояниях последующая — та, которая правее от точки a.

Пусть упорядоченная таким образом переменная величина x стремится к пределу a [$x \to a$ или $\lim x = a$].

Рассмотрим, далее, переменную величину $y = f(x)$. При этом будем считать, как и всюду в дальнейшем, что из двух значений функции последующим является то значение, которое соответствует последующему значению аргумента.

---

*) Здесь имеются в виду те значения x, удовлетворяющие неравенству $|x-a| < \delta$, которые принадлежат области определения функции. Аналогичные обстоятельства будут встречаться и в дальнейшем. Так, при рассмотрении поведения функции при $x \to \infty$ может случиться, что функция определена только при целых положительных значениях x. Следовательно, в этом случае $x \to \infty$, принимая только целые положительные значения. Оговорок об этом мы в дальнейшем делать не будем.

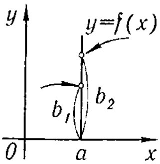


Рис. 32

Если определенная так переменная величина y при $x \to a$ стремится к некоторому пределу b, то будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

и говорить, что функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$.

Легко доказать, что оба определения предела функции эквивалентны.

Замечание 2. Если $f(x)$ стремится к пределу b_1 при x, стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1 *пределом функции $f(x)$ в точке a слева.* Если x принимает только значения, бо́льшие, чем a, то пишут $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции в точке a справа* (рис. 32).

Можно доказать, что если предел справа и предел слева существуют и равны, т.е. $b_1 = b_2 = b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a. И обратно, если существует предел функции b в точке a, то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 1) = 7$. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$; для того чтобы выполнялось неравенство

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \ |x - 2| < \varepsilon/3, \ -\varepsilon/3 < x - 2 < \varepsilon/3.$$

Таким образом, при любом ε для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \varepsilon/3 = \delta$, значение функции $3x + 1$ будет отличаться от 7 меньше, чем на ε. А это и значит, что 7 есть предел функции при $x \to 2$.

Замечание 3. Для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = a$. При нахождении предела рассматриваются значения функции в окрестности a, отличные от a; это положение наглядно иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4)/(x - 2) = 4$. Здесь функция $(x^2 - 4)/(x - 2)$ не определена при $x = 2$.

Нужно доказать, что при произвольном ε найдется такое δ, что будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

если $|x - 2| < \delta$. Но при $x \neq 2$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} - 4\right| = |(x + 2) - 4| < \varepsilon$$

или

$$|x - 2| < \varepsilon. \tag{2}$$

Таким образом, при произвольном ε неравенство (1) будет выполняться, если будет выполняться неравенство (2) (здесь $\delta = \varepsilon$). А это и значит, что данная функция при $x \to 2$ имеет пределом число 4.

Рассмотрим некоторые случаи изменения функции при $x \to \infty$.

Определение 2. *Функция $f(x)$ стремится к пределу b при* $x \to \infty$, если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 3. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 \text{ или, в иной записи, } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

если только $|x| > N$, причем N определяется выбором ε. Неравенство (3) эквивалентно следующему неравенству: $|1/x| < \varepsilon$, которое будет выполняться, если будет

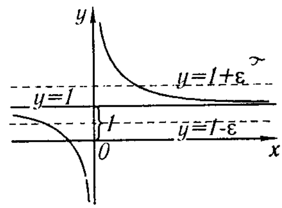


Рис. 33

$$|x| > 1/\varepsilon = N.$$

Это и значит, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ (рис. 33).

Зная смысл символов $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, очевидным является и смысл выражений:

«$f(x)$ стремится к b при $x \to +\infty$» и

«$f(x)$ стремится к b при $x \to -\infty$»,

которые символически записываются так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

§ 3. Функция, стремящаяся к бесконечности. Ограниченные функции

Мы рассмотрели случаи, когда функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b при $x \to a$ или $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Определение 1. Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т.е. является *бесконечно большой* величиной при $x \to a$, если для каждого положительного числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений x, отличных от a, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

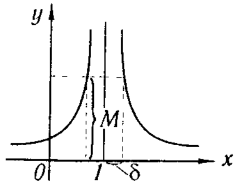


Рис. 34

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, то пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{-2} = +\infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$(1-x)^{-2} > M,$$

если только

$$(1-x)^2 < 1/M, \ |1-x| < 1/\sqrt{M} = \delta.$$

Функция $(1-x)^{-2}$ принимает только положительные значения (рис. 34).

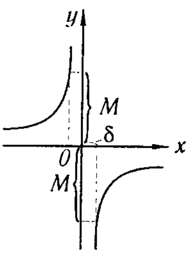


Рис. 35

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$|-1/x| > M.$$

если только

$$|x| = |x-0| < 1/M = \delta.$$

Здесь $(-1/x) > 0$ при $x < 0$ и $(-1/x) < 0$ при $x > 0$ (рис. 35).

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

и, в частности, может быть:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Например,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ и т.п.}$$

Замечание 1. Функция $y = f(x)$ при $x \to a$ или при $x \to \infty$ может не стремится к конечному пределу или к бесконечности.

Пример 3. Функция $y = \sin x$, определенная на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, при $x \to \infty$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (рис. 36).

Пример 4. Функция $y = \sin\frac{1}{x}$, определенная при всех значениях x, кроме значения $x = 0$, не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности при $x \to 0$. График этой функции изображен на рис. 37.

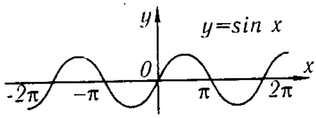


Рис. 36

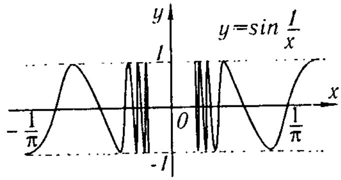


Рис. 37

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента x, если существует положительное число M такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполнятся неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в данной области.

Пример 5. Функция $y = \sin x$, определенная в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях x

$$|\sin x| \leqslant 1 = M.$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной при* $x \to a$, если существует окрестность с центром в точке a, в которой данная функция ограничена.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной при* $x \to \infty$, если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, функция $f(x)$ ограничена.

Вопрос об ограниченности функции, стремящейся к пределу, решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *при этом* b *есть конечное число, то функция* $f(x)$ *является ограниченной при* $x \to a$.

Доказательство. Из равенства $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что в окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

или

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

А это и значит, что функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$.

Замечание 2. Из определения ограниченной функции $f(x)$ следует, что если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

т.е. если $f(x)$ есть бесконечно большая, то она является неограниченной. Обратное неверно: неограниченная функция может и не быть бесконечно большой.

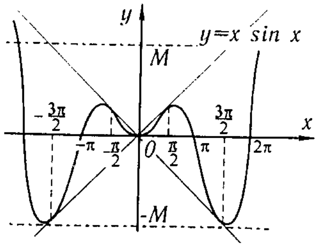


Рис. 38

Например, функция $y = x\sin x$ при $x \to \infty$ является неограниченной, так как для любого $M > 0$ можно найти такие значения x, что $|x\sin x| > M$. Но функция $y = x\sin x$ не является бесконечно большой, поскольку она обращается в нуль при $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$. График функции $y = x\sin x$ изображен на рис. 38.

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, *то функция* $y = 1/f(x)$ *есть ограниченная функция при* $x \to a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$ будем иметь $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $\big||f(x)| - |b|\big| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, или $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$.

Из последних неравенств следует:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon};$$

взяв, например, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$, получаем:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}.$$

А это и значит, что функция $1/f(x)$ ограничена.

§ 4. Бесконечно малые и их основные свойства

В этом параграфе будем рассматривать функции, стремящиеся к нулю при некотором характере изменения аргумента.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Из определения предела следует, что если, например, $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, будет удовлетворяться условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Функция $\alpha = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$ (рис. 39).

Пример 2. Функция $\alpha = 1/x$ есть бесконечно малая при $x \to \infty$ (рис. 40) (см. пример 3 § 2).

Установим важное для дальнейшего соотношение:

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *представляется в виде суммы постоянного числа* b *и бесконечно малой* α:

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

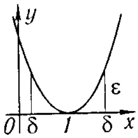


Рис. 39

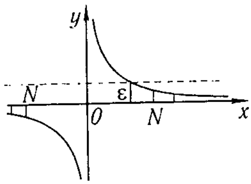


Рис. 40

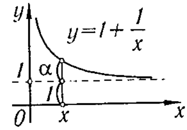


Рис. 41

то

$$\lim y = b \quad (\textit{при } x \to a \textit{ или } x \to \infty).$$

Обратно, если $\lim y = b$, *то можно написать* $y = b + \alpha$, *где* α *— бесконечно малая.*

Доказательство. Из равенства (1) следует $|y - b| = |\alpha|$. Но при произвольном ε все значения α, начиная с некоторого, удовлетворяют соотношению $|\alpha| < \varepsilon$, следовательно, для всех значений y, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|y - b| < \varepsilon$. А это и значит, что $\lim y = b$.

Обратно: если $\lim y = b$, то при произвольном ε для всех значений y, начиная с некоторого, будет $|y - b| < \varepsilon$. Но если обозначим $y - b = \alpha$, то, следовательно, для всех значений α, начиная с некоторого, будет $|\alpha| < \varepsilon$, а это значит, что α — бесконечно малая.

Пример 3. Пусть дана функция (рис. 41)

$$y = 1 + \frac{1}{x},$$

тогда

$$\lim_{x \to \infty} y = 1,$$

и наоборот, так как

$$\lim_{x \to \infty} y = 1,$$

то переменную y можно представить в виде суммы предела 1 и бесконечно малой α, равной в данном случае $1/x$, т.е.

$$y = 1 + \alpha.$$

Теорема 2. *Если* $\alpha = \alpha(x)$ *стремится к нулю при* $x \to a$ (*или при* $x \to \infty$) *и не обращается в нуль, то* $y = 1/\alpha$ *стремится к бесконечности.*

Доказательство. При любом как угодно большом $M > 0$ будет выполняться неравенство $1/|\alpha| > M$, если только будет выполняться неравенство $|\alpha| < 1/M$. Последнее неравенство будет выполняться для всех значений α, начиная с некоторого, так как $\alpha(x) \to 0$.

Теорема 3. *Алгебраическая сумма двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится аналогично.

Пусть $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$. Докажем, что при произвольном как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при удовлетворении неравенства $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|u| < \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то найдется такое δ_1, что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_1 будет

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/2.$$

Так как $\beta(x)$ есть бесконечно малая, то найдется такое δ_2, что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_2 будет

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2.$$

Возьмем δ равным меньшему из величин δ_1 и δ_2, тогда в окрестности точки a с радиусом δ будут выполняться неравенства $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$. Следовательно, в этой окрестности будет

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

т.е. $|u| < \varepsilon$, ч. т. д.

Аналогично проводится доказательство и для случая, когда

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0.$$

Замечание. В дальнейшем нам придется рассматривать такие суммы бесконечно малых величин, что с уменьшением каждого слагаемого число слагаемых увеличивается. В этом случае утверждение теоремы может оказаться и неверным. Рассмотрим, например, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{x\text{ слагаемых}}$, где x принимает только целые положительные значения ($x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$). Очевидно, что каждое слагаемое при $x \to \infty$ есть бесконечно малая, но сумма $u = 1$ не есть бесконечно малая.

Теорема 4. *Произведение функции бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ на функцию ограниченную $z = z(x)$ при $x \to a$ (или $x \to \infty$) есть величина (функция) бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $x \to a$. Для некоторого $M > 0$ найдется такая окрестность точки $x = a$, в которой будет удовлетворяться неравенство $|z| < M$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность, в которой будет выполняться неравенство $|\alpha| < \varepsilon/M$. В наименьшей из этих двух окрестностей будет выполняться неравенство

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

А это и значит, что αz — бесконечно малая. Для случая $x \to \infty$ доказательство проводится аналогично. Из данной теоремы вытекают:

Следствие 1. *Если* $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, *то* $\lim \alpha\beta = 0$, так как $\beta(x)$ есть величина ограниченная. Это справедливо для любого конечного числа множителей.

Следствие 2. *Если* $\lim \alpha = 0$ *и* $c = \text{const}$, *то* $\lim c\alpha = 0$.

Теорема 5. *Частное $\alpha(x)/z(x)$ от деления величины бесконечно малой $\alpha(x)$ на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. На основании теоремы 2 § 3 следует, что $1/z(\alpha)$ есть величина ограниченная. Поэтому дробь $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\dfrac{1}{z(x)}$ есть произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную, т.е. величина бесконечно малая.

§ 5. Основные теоремы о пределах

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать совокупности функций, которые зависят от одного и того же аргумента x, при этом $x \to a$ или $x \to \infty$.

Мы будем проводить доказательство для одного из этих случаев, так как для другого доказательство проводится аналогично. Иногда мы вообще не будем писать ни $x \to a$, ни $x \to \infty$, подразумевая то или другое.

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:*

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится так же. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Тогда на основании теоремы 1 § 4 можем написать:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые. Следовательно,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как $(a_1 + a_2)$ есть постоянная величина, а $(\alpha_1 + \alpha_2)$ — величина бесконечно малая, то снова по теореме 1 § 4 заключаем, что

$$\lim(u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Теорема 2. *Предел произведения двух, трех и вообще определенного числа переменных равен произведению пределов этих переменных*

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k.$$

Доказательство. Для сокращения записи приведем доказательство для двух множителей. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Следовательно,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2.$$

Произведение $a_1 a_2$ есть величина постоянная. Величина $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ на основании теорем § 4 есть величина бесконечно малая. Следовательно, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Действительно, если $\lim u_1 = a_1$, c — постоянная и, следовательно, $\lim c = c$, то $\lim(cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, ч. т. д.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = 5 \lim_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Теорема 3. *Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \textit{если} \ \lim v \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Следовательно, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, где α и β — бесконечно малые.

Напишем тождества

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

или

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Дробь $\frac{a}{b}$ есть постоянное число, а дробь $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ по теоремам 4 и 5 § 4 есть бесконечно малая переменная величина, так как $\alpha b - \beta a$ есть бесконечно малая, а знаменатель $b(b+\beta)$ имеет предел $b^2 \neq 0$. Следовательно, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x + 5}{4\lim\limits_{x\to 1} x - 2} = \frac{3\cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Здесь мы воспользовались доказанной теоремой о пределе дроби, так как предел знаменателя при $x \to 1$ отличен от нуля. Если же предел знаменателя есть нуль, то теорема о пределе дроби не может быть применена. В этом случае требуется производить специальные рассмотрения.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)$.

Здесь знаменатель и числитель при $x\to 2$ стремится к нулю и, следовательно, теорема 3 неприменима. Произведем следующее тождественное преобразование:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2. Поэтому, имея в виду определение предела, можем написать:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}x/(x-1)$. При $x\to 1$ знаменатель стремится к нулю, а числитель к нулю не стремится (числитель стремится к единице). Следовательно, предел обратной величины есть нуль, т.е.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

Отсюда на основании теоремы 2 предыдущего параграфа будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}x/(x-1)=\infty.$$

Теорема 4. *Если между соответствующими значениями трех функций $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$ выполняются неравенства $u\leqslant z\leqslant v$, при этом $u(x)$ и $v(x)$ при $x\to a$ (или при $x\to\infty$) стремятся к одному и тому же пределу b, то $z=z(x)$ при $x\to a$ (или при $x\to\infty$) стремится к тому же пределу.*

Доказательство. Для определенности будем рассматривать изменение функции при $x\to a$. Из неравенств $u\leqslant z\leqslant v$ следуют неравенства

$$u-b\leqslant z-b\leqslant v-b;$$

по условию

$$\lim_{x\to a}u=b,\quad \lim_{x\to a}v=b.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|u-b|<\varepsilon$; так же найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|v-b|<\varepsilon$. В меньшей из указанных окрестностей будут выполняться неравенства:

$$-\varepsilon<u-b<\varepsilon \text{ и } -\varepsilon<x-b<\varepsilon,$$

а, следовательно, будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon<z-b<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x\to a}z=b.$$

Теорема 5. *Если при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) функция y принимает неотрицательные значения $y \geqslant 0$ и при этом стремится к пределу b, то b есть неотрицательное число: $b \geqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что $b < 0$, тогда $|y - b| \geqslant |b|$, т.е. модуль разности $|y - b|$ больше положительного числа $|b|$ и, следовательно, не стремится к нулю при $x \to a$. Но тогда y при $x \to a$ не стремится к b, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение, что $b < 0$, приводит к противоречию. Следовательно, $b \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что если $y \leqslant 0$, то $\lim y \leqslant 0$.

Теорема 6. *Если между соответствующими значениями двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, стремящихся к пределам при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), выполняется неравенство $v \geqslant u$, то имеет место $\lim v \geqslant \lim u$.*

Доказательство. По условию $v - u \geqslant 0$, следовательно (по теореме 5), $\lim(v - u) \geqslant 0$, или $\lim v - \lim u \geqslant 0$, т.е. $\lim v \geqslant \lim u$.

Пример 6. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Из рис. 42 следует: если $OA = 1$, $x > 0$, то $AC = \sin x$, $\smile AB = x$, $\sin x < x$. Очевидно, что при $x < 0$ будет $|\sin x| < |x|$. Из этих неравенств на основании теорем 5 и 6 следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Пример 7. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$.

Действительно, $|\sin(x/2)| < |\sin x|$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$.

Пример 8. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$; заметим, что

$$\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2),$$

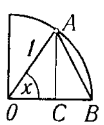


Рис. 42

следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2(x/2)) = \\ = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2(x/2) = 1 - 0 = 1.$$

В некоторых исследованиях вопроса о пределе переменных приходится решать две самостоятельные задачи:

1) доказывать, что предел переменной существует, и устанавливать границы, внутри которых рассматриваемый предел находится;

2) вычислять рассматриваемый предел с нужной степенью точности.

Иногда первый вопрос решается с помощью следующей, важной для дальнейшего теоремы.

Теорема 7. *Если переменная величина v возрастает, т.е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, т.е. $v < M$, то эта переменная величина имеет предел $\lim v = a$, где $a \leqslant M$.*

Аналогичное утверждение имеет место и для убывающей ограниченной переменной величины.

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим, так как оно основывается на теории действительных чисел, которую мы здесь не даем*).

В следующих двух параграфах будут получены пределы двух функций, имеющие большое применение в математике.

§ 6. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Найдем предел этой функции при $x \to 0$. Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 43); обозначим центральный угол MOB через x, при этом $0 < x < \pi/2$. Из рис. 43 непосредственно следует:

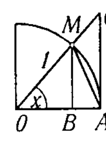


Рис. 43

$$\text{Площадь}\,\Delta MOA < \text{площади сектора}\,MOA < \\ < \text{площади}\ \Delta COA. \quad (1)$$

Площадь $\Delta MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$.

Площадь сектора $MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\smile}{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$.

Площадь $\Delta COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

Неравенства (1) после сокращения на 1/2 переписываются так:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим все члены на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

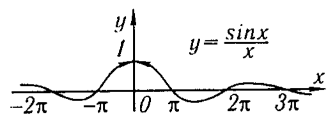


Рис. 44

Мы вывели это неравенство в предположении, что $x > 0$; замечая, что $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$, заключаем, что оно верно и при $x < 0$. Но $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

Следовательно, переменная $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя величинами, имеющими один и тот же предел, равный 1; таким образом, на основании теоремы 4 предыдущего параграфа

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

График функции $y = \frac{\sin x}{x}$ изображен на рис. 44.

---

*) Доказательство этой теоремы приведено, например, в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}k\dfrac{\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}}\dfrac{\sin(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k$ $(k=\text{const})$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha=\text{const},$ $\beta=\text{const})$.

§ 7. Число e

Рассмотрим переменную величину

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где n — возрастающая переменная величина, принимающая значения натурального ряда чисел 1, 2, 3, ...

Теорема 1. *Переменная величина* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *при* $n\to\infty$ *имеет предел, заключенный между* 2 *и* 3.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона можем написать:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Произведя очевидные алгебраические преобразования, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

Из последнего равенства следует, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая переменная величина при возрастающем n.

Действительно, при переходе от значения n к значению $n+1$ каждое слагаемое последней суммы взрастает

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \text{ и т.д.}$$

и добавляется еще один член. (Все члены разложения — положительные.)

Покажем, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Замечая, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ и т.д., из выражения (2) получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Замечая далее, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\quad \dots,\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

можем написать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1/2$ и первым членом $a=1$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3. \qquad (3)$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Итак, переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая и ограниченная, поэтому на основании теоремы 7 § 5 она имеет предел. Этот предел обозначается буквой e.

Определение. Предел переменной величины $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ называется*) *числом* e:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

---

*) Можно показать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$ при $n\to+\infty$, если n не является монотонно возрастающей переменной величиной.

Из неравенства (3) на основании теоремы 6 § 5 следует, что и число e удовлетворяет неравенству $2 \leqslant e \leqslant 3$. Теорема доказана.

Число e — иррациональное число. Позднее будет указан метод его вычисления с любой степенью точности. Его значение с десятью верными знаками после запятой:

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Теорема 2. *Функция* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *стремится при* x, *стремящемся к бесконечности, к пределу* e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Было установлено, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ при $n\to\infty$, если n принимает целые положительные значения. Пусть теперь x стремится к бесконечности, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

1) Пусть $x \to +\infty$. Каждое его значение заключено между двумя положительными целыми числами

$$n \leqslant x < n+1.$$

При этом будут выполняться неравенства:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Если $x\to\infty$, то, очевидно, и $n\to\infty$. Найдем пределы переменных, между которыми заключена переменная $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

следовательно (по теореме 4 § 5),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (4)$$

2) Пусть $x \to -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1)$ или $x = -(t+1)$. При $t \to +\infty$ будет $x \to -\infty$. Можем написать:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) =$$

$$= e \cdot 1 = e.$$

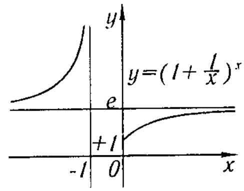


Рис. 45

Теорема доказана. График функции $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ изображен на рис. 45.

Если в равенстве (4) положить $1/x = \alpha$, то при $x \to \infty$ имеем $\alpha \to 0$ (но $\alpha \neq 0$) и мы получаем $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} =$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e \cdot 1 = e.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} =$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \cdot e \cdot e = e^3.$$

3. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{y \to \infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$

4. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y \to \infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} =$$

$$= \lim_{y \to \infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y} \cdot \lim_{y \to \infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4} = e^4 \cdot 1 = e^4.$$

Замечание. Показательная функция с основанием e,

$$y = e^x,$$

играет исключительно большую роль в дальнейшем курсе математики. Эта функция играет большую роль при изучении различных явлений в механике (теория колебаний), в электротехнике и радиотехнике, в радиохимии и т.д. Эту функцию часто называют *экспонентой* (Exponential function). Графики показательной функции $y = e^x$ и показательной функции $y = e^{-x}$ изображены на рис. 46.

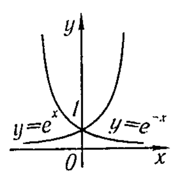


Рис. 46

§ 8. Натуральные логарифмы

В § 8 главы I была определена логарифмическая функция $y = \log_a x$. Число a называется основанием логарифмов. Если $a = 10$, то y называется десятичным логарифмом числа x и обозначается $y = \lg x$. Из школьного курса известны таблицы значений десятичных логарифмов, которые называются *бригговыми*, по имени английского ученого Бригга (1556–1630).

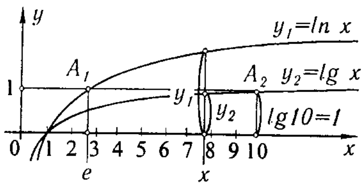


Рис. 47

Логарифмы с основанием $e = 2,71828\ldots$ называют *натуральными* или *неперовыми логарифмами*, по имени одного из первых изобретателей логарифмических таблиц, математика Непера (1550–1617). Следовательно, если $e^y = x$, то y называют натуральным логарифмом числа x и пишут $y = \ln x$ вместо $y = \log_e x$. Графики функций $y = \ln x$ и $y = \lg x$ построены на рис. 47.

Установим, далее, зависимость между десятичными и натуральными логарифмами одного и того же числа x. Пусть $y = \lg x$ или $x = 10^y$. Прологарифмируем левую и правую части последнего равенства при основании e, получим $\ln x = y \ln 10$. Определяем $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$, или, подставляя значение y, имеем $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$.

Таким образом, если известен натуральный логарифм числа x, десятичный логарифм этого числа находится путем умножения на множитель $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$, не зависящий от x. Число M называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg x = M \ln x.$$

Если положим в этом тождестве $x = e$, то получим выражение числа M через десятичные логарифмы:

$$\lg e = M \quad (\ln e = 1).$$

Натуральные логарифмы через десятичные выражаются так:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

где

$$\frac{1}{M} \approx 2,302585.$$

Замечание. Для вычисления натуральных логарифмов чисел существуют специальные таблицы (например, см. И.Н. ***Бронштейн*** и К.А. ***Семендяев***, Справочник по математике, Физматгиз, 1967).

§ 9. Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в x_0. Пусть $y_0 = f(x_0)$.

Если x получит некоторое положительное или отрицательное — безразлично — приращение Δx и примет значение $x = x_0 + \Delta x$, то и функция y получит некоторое приращение Δy. Новое, наращенное значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (рис. 48). Приращение функции Δy выразится формулой

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при значении $x = x_0$ (или в точке x_0)*, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (очевидно, и в самой точке x_0) и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

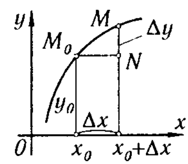


Рис. 48

Условие непрерывности (2) можно записать и так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

или

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3}$$

но

$$x_0 = \lim_{x \to x_0} x.$$

Следовательно, равенство (3) можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right), \tag{4}$$

т.е. для того, чтобы найти предел непрерывной функции при $x \to x_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0.

Описательно геометрически непрерывность функции в данной точке означает, что разность ординат графика функции $y = f(x)$ в точках $x_0 + \Delta x$ и x_0 будет по абсолютной величине произвольно малой, если только $|\Delta x|$ будет достаточно мало.

Пример 1. Докажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0. Действительно,

$$y_0 = x_0^2,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

при любом способе стремления Δx к нулю (рис. 49, *а* и *б*).

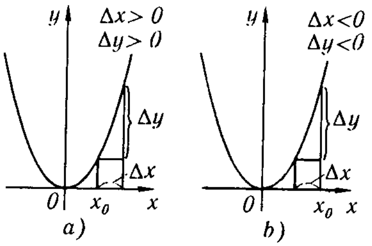


Рис. 49

Пример 2. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке x_0. Действительно,

$$y_0 = \sin x_0, \ y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$
$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Было показано, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$ (пример 7 § 5). Функция $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ ограничена. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Аналогичным образом, рассматривая каждую основную элементарную функцию, можно доказать, что каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Докажем далее следующую теорему.

Теорема 1. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то сумма $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0.*

Доказательство. Так как $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны, то на основании равенства (3) можем написать

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

На основании теоремы 1 о пределах можем написать

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0).$$

Итак, сумма $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ есть непрерывная функция. Теорема доказана.

Как следствие отметим, что теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Опираясь на свойства пределов, так же можно доказать следующие теоремы:

а) *Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.*

б) *Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.*

в) *Если $u = \varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Используя эти теоремы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Всякая непрерывная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена**).

Пример 3. Функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке x_0 и потому

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2, \quad \lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Пример 4. Функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке и потому

$$\lim_{x\to \pi/4} \sin x = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2.$$

Пример 5. Функция $y = e^x$ непрерывна в каждой точке и потому $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\Big[(1+x)^{\frac{1}{x}}\Big]$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и функция $\ln z$ непрерывна при $z > 0$, и, следовательно, при $z = e$, то

$$\lim_{x\to 0} \ln\Big[(1+x)^{\frac{1}{x}}\Big] = \ln\Big[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\Big] = \ln e = 1.$$

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b), где $a < b$, то говорят, что функция *непрерывна на этом интервале*.

Если функция определена и при $x = a$, и при этом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = a$ *непрерывна справа*. Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = b$ *непрерывна слева*.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что $f(x)$ *непрерывна на замкнутом интервале* или *отрезке* $[a, b]$.

Пример 7. Функция $y = x^2$ непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, что следует из примера 1.

Если в какой-то точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т.е. если при $x = x_0$ функция не определена или не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ при произвольном стремлении $x \to x_0$, хотя выражения, стоящие справа и слева, существуют, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ *разрывна*. Точка $x = x_0$ в этом случае называется *точкой разрыва* функции.

Пример 8. Функция $y = 1/x$ разрывна при $x = 0$. Действительно, при $x = 0$ функция не определена:

$$\lim_{x\to 0+0} 1/x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} 1/x = -\infty.$$

Легко показать, что эта функция иепрерывна при любом значении $x \neq 0$.

---

*) Этот вопрос подробно изложен в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

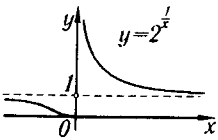


Рис. 50

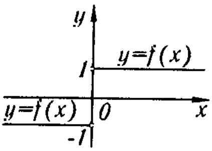


Рис. 51

Пример 9. Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ разрывна при $x = 0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. При $x = 0$ функция не определена (рис. 50).

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x) = x/|x|$. При $x < 0$ будет $x/|x| = -1$; при $x > 0$ будет $x/|x| = 1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x/|x| = -1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x/|x| = 1;$$

при $x = 0$ функция не определена. Таким образом, мы установили, что функция $f(x) = x/|x|$ разрывна при $x = 0$ (рис. 51).

Пример 11. Функция $y = \sin(1/x)$, рассмотренная в примере 4 § 3, разрывна при $x = 0$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ такова, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, но или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, или значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ не определено, то $x = x_0$ называется *точкой разрыва 1-го рода*. (Например, для функции, рассмотренной в примере 10, точка $x = 0$ есть точка разрыва 1-го рода).

§ 10. Некоторые свойства непрерывных функций

В этом параграфе рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства будут сформулированы в виде теорем, которые мы приводим без доказательства*).

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению*

$$f(x_1) \geqslant f(x),$$

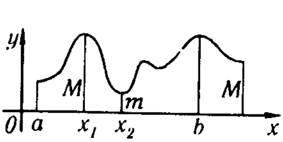


Рис. 52

где x — любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению

$$f(x_2) \leqslant f(x).$$

Значение функции $f(x_1)$ будем называть *наибольшим значением* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, значение функции $f(x_2)$ будем называть *наименьшим значением* функции на отрезке $[a, b]$.

---

*) Доказательства этих теорем можно найти в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

Коротко эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Смысл этой теоремы наглядно иллюстрируется на рис. 52.

Замечание. Утверждение теоремы о существовании наибольшего значения функции может оказаться неверным, если рассматривать значения функции на интервале $a < x < b$. Так, например, если мы будем рассматривать функцию $y = x$ на интервале $0 < x < 1$, то среди ее значений нет наибольшего и нет наименьшего. Действительно, на интервале нет ни наименьшего, ни наибольшего значений x. (Нет крайней левой точки, так как, какую бы ни взяли точку x^*, найдется точка левее взятой, например точка $\frac{x^*}{2}$; также нет крайней правой, а следовательно, нет ни наименьшего, ни наибольшего значений $y = x$.)

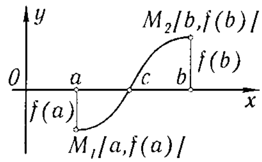


Рис. 53

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка $x = c$, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий точки $M_1[a, f(a)]$ и $M_2[b, f(b)]$, где $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (или $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$), пересекает ось Ox по крайней мере в одной точке (рис. 53).

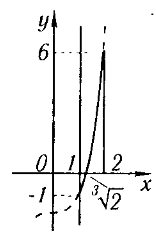


Рис. 54

Пример. Дана функция $y = x^3 - 2$; $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. На отрезке $[1, 2]$ она непрерывна. Следовательно, на этом отрезке существует точка, где $y = x^3 - 2$ обращается в нуль. Действительно, $y = 0$ при $x = \sqrt[3]{2}$ (рис. 54).

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то каково бы ни было число μ, заключенное между числами A и B, найдется такая точка $x = c$, заключенная между a и b, что $f(c) = \mu$.*

Смысл данной теоремы отчетливо иллюстрируется на рис. 55. В данном случае всякая прямая $y = \mu$ пересекает график функции $y = f(x)$.

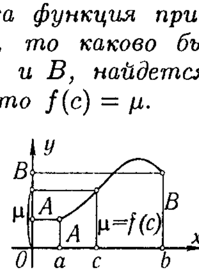


Рис. 55

Замечание. Отметим, что теорема 2 является частным случаем этой теоремы, так как если A и B имеют разные знаки, то в качестве μ можно взять 0 и тогда $\mu = 0$ будет заключено между числами A и B.

Следствие теоремы 3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наименьшими и наибольшими значениями.*

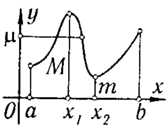


Рис. 56

Действительно, пусть $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Тогда по теореме 3 на этом отрезке функция $y = f(x)$ принимает любое значение μ, заключенное между M и m. Но отрезок $[x_1, x_2]$ заключен внутри рассматриваемого интервала, на котором определена функция $f(x)$ (рис. 56).

§ 11. Сравнение бесконечно малых

Пусть одновременно несколько бесконечно малых величин

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots$$

являются функциями одного и того же аргумента x и стремятся к нулю при стремлении x к некоторому пределу a или к бесконечности. Охарактеризуем стремление этих переменных к нулю, рассматривая их отношения*).

Будем пользоваться в дальнейшем следующими определениями.

Определение 1. Если отношение β/α имеет конечный и отличный от нуля предел, т.е. если $\lim \beta/\alpha = A \neq 0$, а следовательно, $\lim \alpha/\beta = 1/A \neq 0$, то бесконечно малые β и α называются *бесконечно малыми одного порядка.*

Пример 1. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Пример 2. При $x \to 0$ бесконечно малые x, $\sin 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7\ln(1+x)$ являются бесконечно малыми одного и того же порядка. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в примере 1.

Определение 2. Если отношение двух бесконечно малых β/α стремится к нулю, т.е. $\lim \beta/\alpha = 0$ (а $\lim \alpha/\beta = \infty$), то бесконечно малая β называется *бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая* α, а бесконечно малая α называется *бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая* β.

Пример 3. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \to 0$. Бесконечно малая β есть бесконечно малая высшего порядка, чем бесконечно малая α, так как $\lim\limits_{x\to 0} x^n/x = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$.

При этом бесконечно малая α есть бесконечно малая низшего порядка, чем бесконечно малая β.

---

*) Будем предполагать, что бесконечно малая, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a.

Определение 3. Бесконечно малая β называется *бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой α*, если β и α^k — бесконечно малые одного порядка, т.е. если $\lim \beta/\alpha^k = A \neq 0$.

Пример 4. Если $\alpha = x$, $\beta = x^3$, то при $x \to 0$ бесконечно малая β есть бесконечно малая третьего порядка относительно бесконечно малой α, так как

$$\lim_{x\to 0} \beta/\alpha^3 = \lim_{x\to 0} x^3/(x)^3 = 1.$$

Определение 4. Если отношение двух бесконечно малых β/α стремится к единице, т.е. если $\lim \beta/\alpha = 1$, то бесконечно малые β и α называют *эквивалентными бесконечно малыми**) и пишут $\alpha \approx \beta$.

Пример 5. Пусть $\alpha = x$ и $\beta = \sin x$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 6. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(см. пример 6 § 9).

Теорема 1. *Если α и β — эквивалентные бесконечно малые, то их разность $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β.*

Доказательство. Действительно,

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim\frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Теорема 2. *Если разность двух бесконечно малых $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β, то α и β суть эквивалентные бесконечно малые.*

Доказательство. Пусть $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$, тогда $\lim\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, или $1 - \lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$, или $1 = \lim\frac{\beta}{\alpha}$, т.е. $\alpha \approx \beta$. Если $\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$, то $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$, $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 1$, т.е. $\alpha \approx \beta$.

Пример 7. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x + x^3$, где $x \to 0$.

Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как их разность $\beta - \alpha = x^3$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Пример 8. При $x \to \infty$ бесконечно малые $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ и $\beta = \frac{1}{x}$ — эквивалентные бесконечно малые, так как их разность $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ есть

*) В этом случае α и β иногда называют ***равносильными*** бесконечно малыми.

бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β. Предел отношения α и β равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Замечание. Если отношение двух бесконечно малых β/α не имеет предела и не стремится к бесконечности, то β и α не сравнимы между собой в указанном выше смысле.

Пример 9. Пусть $\alpha=x$, $\beta=x\sin(1/x)$, где $x\to 0$. Бесконечно малые α и β не сравнимы, так как их отношение $\beta/\alpha=\sin(1/x)$ при $x\to 0$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (см. пример 4 § 3).

Упражнения к главе II

Вычислить указанные пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Отв.* 4. **2.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}[2\sin x-\cos x+\operatorname{ctg}x]$. *Отв.* 2. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Отв.* 0. **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$. *Отв.* 2. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Отв.* $\dfrac{4}{3}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. *Отв.* 1. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Отв.* $\dfrac{1}{3}$.

Указание. Напишем формулу $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ для $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

$$1^3=1;\qquad 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;\qquad \ldots\qquad (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складывая левые и правые части, получим:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$
$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

откуда

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Отв.* ∞. **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Отв.* 0. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Отв.* 4. **13.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. *Отв.* 3. **14.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Отв.* $\dfrac{1}{8}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Отв.* 1. **16.** $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Отв.* $-\dfrac{2}{5}$. **17.** $\lim\limits_{u\to -2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Отв.* 0. **18.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Отв.* $3x^2$. **19.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. *Отв.* -1. **20.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Отв.* n (n — целое положительное число). **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Отв.* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Отв.* $\dfrac{q}{p}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Отв. $\frac{2}{3}$. **25.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Отв.* $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$.
27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Отв.* 1. **28.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Отв.* 1 при $x\to+\infty$, -1 при $x\to-\infty$. **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Отв.* 0. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Отв.* $\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$, $-\infty$ при $x\to-\infty$. **31.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* 1. **32.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$. *Отв.* 4.
33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/3)}{x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{9}$. **34.** $\lim\limits_{x\to+0}x/\sqrt{1-\cos x}$. *Отв.* $\sqrt{2}$. **35.** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$. *Отв.* 1. **36.** $\lim\limits_{v\to\pi/3}\frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Отв.* $\sqrt{3}$. **37.** $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$.
38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$. *Отв.* $\frac{2}{3}$. **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. *Отв.* $2\cos a$.
40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **41.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. *Отв.* e^2. **42.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **43.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **44.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Отв.* e.
45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. *Отв.* 1. **46.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{3\sec x}$. *Отв.* e^3.
47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. *Отв.* α. **48.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Отв.* e. **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}$. *Отв.* e^3. **50.** $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$. *Отв.* 1. **51.** $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$. *Отв.* 1 при $\alpha\to+\infty$, 0 при $\alpha\to-\infty$. **52.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. *Отв.* $\frac{\alpha}{\beta}$. **53.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. *Отв.* $+\infty$ при $x\to+\infty$, 0 при $x\to-\infty$. **54.** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. *Отв.* $\ln a$. **55.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. *Отв.* $\alpha-\beta$. **56.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ *Отв.* 1.

Определить точки разрыва функций:

57. $y=\frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. *Отв.* Разрывы при $x=-2;\ -1;\ 0;\ 2$. **58.** $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. *Отв.* Разрывы при $x=0$ и $x=\pm\frac{2}{\pi};\ \pm\frac{2}{3\pi};\ \ldots;\ \pm\frac{2}{(2n+1)\pi};\ \ldots$

59. Найти точки разрыва функции $y=1+2^{1/x}$ и построить график этой функции. *Отв.* Разрыв при $x=0$ ($y\to+\infty$ при $x\to0+0$, $y\to1$ при $x\to0-0$).

60. Между следующими бесконечно малыми (при $x\to0$) величинами x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2x}$, xe^{2x} выбрать бесконечно малые одного порядка с бесконечно малой x, а также высшего и низшего порядка, чем x. *Отв.* Бесконечно малые одного порядка с x: $\sin 3x$ и xe^{2x}; бесконечно малые высшего порядка по сравнению с x: x^2 и $2x\cos x\sqrt[2]{\operatorname{tg}^2x}$; бесконечно малая низшего порядка по сравнению с x: $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Среди указанных бесконечно малых (при $x\to0$) величин найти бесконечно малые, равносильные бесконечно малой x: $2\sin x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. Убедиться в том, что при $x\to1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентны? *Отв.* $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, следовательно, данные бесконечно малые одного порядка, но не эквивалентны.

Глава III
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Скорость движения

Будем рассматривать прямолинейное движение некоторого твердого тела, например движение камня, брошенного вертикально вверх, или движение поршня в цилиндре двигателя и т.д. Отвлекаясь от конкретных размеров и формы тела, мы будем в дальнейшем представлять его в виде движущейся точки M. Расстояние s движущейся точки, отсчитываемое от некоторого начального ее положения M_0, будет зависеть от времени t, т.е. s будет функцией времени t:

$$s = f(t). \tag{1}$$

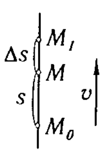


Рис. 57

Пусть в некоторый момент времени*) t движущаяся точка M находилась на расстоянии s от начального положения M_0, а в некоторый следующий момент $t+\Delta t$ точка оказалась в положении M_1 — на расстоянии $s+\Delta s$ от начального положения (рис. 57). Таким образом, за промежуток времени Δt расстояние s изменилось на величину Δs. В этом случае говорят, что за промежуток времени Δt величина s получила приращение Δs.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; оно дает нам среднюю скорость движения точки за время Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Средняя скорость не может во всех случаях точно охарактеризовать быстроту перемещения точки M в момент t. Если, например, тело в начале промежутка Δt перемещалось очень быстро, а в конце очень медленно, то средняя скорость, очевидно, не сможет отразить указанных особенностей движения точки и дать нам правильное представление об истинной скорости ее движения в момент t. Для того чтобы точнее выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости, надо взять меньший промежуток вре-

---

*) Здесь, как и в дальнейшем, конкретное значение переменной мы будем обозначать той же буквой, что и саму переменную.

мени Δt. Наиболее полно характеризует скорость движения точки в момент t тот предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$. Этот предел и называют ***скоростью движения в данный момент***:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3}$$

Таким образом, *скоростью движения в данный момент* называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю.

Напишем равенство (3) в развернутом виде. Так как

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

то

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{3$'$}$$

Это и будет скорость неравномерного движения. Таким образом, мы видим, что понятие скорости неравномерного движения органически связано с понятием предела. Только с помощью понятия предела можно определить скорость неравномерного движения.

Из формулы (3′) следует, что v не зависит от приращения времени Δt, а зависит от значения t и характера функции $f(t)$.

Пример. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент t и в момент $t = 2$ сек, если зависимость пути от времени выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$.

Решение. В момент t имеем $s = \frac{gt^2}{2}$; в момент $t + \Delta t$ получим:

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Найдем Δs:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

Составим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + (g\Delta t^2/2)}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t;$$

по определению, имеем: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t\right) = gt.$

Таким образом, скорость в любой момент времени t равна $v = gt$.

При $t = 2$ имеем $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ *м/сек.*

§ 2. Определение производной

Пусть мы имеем функцию

$$y = f(x), \tag{1}$$

определенную в некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное — безразлично) приращение Δx. Тогда функция y получит некоторое приращение Δy. Таким образом:

при значении аргумента x будем иметь $y = f(x)$,
при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют ***производной*** данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Следовательно, ***производной*** данной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента x, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Заметим, что в общем случае для каждого значения x производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т.е. производная является также ***функцией*** от x.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется ***дифференцированием*** этой функции.

Пример 1. Дана функция $y = x^2$; найти ее производную y':

1) в произвольной точке x,

2) при $x = 3$.

Решение: 1) при значении аргумента, равном x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равном $x + \Delta x$, имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходя к пределу, найдем производную от данной функции:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна

$$y' = 2x;$$

2) при $x = 3$ получим:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 2. $y = \frac{1}{x}$, найти y'.

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, получаем:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Замечание. В предыдущем параграфе было установлено, что если зависимость расстояния s движущейся точки от времени t выражается формулой $s = f(t)$, то скорость v в момент t выражается формулой

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Следовательно,

$$v = s'_t = f'(t),$$

т.е. скорость равна производной*) от пути по времени t.

§ 3. Геометрическое значение производной

Мы подошли к понятию производной, рассматривая скорость движущегося тела (точки), т.е. исходя из *механических* представлений. Теперь мы дадим не менее важное *геометрическое* истолкование производной. Для этого нам прежде всего потребуется определение *касательной к кривой* в данной точке.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0. Возьмем на кривой точку M_1 и проведем секущую M_0M_1 (рис. 58). Если точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_0, то секущая M_0M_1 занимает различные положения M_0M_1', M_0M_1'' и т.д.

---

*) Когда мы говорим «производная по x» или «производная по времени t» и т.д., то под этим мы подразумеваем, что при вычислении производной мы считаем аргументом переменную x или время t и т.д.

Если при неограниченном приближении точки M_1 по кривой к точке M_0 ***с любой стороны*** секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется *касательной* к кривой в точке M_0 (понятие «стремится занять» будет уточнено ниже).

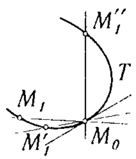


Рис. 58

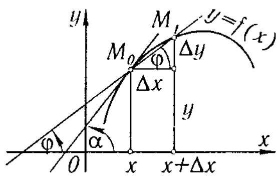


Рис. 59

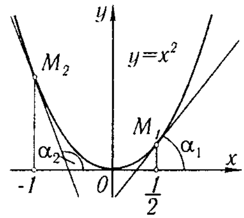


Рис. 60

Рассмотрим функцию $f(x)$ и соответствующую этой функции кривую

$$y = f(x)$$

в прямоугольной системе координат (рис. 59). При некотором значении x функция имеет значение $y = f(x)$. Этим значениям x и y на кривой соответствует точка $M_0(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Новому значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует «наращенное» значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Соответствующей ему точкой кривой будет точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Проведем секущую M_0M_1 и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Из рис. 59 непосредственно усматриваем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{1}$$

Если теперь Δx будет стремиться к нулю, то точка M_1 будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0. Секущая M_0M_1 будет поворачиваться вокруг точки M_0 и угол φ будет меняться с изменением Δx. Если при $\Delta x \to 0$ угол φ стремится к некоторому пределу α, то прямая, проходящая через M_0 и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой *касательной*. Нетрудно найти ее *угловой коэффициент*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

т.е. *значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке $M_0(x, y)$.*

Пример. Найти тангенсы углов наклона касательной к кривой $y = x^2$ в точках $M_1(1/2, 1/4)$; $M_2(-1, 1)$ (рис. 60).

Решение. На основании примера 1 § 2 имеем $y' = 2x$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'|_{x=1/2} = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = y'|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. Дифференцируемость функций

Определение. Если функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

имеет производную в точке $x = x_0$, т.е. если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

то мы говорим, что при данном значении $x = x_0$ функция *дифференцируема* или (что равносильно этому) имеет производную.

Если функция дифференцируема ***в каждой точке*** некоторого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b), то говорят, что она *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ или, соответственно, *в интервале* (a, b).

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.*

Действительно, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

где γ есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x \to 0$. Но тогда

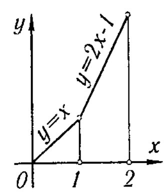


Рис. 61

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \gamma\Delta x;$$

отсюда следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и значит, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (см. § 9 гл. II).

Таким образом, ***в точках разрыва функция не может иметь производной***. Обратное заключение неверно, т.е. из того, что в какой-нибудь точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна, еще ***не следует***, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 2]$ следующим образом (рис. 61):

$$f(x) = x \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2.$$

Эта функция при $x = 1$ не имеет производной, хотя и непрерывна в этой точке. Действительно, при $\Delta x > 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x) - 1] - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

при $\Delta x < 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак Δx, а это значит, что в точке $x = 1$ функция не имеет производной*). Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке $x = 1$ данная «кривая» не имеет определенной касательной.

Непрерывность же функции в точке $x = 1$ следует из того, что

$$\Delta y = \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x < 0,$$
$$\Delta y = 2\Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x > 0,$$

и, следовательно, в обоих случаях $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

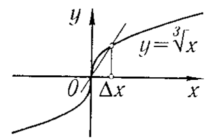


Рис. 62

Пример 2. Функция $y = \sqrt[3]{x}$, график которой изображен на рис. 62, определена и непрерывна для всех значений независимого переменного. Выясним, имеет ли эта функция производную при $x = 0$; для этого найдем значения функции при $x = 0$ и при $x = 0 + \Delta x$; при $x = 0$ имеем $y = 0$, при $x = 0 + \Delta x$ имеем $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$. Следовательно,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Таким образом, отношение приращения функции к приращению аргумента в точке $x = 0$ стремится к бесконечности при $\Delta x \to 0$ (и, значит, предела не имеет). Следовательно, рассматриваемая функция не дифференцируема в точке $x = 0$. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол $\pi/2$, т.е. совпадает с осью Oy.

§ 5. Производная от функции $y = x^n$ при n целом и положительном

Для нахождения производной от данной функции $y = f(x)$, исходя из общего определения производной, необходимо произвести следующие действия:

1) дать аргументу x приращение Δx, вычислить наращенное значение функции:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

---

*) По определению производной требуется, чтобы отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремилось при $\Delta x \to 0$ к одному и тому же пределу независимо от того, *каким образом* стремится к нулю Δx.

2) найти соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) найти предел данного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Мы применим здесь и в следующих параграфах этот общий способ для вычисления производных от некоторых элементарных функций.

Теорема. *Производная функции $y = x^n$, где n — целое положительное число, равна nx^{n-1}, т.е.*

$$\text{если} \quad y = x^n, \quad \text{то} \quad y' = nx^{n-1}. \tag{I}$$

Доказательство. Имеем функцию

$$y = x^n.$$

1. Если x получает приращение Δx, то

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2. Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n$$

или

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3. Находим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4. Найдем предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1},$$

следовательно, $y' = nx^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 2. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Последний результат имеет простое геометрическое толкование: касательная к прямой $y = x$ при любом значении x совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен 1.

Отметим, что формула (I) верна и в случае n дробного и отрицательного. (Это будет доказано в § 12.)

Пример 3. $y = \sqrt{x}$.

Представим данную функцию в виде степени:

$$y = x^{\frac{1}{2}};$$

тогда по формуле (I) (учитывая только что сделанное замечание) получаем:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

или

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Представим y в виде степенной функции

$$y = x^{-3/2}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. Производные от функций $y = \sin x$; $y = \cos x$

Теорема 1. *Производная от* $\sin x$ *есть* $\cos x$, *т.е.*

$$\text{\textit{если}} \quad y = \sin x, \quad \text{\textit{то}} \quad y' = \cos x. \qquad \text{(II)}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \dfrac{x + \Delta x - x}{2} \cos \dfrac{x + \Delta x + x}{2} =$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

но так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Последнее равенство получается на том основании, что $\cos x$ есть непрерывная функция.

Теорема 2. *Производная от* $\cos x$ *есть* $-\sin x$, *т.е.*

$$\text{\textit{если}} \quad y = \cos x, \quad \text{\textit{то}} \quad y' = -\sin x. \qquad \text{(III)}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x - \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x + x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

учитывая, что $\sin x$ есть непрерывная функция, окончательно получим:

$$y' = -\sin x.$$

§ 7. Производные: постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы, произведения, частного

Теорема 1. *Производная постоянной равна нулю, т.е.*

$$\text{если}\quad y = C,\quad \text{где}\quad C = \text{const},\quad \text{то}\quad y' = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Доказательство. $y = C$ есть такая функция от x, значения которой при всех x равны C.

Следовательно, при любом значении x

$$y = f(x) = C.$$

Дадим аргументу x приращение Δx ($\Delta x \neq 0$). Так как функция y сохраняет значение C при всех значениях аргумента, то

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Значит, приращение функции равно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

т.е.

$$y' = 0.$$

Последний результат имеет простое геометрическое истолкование. Графиком функции $y = C$ служит прямая, параллельная оси Ox. Касательная к графику в любой ее точке, очевидно, совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с осью Ox угол, тангенс которого y' равен нулю.

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е.*

$$\textit{если}\quad y = Cu(x), \quad \textit{где}\quad C = \mathrm{const}, \quad \textit{то}\quad y' = Cu'(x). \tag{V}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь:

$$y = Cu(x),$$
$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ т.е. } y' = Cu'(x).$$

Пример 1. $y = 3\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{2}}{}'\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

т.е.

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Теорема 3. *Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций**).

Для случая, например, трех слагаемых имеем:

$$y = u(x) + v(x) + w(x), \qquad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \tag{VI}$$

Доказательство. Для значений аргумента x

$$y = u + v + w$$

(аргумент x в обозначении функции для краткости письма опускаем).

Для значения аргумента $x + \Delta x$ имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

где Δy, Δu, Δv и Δw — приращения функций y, u, v и w, соответствующие приращению Δx аргумента x. Следовательно,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

или

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

---

*) Выражение $y = u(x) - v(x)$ равносильно $y = u(x) + (-1)v(x)$ и $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Пример 2. $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

т.е.

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Теорема 4. *Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т.е.*

$$\textit{если} \quad y = uv, \quad \textit{то} \quad y' = u'v + uv'. \tag{VII}$$

Доказательство. Рассуждая, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим:

$$y = uv,$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}v + \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v + u\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(так как u и v не зависят от Δx).

Рассмотрим последний член в правой части

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как $u(x)$ — дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Таким образом, рассматриваемый член равен нулю, и мы окончательно получаем:

$$y' = u'v + uv'.$$

На основании доказанной теоремы легко получается правило дифференцирования произведения любого числа функций.

Так, если имеем произведение трех функций

$$y = uvw,$$

то, представляя правую часть как произведение u и (vw), получим:

$$y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Таким приемом можем получить аналогичную формулу для производной произведения любого (конечного) числа функций. Именно, если $y = u_1u_2 \ldots u_n$, то

$$y' = u'\,u_2 \ldots u_{n-1}u_n + u_1u' \ldots u_{n-1}u_n + \cdots + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u'.$$

Пример 3. Если $y = x^2 \sin x$, то
$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Пример 4. Если $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$, то
$$y' = (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x.$$

Теорема 5. *Производная дроби (т.е. частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т.е.*
$$\textit{если} \quad y = \frac{u}{v}, \quad \textit{то} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{VIII}$$

Доказательство. Если Δy, Δu и Δv суть приращения функций y, u и v, соответствующие приращению Δx аргумента x, то
$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}.$$

Отсюда, заметив, что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$*), получаем
$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 5. Если $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$, то
$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.$$

Замечание. Если имеем функцию вида
$$y = \frac{u(x)}{C},$$
где знаменатель C есть постоянная, то, дифференцируя эту функцию, нет надобности применять формулу (VIII), а целесообразнее применять формулу (V):
$$y' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Конечно, этот результат получается и по формуле (VIII).

---

*) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, так как $v(x)$ — дифференцируемая и, следовательно, непрерывная функция.

Пример 6. Если $y = \frac{\cos x}{7}$, то $y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}$.

§ 8. Производная логарифмической функции

Теорема. *Производная от функции* $\log_a x$ *равна* $\frac{1}{x}\log_a e$, *т.е.*

$$\text{\textit{если}}\quad y = \log_a x, \quad \text{\textit{то}}\quad y' = \frac{1}{x}\log_a e. \tag{IX}$$

Доказательство. Если Δy есть приращение функции $y = \log_a x$, соответствующее приращению Δx аргумента x, то

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Помножим и разделим на x выражение, стоящее в правой части последнего равенства.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Обозначим величину $\frac{\Delta x}{x}$ через α. Очевидно, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и данном x. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но, как известно (см. § 7 гл. II),

$$\lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Если же выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к числу e, то логарифм этого выражения стремится к $\log_a e$ (в силу непрерывности логарифмической функции). Поэтому окончательно получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Заметив, что $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, полученную формулу можно переписать так:

$$y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}.$$

Отметим важный частный случай этой формулы: если $a = e$, то $\ln a = \ln e = 1$, т.е.

$$\text{\textit{если}}\quad y = \ln x, \quad \text{\textit{то}}\quad y' = \frac{1}{x}. \tag{X}$$

§ 9. Производная от сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$, т.е. такая, что ее можно представить в следующем виде:

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x)$$

или $y = F[\varphi(x)]$ (см. гл. I, § 8). В выражении $y = F(u)$ переменное u называют *промежуточным аргументом*.

Установим правило дифференцирования сложной функции.

Теорема. *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u = F'(u)$, то сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в указанной точке x также имеет производную, которая равна*

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'(x),$$

где вместо u должно быть подставлено выражение $u = \varphi(x)$. Коротко,

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу и на производную промежуточного аргумента по x.

Доказательство. При определенном значении x будем иметь:

$$u = \varphi(x), \qquad y = F(u).$$

При наращенном значении аргумента $x + \Delta x$

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \qquad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Таким образом, приращению Δx соответствует приращение Δu, которому соответствует приращение Δy, причем при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta u \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

По условию

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Перепишем равенство (1)

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \tag{2}$$

Равенство (2) справедливо и при $\Delta u = 0$ при произвольном α, так как оно превращается в тождество $0 = 0$. При $\Delta u = 0$ будем полагать $\alpha = 0$. Разделим все члены равенства (2) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

По условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (3), получим:

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{4}$$

Пример 1. Пусть дана функция $y = \sin(x^2)$. Найдем y'_x. Данную функцию представим как функцию от функции следующим образом:

$$y = \sin u, \qquad u = x^2.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_x = 2x.$$

Следовательно, по формуле (4)

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Подставляя вместо u его выражение, окончательно получаем:

$$y'_x = 2x\cos(x^2).$$

Пример 2. Дана функция $y = (\ln x)^3$. Найдем y'_x.

Данную функцию представим следующим образом:

$$y = u^3, \qquad u = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = 3u^2, \qquad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$y'_x = 3u^2\,\frac{1}{x} = 3(\ln x)^2\,\frac{1}{x}.$$

Если функция $y = f(x)$ такова, что ее можно представить в виде

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(v), \qquad v = \psi(x),$$

нахождение производной y'_x производится путем последовательного применения предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Применяя эту же теорему для нахождения u'_x, будем иметь:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

Подставляя выражение u'_x в предыдущее равенство, получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \tag{5}$$

или

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'_v(v)\psi'_x(x).$$

Пример 3. Дана функция $y = \sin[(\ln x)^3]$. Найдем y'_x. Представим данную функцию следующим образом:

$$y = \sin u, \qquad u = v^3, \qquad v = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_v = 3v^2, \qquad v'_x = 1/x.$$

Следовательно, по формуле (5) получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos u)v^2\,\frac{1}{x},$$

или окончательно

$$y'_x = \cos[(\ln x)^3] \cdot 3(\ln x)^2\,\frac{1}{x}.$$

Заметим, что рассмотренная функция определена только при $x > 0$.

§ 10. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln|x|$

Теорема 1. *Производная от функции* $\operatorname{tg} x$ *равна* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \operatorname{tg} x, \quad \text{то} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{XI}$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

то по правилу дифференцирования дроби [см. формулу (VIII) § 7 гл. III] получаем:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 2. *Производная от функции* $\operatorname{ctg} x$ *равна* $-\frac{1}{\sin^2 x}$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{XII}$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

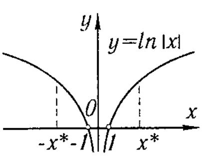


Рис. 63

Пример 1. Если $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$, то

$$y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}.$$

Пример 2. Если $y = \ln \operatorname{ctg} x$, то

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

Теорема 3. *Производная от функции* $\ln|x|$ (рис. 63) *равна* $1/x$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \ln|x|, \quad \text{то} \quad y' = 1/x. \tag{XIII}$$

Доказательство. а) Если $x > 0$, то $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$ и поэтому

$$y' = 1/x.$$

б) Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$. Но

$$\ln|x| = \ln(-x).$$

(Заметим, что если $x < 0$, то $-x > 0$.) Представим функцию $y = \ln(-x)$ как сложную функцию, положив

$$y = \ln u, \qquad u = -x.$$

Тогда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Итак, для отрицательных значений x также имеет место равенство

$$y'_x = 1/x.$$

Следовательно, формула (XIII) доказана для любого значения $x \neq 0$. (При $x = 0$ функция $\ln|x|$ не определена.)

§ 11. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое мы символически обозначим так:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), такова, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то функция $y = f(x)$ есть *неявная функция*, определенная уравнением (1).

Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

неявно определяет следующие элементарные функции (рис. 64 и 65):

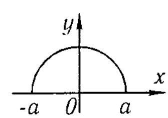


Рис. 64

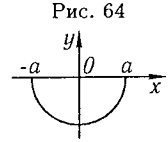


Рис. 65

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$

Действительно, после подстановки в уравнение (2) этих значений, получаем тождество

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Выражения (3) и (4) получились путем решения уравнения (2) относительно y. Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно, т.е. можно представить в виде $y = f(x)$*), где $f(x)$ есть элементарная функция.

*) Если функция задана уравнением вида $y = f(x)$, то говорят, что функция задана в *явном виде* или является *явной*.

Так, например, функции, заданные уравнениями

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

или

$$y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0,$$

не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Замечание 1. Отметим, что термины «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ задания. Каждая явная функция $y = f(x)$ может быть представлена и как неявная $y - f(x) = 0$.

Укажем, далее, правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, т.е. не представляя в виде $y = f(x)$.

Допустим, что функция задана уравнением

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Если здесь y есть функция от x, определяемая этим равенством, то это равенство есть тождество.

Дифференцируя обе части этого тождества по x, считая, что y есть функция от x, получим (пользуясь правилом дифференцирования сложной функции):

$$2x + 2yy' = 0,$$

откуда

$$y' = -x/y.$$

Заметим, что если бы мы стали дифференцировать соответствующую явную функцию

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

то получили бы:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

т.е. тот же результат.

Рассмотрим еще один пример неявной функции y от x:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Дифференцируем по x:

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Замечание 2. Из приведенных примеров следует, что для нахождения значения производной неявной функции при данном значении аргумента x нужно знать и значение функции y при данном значении x.

§ 12. Производные степенной функции при любом действительном показателе, показательной функции, сложной показательной функции

Теорема 1. *Производная от функции x^n, где n — любое действительное число, равна nx^{n-1}, т.е.*

$$\text{если} \quad y = x^n, \quad \text{то} \quad y' = nx^{n-1}. \tag{1'}$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = n \ln x.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x, считая y функцией от x:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}, \qquad y' = yn\frac{1}{x}.$$

Подставляя сюда значение $y = x^n$, окончательно получаем:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Легко показать, что эта формула верна и для $x < 0$, если только x^n имеет смысл*).

Теорема 2. *Производная от функции a^x, где $a > 0$, равна $a^x \ln a$, т.е.*

$$\text{если} \quad y = a^x, \quad \text{то} \quad y' = a^x \ln a. \tag{XIV}$$

Доказательство. Логарифмируя равенство $y = a^x$, получим:

$$\ln y = x \ln a.$$

Дифференцируем полученное равенство, считая y функцией от x:

$$\frac{1}{y}y' = \ln a, \qquad y' = y \ln a$$

или

$$y' = a^x \ln a.$$

Если основание $a = e$, то $\ln e = 1$ и мы получим формулу

$$y = e^x, \qquad y' = e^x. \tag{XIV'}$$

Пример 1. Дана функция

$$y = e^{x^2}.$$

Представим ее как сложную функцию, введя промежуточный аргумент u:

$$y = e^u, \qquad u = x^2,$$

тогда

$$y'_u = e^u, \qquad u'_x = 2x$$

и, следовательно,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

---

*) Эта формула была ранее доказана (§ 5 гл. III) для случая, когда n является *целым положительным* числом. Теперь формула (I) доказана в общем случае (для любого постоянного числа n).

Сложной показательной функцией называется функция, у которой и основание и показатель степени являются функциями от x, например $(\sin x)^{x^2}$, $x^{\operatorname{tg} x}$, x^x, $(\ln x)^x$, вообще, всякая функция вида

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

есть сложная показательная функция**).

Теорема 3.

$$\textit{Если} \quad y = u^v, \quad \textit{то} \quad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \tag{XV}$$

Доказательство. Логарифмируем функцию y:

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируя полученное равенство по x, будем иметь:

$$\frac{1}{y}y' = v\frac{1}{u}u' + v' \ln u,$$

откуда

$$y' = y\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right).$$

Подставляя сюда выражение $y = u^v$, получаем:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Таким образом, производная сложной показательной функции состоит из двух слагаемых: первое слагаемое получается, если при дифференцировании предположить, что u есть функция от x, а v есть ***постоянная*** (т.е. если рассматривать u^v как ***степенную*** функцию); второе слагаемое получается, если предположить, что v есть функция от x, а $u = \text{const}$ (т.е. если рассматривать u^v как ***показательную*** функцию).

Пример 2. Если $y = x^x$, то $y' = xx^{x-1}(x') + x^x(x') \ln x$ или

$$y' = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

Пример 3. Если $y = (\sin x)^{x^2}$, то

$$y' = x^2(\sin x)^{x^2-1}(\sin x)' + (\sin x)^{x^2}(x^2)' \ln \sin x =$$
$$= x^2(\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x.$$

Прием, примененный в этом параграфе для нахождения производных и состоящий в том, что сначала находят производную ***логарифма данной функции***, широко применяется при дифференцировании функций. Применение этого приема нередко значительно упрощает вычисления.

**) Часто такую функцию называют показательно-степенной или степенно-показательной.

Пример 4. Требуется найти производную от функции

$$y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

Решение. Логарифмируя, находим:

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Умножая на y и подставляя $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ вместо y, получаем:

$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right].$$

Замечание. Выражение $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, являющееся производной по x от натурального логарифма данной функции $y = y(x)$, называется *логарифмической производной*.

§ 13. Обратная функция и ее дифференцирование

Пусть дана возрастающая (рис. 66) или убывающая функция

$$y = f(x), \tag{1}$$

определенная на некотором интервале (a, b) $(a < b)$ (см. § 6 гл. I). Пусть $f(a) = c$, $f(b) = d$. Для определенности будем в дальнейшем рассматривать возрастающую функцию.

Рассмотрим два различных значения x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b). Из определения возрастающей функции следует, что если $x_1 < x_2$ и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то $y_1 < y_2$. Следовательно, двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют два различных значения функции y_1 и y_2. Справедливо и обратное, т.е. если $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$, а $y_2 = f(x_2)$, то из определения возрастающей функции следует, что $x_1 < x_2$. Таким образом, между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Рассматривая эти значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции, получаем x как функцию y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Эта функция называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Очевидно, что и функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что и убывающая функция имеет обратную.

Замечание 1. Укажем без доказательства, что *если возрастающая* (или *убывающая*) *функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *причем* $f(a) = c$, $f(b) = d$, *то обратная функция определена и непрерывна на отрезке* $[c, d]$.

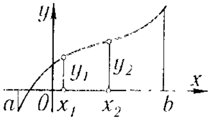


Рис. 66

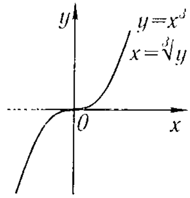


Рис. 67

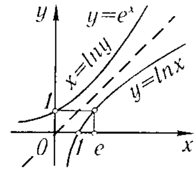


Рис. 68

Пример 1. Пусть дана функция $y = x^3$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, она имеет обратную $x = \sqrt[3]{y}$ (рис. 67).

Заметим, что обратная функция $x = \varphi(y)$ находится путем решения уравнения $y = f(x)$ относительно x.

Пример 2. Пусть дана функция $y = e^x$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она имеет обратную $x = \ln y$. Область определения обратной функции $0 < y < +\infty$ (рис. 68).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей на некотором интервале, то она может иметь несколько обратных функций*).

Пример 3. Функция $y = x^2$ определена на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она не является ни возрастающей, ни убывающей и не имеет обратной. Если мы рассмотрим интервал $0 \leqslant x < +\infty$, то здесь функция является возрастающей и обратной для нее будет $x = \sqrt{y}$. На интервале же $-\infty < x < 0$ функция — убывающая, и обратной для нее будет функция $x = -\sqrt{y}$ (рис. 69).

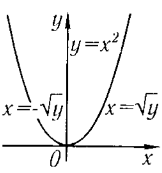


Рис. 69

Замечание 3. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными, то графиками их является одна и та же кривая. Но если аргумент обратной функции мы обозначим снова через x, а функцию через y и построим их в одной координатной системе, то получим уже два различных графика.

Легко видеть, что графики будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Пример 4. На рис. 68 построены графики функции $y = e^x$ (или $x = \ln y$) и обратной для нее функции $y = \ln x$, рассмотренных в примере 2.

Докажем, далее, теорему, позволяющую находить производную функции $y = f(x)$, зная производную обратной функции.

---

*) Подчеркнем еще раз, что, говоря о том, что y есть функция от x, мы понимаем однозначную зависимость y от x.

Теорема. *Если для функции*

$$y = f(x) \tag{1}$$

существует обратная функция

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\frac{1}{\varphi'(y)}$, т.е. справедлива формула

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{XVI}$$

Таким образом, производная одной из двух взаимно обратных функций равна единице, деленной на производную второй из этих функций при соответствующих значениях x и y*).

Доказательство. Возьмем приращение Δy, тогда на основании (2)

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Так как $\varphi(y)$ есть функция монотонная, то $\Delta x \neq 0$. Напишем тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \tag{3}$$

Так как функция $\varphi(y)$ непрерывна, то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ в обеих частях равенства (3), получим:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

т.е. получили формулу XVI.

Замечание. Если пользоваться теоремой о дифференцировании сложной функции, то формулу XVI можно получить так.

Дифференцируем обе части равенства (2) по x, считая y функцией от x. Получим $1 = \varphi'(y)y'_x$, откуда

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

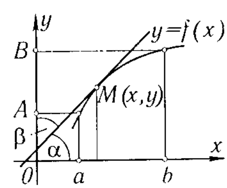


Рис. 70

Полученный результат наглядно иллюстрируется геометрически. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 70). Эта же кривая будет графиком функции $x = \varphi(y)$, где x рассматривается уже как функция, а y — как независимая переменная. Рассмотрим некоторую точку $M(x, y)$ этой кривой. Обозначим углы, образованные данной касательной с положительными напра-

*) Когда мы пишем $f'(x)$ или y'_x, то мы считаем, что при вычислении производной в качестве независимого переменного берется x; когда же мы пишем $\varphi'(y)$ или x'_y, то мы считаем, что при вычислении производной роль независимого переменного играет y. Заметим, что ***после дифференцирования по y, указанного в правой части формулы (XVI), надо вместо y подставить $f(x)$.***

влениями осей Ox и Oy, соответственно, через α и β. На основании результатов § 3 о геометрическом значении производной имеем:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta. \tag{4}$$

Из рис. 70 следует, что если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то, как легко видеть, $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Следовательно, в любом случае $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Подставляя выражения для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ из формулы (4), получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. Обратные тригонометрические функции и их дифференцирование

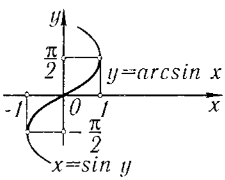


Рис. 71

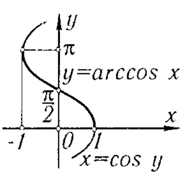


Рис. 72

1) Функция $y = \arcsin x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \sin y \tag{1}$$

и построим ее график, направив ось Oy вертикально вверх (рис. 71). Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $x = \sin y$ — возрастающая, ее значения заполняют отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому функция $x = \sin y$ имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \arcsin x^{*)}$$

Эта функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ее значения заполняют отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. На рис. 71 график функции $y = \arcsin x$ изображен жирной линией.

Теорема 1. *Производная от функции* $\arcsin x$ *равна* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *т.е.*

$$\textit{если} \quad y = \arcsin x, \quad \textit{то} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{XVII}$$

Доказательство. На основании равенства (1) находим:

$$x'_y = \cos y.$$

По правилу дифференцирования обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

---

*) Отметим, что известное из тригонометрии равенство $y = \operatorname{Arcsin} x$ есть другая запись равенства (1). Здесь (при данном x) y обозначает совокупность значений углов, синус которых равен x.

но
$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$
поэтому
$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
перед корнем берется знак плюс, так как функция $y = \arcsin x$ принимает значения на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos y \geqslant 0$.

Пример 1. $y = \arcsin e^x$,
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Пример 2.
$$y = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2,$$
$$y' = 2\arcsin\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -2\arcsin\frac{1}{x}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Функция $y = \arccos x$.

Как и выше, рассмотрим функцию
$$x = \cos y \tag{2}$$
и построим ее график, направив ось Oy вверх (рис. 72). Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi$ функция $x = \cos y$ — убывающая и имеет обратную, которую обозначают так:
$$y = \arccos x.$$
Эта функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Значения функции заполняют отрезок $\pi \geqslant y \geqslant 0$. На рис. 72 график функции $y = \arccos x$ изображен жирной линией.

Теорема 2. *Производная от функции* $\arccos x$ *равна* $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *т.е.*
$$\textit{если} \quad y = \arccos x, \quad \textit{то} \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{XVIII}$$

Доказательство. На основании равенства (2) находим:
$$x'_y = -\sin y.$$
Следовательно,
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$
Но $\cos y = x$, поэтому
$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
В равенстве $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ перед корнем берется знак плюс, так как значения функции $y = \arccos x$ заполняют отрезок $0 \leqslant y \leqslant \pi$ и, следовательно, $\sin y \geqslant 0$.

Пример 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{tg} y \tag{3}$$

и построим ее график (рис. 73). Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. На интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функция $x = \operatorname{tg} y$ — возрастающая и имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Эта функция определена на интервале $-\infty < x < +\infty$. Значения функции заполняют интервал $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. На рис. 73 график функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен жирной линией.

Теорема 3. *Производная от функции* $\operatorname{arctg} x$ *равна* $\frac{1}{1+x^2}$, *т.е.*

$$\textit{если} \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad \textit{то} \quad y' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{XIX}$$

Доказательство. На основании равенства (3) находим:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

но

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y};$$

так как $\operatorname{tg} y = x$, то окончательно получаем:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 4. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3(\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3\frac{1}{1+x^2}.$$

4) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{ctg} y. \tag{4}$$

Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. График этой функции изображен на рис. 74. На интервале $0 < y < \pi$ функция $x = \operatorname{ctg} y$ — убывающая и имеет обратную, которую обозначают:

$$y = \operatorname{arcctg} x.$$

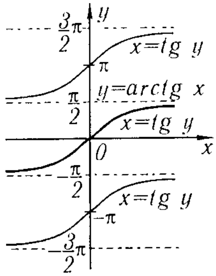


Рис. 73

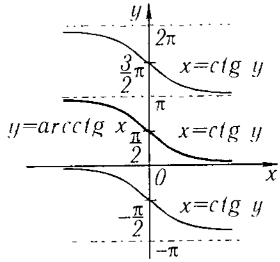


Рис. 74

Эта функция, следовательно, определена на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, ее значения заполняют интервал $0 < y < \pi$.

Теорема 4. *Производная функции* $\operatorname{arcctg} x$ *равна* $-\frac{1}{1+x^2}$, *т.е.*

$$\text{\textit{если}} \quad y = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{\textit{то}} \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{XX}$$

Доказательство. Из (4) получаем:

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$

Следовательно, $y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}$. Но $\operatorname{ctg} y = x$. Поэтому

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. Таблица основных формул дифференцирования

Объединим теперь в одну таблицу все основные формулы и правила дифференцирования, выведенные в предыдущих параграфах

$$y = \text{const}, \qquad y' = 0.$$

Степенная функция:

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

в частности,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометрические функции:

$$
\begin{aligned}
&y = \sin x, && y' = \cos x,\\
&y = \cos x, && y' = -\sin x,\\
&y = \operatorname{tg} x, && y' = \frac{1}{\cos^2 x},\\
&y = \operatorname{ctg} x, && y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

Обратные тригонометрические функции:

$$
\begin{aligned}
&y = \arcsin x, && y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
&y = \arccos x, && y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
&y = \operatorname{arctg} x, && y' = \frac{1}{1+x^2},\\
&y = \operatorname{arcctg} x, && y' = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Показательная функция:

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \ln a;$$

в частности,

$$y = e^x, \qquad y' = e^x.$$

Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

в частности,

$$y = \ln x, \qquad y' = \frac{1}{x}.$$

Общие правила дифференцирования:

$$
\begin{aligned}
&y = Cu(x), && y' = Cu'(x) \qquad (C = \text{const}),\\
&y = u + v - w, && y' = u' + v' - w',\\
&y = uv, && y' = u'v + uv',\\
&y = \frac{u}{v}, && y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\\
&\left.\begin{aligned} y &= f(u),\\ u &= \varphi(x),\end{aligned}\right\} && y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x),\\
&y = u^v, && y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.
\end{aligned}
$$

Если $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, где f и φ — взаимно обратные функции, то

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{где} \quad y = f(x).$$

§ 16. Параметрическое задание функции

Даны два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где t принимает значения, содержащиеся на отрезке $[T_1, T_2]$. Каждому значению t соответствуют значения x и y (функции φ и ψ предполагаем однозначными). Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости Oxy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от T_1 до T_2, эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями* этой кривой, t называется *параметром*, а способ задания кривой уравнениями (1) называется *параметрическим*.

Предположим, далее, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x;

$$y = \psi[\Phi(x)]. \tag{2}$$

Таким образом, уравнения (1) определяют y как функцию от x, и говорят, что функция y от x задается параметрически.

Выражение $y = f(x)$ непосредственной зависимости y от x может получиться путем исключения параметра t из уравнений (1).

Параметрическое задание кривых широко применяется в механике. Если в плоскости Oxy движется некоторая материальная точка и нам известны законы движения проекций этой точки на оси координат

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \tag{1'}$$

где параметр t есть время, то уравнения (1′) являются параметрическими уравнениями траектории движущейся точки. Исключая из этих уравнений параметр t, получим уравнение траектории в форме $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$. Рассмотрим, например, такую задачу.

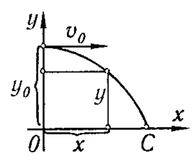


Рис. 75

Задача. Определить траекторию и место падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скоростью v_0 на высоте y_0 (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

Решение. Возьмем систему координат так, как показано на рис. 75, предполагая, что самолет сбрасывает груз в тот момент, когда он пересекает ось Oy. Очевидно, что горизонтальное перемещение груза будет равномерным, с постоянной скоростью v_0:

$$x = v_0 t.$$

Вертикальное перемещение падающего груза под влиянием силы тяжести будет выражаться формулой

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние груза от земли в любой момент времени будет выражаться формулой

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Два уравнения:

$$x = v_0 t, \qquad y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

будут параметрическими уравнениями траектории. Чтобы исключить параметр t, из первого уравнения находим значение $t = \dfrac{x}{v_0}$ и подставляем это значение во второе уравнение. Тогда получим уравнение траектории в форме

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $M(0, y_0)$, причем ось Oy служит осью симметрии параболы.

Определим величину отрезка OC. Обозначим абсциссу точки C через X, заметим, что ордината этой точки $y = 0$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, будем иметь:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}X^2,$$

откуда

$$X = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Уравнения некоторых кривых в параметрической форме

Окружность. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом r (рис. 76).

Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведенным в некоторую точку $M(x, y)$ окружности, и осью Ox. Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

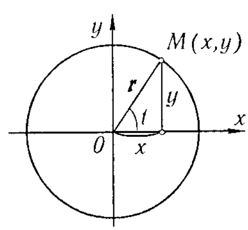


Рис. 76

Это и есть параметрические уравнения окружности. Если мы исключим из этих уравнений параметр t, то получим уравнение окружности, содержащее только x и y. Возводя в квадрат параметрические уравнения и складывая, находим:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

или

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Эллипс. Дано уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Положим

$$x = a\cos t. \tag{2'}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и производя необходимые преобразования, получим:

$$y = b\sin t. \tag{2''}$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{2}$$

являются параметрическими уравнениями эллипса.

Выясним геометрический смысл параметра t. Проведем две окружности с центрами в начале координат и радиусами a и b (рис. 77). Пусть точка $M(x,y)$ лежит на эллипсе, а B — точка большой окружности, имеющая ту же абсциссу, что и точка M. Обозначим через t угол, образованный радиусом OB с осью Ox. Непосредственно из рисунка следует:

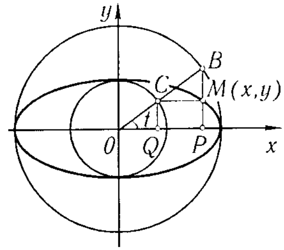


Рис. 77

$$x = OP = a\cos t \quad [\text{это — уравнение } (2')],$$
$$CQ = b\sin t.$$

На основании равенства $(2'')$ заключаем, что $CQ = y$, т.е. прямая CM параллельна оси Ox.

Следовательно, в уравнениях (2) t есть угол, образованный радиусом OB и осью абсцисс. Угол t иногда называют ***эксцентрическим углом.***

Циклоида. *Циклоидой* называется кривая, описанная точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 78). Предположим, что точка M катящейся окружности в начале движения совпадала с началом координат. Определим координаты точки M после того, как окружность повернулась на угол t. Обозначим через a радиус катящейся окружности.

Как видно из рис. 78,

$$x = OP = OB - PB,$$

но так как окружность катится без скольжения, то

$$OB = \overset{\smile}{MB} = at, \qquad PB = MK = a\sin t.$$

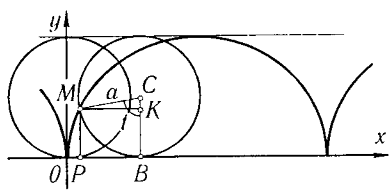


Рис. 78

Следовательно, $x = at - a\sin t = a(t - \sin t)$.

Далее,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1-\cos t).$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

являются параметрическими уравнениями циклоиды. При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

Исключим параметр t из последних уравнений и получим непосредственную зависимость x от y. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ функция $y = a(1-\cos t)$ имеет обратную:

$$t = \arccos\frac{a-y}{a}.$$

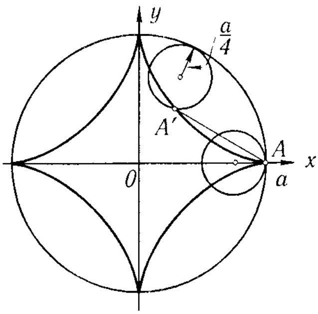


Рис. 79

Подставляя выражение для t в первое из уравнений (3), получим:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin\left(\arccos \frac{a-y}{a}\right)$$

или

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi a.$$

Непосредственно из рис. 78 замечаем, что при $\pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

Заметим, что функция $x = a(t - \sin t)$ имеет обратную, но она не выражается через элементарные функции. Поэтому и функция $y = f(x)$ не выражается через элементарные функции.

Замечание 1. На примере циклоиды легко убедиться, что в некоторых случаях для исследования функций и кривых параметрические уравнения удобнее, чем непосредственная зависимость y от x или x от y.

Астроида. *Астроидой* называется кривая, заданная следующими параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Возводя все члены обоих уравнений в степень 2/3 и складывая, получим зависимость между x и y:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t),$$

или

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \tag{5}$$

Ниже (см. § 12 гл. V) будет показано, что эта кривая имеет форму, изображенную на рис. 79. Эта кривая может быть получена как траектория некоторой точки окружности радиуса $\frac{a}{4}$, катящейся без скольжения по другой окружности радиуса a (причем меньшая окружность все время остается внутри большей; см. рис. 79).

Замечание 2. Отметим, что уравнения (4) и уравнение (5) определяют не одну функцию $y = f(x)$. Они определяют две непрерывные функции на отрезке $-a \leqslant x \leqslant +a$. Одна из них принимает неотрицательные значения, другая — неположительные.

§ 18. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = \psi(t), \qquad t = \Phi(x),$$

t — промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x). \tag{2}$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (2), получаем:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{XXI}$$

Выведенная формула дает возможность находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражения непосредственной зависимости y от x.

Пример 1. Функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$: 1) при любом значении t; 2) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

1) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$;

2) $(y'_x)_{t=\pi/4} = -\operatorname{ctg}(\pi/4) = -1$.

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

в произвольной точке $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в каждой точке равен значению производной y'_x в этой точке, т.е. равен

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Но

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a\sin t.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной к циклоиде в каждой ее точке равен $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$, где t — значение параметра, соответствующее этой точке. Но это значит, что угол α наклона касательной к оси x равен $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ (для значений t между $-\pi$ и π)*).

---

*) Действительно, угловой коэффициент равен тангенсу угла α наклона касательной к оси Ox. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ для тех значений t, для которых $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ лежит между 0 и π.

§ 19. Гиперболические функции

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций вида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

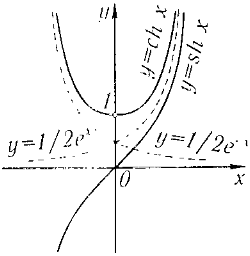


Рис. 80

Эти комбинации рассматривают как новые функции и обозначают так:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Первую из функций (1) называют *гиперболическим синусом*, вторую — *гиперболическим косинусом*. С помощью этих функций можно определить еще две функции $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический тангенс}} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический котангенс}} \end{aligned}\right\}. \tag{1'}$$

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены, очевидно, для всех значений x. Функция же $\operatorname{cth} x$ определена всюду, за исключением точки $x = 0$. Графики гиперболических функций представлены на рис. 80, 81, 82.

Из определения функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ [формулы (1)] следуют соотношения, аналогичные соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями:

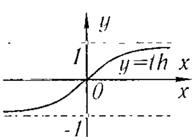


Рис. 81

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \tag{3}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \tag{3'}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

Далее, заметив, что

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

получаем:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\,\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\,\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b).$$

Аналогично доказывается и справедливость соотношения (3′).

Название «гиперболические функции» объясняется тем, что функции $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ играют ту же роль для параметрического представления гиперболы

$$x^2 - y^2 = 1,$$

какую тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ – для параметрического представления окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Действительно, исключая параметр t из уравнений

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t,$$

получим:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

или $x^2 + y^2 = 1$ (уравнение окружности). Аналогично уравнения

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

являются параметрическими уравнениями гиперболы.

Действительно, возводя почленно в квадрат эти уравнения и вычитая из первого второе, получим:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Так как выражение в правой части на основании формулы (2) равно единице, то, следовательно,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

а это и есть уравнение гиперболы.

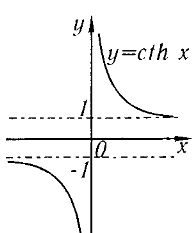


Рис. 82

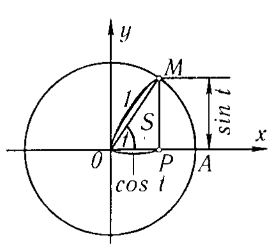


Рис. 83

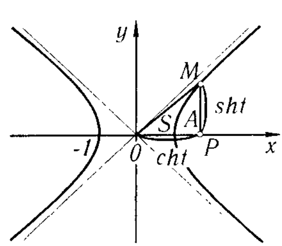


Рис. 84

Рассмотрим окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 83). В уравнениях $x = \cos t$, $y = \sin t$ параметр t численно равен центральному углу AOM или удвоенной площади S сектора AOM, так как $t = 2S$.

Отметим без доказательства, что в параметрических уравнениях гиперболы

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

параметр t также численно равен удвоенной площади «гиперболического сектора» AOM (рис. 84).

Производные гиперболических функций определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, && (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ &(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, && (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned}\right\}, \tag{XXII}$$

которые вытекают из самого определения гиперболических функций; например, для функции $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ имеем:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

§ 20. Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Умножая все члены последнего равенства на Δx, получим:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta x \to 0$ произведение $f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно Δx. Произведение же $\alpha \Delta x$ есть всегда величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, приращение Δy функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть [при $f'(x) \neq 0$] так называемая ***главная часть*** приращения, ***линейная*** относительно Δx. Произведение $f'(x)\Delta x$ называют ***дифференциалом*** функции и обозначают через dy или $df(x)$.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x, то произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx аргумента называется *дифференциалом* функции и обозначается символом dy:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Найдем дифференциал функции $y = x$; в этом случае

$$y' = (x)' = 1,$$

и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, ***дифференциал*** dx ***независимого переменного*** x ***совпадает с его приращением*** Δx. Равенство $dx = \Delta x$ можно было бы рассматривать также как определение дифференциала независимого переменного, и тогда рассмотренный пример показывал бы, что это не противоречит определению дифференциала функции. В любом случае формулу (2) мы можем записать так:

$$dy = f'(x)dx.$$

Но из этого соотношения следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, ***производную*** $f'(x)$ ***можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.***

Вернемся к выражению (1), которое с учетом (2) перепишем так:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{3}$$

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δx. Если $f'(x) \neq 0$, то $\alpha\Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка и относительно dy и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(y)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Поэтому в приближенных вычислениях иногда пользуются приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

или в развернутом виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \tag{5}$$

что сокращает вычисления.

Пример 1. Найти дифференциал dy и приращение Δy функции $y = x^2$:
1) при произвольных значениях x и Δx;
2) при $x = 20$, $\Delta x = 0,1$.

Решение. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,

$$dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x.$$

2) Если $x = 20$, $\Delta x = 0,1$, то $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01$,

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00.$$

Погрешность при замене Δy на dy равна $0,01$. Во многих случаях ее можно считать малой по сравнению с $\Delta y = 4,01$ и ею пренебречь.

Рассмотренная задача наглядно иллюстрируется рис. 85.

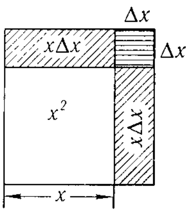


Рис. 85

В приближенных вычислениях пользуются также приближенным равенством, которое получается из (5),

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$.
В этом случае приближенное равенство (6) примет вид

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x\Delta x. \tag{7}$$

Вычислим приближенное значение $\sin 46°$. Положим $x = \frac{\pi}{4}$ (что соответствует углу в $45°$), $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (соответствует углу в $1°$), $x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$. Подставляя в (7), будем иметь:

$$\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

или

$$\sin 46° \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 = 0,7191.$$

Пример 3. Если в формуле (7) положим $x = 0$, $\Delta x = \alpha$, то получим следующее приближенное равенство:

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

Пример 4. Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то по формуле (6) получаем следующее приближенное равенство:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

при $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Пример 5. Если $f(x) = \sqrt{x}$, то формула (6) дает:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Полагая $x = 1$, $\Delta x = \alpha$, получаем приближенное равенство:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как, умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциалов. Так, например:

Дифференциал суммы двух дифференцируемых функций u и v равен сумме дифференциалов этих функций:

$$d(u+v) = du + dv.$$

Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций u и v определяется формулой

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Докажем, например, последнюю формулу. Если $y = uv$, то

$$dy = y'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx,$$

но

$$v'dx = dv, \qquad u'dx = du,$$

поэтому

$$dy = udv + vdu.$$

Аналогично доказываются и другие формулы, например формула, определяющая дифференциал частного:

$$\text{если} \quad y = \frac{u}{v}, \quad \text{то} \quad dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Решим несколько примеров на вычисление дифференциала функции.

Пример 6. $y = \operatorname{tg}^2 x$, $dy = 2\operatorname{tg} x \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$.

Пример 7. $y = \sqrt{1 + \ln x}$, $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \dfrac{1}{x} dx$.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть

$$y = f(u), \;\; u = \varphi(x), \quad \text{или} \quad y = f[\varphi(x)].$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\varphi'(x),$$

следовательно,

$$dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx;$$

но $\varphi'(x)dx = du$, поэтому

$$dy = f'(u)du.$$

Таким образом, *дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент u был независимой переменной.* Иначе говоря, *форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.* Это важное свойство дифференциала, называемое *инвариантностью формы дифференциала*, будет широко использовано в дальнейшем.

Пример 8. Дана функция $y = \sin\sqrt{x}$. Найти dy.

Решение. Представив данную функцию как сложную:

$$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{x},$$

находим:

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

но $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$. поэтому можно написать:

$$dy = \cos u\, du \quad \text{или} \quad dy = \cos(\sqrt{x})d(\sqrt{x}).$$

§ 21. Геометрическое значение дифференциала

Рассмотрим функцию

$$y = f(x)$$

и соответствующую ей кривую (рис. 86).

Возьмем на кривой $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$, проведем касательную к кривой в этой точке и обозначим через α угол*), который касательная образует с положительным направлением оси Ox. Дадим независимому переменному приращение Δx; тогда функция получит приращение $\Delta y = NM_1$. Значениям $x + \Delta x, y + \Delta y$ на кривой $y = f(x)$ будет соответствовать точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Из треугольника MNT находим:

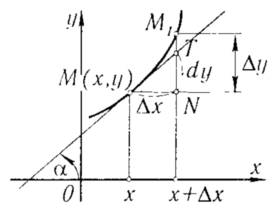


Рис. 86

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha;$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \qquad MN = \Delta x,$$

то

$$NT = f'(x)\Delta x;$$

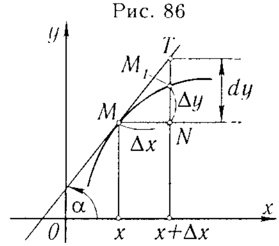


Рис. 87

но согласно определению дифференциала $f'(x)\Delta x = dy$. Таким образом,

$$NT = dy.$$

Последнее равенство означает, что *дифференциал функции $f(x)$, соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке x.*

Из рис. 86 непосредственно следует, что $M_1T = \Delta y - dy$. По доказанному ранее $\frac{M_1T}{NT} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Не следует думать, что всегда Δy больше dy. Так, на рис. 87

$$\Delta y = M_1N, \ dy = NT, \quad \text{причем} \quad \Delta y < dy.$$

*) Предполагая, что функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x, получаем $\alpha \neq \pi/2$.

§ 22. Производные различных порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$. Значения производной $f'(x)$, вообще говоря, зависят от x, т.е. ***производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x***. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или *второй производной* от первоначальной функции и обозначается символом y'' или $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Так, например, если $y = x^5$, то

$$y' = 5x^4, \qquad y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

Вообще, *производной n-го порядка от функции $f(x)$* называется производная (первого порядка) от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(Порядок производной берется в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени.)

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, $y^{\mathrm{VI}}, \ldots$ В таком случае порядок производной можно писать без скобок. Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)} = 120x$, $y^{\mathrm{V}} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \cdots = 0$.

Пример 1. Дана функция $y = e^{kx}$ $(k = \mathrm{const})$. Найти выражение ее производной любого порядка n.

Решение. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Пример 2. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично выводятся формулы для производных любого порядка и от некоторых других элементарных функций. Читатель сам сможет найти формулы для производных n-го порядка от функций $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила, указанные в теоремах 2 и 3 § 7.

В данном случае имеют место очевидные формулы:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Выведем формулу (так называемую *формулу Лейбница*), дающую возможность вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций и $u(x)v(x)$. Для того чтобы вывести эту формулу, мы найдем сначала несколько производных, а затем установим общий закон, пригодный для вычисления производной любого порядка:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
y' &= u'v + v'u,\\
y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',\\
y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =\\
&\qquad\qquad = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',\\
y^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{IV}}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}$$

Закон составления производных сохраняется для производных любого порядка и заключается, очевидно, в следующем.

Надо выражение $(u+v)^n$ разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить показатели степеней для u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени ($u^0 = v^0$), входящие в крайние члены разложения, надо заменить самими функциями (т.е. «производными нулевого порядка»):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = (u)^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}n^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Это и есть *формула Лейбница*.

Строгое доказательство этой формулы можно было бы провести методом полной математической индукции (т.е. доказать, что из справедливости этой формулы для порядка n следует справедливость ее для порядка $n+1$).

Пример 3. $y = e^{ax}x^2$. Найти производную $y^{(n)}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
u &= e^{ax}, & v &= x^2,\\
u' &= ae^{ax}, & v' &= 2x,\\
u'' &= a^2e^{ax}, & v'' &= 2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots & &\\
u^{(n)} &= a^ne^{ax}, & v''' &= v^{\mathrm{IV}} = \dots = 0,
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

или

$$y^{(n)} = e^{ax}[a^nx^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. Дифференциалы различных порядков

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x — независимое переменное. Дифференциал этой функции

$$dy = f'(x)dx$$

есть некоторая функция от x, но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель (dx) является приращением независимого переменного x и от значения этого переменного не зависит. Так как dy есть функция от x, то мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* этой функции и обозначается через d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу общего определения дифференциала имеем:

$$d^2y = [f'(x)dx]'dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной, и мы получаем:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2, подразумевая под этим квадрат выражения dx; вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т.д.

Третьим дифференциалом или *дифференциалом третьего порядка* функции называется дифференциал от ее второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Вообще, *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (1)$$

Пользуясь дифференциалами различных порядков, производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{d^2x}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

Замечание. Равенства (1) и (2) (при $n > 1$) верны только для того случая, когда x является независимым переменным. Действительно, пусть имеем сложную функцию

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x). \qquad (3)$$

Мы видели, что дифференциал первого порядка имеет инвариантную форму, независимо от того, будет ли u независимой переменной или функцией от x

$$dy = F'_u(u)du. \tag{4}$$

Второй дифференциал и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Действительно, на основании (3) и (4) получаем

$$d^2y = d(F'_u(u)du).$$

Но здесь $du = \varphi'(x)dx$ зависит от x, и потому мы получаем

$$d^2y = d(F'_u(u))du + F'_u(u)d(du)$$

или

$$d^2y = F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2u, \quad \text{где} \quad d^2u = \varphi''(x)(dx)^2. \tag{5}$$

Аналогичным образом находятся d^3y и т.д.

Пример 1. Найти dy и d^2y сложной функции

$$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{x}.$$

Решение.

$$dy = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \cos u du.$$

Далее, по формуле (5) получаем

$$d^2y = -\sin u(du)^2 + \cos u d^2u = -\sin u(du)^2 + \cos u \cdot u''(dx)^2 =$$

$$= -\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2 + \cos u\left(-\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2.$$

§ 24. Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от ***неявных функций.***

Пусть неявная функция y от x определяется равенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Дифференцируем по x все члены этого равенства, помня, что y есть функция от x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0;$$

отсюда находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}. \tag{2}$$

Последнее равенство снова дифференцируем по x (имея в виду, что y есть функция от x):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставляем сюда вместо производной $\frac{dy}{dx}$ ее выражение из равенства (2), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{y + x\dfrac{b^2}{a^2}\,\dfrac{x}{y}}{y^2},$$

или после упрощения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

поэтому вторую производную можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, найдем $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т.д.

2. Рассмотрим теперь задачу о нахождении производных высших порядков от ***функции, заданной параметрически.***

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

причем функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

В § 18 было доказано, что в этом случае производная $\frac{dy}{dx}$ определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \tag{4}$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ дифференцируем по x равенство (4), имея в виду, что t есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{5}$$

но

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (5), получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Последней формуле можно придать следующий, более компактный вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Аналогичным образом можно найти производные $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т.д.

Пример. Функция y от x задана параметрически:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2}\,\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Механическое значение второй производной

Путь s, пройденный поступательно движушимся телом, в зависимости от времени t выражается формулой

$$s = f(t). \tag{1}$$

Как уже известно (см. § 1 гл. III), скорость v тела в данный момент равна первой производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Пусть в некоторый момент t скорость тела была равна v. Если движение не является равномерным, то за промежуток времени Δt, истекший с момента t, скорость изменится и получит приращение Δv.

Средним ускорением за время Δt называется отношение приращения скорости Δv к приращению времени:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорением в данный момент называется предел отношения приращения скорости к приращению времени, когда последнее стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t};$$

иначе говоря, ускорение (в данный момент) равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

но так как $v = \frac{ds}{dt}$, то, следовательно,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

т.е. *ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.* Исходя из равенства (1), получаем:

$$a = f''(t).$$

Пример. Найти скорость v и ускорение a свободно падающего тела, если зависимость расстояния s от времени t дается формулой

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{3}$$

где $g = 9,8$ *м* / *сек*^{2} — ускорение земного тяготения, а $s_0 = s_{t=0}$ — значение s при $t = 0$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0; \tag{4}$$

из этой формулы следует, что $v_0 = (v)_{t=0}$.

Дифференцируя еще раз, находим:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Заметим, что, обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g, то скорость выражается равенством (4), а расстояние — равенством (3) при условии, что $(v)_{t=0} = v_0$ и $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

Рассмотрим кривую, уравнение которой есть

$$y = f(x).$$

Возьмем на этой кривой точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 88) и напишем уравнение касательной к данной кривой в точке M, предполагая, что эта касательная не параллельна оси ординат.

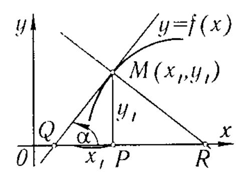


Рис. 88

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для касательной (см. § 3)

$$k = f'(x_1),$$

поэтому *уравнение касательной* имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

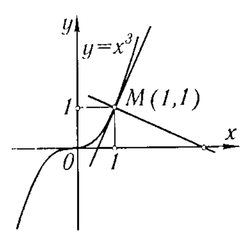


Рис. 89

Наряду с касательной к кривой в данной точке очень часто приходится рассматривать нормаль.

Определение. *Нормалью* к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_t касательной равенством

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

т.е.

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Следовательно, ***уравнение нормали*** к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке $M(1, 1)$.

Решение. Так как $y' = 3x^2$, то угловой коэффициент касательной равен $(y')_{x=1} = 3$.

Следовательно, уравнение касательной:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ или } y = 3x - 2.$$

Уравнение нормали:

$$y - 1 = -(x - 1)/3,$$

или

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(см. рис. 89).

Длина T отрезка QM (рис. 88) касательной, заключенного между точкой касания и осью Ox, называется *длиной касательной*. Проекция этого отрезка на ось Ox, т.е. отрезок QP, называется *подкасательной*; длина подкасательной обозначается через S_T. Длина N отрезка MR называется *длиной нормали*, а проекция RP отрезка RM на ось Ox называется *поднормалью*; длина поднормали обозначается через S_N.

Найдем величины T, S_T, N, S_N для кривой $y = f(x)$ и точки $M(x_1, y_1)$.

Из рис. 88 видно, что

$$QP = |y_1 \operatorname{ctg} \alpha| = \left|\frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

поэтому

$$S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|, \qquad T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{{y_1'}^2}} = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{{y_1'}^2 + 1}\right|.$$

Далее, из этого же рисунка ясно, что

$$PR = |y_1 \operatorname{tg} \alpha| = |y_1 y_1'|,$$

поэтому

$$S_N = |y_1 y_1'|, \qquad N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = \left|y_1 \sqrt{1 + {y_1'}^2}\right|.$$

Эти формулы выведены в предположении, что $y_1 > 1$, $y_1' > 0$. Однако они сохраняются и в общем случае.

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали, длины касательной и подкасательной, длины нормали и поднормали для эллипса:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \tag{1}$$

в точке $M(x_1, y_1)$, для которой $t = \pi/4$ (рис. 90).

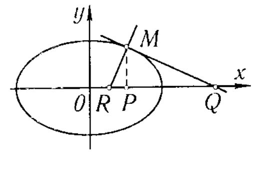


Рис. 90

Решение. Из уравнений (1) находим:

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4} = -\frac{b}{a}.$$

Находим координаты точки касания M:

$$x_1 = (x)_{t=\pi/4} = a/\sqrt{2}, \qquad y_1 = (y)_{t=\pi/4} = b/\sqrt{2}.$$

Уравнение касательной:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \text{ или } bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \text{ или } (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Длины подкасательной и поднормали:

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Длины касательной и нормали:

$$T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}, \quad N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right| = \frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 27. Геометрическое значение производной радиус-вектора по полярному углу

Пусть имеем уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = f(\theta). \tag{1}$$

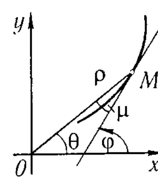


Рис. 91

Напишем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым:

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta.$$

Подставляя сюда вместо ρ его выражение через θ из уравнения (1), будем иметь:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta. \tag{2}$$

Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями данной кривой, причем параметром является полярный угол θ (рис. 91).

Если через φ обозначим угол, составленный касательной к кривой в некоторой точке $M(\rho, \theta)$ с положительным направлением оси абсцисс, то будем иметь:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta}. \tag{3}$$

Обозначим через μ угол между направлением радиус-вектора и касательной. Очевидно, что $\mu = \varphi - \theta$,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Подставляя сюда вместо $\operatorname{tg}\varphi$ его выражение (3) и производя преобразование, получим:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\cos\theta + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\sin\theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

или

$$\rho'_\theta = \rho\operatorname{ctg}\mu. \tag{4}$$

Таким образом, производная радиус-вектора по полярному углу равна длине радиус-вектора, умноженной на котангенс угла между радиус-вектором и касательной к кривой в данной точке.

Пример. Показать, что касательная к логарифмической спирали $\rho = e^{a\theta}$ пересекается с радиус-вектором под постоянным углом.

Решение. Из уравнения спирали находим: $\rho' = ae^{a\theta}$. На основании формулы (4) получаем:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ т.е. } \mu = \operatorname{arcctg} a = \mathrm{const}.$$

Упражнения к главе III

Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = x^3$. *Отв.* $3x^2$. **2.** $y = 1/x$. *Отв.* $-1/x^2$. **3.** $y = \sqrt{x}$. *Отв.* $1/(2\sqrt{x})$. **4.** $y = 1/\sqrt{x}$. *Отв.* $-1/(2x\sqrt{x})$. **5.** $y = \sin^2 x$. *Отв.* $2\sin x\cos x$. **6.** $y = 2x^2 - x$. *Отв.* $4x - 1$.

Определить тангенсы углов наклона касательных к кривым:

7. $y = x^3$. а) При $x = 1$. *Отв.* 3. б) При $x = -1$. *Отв.* 3; сделать чертеж. **8.** $y = 1/x$. а) При $x = 1/2$. *Отв.* -4. б) При $x = 1$. *Отв.* -1; сделать чертеж. **9.** $y = \sqrt{x}$ при $x = 2$. *Отв.* $\sqrt{2}/4$.

Найти производные функций:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. *Отв.* $y' = 4x^3 + 6x$. **11.** $y = 6x^3 - x^2$. *Отв.* $y' = 18x^2 - 2x$. **12.** $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x$. *Отв.* $y' = \dfrac{5x^4}{a+b} - \dfrac{2x}{a-b} - 1$. **13.** $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. *Отв.* $y' = \dfrac{3x^2 - 2x}{5}$. **14.** $y = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + c$. *Отв.* $y' = 6ax^2 - \dfrac{2x}{b}$. **15.** $y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x$. *Отв.* $y' = 21x^{5/2} + 10x^{3/2} + 2$. **16.** $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$. **17.** $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{5/2}}$. **18.**

$y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{n^2}{x^2}$. *Отв.* $y'=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+\frac{2x}{n^2}-\frac{2n^2}{x^3}$. **19.** $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$. *Отв.* $y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. **20.** $y=\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $y'=\frac{5}{3}ax^{2/3}-\frac{3}{2}bx^{-5/2}+\frac{1}{6}x^{-7/6}$. **21.** $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. *Отв.* $y'=4x(1+3x+10x^3)$. **22.** $y=x(2x-1)(3x+2)$. *Отв.* $y'=2(9x^2+x-1)$. **23.** $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$. *Отв.* $y'=6x^2-26x+12$. **24.** $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$. *Отв.* $y'=\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. **25.** $y=\frac{a-x}{a+x}$. *Отв.* $y'=-\frac{2a}{(a+x)^2}$. **26.** $f(t)=\frac{t^3}{1+t^2}$. *Отв.* $f'(t)=\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. **27.** $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. *Отв.* $f'(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. **28.** $y=\frac{x^3+2}{x^2-x-2}$. *Отв.* $y'=\frac{x^4-2x^3-6x^2-4x+2}{(x^2-x-2)^2}$. **29.** $y=\frac{x^p}{x^m-a^m}$. *Отв.* $y'=\frac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. **30.** $y=(2x^2-3)^2$. *Отв.* $y'=8x(2x^2-3)$. **31.** $y=(x^2+a^2)^5$. *Отв.* $y=10x(x^2+a^2)^4$. **32.** $y=\sqrt{x^2+a^2}$. *Отв.* $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **33.** $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. *Отв.* $y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. **34.** $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Отв.* $y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. **35.** $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. *Отв.* $y'=\frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **36.** $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. *Отв.* $y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **37.** $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$. *Отв.* $y'=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. **38.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. *Отв.* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$. **39.** $y=\sin^2 x$. *Отв.* $y'=\sin 2x$. **40.** $y=2\sin x+\cos 3x$. *Отв.* $y'=2\cos x-3\sin 3x$. **41.** $y=\operatorname{tg}(ax+b)$. *Отв.* $y'=\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$. **42.** $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$. *Отв.* $y'=\frac{1}{1+\cos x}$. **43.** $y=\sin 2x\cos 3x$. *Отв.* $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$. **44.** $y=\operatorname{ctg}^2 5x$. *Отв.* $y'=-10\operatorname{ctg}5x\cdot\operatorname{cosec}^2 5x$. **45.** $y=t\sin t+\cos t$. *Отв.* $y'=t\cos t$. **46.** $y=\sin^3 t\cos t$. *Отв.* $y'=\sin^2 t(3\cos^2 t-\sin^2 t)$. **47.** $y=a\sqrt{\cos 2x}$. *Отв.* $y'=-\frac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **48.** $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. *Отв.* $r'_\varphi=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. **49.** $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$. *Отв.* $y'=-\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$. **50.** $y=a\sin^4\frac{x}{2}$. *Отв.* $y'=2a\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. **51.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. *Отв.* $y'=\operatorname{tg}x\sec^2 x$. **52.** $y=\ln\cos x$. *Отв.* $y'=-\operatorname{tg}x$. **53.** $y=\ln\operatorname{tg}x$. *Отв.* $y'=2/\sin 2x$. **54.** $y=\ln\sin^2 x$. *Отв.* $y'=2\operatorname{ctg}x$. **55.** $y=\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sec x}$. *Отв.* $y'=\sin x+\cos x$. **56.** $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Отв.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. **57.** $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. *Отв.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. **58.** $y=\sin(x+a)\cos(x+a)$. *Отв.* $y'=\cos 2(x+a)$. **59.** $f(x)=\sin(\ln x)$. *Отв.* $f'(x)=\cos(\ln x)/x$. **60.** $f(x)=\operatorname{tg}(\ln x)$. *Отв.* $f'(x)=\sec^2(\ln x)/x$. **61.** $f(x)=\sin(\cos x)$. *Отв.* $f'(x)=-\sin x\cos(\cos x)$. **62.** $r=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi-\operatorname{tg}\varphi+\varphi$. *Отв.* $\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$. **63.** $f(x)=(x\operatorname{ctg}x)^2$. *Отв.* $f'(x)=2x\operatorname{ctg}x(\operatorname{ctg}x-x\operatorname{cosec}^2 x)$. **64.** $y=\ln(ax+b)$. *Отв.* $y'=a/(ax+b)$. **65.** $y=\log_a(x^2+1)$. *Отв.* $y'=2x/((x^2+1)\ln a)$. **66.** $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. *Отв.* $y'=\frac{2}{1-x^2}$. **67.** $y=\log_3(x^2-\sin x)$. *Отв.*

$y' = \dfrac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x)\ln 3}$. **68.** $y = \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4x}{1-x^4}$. **69.** $y = \ln(x^2 + x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$. **70.** $y = \ln(x^3 - 2x + 5)$. *Отв.* $y' = \dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$. **71.** $y = x\ln x$. *Отв.* $y' = \ln x + 1$. **72.** $y = \ln^3 x$. *Отв.* $y' = (3\ln^2 x)/x$. **73.** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. *Отв.* $y' = 1/\sqrt{1+x^2}$. **74.** $y = \ln(\ln x)$. *Отв.* $y' = 1/(x\ln x)$. **75.** $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. *Отв.* $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. **76.** $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. *Отв.* $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. **77.** $y = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. **78.** $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. **79.** $y = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$. **80.** $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$. **81.** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$. *Отв.* $y' = \operatorname{tg}^3 x$. **82.** $y = e^{ax}$. *Отв.* $y' = ae^{ax}$. **83.** $y = e^{4x+5}$. *Отв.* $y' = 4e^{4x+5}$. **84.** $y = a^{x^2}$. *Отв.* $y' = 2xa^{x^2}\ln a$. **85.** $y = 7^{x^2+2x}$. *Отв.* $y' = 2(x+1)7^{x^2+2x}\ln 7$. **86.** $y = c^{a^2-x^2}$. *Отв.* $y' = -2xc^{a^2-x^2}\ln c$. **87.** $y = ae^{\sqrt{x}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. **88.** $r = a^\theta$. *Отв.* $r' = a^\theta \ln a$. **89.** $r = a^{\ln\theta}$. *Отв.* $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$. **90.** $y = e^x(1-x^2)$. *Отв.* $y' = e^x(1-2x-x^2)$. **91.** $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **92.** $y = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. **93.** $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **94.** $y = e^{\sin x}$. *Отв.* $y' = e^{\sin x}\cos x$. **95.** $y = a^{\operatorname{tg} nx}$. *Отв.* $y' = na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx\ln a$. **96.** $y = e^{\cos x}\sin x$. *Отв.* $y' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$. **97.** $y = e^x\ln\sin x$. *Отв.* $y' = e^x(\operatorname{ctg} x + \ln\sin x)$. **98.** $y = x^n e^{\sin x}$. *Отв.* $y' = x^{n-1}e^{\sin x}(n + x\cos x)$. **99.** $y = x^x$. *Отв.* $y' = x^x(\ln x + 1)$. **100.** $y = x^{\frac{1}{x}}$. *Отв.* $y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$. **101.** $y = x^{\ln x}$. *Отв.* $y' = x^{\ln x - 1}\ln x^2$. **102.** $y = e^{x^x}$. *Отв.* $y' = e^{x^x}(1+\ln x)x^x$. **103.** $y = (x/n)^{nx}$. *Отв.* $y' = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1 + \ln\dfrac{x}{n}\right)$. **104.** $y = x^{\sin x}$. *Отв.* $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x\cos x\right)$. **105.** $y = (\sin x)^x$. *Отв.* $y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$. **106.** $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\ln\sin x)$. **107.** $y = \operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}\,\dfrac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. **108.** $y = \sin\sqrt{1-2^x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}2^x\ln 2$. **109.** $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$. *Отв.* $y' = 10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Найти производные функций, предварительно логарифмируя эти функции:

110. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$. **111.** $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{4(x-2)} - \dfrac{2}{5(x-3)}\right)$. **112.** $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. **113.** $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$. **114.**

$y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$. **115.** $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. *Отв.* $y' = 5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. **116.** $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **117.** $y = (\arcsin x)^2$. *Отв.* $y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **118.** $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$. *Отв.* $y' = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. **119.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{1+x^2}$. **120.** $y = \arccos(x^2)$. *Отв.* $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **121.** $y = \dfrac{\arccos x}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **122.** $y = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **123.** $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$. **124.** $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **125.** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{v+a}{1-av}$. *Отв.* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1}{1+v^2}$. **126.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. **127.** $y = x\arcsin x$. *Отв.* $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **128.** $f(x) = \arccos(\ln x)$. *Отв.* $f'(x) = -1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$. **129.** $f(x) = \arcsin\sqrt{\sin x}$. *Отв.* $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$. **130.** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0 \leqslant x < \pi)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{2}$. **131.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$. **132.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$. **133.** $y = x^{\arcsin x}$. *Отв.* $y' = x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x} + \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

134. $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} +1 & \text{в 1-й и 4-й четвертях,} \\ -1 & \text{во 2-й и 3-й четвертях} \end{cases}$.

135. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sin x}{3+5\cos x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4}{3+5\cos x}$. **136.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$. **137.** $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^2}{1-x^4}$. **138.** $y = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^5+1}{x^6+x^4}$. **139.** $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{x^3+1}$. **140.** $y = \ln\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$. **141.** $y = \arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$.

Дифференцирование неявных функций

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если: **142.** $y^2 = 4px$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2p}{y}$. **143.** $x^2+y^2 = a^2$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. **144.** $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **145.** $y^3-3y+2ax = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. **146.** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **147.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **148.** $y^2-2xy+b^2 = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}$. **149.** $x^3+y^3-3axy = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **150.** $y = \cos(x+y)$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. **151.** $\cos(xy) = x$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных параметрически:

152. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. **153.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **154.** $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **155.** $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$. **156.** $u = 2\ln\operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Показать, что $\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$.

Найти тангенсы углов наклона касательных к кривым:

157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = -1/2$, $y = \sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Отв.* $1/\sqrt{3}$. **158.** $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = 1$, $y = -\sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Отв.* $\sqrt{3}/6$. **159.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ при $t = \pi/2$. Сделать чертеж. *Отв.* 1. **160.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при $t = \pi/4$. Сделать чертеж. *Отв.* -1. **161.** Тело, брошенное под углом α к горизонту, в безвоздушном пространстве описало под действием силы тяжести кривую (параболу), уравнения которой: $x = (v_0\cos\alpha)t$, $y = (v_0\sin\alpha)t - gt^2/2$ ($g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}). Зная, что $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50$ *м/сек*, определить направление движения при: 1) $t = 2$ *сек*; 2) $t = 7$ *сек*. Сделать чертеж. *Отв.* 1) $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi_2 = -1{,}012$, $\varphi_2 = +134{,}3^\circ$.

Найти дифференциалы следующих функций:

162. $y = (a^2 - x^2)^5$. *Отв.* $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. **163.** $y = \sqrt{1+x^2}$. *Отв.* $dy = x dx/\sqrt{1+x^2}$. **164.** $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. *Отв.* $dy = \sec^4 x dx$. **165.** $y = \frac{x\ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. *Отв.* $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Вычислить приращения и дифференциалы функций:

166. $y = 2x^2 - x$ при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$. *Отв.* $\Delta y = 0{,}0302$, $dy = 0{,}03$. **167.** Дано $y = x^3 + 2x$. Найти Δy и dy при $x = -1$, $\Delta x = 0{,}02$. *Отв.* $\Delta y = 0{,}098808$, $dy = 0{,}1$. **168.** Дано $y = \sin x$. Найти dy при $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/18$. *Отв.* $dy = \pi/36 = 0{,}0873$. **169.** Зная, что $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = 0{,}866025$; $\cos 60^\circ = 1/2$, найти приближенные значения $\sin 60^\circ 3'$ и $\sin 60^\circ 18'$. Результаты сопоставить с данными таблицы. *Отв.* $\sin 60^\circ 3' \approx 0{,}866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0{,}868643$. **170.** Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 45^\circ 4' 30''$. *Отв.* $1{,}00262$. **171.** Зная, что $\log_{10} 200 = 2{,}30103$, найти приближенное значение $\log_{10} 200{,}2$. *Отв.* $2{,}30146$.

Производные различных порядков.

172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Найти y''. *Отв.* $18x - 4$. **173.** $y = \sqrt[5]{x^3}$. Найти y'''. *Отв.* $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **174.** $y = x^6$. Найти $y^{(6)}$. *Отв.* $6!$. **175.** $y = \frac{C}{x^n}$. Найти y''. *Отв.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. **176.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Найти y''. *Отв.* $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. **177.** $y = 2\sqrt{x}$. Найти $y^{(4)}$. *Отв.* $-15/(8\sqrt{x^7})$. **178.** $y = ax^2 + bx + c$. Найти y'''. *Отв.* 0. **179.** $f(x) = \ln(x+1)$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $-6/(x+1)^4$. **180.** $y = \operatorname{tg} x$. Найти y'''. *Отв.* $6\sec^4 x - 4\sec^2 x$. **181.** $y = \ln\sin x$. Найти y'''. *Отв.* $2\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^2 x$. **182.** $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. Найти $f''(x)$. *Отв.* $f''(x) = 3[f(x)]^5 - f(x)$. **183.** $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$. **184.** $p = (q^2 + a^2)\operatorname{arctg}\frac{q}{a}$. Найти $\frac{d^3p}{dq^3}$. *Отв.* $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$. **185.** $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $\frac{y}{a^2}$. **186.** $y = \cos ax$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $a^n\cos(ax + n\pi/2)$. **187.** $y = a^x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $(\ln a)^n a^x$. **188.** $y = \ln(1+x)$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $2(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. **190.** $y = e^x x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $e^x(x+n)$. **191.** $y = x^{n-1}\ln x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $\dfrac{(n-1)!}{x}$. **192.** $y=\sin^2 x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $-2^{n-1}\cos(2x+\pi n/2)$. **193.** $y = x\sin x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $x\sin(x+\pi n/2) - n\cos(x+\pi n/2)$. **194.** Если $y = e^x\sin x$, то доказать, что $y''-2y'+2y=0$. **195.** $y^2=4ax$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{4a^2}{y^3}$. **196.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$. **197.** $x^2+y^2=r^2$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{r^2}{y^3}$. **198.** $y^2-2xy=0$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* 0. **199.** $\rho = \operatorname{tg}(\varphi+\rho)$. Найти $\dfrac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. *Отв.* $-\dfrac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$. **200.** $\sec\varphi\cdot\cos\rho = C$. Найти $\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. *Отв.* $\dfrac{\operatorname{tg}^\rho - \operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$. **201.** $e^x+x=e^y+y$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $\dfrac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$. **202.** $y^3+x^3-3axy=0$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **203.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{4a\sin^4(t/2)}$. **204.** $x=a\cos^2 t$, $y=b\sin^2 t$. Показать, что $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$. **205.** $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* $-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$. **206.** Показать, что $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x$; $\dfrac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{ch}x$.

Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

207. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^3-3x^2-x+5$ в точке $M(3,2)$. *Отв.* Касательная $8x-y-22=0$; нормаль $x+8y-19=0$.

208. Найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали окружности $x^2+y^2=r^2$ в точке $M(x_1,y_1)$. *Отв.* Касательная $xx_1+yy_1=r^2$; нормаль $x_1y-y_1x=0$; $s_T=|y_1^2/x_1|$; $s_N=|x_1|$.

209. Показать, что подкасательная параболы $y^2=4px$ в любой точке делится вершиной пополам и поднормаль постоянна и равна $2p$. Сделать чертеж.

210. Найти уравнение касательной в точке $M(x_1,y_1)$: а) К эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$. б) К гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$.

211. Найти уравнение касательной и нормали к «локону» $y=\dfrac{8a^2}{4a^2+x^2}$ в точке, где $x=2a$. *Отв.* Касательная $x+2y=4a$; нормаль $y=2x-3a$.

212. Показать, что нормаль к кривой $3y=6x-5x^3$, проведенная в точке $M(1,1/3)$, проходит через начало координат.

213. Показать, что касательная к кривой $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=2$ в точке $M(a,b)$ есть $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$.

214. Найти уравнение той касательной к параболе $y^2=20x$, которая образует угол в 45° с осью Ox. *Отв.* $y=x+5$. [в точке $(5,10)$].

215. Найти уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=52$, параллельных прямой $2x+3y=6$. *Отв.* $2x+3y\pm 26=0$.

216. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2-9y^2=36$, перпендикулярных к прямой $2y+5x=10$. *Отв.* Таких касательных нет.

217. Показать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к гиперболе $xy = m$ делится точкой касания пополам.

218. Доказать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ имеет постоянную длину.

219. Под каким углом α пересекаются кривые $y = a^x$ и $y = b^x$? *Отв.* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали циклоиды $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ в точке, для которой $\theta = \pi/2$. *Отв.* $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Найти величины s_T, s_N, T и N для астроиды $x = 4a\cos^3 t$; $y = 4a\sin^3 t$. *Отв.* $s_T = |4a\sin^2 t\cos t|$; $s_N = |4a\sin^3 t\operatorname{tg} t|$; $T = 4a\sin^2 t$; $N = |4a\sin^2 t\operatorname{tg} t|$.

Разные задачи

Найти производные функций: **222.** $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\cos^3 x}$. **223.** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$. **224.** $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$. **225.** $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ $(a > 0,\ b > 0)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{a + b\cos x}$. **226.** $y = |x|$. *Отв.* $y' = \dfrac{x}{|x|}$. **227.** $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{x}{|x|}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

228. Из формул для объема и поверхности шара $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ и $s = 4\pi r^2$ следует, что $\dfrac{dv}{dr} = s$. Объяснить геометрический смысл этого результата. Найти аналогичное соотношение между площадью круга и длиной окружности.

229. В треугольнике ABC сторона a выражается через две другие стороны b, c и угол A между ними формулой $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$. При постоянных b и c сторона a является функцией угла A. Показать, что $\dfrac{da}{dA} = h_a$, где h_a есть высота треугольника, соответствующая основанию a. Пояснить этот результат геометрическими соображениями.

230. Пользуясь понятием дифференциала, выяснить происхождение приближенных формул $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \dfrac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \dfrac{b}{3a^2}$, где $|b|$ есть число малое по сравнению с a.

231. Период колебания маятника равен $T = \pi\sqrt{l/g}$. Какое влияние на погрешность при вычислении периода T окажет погрешность в 1% при измерении: 1) длины маятника l; 2) ускорения силы тяжести g? *Отв.* 1) $\approx 1/2\%$; 2) $\approx 1/2\%$.

232. Трактриса обладает тем свойством, что для любой ее точки отрезок касательной T сохраняет постоянную длину. Доказать это, исходя из 1) уравнения трактрисы в форме $x = \sqrt{a^2 - y^2} + \dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}$ $(a > 0)$;

2) параметрических уравнений кривой $x = a(\ln\operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a\sin t$.

233. Доказать, что функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$ (здесь C_1 и C_2 — постоянные).

234. Полагая $y = e^x\sin x$, $z = e^x\cos x$, доказать равенства: $y'' = 2z$, $z'' = -2y$.

235. Показать, что функция $y = \sin(m\arcsin x)$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

236. Доказать, что если $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, то $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)^2$.

Глава IV
НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах $x = a$ и $x = b$ обращается в нуль $[f(a) = f(b) = 0]$, то существует внутри отрезка $[a, b]$ по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$*[*].

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна, т.е. при всех значениях x имеет постоянное значение $f(x) = 0$. Но тогда в любой точке отрезка будет $f'(x) = 0$, и теорема доказана.

Предположим, что $M \neq m$. Тогда по крайней мере одно из этих чисел не равно нулю.

Предположим для определенности, что $M > 0$ и что функция принимает свое наибольшее значение при $x = c$, т.е. $f(c) = M$. При этом заметим, что c не равно ни a, ни b, так как по условию $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Так как $f(c)$ — наибольшее значение функции, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$ как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Отсюда следует, что

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0, \qquad (1')$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0. \qquad (1'')$$

Так как по условию теоремы производная при $x = c$ существует, то, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

---

[*] Число c называется *корнем функции* $\varphi(x)$, если $\varphi(c) = 0$.

Но соотношения $f'(c) \leqslant 0$ и $f'(c) \geqslant 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(c) = 0$. Следовательно, внутри отрезка $[a, b]$ имеется точка c, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Теорема о корнях производной имеет простое геометрическое истолкование: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось Ox в точках с абсциссами a и b, то на этой кривой найдется по крайней мере одна точка с абсциссой c, $a < c < b$, в которой касательная параллельна оси Ox.

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a, b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a) = f(b)$ (рис. 92). Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и ранее.

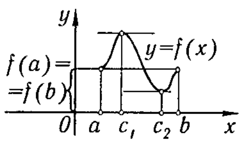


Рис. 92

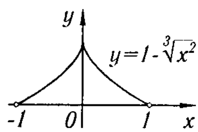


Рис. 93

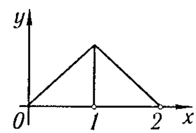


Рис. 94

Замечание 2. Если функция $f(x)$ такова, что производная существует не во всех точках внутри отрезка $[a, b]$, то утверждение теоремы может оказаться неверным (т.е. в этом случае на отрезке $[a, b]$ может не оказаться такой точки c, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль).

Так, например, функция

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(рис. 93) непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и обращается в нуль на концах отрезка, однако производная

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

внутри промежутка в нуль не обращается. Это происходит оттого, что внутри промежутка существует точка $x = 0$, в которой производная не существует (обращается в бесконечность).

График, изображенный на рис. 94, дает нам еще один пример функции, производная которой не обращается в нуль на отрезке $[0, 2]$.

Для этой функции также не выполнены условия теоремы Ролля, так как в точке $x = 1$ функция не имеет производной.

§ 2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется по крайней мере одна* *точка* c, $a < c < b$, *что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим буквой Q число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, т.е. положим

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{2}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)$, определенную равенством

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)Q. \tag{3}$$

Выясним геометрический смысл функции $F(x)$. Для этого напишем сначала уравнение хорды AB (рис. 95), учитывая, что ее угловой коэффициент равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = Q$ и что она проходит через точку $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x-a),$$

отсюда

$$y = f(a) + Q(x-a).$$

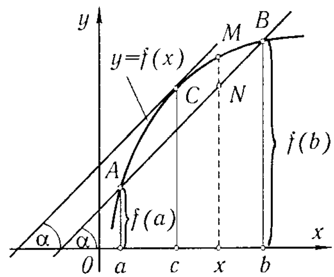


Рис. 95

Но $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x-a)]$. Следовательно, $F(x)$ для каждого значения x равняется разности ординат кривой $y = f(x)$ и хорды $y = f(a) + Q(x-a)$ для точек с одинаковой абсциссой.

Легко видеть, что $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и обращается в нуль на концах отрезка, т.е. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Следовательно, к функции $F(x)$ применима теорема Ролля. Согласно этой теореме внутри отрезка существует точка $x = c$ такая, что

$$F'(c) = 0.$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Значит,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

откуда

$$Q = f'(c).$$

Подставляя значение Q в равенство (2), будем иметь:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \tag{1'}$$

откуда непосредственно следует формула (1). Таким образом, теорема доказана.

Чтобы выяснить геометрический смысл теоремы Лагранжа, обратимся к рис. 95. Из рисунка непосредственно ясно, что величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой тангенс угла α наклона хорды, проходящей через точки A и B графика с абсциссами a и b.

С другой стороны, $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке с абсциссой c. Таким образом, геометрический смысл равенства (1′) или равносильного ему равенства (1) состоит в следующем: если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B, в которой ***касательная параллельна хорде***, соединяющей точки A и B.

Заметим, далее, следующее. Так как значение c удовлетворяет условию $a < c < b$, то $c - a < b - a$, или

$$c - a = \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, заключенное между 0 и 1, т.е.

$$0 < \theta < 1.$$

Но тогда

$$c = a + \theta(b - a),$$

и формуле (1) можно придать следующий вид:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \tag{1′}$$

§ 3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется такая точка $x = c$, $a < c < b$, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

Доказательство. Определим число Q равенством

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \tag{2}$$

Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(b)$ равнялось бы $\varphi(a)$, и тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка, что противоречит условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Очевидно, что $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$ (это вытекает из определения функции $F(x)$ и определения числа Q). Заметив, что функция $F(x)$

удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, заключаем, что между a и b существует такое значение $x = c$ $(a < c < b)$, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя значение Q в равенство (2), получим равенство (1).

Замечание. Теорему Коши нельзя доказать, как это может показаться с первого взгляда, применением теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Действительно, мы получили бы в этом случае (после сокращения дроби на $b - a$) формулу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

в которой $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Но так как, вообще говоря, $c_1 \neq c_2$, то полученный результат, очевидно, не дает еще теоремы Коши.

§ 4. Предел отношения двух бесконечно малых величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$»)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$ этого отрезка, т.е. $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$.

Отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено при $x = a$, но имеет вполне определенный смысл при значениях $x \neq a$. Следовательно, может быть поставлен вопрос о разыскании предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление пределов такого типа называется обычно «раскрытием неопределенностей вида $\frac{0}{0}$».

С такого рода задачей мы уже имели дело и раньше, например при рассмотрении предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, при нахождении производных от элементарных функций. Выражение $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ не имеет смысла, т.е. функция $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, но мы видели, что предел выражения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ существует и равняется 1.

Теорема (правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$, т.е. $f(a) = \varphi(a) = 0$;*

тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *при* $x \to a$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Возьмем на отрезке $[a, b]$ какую-нибудь точку $x \neq a$. Применяя формулу Коши будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

где ξ лежит ***между*** a и x. Но по условию $f(a) = \varphi(a) = 0$, значит

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Если $x \to a$, то и $\xi \to a$, так как ξ заключено между x и a. При этом, если $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то $\lim\limits_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ также существует и равен A. Отсюда ясно, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

и окончательно

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 1. Теорема имеет место и в том случае, если функции $f(x)$ или $\varphi(x)$ ***не определены при*** $x = a$, но

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

Для того, чтобы свести этот случай к рассмотренному ранее, мы ***доопределяем*** функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$ так, чтобы они стали ***непрерывными в точке*** a. Для этого достаточно положить

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0,$$

так как, очевидно, предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ не зависит от того, определены ли функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$.

Замечание 2. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем условиям, которые были наложены в условиях теоремы на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то, применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и т.д.

Замечание 3. Если $\varphi'(a) = 0$, но $f'(a) \neq 0$, то теорема приложима к обратному отношению $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, которое стремится к нулю при $x \to a$. Следовательно, отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к бесконечности.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Здесь три раза пришлось применить правило Лопиталя, так как отношения первых и третьих производных при $x=0$ приводят к неопределенности $\frac{0}{0}$.

Замечание 4. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Действительно, полагая $x=1/z$, видим, что $z\to 0$ при $x\to\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{z\to 0} f(1/z)=0,\ \lim_{z\to 0}\varphi(1/z)=0.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $\dfrac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}$, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)(-1/z^2)}{\varphi'(1/z)(-1/z^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{\varphi'(1/z)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{k}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\dfrac{k}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}k\cos\frac{k}{x}=k.$$

§ 5. Предел отношения двух бесконечно больших величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$»)

Рассмотрим, далее, вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, стремящихся к бесконечности при $x\to a$ (или при $x\to\infty$).

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \neq a$ в окрестности точки a, причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль; пусть, далее,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$$

и пусть существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{1}$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

Доказательство. В рассматриваемой окрестности точки a возьмем две точки α и x так, чтобы было $\alpha < x < a$ (или $a < x < \alpha$). По теореме Коши будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

где $\alpha < c < x$. Левую часть равенства (3) преобразуем так:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) получаем:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

Из условия (1) следует, что при произвольно малом $\varepsilon > 0$ можно α выбрать настолько близким к a, что для всех $x = c$, где $\alpha < c < a$, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right| < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \tag{6}$$

Далее рассмотрим дробь

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Закрепив α так, чтобы обеспечить выполнение неравенства (6), будем x приближать к a. Так как $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

и, следовательно, при ранее выбранном $\varepsilon > 0$ для x, достаточно близких к a, будем иметь:

$$\left| \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \tag{7}$$

Перемножая соответствующие члены неравенств (6) и (7), получим:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

или на основании равенства (5)

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Так как ε — произвольно малое число при x, достаточно близком к a, то из последних неравенств следует, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

или на основании (1)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если в условии (1) $A = \infty$, т.е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty,$$

то равенство (2) остается справедливым и в этом случае. Действительно, из предыдущего выражения следует:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Тогда по доказанной теореме

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

откуда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Замечание 2. Доказанная теорема легко распространяется на случай, когда $x \to \infty$. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

Доказательство проводится путем замены $x = 1/z$, как это делалось при аналогичных условиях в случае неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ (см. § 4, замечание 4).

Пример 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Замечание 3. Отметим еще раз, что формулы (2) и (8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Может случиться, что предел, стоящий слева, существует, в то время, как предел, стоящий справа, не существует. Приведем пример. Пусть требуется найти

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Этот предел существует и равен 1. Действительно,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Но отношение производных

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

при $x \to \infty$ не стремится ни к какому пределу, а колеблется между 0 и 2.

Пример 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3\frac{(-1)}{1} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3.$$

Пример 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Вообще, при любом целом $n > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)\dots 1}{e^x} = 0.$$

К предыдущим случаям сводятся случаи других неопределенностей, которые символически записываются так:

$$\text{а) } 0\cdot\infty,\ \text{ б) } 0^0,\ \text{ в) } \infty^0,\ \text{ г) } 1^\infty,\ \text{ д) } \infty-\infty,$$

и смысл которых состоит в следующем.

а) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$; требуется найти

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)].$$

Это — неопределенность типа $0\cdot\infty$.

Если искомое выражение переписать в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

или в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

то при $x\to a$ мы получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0.$$

б) Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0;$$

требуется найти

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)},$$

или, как говорят, раскрыть неопределенность вида 0^0.

Положив

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)},$$

прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y=\varphi(x)[\ln f(x)].$$

при $x\to a$ получим (справа) неопределенность вида $0\cdot\infty$. Найдя $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, легко получить $\lim\limits_{x\to a} y$. Действительно, в силу непрерывности логарифмической функции, $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a}y$, и если $\lim\limits_{x\to a}\ln y=b$, то, очевидно, $\lim\limits_{x\to a}y=e^b$. Если, в частности, $b=+\infty$ или $-\infty$ то, соответственно, $y=+\infty$ или 0.

Пример 6. Требуется найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. Положив $y = x^x$, находим: $\ln\lim y = \lim\ln y = \lim\ln(x^x) = \lim(x\ln x)$;

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

следовательно, $\ln\lim y = 0$, откуда $\lim y = e^0 = 1$, т.е.

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

Аналогичным приемом находятся пределы и в других случаях.

§ 6. Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = a$ равняется значению функции $f(x)$ в этой точке, а значения его производных до n-го порядка в точке $x = a$ равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке

$$\begin{gathered} P_n(a) = f(a),\ \ P_n'(a) = f'(a), \\ P_n''(a) = f''(a),\ \ \ldots,\ \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \end{gathered} \tag{1}$$

Естественно ожидать, что такой многочлен в некотором смысле «близок» к функции $f(x)$.

Будем искать этот многочлен в форме многочлена по степеням $(x-a)$ с неопределенными коэффициентами

$$\begin{aligned} P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 &+ \\ + C_3(x-a)^3 + \ldots &+ C_n(x-a)^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Неопределенные коэффициенты C_1, C_2, $\ldots$, C_n определим так, чтобы удовлетворились условия (1).

Предварительно найдем производные от $P_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ &P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Подставляя в левые и правые части равенств (2) и (3) вместо x значение a и заменяя на основании равенств (1) $P_n(a)$ через $f(a)$,

$P_n'(a) = f'(a)$ и т.д., получим

$$\begin{gathered} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2 \cdot 1 C_2, \\ f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 C_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 C_n, \end{gathered}$$

откуда находим:

$$\left.\begin{aligned} C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a), \dots, C_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a) \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Подставляя найденные значения $C_1, C_2, \dots, C_n$ в формулу (2), получим искомый многочлен:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \tag{5}$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$ (рис. 96):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

откуда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

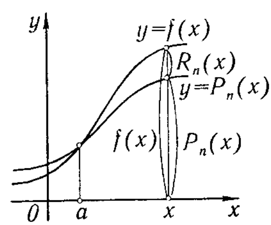


Рис. 96

или в развернутом виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \tag{6}$$

$R_n(x)$ называется *остаточным членом.* Для тех значений x, для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$.

Таким образом, формула (6) дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Дальнейшая наша задача — оценить величину $R_n(x)$ при различных значениях x.

Запишем остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \tag{7}$$

где $Q(x)$ есть некоторая функция, подлежащая определению, и в соответствии с этим перепишем формулу (6):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \quad (6')$$

При фиксированных x и a функция $Q(x)$ имеет определенное значение; обозначим его через Q.

Рассмотрим, далее, вспомогательную функцию от t (t заключено между a и x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!}f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

где Q имеет значение, определенное соотношением (6′); при этом считаем a и x определенными числами.

Найдем производную $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{(x-t)}{1}f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!}f''(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q,$$

или после сокращения

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!}Q. \quad (8)$$

Итак, функция $F(t)$ имеет производную во всех точках t, лежащих вблизи точки с абсциссой a ($a \leqslant t \leqslant x$ при $a < x$ и $a \geqslant t \geqslant x$ при $a > x$).

Далее, замечаем, что (на основании формулы (6′))

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Поэтому к функции $F(t)$ применима теорема Ролля, и, следовательно, существует такое значение $t = \xi$, заключенное между a и x, при котором $F'(\xi) = 0$. Отсюда на основании соотношения (8) получаем:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!}Q = 0,$$

откуда

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Подставляя это выражение в формулу (7), получаем:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Это — так называемая *форма Лагранжа* для остаточного члена. Так как ξ заключено между x и a, то его можно представить в форме *)

$$\xi = a + \theta(x - a),$$

где θ — число, заключенное между 0 и 1, т.е. $0 < \theta < 1$; тогда формула остаточного члена примет вид

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)].$$

Формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \qquad (9)$$

называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$.

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то она запишется в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (10)$$

где θ заключено между числами 0 и 1. Этот частный случай формулы Тейлора иногда называют *формулой Маклорена*.

§ 7. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$

1. **Разложение функции** $f(x) = e^x$. Находя последовательные производные от $f(x)$, получим:

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (10) § 6, будем иметь:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то, взяв $n = 8$, получим оценку остаточного члена:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3 < 10^{-5}.$$

При $x = 1$ получим формулу, позволяющую найти приближенное значение числа e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!};$$

---

*) См. конец § 2 настоящей главы.

производя вычисления в десятичных дробях с шестью*) десятичными знаками, а затем округляя результат до пяти десятичных знаков, найдем

$$e = 2,71828.$$

Здесь ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или $0,00001$.

Отметим, что, каково бы ни было x, остаточный член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно, так как $\theta < 1$, то величина $e^{\theta x}$ при фиксированном x ограничена (она меньше, чем e^x, при $x > 0$ и меньше, чем 1, при $x < 0$).

Докажем, что, каково бы ни было фиксированное число x,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right|.$$

Если x есть фиксированное число, то найдется такое целое положительное число N, что

$$|x| < N.$$

Введем обозначение $\frac{|x|}{N} = q$; тогда, заметив, что $0 < q < 1$, можем написать при $n = N+1,\ N+2,\ N+3$ и т.д.:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| &= \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| = \\ &= \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| < \\ &< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}q^{n-N+2},\end{aligned}$$

потому что

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q, \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, \quad \ldots, \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Но величина $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ постоянная, т.е. не зависит от n, а q^{n-N+2} стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1}$$

Следовательно, и $R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$.

---

*) Иначе суммарная ошибка округления при расчетах может значительно превысить R_8 (например, при количестве слагаемых, равном 10, эта ошибка может достичь величины $5 \cdot 10^{-5}$).

Из предыдущего следует, что при любом x, взяв достаточное число членов, мы можем вычислить e^x с любой степенью точности.

2. **Разложение функции** $f(x) = \sin x$. Находим последовательные производные от $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, && f(0) = 0,\\
&f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), && f'(0) = 1,\\
&f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), && f''(0) = 0,\\
&f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), && f'''(0) = -1,\\
&f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), && f^{IV}(0) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), && f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2},\\
&f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), && f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в формулу (10) § 6, получим разложение функции $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Так как $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

Применим полученную формулу для приближенного вычисления $\sin 20°$. Положим $n = 3$, т.е. ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\sin 20°\text{C} = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0,342.$$

Оценим сделанную ошибку, которая равна остаточному члену:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi + 2\pi)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \approx 0,00062 < 0,001.$$

Следовательно, ошибка меньше, чем $0,001$, т.е. $\sin 20° = 0,342$ с точностью до $0,001$.

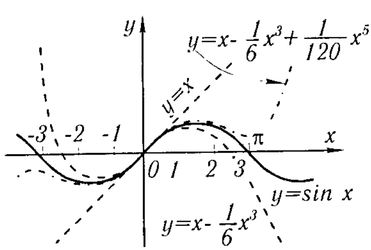


Рис. 97

На рис. 97 даны графики функции $f(x) = \sin x$ и первых трех приближений: $S_1(x) = x$, $S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

3. **Разложение функции** $f(x) = \cos x$. Находя значения последовательных производных при $x = 0$ от функции $f(x) = \cos x$ и подставляя в формулу Маклорена, получим разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$|\xi| < |x|.$$

Здесь также $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

Упражнения к главе IV

Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: **1.** $y = x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[1, 2]$. **2.** $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ на отрезке $[0, 1]$. **3.** $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ на отрезке $[1, 3]$. **4.** $y = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

5. Функция $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ имеет корнями 1 и -1. Найти корень производной $f'(x)$, о котором говорится в теореме Ролля.

6. Проверить, что между корнями функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ находится корень ее производной.

7. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \cos^2 x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}]$.

8. Функция $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде в интервале $(-1, 1)$ в нуль не обращается. Объяснить, почему здесь неприменима теорема Ролля.

9. Составить формулу Лагранжа для функции $y = \sin x$ на отрезке $[x_1, x_2]$. *Отв.* $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$.

10. Проверить справедливость формулы Лагранжа для функции $y = 2x - x^2$ на отрезке $[0, 1]$.

11. В какой точке касательная к кривой $y = x^n$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(a, a^n)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c = a/\sqrt[n-1]{n}$.

12. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(1, 0)$ и $M_2(e, 1)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c = e - 1$.

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства: **13.** $e^x \geqslant 1 + x$. **14.** $\ln(1 + x) < x$ $(x > 0)$. **15.** $b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$ при $b > a$. **16.** $\operatorname{arctg} x < x$.

17. Написать формулу Коши для функций $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[1, 2]$ и найти c. *Отв.* В точке с абсциссой $c = \frac{14}{9}$.

Вычислить следующие пределы: **18.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n - 1}$. *Отв.* $\dfrac{1}{n}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. *Отв.* 2. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. *Отв.* 2. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. *Отв.* -2. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. *Отв.* Предела не существует ($\sqrt{2}$ при $x \to +0$, $-\sqrt{2}$ при $x \to -0$). **23.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi - 2x)^2}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{8}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x}$. *Отв.* $\ln\dfrac{a}{b}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{6}$. **26.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$. *Отв.* $\cos a$. **27.** $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1 + y)}$. *Отв.* 2. **28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$.

Отв. $\frac{1}{3}$. **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ (где $n>0$). *Отв.* 0. **31.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* 1. **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}$. *Отв.* -1. **33.** $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ay}}$. *Отв.* 0 при $a>0$; ∞ при $a\leqslant 0$. **34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. *Отв.* 1. **35.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$. *Отв.* 1. **36.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$. *Отв.* 1. **37.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. *Отв.* 0. **38.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$. **39.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$. *Отв.* $-\frac{1}{2}$. **40.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$. *Отв.* -1. **41.** $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. *Отв.* 0. **42.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **43.** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg} 2x$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **44.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* ∞. **45.** $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **46.** $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$. *Отв.* 1. **47.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* 1. **48.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. *Отв.* e^a. **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **50.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. *Отв.* 1. **51.** $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. **52.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$.

53. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. *Отв.* $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

54. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $x^5+2x^4-x^2+x+1$. *Отв.* $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$.

55. Написать формулу Тейлора для функции $y=\sqrt{x}$ при $a=1$, $n=3$. *Отв.* $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$, $0<\theta<1$.

56. Написать формулу Маклорена для функции $y=\sqrt{1+x}$ при $n=2$. *Отв.* $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0<\theta<1$.

57. Пользуясь результатами предыдущего примера, оценить погрешность приближенного равенства $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ при $x=0,2$. *Отв.* Меньше $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Выяснить происхождение приближенных равенств при небольших значениях x и оценить погрешность этих равенств:

58. $\ln\cos x\approx -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$. **59.** $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. **60.** $\arcsin x\approx x+\frac{x^3}{6}$. **61.** $\operatorname{arctg} x\approx x-\frac{x^3}{3}$. **62.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. **63.** $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-x^2+\frac{5x^3}{6}$.

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить пределы выражений:

64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$. *Отв.* 1. **65.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Отв.* 0. **66.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}$. *Отв.* $\frac{1}{4}$. **67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. *Отв.* 0. **68.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. *Отв.* $\frac{1}{3}$. **69.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Отв.* $\frac{2}{3}$.

Глава V
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи

Изучение количественной стороны различных явлений природы приводится к установлению и изучению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, т.е. в виде одной или нескольких формул, то мы получаем возможность исследовать эту функциональную зависимость средствами математического анализа. Например, при исследовании явления полета снаряда в пустоте получается формула, дающая зависимость дальности полета R от угла возвышения α и начальной скорости v_0:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести).

Получив эту формулу, мы имеем возможность выяснить, при каком α дальность R будет наибольшей, при каком — наименьшей, каковы должны быть условия, чтобы при увеличении угла α увеличивалась дальность и т.д.

Рассмотрим другой пример. В результате изучения колебания груза на рессоре (вагон, автомобиль) получили формулу, показывающую, как отклонение y груза от положения равновесия зависит от времени t:

$$y = e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Величины k, A, B, ω, входящие в эту формулу, имеют вполне определенное значение для данной колебательной системы (они зависят от упругости рессоры, от величины груза и т.д., но не изменяются с течением времени t) и поэтому рассматриваются нами как постоянные.

На основании приведенной формулы можно выяснить, при каких значениях t отклонение y увеличивается с увеличением t, как меняется величина наибольшего отклонения в зависимости от времени, при каких значениях t наблюдаются эти наибольшие отклонения, при каких значениях t получаются наибольшие скорости движения груза и ряд других вопросов.

Все перечисленные вопросы входят в понятие «исследовать поведение функции». Очевидно, выяснить все эти вопросы, вычисляя значения функции в отдельных точках (подобно тому, как мы это делали в гл. II), весьма затруднительно. Целью настоящей главы является установление более общих приемов исследования поведения функций.

§ 2. Возрастание и убывание функции

В § 6 главы I было дано определение возрастающей и убывающей функций. Теперь мы применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функции.

Теорема. 1) *Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a,b]$, возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке $[a,b]$ не отрицательна, т.е. $f'(x) \geqslant 0$.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в промежутке (a,b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$. Придадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Так как $f(x)$ — функция возрастающая, то

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{при } \Delta x > 0$$

и

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

В обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \tag{2}$$

а следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

т.е. $f'(x) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. (Если бы было $f'(x) < 0$, то при достаточно малых значениях Δx отношение (1) было бы отрицательным, что противоречит соотношению (2).)

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $f'(x) > 0$ при всех значениях x, принадлежащих промежутку (a,b).

Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежащих отрезку $[a,b]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, а это и значит, что $f(x)$ — возрастающая функция.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей (дифференцируемой) функции, а именно.

Если $f(x)$ *убывает на отрезке* $[a, b]$, *то* $f'(x) \leqslant 0$ *на этом отрезке. Если* $f'(x) < 0$ *в промежутке* (a, b), *то* $f(x)$ *убывает на отрезке* $[a, b]$. (Конечно, мы и здесь предполагаем, что функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ и дифференцируема всюду на (a, b).)

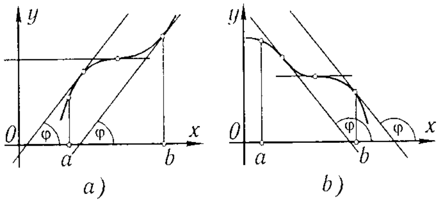


Рис. 98

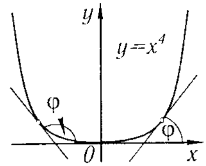


Рис. 99

Замечание. Доказанная теорема выражает следующий геометрический факт. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox ***острый*** угол φ или — в отдельных точках — горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (рис. 98, *а*). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной — тупой (или — в отдельных точках — касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 98, *б*). Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы. Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример. Определить области возрастания и убывания функции

$$y = x^4.$$

Решение. Производная равна

$$y' = 4x^3;$$

при $x > 0$ имеем $y' > 0$ — функция возрастает; при $x < 0$ имеем $y' < 0$ — функция убывает (рис. 99).

§ 3. Максимум и минимум функций

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет *максимум* (maximum), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет *максимум* при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине*).

Так, например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 100, имеет максимум при $x = x_1$.

---

*) Иногда это определение формулируют так: функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке x_1, если можно найти такую окрестность (α, β) точки x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$, что для всех точек этой окрестности, отличных от x_1, выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$.

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет *минимум* (minimum) при $x = x_2$, если

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

при любых Δx — как положительных, так и отрицательных, — достаточно малых по абсолютной величине (рис. 100).

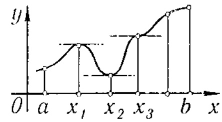


Рис. 100

Например, функция $y = x^4$, рассмотренная в конце предыдущего параграфа (см. рис. 99), при $x = 0$ имеет минимум, так как $y = 0$ при $x = 0$ и $y > 0$ при других значениях x.

В связи с определениями максимума и минимума следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

1. Функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x, заключенных ***внутри*** рассматриваемого отрезка.

2. Не следует думать, что максимум и минимум функции являются, соответственно, ее наибольшим и наименьшим значениями на рассматриваемом отрезке: в точке максимума функция имеет наибольшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, ***достаточно близких*** к точке максимума, а в точке минимума — наименьшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, ***достаточно близких*** к точке минимума.

Так, на рис. 101 изображена функция, определенная на отрезке $[a, b]$, которая

при $x = x_1$ и $x = x_3$ имеет максимум,

при $x = x_2$ и $x = x_4$ имеет минимум,

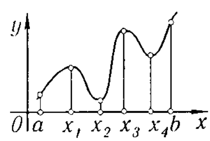


Рис. 101

но минимум функции при $x = x_4$ больше максимума функции при $x = x_1$. При $x = b$ значение функции больше любого максимума функции на рассматриваемом отрезке.

Максимумы и минимумы функции называют *экстремумами**) или *экстремальными значениями* функции.

Экстремальные значения функции и их расположение на отрезке $[a, b]$ в известной степени характеризуют изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

Ниже будет указан метод нахождения экстремальных значений.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, т.е.* $f'(x_1) = 0$.

*) Extremum — крайний (лат.).

Доказательство. Предположим для определенности, что в точке $x = x_1$ функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых по абсолютному значению приращениях Δx ($\Delta x \neq 0$) имеет место

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

т.е.

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Но в таком случае знак отношения

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

определяется знаком Δx, а именно:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

Согласно определению производной имеем:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Если $f(x)$ имеет производную при $x = x_1$, то предел, стоящий справа, не зависит от того, как Δx стремится к нулю (оставаясь положительным или отрицательным).

Но если $\Delta x \to 0$, оставаясь отрицательным, то

$$f'(x_1) \geqslant 0.$$

Если же $\Delta x \to 0$, оставаясь положительным, то

$$f'(x_1) \leqslant 0.$$

Так как $f'(x_1)$ есть определенное число, не зависящее от способа стремления Δx к нулю, то два последних неравенства совместимы только в том случае, если

$$f'(x_1) = 0.$$

Аналогичным образом теорема доказывается и для случая минимума функции.

Доказанной теореме соответствует следующий очевидный геометрический факт: если в точках максимума и минимума функция $f(x)$ имеет производную, то касательная к кривой $y = f(x)$ в этих точках параллельна оси Ox. Действительно, из того, что $f'(x_1) = \operatorname{tg}\varphi = 0$, где φ — угол между касательной и осью Ox, следует, что $\varphi = 0$ (рис. 100).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие: *если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или* *минимум) только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль.* Обратное заключение неверно: *не при всяком значении, при которых производная обращается в нуль, обязательно существует максимум или минимум.* Так, на рис. 100 изображена функция, у которой при $x = x_3$ производная обращается в нуль (касательная горизонтальна), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Точно так же функция $y = x^3$ (рис. 102) при $x = 0$ имеет производную, равную нулю:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, как бы ни была близка точка x к точке O, всегда

$$x^3 < 0 \quad \text{при} \quad x < 0$$

и

$$x^3 > 0 \quad \text{при} \quad x > 0.$$

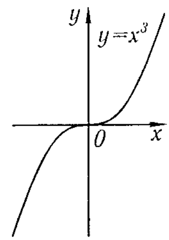


Рис. 102

Мы исследовали тот случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех точках, где производная не существует? Мы покажем на примерах, что в таких точках может быть или максимум, или минимум, но может и не быть ни того, ни другого.

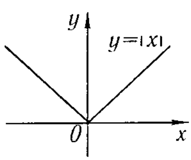


Рис. 103

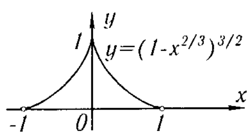


Рис. 104

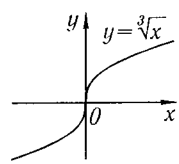


Рис. 105

Пример 1. Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$ (в этой точке кривая не имеет определенной касательной), но в этой точке данная функция имеет минимум: $y = 0$ при $x = 0$, тогда как для всякой точки x, отличной от нуля, имеем $y > 0$ (рис. 103).

Пример 2. Функция $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ не имеет производной при $x = 0$, так как $y' = -(1 - x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$ обращается в бесконечность при $x = 0$, но в этой точке функция имеет максимум: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ при x, отличном от нуля (рис. 104).

Пример 3. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной при $x = 0$ ($y' \to \infty$ при $x \to 0$). В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума: $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ для $x < 0$; $f(x) > 0$ для $x > 0$ (рис. 105).

Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю; либо в тех точках, где производная не существует.

Заметим, что если производная не существует в какой-либо точке (но существует в близлежащих точках), то в этой точке производная терпит *разрыв*.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими точками* или *критическими значениями*.

Из предыдущего следует, что не при всяком критическом значении функция имеет максимум или минимум. Однако, если в какой-либо точке функция достигает максимума или минимума, то эта точка наверняка является критической. Поэтому для разыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно каждую критическую точку, выясняют, будет ли в этой точке максимум или минимум функции или же не будет ни максимума, ни минимума.

Исследование функции в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.*

Таким образом,

$$\text{если а)} \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{при} \quad x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет *максимум*;

$$\text{если б)} \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{при} \quad x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет *минимум*. При этом надо иметь в виду, что условия а) или б) должны выполняться для всех значений x, достаточно близких к x_1, т.е. во всех точках некоторой достаточно малой окрестности критической точки x_1.

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак с плюса на минус, т.е. что для всех x, достаточно близких к точке x_1, имеем:

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x > x_1.$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получим

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

где ξ есть точка, лежащая между x и x_1.

1) Пусть $x < x_1$; тогда

$$\xi < x_1, \ f'(\xi) > 0, \ f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2) Пусть $x > x_1$; тогда

$$\xi > x_1, \ f'(\xi) < 0, \ f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) показывают, что для всех значений x, достаточно близких к x_1, значения функции меньше, чем значения функции в точке x_1. Следовательно, в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы о достаточном условии минимума.

Рис. 106 наглядно иллюстрирует смысл теоремы 2.

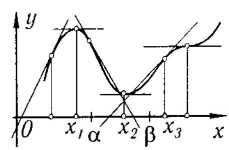


Рис. 106

Пусть в точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и для всех x, достаточно близких к точке x_1, выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x > x_1.$$

Тогда при $x < x_1$ касательная к кривой образует с осью Ox острый угол — функция возрастает, а при $x > x_1$ касательная образует с осью Ox тупой угол — функция убывает; при $x = x_1$ функция переходит от возрастания к убыванию, т.е. имеет максимум.

Если в точке x_2 имеем $f'(x_2) = 0$ и для всех значений x, достаточно близких к точке x_2, выполняются неравенства

$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > x_2,$$

то при $x < x_2$ касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол — функция убывает, а при $x > x_2$ касательная к кривой образует острый угол — функция возрастает. При $x = x_2$ функция переходит от убывания к возрастанию, т.е. имеет минимум.

Если при $x = x_3$ имеем $f'(x_3) = 0$ и для всех значений x, достаточно близких к x_3, выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_3,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > x_3,$$

то функция возрастает как при $x < x_3$, так и при $x > x_3$. Следовательно, при $x = x_3$ функция не имеет ни максимума, ни минимума. Именно такой случай имеет место для функции $y = x^3$ при $x = 0$.

Действительно, производная $y' = 3x^2$, следовательно,

$$(y')_{x=0} = 0,$$
$$(y')_{x<0} > 0,$$
$$(y')_{x>0} > 0,$$

а это значит, что при $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (см. выше рис. 102).

§ 4. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

На основании предыдущего параграфа можно сформулировать следующее правило для исследования дифференцируемой функции

$$y = f(x)$$

на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, т.е. $f'(x)$.

2. Находим критические значения аргумента x; для этого:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя критическими точками, то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 106) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_2 — ближайшие критические точки).

4. Вычисляем значение функции $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Таким образом, имеем следующее схематическое изображение возможных случаев:

Знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_1			Характер критической точки
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
$+$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$-$	Точка максимума
$-$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$+$	Точка минимума
$+$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$+$	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
$-$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$-$	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

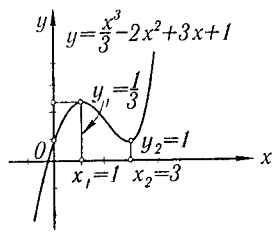


Рис. 107

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Находим действительные корни производной:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем на рис. 107.

Исследуем первую критическую точку $x_1 = 1$. Так как $y' = (x-1)(x-3)$, то

$$\text{при } x < 1 \text{ имеем } y' = (-)\cdot(-) > 0;$$
$$\text{при } x > 1 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(-) < 0.$$

Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$:

$$\text{при } x < 3 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(-) < 0;$$
$$\text{при } x > 3 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(+) > 0.$$

Значит, при переходе через значение $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = 3$ функция имеет минимум, а именно:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 107).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

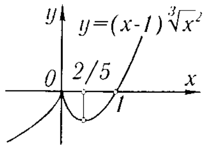


Рис. 108

2) Находим критические значения аргумента: а) находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) находим точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка

$$x_2 = 0.$$

(Отметим, что при $x_2 = 0$ рассматриваемая функция определена и непрерывна.) Других критических точек нет.

3) Исследуем характер полученных критических точек. Исследуем точку $x_1 = 2/5$. Заметим, что

$$(y')_{x<2/5} < 0, \quad (y')_{x>2/5} > 0,$$

заключаем, что при $x = 2/5$ функция имеет минимум. Значение функции в точке минимума равно

$$(y)_{x=2/5} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Исследуем вторую критическую точку $x = 0$. Заметив, что

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0,$$

заключаем, что при $x = 0$ функция имеет максимум, причем $(y)_{x=0} = 0$. График исследуемой функции изображен на рис. 108.

§ 5. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Пусть при $x = x_1$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_1) = 0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f'(x_1) = 0$; тогда при $x = x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$, и минимум, если $f''(x_1) > 0$.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть

$$f'(x_1) = 0 \text{ и } f''(x_1) < 0.$$

Так как, по условию, $f''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_1$, то, очевидно, найдется некоторый малый отрезок, окружающий точку $x = x_1$, во всех точках которого вторая производная $f''(x)$ будет отрицательна.

Так как $f''(x)$ есть первая производная от первой производной, $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x = x_1$ (§ 2 гл. V). Но $f'(x_1) = 0$, следовательно, на этом отрезке при $x < x_1$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_1$ имеем $f'(x) < 0$, т.е. производная $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_1$ меняет знак с плюса на минус, а это значит, что в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум. Первая часть теоремы доказана.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы, а именно: если $f''(x_1) > 0$, то $f''(x) > 0$ во всех точках некоторого отрезка, окружающего точку x_1, но тогда на этом отрезке $f''(x) = (f'(x))' > 0$ и, следовательно, $f'(x)$ возрастает. Так как $f'(x_1) = 0$, то, значит, при переходе через точку x_1 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т.е. функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_1$.

Если в критической точке $f''(x_1) = 0$, то в этой точке может быть или максимум, или минимум или не быть ни максимума, ни минимума. В этом случае исследование нужно вести первым способом (см. § 4 гл. V).

Схему исследования экстремумов с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	$-$	Точка максимума
0	$+$	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как функция является периодической периода 2π, то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

1) Находим производную:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2) Находим критические значения аргумента:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \pi/6, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = 5\pi/6, \quad x_4 = 3\pi/2.$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

4) Исследуем характер каждой критической точки:

$$(y'')_{x_1=\pi/6} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = \pi/6$ имеем максимум:

$$(y)_{x=\pi/6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее,

$$(y'')_{x=\pi/2} = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_2 = \pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=\pi/2} = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

В точке $x_3 = 5\pi/6$ имеем:

$$(y'')_{x=5\pi/6} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, при $x_3 = 5\pi/6$ функция имеет максимум:

$$(y)_{x_3=5\pi/6} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Наконец,

$$(y'')_{x=3\pi/2} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_4 = 3\pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=3\pi/2} = 2(-1) - 1 = -3.$$

График исследуемой функции изображен на рис. 109.

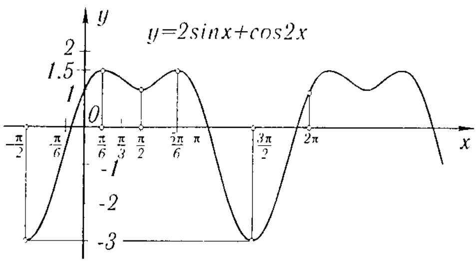


Рис. 109

Покажем, далее, на примерах, что если в некоторой точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) = 0$, то в этой точке функция $f(x)$ может иметь либо максимум, либо минимум, либо не иметь ни максимума, ни минимума.

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$x = 1 - x^4.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Определяем знак второй производной при $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.

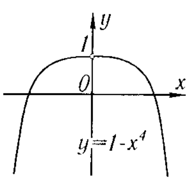


Рис. 110

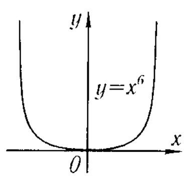


Рис. 111

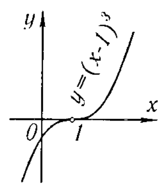


Рис. 112

3) Исследуем характер критической точки первым способом (см. § 4 гл. V):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

График рассмотренной функции изображен на рис. 110.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^6.$$

Решение. По второму способу находим:

$$1)\ y' = 6x^5, \ y' = 6x^5 = 0, \ x = 0; \quad 2)\ y'' = 30x^4, \ (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, второй способ ответа не дает. Прибегая к первому способу, получаем:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум (рис. 111).

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию
$$y = (x-1)^3.$$

Решение. Второй способ:
$$y' = 3(x-1)^2,\ 3(x-1)^2 = 0,\ x = 1;$$
$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$
таким образом, второй способ ответа не дает. По первому способу находим:
$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$
Следовательно, при $x = 1$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (рис. 112).

§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения (см. § 10 гл. II). Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума.

То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума.

Из предыдущего вытекает следующее правило: если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо:

1) найти все максимумы функции на отрезке;

2) определить значения функции на концах отрезка, т.е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

Пример. Определить на отрезке $[-3; 3/2]$ наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = x^3 - 3x + 3.$$

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы функции на отрезке $[-3, 3/2]$:
$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1,$$
$$x_2 = -1, \quad y'' = 6x,$$

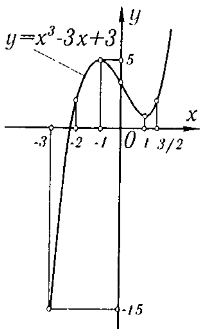


Рис. 113

тогда

$$(y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ имеет место минимум:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Далее,

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Следовательно, в точке $x = -1$ имеет место максимум:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Определяем значение функции на концах отрезка:

$$(y)_{x=3/2} = 15/8, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $[-3; 3/2]$ есть

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

а наименьшее значение есть

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

График рассматриваемой функции изображен на рис. 113.

§ 7. Применение теории максимума и минимума функций к решению задач

С помощью теории максимума и минимума решаются многие задачи геометрии, механики и т.д. Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. Дальность $R = OA$ (рис. 114) полета ядра (в пустоте), выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, наклоненного под углом φ к горизонту, определяется формулой

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести). Определить угол φ, при котором дальность R будет наибольшей при данной начальной скорости v_0.

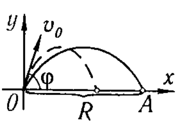


Рис. 114

Решение. Величина R представляет собой функцию переменного угла φ. Исследуем эту функцию на максимум на отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}, \qquad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0,$$

критическое значение $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g},$$

$$\left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Следовательно, при значении $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ дальность полета R имеет максимум

$$(R)_{\varphi=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Значения функции R на концах отрезка $[0; \pi/2]$ равны:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

Таким образом, найденный максимум и есть искомое наибольшее значение R.

Задача 2. Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме v его полная поверхность была наименьшей?

Обозначая через r радиус основания цилиндра и через h высоту цилиндра, будем иметь:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Так как объем цилиндра задан, то при данном r величина h определяется формулой

$$v = \pi r^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Подставляя это выражение h в формулу для S, получим:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}, \quad \text{или } S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

Здесь v — заданное число. Таким образом, мы представили S как функцию одного независимого переменного r.

Найдем наименьшее значение этой функции в промежутке $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2 S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Следовательно, в точке $r = r_1$ функция S имеет минимум. Заметив, что $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$, т.е. что при стремлении r к нулю или к бесконечности поверхность S неограниченно возрастает, мы приходим к выводу, что в точке $r = r_1$ функция S имеет ***наименьшее значение***.

Но если $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, то

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Таким образом, для того чтобы при данном объеме v полная поверхность S цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться его диаметру.

§ 8. Исследование функции на максимум и минимум с помощью формулы Тейлора

В § 5 главы V было замечено, что если в некоторой точке $x = a$ имеем $f'(a) = 0$ и $f''(a) = 0$, то в этой точке может быть либо максимум, либо минимум, либо нет ни того, ни другого. При этом указывалось, что для решения вопроса в этом случае нужно вести исследование первым способом, т.е. путем исследования знака первой производной слева и справа от точки $x = a$.

Теперь мы покажем, что можно в этом случае исследование вести и с помощью формулы Тейлора, выведенной в § 6 гл. IV.

Для большей общности предположим, что не только $f''(x)$, но и все производные до n-го порядка включительно от функции $f(x)$ обращаются в нуль при $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \tag{1}$$

а
$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Предположим далее, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки $x = a$.

Напишем формулу Тейлора для $f(x)$, принимая во внимание равенства (1):
$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$
где ξ — число, заключенное между a и x.

Так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности точки a и $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, то найдется такое малое положительное число h, что при любом x, удовлетворяющем неравенству $|x-a| < h$, будет $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. При этом если $f^{(n+1)}(a) > 0$, то и во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ будет $f^{(n+1)}(x) > 0$; если $f^{(n+1)}(a) < 0$, то во всех точках этого интервала будет $f^{(n+1)}(x) < 0$.

Перепишем формулу (2) в виде
$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2$'$}$$
и рассмотрим различные частные случаи.

Первый случай. n — нечетное.

а) Пусть $f^{(n+1)}(a) < 0$. Тогда найдется интервал $(a-h, a+h)$, во всех точках которого $(n+1)$-я производная отрицательна. Если x есть точка этого интервала, то ξ тоже находится между $a-h$ и $a+h$ и, следовательно, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Так как $n+1$ — четное число, то $(x-a)^{n+1} > 0$ при $x \neq a$, и поэтому правая часть в формуле (2$'$) отрицательна.

Следовательно, при $x \neq a$ во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ имеем:
$$f(x) - f(a) < 0,$$
а это значит, что при $x = a$ функция имеет максимум.

б) Пусть $f^{(n+1)}(a) > 0$. Тогда при достаточно малом значении h во всех точках x интервала $(a-h, a+h)$ имеет место $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Следовательно, правая часть формулы (2$'$) будет положительна, т.е. при $x \neq a$ во всех точках указанного интервала будет:
$$f(x) - f(a) > 0,$$
а это значит, что при $x = a$ функция имеет минимум.

Второй случай. n — четное.

Тогда $n+1$ — нечетное и величина $(x-a)^{n+1}$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$.

Если h достаточно мало по абсолютной величине, то $(n+1)$-я производная во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ сохраняет тот же знак, что и в точке a. Следовательно, $f(x) - f(a)$ имеет разные знаки при $x < a$ и при $x > a$. Но это значит, что при $x = a$ нет ни максимума, ни минимума.

Заметим, что если при n четном $f^{(n+1)}(a) > 0$, то $f(x) < f(a)$ для $x < a$ и $f(x) > f(a)$ для $x > a$.

Если же при n четном $f^{(n+1)}(a) < 0$, то $f(x) > f(a)$ для $x < a$ и $f(x) < f(a)$ для $x > a$.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Если при $x = a$ имеем:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

и первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производного ***четного*** порядка, то в точке a

$$f(x) \text{ имеет } \textbf{\textit{максимум}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) < 0;$$

$$f(x) \text{ имеет } \textbf{\textit{минимум}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) > 0.$$

Если же первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная ***нечетного*** порядка, то функция не имеет ни максимума, ни минимума в точке a. При этом

$$f(x) \text{ } \textbf{\textit{возрастает}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) > 0;$$

$$f(x) \text{ } \textbf{\textit{убывает}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Найдем критические значения функции

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Из уравнения

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

получаем единственную критическую точку

$$x = 1$$

(так как данное уравнение имеет лишь один действительный корень).

Исследуем характер критической точки $x = 1$:

$$\begin{aligned}
&f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 && \text{при } x = 1,\\
&f'''(x) = 24x - 24 = 0 && \text{при } x = 1,\\
&f^{\mathrm{IV}}(x) = 24 > 0 && \text{при любом } x.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет минимум.

§ 9. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 1. Мы говорим, что кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Мы говорим, что кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале (b, c), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

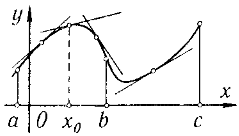


Рис. 115

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз — *вогнутой*.

На рис. 115 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c).

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы. Настоящий параграф посвящен установлению признаков, по которым можно было бы, исследуя функцию $y = f(x)$, судить о направлении выпуклости ее графика на различных интервалах.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью зверх (кривая выпукла).*

Доказательство. Возьмем в интервале (a, b) произвольную точку $x = x_0$ (рис. 115) и проведем касательную к кривой в точке с абсциссой $x = x_0$. Теорема будет доказана, если мы установим, что все точки кривой на интервале (a, b) лежат ниже этой касательной, т.е. что ордината любой точки кривой $y = f(x)$ меньше ординаты y касательной при одном и том же значении x.

Уравнение кривой имеет вид

$$y = f(x). \tag{1}$$

Уравнение же касательной к кривой в точке $x = x_0$ имеет вид

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x равна

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(где c лежит между x_0 и x), или

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

К выражению, стоящему в квадратных скобках, снова применяем теорему Лагранжа; тогда

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(где c_1 лежит между x_0 и c).

Рассмотрим сначала тот случай, когда $x > x_0$. В этом случае $x_0 < c_1 < c < x$; так как

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

и так как, кроме того, по условию,

$$f''(c_1) < 0,$$

то из равенства (3) следует, что $y - \bar{y} < 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x < x_0$. В этом случае $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, а так как, по условию, $f''(c_1) < 0$, то из равенства (3) следует, что

$$y - \bar{y} < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой лежит ниже касательной к кривой, каковы бы ни были значения x и x_0 на интервале (a, b). А это и значит, что кривая выпукла. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 1$'$. *Если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).*

Замечание. Содержание теорем 1 и 1$'$ можно иллюстрировать геометрически. Рассмотрим кривую $y = f(x)$, обращенную выпуклостью вверх на интервале (a, b) (рис. 116). Производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α наклона касательной в точке с абсциссой x, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому $f''(x) = [\operatorname{tg}\alpha]'_x$. Если $f''(x) < 0$ для всех x на интервале (a, b), то это значит, что $\operatorname{tg}\alpha$ убывает с возрастанием x. Геометрически нагляден тот факт, что если $\operatorname{tg}\alpha$ убывает с возрастанием x, то соответствующая кривая выпукла. Аналитическим доказательством этого факта и является теорема 1.

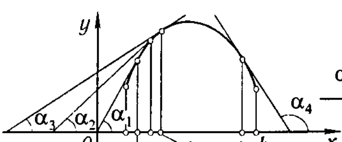


Рис. 116

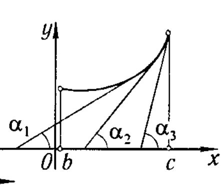


Рис. 117

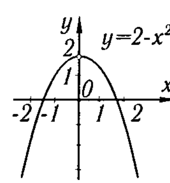


Рис. 118

Подобным же образом иллюстрируется геометрически и теорема 1$'$ (рис. 117).

Пример 1. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением

$$y = 2 - x^2.$$

Решение. Вторая производная

$$y'' = -2 < 0$$

для всех значений x. Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх (рис. 118).

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$y = e^x.$$

Так как

$$y'' = e^x > 0$$

для всех значений x, то, следовательно, кривая всюду вогнута, т.е. обращена выпуклостью вниз (рис. 119).

Пример 3. Кривая определяется уравнением

$$y = x^3.$$

Так как

$$y'' = 6x,$$

то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > 0$ — выпуклостью вниз (рис. 120).

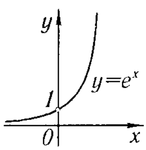


Рис. 119

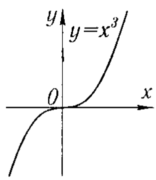


Рис. 120

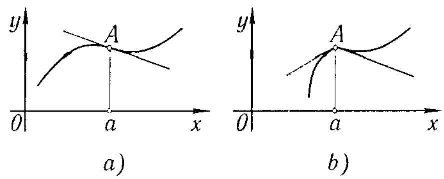


Рис. 121

Определение 2. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

На рис. 120, 121 и 122 точки O, A и B суть точки перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, ***пересекает*** кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит ***под*** касательной, а с другой стороны — ***над*** нею.

Установим теперь достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$.

Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вверх и при $x > a$ — выпуклостью вниз. Следовательно, точка A кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба (рис. 121).

2) Если $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$, то при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ — выпуклостью вверх. Следовательно, точка B кривой с абсциссой $x = b$ есть точка перегиба (см. рис. 122).

Пример 4. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = e^{-x^2} \quad \textit{(кривая Гаусса)}.$$

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$
$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Первая и вторая производные существуют всюду. Находим значения x, при которых $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$
$$x_1 = -1/\sqrt{2}, \quad x_2 = 1/\sqrt{2}.$$

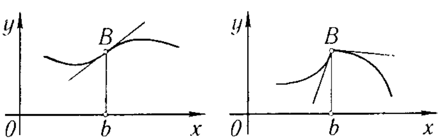
3) Исследуем полученные значения:

$$\text{при } x < -1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' > 0,$$
$$\text{при } x > -1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' < 0;$$

вторая производная меняет знак при переходе через точку x_1, следовательно, при $x_1 = -1/\sqrt{2}$ на кривой имеется точка перегиба; ее координаты: $(-1/\sqrt{2},\ e^{-1/2})$;

$$\text{при } x < 1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' < 0,$$
$$\text{при } x > 1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' > 0.$$

Следовательно, при $x_2 = 1/\sqrt{2}$ на кривой также имеется точка перегиба; ее координаты: $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$. Впрочем, существование второй точки перегиба вытекает непосредственно из симметрии кривой относительно оси Oy.



a) b)

Рис. 122

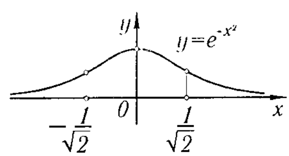


Рис. 123

4) Из предыдущего следует, что

$$\text{при } -\infty < x < -1/\sqrt{2} \quad \text{кривая вогнута},$$
$$\text{при } -1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2} \quad \text{кривая выпукла},$$
$$\text{при } 1/\sqrt{2} < x < +\infty \quad \text{кривая вогнута}.$$

5) Из выражения первой производной

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

следует, что

$$y' > 0 \text{ при } x < 0, \text{ т.е. функция возрастает},$$
$$y' < 0 \text{ при } x > 0, \text{ т.е. функция убывает},$$
$$y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В этой точке функция имеет максимум, а именно: $y = 1$.

На основании проведенного исследования легко построить график кривой (рис. 123).

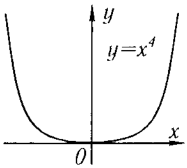


Рис. 124

Пример 5. Найти точки перегиба кривой
$$y = x^4.$$
Решение. 1) Находим вторую производную:
$$y'' = 12x^2.$$
2) Определяем точки, в которых $y'' = 0$:
$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$
3) Исследуем полученное значение $x = 0$:
$$y'' > 0 \text{ при } x < 0 \text{ — кривая вогнута,}$$
$$y'' > 0 \text{ при } x > 0 \text{ — кривая вогнута.}$$
Следовательно, кривая не имеет точек перегиба (рис. 124).

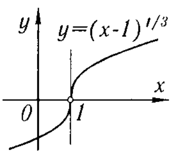


Рис. 125

Пример 6. Найти точки перегиба кривой.
$$y = (x-1)^{1/3}.$$
Решение. 1) Находим первую и вторую производные:
$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3},$$
$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}.$$
2) Вторая производная нигде не обращается в нуль, но при $x = 1$ она не существует ($y'' = \pm\infty$).

3) Исследуем значение $x = 1$:
$$y'' > 0 \text{ при } x < 1 \text{ — кривая вогнута,}$$
$$y'' < 0 \text{ при } x > 1 \text{ — кривая выпукла}$$
Следовательно, при $x = 1$ имеется точка перегиба; это — точка $(1; 0)$.

Заметим, что $y' = \infty$ при $x = 1$, т.е. кривая в этой точке имеет вертикальную касательную (рис. 125).

§ 10. Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции *при неограниченном возрастании* (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность*) неограниченно приближается к некоторой прямой.

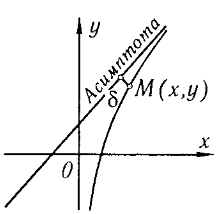


Рис. 126

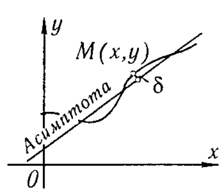


Рис. 127

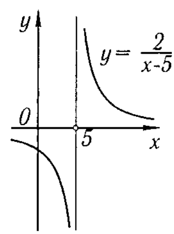


Рис. 128

*) Мы говорили, что переменная точка M движется по кривой в бесконечность, если расстояние этой точки от начала координат неограниченно возрастает.

Определение. Прямая A называется *асимптотой* кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 126 и 127).

Мы будем в дальнейшем различать асимптоты *вертикальные* (т.е. параллельные оси ординат) и *наклонные* (т.е. непараллельные оси ординат).

1. **Вертикальные асимптоты.** Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$; и обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти такие значения $x = a$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой.

Пример 1. Кривая $y = \dfrac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как $y \to \infty$ при $x \to 5$ (рис. 128).

Пример 2. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот:

$$x = \pm\pi/2,\ x = \pm 3\pi/2,\ x = \pm 5\pi/2, \ldots$$

Это следует из того, что $\operatorname{tg} x \to \infty$, когда x стремится к значениям $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2, \ldots$ или $-\pi/2$, $-3\pi/2$, $-5\pi/2, \ldots$ (рис. 129).

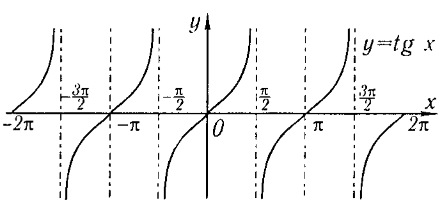


Рис. 129

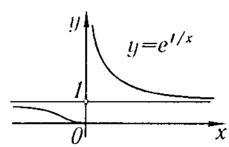


Рис. 130

Пример 3. Кривая $y = e^{1/x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = \infty$ (рис. 130).

II. **Наклонные асимптоты.** Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

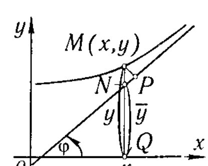


Рис. 131

Определим числа k и b (рис. 131). Пусть $M(x, y)$ – точка, лежащая на кривой, и $N(x, y)$ – точка, лежащая на асимптоте. Длина отрезка $[MP]$ равна расстоянию от точки M до асимптоты. По условию

$$\lim_{x\to+\infty} |MP| = 0. \qquad (2)$$

Если обозначим через φ угол наклона к оси Ox, то из $\triangle NMP$ найдем:

$$|NM| = \frac{|MP|}{\cos\varphi}.$$

Так как φ — постоянный угол (не равный $\pi/2$), то в силу предыдущего равенства

$$\lim_{x\to+\infty} |MN| = 0, \qquad (2')$$

и наоборот, из равенства (2′) следует равенство (2). Но

$$|NM| = \big||QM| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

и равенство (2′) принимает вид

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \qquad (3)$$

Итак, если прямая (1) есть асимптота, то выполняется равенство (3), и наоборот, если при постоянных k и b выполняется равенство (3), то прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Определим теперь k и b. Вынося x за скобки в равенстве (3), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

При b постоянном $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$, или

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (4)$$

Зная k, из равенства (3) находим b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \qquad (5)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (4) и (5). Обратно, если существуют пределы (4) и (5), то выполняется равенство (3) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Если хотя бы один из пределов (4) или (5) не существует, то кривая асимптоты не имеет.

Заметим, что мы проводили исследование применительно к рис. 131 при $x \to +\infty$, но все рассуждения справедливы и для случая $x \to -\infty$.

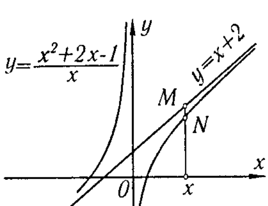


Рис. 132

Пример 4. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Решение. 1) Ищем вертикальные асимптоты:

$$y \to +\infty \text{ при } x \to 0,$$

$$y \to -\infty \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота данной кривой.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

т.е.

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2,$$

т.е.

$$b = 2.$$

Следовательно, прямая

$$y = x + 2$$

есть наклонная асимптота данной кривой.

Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x:

$$\frac{x^2+2x-1}{x} - (x+2) = -\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ эта разность отрицательна, а при $x < 0$ — положительна; следовательно, при $x > 0$ кривая лежит ниже асимптоты, при $x < 0$ — выше асимптоты (рис. 132).

Пример 5. Найти асимптоты кривой

$$y = e^{-x} \sin x + x.$$

Решение. 1) Вертикальных асимптот, очевидно, нет.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\sin x + x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{e^{-x}\sin x}{x} + 1\right] = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [e^{-x}\sin x + x - x] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin x = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

Заданная кривая не имеет асимптоты при $x \to -\infty$. Действительно, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x}$ не существует, так как

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1.$$

(Здесь первое слагаемое неограниченно возрастает при $x \to -\infty$ и, следовательно, предела не имеет.)

§ 11. Общий план исследования функций и построения графиков

Под «исследованием функции» обычно понимается разыскание:

1) естественной области существования функции;

2) точек разрыва функции;

3) интервалов возрастания и убывания функции;

4) точек максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значений функции;

5) областей выпуклости и вогнутости графика, точек перегиба;

6) асимптот графика функции.

На основании проведенного исследования строится график функции (иногда целесообразно намечать элементы графика параллельно с исследованием).

Замечание 1. Если исследуемая функция $y = f(x)$ — *четная*, т.е. такая, что при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т.е. если

$$f(-x) = f(x),$$

то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Пример 1. Функция $y = x^2$ — четная, так как $(-x)^2 = x^2$ (см. рис. 5).

Пример 2. Функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$ (см. рис. 16).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ — *нечетная*, т.е. такая, что при изменении аргумента функция меняет знак, т.е. если

$$f(-x) = -f(x),$$

то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 3. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$ (см. рис. 7).

Пример 4. Функция $y = \sin x$ — нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$ (см. рис. 15).

Замечание 3. Так как знание одних свойств функции позволяет сделать вывод о других ее свойствах, то иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции. Так, например, если мы выяснили, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым мы уже определили и области возрастания и убывания функции.

Пример 5. Исследовать функцию

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Область существования функции — интервал $-\infty < x < +\infty$. Сразу отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум: из равенства

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

находим критические точки:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Исследуем характер критических точек:

при $x < -1$ имеем $y' < 0$;

при $x > -1$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, при $x = -1$ функция имеет минимум:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0{,}5.$$

Далее,

$$\text{при } x < 1 \text{ имеем } y' > 0;$$

$$\text{при } x > 1 \text{ имеем } y' < 0.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум:

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4) Определим области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < -1$ имеем $y' < 0$ — функция убывает,

при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$ — функция возрастает,

при $1 < x < +\infty$ имеем $y' < 0$ — функция убывает.

5) Определим области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: из равенства

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

получаем:

$$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}.$$

Исследуя y'' как функцию от x, находим:

при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ $y'' < 0$ — кривая выпуклая,

при $-\sqrt{3} < x < 0$ $y'' > 0$ — кривая вогнутая,

при $0 < x < \sqrt{3}$ $y'' < 0$ — кривая выпуклая,

при $\sqrt{3} < x < +\infty$ $y'' > 0$ — кривая вогнутая.

Следовательно, точка с координатами $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}/4$ есть точка перегиба; точно так же точки $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ есть точки перегиба.

6) Определим асимптоты кривой:

при $y \to +\infty$ $y \to 0$,

при $y \to -\infty$ $y \to 0$.

Следовательно, прямая $y = 0$ есть единственная наклонная асимптота.

Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как ни для одного конечного значения x функция не стремится к бесконечности.

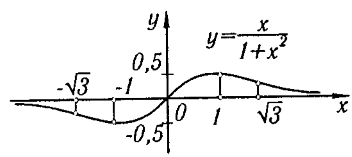


Рис. 133

График исследуемой кривой изображен на рис. 133.

Пример 6. Исследовать функцию

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} \quad (a > 0)$$

и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}.$$

Производная существует всюду, за исключением точек

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 2a.$$

Исследуем предельные значения производной при $x \to -0$ и при $x \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}} = +\infty$$

при $x < 0$ будет $y' < 0$, при $x > 0$ будет $y' > 0$.

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум. Значение функции в этой точке равно нулю.

Исследуем теперь функцию в другой критической точке $x_2 = 2a$. При $x \to 2a$ производная также стремится к бесконечности. Однако в данном случае для всех значений x, близких к $2a$ (находящихся как справа, так и слева от точки $2a$), производная отрицательна. Следовательно, в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $x_2 = 2a$, так же как и вблизи этой точки, функция убывает; касательная к кривой в этой точке вертикальна.

При $x = 4a/3$ производная обращается в нуль. Исследуем характер этой критической точки. Рассматривая выражение первой производной, замечаем, что

$$\text{при } x < 4a/3 \text{ будет } y' > 0, \text{ при } x > 4a/3 \text{ будет } y' < 0.$$

Следовательно, при $x = 4a/3$ функция имеет максимум:

$$y_{\max} = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4) На основании проведенного исследования получаем области возрастания и убывания функции:

$$\begin{array}{ll} \text{при } -\infty < x < 0 & \text{функция убывает,} \\ \text{при } 0 < x < 4a/3 & \text{функция возрастает,} \\ \text{при } 4a/3 < x < +\infty & \text{функция убывает.} \end{array}$$

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: вторая производная

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a - x)^{5/3}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль. Однако существуют две точки, в которых вторая производная терпит разрыв: это точки

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2a.$$

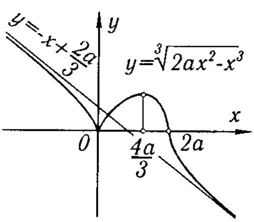


Рис. 134

Исследуем знак второй производной вблизи каждой из этих точек:

при $x < 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх.

Значит, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба.

При $x < 2a$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх; при $x > 2a$ имеем $y'' > 0$ — кривая обращена выпуклостью вниз. Значит, точка $(2a; 0)$ на кривой является точкой перегиба.

6) Определяем асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$

Следовательно, прямая

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

есть наклонная асимптота кривой $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$. График исследуемой функции изображен на рис. 134.

§ 12. Исследование кривых, заданных параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В этом случае исследование и построение кривой проводятся аналогично тому, как это было сделано для кривой, заданной уравнением

$$y = f(x).$$

Вычисляем производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для тех точек кривой, вблизи которых кривая является графиком некоторой функции $y = f(x)$, вычисляем производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3}$$

Находим значения параметра $t = t_1$, t_2, ..., t_k, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ обращается в нуль или терпит разрыв. (Такие значения t мы будем называть критическими значениями.) По формуле (3) в каждом из интервалов (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{k-1}, t_k), а следовательно, и в каждом из интервалов (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{k-1}, x_k) (где $x_i = \varphi(t_i)$) определяем знак $\frac{dy}{dx}$, тем самым определяем области возрастания и убывания. Это дает также возможность определить характер точек, соответствующих значениям параметра t_1, t_2, ..., t_k. Далее, вычисляем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

На основании этой формулы определяем направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x, или y стремятся к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x, и y стремятся к бесконечности. Затем производим исследование обычным способом.

Некоторые особенности, появляющиеся при исследовании кривых, заданных параметрически, выясним на примерах.

Пример 1. Исследовать кривую, заданную уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\} \quad (a > 0). \tag{1'}$$

Решение. Величины x и y определены для всех значений t. Но так как функции $\cos^3 t$ и $\sin^3 t$ — периодические, с периодом 2π, достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π; при этом областью изменения x будет отрезок $[-a, a]$ и областью изменения y будет отрезок $[-a, a]$. Следовательно, рассматриваемая кривая асимптот не имеет. Далее, находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\sin^2 t\cos t. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Эти производные обращаются в нуль при $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$. Определяем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t. \qquad (3')$$

На основании формул (2′), (3′) составляем следующую таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x ($y = f(x)$)
$0 < t < \pi/2$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	$-$	убывает
$\pi/2 < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	$+$	возрастает
$\pi < t < 3\pi/2$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	убывает
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	возрастает

Из таблицы следует, что уравнения (1′) определяют две непрерывные функции вида $y = f(x)$, при $0 \leqslant t \leqslant \pi$ будет $y \geqslant 0$ (см. две первые строчки таблицы), при $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ будет $y \leqslant 0$ (см. две последние строчки таблицы). Из формулы (3′) следует:

$$\lim_{t\to\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 3\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

В этих точках касательная к кривой вертикальна. Далее, находим:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

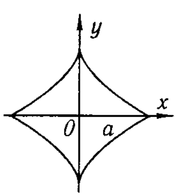


Рис. 135

В этих точках касательная к кривой горизонтальна. Затем находим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ при } 0 < t < \pi \quad \text{— кривая вогнута,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } \pi < t < 2\pi \quad \text{— кривая выпукла.}$$

На основании результатов исследования можем построить кривую (рис. 135). Эта кривая называется *астроидой*.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнениями (*декартов лист*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (a > 0). \qquad (1'')$$

Решение. Обе функции определены при всех значениях t, кроме $t=-1$, при этом

$$\lim_{t\to-1-0} x = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} y = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to-1+0} x = -\infty, \qquad \lim_{t\to-1+0} y = +\infty.$$

Заметим, далее, что

$$x=0,\ y=0 \text{ при } t=0,$$
$$x\to 0,\ y\to 0 \text{ при } t\to+\infty,$$
$$x\to 0,\ y\to 0 \text{ при } t\to-\infty.$$

Найдем $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{2''}$$

Для параметра t получаем следующие четыре критических значения:

$$t_1=-1, \quad t_2=0, \quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Далее, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \tag{3''}$$

На основании формул (1″), (2″), (3″) составляем таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x $(y=f(x))$
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	$-$	убывает
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	$-$	убывает
$0<t<1/\sqrt[3]{2}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	$+$	возрастает
$1/\sqrt[3]{2}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	$-$	убывает
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	$+$	возрастает

Из формулы (3″) находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}} = 0, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}} = \infty.$$

Следовательно, начало координат кривая пересекает дважды: с касательной, параллельной оси Ox, и с касательной, параллельной оси Oy.

Далее,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \infty \quad \text{при} \quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (x=a\sqrt[3]{4},\ y=a\sqrt[3]{2}).$$

В этой точке касательная к кривой вертикальна.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{при} \quad t = \sqrt[3]{2} \quad (x = a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4}).$$

В этой точке касательная к кривой горизонтальна. Исследуем вопрос о существовании асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$= \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right] = \lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Следовательно, прямая $y = -x - a$ является асимптотой ветви кривой при

$$x \to +\infty.$$

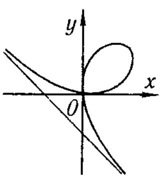


Рис. 136

Аналогичным образом найдем:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-kx) = -a.$$

Таким образом, найденная прямая является асимптотой и для ветви кривой при $x \to -\infty$.

На основании проведенного исследования строим кривую (рис. 136).

Некоторые вопросы, связанные с исследованием кривых, будут дополнительно рассмотрены в главе VIII, § 19 «Особые точки кривой».

Упражнения к главе V

Найти экстремумы функций: **1.** $y = x^2 - 2x + 3$. *Отв.* $y_{\min} = 2$ при $x = 1$. **2.** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{7}{3}$ при $x = 1$, $y_{\min} = 1$ при $x = 3$. **3.** $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. *Отв.* $y_{\max} = 10$ при $x = 1$, $y_{\min} = -22$ при $x = 5$. **4.** $y = -x^4 + 2x^2$. *Отв.* $y_{\max} = 1$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.** $y = x^4 - 8x^2 + 2$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = -14$ при $x = \pm 2$. **6.** $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. *Отв.* Максимум при $x = -4$ и $x = 3$, минимум при $x = -3$ и $x = 4$. **7.** $y = 2-(x-1)^{2/3}$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 1$. **8.** $y = 3-2(x+1)^{1/3}$. *Отв.* Нет ни максимума, ни минимума. **9.** $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. *Отв.* Минимум при $x = \sqrt{2}$, максимум при $x = -\sqrt{2}$. **10.** $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. *Отв.* Максимум при $x = \frac{12}{5}$. **11.** $y = 2e^x + e^{-x}$. *Отв.* Минимум при $x = -\frac{\ln 2}{2}$. **12.** $y = \frac{x}{\ln x}$. *Отв.* $y_{\min} = e$ при $x = e$. **13.** $y = \cos x + \sin x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \pi/4$. **14.** $y = \sin 2x - x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* Максимум при $x = \pi/6$, минимум при $x = -\pi/6$. **15.** $y = x + \operatorname{tg} x$. *Отв.* Нет ни максимума, ни минимума. **16.** $y = e^x \sin x$. *Отв.* Минимум при $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$, максимум при

$x = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$. **17.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$. *Отв.* Максимум при $x = 0$; два минимума при $x = -1$ и при $x = 1$. **18.** $y = (x-2)^3(2x+1)$. *Отв.* $y_{\min} \approx -8{,}24$ при $x = 1/8$. **19.** $y = x + \frac{1}{x}$. *Отв.* Минимум при $x = 1$; максимум при $x = -1$. **20.** $y = x^2(a-x)^2$. *Отв.* $y_{\max} = a^4/16$ при $x = a/2$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$. **21.** $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$. *Отв.* Максимум при $x = \frac{a^2}{a-b}$; минимум при $x = \frac{a^2}{a+b}$. **22.** $y = x + \sqrt{1-x}$. *Отв.* $y_{\max} = 5/4$ при $x = 3/4$; $y_{\min} = 1$ при $x = 1$. **23.** $y = x\sqrt{1-x}$ $(x \leqslant 1)$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ при $x = \frac{2}{3}$. **24.** $y = \frac{x}{1+x^2}$. *Отв.* Минимум при $x = -1$; максимум при $x = 1$. **25.** $y = x\ln x$. *Отв.* Минимум при $x = 1/e$. **26.** $y = x\ln^2 x$. *Отв.* $y_{\max} = 4e^{-2}$ при $x = e^{-2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$. **27.** $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Функция возрастает. **28.** $y = \sin 3x - 3\sin x$. *Отв.* Минимум при $x = \pi/2$; максимум при $x = 3\pi/2$. **29.** $y = 2x + \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Нет экстремумов. **30.** $y = \sin x \cos^2 x$. *Отв.* Минимум при $x = \pi/2$; два максимума: при $x = \arccos\sqrt{2/3}$ и при $x = \arccos(-\sqrt{2/3})$. **31.** $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* Максимум при $x = (4m+1)\pi/2$; минимум при $x = (4m+3)\pi/2$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках: **32.** $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 2$ при $x = \pm 1$, наименьшее значение $y = -25$ при $x = \pm 2$. **33.** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 5)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 23/3$ при $x = 5$, наименьшее значение $y = -13/3$ при $x = -1$. **34.** $y = \frac{x-1}{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 3/5$ при $x = 4$, наименьшее значение $y = -1$ при $x = 0$. **35.** $y = \sin 2x - x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = \pi/2$ при $x = -\pi/2$, наименьшее значение $y = -\pi/2$ при $x = \pi/2$.

36. Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов? *Отв.* $a/6$.

37. Доказать, что из всех прямоугольников, которые могут быть вписаны в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат. Показать также, что у квадрата и периметр будет наибольший.

38. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

39. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, имеющей гипотенузой отрезок h. *Отв.* Длина каждого катета равна $h/\sqrt{2}$.

40. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $2R/\sqrt{3}$.

41. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который может быть вписан в данный шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $R\sqrt{2}$.

42. Найти высоту прямого конуса с наименьшим объемом, описанного около данного шара радиуса R. *Отв.* Высота равна $4R$ (объем конуса равен двум объемам шара).

43. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каковы должны быть размеры резервуара емкостью в 32 *л*, чтобы выкладка требовала наименьшего количества свинца? *Отв.* Высота 0,2 *м*, сторона основания 0,4 *м* (т.е. сторона основания должна быть вдвое больше высоты).

44. Кровельщик желает сделать открытый желоб наибольшей вместимости, у которого дно и бока были бы шириной 10 *см* и бока были бы одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть ширина желоба наверху? *Отв.* 20 *см*.

45. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раза больше радиуса основания.

46. Требуется изготовить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют данную толщину. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала? *Отв.* Если R — внутренний радиус основания, v — внутренний объем цилиндра, то $R = \sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Требуется построить котел, состоящий из цилиндра, завершенного двумя полусферами, со стенками постоянной толщины так, чтобы при данном объеме v он имел наименьшую наружную поверхность. *Отв.* Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $R = \sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Построить равнобочную трапецию, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр; угол при основании трапеции равен α. *Отв.* Длина боковой стороны равна $\sqrt{S/\sin\alpha}$.

49. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема. *Отв.* Высота призмы равна $2R/\sqrt{3}$.

50. Около полушара радиуса R требуется описать конус наименьшего объема; плоскость основания конуса совпадает с плоскостью основания полушара; найти высоту конуса. *Отв.* Высота конуса равна $R\sqrt{3}$.

51. Описать около данного цилиндра радиуса r прямой конус наименьшего объема, полагая, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. *Отв.* Радиус основания конуса равен $3r/2$.

52. Из листа, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. *Отв.* Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Из всех круглых цилиндров, вписанных в данный куб с ребром a таким образом, что оси их совпадают с диагональю куба, а окружности оснований касаются его граней, найти наибольший по объему. *Отв.* Высота цилиндра равна $a\sqrt{3}/3$; радиус основания равен $a/\sqrt{6}$.

54. В прямоугольной системе координат дана точка (x_0, y_0), лежащая в первом квадрате. Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала с положительными направлениями осей координат треугольник наименьшей площади. *Отв.* Прямая отсекает на осях отрезки $2x_0$ и $2y_0$, т.е. имеет уравнение $\dfrac{x}{2x_0} + \dfrac{y}{2y_0} = 1$.

55. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка на расстоянии a от вершины; найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой. *Отв.* $x = a - p$.

56. Принимая, что прочность бруска с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и кубу высоты, найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 *см*. *Отв.* Ширина равна 8 *см*.

57. Миноносец стоит на якоре в 9 *км* от ближайшей точки берега; с миноносца надо послать гонца в военный лагерь, расположенный в 15 *км*, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега. Если гонец может делать пешком по 5 *км* в час, а на веслах по 4 *км* в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы поспеть в лагерь в кратчайшее время. *Отв.* Ь 3 *км* от лагеря.

58. Точка перемещается прямолинейно по плоскости в среде, расположенной вне линии MN — со скоростью v_1, а по линии MN — со скоростью v_2. По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B, расположенную на линии MN? Расстояние точки A от линии MN равно h, расстояние проекции α точки A на линию MN от B равно a. *Отв.* Если ABC — путь точки, то $\frac{|\alpha C|}{|AC|} = \frac{v_1}{v_2}$ при $\frac{|\alpha B|}{|AB|} \geqslant \frac{v_1}{v_2}$ и $|\alpha C| = |\alpha B|$ при $\frac{|\alpha B|}{|AB|} < \frac{v_1}{v_2}$.

59. Груз w подымают рычагом, причем сила F приложена к одному концу, а точка опоры находится на другом конце рычага. Если груз привешен к точке, находящейся на расстоянии a сантиметров от точки опоры, а стержень рычага весит v граммов на каждый сантиметр длины, то какова должна быть длина рычага, чтобы сила, потребная для поднятия груза, была наименьшей? *Отв.* $x = \sqrt{2aw/v}$ *см.*

60. При n измерениях неизвестной величины x получены отсчеты: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показать, что сумма квадратов погрешностей $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ будет наименьшей, если за x принять число $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$.

61. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала превышает вдвое его высоту.

Определить точки перегиба и интервалы выпуклости вогнутости кривых: **62.** $y = x^5$. *Отв.* При $x < 0$ кривая выпукла; при $x > 0$ кривая вогнута; при $x = 0$ точка перегиба. **63.** $y = 1 - x^2$. *Отв.* Кривая всюду выпукла. **64.** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. *Отв.* При $x = 1$ точка перегиба. **65.** $y = (x - b)^3$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба. **66.** $y = x^4$. *Отв.* Кривая всюду вогнута. **67.** $y = (x^2 + 1)^{-1}$. *Отв.* При $x = \pm 1/\sqrt{3}$ точки перегиба. **68.** $y = \operatorname{tg} x$. *Отв.* При $x = n\pi$ точки перегиба. **69.** $y = xe^{-x}$. *Отв.* При $x = 2$ точка перегиба. **70.** $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба. **71.** $y = a - \sqrt[3]{(x - b)^2}$. *Отв.* Кривая не имеет точек перегиба.

Найти асимптоты следующих кривых: **72.** $y = \frac{1}{x - 1}$. *Отв.* $x = 1$; $y = 0$. **73.** $y = \frac{1}{(x + 2)^3}$. *Отв.* $x = -2$; $y = 0$. **74.** $y = c + \frac{a^3}{(x - b)^2}$. *Отв.* $x = b$, $y = c$. **75.** $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. *Отв.* $x = 0$; $y = 0$. **76.** $y = \ln x$. *Отв.* $x = 0$. **77.** $y^3 = 6x^2 + x^3$. *Отв.* $y = x + 2$. **78.** $y^3 = a^3 - x^3$. *Отв.* $y + x = 0$. **79.** $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Отв.* $x = 2a$. **80.** $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. *Отв.* $x = 2a$. $y = \pm(x + a)$.

Исследовать функции и построить их графики: **81.** $y = x^4 - 2x + 10$. **82.** $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$. **83.** $y = e^{-\frac{1}{x}}$. **84.** $y = \frac{6x}{1 + x^2}$. **85.** $y = \frac{4 + x}{x^2}$. **86.** $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. **87.** $y = \frac{x + 2}{x^3}$. **88.** $y = \frac{x^2}{1 + x}$. **89.** $y^2 = x^3 - x$. **90.** $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$. **91.** $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$. **92.** $y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$. **93.** $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$. **94.** $y = xe^{-x}$. **95.** $y = x^2 e^{-x^2}$. **96.** $y = x - \ln(x + 1)$. **97.** $y = \ln(x^2 + 1)$. **98.** $y = \sin 3x$. **99.** $y = x + \sin x$. **100.** $y = x \sin x$. **101.** $y = e^{-x} \sin x$. **102.** $y = \ln \sin x$. **103.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$ **105.** $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ **107.** $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Дополнительные задачи

Найти асимптоты линий: **108.** $y = \dfrac{x^2+1}{1+x}$. *Отв.* $x = -1$; $y = x - 1$. **109.** $y = x + e^{-x}$. *Отв.* $y = x$. **110.** $2y(x+1)^2 = x^3$. *Отв.* $x = -1$; $y = \dfrac{1}{2}x - 1$. **111.** $y^3 = a^3 - x^2$. *Отв.* Асимптот нет. **112.** $y = e^{-2x}\sin x$. *Отв.* $y = 0$. **113.** $y = e^{-x}\sin 2x + x$. *Отв.* $y = x$. **114.** $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$. *Отв.* $x = -\dfrac{1}{e}$; $y = x + \dfrac{1}{e}$. **115.** $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* $x = 0$; $y = x$. **116.** $x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$. *Отв.* $y = \pm\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Исследовать функции и построить их графики: **117.** $y = |x|$. **118.** $y = \ln|x|$. **119.** $y^2 = x^3 - x$. **120.** $y = (x+1)^2(x-2)$. **121.** $y = x + |x|$. **122.** $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. **123.** $y = x^2\sqrt{x+1}$. **124.** $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$. **125.** $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x$. **126.** $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$. **127.** $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **128.** $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$. **129.** $y = x\ln x$. **130.** $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. **131.** $y = |\sin 3x|$. **132.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$. **133.** $y = x\,\mathrm{arctg}\,x$. **134.** $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$. **135.** $y = e^{-2x}\sin 3x$. **136.** $y = |\sin x| + x$. **137.** $y = \sin(x^2)$. **138.** $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. **139** $y = \dfrac{x+|x|}{2}$. **140.** $y = \dfrac{x-|x|}{2}$. **141.** $y = \sin\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right) - \dfrac{x-|x|}{2}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. **142.** $y = \cos\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right) - \dfrac{x+|x|}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$. **143.** $y = \dfrac{1}{2}(3x + |x|) + 1$. **144.** $y = \dfrac{1}{2}[3(x-1) + |x-1|] + 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

Глава VI
КРИВИЗНА КРИВОЙ

§ 1. Длина дуги и ее производная

Пусть дуга кривой M_0M (рис. 137) есть график функции

$$y = f(x),$$

определенной на интервале (a, b). Определим длину дуги кривой. Возьмем на кривой AB точки

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots,\ M_{n-1},\ M.$$

Соединив взятые точки отрезками, получим ломаную линию

$$M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}M_i\ldots M_{n-1}M,$$

вписанную в дугу M_0M. Обозначим длину этой ломаной через P_n.

Длиной дуги M_0M называется предел (обозначим его через s), к которому стремится длина ломаной, при стремлении к нулю наибольшей из длин отрезков ломаной $M_{i-1}M_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек ломаной $M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}M_i\ldots M_{n-1}M$.

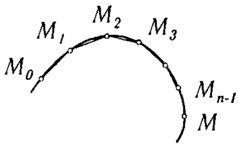


Рис. 137

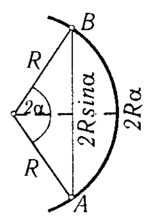


Рис. 138

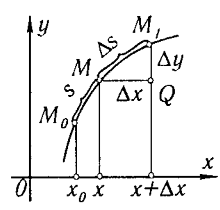


Рис. 139

Отметим, что это определение длины дуги произвольной кривой аналогично определению длины окружности.

В главе XII будет доказано, что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то дуга кривой $y = f(x)$, заключенная между точками $[a; f(a)]$ и $[b; f(b)]$, имеет вполне определенную длину, причем будет указан способ вычисления этой длины. Там же будет установлено (как следствие), что в указанных условиях отношение длины любой дуги этой кривой к длине стягивающей ее хорды стремится к 1, когда длина хорды стремится к 0:

$$\lim_{M_0M\to 0} \frac{\text{дл.}\,\smile{M_0M}}{\text{дл.}\overline{M_0M}} = 1.$$

Эта теорема легко может быть доказана для окружности*), однако в общем случае мы пока примем ее без доказательства.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть мы имеем на плоскости кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка кривой, а $M(x, y)$ — переменная точка этой кривой. Обозначим через s длину дуги M_0M (рис. 139).

При изменении абсциссы x точки M длина дуги s будет меняться, т.е. s есть функция x. Найдем производную s по x.

Дадим x приращение Δx. Тогда дуга s получит приращение $\Delta s = \text{дл.}\,\smile{MM_1}$. Пусть $\overline{MM_1}$ — хорда, стягивающая эту дугу. Для того, чтобы найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$, поступим следующим образом: из ΔMM_1Q находим: $\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Помножим и разделим левую часть на Δs^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Разделим все члены равенства на Δx^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Найдем предел левой и правой частей при $\Delta x \to 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{\overline{MM_1}\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ и что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1}$$

Для *дифференциала дуги* получим следующее выражение:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{2}$$

или**)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{2'}$$

---

*) Рассмотрим дугу AB, центральный угол которой равен 2α (рис. 138). Длина этой дуги равна $2R\alpha$ (R — радиус окружности), а длина стягивающей ее хорды равна $2R\sin\alpha$. Поэтому $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\text{дл.}\,\smile{AB}}{\text{дл.}\overline{AB}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2R\alpha}{2R\sin\alpha} = 1$.

**) Строго говоря, формула (2′) верна лишь для того случая, когда $dx > 0$. Если же $dx < 0$, то $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Поэтому в общем случае эту формулу правильнее записать так: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Мы получили выражение дифференциала длины дуги для того случая, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$. Однако формула (2′) сохраняется и в том случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями. Если кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt,$$

и выражение (2′) принимает вид

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

§ 2. Кривизна

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности.

Пусть мы имеем кривую, которая не пересекает самое себя и имеет определенную касательную в каждой точке. Проведем касательные к кривой в каких-нибудь двух ее точках A и B и обозначим через α угол, образованный этими касательными, или — точнее — угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B (рис. 140). Этот угол называется *углом смежности* дуги AB. У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности больше (рис. 140 и 141).

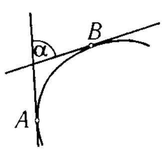


Рис. 140

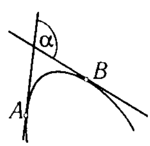


Рис. 141

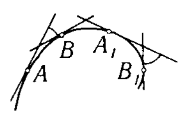


Рис. 142

С другой стороны, рассматривая дуги различной длины, мы не можем оценить степень их искривленности только соответствующим углом смежности. Отсюда следует, что полной характеристикой изогнутости кривой будет ***отношение*** угла смежности к длине соответствующей дуги.

Определение 1. *Средней кривизной* $K_{\text{ср}}$ *дуги* $\overset{\smile}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\overset{\smile}{AB}}.$$

Для одной и той же кривой средняя кривизна ее различных частей (дуг) может быть различной; так, например, для кривой, показанной на рис. 142, средняя кривизна дуги $\overset{\smile}{AB}$ не равна средней кривизне дуги $\overset{\smile}{A_1B_1}$, хотя длины этих дуг равны между собой. Более того, вблизи различных точек кривая искривлена по-разному. Для того чтобы охарактеризовать степень искривленности данной линии в непосредственной близости к данной точке A, введем понятие кривизны кривой в данной точке.

Определение 2. *Кривизной* K_A *линии* в данной точке A называется предел средней кривизны дуги $\overset{\smile}{AB}$, когда длина этой дуги стремится к нулю (т.е. когда точка B приближается к точке A:*)

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{\overset{\smile}{AB} \to 0} \frac{\alpha}{\overset{\smile}{AB}}.$$

Пример. Для окружности радиуса r: 1) определить среднюю кривизну дуги AB, соответствующей центральному углу α (рис. 143); 2) определить кривизну в точке A.

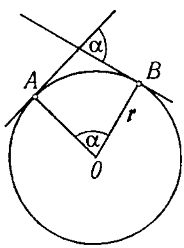


Рис. 143

Решение. 1) Очевидно, что угол смежности дуги $\overset{\smile}{AB}$ равен α, длина дуги равна αr. Следовательно,

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\alpha r},$$

или

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{r}.$$

2) Кривизна в точке A равна

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, средняя кривизна дуги окружности радиуса r не зависит от длины и положения дуги, для всех дуг она равна $1/r$. Кривизна окружности в любой ее точке также не зависит от выбора этой точки и равна $1/r$.

Замечание. Отметим, что для произвольной кривой кривизна в различных ее точках, вообще говоря, будет различная. Это мы увидим ниже.

§ 3. Вычисление кривизны

Выведем формулу для вычисления кривизны данной линии в любой ее точке $M(x, y)$. При этом мы будем предполагать, что кривая задана в декартовой системе координат уравнением вида

$$y = f(x) \tag{1}$$

и что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Проведем касательные к кривой в точках M и M_1 с абсциссами x и $x + \Delta x$ и обозначим через φ и $\varphi + \Delta\varphi$ углы наклона этих касательных (рис. 144).

Длину дуги $\overset{\smile}{M_0 M}$, отсчитываемую от некоторой постоянной точки M_0, обозначим через s; тогда $\Delta s = \overset{\smile}{M_0 M_1} - \overset{\smile}{M_0 M}$, а $|\Delta s| = \overset{\smile}{M M_1}$.

---

*) Мы предполагаем, что величина предела не зависит от того, с какой стороны от точки A мы берем переменную точку B на кривой.

Как непосредственно видно из рис. 144, угол смежности, соответствующий дуге $\overset{\smile}{MM_1}$, равен абсолютной величине*) разности углов φ и $\varphi + \Delta\varphi$, т.е. равен $|\Delta\varphi|$.

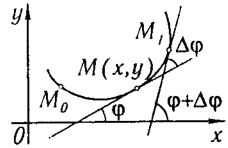


Рис. 144

Согласно определению средней кривизны кривой на участке MM_1 имеем:

$$K_{\text{ср}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Чтобы получить ***кривизну в точке*** M, нужно найти предел полученного выражения при условии, что длина дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Так как величины φ и s обе зависят от x (являются функциями от x), то, следовательно, φ можно рассматривать как функцию от s. Мы можем считать, что эта функция задана параметрически с помощью параметра x. Тогда

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

и, следовательно,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \tag{2}$$

Для вычисления $\frac{d\varphi}{ds}$ используем формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Чтобы выразить производную $\frac{d\varphi}{dx}$ через функцию $y = f(x)$, замечаем, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ и, следовательно,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Что же касается производной $\frac{ds}{dx}$, то еще в § 1 гл. VI мы нашли

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

---

*) Для кривой, изображеиной на рис. 144, очевидно, что $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, так как $\Delta\varphi > 0$.

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

или, так как $K=\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$, окончательно получаем:

$$K=\frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{3}$$

Следовательно, в любой точке кривой, где существует и непрерывна вторая производная $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, можно вычислить кривизну. Для ее вычисления служит формула (3). Заметим, что при вычислении кривизны кривой следует брать только арифметическое (т.е. положительное) значение корня в знаменателе, так как кривизна линии по определению не может быть отрицательной.

Пример 1. Определить кривизну параболы $y=2px$:
а) в ее произвольной точке $M(x,y)$;
б) в точке $M_1(0,0)$;
в) в точке $M_2(p/2,p)$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции $y=\sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{2px}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), получим:

а) $K=\dfrac{p^2}{(2px+p^2)^{3/2}}$;

б) $K_{x=0,y=0}=1/p$;

в) $K_{x=p/2,y=p}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}p}$.

Пример 2. Определить кривизну прямой $y=ax+b$ в ее произвольной точке (x,y).

Решение.

$$y'=a,\quad y''=0.$$

Обращаясь к формуле (3), получаем:

$$K=0.$$

Таким образом, прямая представляет собой «линию нулевой кривизны». Этот же результат легко можно получить непосредственно из определения кривизны.

§ 4. Вычисление кривизны линии, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрически:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t).$$

Тогда (см. § 24 гл. III):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3) предыдущего параграфа, получаем:

$$K=\frac{|\psi''\varphi'-\psi'\varphi''|}{[\varphi'^2+\psi'^2]^{3/2}}.\tag{1}$$

Пример. Определить кривизну циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

в ее произвольной точке (x,y).

Решение.

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\sin t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), находим:

$$K=\frac{|a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t]^{3/2}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}}=$$
$$=\frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. Вычисление кривизны линии, заданной уравнением в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением вида

$$\rho=f(\theta).\tag{1}$$

Напишем формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\theta,\\ y&=\rho\sin\theta.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Если в эти формулы подставить вместо ρ его выражение через θ, т.е. $f(\theta)$, то получим:

$$\left.\begin{aligned}x&=f(\theta)\cos\theta,\\ y&=f(\theta)\sin\theta.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Последние уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой (1), причем параметром является θ.

Тогда

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta-\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta.$$

Подставляя последние выражения в формулу (1) предыдущего параграфа, получаем формулу для вычисления кривизны кривой в полярных координатах:

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Пример. Определить кривизну спирали Архимеда $\rho = a\theta$ ($a > 0$) в произвольной точке (рис. 145).

Решение.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0.$$

Следовательно,

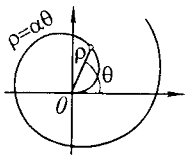


Рис. 145

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}.$$

Заметим, что при больших значениях θ имеют место приближенные равенства: $\dfrac{\theta^2+2}{\theta^2} \approx 1$, $\dfrac{\theta^2+1}{\theta^2} \approx 1$; поэтому, заменяя в предыдущей формуле θ^2+2 на θ^2 и θ^2+1 на θ^2, получаем приближенную формулу (для больших значений θ):

$$K \approx \frac{1}{a}\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

Таким образом, при больших значениях θ спираль Архимеда имеет приблизительно ту же кривизну, что и окружность радиуса $a\theta$.

§ 6. Радиус и круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Определение. Величина R, обратная кривизне K линии в данной точке M, называется *радиусом кривизны* этой линии в рассматриваемой точке:

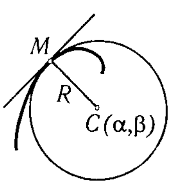


Рис. 146

$$R = 1/K, \tag{1}$$

или

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{2}$$

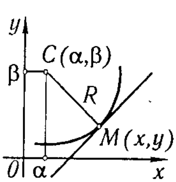


Рис. 147

Построим в точке M нормаль к кривой (рис. 146), направленную в сторону вогнутости кривой, и отложим на этой нормали отрезок MC, равный радиусу R кривизны кривой в точке M. Точка C называется *центром кривизны* данной кривой в точке M, круг радиуса R с центром в точке C (проходящей через точку M) называется *кругом кривизны* данной кривой в точке M.

Из определения круга кривизны следует, что в данной точке кривизна кривой и кривизна круга кривизны равны между собой.

Выведем формулы, определяющие координаты центра кривизны.

Пусть кривая задана уравнением

$$y = f(x). \tag{3}$$

Зафиксируем на кривой точку $M(x, y)$ и определим координаты α и β центра кривизны, соответствующего этой точке (рис. 147). Для этого напишем уравнение нормали к кривой в точке M:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \tag{4}$$

(Здесь X и Y — текущие координаты точки нормали.)

Так как точка $C(\alpha, \beta)$ лежит на нормали, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4):

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \tag{5}$$

Далее, точка $C(\alpha, \beta)$ находится от точки $M(x, y)$ на расстоянии, равном радиусу кривизны R:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{6}$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), определим α и β:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2, \quad (\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2}R^2;$$

отсюда

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}R,$$

а так как $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, то

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Чтобы решить вопрос о том, верхние или нижние знаки следует брать в последних формулах, нужно рассмотреть случай $y'' > 0$ и случай $y'' < 0$. Если $y'' > 0$, то в этой точке кривая вогнута и, следовательно, $\beta > y$ (рис. 147) и поэтому следует брать нижние знаки. Учитывая, что в этом случае $|y''| = y''$, формулы координат центра запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y'}, \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Аналогично можно показать, что формулы (7) будут справедливы и в случае $y'' < 0$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то координаты центра кривизны легко получить из формул (7), подставляя в них вместо y' и y'' их выражения через параметр

$$y' = \frac{y'_t}{x'}, \quad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3}.$$

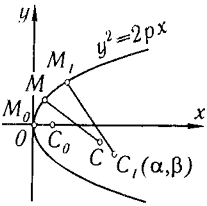


Рис. 148

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Пример 1. Определить координаты центра кривизны параболы

$$y^2 = 2px$$

а) в произвольной точке $M(x,y)$; б) в точке $M_0(0,0)$; в) в точке $M_1(p/2,p)$.

Решение. Подставляя значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в формулу (7), получим (рис. 148):

а) $\alpha = 3x+p$, $\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;

б) при $x=0$ находим: $\alpha = p$, $\beta = 0$;

в) при $x = p/2$ имеем: $\alpha = 5p/2$, $\beta = -p$.

Если в точке $M_1(x,y)$ данной линии кривизна отлична от нуля, то этой точке соответствует вполне определенный центр кривизны $C_1(\alpha,\beta)$. Совокупность всех центров кривизны данной линии образует некоторую новую линию, называемую ***эволютой*** по отношению к первой.

Таким образом, геометрическое место центров кривизны данной линии называется ее *эволютой*. По отношению к своей эволюте данная линия называется *эвольвентой* или *инволютой* (или *разверткой*).

Если данная кривая определяется уравнением $y = f(x)$, то уравнения (7) можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты с параметром x. Исключая из этих уравнений параметр x (если это возможно), получим непосредственную зависимость между текущими координатами эволюты α и β. Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то уравнения (7′) дают параметрические уравнения эволюты (так как величины x, y, x', y', x'', y'' являются функциями от t).

Пример 2. Найти уравнение эволюты параболы

$$y^2 = 2px.$$

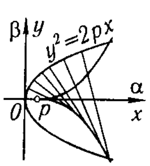


Рис. 149

Решение. На основании примера 1 имеем для любой точки (x,y) параболы:

$$\alpha = 3x+p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Исключая из этих уравнений параметр x, получим:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Это — уравнение полукубической параболы (рис. 149).

Пример 3. Найти уравнение эволюты эллипса, заданного параметрическими уравнениями:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Решение. Вычисляем производные от x и y по t:

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t,$$
$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t.$$

Подставляя выражения производных в формулы (7′), получим:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} =$$
$$= a\cos t - a\cos t\sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Таким образом,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Аналогично получаем:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t.$$

Исключив параметр t, получаем уравнение эволюты эллипса в виде

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Здесь α и β — текущие координаты эволюты (рис. 150).

Пример 4. Найти параметрические уравнения эволюты циклоиды

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

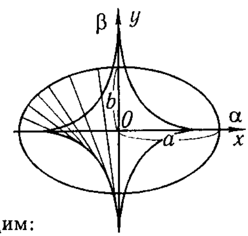


Рис. 150

Решение.

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a\sin t,$$
$$x'' = a\sin t, \quad y'' = a\cos t.$$

Подставив полученные выражения в формулу (7′), находим:

$$\alpha = a(t + \sin t),$$
$$\beta = -a(1 - \cos t).$$

Сделаем преобразование переменных, положив

$$\alpha = \xi - \pi a,$$
$$\beta = \eta - 2a,$$
$$t = \tau - \pi;$$

тогда уравнения эволюты примут вид

$$\xi = a(\tau - \sin\tau), \quad \eta = a(1 - \cos\tau);$$

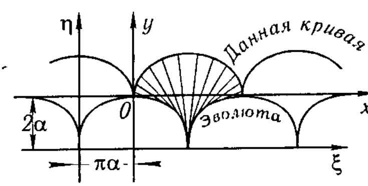


Рис. 151

они определяют в координатах ξ, η циклоиду с тем же производящим кругом радиуса a. Таким образом, эволютой циклоиды является такая же циклоида, но смещенная по оси Ox на величину $-\pi a$ и по оси Oy на величину $-2a$ (рис. 151).

§ 7. Свойства эволюты

Теорема 1. *Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.*

Доказательство. Угловой коэффициент касательной к эволюте, определяемый параметрическими уравнениями (7) предыдущего параграфа, равен

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{\dfrac{d\beta}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dx}}.$$

Заметив, что (в силу тех же уравнений (7))

$$\frac{d\alpha}{dx}=-\frac{3y''^2y'^2-y'y'''-y'^3y'''}{y''^2}=-y'\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2},\tag{1}$$

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{3y''^2y'-y'''-y'^2y'''}{y''^2},\tag{2}$$

получаем соотношение

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{y'}.$$

Но y' есть угловой коэффициент касательной к кривой в соответствующей точке, поэтому из полученного соотношения следует, что касательная к кривой и касательная к ее эволюте в соответствующей точке взаимно перпендикулярны, т.е. нормаль к кривой является касательной к эволюте.

Теорема 2. *Если на некотором участке M_1M_2 кривой радиус кривизны изменяется монотонно (т.е. либо только возрастает, либо только убывает), то приращение длины дуги эволюты на этом участке кривой равно (по абсолютной величине) соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.*

Доказательство. На основании формулы (2′) § 1 гл. VI имеем:

$$ds^2=d\alpha^2+d\beta^2,$$

где ds — дифференциал длины дуги эволюты; отсюда

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Подставляя сюда выражения (1) и (2), получим:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2.\tag{3}$$

Найдем, далее, $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Так как

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},\quad\text{то } R^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, получим после соответствующих преобразований

$$2R\frac{dR}{dx}=\frac{2(1+y'^2)^2(3y'y''^2-y'''-y'^2y''')}{(y'')^3}.$$

Деля обе части равенства на $2R=\dfrac{2(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, получим

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(1+y'^2)^{1/2}(3y'y''^2-y'''-y'^2y''')}{y''^2}.$$

Возводя в квадрат, получим:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \tag{4}$$

Сравнивая равенства (3) и (4), находим:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{dR}{dx} = \mp\frac{ds}{dx}.$$

По условию $\frac{dR}{dx}$ не меняет знак (R только возрастает или только убывает), следовательно, и $\frac{ds}{dx}$ не меняет знак. Примем для определенности $\frac{dR}{dx} \leqslant 0$, $\frac{ds}{dx} \geqslant 0$ (что соответствует рис. 152). Следовательно, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$.

Пусть точка M_1 имеет абсциссу x_1, а M_2 — абсциссу x_2. Применим теорему Коши к функциям $s(x)$ и $R(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

где ξ — число, заключенное между x_1 и x_2 ($x_1 < \xi < x_2$).

Введем обозначения (рис. 152):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Тогда $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, или $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Но это значит, что

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

Совершенно так же доказывается это равенство и при возрастании радиуса кривизны.

Мы доказали теоремы 1 и 2 для того случая, когда кривая задана уравнением в явном виде $y = f(x)$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то эти теоремы остаются в силе, причем их доказательство проводится совершенно аналогично.

Замечание. Укажем следующий простой механический способ для построения кривой (эвольвенты) по ее эволюте.

Пусть гибкая линейка согнута по форме эволюты C_0C_5 (рис. 153). Предположим, что нерастяжимая нить, одним концом укрепленная в точке C_0, огибает эту линейку. Если мы будем эту нить развертывать, оставляя ее все время натянутой, то конец нити опишет кривую M_5M_0 — эвольвенту. Отсюда происходит и название «эвольвента» — развертка. Доказательство того, что полученная кривая действительно является эвольвентой, может быть проведено с помощью установленных выше свойств эволюты.

Отметим, что одной эволюте соответствует бесчисленное множество различных эвольвент (рис. 153).

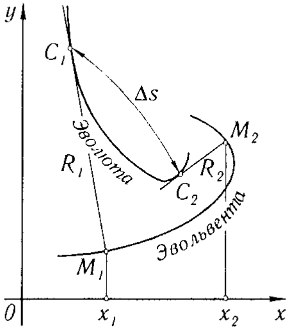


Рис. 152

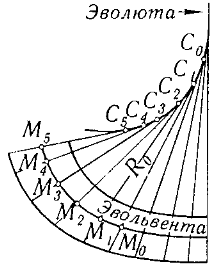


Рис. 153

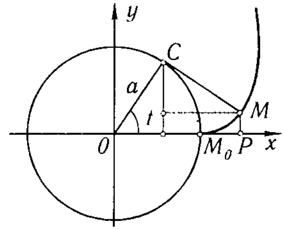


Рис. 154

Пример. Пусть имеем окружность радиуса a (рис. 154). Возьмем ту из эвольвент этой окружности, которая проходит через точку $M_0(a, 0)$.

Учитывая, что $CM = \smile{CM_0} = at$, легко получить уравнения эвольвенты окружности:

$$OP = x = a(\cos t + t \sin t),$$
$$PM = y = a(\sin t - t \cos t).$$

Отметим, что профиль зуба зубчатого колеса имеет чаще всего форму эвольвенты круга.

§ 8. Приближенное вычисление действительных корней уравнения

Методы исследования поведения функции дают возможность находить приближенные значения корней уравнения

$$f(x) = 0.$$

Если данное уравнение есть алгебраическое уравнение*) первой, второй, третьей или четвертой степени, то существуют формулы, позволяющие выразить корни уравнения через его коэффициенты с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Для уравнений выше четвертой степени таких формул, вообще говоря, не существует. Если коэффициенты любого уравнения, алгебраического или неалгебраического (трансцендентного), не буквенные, а числовые, то корни уравнения могут быть вычислены приближенно с любой степенью точности. Отметим, что даже в тех случаях, когда корни алгебраического уравнения выражаются через радикалы,

---

*) Уравнение $f(x) = 0$ называется *алгебраическим*, если $f(x)$ есть многочлен (см. § 6 гл. VII).

на практике иногда целесообразно применять приближенный метод решения уравнения. Ниже будут изложены некоторые методы приближенного вычисления корней уравнения.

1. **Способ хорд.** Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная дважды дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. Допустим, что путем исследования функции $y = f(x)$ внутри отрезка $[a, b]$ мы выделим отрезок $[x_1, x_2]$ такой, что внутри этого отрезка функция — монотонная (или возрастающая, или убывающая), а на концах его — значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разных знаков. Примем для определенности, что $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (рис. 155). Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, то ее график пересечет ось Ox в какой-либо одной точке между x_1 и x_2.

Проведем хорду AB, соединяющую концы кривой $y = f(x)$, соответствующие абсциссам x_1 и x_2. Абсцисса a_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и будет приближенным значением корня (рис. 156). Для разыскания этого приближенного значения напишем уравнение прямой AB, проходящей через две данные точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$: $\dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Так как $y = 0$ при $x = a_1$, то, следовательно, $\dfrac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \dfrac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1}$, откуда

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \tag{2}$$

Или после преобразования

$$a_1 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \tag{2'}$$

Чтобы получить более точное значение корня, определяем $f(a_1)$. Если $f(a_1) < 0$, то повторяем тот же прием, применяя формулу (2′) к отрезку $[a_1, x_2]$. Если $f(a_1) > 0$, то применяем это формулу к отрезку $[x_1, a_1]$. Повторяя этот прием несколько раз, мы будем, очевидно, получать все более точные значения корня a_2, a_3 и т.д.

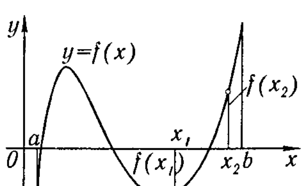


Рис. 155

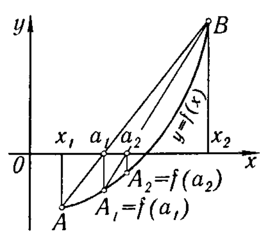


Рис. 156

Пример 1. Найти приближенные значения корней уравнения

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Решение. Найдем, прежде всего, участки монотонности функции $f(x)$. Вычислив производную $f'(x) = 3x^2 - 6$, мы обнаруживаем, что она положительна при $x < -\sqrt{2}$, отрицательна при $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ и снова положительна при $x > \sqrt{2}$ (рис. 157). Итак, функция имеет три участка монотонности, на каждом из которых находится по одному корню.

Для удобства дальнейших вычислений сузим эти участки монотонности (но так, чтобы на каждом участке лежал соответствующий корень). Для этого, подставляя в выражение $f(x)$ наугад те или иные значения x, выделим внутри каждого участка монотонности такие более короткие отрезки, на концах которых функция имеет разные знаки:

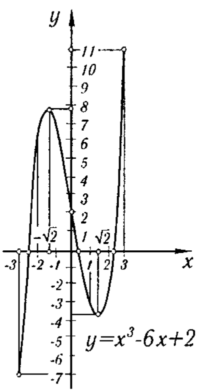


Рис. 157

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 = -3, & f(-3) = -7, \\ x_4 = -2, & f(-2) = 6, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_5 = 2, & f(2) = -2, \\ x_6 = 3, & f(3) = 11. \end{array}\right\}$$

Таким образом, корни находятся в интервалах

$$(-3; -2), \quad (0; 1), \quad (2; 3).$$

Найдем приближенное значение корня в интервале $(0; 1)$; по формуле (2) имеем:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)\,2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как $f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 6 \cdot 0{,}4 + 2 = -0{,}336$, $f(0) = 2$, то, следовательно, корень заключен между 0 и 0,4. Применяя к этому интервалу снова формулу (2), получим следующее приближение:

$$a_2 = 0 - \frac{(0{,}4 - 0) \cdot 2}{-0{,}336 - 2} = \frac{0{,}8}{2{,}336} = 0{,}342 \text{ и т.д.}$$

Аналогичным образом найдем приближенные значения корней в других интервалах.

2. **Способ касательных (способ Ньютона).** Пусть снова $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, причем на отрезке $[x_1, x_2]$ первая производная не меняет своего знака. Тогда в интервале (x_1, x_2) имеется один корень уравнения $f(x) = 0$. Предположим еще, что и вторая производная не меняет своего знака на отрезке $[x_1, x_2]$; этого можно добиться путем уменьшения длины интервала, содержащего корень.

Сохранение знака второй производной на отрезке $[x_1, x_2]$ означает, что кривая либо только выпукла, либо только вогнута на участке $[x_1, x_2]$.

Проведем касательную к кривой в точке B (рис. 158). Абсцисса a_1 точки пересечения касательной с осью Ox будет приближенным значением корня. Чтобы найти эту абсциссу, напишем уравнение касательной в точке B:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

Заметив, что $x = a_1$ при $y = 0$, получим:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{3}$$

Проведя затем касательную в точке $B_1(a_1; f(a_1))$, аналогично находим более точное значение корня a_2. Повторяя этот прием несколько раз, мы можем вычислить приближенное значение корня с любой нужной нам точностью.

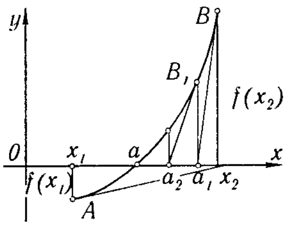


Рис. 158

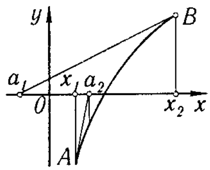


Рис. 159

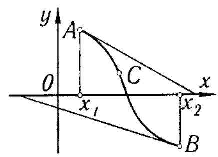


Рис. 160

Отметим следующее обстоятельство. Если бы мы провели касательную к кривой не в точке B, а в точке A, то могло оказаться, что точка пересечения касательной с осью Ox находится вне интервала (x_1, x_2).

Из рис. 158 и 159 следует, что касательную нужно проводить в том конце дуги, в котором знаки функции и ее второй производной совпадают. Так как на отрезке $[x_1, x_2]$ вторая производная, по условию, сохраняет знак, то это совпадение знаков функции и второй производной на одном из концов обязательно имеет место. Это правило остается верным и для случая, когда $f'(x) < 0$. Если касательная проводится в левом конце интервала, то в формуле (3) вместо x_2 нужно подставить x_1:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{3'}$$

В случае, когда внутри интервала (x_1, x_2) есть точка перегиба C, способ касательных может дать приближенное значение корня, лежащее вне интервала (x_1, x_2) (рис. 160).

Пример 2. Применим формулу (3′) к вычислению корня уравнения

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0,$$

заключенного в интервале $(0; 1)$. Имеем:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6)\Big|_{x=0} = -6, \quad f''(x) = 6x \geqslant 0,$$

поэтому по формуле (3′) получаем:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

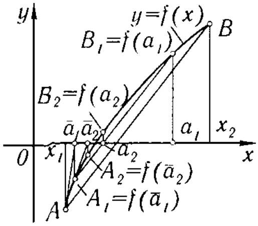


Рис. 161

3. **Комбинированный способ** (рис. 161). Применяя на отрезке $[x_1, x_2]$ одновременно способ хорд и способ касательных, мы получаем две точки a_1 и $\bar{a}_1$, лежащие по разные стороны от искомого корня a (так как $f(a_1)$ и $f(\bar{a}_1)$ имеют разные знаки). Далее, на отрезке $[a_1, \bar{a}_1]$ применяем снова метод хорд и метод касательных. В результате получаем два числа: a_2 и $\bar{a}_2$, еще более близких к значению корня. Продолжаем таким образом до тех пор, пока разность между найденными приближенными значениями не станет меньше, чем требуемая степень точности. Заметим, что при комбинированном методе мы приближаемся к искомому корню одновременно с обеих сторон (т.е. мы находим одновременно как приближенное значение корня с избытком, так и приближенное значение корня с недостатком).

Так, в рассматриваемом нами примере путем подстановки убеждаемся, что $f(0{,}333) > 0$, $f(0{,}342) < 0$. Следовательно, значение корня заключено между найденными приближенными значениями: $0{,}333 < x < 0{,}342$.

Упражнения к главе VI

Найти кривизну кривых в указанных точках: **1.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$. *Отв.* b/a^2 в точке $(0, b)$; a/b^2 в точке $(a, 0)$. **2.** $xy = 12$ в точке $(3, 4)$. *Отв.* $24/125$. **3.** $y = x^3$ в точке (x_1, y_1). *Отв.* $\dfrac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$. **4.** $16y^2 = 4x^4 - x^6$ в точке $(2, 0)$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **5.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ в произвольной точке. *Отв.* $1/(3\sqrt[3]{|axy|})$.

Найти радиус кривизны нижеследующих кривых в указанных точках; вычертить каждую кривую и построить соответствующий круг кривизны. **6.** $y^2 = x^3$ в точке $(4, 8)$. *Отв.* $R = 80\sqrt{10}/3$. **7.** $x^2 = 4ay$ в точке $(0, 0)$. *Отв.* $R = 2a$. **8.** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ в точке (x_1, y_1). *Отв.* $R = \dfrac{(b^4x_1 + a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. **9.** $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$. *Отв.* $R = 2\sqrt{2}$. **10.** $y = \sin x$ в точке $(\pi/2, 1)$. *Отв.* $R = 1$.
11. $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ при $t = t_1$. *Отв.* $R = 3a\sin t_1 \cos t_1$.

Найти радиус кривизны кривых: **12.** $\left.\begin{array}{l} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{array}\right\}$ при $t = 1$. *Отв.* $R = 6$.
13. Окружность $\rho = a\sin\theta$. *Отв.* $R = a/2$. **14.** Спираль Архимеда $\rho = a\theta$. *Отв.* $R = \dfrac{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$. **15.** Кардиоида $\rho = a(1 - \cos\theta)$. *Отв.* $R = \dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. **16.** Лемниската $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$. *Отв.* $R = a^2/3\rho$. **17.** Парабола $\rho = a\sec^2(\theta/2)$. *Отв.* $R = 2a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$. **18.** $\rho = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$. *Отв.* $R = \dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta}{3}$.

Найти точки кривых, в которых радиус кривизны имеет наименьшее значение: **19.** $y = \ln x$. *Отв.* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. **20.** $y = e^x$. *Отв.* $\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. *Отв.* $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$. **22.** $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. *Отв.* В точке $(0,0)$ $R=a/2$.

Найти координаты центра кривизны (α,β) и уравнения эволюты для каждой из следующих кривых: **23.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. **24.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Отв.* $\alpha=x+3x^{1/3}y^{2/3}$; $\beta=y+3x^{2/3}y^{1/3}$. **25.** $y^3=a^2x$. *Отв.* $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$; $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$. **26.** $\begin{cases}x=3t,\\ y=t^2-6.\end{cases}$ *Отв.* $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$; $\beta=3t^2-\frac{3}{2}$. **27.** $\begin{cases}x=k\ln\operatorname{ctg}(t/2)-k\cos t,\\ y=k\sin t.\end{cases}$ *Отв.* $y=\frac{k}{2}(e^{x/k}+e^{-x/k})$ (трактриса). **28.** $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$ *Отв.* $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\sin t$. **29.** $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$ *Отв.* $\alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\sin^2 t$; $\beta=a\sin^3 t+3a\cos^2 t\sin t$.

30. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения $x^3-4x+2=0$. *Отв.* $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$.

31. Для уравнения $f(x)=x^5-x-0{,}2=0$ определить приближенное значение корня, заключенное в интервале $(1;1{,}1)$. *Отв.* 1,045.

32. Вычислить корни уравнения $x^4+2x^2-6x+2=0$ с точностью до 0,01. *Отв.* $0{,}38<x_1<0{,}39$; $1{,}24<x_2<1{,}25$.

33. Решить приближенно уравнение $x^3-5=0$. *Отв.* $x_1\approx 1{,}71$, $x_{2,3}=1{,}71\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

34. Найти приближенное значение корня уравнения $x-\operatorname{tg}x=0$, который находится между 0 и $3\pi/2$. *Отв.* 4,4935.

35. Вычислить с точностью до 0,001 корень уравнения $\sin x=1-x$. **Указание.** Привести уравнение к виду $f(x)=0$. *Отв.* $0{,}5110<x<0{,}5111$.

Разные задачи

36. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиус-вектору этой точки.

37. Найти наибольшее значение радиуса кривизны кривой $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. *Отв.* $R=3a/4$.

38. Найти координаты центра кривизны кривой $y=x\ln x$ в точке, где $y'=0$. *Отв.* $(e^{-1},0)$.

39. Доказать, что для всех точек спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ при $\varphi\to\infty$ величина разности между радиус-вектором и радиусом кривизны стремится к 0.

40. Найти параболу $y=ax^2+bx+c$, имеющую с синусоидой $y=\sin x$ в точке $(\pi/2,1)$ общие касательную и кривизну. Сделать чертеж. *Отв.* $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$.

41. Функция $y=f(x)$ определена так:

$$f(x)=x^3 \quad \text{в интервале } -\infty<x\leqslant 1,$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \text{в интервале } 1<x<+\infty.$$

Каковы должны быть a, b, c для того, чтобы линия $y=f(x)$ имела везде непрерывную кривизну? Сделать чертеж. *Отв.* $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

42. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

43. Написать уравнение окружности кривизны параболы $y = x^2$ в точке $(1, 1)$. *Отв.* $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

44. Написать уравнение окружности кривизны кривой $y = \operatorname{tg} x$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. *Отв.* $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Найти длину всей эволюты эллипса, полуоси которого равны a и b. *Отв.* $4(a^3 - b^3)/ab$.

46. Найти приближенное значение корней уравнения $xe^x = 2$ с точностью до 0,01. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 0{,}84$.

47. Найти приближенное значение корней уравнения $x \ln x = 0{,}8$ с точностью до 0,01. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1{,}64$.

48. Найти приближенное значение корней уравнения $x^2 \operatorname{arctg} x = 1$ с точностью до 0,001. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1{,}096$.

Глава VII
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Комплексные числа. Исходные определения

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib, \tag{1}$$

где a и b — *действительные* числа; i — так называемая *мнимая единица*, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1; \tag{2}$$

a называется *действительной* или *вещественной* частью, b — *мнимой* частью числа z. Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Если $a = 0$, то число $0 + ib = ib$ называется *чисто мнимым*; если $b = 0$, то получается действительное число: $a + i0 = a$. Два комплексных числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$, отличающихся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Принимаются два основных определения.

1. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными $z_1 = z_2$, если

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2,$$

т.е. если равны в отдельности их действительные и мнимые части.

2. Комплексное число z равно нулю:

$$z = a + ib = 0$$

тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$.

1. **Геометрическое изображение комплексных чисел.** Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b. Обратно, каждой точке плоскости $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *плоскостью комплексного переменного* z (рис. 162) (на плоскости ставить символ z в кружке).

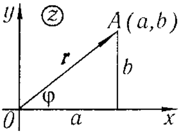


Рис. 162

Точкам плоскости комплексного переменного z, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа ($b = 0$). Точки, лежащие на оси Oy, изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае $a = 0$. Поэтому при изображении комплексных чисел на плоскости комплексного переменного z ось Oy называют осью мнимых чисел или *мнимой осью*, а ось Ox — *действительной осью*.

Соединив точку $A(a, b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор $\overline{OA}$.

2. **Тригонометрическая форма записи комплексного числа**. Обозначим через φ и r ($r \geqslant 0$) полярные координаты точки $A(a, b)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси Ox — полярной осью. Тогда (рис. 162) имеют место следующие равенства:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

а следовательно, комплексное число z можно представить в форме

$$a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Выражение, стоящее справа, называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа $z = a+ib$; r называется *модулем* комплексного числа z, φ — *аргументом* комплексного числа z; оно изображается так:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \tag{4}$$

Величины r и φ выражаются через a и b, очевидно, так:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} |z| = |a + ib| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \arg z = \arg(a + ib) &= \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета. Очевидно, что аргумент φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — любое целое число.

Замечание. Сопряженные комплексные числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ имеют равные модули $|z| = |\bar{z}|$, а их аргументы равны по абсолютной величине, но отличаются знаком: $\arg z = -\arg\bar{z}$.

Отметим, что действительное число A так же может быть записано в форме (3), а именно:

$$A = |A|(\cos 0 + i\sin 0) \quad \text{при} \quad A > 0,$$
$$A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi) \quad \text{при} \quad A < 0.$$

Модуль комплексного числа 0 равняется нулю 0: $|0| = 0$. В качестве же аргумента нуля можно взять любой угол φ. Действительно, для любого угла φ имеет место равенство

$$0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

§ 2. Основные действия над комплексными числами

1. **Сложение комплексных чисел.** *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов (рис. 163, *а*).

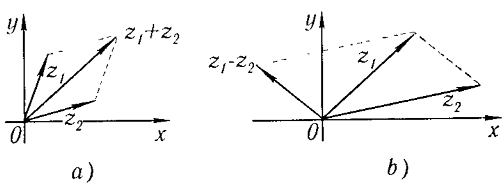


Рис. 163

2. **Вычитание комплексных чисел.** *Разностью* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется такое комплексное число, которое, будучи сложено с z_2, дает в сумме комплексное число z_1:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \qquad (2)$$

Отметим, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости комплексного переменного (рис. 163, *б*):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. **Умножение комплексных чисел.** *Произведением* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется такое комплексное число, которое получается, если мы перемножаем эти числа как двучлены по правилам алгебры, учитывая только, что

$$i^2 = -1, \;\; i^3 = -i, \;\; i^4 = (-i)\cdot i = -i^2 = 1, \;\; i^5 = i \;\; \text{и т.д.},$$

и вообще при любом целом

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

На основании этого правила получаем:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_1 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

или

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \tag{3}$$

Пусть комплексные числа даны в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Найдем произведение этих чисел

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] = \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{3'}$$

т.е. *произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.*

Замечание 1. Произведение сопряженных комплексных чисел $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ в силу равенства (3) выражается так:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

или

$$z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Произведение сопряженных комплексных чисел равняется квадрату модуля каждого из них.

4.**Деление комплексных чисел**. *Деление* комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$. Тогда $\frac{z_1}{z_2} = z$ есть такое комплексное число, что $z_1 = z_2 z$. Если

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy,$$

то

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

или

$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x);$$

x и y определяются из системы уравнений

$$a_1 = a_2 x - b_2 y,\ \ b_1 = b_2 x + a_2 y.$$

Решая систему, находим:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Окончательно получаем:

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{4}$$

Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $z_1 = a_1 + ib_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю (т.е. на $a_2 - ib_2$).

Тогда делителем будет действительное число; разделив на него действительную и мнимую части делимого, получим частное

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}\frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{5}$$

Для проверки этого равенства достаточно умножить делитель на частное:

$$r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$
$$= r_2\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Замечание 2. Из правил действий над комплексными числами следует, что в результате операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел получается снова комплексное число.

Если правила действий над комплексными числами применить к действительным числам, рассматривая их как частный случай комплексных, то эти правила будут совпадать с обычными правилами действий, известными из арифметики.

Замечание 3. Вернувшись к определениям суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел, легко проверить, что если в этих выражениях заменить каждое комплексное число сопряженным, то и результаты указанных действий заменяются сопряженными числами. Отсюда, в частности, вытекает следующая теорема.

Теорема. *Если в многочлен с действительными коэффициентами*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

подставить вместо x *число* $a + ib$, *а затем сопряженное число* $a - ib$, *то и результаты этих подстановок будут взаимно сопряженными.*

§ 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа

1. **Возведение в степень.** Из формулы (3′) предыдущего параграфа следует, что если n — целое положительное число, то

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой Муавра.* Она показывает, что *при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Рассмотрим теперь еще одно приложение формулы Муавра. Полагая в этой формуле $r = 1$, получим:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Разлагая левую часть по формуле бинома Ньютона и приравнивая действительные и мнимые части, мы сможем выразить $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Так, например, в случае $n = 3$ получаем:

$$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi;$$

используя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \ \ \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

2. **Извлечение корня**. *Корнем n-й степени* из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равняется подкоренному числу, т.е.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

если

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Так как у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то

$$\rho^n = r, \ \ n\psi = \varphi + 2\pi k.$$

Отсюда находим:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \ \ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

где k — любое целое число, $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое (т.е. действительное положительное) значение корня из положительного числа r. Следовательно,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right). \qquad (2)$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня. Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Корень n-й степени из действительного числа A, отличного от нуля, также имеет n значений, так как действительное число является частным случаем комплексного и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$\text{если } A > 0, \text{ то } A = |A|(\cos 0 + i\sin 0);$$
$$\text{если } A < 0, \text{ то } A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 1. Найти все значения кубического корня из единицы.

Решение. Представим единицу в тригонометрической форме:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

По формуле (2) получаем:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}.$$

Полагая k равным 0, 1, 2, находим три значения корня:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad x_2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3), \quad x_3 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3).$$

Учитывая, что

$$\cos(2\pi/3) = -1/2, \quad \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2, \quad \cos(4\pi/3) = -1/2, \quad \sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2,$$

получаем

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, \quad x_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

На рис. 164 точки A, B, C являются геометрическими изображениями полученных корней.

3. Решение двучленного уравнения.

Уравнение вида

$$x^n = A$$

называется *двучленным*. Найдем корни этого уравнения. Если A есть действительное положительное число, то

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

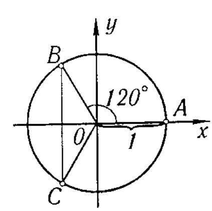


Рис. 164

Выражение в скобках дает все значения корня n-й степени из 1.

Если A — действительное отрицательное число, то

$$x = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

Выражение в скобках дает все значения корня n-й степени из -1.

Если A — комплексное число, то значения x находятся по формуле (2).

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 = 1.$$

Решение.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos(2k\pi/4) + i\sin(2k\pi/4).$$

Полагая k равным 0, 1, 2, 3, получаем:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$x_2 = \cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = i,$$
$$x_3 = \cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1,$$
$$x_4 = \cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = -i.$$

§ 4. Показательная функция с комплексным показателем и ее свойства

Пусть $z = x + iy$. Если x и y — действительные переменные, то z называется комплексным переменным. Каждому значению комплексного переменного z на плоскости Oxy (***плоскости комплексного переменного***) соответствует определенная точка (см. рис. 162).

Определение. Если каждому значению комплексного переменного z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w, то w есть ***функция комплексного переменного*** z. Функции комплексного аргумента обозначают $w = f(z)$ или $w = w(z)$.

Здесь мы рассмотрим одну функцию комплексного переменного — показательную функцию

$$w = e^z$$

или

$$w = e^{x+iy}.$$

Комплексные значения функции w определяются так*):

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{1}$$

т.е.

$$w(z) = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2}$$

Примеры.

1. $z = 1 + \frac{\pi}{4}i$, $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
2. $z = 0 + \frac{\pi}{2}i$, $e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$,

---

*) Целесообразность такого определения показательной функции комплексного переменного будет показана и ниже, см. § 21, гл. XIII и § 18 гл. XVI (т. II).

3. $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^1 \left(\cos 1 + i \sin 1\right) \approx 0{,}54 + i \cdot 0{,}83$,

4. $z = x$ — действительное число, $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ — обычная показательная функция.

Свойства показательной функции.

1. Если z_1 и z_2 — два комплексных числа, то

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

тогда

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]. \tag{4}$$

С другой стороны, на основании теоремы о произведении двух комплексных чисел в тригонометрической форме будем иметь:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]. \tag{5}$$

В равенствах (4) и (5) правые части равны, следовательно, равны и левые: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

2. Аналогичным образом доказывается формула

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \tag{6}$$

3. Если m — целое число, то

$$(e^z)^m = e^{mz}. \tag{7}$$

При $m > 0$ эта формула легко получается на основании формулы (3); если $m < 0$, то она получается на основании формул (3) и (6).

4. Справедливо тождество

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{8}$$

Действительно, по формулам (3) и (1) получаем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

На основании тождества (8) следует, что показательная функция e^z есть периодическая функция с *периодом* $2\pi i$.

5. Рассмотрим, далее, комплексную величину

$$w = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные функции действительного переменного x. Это есть *комплексная функция действительного переменного.*

а) Пусть существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Тогда $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ называют *пределом* комплексного переменного w.

б) Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то выражение

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

будем называть *производной* комплексной функции действительного переменного по действительному аргументу.

Рассмотрим, далее, следующую показательную функцию:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha+i\beta)x},$$

где α и β — постоянные действительные числа, а x — действительное переменное. Это есть комплексная функция действительного переменного, которую согласно с формулой (1) можно переписать так:

$$w = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x]$$

или

$$w = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Найдем производную w'_x. По формуле (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) = \\ &= \alpha[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] + i\beta[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] = \\ &= (\alpha+i\beta)[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \end{aligned}$$

Итак, если $w = e^{(\alpha+i\beta)x}$, то $w' = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$, или

$$[e^{(\alpha+i\beta)x}]' = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \tag{10}$$

Таким образом, если k — комплексное число (в частности действительное) и x — действительное число, то

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Получили обычную формулу дифференцирования показательной функции. Далее,

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}$$

и при произвольном n

$$(e^{kx})^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Эти формулы нам потребуются в дальнейшем.

§ 5. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Если в формуле (1) предыдущего параграфа положим $x = 0$, то получим

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{1}$$

Это есть *формула Эйлера*, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменяя в формуле (1) y на $-y$, получим:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) найдем $\cos y$ и $\sin y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Последними формулами пользуются, в частности, для выражения степеней $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и их произведений через синус и косинус кратных дуг.

Пример 1.

$$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y}+2+e^{-i2y}) =$$

$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i\sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i\sin 2y)] = \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1+\cos 2y).$$

Пример 2.

$$\cos^2\varphi\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2} = -\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{8}.$$

Показательная форма комплексного числа. Представим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r — модуль комплексного числа, φ — аргумент комплексного числа. По формуле Эйлера:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \tag{4}$$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в так называемой *показательной* форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 3. Представить числа 1, i, -2, $-i$ в показательной форме.

Решение.

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i}, \\ i &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}, \\ -2 &= 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{\pi i}, \\ -i &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

На основании свойств (3), (6), (7) § 4 показательной функции легко производятся действия над комплексными числами в показательной форме.

Пусть имеем:

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{5}$$

этот результат совпадает с формулой (3′) § 2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \tag{6}$$

эта формула совпадает с формулой (5) § 2.

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}; \tag{7}$$

эта формула совпадает с формулой (1) § 3.

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1); \tag{8}$$

эта формула совпадает с формулой (2) § 3.

§ 6. Разложение многочлена на множители

Функция

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

где n — целое число, как известно, называется *многочленом (полиномом)* или *целой рациональной функцией* от x; число n называется *степенью многочлена.* Здесь коэффициенты A_0, A_1, ..., A_n — действительные или комплексные числа; независимое переменное x также может принимать как действительные, так и комплексные значения. *Корнем* многочлена называется такое значение переменного x, при котором многочлен обращается в нуль.

Теорема 1 (теорема Безу). *При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.*

Доказательство. При делении $f(x)$ на $x - a$ частным будет многочлен $f_1(x)$, степень которого на единицу ниже степени $f(x)$, остатком будет постоянное число R. Таким образом, можем написать:

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R. \tag{1}$$

Это равенство справедливо при всех значениях x, отличных от a (деление на $x - a$ при $x = a$ не имеет смысла).

Заставим теперь x стремится к a. Тогда предел левой части равенства (1) равен $f(a)$, а предел правой части равен R. Так как функции $f(x)$ и $(x - a)f_1(x) + R$ равны между собой для всех $x \neq a$, то равны и их пределы при $x \to a$, т.е. $f(a) = R$.

Следствие. *Если a есть корень многочлена, т.е. $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - a$ и, следовательно, представляется в виде произведения*

$$f(x) = (x - a) f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — многочлен.

Пример 1. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ при $x = 1$ обращается в нуль, т.е. $f(1) = 0$, поэтому данный многочлен делится без остатка на $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений с одним неизвестным x.

Всякое число (действительное или комплексное), которое, будучи подставлено в уравнение вместо x, обращает уравнение в тождество, называется *корнем* уравнения.

Пример 2. Числа $x_1 = \pi/4$, $x_2 = 5\pi/4$, $x_3 = 9\pi/4$, ... являются корнями уравнения $\cos x = \sin x$.

Если уравнение имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен степени n, то это уравнение называется *алгебраическим* уравнением степени n. Из определения следует, что корни алгебраического уравнения $P(x) = 0$ те же, что и корни многочлена $P(x)$.

Естественно возникает вопрос: всякое ли уравнение имеет корни?

В случае неалгебраического уравнения ответ отрицателен: существуют такие неалгебраические уравнения, которые не имеют ни одного корня — ни действительного, ни комплексного, например, уравнение $e^x = 0$*).

Однако в случае алгебраического уравнения ответ на поставленный вопрос положителен. Этот ответ дается основной теоремой алгебры:

Теорема 2 (основная теорема алгебры). *Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.*

Эта теорема доказывается в высшей алгебре. Здесь мы ее примем без доказательства.

Пользуясь основной теоремой алгебры, легко доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Всякий многочлен n-й степени разлагается на n линейных множителей вида $x - a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть многочлен степени n:

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Этот многочлен в силу основной теоремы имеет по крайней мере один корень; обозначим его через a_1. Тогда на основании следствия из теоремы Безу мы можем написать:

$$f(x) = (x - a_1)f_1(x),$$

---

*) Действительно, если бы число $x_1 = a + bi$ было бы корнем этого уравнения, то имело бы место тождество $e^{a+bi} = 0$ или (на основании формулы Эйлера) $e^a(\cos b + i\sin b) = 0$. Но e^a не может равняться нулю ни при каком действительном значении a; также не равно нулю $\cos b + i \sin b$ (так как модуль этого числа равен $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$ при любых b). Следовательно, и произведение $e^a(\cos b + i\sin b) \neq 0$, т.е. $e^{a+bi} \neq 0$, но это значит, что уравнение $e^x = 0$ не имеет корней.

где $f_1(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени; $f_1(x)$ также имеет корень. Обозначим его через a_2. Тогда

$$f_1(x) = (x - a_2)f_2(x),$$

где $f_2(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Аналогично

$$f_2(x) = (x - a_3)f_3(x).$$

Продолжая этот процесс выделения линейных множителей, дойдем до соотношения

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n)f_n,$$

где f_n — многочлен нулевой степени, т.е. некоторое фиксированное число. Это число, очевидно, равно коэффициенту при x^n, т.е. $f_n = A_0$.

На основании полученных равенств можем написать:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n). \tag{2}$$

Из разложения (2) следует, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть корни многочлена $f(x)$, так как при подстановке $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_n$ правая часть, а следовательно, и левая, обращается в нуль.

Пример 3. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ обращается в нуль при

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

Следовательно,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Никакое значение $x = a$, отличное от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не может быть корнем многочлена $f(x)$, так как ни один из множителей в правой части равенства (2) не обращается в нуль при $x = a$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Многочлен n-й степени не может иметь более чем n различных корней.

Но в таком случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если значения двух многочленов n-й степени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают при $n+1$ различных значениях $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ аргумента x, то эти многочлены тождественны.*

Доказательство. Обозначим через $f(x)$ разность многочленов

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

По условию $f(x)$ есть многочлен степени не выше n, обращающийся в нуль в точках $a_1, \ldots, a_n$. Следовательно, его можно представить в виде

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Но, по условию, $f(x)$ обращается в нуль также в точке a_0. Тогда $f(a_0) = 0$ и при этом ни один из линейных множителей не равен нулю. Поэтому $A_0 = 0$, а тогда из равенства (2) следует, что многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю. Следовательно, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, или $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Теорема 5. *Если многочлен*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Доказательство. Запишем разложение этого многочлена на множители по формуле (2):

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = A_0(x-a_1)\ldots(x-a_n). \quad (1')$$

Если этот многочлен тождественно равен нулю, то он равен нулю и при некотором значении x, отличном от $a_1, \ldots, a_n$. Но тогда ни одна из скобок $x - a_1, \ldots, x - a_n$ не равна нулю и, следовательно, $A_0 = 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и т.д.

Теорема 6. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Это следует из того, что разность данных многочленов есть многочлен, тождественно равный нулю. Следовательно, на основании предыдущей теоремы все его коэффициенты — нули.

Пример 4. Если многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ тождественно равен многочлену $x^2 - 5x$, то $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. О кратных корнях многочлена

Если в разложении многочлена n-й степени на линейные множители

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) \quad (1)$$

некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

При этом

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

В этом случае корень a_1 называется *корнем кратности* k_1 или k_1-кратным корнем, a_2 — корнем кратности k_2 и т.д.

Пример. Многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ разлагается на следующие линейные множители:

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1).$$

Это разложение можно написать так:

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 1).$$

Корень $a_1 = 2$ — двукратный корень, $a_2 = 1$ — простой корень.

Если многочлен имеет корень a кратности k, то мы будем считать, что многочлен имеет k одинаковых корней. Тогда из теоремы о разложении многочлена на линейные множители получается следующая теорема.

Всякий многочлен n-й степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Замечание. Все, что говорилось о корнях многочлена

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

можно, очевидно, сформулировать в терминах корней алгебраического уравнения

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Докажем, далее, следующую теорему.

Теорема. *Если a_1 является для многочлена $f(x)$ корнем кратности $k_1 > 1$, то для производной $f'(x)$ это число является корнем кратности $k_1 - 1$.*

Доказательство. Если a_1 есть корень кратности $k_1 > 1$, то из формулы (1′) следует:

$$f(x) = (x - a)^{k_1}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = (x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}$ не обращается в нуль при $x = a_1$, т.е. $\varphi(a_1) \neq 0$. Дифференцируя, получим:

$$f'(x) = k_1(x_1 - a_1)^{k_1-1}\varphi(x) + (x - a_1)^{k_1}\varphi'(x) =$$
$$= (x_1 - a_1)^{k_1-1}[k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x)].$$

Обозначим:

$$\psi(x) = k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x).$$

Тогда

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1}\psi(x),$$

причем

$$\psi(a_1) = k_1\varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1\varphi(a_1) \neq 0,$$

т.е. $x = a_1$ есть корень кратности $k_1 - 1$ многочлена $f'(x)$. Из проведенного доказательства следует, что если $k_1 = 1$, то a_1 не является корнем производной $f'(x)$.

Из доказанной теоремы следует, что a_1 является корнем кратности $k_1 - 2$ для производной $f''(x)$, корнем кратности $k_1 - 3$ для производной $f'''(x)\ldots$, корнем кратности 1 (простым корнем) для производной $f^{(k_1-1)}(x)$ и не является корнем для производной $f^{(k_1)}(x)$, т.е.

$$f(a_1) = 0,\ f'(a_1) = 0,\ f''(a_1) = 0,\ \ldots,\ f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

но

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Разложение многочлена на множители в случае комплексных корней

В формуле (1) § 7 гл. VII корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть как действительными, так и комплексными. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.*

Доказательство. Если мы подставим в многочлен $f(x)$ вместо x число $a+ib$, произведем возведение в степени и соберем отдельно члены, содержащие i и не содержащие i, то получим:

$$f(a+ib) = M + iN,$$

где M и N — выражения, не содержащие i.

Так как $a+ib$ — корень многочлена, то

$$f(a+ib) = M + iN = 0,$$

откуда

$$M = 0, \;\; N = 0.$$

Подставим теперь в многочлен вместо x выражение $a-ib$. Тогда (на основании замечания 3 в конце § 2) мы получим в результате число, сопряженное с числом $M+iN$, т.е.

$$f(a-ib) = M - iN.$$

Так как $M = 0$ и $N = 0$, то $f(a-ib) = 0$, т.е. $a-ib$ есть корень многочлена.

Итак, в разложении

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

комплексные корни входят ***попарно сопряженными***.

Перемножив линейные множители, соответствующие паре комплексно сопряженных корней, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = \\
&\qquad = [(x-a)-ib][(x-a)+ib] = \\
&\qquad\qquad = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,
\end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ — действительные числа.

Если число $a+ib$ является корнем кратности k, то сопряженное число $a-bi$ должно являться корнем той же кратности k, так что наряду с линейными множителями $x-(a+ib)$ в разложение многочлена входят столько же линейных множителей вида $x-(a-ib)$.

Таким образом, *многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степеней соответствующей кратности*, т.е.

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots$$
$$\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

При этом

$$k_1+k_2+\dots+k_r+2l_1+\dots+2l_s=n.$$

§ 9. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами y и x, описывающая количественную сторону данного явления; при этом функция $y=\varphi(x)$ остается нам неизвестной, но на основании эксперимента установлены значения этой функции y_0, y_1, y_2, $\dots$, y_n при некоторых значениях аргумента x_0, x_1, x_2, $\dots$, x_n, принадлежащих отрезку $[a,b]$.

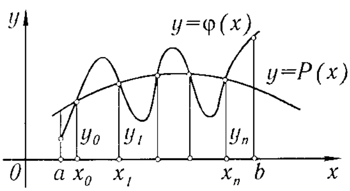


Рис. 165

Задача заключается в том, чтобы найти функцию, по возможности более простую с точки зрения вычислительной (например, многочлен), которая представляла бы неизвестную функцию $y=\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ точно или приближенно. В более отвлеченной форме эту задачу можно сформулировать так: на отрезке $[a,b]$ заданы значения неизвестной функции $y=\varphi(x)$ в $n+1$ различных точках x_0, x_1, $\dots$, x_n:

$$y_0=\varphi(x_0),\ \ y_1=\varphi(x_1),\dots,\ \ y_n=\varphi(x_n);$$

требуется найти ***многочлен*** $P(x)$ степени $\leqslant n$, приближенно выражающий функцию $\varphi(x)$.

В качестве такого многочлена естественно взять многочлен, значения которого в точках x_0, x_1, x_2, $\dots$, x_n ***совпадают*** с соответствующими значениями y_0, y_1, y_2, $\dots$, y_n функции $\varphi(x)$ (рис. 165). Тогда поставленная задача, называемая «задачей *интерполирования* функции», формулируется так: для данной функции $\varphi(x)$ найти многочлен $P(x)$ степени $\leqslant n$, который при заданных значениях x_0, x_1, $\dots$, x_n принимал бы значения

$$y_0=\varphi(x_0),\ \ y_1=\varphi(x_1),\ \ \dots,\ \ y_n=\varphi(x_n).$$

В качестве искомого многочлена возьмем многочлен n-й степени вида

$$\begin{aligned}P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\ + C_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\ + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots\\ \ldots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\end{aligned} \qquad (1)$$

и определим коэффициенты C_0, C_1, ..., C_n так, чтобы выполнялись условия

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad P(x_n) = y_n. \qquad (2)$$

Положим в формуле (1) $x = x_0$; тогда, принимая во внимание равенства (2), получим:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n),$$

откуда

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Затем, положив $x = x_1$, получим:

$$y_1 = C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n),$$

откуда

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}.$$

Таким же образом найдем:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)};$$

. . . .

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим:

$$\begin{aligned}P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\\ + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots\\ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.\end{aligned} \qquad (3)$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа.*

Отметим без доказательства, что если $\varphi(x)$ имеет производную $(n+1)$-го порядка на отрезке $[a,b]$, то ошибка при замене функции $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$, т.е. величина $R(x) = \varphi(x) - P(x)$, удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{1}{(n+1)!}max|\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Замечание. Из теоремы 4 § 6 следует, что многочлен $P(x)$ является единственным, удовлетворяющим поставленным условиям.

Укажем, что существуют и другие интерполяционные формулы. Одна из них — интерполяционная формула Ньютона — рассмотрена в § 10.

Пример. Из эксперимента получены такие значения функции $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ при $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ при $x_2 = -4$. Требуется представить приближенно функцию $y = \varphi(x)$ многочленом второй степени.

Решение. По формуле (3) имеем (при $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}\cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}\cdot(-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\cdot 4,$$

или

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. Интерполяционная формула Ньютона

Пусть известны $(n+1)$ значение функции $\varphi(x)$, а именно y_0, $y_0, \ldots, y_n$ при $(n+1)$ значении аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом разность между соседними значениями аргумента постоянна. Обозначим ее через h. Таким образом, имеем таблицу значений неизвестной функции $y = \varphi(x)$ при соответствующих значениях аргумента.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$\ldots$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Составим многочлен степени не выше n, который принимает соответствующие значения при соответствующих значениях x. Этот многочлен будет приближенно представлять функцию $\varphi(x)$.

Предварительно введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots,\\
&\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots,\\
&\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.
\end{aligned}$$

Это так называемые разности 1-го, 2-го, ..., n-го порядка.

Напишем многочлен, принимающий значения y_0, y_1 соответственно при x_0 и x_1. Это будет многочлен 1-й степени

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \qquad (1)$$

Действительно,

$$P_1(x)|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Напишем многочлен, принимающий значения y_0, y_1, y_2 соответственно при x_0, x_1, x_2. Это будет многочлен 2-й степени

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \qquad (2)$$

Действительно,

$$P_2|_{x=x_2} = y_0, \quad P_2\Big|_{x=x_1} = y_1,$$

$$P_2|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2.$$

Многочлен третьего порядка будет иметь вид:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right). \qquad (3)$$

Наконец, многочлен n-го порядка, принимающий значения y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_n соответственно при x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, будет иметь вид:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \ldots \\ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \ldots \left[\frac{x - x_0}{h} - (n - 1) \right], \qquad (4)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Это и есть *интерполяционная формула* или *интерполяционный многочлен Ньютона.*

По существу, многочлен Лагранжа и многочлен Ньютона для данной таблицы значений тождественны, но по-разному написаны, так как многочлен степени не выше n, принимающий заданные $(n + 1)$ значения при данных $(n + 1)$ значениях x, находится единственным образом.

Во многих случаях интерполяционный многочлен Ньютона более удобен, чем интерполяционный многочлен Лагранжа. Особенность этого многочлена заключается в том, что при переходе от многочлена k-й степени к многочлену $(k + 1)$-й степени первые $(k + 1)$ членов на меняются, а только добавляется новый член, который равен нулю при всех предыдущих значениях аргумента.

Замечание. По интерполяционным формулам Лагранжа (см. формулу (3) § 9) и Ньютона (формула (4)) определяются значения функции на отрезке $x_0 < x < x_n$. Если по этим формулам определяется значение функции при $x < x_0$ (это можно делать при малом $|x - x_0|$), то говорят, производится *экстраполяция таблицы назад.* Если определяется значение функции при $x > x_n$, то говорят, что производится *экстраполяция таблицы вперед.*

§ 11. Численное дифференцирование

Пусть значения некоторой неизвестной функции $\varphi(x)$ заданы таблицей, которая рассматривалась в начале § 10. Требуется определить приближенно производную этой функции. Эта задача решается так. Строится интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и от этого многочлена находится производная.

Так как чаще рассматриваются таблицы с равными разностями между соседними значениями аргумента, то мы будем пользоваться интерполяционной формулой Ньютона. Пусть даны три значения функции y_0, y_1, y_2 при значениях аргумента x_0, x_1, x_2. Тогда пишем многочлен (2) § 10 и его дифференцируем. Получаем приближенное значение производной функции на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\varphi'(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{1}$$

При $x = x_0$ получаем

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \tag{2}$$

Если будем рассматривать многочлен 3-го порядка (см. (3) § 10), то после дифференцирования для его производной получим выражение:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h}\left[3\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + 2\right]. \tag{3}$$

В частности, при $x = x_0$ получаем:

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \tag{4}$$

Если мы будем пользоваться формулой (4) § 10, то для приближенного выражения производной при $x = x_0$ получим

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \tag{5}$$

Заметим, что для функции, имеющей производные, разность Δy_0 есть бесконечно малая 1-го порядка, $\Delta^2 y_0$ — бесконечно малая 2-го порядка, $\Delta^3 y_0$ — бесконечно малая 3-го порядка и т.д. относительно h.

§ 12. О наилучшем приближении функций многочленами. Теория Чебышева

В связи с задачей, рассмотренной в §§ 9 и 10, естественно поставить такой вопрос: пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Можно ли эту функцию *с любой наперед заданной степенью точности* приближенно представить в виде многочлена $P(x)$? Иначе говоря, можно ли подобрать такой многочлен $P(x)$, чтобы разность между $\varphi(x)$ и $P(x)$ по абсолютной величине во всех точках отрезка $[a, b]$ была меньше любого наперед заданного положительного числа ε? Утвердительный ответ*) на этот вопрос содержится в следующей теореме, которую мы приводим здесь без доказательства:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что во всех точках указанного отрезка выполняется неравенство*

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Выдающийся советский математик академик С.Н. Бернштейн дал следующий способ непосредственного построения таких многочленов, которые приближенно равны непрерывной функции $\varphi(x)$ на заданном отрезке.

Пусть, например, функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Составим выражение

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — значение данной функции в точке $x = \frac{m}{n}$. Выражение $B_n(x)$ является многочленом n-й степени; его называют *многочленом Бернштейна.*

Если дано произвольное $\varepsilon > 0$, то можно подобрать такой многочлен Бернштейна (т.е. так выбрать его степень n), чтобы для всех значений x на отрезке $[0, 1]$ выполнялось неравенство

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Отметим, что рассмотрение отрезка $[0, 1]$, а не произвольного отрезка $[a, b]$ не является существенным ограничением общности, так как с помощью замены переменного $x = a + t(b-a)$ можно любой отрезок $[a, b]$ преобразовать в отрезок $[0, 1]$. При этом многочлен n-й степени преобразуется в многочлен той же степени.

---

*) Заметим, что интерполяционный многочлен Лагранжа [см. (3) § 9] не дает еще ответа на поставленный вопрос. Его значения равны значениям функции в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, но они могут быть очень далеки от значений функции в других точках отрезка $[a, b]$.

Создателем теории наилучшего приближения функций с помощью многочленов является русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894) — один из величайших представителей математической мысли. Им получены наиболее глубокие результаты в этой области, оказавшие исключительное влияние на работу последующих математиков. Исходной точкой для создания этой теории была работа П.Л. Чебышева по теории шарнирных механизмов, широко используемых в машинах. Изучая такие механизмы, он пришел к задаче разыскания среди всех многочленов данной степени с коэффициентом при старшем члене, равным единице, такого многочлена, который меньше всех отклоняется от нуля на заданном отрезке. Такие многочлены им были найдены и впоследствии учеными названы *многочленами Чебышева*. Эти многочлены обладают многими замечательными свойствами и в настоящее время являются могучим средством исследования во многих вопросах математики и техники.

Упражнения к главе VII

1. Найти $(3+5i)(4-i)$. *Отв.* $17+17i$. **2.** Найти $(6+11i)(7+3i)$. *Отв.* $9+95i$. **3.** Найти $\frac{3-i}{4+5i}$. *Отв.* $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. **4.** Найти $(4-7i)^3$. *Отв.* $-524+7i$. **5.** Найти $\sqrt{i}$. *Отв.* $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **6.** Найти $\sqrt{-5-12i}$. *Отв.* $\pm(2-3i)$. **7.** Привести к тригонометрическому виду выражения: а) $1+i$. *Отв.* $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. б) $1-i$. *Отв.* $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. **8.** Найти $\sqrt[3]{i}$. *Отв.* $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$.

9. Выразить через степени $\sin x$ и $\cos x$ следующие выражения: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$. **10.** Выразить через синус и косинус кратных дуг: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$. **11.** $f(x)=x^3-4x^2+$ $+8x-1$ разделить на $x+4$. *Отв.* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, т.е. частное $=x^2-8x+40$; остаток $f(-4)=-161$. **12.** $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ разделить на $x+3$. *Отв.* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. **13.** $f(x)=x^7-1$ разделить на $x-1$. *Отв.* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Разложить на множители с действительными коэффициентами многочлены: **14.** $f(x)=x^4-1$. *Отв.* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. **15.** $f(x)=x^2-x-2$. *Отв.* $f(x)=(x-2)(x+1)$. **16.** $f(x)=x^3+1$. *Отв.* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$. **17.** На основании эксперимента получены значения функции y от x:

$$y_1=4 \quad \text{при} \quad x_1=0, \qquad y_2=6 \quad \text{при} \quad x_2=1, \qquad y_3=10 \quad \text{при} \quad x_3=2.$$

Представить приближенно функцию многочленом второй степени. *Отв.* x^2+x+4. **18.** Найти многочлен четвертой степени, принимающий при $x=1$, 2, 3, 4, 5, соответственно, значения 2, 1, -1, 5, 0. *Отв.* $-\frac{7}{6}x^4+\frac{79}{6}x^3-\frac{151}{3}x^2+\frac{226}{3}x-35$. **19.** Найти многочлен, по возможности, низкой степени, принимающий при $x=2$, 4, 5, 10, соответственно, значения 3, 7, 9, 19. *Отв.* $2x-1$. **20.** Найти многочлены Бернштейна 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней для функции $y=\sin\pi x$ на отрезке $[0,1]$. *Отв.* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$; $B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.

Глава VIII
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Определение функции нескольких переменных

Рассматривая функции одного переменного, мы указывали, что при изучении многих явлений приходится встречаться с функциями двух и более независимых переменных. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой
$$S = xy.$$
Каждой паре значений x и y соответствует определенное значение площади S; S есть функция двух переменных.

Пример 2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z, выражается формулой
$$V = xyz.$$
Здесь V есть функция трех переменных x, y, z.

Пример 3. Дальность R полета снаряда, выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, ствол которого наклонен к горизонту под углом φ, выражается формулой
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$
(если пренебречь сопротивлением воздуха). Здесь g — ускорение силы тяжести. Для каждой пары значений v_0 и φ эта формула дает определенное значение R, т.е. R является функцией двух переменных v_0 и φ.

Пример 4.
$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$
Здесь u есть функция четырех переменных x, y, z, t.

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то мы говорим, что z есть *функция двух независимых переменных* x и y, определенная в области D.

Символически функция двух переменных обозначается так:
$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y) \text{ и т. д.}$$

Функция двух переменных может быть задана, например, с помощью таблицы или аналитически — с помощью формулы, как это сделано в рассмотренных выше четырех примерах. На основании формулы можно составить таблицу значений функции для некоторых пар значений независимых переменных. Так, для первого примера можно составить следующую таблицу:

$$S = xy$$

$y\backslash x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

В этой таблице на пересечении строки и столбца, соответствующих определенным значениям x и y, проставлено соответствующее значение функции S.

Если функциональная зависимость $z = f(x, y)$ получается в результате измерений величины z при экспериментальном изучении какого-либо явления, то сразу получается таблица, определяющая z как функцию двух переменных. В этом случае функция задается только таблицей.

Как и в случае одного независимого переменного, функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значениях x и y.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y мы будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости. Эту совокупность точек будем также называть областью определения функции. В частности, областью определения может быть и вся плоскость. В дальнейшем мы будем главным образом иметь дело с такими областями, которые представляют собой ***части плоскости, ограниченные линиями***. Линию, ограничивающую данную область, будем называть *границей* области. Точки области, не лежащие на границе, будем называть *внутренними* точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой* или *незамкнутой*. Если же к области относятся и точки границы, то область называется *замкнутой*. Область называется *ограниченной*, если существует такое постоянное C, что расстояние любой точки M области от начала координат O меньше C, т.е. $|OM| < C$.

Пример 5. Определить естественную область определения функции

$$z = 2x - y.$$

Аналитическое выражение $2x - y$ имеет смысл при любых значениях x и y. Следовательно, естественной областью определения функции является вся плоскость Oxy.

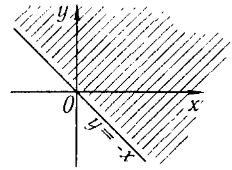


Рис. 166

Пример 6.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Для того чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т.е. x и y должны удовлетворять неравенству

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

Пример 7.

$$z = \ln(x + y).$$

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должно удовлетворяться неравенство

$$x + y > 0 \text{ или } y > -x.$$

Это значит, что областью определения функции z является половина плоскости, расположенная над прямой $y = -x$, не включая самой прямой (рис. 166).

Пример 8. Площадь треугольника S представляет собой функцию основания x и высоты y:

$$S = xy/2.$$

Областью определения этой функции является область $x > 0$, $y > 0$ (так как основание треугольника и его высота не могут быть ни отрицательными, ни нулем). Заметим, что область определения рассматриваемой функции не совпадает с естественной областью определения того аналитического выражения, с помощью которого задается функция, так как естественной областью определения выражения $\frac{xy}{2}$ является, очевидно, вся плоскость Oxy.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех или более переменных.

Определение 3. Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменных x, y, $z, \ldots, u$, t соответствует определенное значение переменной w, то будем называть w *функцией независимых переменных* x, y, $z, \ldots, u$, t и писать $w = F(x, y, z, \ldots, u, t)$ или $w = f(x, y, z, \ldots, u, t)$ и т.п.

Так же как и для функции двух переменных, можно говорить об области определения функции трех, четырех и более переменных.

Так, например, для функции трех переменных областью определения является некоторая совокупность троек чисел (x, y, z). Заметим тут же, что каждая тройка чисел задает некоторую точку $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$. Следовательно, областью определения функции трех переменных является некоторая совокупность точек пространства.

Аналогично этому можно говорить об области определения функции четырех переменных $u = f(x,y,z,t)$ как о некоторой совокупности четверок чисел (x,y,z,t). Однако область определения функции четырех или большего числа переменных уже не допускает простого геометрического истолкования.

В примере 2 приведена функция трех переменных, определенная при всех значениях x, y, z.

В примере 4 приведена функция четырех переменных.

Пример 9.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Здесь w — функция четырех переменных x, y, z, u, определенная при значениях переменных, удовлетворяющих соотношению

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geqslant 0.$$

§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных

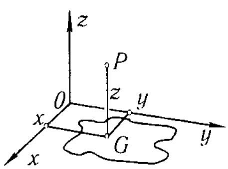


Рис. 167

Рассмотрим функцию

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

определенную в области G на плоскости Oxy (эта область может быть, в частности, и всей плоскостью), и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ (рис. 167). В каждой точке (x,y) восставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x,y)$.

Тогда мы получим в пространстве точку P с координатами

$$x, y, z = f(x,y).$$

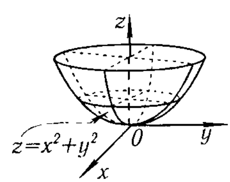


Рис. 168

Геометрическое место точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что уравнение (1) в пространстве определяет некоторую поверхность. Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в область определения функции. Каждый перпендикуляр к плоскости Oxy пересекает поверхность $z = f(x,y)$ не более чем в одной точке.

Пример. Графиком функции $z = x^2 + y^2$, как известно из аналитической геометрии, является параболоид вращения (рис. 168).

Замечание. Функцию трех или более переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно.

§ 3. Частное и полное приращение функции

Рассмотрим линию PS пересечения поверхности

$$z = f(x, y)$$

с плоскостью $y = \text{const}$, параллельной плоскости Oxz (рис. 169).

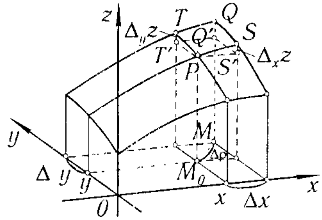


Рис. 169

Так как в этой плоскости y сохраняет постоянное значение, то z вдоль кривой PS будет меняться только в зависимости от изменения x. Дадим независимой переменной x приращение Δx; тогда z получит приращение, которое называют *частным приращением z по x* и обозначают через $\Delta_x z$ (на рисунке отрезок SS'), так что

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{1}$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, то z получает приращение, называемое *частным приращением z по y*. Это приращение обозначают символом $\Delta_y z$ (на рисунке отрезок TT');

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

Приращение $\Delta_y z$ функция получает «вдоль линии» пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = \text{const}$, параллельной плоскости Oyz.

Наконец, сообщив аргументу x приращение Δx, а аргументу y — приращение Δy, получим для z новое приращение Δz, которое называется *полным приращением* функции z и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3}$$

На рис. 169 Δz изображается отрезком QQ'.

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример. $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

При $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$ имеем $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных. Так, для функции трех переменных $u = f(x, y, t)$ имеем:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. Непрерывность функции нескольких переменных

Введем одно важное вспомогательное понятие — понятие окрестности данной точки.

Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

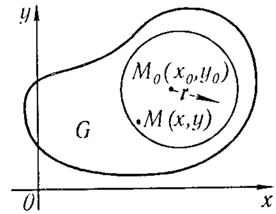


Рис. 170

Если мы говорим, что функция $f(x, y)$ обладает каким-либо свойством «вблизи точки (x_0, y_0)» или «в окрестности точки (x_0, y_0)», то под этим подразумеваем, что найдется такой круг с центром (x_0, y_0), во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Прежде чем рассматривать понятие непрерывности функции нескольких переменных, рассмотрим понятие предела функции нескольких переменных*).

Пусть дана функция

$$z = f(x, y),$$

определенная в некоторой области G плоскости Oxy. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области G или на ее границе (рис. 170).

Определение 1. Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$$

Определение 2. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{1}$$

*) Мы будем в основном рассматривать функции двух переменных, так как рассмотрение трех и более переменных не вносит никаких принципиальных изменений, но вносит добавочные технические трудности.

причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначим $x = x_0+\Delta x$, $y = y_0+\Delta y$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) \tag{1'}$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] = 0. \tag{1''}$$

Обозначим $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. При $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ $\Delta\rho\to 0$, и обратно, если $\Delta\rho\to 0$, то $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Замечая, далее, что выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (1″), есть полное приращение функции Δz, равенство (1″) можно переписать в форме

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \Delta z = 0. \tag{1'''}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в области.*

Если в некоторой точке $N(x_0,y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N(x_0,y_0)$ называется *точкой разрыва* функции $z=f(x,y)$. Условие (1′) может не выполняться, например, в следующих случаях:

1) $z=f(x,y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N(x_0,y_0)$, за исключением самой точки $N(x_0,y_0)$;

2) функция $z=f(x,y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0,y_0)$, но не существует предела $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

3) функция определена во всех точках окрестности $N(x_0,y_0)$ и существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, но

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0).$$

Пример 1. Функция

$$z = x^2+y^2$$

непрерывна при любых значениях x и y, т.е. в любой точке плоскости Oxy.

Действительно, каковы бы ни были числа x и y, Δx и Δy, имеем:

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2]-(x^2+y^2) = 2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2,$$

следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Приведем пример разрывной функции.

Пример 2. Функция
$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$
определена всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$ (рис. 171, 172).

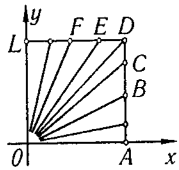


Рис. 171

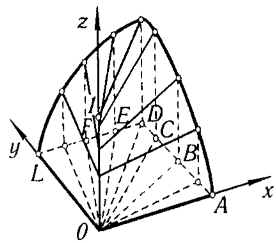


Рис. 172

Рассмотрим значения z вдоль прямой $y = kx$ ($k = \text{const}$). Очевидно, вдоль этой прямой
$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$
т.е. функция z вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, сохраняет постоянное значение, зависящее от углового коэффициента k прямой. Поэтому, подходя к началу координат по различным путям, мы будем получать различные предельные значения, а это значит, что функция $f(x, y)$ не имеет предела, когда точка (x, y) на плоскости Oxy стремится к началу координат. Следовательно, функция разрывна в этой точке. Эту функцию нельзя доопределить в начале координат так, чтобы она стала непрерывной. Легко видеть, с другой стороны, что в остальных точках эта функция непрерывна.

Укажем без доказательства некоторые важные свойства функции многих переменных, непрерывной в замкнутой и ограниченной области. Эти свойства аналогичны свойствам функции одной переменной, непрерывной на отрезке (см. § 10 гл. II).

Свойство 1. Если функция $f(x, y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в области D найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение
$$f(x_0, y_0, \ldots) \geqslant f(x, y, \ldots),$$
и по крайней мере одна точка $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots)$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение
$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) \leqslant f(x, y, \ldots).$$
Значение функции $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ будем называть *наибольшим значением* функции $f(x, y, \ldots)$ в области D, а значение $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) = m$ *наименьшим значением*.

Это свойство формулируют и так. *Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.*

Свойство 2. Если функция $f(x,y,\ldots)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области D и если M и m — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,\ldots)$ в области, то для любого числа μ, удовлетворяющего условию $m<\mu<M$, найдется в области такая точка $N^*(x_0^*,y_0^*,\ldots)$, что будет выполняться равенство $f(x_0^*,y_0^*,\ldots)=\mu$.

Следствие свойства 2. Если функция $f(x,y,\ldots)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых функция $f(x,y,\ldots)$ обращается в нуль.

§ 5. Частные производные функции нескольких переменных

Определение. *Частной производной по x* от функции $z=f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z=f(x,y)$ обозначается одним из символов

$$z'_x,\quad f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогично *частная производная по y* от функции $z=f(x,y)$ определяется как предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ по y к приращению Δy при стремлении Δy к нулю. Частная производная по y обозначается одним из символов

$$z'_y,\quad f'_y,\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, мы можем определения частных производных сформулировать так: *частной производной по x* от функции $z=f(x,y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y — постоянная. *Частной производной по y* от функции $z=f(x,y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x — постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одного переменного, и только требуется каждый раз помнить, по какому переменному ищется производная.

Пример 1. Дана функция $z=x^2\sin y$; требуется найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos y.$$

Пример 2. $z = x^y$.

Здесь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, если имеем функцию u четырех переменных x, y, z, t:

$$u = f(x, y, z, t),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 3. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

§ 6. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных

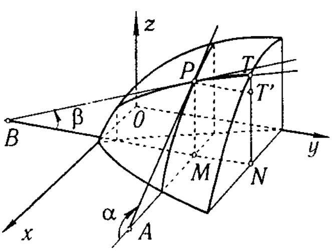


Рис. 173

Пусть уравнение

$$z = f(x, y)$$

есть уравнение поверхности, изображенной на рис. 173.

Проведем плоскость $x = \text{const}$. В сечении этой плоскости с поверхностью получится линия PT. При данном x рассмотрим на плоскости Oxy некоторую точку $M(x, y)$. Точке M соответствует точка $P(x, y, z)$, принадлежащая поверхности $z = f(x, y)$. Оставляя x неизменным, дадим переменному y приращение $\Delta y = |MN| = |PT'|$. Тогда функция z получит приращение $\Delta_y z = |TT'|$ (точке $N(x, y + \Delta y)$ соответствует точка $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$ на поверхности $z = f(x, y)$).

Отношение $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ равно тангенсу угла, образуемого *секущей* PT с положительным направлением оси Oy:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg}\widehat{TPT'}.$$

Следовательно, предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

равен тангенсу угла β, образованного касательной PB к кривой PT в точке P с положительным направлением оси Oy:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta.$$

Итак, частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью $x = \text{const}$.

Аналогично частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ численно равна тангенсу угла наклона α касательной к сечению поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью $y = \text{const}$.

§ 7. Полное приращение и полный дифференциал

По определению полного приращения функции $z = f(x,y)$ имеем (см. § 3 гл. VIII):

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y). \tag{1}$$

Предположим, что $f(x,y)$ в рассматриваемой точке (x,y) имеет непрерывные частные производные.

Выразим Δz через частные производные. Для этого в правой части равенства (1) прибавим и вычтем $f(x, y+\Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]. \tag{2}$$

Выражение

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

стоящее во второй квадратной скобке, можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного y (значение x остается постоянным). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}, \tag{3}$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Точно так же выражение, стоящее в первой квадратной скобке равенства (2), можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного x (второй аргумент сохраняет одно и то же значение $y + \Delta y$). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}, \tag{4}$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x + \Delta x$.

Внося выражения (3) и (4) в равенство (2), получим:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}. \tag{5}$$

Так как, по предположению, частные производные непрерывны, то

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ заключены, соответственно, между x и $x+\Delta x$, y и $y+\Delta y$, то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ стремятся, соответственно, к x и y). Равенства (6) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1,\\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{6$'$}$$

где величины γ_1 и γ_2 стремятся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю (т.е. когда $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).

В силу равенств (6$'$) соотношение (5) принимает вид

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y. \tag{5$'$}$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Действительно, отношение $\frac{\gamma_1\Delta x}{\Delta\rho} \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$, так как γ_1 является бесконечно малой величиной, а $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$ — ограниченной $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \leqslant 1\right)$. Аналогично проверяется, что $\frac{\gamma_2\Delta y}{\Delta\rho} \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy. При $f'_x(x,y) \neq 0$ и $f'_y(x,y) \neq 0$ это выражение представляет собой ***главную*** часть приращения, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Определение. Функция $z = f(x,y)$, полное приращение Δz которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy, и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho$, называется *дифференцируемой в данной точке*, а линейная часть приращения называется ***полным дифференциалом*** и обозначается через dz или df.

Из равенства (5$'$) следует, что если функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y.$$

Равенство (5$'$) можно переписать в виде

$$\Delta z = dz + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y,$$

и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta\rho$ можно написать следующее ***приближенное*** равенство:

$$\Delta z \approx dz.$$

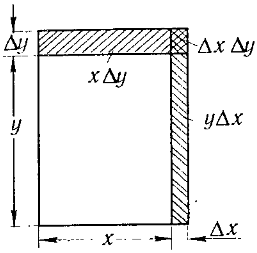


Рис. 174

Приращения независимых переменных Δx и Δy мы будем называть *дифференциалами* независимых переменных x и y и обозначать, соответственно, через dx и dy. Тогда выражение полного дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Таким образом, если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в точке (x, y), и ее полный дифференциал равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных.

Пример 1. Найти полный дифференциал и полное приращение функции $z = xy$ в точке $(2; 3)$ при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = y\,dx + x\,dy = y\Delta x + x\Delta y.$$

Следовательно,

$$\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72,$$
$$dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7.$$

На рис. 174 дана иллюстрация к этому примеру.

Предыдущие рассуждения и определения соответственным образом обобщаются на функции любого числа аргументов.

Если имеем функцию любого числа переменных

$$w = f(x, y, z, u, \ldots, t),$$

причем все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывны в точке $(x, y, z, u, \ldots, t)$, то выражение

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

является главной частью полного приращения функции и называется ***полным дифференциалом.*** Доказательство того, что разность $\Delta w - dw$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \cdots + (\Delta t)^2}$, проводится совершенно так же, как и для функции двух переменных.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ трех переменных x, y, z.

Решение. Заметив, что частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z = e^{x^2+y^2} \sin 2z$$

непрерывны при всех значениях x, y, z, находим:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = e^{x^2+y^2}(2x \sin^2 z\,dx + 2y \sin^2 z\,dy + \sin 2z\,dz).$$

§ 8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \tag{1}$$

Мы имели приближенную формулу:

$$\Delta z \approx dz, \tag{2}$$

где

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{3}$$

Подставляя в формулу (1) вместо Δz развернутое выражение для dz, получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y, \tag{4}$$

верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx и Δy.

Покажем, как используются формулы (2) и (4) для приближенных вычислений.

Задача. Вычислить объем материала, нужного для изготовления цилиндрического стакана следующих размеров (рис. 175):

радиус внутреннего цилиндра R,
высота внутреннего цилиндра H,
толщина стенок и дна стакана k.

Решение. Дадим два решения этой задачи: точное и приближенное.

а) **Точное решение.** Искомый объем v равен разности объемов внешнего цилиндра и внутреннего цилиндра. Так как радиус внешнего цилиндра равен $R+k$, а высота $H+k$, то

$$v = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H,$$

или

$$v = \pi(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \tag{5}$$

б) **Приближенное решение.** Обозначим через f объем внутреннего цилиндра, тогда $f = \pi R^2 H$. Это — функция двух переменных R и H. Если увеличим R и H на k, то функция f получит приращение Δf; но это и будет искомый объем v, т.е. $v = \Delta f$.

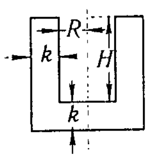


Рис. 175

На основании соотношения (1) имеем приближенное равенство

$$v \approx df,$$

или

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H.$$

Но так как

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \qquad \Delta R = \Delta H = k,$$

то получаем:

$$v \approx \pi(2RHk + R^2k). \tag{6}$$

Сравнивая результаты (5) и (6), видим, что они отличаются на величину $\pi(Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$, состоящую из членов второго и третьего порядка малости относительно k.

Применим эти формулы к числовым примерам.

Пусть $R = 4$ *см*, $H = 20$ *см*, $k = 0{,}1$ *см*.

Применяя (5), получим точно:

$$v = \pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi.$$

Применяя формулу (6), получим приближенно:

$$v \approx \pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1) = 17{,}6\pi.$$

Следовательно, приближенная формула (6) дает ответ с ошибкой меньшей, чем $0{,}3\pi$, что составляет $100\cdot\frac{0{,}3\pi}{17{,}881\pi}\%$, т.е. менее 2% измеренной величины.

§ 9. Приложение дифференциала к оценке погрешности при вычислениях

Пусть некоторая величина u является функцией величин x, y, z, ..., t:

$$u = f(x, y, z, \ldots, t),$$

причем определяя каким-то способом значения величин x, y, z, ..., t, мы допускаем погрешности Δx, Δy, ..., Δt. Тогда значение

u, вычисленное по неточным значениям аргументов, получится с погрешностью

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ \ldots,\ z + \Delta z,\ t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t).$$

Ниже мы займемся оценкой погрешности Δu, если известны погрешности Δx, Δy, $\ldots, \Delta t$.

При достаточно малых абсолютных значениях величин Δx, Δy, $\ldots$, Δt можем приближенно заменить полное приращение полным дифференциалом

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

Здесь значения частных производных и значения погрешностей аргументов могут быть как положительными, так и отрицательными. Заменяя их абсолютными величинами, получим неравенство

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta t|. \tag{1}$$

Если через $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, $\ldots$, $|\Delta^* u|$ обозначим *максимальные абсолютные* погрешности соответствующих величин (границы для абсолютных величин значений погрешностей), то можно, очевидно, принять:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta^* t|. \tag{2}$$

Примеры.

1. Пусть $u = x + y + z$, тогда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|.$$

2. Пусть $u = x - y$, тогда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|.$$

3. Пусть $u = xy$, тогда

$$|\Delta^* u| = |x|\,|\Delta^* y| + |y|\,|\Delta^* x|.$$

4. Пусть $u = \dfrac{x}{y}$, тогда

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta^* y| = \frac{|y|\,|\Delta^* x| + |x|\,|\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Гипотенуза c и катет a прямоугольного треугольника ABC, определенные с максимальными абсолютными погрешностями $|\Delta^* c| = 0{,}2$, $|\Delta^* a| = 0{,}1$, соответственно равны $c = 75$, $a = 32$. Определить угол A по формуле $\sin A = \dfrac{a}{c}$ и максимальную абсолютную погрешность $|\Delta^* A|$ при вычислении угла A.

Решение. $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $A = \arcsin \dfrac{a}{c}$, следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

По формуле (2) получим:

$$|\Delta A^*| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}2 = 0{,}00273 \text{ радианов} = 9'24''.$$

Таким образом,

$$A = \arcsin\frac{32}{75} \pm 9'24''.$$

6. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катет $b = 121{,}56$ *м*, угол $A = 25°21'40''$, при этом максимальная абсолютная погрешность при определении катета b равна $|\Delta^* b| = 0{,}05$ *м*, максимальная абсолютная погрешность при определении угла A равна $|\Delta^* A| = 12''$.

Определить максимальную абсолютную погрешность при вычислении катета a по формуле $a = b\operatorname{tg} A$.

Решение. По формуле (2) находим:

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A|\,|\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}|\Delta^* A|.$$

Подставляя соответствующие значения (и помня, что $|\Delta^* A|$ нужно выразить в радианах), получим:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25°21'40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25°21'40''}\,\frac{12}{206265} = 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324 \text{ м}.$$

Отношение погрешности Δx некоторой величины к приближенному значению x этой величины называется *относительной погрешностью* величины. Будем его обозначать δx,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Максимальной относительной погрешностью величины x называется отношение максимальной абсолютной погрешности к абсолютной величине x и обозначается $|\delta^* x|$,

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \tag{3}$$

Для оценки максимальной относительной погрешности функции u разделим все числа равенства (2) на $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta^* y| + \cdots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right| |\Delta^* t|, \tag{4}$$

но

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t}\ln|f|.$$

Поэтому равенство (3) можно переписать так:

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right| |\Delta^* y| + \cdots + \left|\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\right| |\Delta^* t|, \tag{5}$$

или коротко:

$$|\delta^* u| = \Big|\Delta^* \ln|f|\Big|. \tag{6}$$

Из формул как (3), так и (5) следует, что максимальная относительная погрешность функции равняется максимальной абсолютной погрешности логарифма этой функции.

Из формулы (6) следуют правила, применяемые в приближенных вычислениях.

1. Пусть $u = xy$. Пользуясь результатами примера 3, получим:

$$|\delta^* u| = \frac{|y|\,|\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x|\,|\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

т.е. максимальная относительная погрешность произведения равняется сумме максимальных относительных погрешностей сомножителей.

2. Если $u = \frac{x}{y}$, то, пользуясь результатами примера 4, находим:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Замечание. На основании примера 2 следует, что если $u = x - y$, то

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Если x и y близки, то может оказаться, что $|\delta^* u|$ будет очень велика по сравнению с определяемой величиной $x - y$. Это обстоятельство следует учитывать при производстве вычислений.

Пример 7. Период колебаний маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

Какую относительную погрешность в определении T мы допустим по этой формуле, принимая $\pi \approx 3{,}14$ (с точностью до 0,005), $l = 1$ *м* (с точностью до 0,01 *м*), $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2} (с точностью до 0,02 *м/сек*^{2}).

Решение. По формуле (6) максимальная относительная погрешность равна

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Но

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g.$$

Вычислим $|\Delta^* \ln T|$. Учитывая, что $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta^*\pi = 0{,}005$, $l = 1$ м, $\Delta^* l = 0{,}01$ *м*, $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, $\Delta^* g = 0{,}02$ *м/сек*^{2}, получим:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^*\pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2\cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

Итак, максимальная относительная погрешность равна

$$\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76\%.$$

§ 10. Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции

Предположим, что в уравнении

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y). \tag{2}$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.

Конечно, z можно выразить и непосредственно через x, y, а именно:

$$z = F[\varphi(x,y),\ \ \psi(x,y)]. \tag{3}$$

Пример 1. Пусть

$$z = u^3v^3 + u + 1, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = e^{x+y} + 1,$$

тогда

$$z = (x^2 + y^2)^3(e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Предположим, что функции $F(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам, и поставим задачу: вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, исходя из уравнений (1) и (2) и не пользуясь уравнением (3).

Дадим аргументу x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда в силу уравнения (2), u и v получат приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

Но если u и v получают приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, то и функция $z = F(u,v)$ получит приращение Δz, определяемое формулой (5′) § 7 гл. VIII:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1\Delta_x u + \gamma_2\Delta_x v.$$

Разделим все члены этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ (в силу непрерывности функций u и v). Но тогда γ_1 и γ_2 тоже стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Если бы мы дали приращение Δy переменному y, а x оставили неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений нашли бы:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4′}$$

Пример 2.

$$z = \ln(u^2 + v), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y;$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Используя формулы (4) и (4′), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} 2x = \frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2} + x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x+y^2} + 1\right).$$

В последние выражения вместо u и v необходимо подставить e^{x+y^2} и x^2+y соответственно.

Для случая большего числа переменных формулы (4) и (4′) естественным образом обобщаются.

Например, если $w = F(z, u, v, s)$ есть функция четырех аргументов z, u, v, s, а каждый из них зависит от x и y, то формулы (4) и (4′) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если задана функция $z = F(x, y, u, v)$, где y, u, v в свою очередь зависят от одного аргумента x:

$$y = f(x), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x).$$

то, по сути дела, z является функцией только ***одного*** переменного x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dx}$.

Эта производная вычисляется по первой из формул (5):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

но так как y, u, v — функции только ***одного*** x, то частные производные обращаются в обыкновенные; кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$; поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Эта формула носит название формулы для вычисления *полной производной* $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от ***частной*** производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Пример 3.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Формула (6) дает в этом случае следующий результат:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Найдем далее полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (1) и (2).

Подставляем выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (4) и (4′), в формулу полного дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6}$$

Получаем:

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Произведем следующие преобразования в правой части:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right). \tag{7}$$

Но

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy &= du,\\ \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy &= dv. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Равенство (7) с учетом равенств (8) можно переписать так:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv \tag{9}$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv. \tag{9'}$$

Сравнивая (6) и (9′), можем сказать, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеет тот же вид, т.е. форма дифференциала инвариантна, являются ли u и v независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пример 4. Найти полный дифференциал сложной функции

$$z = u^2v^3, \quad u = x^2\sin y, \quad v = x^3e^y.$$

Решение. По формуле (9′) имеем:

$$dz = 2uv^3\,du + 3u^2v^2\,dv = 2uv^3(2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy) + 3u^2v^2(3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy).$$

Последнее выражение можно переписать и так:

$$dz = (2uv^3\cdot 2x\sin y + 3u^2v^2\cdot 3x^2e^y)\,dx + (2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

§ 11. Производная от функции, заданной неявно

Начнем рассмотрение этого вопроса с неявной функции одного переменного*). Пусть некоторая функция y от x определяется уравнением

$$F(x, y) = C.$$

Докажем следующую теорему.

---

*) В § 11 гл. III мы решали задачу о дифференцировании неявной функции одного переменного. Там мы рассматривали отдельные примеры и не нашли общей формулы, дающей производную от неявной функции, а также не выяснили условий существования этой производной.

Теорема. *Пусть непрерывная функция y от x задается неявно уравнением*

$$F(x,\ y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ — непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению (1); кроме того, в этой точке $F'_y(x,y) \neq 0$. Тогда функция y от x имеет производную

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y. При этом

$$F(x,y) = 0.$$

Дадим независимому переменному x приращение Δx. Функция y получит приращение Δy, т.е. значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует значение функции $y = \Delta y$. В силу уравнения $F(x,y) = 0$ будем иметь:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Следовательно,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = 0.$$

Левую часть последнего равенства, являющуюся полным приращением функции двух переменных по формуле (5′) § 7, можно переписать так:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

где γ_1 и γ_2 стремятся к нулю при Δx и Δy, стремящихся к нулю. Так как левая часть последнего выражения равна нулю, можно написать:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Разделим последнее равенство на Δx и вычислим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда, учитывая, что при этом γ_1 и γ_2 также стремятся к нулю и что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, в пределе получим:

$$y'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \tag{2$'$}$$

Мы доказали существование производной y'_x от функции, заданной неявно, и нашли формулу для ее вычисления.

Пример 1. Уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

определяет y как неявную функцию от x. Здесь

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно, по формуле (1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Заметим, что заданное уравнение определяет две разные функции (так как каждому значению x в промежутке $(-1, 1)$ соответствуют два значения y); однако найденное значение y'_x справедливо как для одной, так и для другой функции.

Пример 2. Дано уравнение, связывающее x и y:

$$e^y - e^x + xy = 0.$$

Здесь $F(x,\ y) = e^y - e^x + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Следовательно, по формуле (1) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$F(x,y,z) = 0. \tag{3}$$

Если каждой паре чисел x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению (3), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x и y.

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ неявно определяет две непрерывные функции z от x, y, которые можно выразить явно, разрешив уравнение относительно z; в этом случае мы получаем:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \ \text{ и } \ z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z от x и y, определяемой уравнением (3).

Когда мы ищем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, мы считаем y постоянным. Поэтому здесь применима формула (2′), если только независимым переменным считать x, а функцией z. Следовательно,

$$z'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Таким же путем находим

$$z'_y = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Предполагается, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Пример 3. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Дифференцируя эту функцию как явную (после разрешения уравнения относительно z), мы получили бы тот же результат.

Пример 4.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Здесь

$$F(x,y,z) = e^z + x^2y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Замечание. Все рассуждения этого параграфа производились в предположении, что уравнение $F(x,y) = 0$ определяет некоторую функцию одного переменного $y = \varphi(x)$; уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет некоторую функцию двух переменных $z = f(x,y)$. Укажем без доказательства, какому условию должна удовлетворять функция $F(x,y)$, чтобы уравнение $F(x,y) = 0$ определяло однозначную функцию $y = \varphi(x)$.

Теорема. *Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0) и имеет там непрерывные частные производные, причем $F'_y(x,y) \neq 0$, и пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Тогда существует окрестность, содержащая точку (x_0, y_0), в которой уравнение $F(x,y) = 0$ определяет однозначную функцию $y = \varphi(x)$.*

Аналогичная теорема имеет место и для условий существования неявной функции, определяемой уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Замечание. При выводе правил дифференцирования неявных функций мы пользовались условиями, которые и определяют существование неявных функций.

§ 12. Частные производные различных порядков

Пусть имеем функцию двух переменных:

$$z = f(x,y).$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y. Поэтому от них можно снова находить частные производные. Следовательно, частных производных второго порядка от функции двух переменных *четыре*, так как каждую из функций $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно дифференцировать как по x, так и по y.

Вторые частные производные обозначают так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, здесь f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, здесь f сначала дифференцируется по x, а потом результат дифференцируется по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$, здесь f сначала дифференцируется по y, а потом результат дифференцируется по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, здесь f дифференцируется последовательно два раза по y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка. Их будет, очевидно, уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, *частная производная n-го порядка* есть первая производная от производной $(n-1)$-го порядка. Например, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\, \partial y^{n-p}}$ есть производная n-го порядка, здесь функция z сначала p раз дифференцировалась по x, а потом $n-p$ раз по y.

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 1. Вычислить частные производные второго порядка от функции

$$f(x, y) = x^2 y + y^3.$$

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}$, если $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = 2ye^x + 6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2ye^x + 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2.$$

Пример 3. Вычислить $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z}$, если $u = z^2 e^{x+y^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z} = 4yze^{x+y^2}.$$

Естественно поставить вопрос, зависит ли результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным, т.е. будут ли, например, тождественно равны производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

или

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\,\partial y\,\partial t} \text{ и } \frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial t\,\partial x\,\partial y} \text{ и т. д.}$$

Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция* $z = f(x,y)$ *и ее частные производные* f'_x, f'_y, f''_{xy} *и* f''_{yx} *определены и непрерывны в точке* $M(x,y)$ *и в некоторой ее окрестности, то в этой точке*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим выражение

$$A = [f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x+\Delta x,\ y)] - [f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)].$$

Если введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определенную равенством

$$\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

то A можно записать в виде

$$A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Так как, по предположению, f'_x определена в окрестности точки (x,y), то, следовательно, $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x, x+\Delta x]$; но тогда, применяя теорему Лагранжа, получим:

$$A = \Delta x\,\varphi'(\bar{x}),$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$. Но

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Так как f''_{xy} определена в окрестности точки (x,y), то f'_x дифференцируема на отрезке $[y, y+\Delta y]$, поэтому, применив к полученной разности вновь теорему Лагранжа (по переменному y), будем иметь:

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y\, f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y+\Delta y$.

Следовательно, первоначальное выражение A равно

$$A = \Delta x\,\Delta y\, f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1}$$

Переставив средние слагаемые в первоначальном выражении для A, получим

$$A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)].$$

Введем вспомогательную функцию
$$\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$
тогда
$$A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y).$$
Применяя снова теорему Лагранжа, получим:
$$A = \Delta y\, \psi'(\overline{\overline{y}}),$$
где $\overline{\overline{y}}$ заключено между y и $y+\Delta y$. Но
$$\psi'(\overline{\overline{y}}) = f'_y(x+\Delta x, \overline{\overline{y}}) - f'_y(x, \overline{\overline{y}}).$$
Применив еще раз теорему Лагранжа, получим:
$$f'_y(x+\Delta x, \overline{\overline{y}}) - f'_y(x, \overline{\overline{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}),$$
где $\overline{\overline{x}}$ заключено между x и $x+\Delta x$.

Таким образом, первоначальное выражение A можно записать в виде
$$A = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}). \tag{2}$$

Левые части равенства (1) и (2) равны A, следовательно, равны и правые, т.е.
$$\Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}),$$
откуда
$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получим:
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{xy}(\bar{x},\ \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\overline{\overline{x}},\ \overline{\overline{y}}).$$
Так как производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x,y), то $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f''_{xy}(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}) = f_{yx}(x,y)$. Окончательно получим:
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y),$$
что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы как следствие получается, что если частные производные $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k\, \partial y^{n-k}}$ и $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\, \partial x^k}$ непрерывны, то
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\, \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\, \partial x^k}.$$

Аналогичная теорема имеет место и для функции любсго числа переменных.

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}$, если $u = e^{xy}\sin z$.

Решение.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}\sin z, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^{xy}\sin z + xye^{xy}\sin z = e^{xy}(1+xy)\sin z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xy}(1+xy)\cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}\sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = xe^{xy}\cos z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = e^{xy}\cos z + xye^{xy}\cos z = e^{xy}(1+xy)\cos z.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}$$

(см., кроме того, примеры 1–2 этого параграфа).

§ 13. Поверхности уровня

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D, в которой задана функция

$$u = u(x, y, z). \tag{1}$$

В этом случае говорят, что в области D задано *скалярное поле*. Если, например, $u(x, y, z)$ обозначает температуру в точке $M(x, y, z)$, то говорят, что задано скалярное поле температур; если область D заполнена жидкостью или газом и $u(x, y, z)$ обозначает давление, то имеется скалярное поле давлений и т.д.

Рассмотрим точки области D, в которых функция $u(x, y, z)$ имеет постоянное значение c:

$$u(x, y, z) = \text{c}. \tag{2}$$

Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Если возьмем другое значение c, то получим другую поверхность. Эти поверхности называются *поверхностями уровня*.

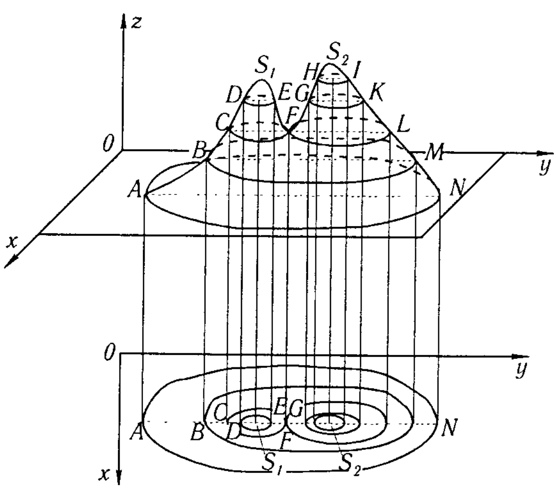


Рис. 176

Пример 1. Пусть задано скалярное поле.

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

Здесь поверхностями уровня будут поверхности

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

т.е. эллипсоиды с полуосями $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$.

Если функция u есть функция двух переменных x и y:

$$u = u(x, y),$$

то «поверхностями» уровня будут линии на плоскости Oxy:

$$u(x, y) = c, \tag{2'}$$

которые называются *линиями уровня*.

Если значения u мы будем откладывать по оси Oz:

$$z = u(x, y),$$

то линиями уровня на плоскости Oxy будут проекции линий, которые получаются в пересечении поверхности $z = u(x, y)$ с плоскостями $z = c$ (рис. 176). Зная линии уровня, легко исследовать характер поверхности $z = u(x, y)$.

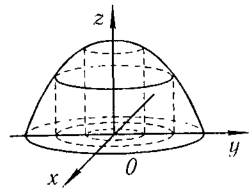


Рис. 177

Пример 2. Определить линии уровня функции $z = 1 - x^2 - y^2$. Линиями уровня будут линии с уравнениями $1 - x^2 - y^2 = c$. Это (рис. 177) окружности с радиусом $\sqrt{1 - c}$. В частности, при $c = 0$ получаем окружность $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. Производная по направлению

Рассмотрим в области D функцию $u = u(x, y, z)$ и точку $M(x, y, z)$. Проведем из точки M вектор $\boldsymbol{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 178). На векторе $\boldsymbol{S}$, на расстоянии Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Таким образом,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

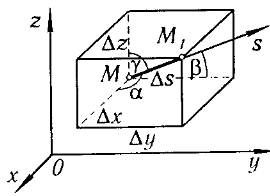


Рис. 178

Будем предполагать, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области D.

Аналогично тому, как это делалось в § 7, полное приращение функции представим так:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad (1)$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$. Разделим все члены равенства (1) на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Следовательно, равенство (2) можно переписать так:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \quad (3)$$

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется *производной от функции* $u = u(x, y, z)$ *в точке* (x, y, z) *по направлению вектора* $\boldsymbol{S}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т.е.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (3), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что, зная частные производные, легко найти производную по любому направлению $\boldsymbol{S}$. Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению. Так, например, при $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/2$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\pi/2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\pi/2 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

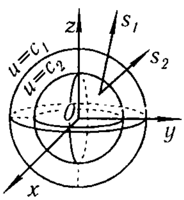


Рис. 179

Пример. Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Найти производную $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1,1,1)$: а) в направлении вектора $\boldsymbol{S}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$; б) в направлении вектора $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Решение. а) Находим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{S}_1$:

$$\cos\alpha = 2/\sqrt{4+1+9} = 2/\sqrt{14},$$
$$\cos\beta = 1/\sqrt{14}, \quad \cos\gamma = 3/\sqrt{14}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

в точке $M(1,1,1)$ будут

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) Находим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{S}_2$:

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}, \quad \cos\beta = 1/\sqrt{3}, \quad \cos\gamma = 1/\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Заметим для дальнейшего, что $2\sqrt{3} > 12/\sqrt{14}$ (рис. 179).

§ 15. Градиент

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = u(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Этот вектор называется *градиентом* функции $u(x, y, z)$. Говорят, что в области D определено *векторное поле градиентов*. Докажем, далее, следующую теорему, устанавливающую связь между градиентом и производной по направлению.

Теорема. *Пусть дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ и определено в этом скалярном поле поле градиентов*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\boldsymbol{S}$ равняется проекции вектора $\operatorname{grad} u$ *на вектор $\boldsymbol{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{S}^0$, соответствующий вектору $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\boldsymbol{S}^0$:

$$\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\boldsymbol{S}$. Следовательно, мы можем написать:

$$\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

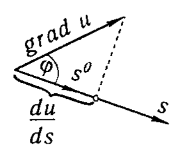


Рис. 180

Если обозначим угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\boldsymbol{S}^0$ через φ (рис. 180), то можем написать:

$$|\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{3}$$

или

$$\text{пр.}_{\boldsymbol{S}^0} \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

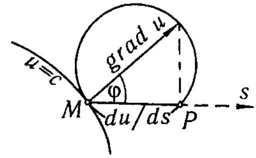


Рис. 181

Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы наглядно устанавливается связь между градиентом и производной в данной точке по любому направлению. В данной точке $M(x, y, z)$ строим вектор $\operatorname{grad} u$ (рис. 181). Строим сферу, для которой $\operatorname{grad} u$ является диаметром. Из точки M проводим вектор $\boldsymbol{S}$. Обозначим точку пересечения вектора $\boldsymbol{S}$ с поверхностью сферы через P. Тогда очевидно, что $MP = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$, где φ — угол между направлениями градиента и отрезка MP (при этом $\varphi < \frac{\pi}{2}$), т.е. $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Очевидно, что при изменении направления вектора $\boldsymbol{S}$ на противоположное производная изменит знак, а ее абсолютная величина останется прежней.

Установим некоторые свойства градиента.

1) *Производная в данной точке по направлению вектора $\boldsymbol{S}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\boldsymbol{S}$ совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно* $|\operatorname{grad} u|$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из равенства (3): наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial s}$ будет при $\varphi = 0$, и в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

2) *Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору* $\operatorname{grad} u$, *равна нулю.*

Это утверждение следует из формулы (3). Действительно, в этом случае

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi = 0.$$

Пример 1. Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

а) Определим градиент в точке $M(1, 1, 1)$. Выражение градиента этой функции в произвольной точке будет

$$\operatorname{grad} u = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{grad} u)_M = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad |\operatorname{grad} u|_M = 2\sqrt{3}.$$

б) Определим производную от функции u в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении градиента. Направляющие косинусы градиента будут

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

Замечание. Если функция $u = u(x, y)$ есть функция двух переменных, то вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

лежит в плоскости Oxy. Докажем, что $\operatorname{grad} u$ *направлен перпендикулярно к линии уровня* $u(x, y) = c$, лежащей в плоскости Oxy и проходящей через соответствующую точку. Действительно, угловой коэффициент k_1 касательной к линии уровня $u(x, y) = c$ будет равен $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$. Угловой коэффициент k_2 градиента равен $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. Очевидно, что $k_1 k_2 = -1$. Это и доказывает справедливость нашего утверждения (рис. 182). Аналогичное свойство градиента функции трех переменных будет установлено в § 6 гл. IX.

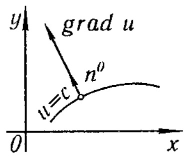


Рис. 182

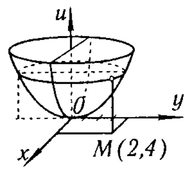


Рис. 183

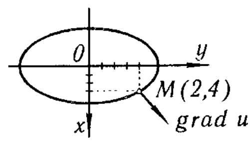


Рис. 184

Пример 2. Определить градиент функции $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ (рис. 183) в точке $M(2, 4)$.

Решение. Здесь
$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\Big|_M = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}y\Big|_M = \frac{8}{3}.$$

Следовательно,
$$\operatorname{grad} u = 2\boldsymbol{i} + \frac{8}{3}\boldsymbol{j}.$$

Уравнение линии уровня (рис. 184), проходящей через данную точку, будет
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

§ 16. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция двух переменных
$$z = f(x, y)$$
непрерывна вместе со всеми своими частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M(a, b)$. Тогда, аналогично тому, как это было в случае функции одного переменного (см. § 6 гл. IV), функцию двух переменных представим в виде суммы многочлена n-го порядка по степеням $(x - a)$ и $(y - b)$ и некоторого остаточного члена. Ниже будет показано, что для случая $n = 2$ эта формула имеет вид
$$f(x, y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \\ + \frac{1}{2!}[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2] + R_2, \quad (1)$$
где коэффициенты A_0, D, E, A, B, C не зависят от x и y, а R_2 — остаточный член, структура которого аналогична структуре остаточного члена в формуле Тейлора для функции одного переменного.

Применим формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ одного переменного y, считая x постоянным (ограничимся членами второго порядка)

$$f(x,y)=f(x,b)+\frac{y-b}{1}f'_y(x,b)+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}f''_{yy}(x,y)+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1), \qquad (2)$$

где $\eta_1=b+\theta_1(y-b_1)$, $0<\theta_1<1$. Функции $f(x,b)$, $f'_y(x,b)$, $f''_{yy}(x,b)$ разложим по формуле Тейлора по степеням $(x-a)$, ограничиваясь смешанными производными до третьего порядка включительно:

$$f(x,b)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b), \qquad (3)$$

где $\xi_1=x+\theta_2(x-a)$, $0<\theta_2<1$;

$$f'_y(x,y)=f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b), \qquad (4)$$

где $\xi_2=x+\theta_3(x-a)$, $0<\theta_3<1$;

$$f''_{yy}(x,b)=f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3,b), \qquad (5)$$

где $\xi_3=x+\theta_4(x-a)$, $0<\theta_4<1$.

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в формулу (2), получим:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+$$
$$+\frac{y-b}{1}\left[f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b)\right]+$$
$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3,b)\right]+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1).$$

Располагая слагаемые так, как указано в формуле (1), получим:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f'_x(a,b)+(y-b)f'_y(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2f''_{xx}(a,b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b)+(y-b)^2f''_{yy}(a,b)]+$$
$$+\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+$$
$$+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3,b)+(y-b)^3f'''_{yyy}(a,\eta_1)]. \qquad (6)$$

Это и есть *формула Тейлора при* $n=2$. Выражение

$$R_2=\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+$$
$$+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3,b)+(y-b)^3f'''_{yyy}(a,\eta_1)]$$

называется *остаточным членом.* Обозначим, далее, $x-a=\Delta x$, $y-b=\Delta y$, $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Преобразуем R_2:

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2,b)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_3,b)+\frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3}f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right]\Delta\rho^3.$$

Так как $|\Delta x| < \Delta\rho$, $|\Delta y| < \Delta\rho$ и третьи производные, по условию, ограничены, то коэффициент при $\Delta\rho^3$ ограничен в рассматриваемой области; обозначим его через α_0.

Тогда можем написать:

$$R_2 = \alpha_2 \Delta\rho^3.$$

Формула Тейлора (6) в принятых обозначениях для случая $n = 2$ примет вид

$$f(x,y) = f(a,b) + \Delta x f'_x(a,b) + \Delta y f'_y(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}[\Delta x^2 f''_{xx}(a,b) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a,b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a,b)] + \alpha_0 \Delta\rho^3. \quad (6')$$

При любом n формула Тейлора имеет аналогичный вид.

§ 17. Максимум и минимум функции нескольких переменных

Определение 1. Мы говорим, что функция $z = f(x,y)$ имеет *максимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$ (т.е. при $x = x_0$ и $y = y_0$), если

$$f(x_0, y_0) > f(x,y)$$

для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Совершенно аналогично говорят, что функция $z = f(x,y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$f(x_0, y_0) < f(x,y)$$

для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции, т.е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Пример 1. Функция

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

достигает минимума при $x = 1$, $y = 2$, т.е. в точке $(1,2)$. Действительно, $f(1,2) = -1$, а так как $(x-1)^2$ и $(y-2)^2$ всегда положительны при $x \neq 1$, $y \neq 2$, то

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1,$$

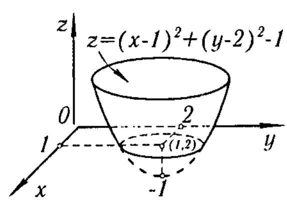


Рис. 185

т.е.

$$f(x,y) > f(1,2).$$

Геометрическая картина, соответствующая данному случаю, изображеиа на рис. 185

Пример 2. Функция

$$z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$$

при $x = 0$, $y = 0$ (т.е. в начале координат) достигает максимума (рис. 186).

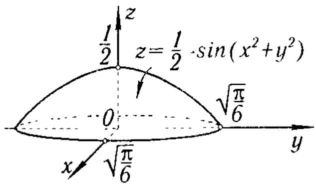


Рис. 186

Действительно,

$$f(0,0) = 1/2.$$

Возьмем внутри окружности $x^2 + y^2 = \pi/6$ точку (x, y), отличную от точки $(0,0)$; тогда при $0 < x^2 + y^2 < \pi/6$ будет

$$\sin(x^2 + y^2) > 0$$

и поэтому

$$f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$f(x,y) < f(0,0).$$

Данное выше определения максимума и минимума функции можно перефразировать следующим образом.

Положим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$; тогда

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает *максимума* в точке $M(x_0, y_0)$.

2) Если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает *минимума* в точке $M(x_0, y_0)$.

Эти формулировки переносятся без изменения на функции любого числа переменных.

Теорема 1. (***необходимые условия экстремума***). *Если функция $z = f(x,y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.*

Действительно, дадим переменному y определенное значение, именно $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одного переменного x. Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум (максимум или минимум), то, следовательно, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует. Совершенно аналогично можно доказать, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. В противном случае требуется дополнительное исследование.

Так, например, функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = 0$ и $y = 0$. Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, значение нуль не является ни максимумом, ни минимумом (рис. 187).

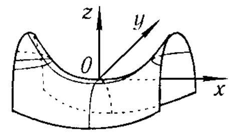


Рис. 187

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (или не существует), называются *критическими* точками функции $z = f(x, y)$. Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то (в силу теоремы 1) это может случиться только в критической точке.

Для исследования функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 2. *Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$, т.е.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда при $x = x_0$, $y = y_0$:

1) *$f(x, y)$ имеет максимум, если*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

2) *$f(x, y)$ имеет минимум, если*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

3) *$f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < 0;$$

4) *если* $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$, *то экстремум может быть и может не быть* (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Доказательство. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x, y)$ (формула (6) § 16). Полагая

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$$

будем иметь:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а α_0 стремится к нулю при $\Delta\rho \to 0$.

По условию
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0 (\Delta\rho)^3. \quad (1)$$

Обозначим теперь значения вторых частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$ через A, B, C:
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0} = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{M_0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0} = C.$$

Обозначим через φ угол между направлением отрезка M_0M, где M есть точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, и осью Ox; тогда
$$\Delta x = \Delta\rho \cos\varphi, \quad \Delta y = \Delta\rho \sin\varphi.$$

Подставляя эти выражения в формулу для Δf, найдем:
$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + 2\alpha_0\Delta\rho]. \quad (2)$$

Предположим, что $A \neq 0$.

Разделив и умножив на A выражение, стоящее в квадратных скобках, получим:
$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right]. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь четыре возможных случая.

1) Пусть $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Тогда в числителе дроби стоит сумма двух неотрицательных величин. Они одновременно в нуль не обращаются, так как первый член обращается в нуль при $\operatorname{tg}\varphi = -A/B$, второй при $\sin\varphi = 0$.

Если $A < 0$, то дробь есть отрицательная величина, не обращающаяся в нуль. Обозначим ее через $-m^2$; тогда
$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2[-m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho],$$

где m не зависит от $\Delta\rho$, $\alpha_0\Delta\rho \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$. Следовательно, при достаточно малых $\Delta\rho$ будет:
$$\Delta f < 0,$$

или
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Но тогда для всех точек $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, достаточно близких к точке (x_0, y_0), имеет место неравенство
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0),$$

а это означает, что в точке (x_0, y_0) функция $f(x,y)$ достигает ***максимума***.

2) Пусть $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Тогда, аналогично рассуждая, получим:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho]$$

или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

т.е. $f(x,y)$ имеет ***максимум*** в точке (x_0, y_0).

3$'$) Пусть $AC-B^2 < 0$, $A > 0$. В этом случае функция ***не имеет ни максимума, ни минимума***. Функция возрастает, когда мы движемся из точки (x_0, y_0) по одним направлениям, и убывает, когда мы движемся по другим направлениям. Действительно, при перемещении вдоль луча $\varphi = 0$ имеем:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A + 2\alpha_0\Delta\rho] > 0;$$

при движении вдоль этого луча функция возрастает. Если же перемещаться вдоль луча $\varphi = \varphi_0$, такого, что $\operatorname{tg}\varphi_0 = -A/B$, то при $A > 0$ будет:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_0 + 2\alpha_0\Delta\rho\right] < 0;$$

при движении вдоль этого луча функция убывает.

3$''$) Пусть $AC - B^2 < 0$, $A < 0$. В этом случае функция тоже ***не имеет ни максимума, ни минимума***. Исследование проводится так же, как и в случае 3$'$.

3$'''$) Пусть $AC - B^2 < 0$, $A = 0$. Тогда $B \neq 0$, и равенство (2) можно переписать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha_0\Delta\rho].$$

При достаточно малых значениях φ выражение, стоящее в круглых скобках, сохраняет знак, так как оно близко к $2B$, а множитель $\sin\varphi$ меняет знак в зависимости от того, будет ли φ больше нуля или меньше нуля (после выбора $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$ мы можем ρ взять настолько малым, что $2\alpha_0$ не будет изменять знак всей квадратной скобки). Следовательно, и в этом случае Δf меняет знак при различных φ, т.е. при различных Δx и Δy, следовательно, и в этом случае нет ни максимума, ни минимума.

Таким образом, каков бы ни был знак A, имеем всегда следующее положение:

Если $AC - B^2 < 0$ в точке (x_0, y_0), то функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума. В этом случае поверхность, служащая графиком функции, может вблизи этой точки иметь, например, форму седла (см. выше рис. 187). Говорят, что функция имеет в этой точке *минимакс*.

4) Пусть $AC - B^2 = 0$. В этом случае на основании формул (2) и (3) сделать заключение о знаке Δf нельзя. Так, например, при $A \neq 0$ будем иметь:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right];$$

при $\varphi = \operatorname{arctg}(-A/B)$ знак Δf определяется знаком $2\alpha_0$, здесь требуется ***специальное дальнейшее исследование*** (например, с помощью формулы Тейлора более высокого порядка или каким-либо иным способом). Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

получаем:

$$x = -4/3, \quad y = 1/3.$$

2) Находим производные второго порядка в критической точке $(-4/3; 1/3)$ и определяем характер критической точки:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$
$$AC - B^2 = 2\cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке $(-4/3; 1/3)$ данная функция имеет минимум, а именно:

$$z_{\min} = -4/3.$$

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. 1) Найдем критические точки, пользуясь необходимыми условиями экстремума:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем две критические точки:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0.$$

2) Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Исследуем характер первой критической точки:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = -3, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 6,$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0;\ A > 0.$$

Следовательно, в точке $(1; 1)$ данная функция имеет минимум, именно:

$$z_{\min} = -1.$$

4) Исследуем характер второй критической точки $M_2(0, 0)$:

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0;$$

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, во второй критической точке функция не имеет ни максимума, ни минимума (минимакс).

Пример 5. Разложить данное положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x, второе — через y; тогда третье будет $a - x - y$. Произведение этих слагаемых равно

$$u = xy(a - x - y).$$

По условию задачи $x > 0$, $y > 0$, $a-x-y > 0$, т.е. $x+y < a$, $u > 0$. Следовательно, x и y могут принимать значения, принадлежащие области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

Найдем частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - 2x - y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - 2y - x).$$

Приравнивая производные нулю, получим систему уравнений

$$y(a - 2x - y) = 0, \quad x(a - 2y - x) = 0.$$

Решая эту систему, находим критические точки:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & y_1 = 0, & M_1(0, 0), \\ x_2 = 0, & y_2 = a, & M_2(0, a), \\ x_3 = a, & y_3 = 0, & M_3(a, 0), \\ x_4 = a/3, & y_4 = a/3, & M_4(a/3, a/3). \end{array}$$

Первые три точки лежат на границе области, последняя — внутри. На границе области функция u равна нулю, а внутри области она положительна; следовательно, в точке $(a/3, a/3)$ функция u имеет максимум (так как это единственная экстремальная точка внутри треугольника). Максимальное значение произведения есть

$$u_{\max} = \frac{a}{3}\frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Проведем исследование характера критических точек, пользуясь достаточными условиями. Найдем частные производные второго порядка функции u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

В точке $M_1(0,0)$ имеем $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = a$, $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $AC - B^2 = -a^2 < 0$. Следовательно, в точке M_1 нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_2(0,a)$ имеем $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a$, $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -a$, $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $AC - B^2 = -a^2 < 0$. Значит, в точке M_2 тоже нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_3(a,0)$ имеем $A = 0$, $B = -a$, $C = -2a$, $AC - B^2 = -a^2 > 0$. И в точке M_3 нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ имеем $A = -\frac{2a}{3}$, $B = -\frac{a}{3}$, $C = -\frac{2a}{3}$, $AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0$, $A < 0$. Следовательно, в точке M_4 имеем максимум.

Замечание. Теория максимумов и минимумов функции нескольких переменных является основой для одного метода получения формул для изображения функциональных зависимостей на основании экспериментальных данных. Этот вопрос изложен в § 19.

§ 18. Максимум и минимум функции нескольких переменных, связанных данными уравнениями (условные максимумы и минимумы)

Во многих задачах на разыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к разысканию максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями (например, они должны удовлетворять данным уравнениям).

Рассмотрим, например, такую задачу. Из данного куска жести площадью $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Обозначим длину, ширину и высоту коробки через x, y, z. Задача сводится к разысканию максимума функции

$$v = xyz$$

при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Здесь мы имеем задачу на *условный экстремум*: переменные x, y, z ***связаны условием*** $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. В настоящем параграфе мы рассмотрим методы решения таких задач.

Рассмотрим сначала вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если эти переменные связаны ***одним*** условием.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y) \tag{1}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

При наличии условия (2) из двух переменных x и y ***независимым*** будет только ***одно***, например x, так как y определяется из равенства (2) как функция от x. Если бы мы разрешили уравнение (2) относительно y, то, вставляя в равенство (1) вместо y найденное выражение, получили бы функцию *одного* переменного x и свели бы задачу к задаче об исследовании на максимум и минимум функции одного независимого переменного x.

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнения (2) относительно x или y. При тех значениях x, при которых функция u может иметь максимум или минимум, производная от u по x должна обращаться в нуль.

Из (1) находим $\frac{du}{dx}$, помня, что y есть функция от x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Из равенства (2) находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Это равенство удовлетворяется для всех x и y, удовлетворяющих уравнению (2) (см. § 11 гл. VIII).

Умножив члены равенства (4) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенств (3), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5}$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума. Подберем λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции u, вторая скобка в равенстве (5) обратилась в нуль*):

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Но тогда при этих значениях x и y из равенства (5) следует равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

---

*) Для определенности будем предполагать, что в критических точках

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0.$$

Таким образом, получается, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=0,\\ \varphi(x,\ y)&=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

с тремя неизвестными x, y, λ. Из этих уравнений определяем x, y и λ, которое играло только вспомогательную роль и нам в дальнейшем не требуется.

Из вывода следует, что уравнения (6) являются *необходимыми условиями условного экстремума*, т.е. в точках экстремума удовлетворяются уравнения (6). Но не при всяких x и y (и λ), удовлетворяющих уравнениям (6), будет иметь место условный экстремум. Требуется дополнительное исследование характера критической точки. При решении конкретных задач иногда удается установить характер критической точки на основании существа задачи. Заметим, что левые части уравнений (6) суть частные производные функции

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\tag{7}$$

по переменным x, y, λ.

Таким образом, для того чтобы найти значения x и y, удовлетворяющие условию (2), при которых функция $u=f(x,y)$ может иметь условный максимум или условный минимум, нужно составить вспомогательную функцию (7), приравнять нулю ее производные по x, y и λ и из полученных трех уравнений (6) определить искомые x, y (и вспомогательный множитель λ). Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции n переменных $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условии, что переменные x_1, x_2, $\ldots$, x_n связаны m $(m<n)$ уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0,\\ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Для того, чтобы найти значения x_1, x_2, $\ldots$, x_n, при которых могут быть условные максимумы и минимумы, нужно составить функцию

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,\ldots,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)&+\\+\lambda_2\varphi_2(x_1,\ldots,x_n)+\cdots+\lambda_m\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)&,\end{aligned}$$

приравнять нулю ее частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и из $m+n$ уравнений (8) и (9) определить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Так же как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли при найденных значениях функция иметь максимум или минимум или не будет иметь ни того, ни другого, мы в общем случае оставляем открытым. Этот вопрос мы будем решать на основании вспомогательных соображений.

Пример 1. Вернемся к задаче, сформулированной в начале этого параграфа: найти максимум функции

$$v = xyz$$

при условии, что

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0). \tag{10}$$

Составим вспомогательную функцию

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Найдем ее частные производные и приравняем их нулю:

$$\left.\begin{aligned} yz + \lambda(y+z) &= 0, \\ xz + \lambda(x+z) &= 0, \\ xy + \lambda(x+y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Задача сводится к решению системы четырех уравнений (10) и (11) с четырьмя неизвестными (x, y, z и λ). Для решения этой системы умножим первое из уравнений (11) на x, второе — на y, третье — на z и сложим их; принимая во внимание равенство (10), находим $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$. Вставляя в уравнения (11) найденное значение λ, получим:

$$yz\left[1 - \frac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0,$$

$$xz\left[1 - \frac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0,$$

$$xy\left[1 - \frac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0.$$

Так как x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, то из последних уравнений имеем:

$$\frac{3x}{2a}(y+z) = 1, \quad \frac{3y}{2a}(x+z) = 1, \quad \frac{3z}{2a}(x+y) = 1.$$

Из первых двух уравнений находим $x = y$, из второго и третьего уравнений $y = z$. Но в таком случае из уравнения (10) получаем $x = y = z = \sqrt{a/3}$. Это —

единственная система значений x, y и z, при которых *может быть* максимум или минимум.

Можно доказать, что полученное решение дает максимум. Впрочем, это ясно и из геометрических соображений (в условиях задачи объем коробки не может быть неограниченно большим; следовательно, естественно ожидать, что при каких-то определенных значениях сторон этот объем будет наибольшим).

Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно $\sqrt{a/3}$.

Пример 2. Определить наибольшее значение корня n-й степени из произведения чисел x_1, x_2, ..., x_n при условии, что их сумма равна данному числу a. Следовательно, задача ставится так: требуется найти максимум функции $u = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ при условии

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0 \quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0). \tag{12}$$

Образуем вспомогательную функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n,\ \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a).$$

Находим ее частные производные:

$$F'_{x_1} = \frac{1}{n}\frac{x_2 x_3 \ldots x_n}{(x_1 \ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n}\frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \text{ или } u = -n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2} = \frac{1}{n}\frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \qquad \text{или } u = -n\lambda x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F'_{x_n} = \frac{1}{n}\frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \qquad \text{или } u = -n\lambda x_n.$$

Из последних равенств находим:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n,$$

а на основании уравнения (12) получаем:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a/n.$$

По смыслу задачи эти значения дают максимум функции $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, равный a/n.

Таким образом, для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, связанных соотношением $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant a/n \tag{13}$$

(так как, по доказанному, $\dfrac{a}{n}$ является наибольшим значением этой функции). Подставляя теперь в неравенство (13) вместо a его значение, полученное из равенства (12), найдем:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{14}$$

Это неравенство справедливо для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n. Выражение, стоящее в левой части соотношения (14), называется ***средним геометрическим*** этих чисел. Таким образом, среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

§ 19. Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов

Пусть на основании эксперимента требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x:

$$y = \varphi(x). \tag{1}$$

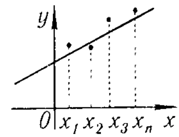


Рис. 188

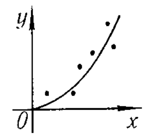


Рис. 189

Пусть в результате эксперимента получено n значений функции y при соответствующих значениях аргумента.

Результаты записаны в таблицу:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Вид функции $y = \varphi(x)$ устанавливается или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих экспериментальным значениям. (Эти точки мы будем называть «экспериментальными точками».) Пусть, например, экспериментальные точки расположены на координатной плоскости так, как показано на рис. 188. Учитывая, что при проведении эксперимента имеют место погрешности, естественно предположить, что искомую функцию $y = \varphi(x)$ можно искать в виде линейной функции $y = ax + b$. Если экспериментальные точки расположены так, как указано на рис. 189, то естественно искать функцию $y = \varphi(x)$ в виде $y = ax^b$ и т.д.

При выбранном виде функции $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$ остается подобрать входящие в нее параметры a, b, $c, \ldots$ так, чтобы в каком-то смысле она наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс.

Широко распространенным методом решения данной задачи является *метод наименьших квадратов*. Этот метод заключается в следующем. Рассмотрим сумму квадратов разностей значений y_i, даваемых экспериментом, и функции $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ в соответствующих точках:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2. \tag{2}$$

Подбираем параметры a, b, $c, \ldots$ так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 = \min. \tag{3}$$

Итак, задача свелась к нахождению значений параметров a, b, $c, \ldots$, при которых функция $S(a, b, c, \ldots)$ имеет минимум.

На основании теоремы 1 (§ 17) следует, что эти значения a, b, $c, \ldots$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ldots, \tag{4}$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial a} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial b} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial c} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь имеется столько уравнений, сколько и неизвестных. В каждом конкретном случае исследуется вопрос о существовании решения системы уравнений (5) и о существовании минимума функции $S(a, b, c, \ldots)$.

Рассмотрим несколько случаев определения функции $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$.

I. Пусть $y = ax + b$. Функция $S(a, b)$ в этом случае имеет вид (см. выражение (2)):

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2. \tag{6}$$

Это функция с двумя переменными a и b (x_i и y_i — заданные числа; см. таблицу на стр. 293). Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]x_i = 0,\\
\frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)] = 0,
\end{aligned}\right\}$$

т.е. система уравнений (5) в этом случае принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: a и b. Очевидно, что система имеет определенное решение и что при найденных значениях a и b функция $S(a,b)$ имеет минимум*).

II. Пусть за аппроксимирующую функцию взят трехчлен второй степени

$$y = ax^2 + bx + c.$$

В этом случае выражение (2) имеет вид:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \tag{8}$$

Это функция трех переменных a, b, c. Система уравнений (5) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0,
\end{aligned}\right\}$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных a, b, c. Из характера задачи следует, что система имеет определенное решение и что при полученных значениях a, b, c функция $S(a,b,c)$ имеет ***минимум***.

---

*) Это легко устанавливается и на основании достаточных условий (см. теорему 2 § 17). Действительно, здесь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}^{n}(x_i - x_j)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

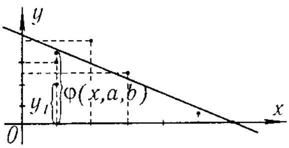


Рис. 190

Пример. Пусть на основании эксперимента получены четыре значения искомой функции $y=\varphi(x)$ при четырех значениях аргумента ($n=4$), которые записаны в таблице

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Будем искать функцию φ в виде линейной функции $y = ax + b$. Составляем выражение $S(a, b)$:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{4}[y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Для составления системы (7) для определения коэффициентов a и b предварительно вычисляем

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 11, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

Система (7) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} 21 - 39a - 11b = 0,\\ 10 - 11a - 4b = 0.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим a и b: $a = -26/35$, $b = 159/35$. Искомая прямая (рис. 190) есть

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

§ 20. Особые точки кривой

Понятие частной производной используется при исследовании кривых.

Пусть кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Угловой коэффициент касательной к кривой определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

(см. § 11 гл. VIII).

Если в данной точке $M(x, y)$ рассматриваемой кривой по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не обращается в нуль, то в этой точке вполне определяется или $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$. Кривая $F(x, y) = 0$ в такой точке имеет вполне определенную касательную. В этом случае точка $M(x, y)$ называется *обыкновенной* точкой.

Если же в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

то угловой коэффициент касательной становится неопределенным.

Определение. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривой $F(x, y) = 0$ обе частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обращаются в нуль, то такая точка называется *особой точкой* кривой. Следовательно, особая точка кривой определяется системой уравнений

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Естественно, что не всякая кривая имеет особые точки. Так, например для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

очевидно,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обращаются в нуль только при $x = 0$, $y = 0$, но эти значения x и y не удовлетворяют уравнению эллипса. Следовательно, эллипс не имеет особых точек.

Не предпринимая особого исследования поведения кривой вблизи особой точки, рассмотрим несколько примеров кривых, имеющих особые точки.

Пример 1. Исследовать особые точки кривой

$$y^2 - x(x-a)^2 = 0 \qquad (a > 0).$$

Решение. В данном случае $F(x, y) = y^2 - x(x-a)^2$, поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-a)(a-3x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Решая совместно три уравнения:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

находим единственную удовлетворяющую им систему значений x и y:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Следовательно, точка $M_0(a, 0)$ есть особая точка кривой.

Исследуем поведение кривой вблизи особой точки и построим кривую. Перепишем данное уравнение в виде

$$y = \pm(x-a)\sqrt{x}.$$

Из этой формулы следует, что кривая: 1) определена лишь при $x \geqslant 0$; 2) симметрична относительно оси $0x$; 3) пересекает ось Ox в точках $(0,0)$ и $(a,0)$. Последняя точка, как было указано, является особой.

Мы рассмотрим сначала ту часть кривой, которая соответствует знаку $+$:

$$y = (x-a)\sqrt{x}.$$

Найдем первую и вторую производные от y по x:

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ имеем $y' = \infty$. Следовательно, кривая касается оси Oy в начале координат. При $x = \frac{a}{3}$ имеем $y' = 0$, $y'' > 0$, т.е. при $x = \frac{a}{3}$ функция y имеет минимум:

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

На отрезке $0 < x < a$ имеем $y < 0$; при $x > a/3$ будет $y' > 0$; при $x \to \infty$ будет $y \to \infty$. При $x = a$ имеем $y' = \sqrt{a}$, т.е. в особой точке $M_0(a,0)$ ветвь кривой $y = +(x-a)\sqrt{x}$ имеет касательную $y = \sqrt{a}(x-a)$.

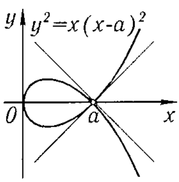


Рис. 191

Так как вторая ветвь кривой $y = -(x-a)\sqrt{x}$ симметрична с первой относительно оси Ox, то, следовательно, в особой точке кривая имеет и вторую касательную (ко второй ветви)

$$y = -\sqrt{a}(x-a).$$

Через особую точку кривая проходит дважды. Такая точка называется *узловой точкой.*

Рассмотренная кривая изображена на рис. 191.

Пример 2. Исследовать на особые точки кривую (полукубическая парабола)

$$y^2 - x^3 = 0.$$

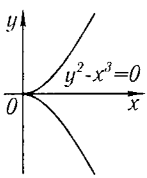


Рис. 192

Решение. Координаты особых точек определяются из системы уравнений:

$$y^2 - x^3 = 0, \quad 3x^2 = 0, \quad 2y = 0.$$

Следовательно, $M_0(0,0)$ есть особая точка.

Перепишем данное уравнение в виде

$$y = \pm\sqrt{x^3}.$$

Для построения кривой исследуем сначала ветвь, которой в уравнении соответствует знак плюс; ветвь кривой, соответствующая знаку минус, симметрична с первой относительно оси Ox.

Функция y определена только при $x \geqslant 0$, неотрицательна и возрастает при возрастании x.

Найдем первую и вторую производные от функции $y = \sqrt{x^3}$;

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ имеем $y = 0$, $y' = 0$. Следовательно, рассматриваемая ветвь кривой имеет в начале координат касательную $y = 0$. Вторая ветвь кривой $y = -\sqrt{x^3}$ также проходит через начало координат и имеет ту же касательную $y = 0$. Таким образом, две различные ветви кривой встречаются в начале координат, имеют одну и ту же касательную и расположены от касательной по разные стороны. Такая особая точка называется *точкой возврата первого рода* (рис. 192).

Замечание. Кривую $y^2 - x^3 = 0$ можно рассматривать как предельный случай кривой $y^2 = x(x-a)^2$ (рассмотренной в примере 1), когда $a \to 0$, т.е. когда петля кривой стягивается в точку.

Пример 3. Исследовать кривую $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.

Решение. Координаты особых точек определяются системой уравнений

$$-4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \quad 2(y - x^2) = 0,$$

которая имеет единственное решение: $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, начало координат есть особая точка.

Перепишем данное уравнение в виде $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$. Из этого уравнения следует, что x может принимать значения от 0 до $+\infty$.

Определим производные первого и второго порядка:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{2}\sqrt{x}.$$

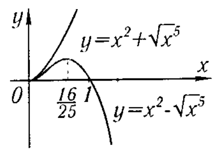


Рис. 193

Исследуем ветви кривой, соответствующие знакам плюс и минус, в отдельности. В обоих случаях при $x = 0$ имеем: $y = 0$, $y' = 0$, т.е. для обеих ветвей ось Ox является касательной. Рассмотрим сначала ветвь

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}.$$

При возрастании x от 0 до ∞ y возрастает от 0 до ∞. Вторая ветвь

$$y = x^2 - \sqrt{x^5}$$

пересекает ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

При $x = 16/25$ функция $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ имеет максимум. Если $x \to +\infty$, то $y \to -\infty$.

Таким образом, в данном случае в начале координат встречаются две ветви кривой; обе ветви имеют одну и ту же касательную и расположены по одну сторону от касательной вблизи точки касания. Такая особая точка называется *точкой возврата второго рода*. График рассматриваемой функции изображен на рис. 193.

Пример 4. Исследовать кривую $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

Решение. Начало координат есть особая точка. Для исследования кривой вблизи этой точки перепишем уравнение кривой в виде

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

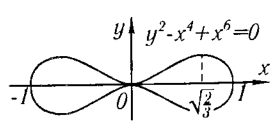


Рис. 194

Так как уравнение кривой содержит только четные степени переменных, то кривая симметрична относительно осей координат и, следовательно, достаточно исследовать часть кривой, соответствующую положительным значениям x и y. Из последнего уравнения следует, что x может изменяться на отрезке от 0 до 1, т.е. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Вычислим первую производную для той ветви кривой, которая является графиком функции $y = +x^2\sqrt{1 - x^2}$:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При $x = 0$ имеем $y = 0$, $y' = 0$. Следовательно, в начале координат кривая касается оси Ox.

При $x = 1$ имеем $y = 0$, $y' = \infty$; следовательно, в точке $(1,0)$ касательная параллельна оси Oy. При $x = \sqrt{2/3}$ функция имеет максимум (рис. 194).

В начале координат (в особой точке) две ветви кривой, соответствующие знакам плюс и минус перед корнем, взаимно касаются. Такая особая точка называется *точкой соприкосновения*.

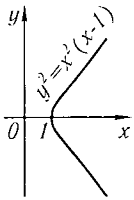


Рис. 195

Пример 5. Исследовать кривую $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

Решение. Напишем систему уравнений, определяющих особые точки:

$$y^2 - x^2(x-1) = 0, \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Эта система имеет решение $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, точка $(0,0)$ есть особая точка кривой. Перепишем данное уравнение в виде $y = \pm x\sqrt{x-1}$. Очевидно, что x может изменяться от 1 до $+\infty$, а также принимать значение 0 (в последнем случае $y = 0$).

Исследуем ветвь кривой, соответствующую знаку плюс перед корнем. При увеличении x от 1 до ∞ y увеличивается от 0 до ∞. Производная $y' = \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$. При $x = 1$ имеем $y' = \infty$; следовательно, в точке $(1,0)$ касательная параллельна оси Oy.

Вторая ветвь кривой, соответствующая знаку минус, симметрична с первой относительно оси Ox.

Точка $(0,0)$ имеет координаты, удовлетворяющие уравнению, и, следовательно, принадлежит кривой, но вблизи нее нет других точек кривой (рис. 195). Такая особая точка называется *изолированной особой точкой*.

Упражнения к главе VIII

Найти частные производные следующих функций:

1. $z = x^2\sin^2 y$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin^2 y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\sin 2y$. **2.** $z = x^{y^2}$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2x^{y^2-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2}2y\ln x$. **3.** $u = e^{x^2+y^2+z^2}$. *Отв.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$. **4.** $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Отв.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **5.** $z = \operatorname{arctg}(xy)$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1+x^2y^2}$. **6.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. **7.** $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$. **8.** $u = e^{x/y} + e^{z/y}$. *Отв.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}e^{x/y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}e^{x/y} - \dfrac{z}{y^2}e^{z/y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{y}e^{z/y}$. **9.** $z = \arcsin(x+y)$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. **10.** $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

Найти полные дифференциалы от следующих функций:

11. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. *Отв.* $dz = (2x+y^2)dx + (2xy+\cos y)dy$. **12.** $z = \ln(xy)$. *Отв.* $dz = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$. **13.** $z = e^{x^2+y^2}$. *Отв.* $dz = 2e^{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$.

14. $u = \operatorname{tg}(3x - y) + 6^{y+z}$. *Отв.* $du = \dfrac{3\,dx}{\cos^2(3x-y)} + \left(-\dfrac{1}{\cos^2(3x-y)} + 6^{y+z}\ln 6\right)dy + 6^{y+z}\ln 6\,dz$. **15.** $w = \arcsin\dfrac{x}{y}$. *Отв.* $dw = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}$.

16. Вычислить $f'_x(2,3)$ и $f'_y(2,3)$, если $f(x,y) = x^2 + y^3$. *Отв.* $f'_x(2,3) = 4$, $f'_y(2,3) = 27$.

17. Вычислить $df(x,y)$ при $x = 1$, $y = 0$, $dx = 1/2$, $dy = 1/4$, если $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Отв.* $1/2$. **18.** Составить формулу, дающую при малых абсолютных значениях величин x, y и z приближенное выражение для $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$. *Отв.* $1 + \dfrac{1}{2}(x - y - z)$. **19.** То же для $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$. *Отв.* $1 + \frac{1}{2}(x - y - z)$.

20. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x+y)$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2\dfrac{\ln(x+y)}{x+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2\dfrac{\ln(x+y)}{x+y}$.

21. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}$, $u = -\cos x$, $v = \cos x$. *Отв.* $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

22. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$. *Отв.* $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2\cdot 2y) = -4ye^{u-2v}$, где вместо u и v надо подставить $\sin x$ и $x^3 + y^2$.

Найти полные производные данных функций: **23.** $z = \arcsin(u+v)$, $u = \sin x\cos\alpha$, $v = \cos x\sin\alpha$. *Отв.* $\dfrac{dz}{dx} = 1$, если $2k\pi - \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{dz}{dx} = -1$, если $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}$. **24.** $u = \dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$. *Отв.* $\dfrac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$. **25.** $z = \ln(1 - x^4)$, $x = \sqrt{\sin\theta}$. *Отв.* $\dfrac{dz}{d\theta} = -2\operatorname{tg}\theta$.

Найти производные от неявных функций от x, заданных уравнениями:

26. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$. **27.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$. **28.** $y^x = x^y$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{yx^{y-1} - y^x\ln y}{xy^{x-1} - x^y\ln x}$. **29.** $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}$. **30.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. *Отв.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2x}{a^2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2y}{b^2z}$. **31.** $u - v\operatorname{tg} aw = 0$; найти $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial v}$. *Отв.* $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\cos^2 aw}{av}$, $\dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{\sin 2aw}{2av}$. **32.** $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$; показать, что $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{z}$. **33.** $\dfrac{z}{x} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$; показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, какова бы ни была дифференцируемая функция F.

Вычислить производные второго порядка:

34. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$. *Отв.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -8x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 10$.

35. $z = e^x\ln y + \sin y\ln x$. *Отв.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x\ln y - \dfrac{\sin x}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{e^x}{y} + \dfrac{\cos y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{e^x}{y^2} - \sin y\ln x$.

36. Доказать, что если $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

37. Доказать, что если $z = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$, то $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

38. Доказать, что если $z = \ln(x^2+y^2)$, то $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

39. Доказать, что если $z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax)$, то $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ при любых дважды дифференцируемых φ и ψ.

40. Найти производную от функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1,2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60°. *Отв.* $5 + 11\sqrt{3}/2$.

41. Найти производную от функции $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точке $M(2,1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5,5)$. *Отв.* 9,4.

42. Найти производную от функции $z = f(x,y)$ в направлении: 1) биссектрисы координатного угла Oxy. *Отв.* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$; 2) отрицательной полуоси Ox. *Отв.* $-\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

43. $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$. Показать, что в точке $M(2/3, -4/3)$ производная в любом направлении равна нулю («функция стационарна»).

44. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ определить треугольник с наибольшей площадью. *Отв.* Равносторонний треугольник.

45. Найти прямоугольный параллелепипед, который имеет наибольший объем при данной полной поверхности S. *Отв.* Куб с ребром $\sqrt{S/6}$.

46. Найти расстояние между двумя прямыми в пространстве, уравнения которых $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. *Отв.* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Исследовать на максимум и минимум функции:

47. $z = x^3y^2(a-x-y)$. *Отв.* Максимум z при $x = a/2$, $y = a/3$.

48. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. *Отв.* Минимум z при $x = y = 1/\sqrt[3]{3}$.

49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2)$. *Отв.* Максимум z при $x = y = \pi/3$.

50. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi)$. *Отв.* Максимум z при $x = y = \pi/3$.

Найти особые точки следующих кривых, исследовать их характер и составить уравнения касательных в них:

51. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — узел; $x = 0$, $y = 0$ — уравнения касательных.

52. $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$. *Отв.* В начале координат точка соприкосновения; двойная касательная $y^2 = 0$.

53. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — точка возврата первого рода, $y^2 = 0$ — касательная.

54. $y^2 = x^2(9 - x^2)$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — узел; $y = \pm 3x$ — уравнения касательных.

55. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^2 = 0$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — точка возврата второго рода; $y^2 = 0$ — двойная касательная.

56. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — узел; $y = \pm x$ — уравнения касательных.

57. $b^2x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$. *Отв.* $M_0(0,0)$ — изолированная точка.

58. Показать, что кривая $y = x\ln x$ имеет концевую точку в начале координат и касательную — ось Oy.

59. Показать, что кривая $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ имеет узловую точку в начале координат и что касательные в этой точке: справа $y = 0$, слева $y = x$.

Глава IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения кривой в пространстве

Рассмотрим вектор $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$, начало которого совпадает с началом координат, а концом является некоторая точка $A(x, y, z)$ (рис. 196). Такой радиус называют *радиус-вектором.*

Выразим этот вектор через проекции на оси координат:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

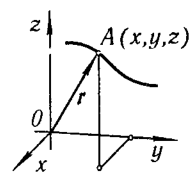


Рис. 196

Пусть проекции вектора $\boldsymbol{r}$ суть функции некоторого параметра t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тогда формулу (1) можно переписать так:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k} \tag{1$'$}$$

или коротко

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{1$''$}$$

При изменении t изменяются x, y, z, и точка A — конец вектора $\boldsymbol{r}$ — опишет в пространстве некоторую линию, которую называют *годографом* вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Уравнение (1′) или (1″) называют *векторным уравнением* линии в пространстве. Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями* линии в пространстве. С помощью этих уравнений для каждого значения t определяются координаты x, y, z соответствующей точки кривой.

Замечание. Кривая в пространстве может быть также определена как геометрическое место точек пересечения двух поверхностей; следовательно, такая кривая может быть задана двумя уравнениями двух поверхностей:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x,\ y,\ z) &= 0, \\ \Phi_2(x,\ y,\ z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так, например, уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1,$$

являются уравнениями окружности, получающейся в пересечении сферы и плоскости (рис. 197).

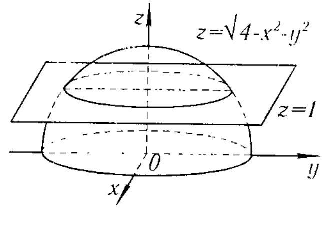


Рис. 197

Итак, кривая в пространстве может быть задана или параметрическими уравнениями (2), или двумя уравнениями поверхностей (3).

Если мы исключим параметр t из уравнений (2) и получим два уравнения, связывающих x, y, z, то тем самым осуществим переход от параметрического способа задания линии к заданию ее с помощью поверхностей. Обратно, если положим $x = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ — произвольная функция) и найдем y и z как функции от t из уравнений

$$\Phi_1[\varphi(t),\ y,\ z] = 0, \quad \Phi_2[\varphi(t),\ y,\ z] = 0,$$

то осуществим переход от задания линии с помощью поверхностей к параметрическому способу задания.

Пример 1. Уравнения

$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

являются параметрическими уравнениями прямой. Исключая параметр t, получим два уравнения, каждое из которых есть уравнение плоскости. Например, если из первого уравнения почленно вычесть второе и третье, получим $x - y - z = -3$. Вычитая же из первого учетверенное третье, получим: $x - 4z = -9$. Таким образом, заданная прямая является линией пересечения плоскостей $x - y - z + 3 = 0$ и $x - 4z + 9 = 0$.

Пример 2. Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса a, ось которого совпадает с осью Oz (см. рис. 198). На данный цилиндр будем навивать прямоугольный треугольник C_1AC так, чтобы вершина A треугольника лежала в точке пересечения образующей цилиндра с осью Ox, а катет AC_1 навивался на круговое сечение цилиндра, лежащее в плоскости Oxy. Тогда гипотенуза образует на цилиндре линию, которая называется *винтовой линией*.

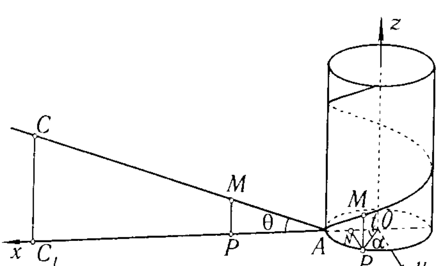


Рис. 198

Напишем уравнение винтовой линии, обозначая через x, y, z координаты ее переменной точки M и через t угол AOP (рис. 198). Тогда

$$x = a\cos t,$$
$$y = a\sin t,$$
$$z = PM = AP\operatorname{tg}\theta,$$

где через θ обозначен острый угол треугольника C_1AC. Заметив, что $\overset{\smile}{AP} = at$, так как $\overset{\smile}{AP}$ есть дуга круга радиуса a,соответствующая центральному углу t, и обозначив $\operatorname{tg}\theta$ через m, получаем параметрические уравнения винтовой линии в виде

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = amt$$

(здесь t — параметр), или в векторной форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}amt.$$

Из параметрических уравнений винтовой линии легко исключить параметр t; возводя первые два уравнения в квадрат и складывая их, найдем $x^2 + y^2 = a^2$. Это — уравнение цилиндра, на котором расположена винтовая линия. Далее, деля почленно второе уравнение на первое и подставляя в полученное уравнение значение t, найденное из третьего уравнения, найдем уравнение другой поверхности, на которой расположена винтовая линия:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

Это — так называемая *винтовая линия (геликоид)*. Ее можно получить как движения полупрямой, параллельной плоскости Oxy, если конец этой полупрямой находится на оси Oz, причем сама полупрямая с постоянной угловой скоростью вращается вокруг оси Oz и с постоянной скоростью поднимается вверх так, что ее конец перемещается вдоль оси Oz. Винтовая линия является линией пересечения этих двух поверхностей. Поэтому ее можно задать двумя уравнениями:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

§ 2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента. Уравнение касательной к кривой. Уравнение нормальной плоскости

Вернемся к формулам $(1')$ и $(1'')$ предыдущего параграфа:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}$$

или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

При изменении t вектор $\boldsymbol{r}$ изменяется в общем случае по величине и по направлению. Говорят, что $\boldsymbol{r}$ есть *векторная функция* от скалярного аргумента t. Допустим, что

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0}\psi(t) = \psi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0}\chi(t) = \chi_0.$$

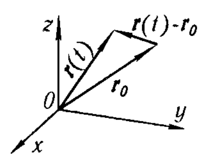


Рис. 199

Тогда говорят, что вектор $\boldsymbol{r}_0 = \varphi_0\boldsymbol{i} + \psi_0\boldsymbol{j} + \chi_0\boldsymbol{k}$ есть *предел вектора* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, и пишут (рис. 199)

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0.$$

Из последнего равенства следуют очевидные равенства:

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{[\varphi(t)-\varphi_0]^2+[\psi(t)-\psi_0]^2+[\chi(t)-\chi_0]^2}=0$$

и

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}_0|.$$

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции скалярного аргумента

$$\boldsymbol{r}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\chi(t)\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

предполагая, что начало вектора $\boldsymbol{r}(t)$ находится в начале координат. Мы знаем, что последнее уравнение является уравнением некоторой пространственной кривой.

Возьмем какое-нибудь фиксированное значение t, соответствующее определенной точке M на кривой, и дадим t приращение Δt; тогда мы получим вектор

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\varphi(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+\psi(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+\chi(t+\Delta t)\boldsymbol{k},$$

который определяет на кривой некоторую точку M_1 (рис. 200).

Найдем приращение вектора

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]\boldsymbol{i}+ \\ +[\psi(t+\Delta t)-\psi(t)]\boldsymbol{j}+[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)]\boldsymbol{k}.$$

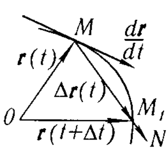


Рис. 200

На рис. 200, где $\overline{OM}=\boldsymbol{r}(t)$, $\overline{OM_1}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$, это приращение изображается вектором $\overline{MM_1}=\Delta\boldsymbol{r}(t)$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ приращения векторной функции к приращению скалярного аргумента; это, очевидно, есть вектор, коллинеарный с вектором $\Delta\boldsymbol{r}(t)$, так как получается из него умножением на скалярный множитель $1/\Delta t$. Мы можем записать этот вектор так:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\chi(t+\Delta t)-\chi(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}.$$

Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют производные при выбранном значении t, то множители, стоящие при $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, в пределе при $\Delta t\to 0$ обратятся в производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$. Следовательно, в этом случае предел $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ существует и равен вектору $\varphi'(t)\boldsymbol{i}+\psi'(t)\boldsymbol{j}+\chi'(t)\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\varphi'(t)\boldsymbol{i}+\psi'(t)\boldsymbol{j}+\chi'(t)\boldsymbol{k}.$$

Вектор, определяемый последним равенством, называется *производной* от вектора $\boldsymbol{r}(t)$ по скалярному аргументу t. Производную обозначают символом $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ или $\boldsymbol{r}'$.

Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}' = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{2'}$$

Выясним направление вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

Так как при $\Delta t \to 0$ точка M_1 приближается к точке M, то направление секущей MM_1 в пределе дает направление касательной. Следовательно, вектор производной $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M. Длина вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ определяется формулой*)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \tag{3}$$

На основании полученных результатов легко написать уравнение касательной к кривой

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

в точке $M(x, y, z)$, имея в виду, что в уравнении кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Уравнения прямой, проходящей через точку $M(x, y, z)$, имеют вид

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p},$$

где X, Y, Z — координаты переменной точки прямой, а m, n, p — величины, пропорциональные направляющим косинусам этой прямой (т.е. проекциям направляющего вектора прямой).

С другой стороны, мы установили, что вектор

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

направлен по касательной. Поэтому проекции этого вектора являются числами, пропорциональными направляющим косинусам касательной, а значит и числам m, n, p. Следовательно, *уравнения касательной* будут иметь вид

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}. \tag{4}$$

Пример 1. Написать уравнения касательной к винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = amt$$

при произвольном значении t и при $t = \pi/4$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

По формуле (4) имеем:

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{X - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - amt}{am}.$$

---

*) Мы будем предполагать, что в рассматриваемых точках $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| \neq 0$.

В частности, при $t = \frac{\pi}{4}$ получим:

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}$$

или

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{Z - \frac{\pi am}{4}}{m\sqrt{2}}.$$

Так же как и в случае плоской кривой, прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью* к пространственной кривой в данной точке. Нормалей к данной пространственной кривой в данной точке можно, очевидно, провести бесчисленное множество. Все они лежат в плоскости, перпендикулярной к касательной прямой. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью.*

Из условия перпендикулярности нормальной плоскости к касательной (4) получаем уравнение нормальной плоскости:

$$\frac{dx}{dt}(X - x) + \frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dz}{dt}(Z - z) = 0. \tag{5}$$

Пример 2. Написать уравнение нормальной плоскости к винтовой линии в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. На основании примера 1 и формулы (5) получаем:

$$-(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}) + (Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}) + m\sqrt{2}(Z - am\frac{\pi}{4}) = 0$$

или

$$-X + Y + m\sqrt{2}Z = am^2\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

Выведем теперь уравнения касательной прямой и нормальной плоскости пространственной кривой в случае, когда эта кривая дана уравнениями

$$\Phi_1(x,\ y,\ z) = 0, \quad \Phi_2(x,\ y,\ z) = 0. \tag{6}$$

Выразим координаты x, y, z этой кривой как функции некоторого параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{7}$$

Будем предполагать, что $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — дифференцируемые функции от t.

Подставляя в уравнения (6) вместо x, y, z выраженные через t их значения для точек кривой, получим два тождества относительно t:

$$\Phi_1[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)] = 0, \tag{8а}$$

$$\Phi_2[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)] = 0. \tag{8б}$$

Дифференцируя тождества (8а) и (8б) по t, находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}, \qquad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}. \tag{10}$$

Мы здесь предполагаем, разумеется, что выражение $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \neq 0$, однако можно доказать, что окончательные формулы (11) и (12) (см. ниже) справедливы и в том случае, когда это выражение равно нулю, если только хоть один из определителей, фигурирующих в окончательных формулах, отличен от нуля.

Из равенств (10) получаем:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

Следовательно, на основании формулы (4) уравнения касательной прямой будут иметь вид

$$\frac{X - x}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}},$$

или, пользуясь определителями,

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Нормальная плоскость представляется уравнением

$$(X - x)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y - y)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (Z - z)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Эти формулы имеют смысл только тогда, когда хотя бы только один из фигурирующих в них определителей отличен от нуля. Если же в некоторой точке кривой все три определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, то эта точка называется *особой точкой* пространственной кривой. В этой точке кривая может вообще не иметь касательной, подобно тому как это имело место в особых точках у плоских кривых (см. § 20 гл. VIII).

Пример 3. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4r^2$ и цилиндра $x^2+y^2=2ry$ в точке $M(r,r,r\sqrt{2})$ (рис. 201).

Решение.

$$\Phi_1(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-4r^2,$$
$$\Phi_2(x,\ y,\ z)=x^2+y^2-2ry,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=2z,$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=2y-2r,\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0.$$

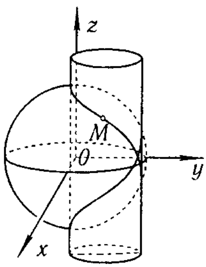


Рис. 201

Значения производных в данной точке M будут:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=2r,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=2r,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=2r\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2r,\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0.$$

Поэтому уравнения касательной прямой имеют вид

$$\frac{X-r}{0}=\frac{Y-r}{\sqrt{2}}=\frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}.$$

Уравнение нормальной плоскости

$$\sqrt{2}(Y-r)-(Z-r\sqrt{2})=0 \quad\text{или}\quad \sqrt{2}Y-Z=0.$$

§ 3. Правила дифференцирования векторов (векторных функций)

Как мы видели, производная от вектора

$$\boldsymbol{r}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\chi(t)\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

по определению, равна

$$\boldsymbol{r}'(t)=\varphi'(t)\boldsymbol{i}+\psi'(t)\boldsymbol{j}+\chi'(t)\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Отсюда сразу следует, что основные правила дифференцирования функций остаются в силе и для векторов. Мы выведем ниже некоторые формулы дифференцирования функций от векторов. Эти формулы нам потребуются в дальнейшем.

I. *Производная суммы векторов равна сумме производных от слагаемых векторов.*

В самом деле, пусть, например, даны два вектора:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1(t)&=\varphi_1(t)\boldsymbol{i}+\psi_1(t)\boldsymbol{j}+\chi_1(t)\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{r}_2(t)&=\varphi_2(t)\boldsymbol{i}+\psi_2(t)\boldsymbol{j}+\chi_2(t)\boldsymbol{k};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

их сумма равна

$$\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\boldsymbol{k}.$$

По определению производной от переменного вектора имеем:

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'\boldsymbol{k}$$

или

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)]\boldsymbol{i} + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)]\boldsymbol{j} + [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)]\boldsymbol{k} =$$
$$= [\varphi_1'(t)\boldsymbol{i} + \psi_1'(t)\boldsymbol{j} + \chi_1'(t)\boldsymbol{k}] + [\varphi_2'(t)\boldsymbol{i} + \psi_2'(t)\boldsymbol{j} + \chi_2'(t)\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{r}_2'.$$

Следовательно,

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \qquad \text{(I)}$$

II. *Производная от скалярного произведения векторов выражается формулой*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \qquad \text{(II)}$$

Действительно, если $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$ определены формулами (3), то, как известно, скалярное произведение этих векторов равно

$$\boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) = \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 + \chi_1\chi_2.$$

Поэтому

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \varphi_1'\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2' + \psi_1'\psi_2 + \psi_1\psi_2' + \chi_1'\chi_2 + \chi_1\chi_2' =$$
$$= (\varphi_1'\varphi_2 + \psi_1'\psi_2 + \chi_1'\chi_2) + (\varphi_1\varphi_2' + \psi_1\psi_2' + \chi_1\chi_2') =$$
$$= (\varphi_1'\boldsymbol{i} + \psi_1'\boldsymbol{j} + \chi_1'\boldsymbol{k}) \times (\varphi_2\boldsymbol{i} + \psi_2\boldsymbol{j} + \chi_2\boldsymbol{k}) + (\varphi_1\boldsymbol{i} + \psi_1\boldsymbol{j} + \chi_1\boldsymbol{k})\times$$
$$\times (\varphi_2'\boldsymbol{i} + \psi_2'\boldsymbol{j} + \chi_2'\boldsymbol{k}) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}.$$

Теорема доказана.

Из формулы (II) получается следующее важное следствие.

Следствие. *Если вектор* $\boldsymbol{e}$ — *единичный, т.е.* $|\boldsymbol{e}| = 1$, *то его производная есть вектор, к нему перпендикулярный.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, то

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} = 1.$$

Возьмем производную по t от обеих частей последнего равенства:

$$\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}}{dt}\boldsymbol{e} = 0, \quad \text{или} \quad 2\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = 0,$$

т.е. скалярное произведение

$$\boldsymbol{e}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = 0,$$

а это и означает, что вектор $\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{e}$.

III. *Если $f(t)$ — скалярная функция и $\boldsymbol{r}(t)$ — векторная функция, то производная от произведения $f(t)\boldsymbol{r}(t)$ выражается формулой:*

$$\frac{d(f\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{df}{dt}\boldsymbol{r} + f\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{III}$$

Доказательство. Если вектор $\boldsymbol{r}(t)$ определен формулой (1), то

$$f(t)\boldsymbol{r}(t) = f(t)\varphi(t)\boldsymbol{i} + f(t)\psi(t)\boldsymbol{j} + f(t)\chi(t)\boldsymbol{k}.$$

По формуле (2) получаем:

$$\frac{d(f(t)\boldsymbol{r}(t))}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{df}{dt}\psi + f\frac{d\psi}{dt}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{df}{dt}\chi + f\frac{d\chi}{dt}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{df}{dt}(\varphi\boldsymbol{i} + \psi\boldsymbol{j} + \chi\boldsymbol{k}) + f\left(\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\psi}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\chi}{dt}\boldsymbol{k}\right) = \frac{df}{dt}\boldsymbol{r} + f\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

IV. *Постоянный числовой множитель можно вынести за знак производной:*

$$\frac{d(a\cdot\boldsymbol{r}(t))}{dt} = a\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = a\boldsymbol{r}'(t). \tag{IV}$$

Это следует из III, если $f(t) = a = \text{const}$. Следовательно, $\frac{df}{dt} = 0$.

V. *Производная векторного произведения векторов $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$ определяется формулой*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\times\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\times\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \tag{V}$$

Доказывается аналогично формуле (II).

§ 4. Первая и вторая производные вектора по длине дуги. Кривизна кривой. Главная нормаль. Скорость и ускорение точки в криволинейном движении

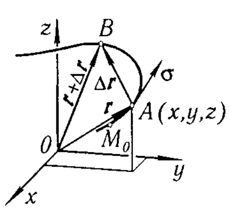


Рис. 202

Как и в случае кривых на плоскости, определяется длина дуги*) пространственной кривой $\smile{M_0A} = s$ (рис. 202). При движении переменной точки $A(x, y, z)$ по кривой длина дуги s изменяется; и обратно, при изменении s изменяются координаты x, y, z переменной точки A, лежащей на кривой. Следовательно, координаты x, y, z переменной точки кривой A можно рассматривать как функции длины дуги s:

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s), \qquad z = \chi(s).$$

В этих параметрических уравнениях кривой параметром является длина дуги s.

*) *Длина дуги* пространственной кривой определяется так же, как и длина плоской кривой (см. § 1 гл. VI и § 3 гл. XII).

Вектор $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ выразится соответственно

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\boldsymbol{i} + \psi(s)\boldsymbol{j} + \chi(s)\boldsymbol{k}$$

или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \tag{1}$$

т.е. вектор $\boldsymbol{r}$ является функцией длины дуги s.

Выясним геометрический смысл производной $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. Как видно из рис. 202, имеют место следующие равенства:

$$\overset{\smile}{M_0A} = s, \quad \overset{\smile}{AB} = \Delta s, \quad \overset{\smile}{M_0B} = s + \Delta s,$$
$$\overline{OA} = \boldsymbol{r}(s), \quad \overline{OB} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s),$$
$$\overline{AB} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s),$$
$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\overset{\smile}{AB}}.$$

Мы уже видели в § 2, что вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ направлен по касательной к кривой в точке A в сторону возрастания s. С другой стороны, имеет место равенство $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{\overset{\smile}{AB}} \right| = 1$ (предел отношения длины хорды к длине дуги*)). Следовательно, $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ есть *единичный вектор*, направленный по касательной; обозначим его через $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

Если вектор $\boldsymbol{r}$ задан проекциями:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

то

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{ds}\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

причем

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Рассмотрим, далее, ***вторую*** производную векторной функции $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, т.е. производную от $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, и выясним ее геометрическое значение. Из формулы (2) следует, что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right] = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}.$$

Следовательно, нам нужно найти $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}$.

---

*) Мы указывали на это соотношение для плоской кривой в § 1 гл. VI. Оно имеет место и для пространственной кривой $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}$, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль.

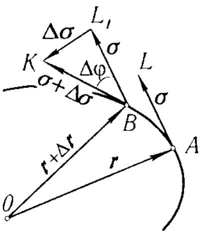


Рис. 203

Из рис. 203 имеем $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \boldsymbol{\sigma}$, $\overline{BK} = \boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$. Проведем из точки B вектор $\overline{BL_1} = \boldsymbol{\sigma}$. Из треугольника BKL_1 находим:

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + \overline{L_1K}.$$

Следовательно, $L_1K = \Delta\boldsymbol{\sigma}$. Так как, по доказанному, длина вектора $\boldsymbol{\sigma}$ не меняется, то $|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}|$; следовательно, треугольник BKL_1 — равнобедренный.

Угол $\Delta\varphi$ при вершине этого треугольника есть угол поворота касательной к кривой при переходе из точки A в точку B, т.е. соответствует приращению длины дуги Δs. Из треугольника BKL_1 находим:

$$L_1K = |\Delta\boldsymbol{\sigma}| = 2|\boldsymbol{\sigma}|\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

(так как $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$).

Разделим обе части последнего равенства на Δs:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Перейдем к пределу в обеих частях последнего равенства при $\Delta s \to 0$. В левой части получим:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right|.$$

Далее,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1,$$

как в данном случае мы рассматриваем такие кривые, что существует предел $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ и, следовательно, $\Delta\varphi \to 0$ при $\Delta s \to 0$. Таким образом, после перехода к пределу получаем:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|. \tag{4}$$

Отношение угла поворота $\Delta\varphi$ касательной при переходе от точки A к точке B к длине Δs дуги AB, взятое по абсолютной величине, называется, так же как и для плоской кривой, *средней кривизной* данной линии на участке AB:

$$\text{средняя кривизна} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Предел средней кривизны при $\Delta s \to 0$ называется *кривизной* линии в точке A и обозначается буквой K:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Но в этом случае из равенства (4) следует, что $\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = K$, т.е. длина производной от единичного вектора*) касательной по длине дуги равняется кривизне линии в данной точке. Так как вектор $\boldsymbol{\sigma}$ единичный, то его производная $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ перпендикулярна к нему (см. § 3 гл. IX, следствие).

Итак, вектор $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ по длине равен кривизне кривой, а по направлению перпендикулярен к вектору касательной.

Определение. Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ и проходящая через соответствующую точку кривой, называется *главной нормалью* кривой в данной точке. Единичный вектор этого направления обозначим через $\boldsymbol{n}$.

Так как длина вектора $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ равна K — кривизне кривой, то

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = K\boldsymbol{n}.$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* линии в данной точке и обозначается через R, т.е. $\frac{1}{K} = R$. Поэтому можем написать:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}. \tag{5}$$

Из этой формулы следует:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2. \tag{6}$$

Но

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{6'}$$

Последняя формула дает возможность вычислить кривизну линии в любой точке, если эта линия задана параметрическими уравнениями, в которых параметром является длина дуги s (т.е. если радиус-вектор переменной точки данной линии выражен как функция от длины дуги).

---

*) Напоминая, что производная ***вектора*** есть ***вектор***, и поэтому мы можем говорить о ***длине*** производной.

Рассмотрим случай, когда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ выражен как функция произвольного параметра t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

В этом случае длину дуги s будем рассматривать как функцию параметра t. Тогда вычисление кривизны производится следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Так как*)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1,$$

то

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Дифференцируя правую и левую части и сокращая на два, получим:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

Далее, из формулы (7) следует:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}.$$

Дифференцируем по s обе части последнего равенства:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3};$$

подставляя полученное выражение $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ в формулу (6), будем иметь:

$$\frac{1}{R^2} = \left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2 =$$
$$= \frac{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 - 2\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d^2s}{dt^2} + \left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^6}.$$

*) Это равенство следует из того, что $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}$. Но $\Delta\boldsymbol{r}$ — хорда, стягивающая дугу длины Δs. Поэтому $\left|\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|$ стремится к 1 при $\Delta s \to 0$.

Выражая $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d^2s}{dt^2}$ по формулам (8) и (9) через производные от $\boldsymbol{r}(t)$, получим*):

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{10}$$

Формулу (10) можно переписать так**):

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{11}$$

Мы получили формулу, которая дает возможность вычислить кривизну данной линии в любой ее точке при ***произвольном*** параметрическом задании этой кривой.

Если в частном случае кривая является плоской и лежит в плоскости Oxy, то ее параметрические уравнения имеют вид

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = 0.$$

Подставляя эти выражения x, y, z в формулу (11), мы получим выведенную ранее (в гл. VI) формулу, дающую кривизну *плоской* кривой, заданной параметрически:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Пример. Вычислить кривизну винтовой линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}amt$$

в произвольной точке.

---

*) Преобразовываем знаменатель следующим образом: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3 = \left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$. Здесь нельзя написать $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$. Под $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$ подразумевается скалярный квадрат вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Под $\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$ подразумевается третья степень числа $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$. Выражение же $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$ не имеет смысла.

**) Мы использовали тождество

$$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2,$$

в справедливости которого легко убедиться, если переписать тождество в следующем виде:

$$a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2 = (ab\sin\varphi)^2.$$

Решение.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i}a\sin t + \boldsymbol{j}a\cos t + \boldsymbol{k}am,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{i}a\cos t - \boldsymbol{j}a\sin t,$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}a^2m\sin t - \boldsymbol{j}a^2m\cos t + \boldsymbol{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2+1)}{[a^2(1+m^2)]^3} = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2},$$

откуда

$$R = a(1+m^2) = \text{const}.$$

Таким образом, винтовая линия имеет постоянный радиус кривизны.

Замечание. Если кривая лежит в плоскости, то, не нарушая общности, можно предположить, что она лежит в плоскости Oxy (этого всегда можно добиться преобразованием координат). Если же кривая лежит в плоскости Oxy, то $z = 0$; но тогда и $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{n}$ лежит также в плоскости Oxy. Отсюда получаем вывод: если кривая лежит в плоскости, то ее главная нормаль лежит в той же плоскости.

Скорость точки в криволинейном движении. Пусть движущаяся точка в момент времени t находится в точке M, определяемой радиус-вектором $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(t)$ (см. рис. 200), а в момент $t+\Delta t$ находится в точке M_1, определяемой радиус-вектором $\overline{OM_1} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. Тогда вектор $\overline{MM_1}$ называется *вектором перемещения точки*. Отношение вектора перемещения $\overline{MM_1}$ к соответствующему приращению времени Δt называется *средней скоростью точки* за промежуток времени

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

Вектор средней скорости также направлен по хорде MM_1 (см. рис. 200, стр. 318) в сторону движения точки (при прямолинейном движении он направлен по самой траектории).

Скорость точки в данный момент определяется так:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{v}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

т.е.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{12}$$

Таким образом, можно сказать: *скорость точки в данный момент равна первой производной от радиус-вектора точки по времени.*

На основании формулы (2′) § 2 следует, что проекции скорости на оси координат будут:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости определяется по формуле (3) § 2:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{13}$$

Если ввести длину дуги s, как это делалось в начале этого параграфа, и рассматривать длину дуги s как функцию времени t, то формулу (12) можно записать так:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\sigma} v, \tag{14}$$

где $v = \frac{ds}{dt}$ — абсолютная величина скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор, направленный по касательной в сторону движения.

Ускорение точки в криволинейном движении. Аналогично тому, как это было определено в § 25 гл. III, *ускорением* точки $\boldsymbol{w}$ в криволинейном движении называется производная от вектора скорости по времени:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{15}$$

Но $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, следовательно,

$$\boldsymbol{w} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{16}$$

Если будем исходить из формулы (14), то получим

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \boldsymbol{\sigma})}{dt}.$$

Раскрывая последнюю производную по формуле (III) § 3, получим:

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\sigma} + v\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}. \tag{17}$$

Преобразуем производную $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}$, пользуясь формулами (7) и (5):

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}v.$$

Подставляя в равенство (17), окончательно получаем:

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\sigma} + v^2\frac{\boldsymbol{n}}{R}. \tag{18}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — единственный вектор, направленный по касательной в сторону движения, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по главной нормали.

Формула (18) словами формулируется так.

Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от абсолютной величины скорости, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке.

Так как векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{n}$ взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения определяется формулой

$$w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{19}$$

§ 5. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение

Определение 1. Плоскость, проходящая через касательную прямую и главную нормаль к заданной кривой в точке A, называется *соприкасающейся плоскостью* в точке A.

Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой. Если же кривая не плоская, то, взяв на ней две точки P и P_1, мы получим две различные соприкасающиеся плоскости, образующие между собой двугранный угол μ. Чем больше угол μ, тем сильнее кривая по своей форме отличается от плоской кривой. Для того чтобы это уточнить, введем еще одно определение.

Определение 2. Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Возьмем на бинормали единичный вектор $\boldsymbol{b}$ и направим его так, чтобы векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ образовывали тройку той же ориентации, что и единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, лежащие на осях координат (рис. 204, 205).

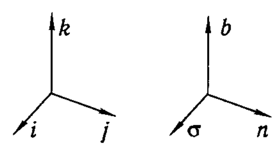


Рис. 204

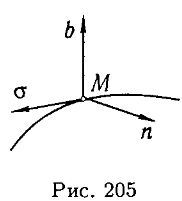


Рис. 205

В силу определения векторного и скалярного произведений векторов имеем:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 1. \tag{1}$$

Найдем производную $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$. По формуле (V) § 3

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{2}$$

Но $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}$ (см. § 4), поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{R}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0,$$

и формула (2) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{3}$$

Отсюда следует (на основании определения векторного произведения), что $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ есть вектор, перпендикулярный к вектору касательной $\boldsymbol{\sigma}$. С другой стороны, так как $\boldsymbol{b}$ — единичный вектор, то $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{b}$ (см. § 3, следствие).

Значит, вектор $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ перпендикулярен и к $\boldsymbol{\sigma}$ и к $\boldsymbol{b}$, т.е. коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$.

Обозначим длину вектора $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ через $\frac{1}{|T|}$, т.е. положим:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \frac{1}{|T|};$$

тогда

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{T}\boldsymbol{n}. \tag{4}$$

Величина $\frac{1}{T}$ называется *кручением* данной кривой.

Двугранный угол μ между соприкасающимися плоскостями, соответствующими двум точкам кривой, равен углу между бинормалями. По аналогии с формулой (4) § 4 гл. IX можно написать:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Итак, кручение кривой в точке A по абсолютной величине равно пределу, к которому стремится отношение угла μ между соприкасающимися плоскостями в точке A и соседней точке B к длине $|\Delta s|$ дуги AB, когда $\Delta s \to 0$.

Если кривая ***плоская***, то соприкасающаяся плоскость не меняет своего направления и, следовательно, кручение равно нулю.

Из определения кручения ясно, что оно является мерой отклонения пространственной кривой от плоской кривой. Величина T называется *радиусом кручения* кривой.

Найдем формулу для вычисления кручения. Из формул (3) и (4) следует:

$$\frac{1}{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}.$$

Умножив скалярно обе части на $\boldsymbol{n}$, будем иметь:

$$\frac{1}{T}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right).$$

В правой части последнего равенства мы получили так называемое смешанное (или тройное) произведение трех векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. В таком произведении, как известно, можно переставлять сомножители в круговом порядке. Учитывая, кроме того, что $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = 1$, мы перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{\sigma}\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{n}\right)$$

или

$$\frac{1}{T} = -\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right). \tag{5}$$

Но так как $\boldsymbol{n} = R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, то

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = R\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

и

$$(\boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}) = R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \left(R\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right) = \\ = R^2\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right) + R\frac{dR}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right),$$

а так как векторное произведение вектора на самого себя равно нулю, то

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = R^2(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}).$$

Заметив, что $\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, и возвращаясь к равенству (5), получаем:

$$\frac{1}{T} = -R^2\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^6}\right). \qquad (6)$$

Если вектор $\boldsymbol{r}$ выражен как функция произвольного параметра t, то можно показать*), аналогично тому, как это делалось в

*) В самом деле,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Дифференцируем это равенство еще раз по t:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Снова дифференцируем по t:

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3} = \\ = \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Составим, далее, смешанное (тройное) произведение:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right) = \\ = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right] \times \left[\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right]\right\}.$$

Раскрывая это произведение по правилу умножения многочленов и отбрасывая все те члены, которые содержат хотя бы два одинаковых векторных сомножителя (так как смешанное произведение трех множителей, где хотя бы два множителя равны, есть нуль), получим:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Наконец, заметив, что

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2, \quad \text{или} \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3,$$

получаем требуемое равенство.

предыдущем параграфе, что

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right)=\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

Подставляя это выражение в формулу (6) и заменяя R^2 его выражением по формуле (11) § 4, окончательно получаем:

$$\frac{1}{T}=-\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2}. \tag{7}$$

Эта формула дает возможность вычислить кручение кривой в любой точке, если кривая задана параметрическими уравнениями с произвольным параметром t.

В заключении этого параграфа отметим, что формулы, выражающие производные векторов $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$, называются *формулами Серре — Френе*:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}-\frac{\boldsymbol{b}}{T}.$$

Последняя из них получается так:

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma},$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma})}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{\boldsymbol{n}}{R}=$$
$$=\frac{1}{T}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n};$$

но

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}=-\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{\sigma},$$

поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{b}}{T}-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}.$$

Пример. Вычислить кручение винтовой линии

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos t+\boldsymbol{j}a\sin t+\boldsymbol{k}amt.$$

Решение.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & am\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^3m,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2=a^4(1+m^2)\ \text{(см. пример § 4)}.$$

Следовательно,

$$T=-\frac{a^4(1+m^2)}{a^3m}=-\frac{a(1+m^2)}{m}.$$

§ 6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть имеем поверхность, заданную уравнением вида

$$F(x,\ y,\ z) = 0. \tag{1}$$

Введем следующее определение.

Определение 1. Прямая линия называется *касательной* к поверхности в некоторой точке $P(x, y, z)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку P.

Так как через точку P проходит бесконечное число различных кривых, лежащих на поверхности, то и касательных к поверхности, проходящих через эту точку, будет, вообще говоря, бесконечное множество.

Введем понятие об особых и обыкновенных точках поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$.

Если в точке $M(x,\ y,\ z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует, то точка M называется *особой* точкой поверхности. Если в точке $M(x, y, z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка M называется *обыкновенной* точкой поверхности.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Все касательные прямые к данной поверхности* (1) *в ее обыкновенной точке P лежат в одной плоскости.*

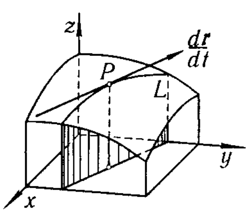


Рис. 206

Доказательство. Рассмотрим на поверхности некоторую линию L (рис. 206), проходящую через данную точку P поверхности. Пусть рассматриваемая кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{2}$$

Касательная к кривой будет касательной к поверхности. Уравнения этой касательной имеют вид

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Если выражения (2) подставить в уравнение (1), то это уравнение превратится в тождество относительно t, так как кривая (2) лежит на поверхности (1). Дифференцируя его по t, получим*):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{3}$$

*) Мы здесь применяем правило дифференцирования сложной функции трех переменных. Это правило в данном случае применимо, так как все частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, по условию, непрерывны.

Рассмотрим, далее, векторы $\boldsymbol{N}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, проходящие через точку P:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Проекции этого вектора $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ зависят от x, y, z — координат точки P; заметим, что так как точка P — обыкновенная, то эти проекции в точке P одновременно не обращаются в нуль и потому

$$|\boldsymbol{N}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Вектор

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

— касательный к кривой, проходящей через точку P и лежащей на поверхности. Проекции этого вектора вычисляются на основании уравнений (2) при значении параметра t, соответствующем точке P. Вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{N}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, которое равно сумме произведений одноименных проекций:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

На основании равенства (3) выражение, стоящее в правой части, равно нулю, следовательно,

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что вектор $\boldsymbol{N}$ и касательный вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ к кривой (2) в точке P перпендикулярны. Проведенное рассуждение справедливо для любой кривой (2), проходящей через точку P и лежащей на поверхности. Следовательно, каждая касательная к поверхности в точке P перпендикулярна к одному и тому же вектору $\boldsymbol{N}$ и потому все эти касательные лежат в одной плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{N}$. Теорема доказана.

Определение 2. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку P, называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке P (рис. 207).

Заметим, что в особых точках поверхности может не существовать касательной плоскости. В таких точках касательные прямые к поверхности могут не лежать в одной плоскости. Так, например, вершина конической поверхности является особой точкой. Касательные к конической поверхности в этой точке не лежат в одной плоскости (они сами образуют коническую поверхность).

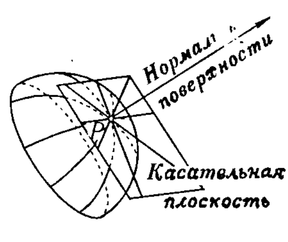


Рис. 207

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности (1) в обыкновенной точке. Так как эта плоскость перпендикулярна к вектору (4), то, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0. \tag{6}$$

Если уравнение поверхности задано в форме

$$z = f(x,y), \quad \text{или} \quad z - f(x,\ y) = 0,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

и уравнение касательной плоскости в этом случае примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \tag{6'}$$

Замечание. Если в формуле (6′) положим $X - x = \Delta x$; $Y - y = \Delta y$, то эта формула примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y;$$

ее правая часть представляет полный дифференциал функции $z = f(x,y)$. Следовательно, $Z - z = dz$. Таким образом, полный дифференциал функции двух переменных в точке $M(x,y)$, соответствующий приращениям Δx и Δy независимых переменных x и y, равен соответствующему приращению аппликаты (z) касательной плоскости к поверхности, которая является графиком данной функции.

Определение 3. Прямая, проведенная через точку $P(x,y,z)$ поверхности (1) перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности (см. рис. 207).

Напишем уравнения нормали. Так как ее направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{N}$, то ее уравнения будут иметь вид

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{7}$$

Если уравнение поверхности задано в форме $z = f(x,y)$, или

$$z - f(x,\ y) = 0,$$

то уравнения нормали имеют вид

$$\frac{X - x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{1}.$$

Замечание. Пусть поверхность $F(x,\ y,\ z) = 0$ есть поверхность уровня для некоторой функции трех переменных $u = u(x,\ y,\ z)$, т.е.

$$F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0.$$

Очевидно, что вектор $\boldsymbol{N}$, определенный формулой (4), направленный по нормали к поверхности уровня $F = u(x,y,z) - C = 0$, будет

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

т.е.

$$\boldsymbol{N} = \operatorname{grad} u.$$

Этим мы доказали, что *градиент функции $u(x,y,z)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.*

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ в точке $P(1,2,3)$.

Решение.

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

при $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости будет:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad \text{или} \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Упражнения к главе IX

Найти производные от векторов:

1. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\operatorname{ctg} t + \boldsymbol{j}\operatorname{arctg} t$. *Отв.* $\boldsymbol{r}' = -\dfrac{1}{\sin^2 t}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\boldsymbol{j}$. **2.** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}e^{-t} + \boldsymbol{j}2t + \boldsymbol{k}\ln t$. *Отв.* $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{i}e^{-t} + 2\boldsymbol{j} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{t}$. **3.** $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} - \dfrac{\boldsymbol{j}}{t} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{t^2}$. *Отв.* $\boldsymbol{r}' = 2t\boldsymbol{i} + \dfrac{\boldsymbol{j}}{t^2} - \dfrac{2\boldsymbol{k}}{t^3}$.

4. Найти вектор касательной, уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ в точке $(3,9,27)$. *Отв.* $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 27\boldsymbol{k}$; касательная: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$; нормальная плоскость: $x + 6y + 27z = 786$.

5. Найти вектор касательной, уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos^2\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}\sin\dfrac{t}{2}$. *Отв.* $\boldsymbol{r}' = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}\sin t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}\cos t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\cos\dfrac{t}{2}$; уравнения касательной: $\dfrac{X - \cos^2\frac{t}{2}}{-\sin t} = \dfrac{Y - \frac{1}{2}\sin t}{\cos t} = \dfrac{Z - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$; уравнение нормальной плоскости: $X\sin t - Y\cos t - Z\cos\dfrac{t}{2} = x\sin t - y\cos t - z\cos\dfrac{t}{2}$, где x, y, z — координаты той точки кривой, в которой проводится нормальная плоскость (т.е. $x = \cos^2\frac{t}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sin t$, $z = \sin\frac{t}{2}$).

6. Найти уравнения касательной к кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ и косинусы углов, составляемых ею с осями координат. *Отв.* $\dfrac{X - X_0}{\sin\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Y - Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Z - Z_0}{\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha = \sin^2\frac{t_0}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}\sin t_0$, $\cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}$.

7. Найти уравнение нормальной плоскости к кривой $z = x^2 - y^2$, $y = x$ в начале координат. **Указание.** Написать уравнения кривой в параметрической форме. *Отв.* $x + y = 0$.

8. Найти $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ в точке $t = \dfrac{\pi}{2}$ для кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(\cos t + \sin^2 t) + \boldsymbol{j}\sin t(1 - \cos t) - \boldsymbol{k}\cos t$. *Отв.* $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{-5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{42}}$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$.

9. Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривой $x = \dfrac{t^4}{4}$, $y = \dfrac{t^3}{3}$, $z = \dfrac{t^2}{2}$ в точке (x_0, y_0, z_0). *Отв.* $\dfrac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \dfrac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \dfrac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0}$, $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{-2t_0} = \dfrac{z - z_0}{t_0^2}$.

10. Найти уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке $M(1, 1, 1)$. *Отв.* $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. Найти радиус кривизны для кривой, заданной уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$. *Отв.* $R = 2$.

12. Найти радиус кручения кривой: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos t + \boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}\operatorname{sh} t$. *Отв.* $T = -\operatorname{ch} t$.

13. Найти радиус кривизны и кручения для кривой $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j}$. *Отв.* $R = \dfrac{2}{3}t(1 + 9t^2)^{3/2}$, $T = \infty$.

14. Доказать, что кривая $\boldsymbol{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\boldsymbol{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\boldsymbol{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\boldsymbol{k}$ плоская. *Отв.* $\boldsymbol{r}''' \equiv 0$. Поэтому кручение равно нулю.

15. Найти кривизну и кручение кривой $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$. *Отв.* Кривизна равна $\dfrac{\sqrt{2}}{(x + y)^2}$; кручение равно $\dfrac{\sqrt{2}}{(x + y)^2}$.

16. Найти кривизну и кручение кривой $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$, $z = e^{-t}$. *Отв.* Кривизна равна $\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^t$; кручение равно $-\dfrac{1}{3}e^t$.

17. Найти уравнение касательной плоскости к гиперболоиду $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_1, y_1, z_1). *Отв.* $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} - \dfrac{z_1z}{c^2} = 1$.

18. Найти уравнение нормали к поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точке $(2, 2, 3)$. *Отв.* $y + 4x = 10$, $3x - z = 3$.

19. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке $M(2, 1, 12)$. *Отв.* $8x + 8y - z = 12$.

20. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$. *Отв.* $x - y + 2z = \pm\sqrt{11/2}$.

Глава X
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

В главе III мы рассматривали такую задачу: дана функция $F(x)$; требуется найти ее производную, т.е. функцию $f(x) = F'(x)$.

В этой главе мы будем рассматривать обратную задачу: дана функция $f(x)$; требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x) = x^3/3$ является первообразной, так как $(x^3/3)' = x^2$.

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно было взять в качестве первообразной следующие функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ или вообще $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (где C — произвольная постоянная), так как

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\frac{x^3}{3} + C$ исчерпываются ***все*** первообразные от функции x^2. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то разность между ними равна постоянному числу.*

Доказательство. В силу определения первообразной имеем:

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

при любом значении x на отрезке $[a, b]$.

Обозначим:

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Тогда на основании равенств (1) будет:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

или

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0$$

при любом значении x на отрезке $[a, b]$. Но из равенства $\varphi'(x) = 0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная.

Действительно, применим теорему Лагранжа (см. § 2 гл. IV) к функции $\varphi(x)$, которая, очевидно, непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Какова бы ни была точка x на отрезке $[a, b]$, мы имеем в силу теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(\xi),$$

где $a < \xi < x$.

Так как $\varphi'(\xi) = 0$, то

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

или

$$\varphi(x) = \varphi(a). \tag{3}$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ в любой точке x отрезка $[a, b]$ сохраняет значение $\varphi(a)$, а это и значит, что функция $\varphi(x)$ является постоянной на отрезке $[a, b]$. Обозначая постоянную $\varphi(a)$ через C, из равенств (2) и (3) получаем:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена ***какая-нибудь*** одна первообразная $F(x)$, то ***любая другая*** первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

если

$$F'(x) = f(x).$$

При этом функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, знак $\int$ — *знаком интеграла.*

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой ***семейство функций*** $y = F(x) + C$.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси Oy.

Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Заметим, однако, без доказательства, что *если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то для этой функции существует первообразная* (а значит, и *неопределенный интеграл*).

Выяснению методов, с помощью которых находятся первообразные (и неопределенные интегралы) от некоторых классов элементарных функций, посвящена настоящая глава.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием функции* $f(x)$.

Заметим следующее: если производная от элементарной функции всегда является элементарной функцией, то первообразная от элементарной функции может оказаться и непредставимой с помощью конечного числа элементарных функций. К этому вопросу мы вернемся в конце данной главы.

Из определения 2 следует:

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если* $F'(x) = f(x)$, *то и*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x). \tag{4}$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Это получается на основании формулы (4).

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливость последнего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны $dF(x)$).

§ 2. Таблица интегралов

Прежде чем приступить к изложению методов интегрирования, приведем таблицу интегралов от простейших функций.

Непосредственно из определения 2 § 1 гл. X и таблицы производных (§ 15 гл. III) вытекает таблица интегралов. (Справедливость написанных в ней равенств легко проверить дифференцированием, т.е. установить, что производная от правой части равняется подынтегральной функции.)

1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. (Здесь и в последующих формулах под C понимается произвольная постоянная.)
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$.
9. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11′. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

13′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

Замечание. В таблице производных (§ 15 гл. III) нет формул, соответствующих формулам 7, 8, 11′, 12, 13′ и 14. Однако справедливость последних также легко устанавливается с помощью дифференцирования.

В случае формулы 7 имеем:

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

следовательно, $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

В случае формулы 8

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

следовательно, $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

В случае формулы 12

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|]' =$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Отметим, что последняя формула будет следовать также из общих результатов § 9 гл. X.

В случае формулы 14

$$(\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Эта формула также будет следовать из общих результатов § 10.

Аналогично проверяются формулы 11′ и 13′. Заметим, что эти формулы будут выведены впоследствии из формул 11 и 13 (см. § 4, примеры 3 и 4).

§ 3. Некоторые свойства неопределенного интеграла

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Для доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства. На основании (4) § 1 находим:

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]dx\right)' = f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right)' = \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\int f_2(x)\,dx\right)' = \\ = f_1(x)+f_2(x).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1) равны между собой, т.е. производная от любой первообразной, стоящей в левой части, равняется производной от любой функции, стоящей в правой части равенства. Следовательно, по теореме § 1 гл. X любая функция, стоящая в левой части равенства (1), отличается от любой функции, стоящей в правой части равенства (1), на постоянное слагаемое. В этом смысле и нужно понимать равенство (1).

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если* $a = \text{const}$, *то*

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Для доказательства равенства (2) найдем производные от левой и правой его частей:

$$\left(\int af(x)\,dx\right)' = af(x), \qquad \left(a\int f(x)\,dx\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' = af(x).$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно, как и в равенстве (1), разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать равенство (2).

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила.

I. Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{3}$$

Действительно, дифференцируя левую и правую части равенства (3), получим:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a}F'(ax)a = F'(ax) = f(ax).$$

Производные от правой и левой частей равны, ч. т. д.

II. Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \tag{4}$$

III. Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) доказываются дифференцированием правой и левой частей равенств.

Пример 1.

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\sin x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx =$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Пример 2.

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{-1/3}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx+\int x^{5/4}\,dx=$$
$$=3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|+C.$$

Пример 4.

$$\int\cos 7x\,dx=\frac{1}{7}\sin 7x+C.$$

Пример 5.

$$\int\sin(2x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C.$$

§ 4. Интегрирование методом замены переменного или способом подстановки

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$; докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено его выражение через x на основании равенства (1).

Для того, чтобы установить, что выражения, стоящие справа и слева, одинаковы в указанном выше смысле, нужно доказать, что их производные по x равны между собой. Находим производную от левой части

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

Правую часть равенства (2) будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t — промежуточный аргумент. Зависимость

t от x выражается равенством (1), при этом $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ и по правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Следовательно, производные по x от правой и левой частей равенства (2) равны, ч. т. д.

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (2).

Замечание. При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменного не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$. Проиллюстрируем это на примере. Пусть нужно вычислить интеграл, имеющий вид

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}.$$

Здесь удобно положить

$$\psi(x) = t,$$

тогда

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Приведем несколько примеров на интегрирование с помощью замены переменных.

Пример 1. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = ?$ Сделаем подстановку $t = \sin x$; тогда $dt = \cos x\,dx$ и, следовательно, $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C$.

Пример 2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = ?$ Полагаем $t = 1 + x^2$; тогда $dt = 2x\,dx$ и $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

Пример 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(x/a)^2}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a\,dt$, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x/a)^2}}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a\,dt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$ (предполагается, что $a > 0$).

В примерах 3 и 4 выведены формулы, приведенные в таблице интегралов под номерами 11′ и 13′ (см. выше, § 2).

Пример 5. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Полагаем $t = \ln x$; тогда $dt = \frac{dx}{x}$,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

Пример 6. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = ?$ Полагаем $t = x^2$; тогда $dt = 2x\,dx$,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Метод замены переменных является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменных. Успех интегрирования зависит в значительной степени от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменных, которая упростила бы данный интеграл. По существу говоря, изучение методов интегрирования сводится к выяснению того, какую надо сделать замену переменного при том или ином виде подынтегрального выражения. Этому и посвящена большая часть настоящей главы.

§ 5. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т.е. будут ли корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменного

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Тогда получим:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Это — табличные интегралы (см. формулы 11$'$ и 12).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Решение.

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}.$$

Делаем замену переменного $x + 2 = t$, $dx = dt$. подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, окончательно находим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c}\, dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим:

$$I_1 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1, вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменного

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$$

Применим указанный прием:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

III. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. 1, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a, к табличным интегралам вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ при } a > 0 \text{ или } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} \text{ при } a < 0,$$

которые уже рассмотрены в таблице интегралов (см. формулы 13′ и 14).

IV. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку

$$ax^2+bx+c=t,\quad (2ax+b)dx=dt,$$

получим:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Второй же интеграл был рассмотрен нами в п. III настоящего параграфа.

Пример 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

§ 6. Интегрирование по частям

Пусть u и v — две дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно, дифференциал произведения uv вычисляется по следующей формуле:

$$d(uv)=udv+vdu.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

или

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{1}$$

Последняя формула называется *формулой интегрирования по частям.* Эта формула чаще всего применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и dv, чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу dv и вычисление интеграла $\int v\,du$ составляли в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int u\,dv$. Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач, и мы покажем на ряде примеров, как это делается.

Пример 1. $\int x\sin x\,dx=?$ Положим

$$u=x,\quad dv=\sin x\,dx;$$

тогда

$$du = dx, \ v = -\cos x.$$

Следовательно,

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Замечание. При определении функции v по дифференциалу dv мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что легко проверить, подставив в равенство (1) вместо v выражение $v+C$). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида

$$\int x^k \sin ax \, dx, \qquad \int x^k \cos ax \, dx,$$
$$\int x^k e^{ax} \, dx, \qquad \int x^k \ln x \, dx,$$

некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Пример 2. Требуется вычислить $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C.$$

Пример 3. Требуется вычислить $\int x^2 e^x \, dx$. Положим $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$; тогда $du = 2x \, dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Последний интеграл снова интегрируем по частям, полагая

$$u_1 = x, \qquad du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x \, dx, \quad v_1 = e^x.$$

Тогда

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C.$$

Окончательно будем иметь:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Пример 4. Требуется вычислить $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx$. Положим $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x \, dx$; тогда

$$du = (2x + 7)\,dx, \ v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7)\frac{\sin 2x}{2}\,dx.$$

Применим интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая $u_1 = \frac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x\,dx$; тогда

$$du_1 = dx, \ v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\sin 2x\,dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \\ = -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Поэтому окончательно

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C = \\ = (2x^2 + 14x - 11)\frac{\sin 2x}{4} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Пример 5. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ = a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая

$$u = x, \qquad du = dx,$$
$$dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Перенося интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 6. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \ \text{ и } \ I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,$$
$$dv = \cos bx\,dx,\ v = \frac{1}{b}\sin bx,$$
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}\,dx,$$
$$dv = \sin bx\,dx,\ v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Найдем из последнего равенства I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

§ 7. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m}{A\ x^n + A\ x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь $M(x)$ — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднения, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k — целое положительно число $\geqslant 2$),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k — целое положительное число $\geqslant 2$; корни знаменателя комплексные)

называются *простейшими дробями* I, II, III *и* IV *типов.*

Далее будет доказано (см. § 8), что всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Поэтому мы рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

Интегрирование простейших дробей типов I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (\text{см. § 5}).$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

$$\text{IV.} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(b - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q = t$, $(2x+p)dx = dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C =$$
$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Второй интеграл — обозначим его через I_k — запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Далее поступаем следующим образом:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2) - t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt. \qquad (1)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} =$$
$$= -\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, будем иметь:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} =$$
$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$
$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k+3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже $(k-1)$; таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1}.

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A, B, p, q.

Пример 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

К последнему интегралу применяем подстановку $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int td\Big(\frac{1}{t^2+2}\Big) = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$
$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

(произвольного постоянного пока не пишем: мы учтем его только в окончательном результате).

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

Окончательно будем иметь:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. Разложение рациональной дроби на простейшие

Покажем, далее, что всякую рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Пусть нам дана правильная рациональная дробь

$$\frac{F(x)}{f(x)}.$$

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов — действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Теорема 1. *Пусть $x = a$ есть корень знаменателя кратности k, т.е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$* (см. § 6 гл. VII); *тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

где A — постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(справедливое при любом A) и определим постоянную A так, чтобы многочлен $F(x) - Af_1(x)$ делился на $x - a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Так как $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, то A однозначно определится равенством

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

При таком A будем иметь:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a)F_1(x),$$

где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1}f_1(x)$. Сокращая дробь в формуле (2) на $(x-a)$, получаем равенство (1).

Следствие. К правильной рациональной дроби

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)},$$

входящей в равенство (1), можно применять аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x=a$ кратности k, то можно написать:

$$\frac{F(x)}{f((x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ — правильная несократимая дробь. К ней также можно применить только что доказанную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим далее случай комплексных корней знаменателя. Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены (см. § 8 гл. VII).

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида x^2+px+q. Если же комплексные корни имеют кратность μ, то им соответствует выражение $(x^2+px+q)^\mu$.

Теорема 2. *Если $f(x)=(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на x^2+px+q, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \tag{3}$$

где $\Phi_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)} =$$
$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)}, \tag{4}$$

справедливое при любых M и N, и определим M и N так, чтобы многочлен $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ делился на x^2+px+q. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$$

имело те же корни $\alpha \pm i\beta$, что и многочлен x^2+px+q. Следовательно,

$$F(\alpha+i\beta)-[M(\alpha+i\beta)+N]\varphi_1(\alpha+i\beta)=0$$

или
$$M(\alpha+i\beta)+N=\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}.$$

Но $\dfrac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ есть определенное комплексное число, которое можно записать в виде $K+iL$, где K и L — некоторые действительные числа. Таким образом,
$$M(\alpha+i\beta)+N=K+iL;$$
отсюда
$$M\alpha+N=K, \quad M\beta=L$$
или
$$M=\frac{L}{\beta}, \quad N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}.$$

При этих значениях коэффициентов M и N многочлен $F(x)-$ $-(Mx+N)\varphi_1(x)$ имеет корнем число $\alpha+i\beta$, следовательно, и сопряженное число $\alpha-i\beta$. Но в таком случае многочлен без остатка разделится на разности $x-(\alpha+i\beta)$ и $x-(\alpha-i\beta)$, а следовательно, и на их произведение, т.е. на x^2+px+q. Обозначая частное от этого деления через $\Phi_1(x)$, получим:
$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=(x^2+px+q)\Phi_1(x).$$
Сокращая последнюю дробь в равенстве (4) на x^2+px+q, получим равенство (3), причем ясно, что степень $\Phi_1(x)$ меньше степени знаменателя, что и требовалось доказать.

Применяя теперь к правильной дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ результаты теорем 1 и 2, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$. Таким образом, из предыдущего вытекает следующий результат.

Если
$$f(x)=(x-a)^\alpha\ldots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\mu\ldots(x^2+lk+s)^\nu,$$
то дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ *может быть представлена в виде*
$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)}&=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\\
&+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\nu}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Коэффициенты A, A_1, ..., B, B_1, ... можно определить из следующих соображений. Написанное равенство есть ***тождество***, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A, A_1, ..., B, B_1, ... Этот метод нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Наряду с этим для определения коэффициентов можно воспользоваться следующим замечанием: так как многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определенных коэффициентов.

Таким образом, мы видим, что всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших рациональных дробей.

Пример. Пусть требуется разложить дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие. На основании формулы (5) имеем:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x^2+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3, \tag{6}$$

или

$$x^2+2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + \\ + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x^1, x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} 0 &= A_2 + B, \\ 1 &= A_1 + 3B, \\ 0 &= A - A_1 - 3A_2 + 3B, \\ 2 &= -2A - 2A_1 - 2A_2 + B. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем:

$$A = -1, \quad A_1 = 1/3, \quad A_2 = -2/9, \quad B = 2/9.$$

Можно было бы также определить некоторые коэффициенты из уравнений, которые получаются при некоторых частных значениях x из равенства (6), которое является тождеством относительно x.

Так,

$$\text{полагая } x = -1, \quad \text{получим } 3 = -3A \quad \text{или} \quad A = -1;$$
$$\text{полагая } x = 2, \quad \text{получим } 6 = 27B; \quad B = 2/9.$$

Если к этим двум уравнениям присоединим два уравнения, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x, то получим четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\frac{Q(x)}{f(x)}$, т.е. интеграл

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Если данная дробь ***неправильная***, то мы представляем ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и ***правильной*** рациональной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ (см. § 7). Последнюю же представляем по формуле (5) § 8 в виде суммы ***простейших*** дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких ***простейших*** дробей.

Из результатов § 8 следует, что вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны следующие случаи.

I случай. *Корни знаменателя действительны и различны, т.е.*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

и тогда

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \dots + \int \frac{D}{x-d}\,dx =$$
$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \dots + D\ln|x-d| + C.$$

II случай. *Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\delta.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 1 (см. пример в § 8 гл. X).

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} +$$
$$+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + C =$$
$$= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

III **случай**. *Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т.е. различные)*:

$$f(x) = (x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s)(x-a)^\alpha\ldots(x-d)^\delta.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие (см. (5) § 8 гл. X):

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Следовательно,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

$$\text{Полагая}\quad x=1,\quad \text{получим}:\quad 1=2C,\quad C=1/2;$$
$$\text{полагая}\quad x=0,\quad \text{получим}:\quad 0=-B+C,\quad B=1/2.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $0 = A + C$, откуда $A = -1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

IV **случай**. *Среди корней знаменателя есть комплексные кратные*

$$f(x) = (x^2+px+q)^\mu\ldots(x^2+lx+s)^\nu(x-a)^\alpha\ldots(x-d)^\delta.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}\, dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

откуда

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

Таким образом, получаем:

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}\, dx = \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2}\, dx + \int \frac{dx}{x + 1} =$$
$$= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \ln|x + 1| + C.$$

Первый интеграл, стоящий справа, был рассмотрен в примере 2 § 7 гл. X. Второй интеграл берется непосредственно.

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы — в случае простейших дробей I типа;

2) через рациональные функции — в случае простейших дробей II типа;

3) через логарифмы и арктангенсы — в случае простейших дробей III типа;

4) через рациональные функции и арктангенсы — в случае простейших дробей IV типа.

§ 10. Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

I. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})\,dx$, где R рациональная функция своих аргументов*).

Пусть k общий знаменатель дробей m/n, ..., r/s. Сделаем подстановку:

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Тогда каждая ***дробная*** степень x выразится через ***целую*** степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в ***рациональную функцию от*** t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1}.$$

Решение. Общий знаменатель дробей $1/2$, $3/4$ есть 4; поэтому делаем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3\,dt$; тогда

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$
$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$
$$= \frac{4}{3}[x^{3/4} - \ln|x^{3/4}+1|] + C.$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k — общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/s$.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Решение. Делаем подстановку $x + 4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\,dt$; тогда

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int\left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

---

*) Запись $R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})$ указывает, что над величинами x, $x^{m/n}$, ..., $x^{r/s}$ производятся только ***рациональные*** операции.

Точно так же следует понимать в дальнейшем записи вида $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots\right)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $R(\sin x, \cos x)$ и т.д. Так, например, запись $R(\sin x, \cos x)$ указывает, что над $\sin x$ и $\cos x$ производятся рациональные операции.

§ 11. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

где $a \neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. *Первая подстановка Эйлера.* Если $a > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t.$$

Перед корнем $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

(значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t,$$

т.е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t.

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x и dx выражаются рационально через t, то, следовательно, данный интеграл (1) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Решение. Так как здесь $a = 1 > 0$, то полагаем $\sqrt{x^2+c} = -x+t$; тогда

$$x^2+c = x^2-2xt+t^2,$$

откуда

$$x = \frac{t^2-c}{2t}.$$

Следовательно,

$$dx = \frac{t^2+c}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+c} = -x+t = -\frac{t^2-c}{2t} + t = \frac{t^2+c}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x+\sqrt{x^2+c}| + C_1$$

(см. формулу 14 таблицы интегралов).

2. *Вторая подстановка Эйлера.* Если $c > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c};$$

тогда (перед $\sqrt{c}$ для определенности берем знак плюс)

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c.$$

Отсюда x определяется как рациональная функция от t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже выражаются рационально через t, то, подставляя значения x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Решение. Полагаем $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$; тогда

$$1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1, \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = -2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1|+C.$$

3. *Третья подстановка Эйлера.* Пусть α и β — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c. Полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t.$$

Так как $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, то

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2,$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2.$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже рационально зависят от t, то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Замечание 1. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a < 0$, но и при $a > 0$ — лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Решение. Так как $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$, то полагаем:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t;$$

тогда

$$(x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2, \quad x-1 = (x+4)t^2,$$

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = \left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t = \frac{5t}{1-t^2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

Замечание 2. Заметим, что для приведения интеграла (1) к интегралу от рациональной функции достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Рассмотрим трехчлен ax^2+bx+c. Если $b^2-4ac > 0$, то корни трехчлена действительны и, следовательно, применима третья подстановка Эйлера. Если $b^2-4ac \leqslant 0$, то в этом случае

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

и, следовательно, трехчлен имеет знак, совпадающий со знаком a. Чтобы $\sqrt{ax^2+bx+c}$ был действительным, нужно, чтобы трехчлен был положительным, а следовательно, должно быть $a > 0$. В этом случае применима первая подстановка.

§ 12. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

До сих пор мы систематически изучали интегралы только от алгебраических функций (рациональных и иррациональных). В настоящем параграфе мы рассмотрим интегралы от некоторых классов неалгебраических, в первую очередь тригонометрических, функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx. \tag{1}$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \tag{2}$$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а следовательно, и через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выразились рационально через t. Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (1), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

На основании написанных выше формул имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\cos x, \sin x)$. Поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой». Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с «универсальной» подстановкой бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, то подстановка $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t)\,dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$.

3) Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$, то замена $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в ***четных*** степенях, то применяется та же подстановка:

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{2'}$$

так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки мы получим интеграл от рациональной функции.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx$.

Решение. Этот интеграл легко привести к виду $\int R(\cos x)\sin x\,dx$. Действительно,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x\,dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx.$$

Сделаем замену $\cos x = z$. Тогда $\sin x\,dx = -dz$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2}\,dz = \int \left(z - 2 + \frac{3}{z+2}\right)dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \dfrac{dx}{2-\sin^2 x}$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2 - \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5) Рассмотрим теперь еще один интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ — именно интеграл, под знаком которого стоит произведение $\sin^m x \cos^n x\,dx$ (где m и n — целые числа). Здесь рассмотрим три случая.

а) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них ***нечетное*** число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p+1$ и преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx =$$
$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Сделаем замену переменного:

$$\sin x = t, \quad \cos x\,dx = dt.$$

Подставляя новую переменную в данный интеграл, получим:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int t^m (1 - t^2)^p\,dt,$$

а это и есть интеграл от рациональной функции от t.

Пример 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\,dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^4 x}.$$

Обозначая $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$, получим:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — числа неотрицательные и четные.

Положим $m = 2p$, $n = 2q$. Напишем формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3}$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечетных и четных рядах. Члены с нечетными степенями интегрируются, как указано в случае а). Четные показатели степеней снова понижаем по формулам (3). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int \cos kx\,dx$, которые легко интегрируются.

Пример 5.

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

в) Если оба показателя четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не приводит к цели. Здесь следует сделать замену $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

Пример 6.

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x} = \int \frac{sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\,dx.$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$; тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, и мы получаем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int t^2(1+t^2)^2\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\,dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) Рассмотрим в заключение интегралы вида

$$\int \cos mx \cos nx\,dx, \qquad \int \sin mx \cos nx\,dx, \qquad \int \sin mx \sin nx\,dx.$$

Они берутся при помощи следующих*) формул ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Подставляя и интегрируя, получим:

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx =$$
$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

---

*) Эти формулы легко вывести следующим образом:

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx,$$
$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.$$

Складывая эти равенства почленно и деля пополам, получим первую из приведенных трех формул. Вычитая почленно и деля пополам, получим третью формулу. Вторая формула выводится аналогично, если написать аналогичные равенства для $\sin(m+n)x$ и $\sin(m-n)x$ и затем почленно их сложить.

Аналогично вычисляются и два других интеграла.

Пример 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\,dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

§ 13. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

Вернемся к интегралу, рассмотренному в § 11 гл. X,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

где $a \neq 0$ и $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ (в случае $a = 0$ интеграл имеет вид II § 10, при $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ выражение $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, и мы имеем дело с рациональной функцией, если $a > 0$, при $a < 0$ функция $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не определена ни при каком значении x). Покажем здесь метод преобразования этого интеграла к интегралу вида

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z)\,dz, \tag{2}$$

который рассмотрен в предыдущем параграфе.

Произведем преобразование трехчлена, стоящего под корнем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Сделаем замену переменного, положив $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введем обозначения $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. В этом случае будем иметь:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Пусть $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Тогда $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Пусть $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Тогда $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4. Пусть $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. В этом случае $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ есть комплексное число при любом значении x.

Таким образом, интеграл (1) преобразуется к одному из следующих типов интегралов:

$$\text{I.} \qquad \int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2})\, dt. \tag{3.1}$$

$$\text{II.} \qquad \int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2})\, dt. \tag{3.2}$$

$$\text{III.} \qquad \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2})\, dt. \tag{3.3}$$

Очевидно, что интеграл (3.1) приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m}\operatorname{tg} z$. Интеграл (3.2) приводится к виду (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m}\sec z$. Интеграл (3.3) приводится к виду (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m}\sin t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

Решение. Это интеграл типа III. Сделаем замену $x = a\sin z$, тогда $dx = a\cos z\, dz$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \int \frac{a\cos z\, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2\sin^2 z)^3}} = \int \frac{a\cos z\, dz^{*)}}{a^3\cos^3 z} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} =$$
$$= \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

§ 14. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

В § 1 гл. X мы уже отмечали (без доказательства), что всякая функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b), имеет на этом интервале первообразную, т.е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако ***не всякая первообразная***, даже тогда, когда она существует, ***выражается в конечном виде через элементарные функции***.

Таковы первообразные, выраженные интегралами $\int e^{-x^2}\, dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$, $\int \sqrt{1 - k^2\sin^2 x}\, dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, и многие другие. Во всех подобных случаях первообразная представляет собой, очевидно, некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций.

Так, например, та из первообразных $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\, dx + C$, которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *функцией Лапласа* и

---

*) $\sqrt{1 - \sin^2 z} = |\cos z|$; мы для определенности останавливаемся лишь на одном случае: $|\cos z| = \cos z$.

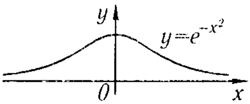


Рис. 208

обозначается $\Phi(x)$. Таким образом,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2}\,dx + C_1, \quad \text{если} \quad \Phi(0) = 0.$$

Эта функция хорошо изучена. Составлены подробные таблицы ее значений при различных значениях x. Как это делается, мы увидим в § 21 гл. XVI (т. II). На рис. 208 и 209 изображены график подынтегральной функции $y = e^{-x^2}$ и график функции Лапласа $y = \Phi(x)$.

Та из первообразных

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,dx + C \quad (k < 1),$$

которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *эллиптическим интегралом* и обозначается $E(x)$:

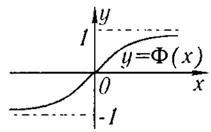


Рис. 209

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,dx + C_2 \quad \text{если} \quad E(0) = 0.$$

Для этой функции также составлены таблицы значений при различных значениях x.

Упражнения к главе X

I. Вычислить интегралы: **1.** $\int x^5\,dx$. *Отв.* $\frac{x^6}{6} + C$. **2.** $\int (x + \sqrt{x})\,dx$. *Отв.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. **3.** $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$. *Отв.* $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$. **4.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. **5.** $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right) dx$. *Отв.* $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. **6.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Отв.* $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. **7.** $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Отв.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Интегрирование методом подстановки: **8.** $\int e^{5x}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}e^{5x} + C$. **9.** $\int \cos 5x\,dx$. *Отв.* $\frac{\sin 5x}{5} + C$. **10.** $\int \sin ax\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$. **11.** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. **12.** $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + C$. **13.** $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. **14.** $\int \frac{dx}{3x - 7}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\ln|3x - 7| + C$. **15.** $\int \frac{dx}{1 - x}$. *Отв.* $-\ln|1 - x| + C$. **16.** $\int \frac{dx}{5 - 2x}$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\ln|5 - 2x| + C$. **17.** $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$. **18.** $\int \operatorname{ctg}(5x - 7)\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x - 7)| + C$. **19.** $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y}$. *Отв.* $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y| + C$. **20.** $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\,dx$. *Отв.* $3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right| + C$. **21.** $\int \operatorname{tg}\varphi \cdot \sec^2\varphi\,d\varphi$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C$. **22.** $\int (\operatorname{ctg} e^x)e^x\,dx$. *Отв.* $\ln|\sin e^x| + C$. **23.** $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg}\frac{S}{4}\right) dS$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S| - 4\ln\left|\sin\frac{S}{4}\right| + C$. **24.** $\int \sin^2 x \cos x\,dx$. *Отв.* $\frac{\sin^3 x}{x} + C$. **25.** $\int \cos^3 x \sin x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$. **26.**

$\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **27.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$. **28.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. **29.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{\sin x}+C$. **30.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$. *Отв.* $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$. **31.** $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$. **32.** $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+C$. **33.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$. *Отв.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$. **34.** $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$. *Отв.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$. **35.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$. *Отв.* $\sqrt{2\sin x+1}+C$. **36.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$. **37.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. *Отв.* $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$. **38.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$. **39.** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{(2+3\sin 2x)^3}$. *Отв.* $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2}+C$. **40.** $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$. **41.** $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$. *Отв.* $\frac{\ln^3 x}{3}+C$. **42.** $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$. **43.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$. *Отв.* $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$. **44.** $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$. **45.** $\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{arcctg}^2 x}{2}+C$. **46.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **47.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$. **48.** $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(2\sin x+3)+C$. **49.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$. *Отв.* $\ln|\ln x|+C$. **50.** $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$. *Отв.* $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$. **51.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$. **52.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **53.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$. **54.** $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. **55.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$. *Отв.* $\ln|\arcsin x|+C$. **56.** $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+C$. **57.** $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$. *Отв.* $\sin(\ln x)+C$. **58.** $\int \cos(a+bx)\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$. **59.** $\int e^{2x}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **60.** $\int e^{x/3}\,dx$. *Отв.* $3e^{x/3}+C$. **61.** $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. *Отв.* $e^{\sin x}+C$. **62.** $\int a^{x^2}x\,dx$. *Отв.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$. **63.** $\int e^{x/a}\,dx$. *Отв.* $ae^{x/a}+C$. **64.** $\int (e^{2x})^2\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. **65.** $\int 3^x e^x\,dx$. *Отв.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. **66.** $\int e^{-3x}\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$. **67.** $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$. **68.** $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **69.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$. *Отв.* $\frac{(\frac{a}{b})^x-(\frac{b}{a})^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$. **70.** $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. *Отв.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$. **71.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$. **72.** $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$. **73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$. **74.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$. **75.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Отв.* $\arcsin\frac{x}{3}+C$. **76.** $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **77.** $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Отв.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **78.** $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Отв. $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$. **80.** $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. **81.** $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+C$. **82.** $\int\frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$. **83.** $\int\frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. *Отв.* $\frac{1}{6\sqrt5}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt5}{x^3-\sqrt5}\right|+C$. **84.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Отв.* $\frac12\arcsin x^2+C$. **85.** $\int\frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Отв.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$. **86.** $\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Отв.* $\arcsin e^x+C$. **87.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt5}\arcsin\sqrt{\frac53}x+C$. **88.** $\int\frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2x}$. *Отв.* $\frac1a\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C$. **89.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$. *Отв.* $\arcsin(\ln x)+C$. **90.** $\int\frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Отв.* $-\frac12(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$. **91.** $\int\frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$. *Отв.* $\frac12\ln(1+x^2)-\frac12(\operatorname{arctg}x)^2+C$. **92.** $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$. *Отв.* $\frac23\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. **93.** $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt x}}{\sqrt x}dx$. *Отв.* $\frac43\sqrt{(1+\sqrt x)^3}+C$. **94.** $\int\frac{dx}{\sqrt x\sqrt{1+\sqrt x}}$. *Отв.* $4\sqrt{1+\sqrt x}+C$. **95.** $\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. *Отв.* $\operatorname{arctg}e^x+C$. **96.** $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2x}}$. *Отв.* $3\sqrt[3]{\sin x}+C$. **97.** $\int\sqrt{1+3\cos^2x}\sin2x\,dx$. *Отв.* $-\frac29\sqrt{(1+3\cos^2x)^3}+C$. **98.** $\int\frac{\sin2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2x}}$. *Отв.* $-2\sqrt{1+\cos^2x}+C$. **99.** $\int\frac{\cos^3x}{\sin^4x}dx$. *Отв.* $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3x}+C$. **100.** $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2x}}{\cos^2x}dx$. *Отв.* $\frac35\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5x}+C$. **101.** $\int\frac{dx}{2\sin^2x+3\cos^2x}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt6}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac23}\operatorname{tg}x\right)+C$.

Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$: **102.** $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Отв.* $\frac12\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **103.** $\int\frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$. **104.** $\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt5}{2x+3+\sqrt5}\right|+C$. **105.** $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Отв.* $\frac14\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$. **106.** $\int\frac{dz}{2z^2-2z+1}$. *Отв.* $\operatorname{arctg}(2z-1)+C$. **107.** $\int\frac{dx}{3x^2-2x+2}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt5}+C$. **108.** $\int\frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$. *Отв.* $\ln|3x^2-7x+11|+C$. **109.** $\int\frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. *Отв.* $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$. **110.** $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$. *Отв.* $\frac32\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$. **111.** $\int\frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$. *Отв.* $\frac23\ln|3x-1|+\frac12\ln|2x+1|+C$. **112.** $\int\frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$. *Отв.* $\frac15\ln(5x^2-x+2)-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$. **113.** $\int\frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$. *Отв.* $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac14\ln|2x^2-x+1|+\frac{1}{2\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt7}+C$. **114.** $\int\frac{dx}{2\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x}$. *Отв.* $\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt7}+C$.

Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$: **115.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Отв.* $\frac12\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$. **116.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. *Отв.* $\ln\left|x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$.

117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. *Отв.* $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$. **118.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$. **119.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$. **120.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. *Отв.* $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$. **121.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$. **122.** $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. *Отв.* $2\sqrt{ax^2+bx+c}+$ $+C$. **123.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. *Отв.* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$. **124.** $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. *Отв.* $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$. **125.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$. **126.** $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln|4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)}|+C$.

II. Интегрирование по частям: **127.** $\int xe^x\,dx$. *Отв.* $e^x(x-1)+C$. **128.** $\int x\ln x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. **129.** $\int x\sin x\,dx$. *Отв.* $\sin x-x\cos x+C$. **130.** $\int \ln x\,dx$. *Отв.* $x(\ln x-1)+C$. **131.** $\int \arcsin x\,dx$. *Отв.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **132.** $\int \ln(1-x)\,dx$. *Отв.* $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$. **133.** $\int x^n\ln x\,dx$. *Отв.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. **134.** $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x-x]+C$. **135.** $\int x\arcsin x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}]+C$. **136.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$. *Отв.* $x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$. **137.** $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Отв.* $(x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **138.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Отв.* $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$. **139.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Отв.* $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$. **140.** $\int x\cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+$ $+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **141.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Отв.* $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$. **142.** $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Отв.* $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}+C$. **143.** $\int x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$. **144.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. *Отв.* $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-$ $-\frac{1}{x}\arcsin x+C$. **145.** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. *Отв.* $x\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+\sqrt{1+x^2}+C$. **146.** $\int \arcsin x\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$.

Применить тригонометрические подстановки в следующих примерах: **147.** $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$. **148.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Отв.* $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$. **149.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **150.** $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$. **151.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Интегрирование рациональных дробей: **152.** $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Отв.*

$\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **153.** $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Отв.* $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|}+C$. **154.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. *Отв.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **155.** $\int\frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Отв.* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|^3}+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$. **156.** $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Отв.* $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. **157.** $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$. **158.** $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. *Отв.* $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **159.** $\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. *Отв.* $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$. **160.** $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Отв.* $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **161.** $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. *Отв.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **162.** $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. *Отв.* $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **163.** $\int\frac{dx}{x^3+1}$. *Отв.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **164.** $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$. *Отв.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **165.** $\int\frac{4\,dx}{x^4+1}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+$ $+C$. **166.** $\int\frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}[x^3+\ln|x^3-1|]+C$. **167.** $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. *Отв.* $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)^{1/2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **168.** $\int\frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. *Отв.* $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$. **169.** $\int\frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. *Отв.* $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Интегрирование иррациональных функций: **170.** $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. *Отв.* $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$. **171.** $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$. **172.** $\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. *Отв.* $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$. **173.** $\int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. *Отв.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln(\sqrt[6]{x}+1)+$ $+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x}+1)+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **174.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$. *Отв.* $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-$ $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. **175.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. *Отв.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$. **176.** $\int\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$. *Отв.* $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$. **177.** $\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+C$.

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: **178.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. **179.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. *Отв.*

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **180.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$. **181.** $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$. *Отв.* $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. **182.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$. **183.** $\int\sqrt{2x-x^2}dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)]+C$. **184.** $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *Отв.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-$ $-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$. **185.** $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. *Отв.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$. **186.** $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx^2$. *Отв.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$. **187.** $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$. *Отв.* $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$. **188.** $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$. *Отв.* $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+$ $+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$.

Интегрирование тригонометрических функций:

189. $\int\sin^3 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. **190.** $\int\sin^5 x\,dx$. *Отв.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. **191.** $\int\cos^4 x\sin^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$. **192.** $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. *Отв.* $\operatorname{cosec} x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$. **193.** $\int\cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+C$. **194.** $\int\sin^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **195.** $\int\cos^6 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$. **196.** $\int\sin^4 x\cos^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$. **197.** $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. **198.** $\int\operatorname{ctg}^5 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|+C$. **199.** $\int\operatorname{ctg}^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C$. **200.** $\int\sec^8 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. **201.** $\int\operatorname{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **202.** $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$. *Отв.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **203.** $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$. *Отв.* $C-\operatorname{cosec} x$. **204.** $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Отв.* $\frac{3}{5}(\cos^{5/3} x)+3(\cos^{-1/3} x)+C$. **205.** $\int\sin x\sin 3x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. **206.** $\int\cos 4x\cos 7x\,dx$. *Отв.* $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$. **207.** $\int\cos 2x\sin 4x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$. **208.** $\int\sin\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$. **209.** $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$. **210.** $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **211.** $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$. *Отв.* $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$. **212.** $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$. *Отв.* $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **213.** $\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$. *Отв.* $\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)+C$. **214.** $\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$. **215.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$. **216.** $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

Глава XI
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Постановка задачи. Нижняя и верхняя интегральные суммы

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является ***определенный интеграл*** — одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т.д. сводится к вычислению определенного интеграла.

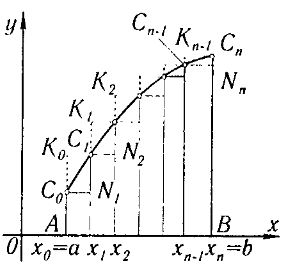


Рис. 210

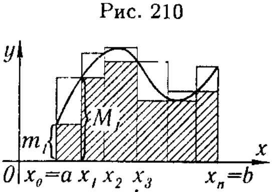


Рис. 211

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ***непрерывная*** функция $y = f(x)$ (рис. 210 и 211). Обозначим через m и M ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками деления

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b,$$

причем

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

и положим

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,$$
$$x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Обозначим, далее, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$

на отрезке $[x_0, x_1]$ через m_1 и M_1,

на отрезке $[x_1, x_2]$ через m_2 и M_2,

. . . .

на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$ через m_n и M_n.

Составим суммы

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \tag{1}$$

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i. \tag{2}$$

Сумму $\underline{s}_n$ называют *нижней интегральной суммой*, а сумму $\overline{s}_n$ — *верхней интегральной суммой.*

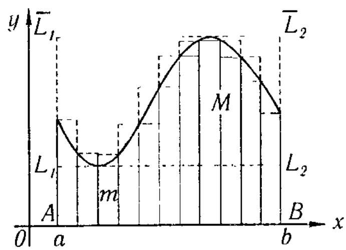


Рис. 212

Если $f(x) \geqslant 0$, то нижняя интегральная сумма численно равняется площади «вписанной ступенчатой фигуры» $AC_0N_1C_1N_2\dots C_{n-1}N_nBA$, ограниченной «вписанной» ломаной, верхняя интегральная сумма численно равняется площади «описанной ступенчатой фигуры» $AK_0C_1K_1\dots$ $\dots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$, ограниченной «описанной» ломаной.

Отметим некоторые свойства верхних и нижних интегральных сумм.

а) Так как $m_i \leqslant M_i$ для любого i $(i = 1, 2, \dots, n)$, то на основании формул (1) и (2) имеем:

$$\underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n. \tag{3}$$

(Знак равенства будет только в случае, если $f(x) = \text{const}$.)

б) Так как

$$m_1 \geqslant m, \quad m_2 \geqslant m, \dots, m_n \geqslant m,$$

где m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n \geqslant m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \dots + m\Delta x_n =$$
$$= m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m(b - a).$$

Итак,

$$\underline{s}_n \geqslant m(b - a). \tag{4}$$

в) Так как

$$M_1 \leqslant M, \quad M_2 \leqslant M, \dots, M_n \leqslant M,$$

где M — наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n \leqslant M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \dots + M\Delta x_n =$$
$$= M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b - a).$$

Итак,

$$\overline{s}_n \leqslant M(b - a). \tag{5}$$

Соединяя вместе полученные неравенства, имеем:

$$m(b-a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n \leqslant M(b-a). \tag{6}$$

Если $f(x) \geqslant 0$, то последнее неравенство имеет простой геометрический смысл (рис. 212), так как произведения $m(b-a)$ и $M(b-a)$ соответственно численно равны площадям «вписанного» прямоугольника AL_1L_2B и «описанного» прямоугольника $A\overline{L}_1\overline{L}_2B$.

§ 2. Определенный интеграл. Теорема о существовании определенного интеграла

Продолжим рассмотрение вопроса предыдущего параграфа. В каждом из отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ возьмем по точке, которые обозначим ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_n$ (рис. 213):

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

В каждой из этих точек вычислим значение функции $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Составим сумму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

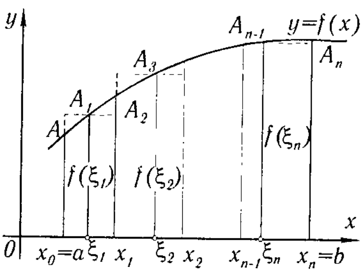


Рис. 213

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Так как при произвольном ξ_i, принадлежащем отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, будет $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ и все $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M_i\Delta x_i,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

или

$$\underline{s}_n \leqslant s_n \leqslant \overline{s}_n. \tag{2}$$

Геометрический смысл последнего неравенства при $f(x) \geqslant 0$ состоит в том, что фигура, площадь которой равна s_n, ограничена ломаной, заключенной между «вписанной» ломаной и «описанной» ломаной.

Сумма s_n зависит от способа разделения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и от выбора точек ξ_i внутри получающихся отрезков.

Обозначим теперь через $\max[x_{i-1}, x_i]$ наибольшую из длин отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Рассмотрим различные разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ такие, что $\max[x_{i-1}, x_i] \to 0$. Очевидно, что при этом число отрезков n в разбиении стремится к бесконечности. Для каждого разбиения, выбрав соответствующие значения ξ_i, можно составить интегральную сумму

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторую последовательность разбиений, при которых $\max \Delta x_i \to 0$, при этом $n \to \infty$. При каждом разбиении выбираем значения ξ_i. Предположим, что эта последовательность интегральных сумм*) s_n^* стремится к некоторому пределу

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s. \tag{4}$$

Теперь мы можем сформулировать следующее

Определение 1. Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ интегральная сумма

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{5}$$

стремится к одному и тому же пределу s, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, по определению

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Число a называется *нижним пределом* интеграла, b — *верхним пределом* интеграла. Отрезок $[a, b]$ называется *отрезком интегрирования*, x — *переменной интегрирования*.

Определение 2. Если для функции $f(x)$ предел (6) существует, то функцию называют *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$.

Заметим, что нижняя интегральная сумма $\underline{s}_n$ и верхняя интегральная сумма $\overline{s}_n$ являются частными случаями интегральной суммы (5), поэтому если $f(x)$ интегрируема, то нижняя и верхняя

---

*) В данном случае сумма является упорядоченной переменной величиной.

интегральные суммы стремятся к тому же пределу s, и потому на основании равенства (6) можем написать:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7'}$$

Если построить график подынтегральной функции $y = f(x)$, то в случае $f(x) \geqslant 0$ интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

будет численно равен ***площади*** так называемой ***криволинейной трапеции***, ограниченной указанной кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 214).

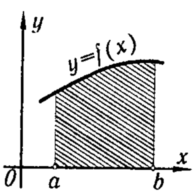


Рис. 214

Поэтому если требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то эта площадь Q вычисляется с помощью интеграла:

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируется на этом отрезке.*

Доказательство. Снова разобьем отрезок $[a, b]$ $(a < b)$ на отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Составим нижнюю и верхнюю интегральные суммы:

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \tag{9}$$

$$\overline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{10}$$

Для дальнейшего установим некоторые свойства верхних и нижних интегральных сумм.

Свойство 1. *При увеличении числа отрезков, на которые мы разбиваем отрезок $[a, b]$ путем добавления новых точек деления, нижняя интегральная сумма может только возрастать, а верхняя интегральная сумма только убывать.*

Доказательство. Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n' отрезков путем добавления новых точек ($n' > n$). Если какой-то отрезок $[x_{k-1},x_k]$ будет разбит на несколько отрезков, например на p_k отрезков, то в новой нижней интегральной сумме $\underline{s}_{n'}$ отрезку $[x_{k-1},x_k]$ будет соответствовать p_k слагаемых, которые мы обозначим через $\underline{s}^*_{p_k}$. В сумме $\underline{s}_n$ этому отрезку соответствует одно слагаемое $m_k(x_k-x_{k-1})$. Но для суммы $s^*_{p_k}$ и величины $m_k(x_k-x_{k-1})$ справедливо неравенство, аналогичное неравенству (4) § 1. Мы можем написать:

$$\underline{s}^*_{p_k} \geqslant m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Написав соответствующие неравенства для каждого отрезка и суммируя левые и правые части, получим:

$$\underline{s}_{n'} \geqslant \underline{s}_n \quad (n' > n). \tag{11}$$

Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Нижняя интегральная сумма* (9) *и верхняя интегральная сумма* (10) *при неограниченном увеличении числа отрезков путем добавления новых точек деления стремятся к некоторым пределам $\underline{s}$ и $\overline{s}$.*

Доказательство. На основании неравенства (6) § 1 можем написать:

$$\underline{s}_n \leqslant M(b-a),$$

т.е. $\underline{s}_n$ ограничена при всех n. На основании свойств 1 $\underline{s}_n$ монотонно возрастает при возрастании n. Следовательно, на основании теоремы 7 о пределах (см. § 5 гл. II) эта переменная величина имеет предел; обозначим его через $\underline{s}$:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{s}_n = \underline{s}. \tag{12}$$

Аналогично устанавливается, что $\overline{s}_n$ ограничена снизу и монотонно убывает. Следовательно, $\overline{s}_n$ имеет предел, который мы обозначим через $\overline{s}$:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}.$$

Свойство 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a,b]$, то пределы $\underline{s}$ и $\overline{s}$, определенные в свойстве 2 при условии, что $\max \Delta x_i \to 0$, равны.*

Этот общий предел обозначим через s:

$$\underline{s} = \overline{s} = s. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим разность верхней и нижней интегральных сумм:

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n = (M_1-m_1)\Delta x_1 + (M_2-m_2)\Delta x_2 + \dots + (M_i-m_i)\Delta x_i + \dots$$
$$\dots + (M_n-m_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i. \tag{14}$$

Обозначим через ε_n наибольшую из разностей $(M_i - m_i)$ при данном разбиении

$$\varepsilon_n = \max(M_i - m_i).$$

Можно доказать (на чем мы останавливаться не будем), что если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке, то при любом способе разбиения отрезка $[a,b]$ $\varepsilon_n \to 0$, если только $\max \Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0. \tag{15}$$

Свойство непрерывной функции на замкнутом отрезке, выражаемое равенством (15), называется *равномерной непрерывностью* функции.

Итак, мы будем пользоваться теоремой: *непрерывная функция на замкнутом отрезке равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Вернемся к равенству (14). Каждую разность $(M_i - m_i)$ в правой части заменим неменьшей величиной ε_n. Получаем неравенство

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n \leqslant \varepsilon_n \Delta x_1 + \varepsilon_n \Delta x_2 + \cdots + \varepsilon_n \Delta x_n = \\ = \varepsilon_n(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \varepsilon_n(b-a).$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, получаем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_n - \underline{s}_n) \leqslant \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n (b-a) = (b-a) \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0, \tag{16}$$

т.е.

$$\lim \overline{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \tag{17}$$

или $\underline{s} = \overline{s} = s$, ч.т.д.

Свойство 4. *Пусть $\underline{s}_{n_1}$ и $\overline{s}_{n_2}$ — нижняя и верхняя интегральные суммы, соответствующие разбиениям отрезка $[a,b]$ на n_1 и соответственно на n_2 отрезков. Тогда имеет место неравенство*

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \overline{s}_{n_2} \tag{18}$$

при любых n_1 и n_2.

Доказательство. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на $n_3 = n_1 + n_2$ отрезков, где точками деления будут точки деления первого и второго разбиений.

На основании неравенства (3) § 1 имеем:

$$\underline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_3}. \tag{19}$$

На основании свойства 1 имеем:

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \underline{s}_{n_3}, \tag{20}$$

$$\overline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_2}. \tag{21}$$

Пользуясь соотношениями (20) и (21), можно расширить неравенство (19)

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \underline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_2}$$

или

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \overline{s}_{n_2},$$

ч.т.д.

Свойство 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то при любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, необязательно путем присоединения новых точек деления, если только $\max \Delta x_i \to 0$, нижняя интегральная сумма $\underline{s}_m^*$ и верхняя интегральная сумма $\overline{s}_m^*$ стремятся к пределу s, определенному в свойстве* 3.

Доказательство. Рассмотрим последовательность разбиений последовательности верхних интегральных сумм $\overline{s}_n$, определенных в свойстве 2. При любых значениях n и m (на основании неравенства (18)) можем написать:

$$\underline{s}_m^* \leqslant \overline{s}_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, на основании (15) можем написать:

$$\underline{s}_m^* \leqslant s.$$

Аналогичным способом докажем $s \leqslant \underline{s}_m^*$. Итак,

$$\underline{s}_m^* \leqslant s \leqslant \underline{s}_m^*,$$

или

$$s - \underline{s}_m^* \geqslant 0, \quad \overline{s}_m^* - s \geqslant 0. \tag{22}$$

Рассмотрим предел разности

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - \underline{s}_m^*).$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то (так же как и при доказательстве свойства 3) докажем (см. равенство (16)), что

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Перепишем последнее соотношение так:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \Big[(\overline{s}_m^* - s) + (s - \underline{s}_m^*)\Big] = 0.$$

На основании (22) каждая из разностей, стоящих в квадратных скобках, неотрицательна. Следовательно,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}_m^* - s) = 0, \qquad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} (s - \underline{s}_m^*) = 0.$$

И окончательно получаем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \underline{s}_m^* = s, \qquad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \overline{s}_m^* = s, \tag{23}$$

ч.т.д.

Теперь можно доказать и сформулированную выше теорему. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

такую, что $\max \Delta x_i \to 0$, ξ_i — произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Для данной последовательности разбиений рассмотрим соответствующие последовательности верхних и нижних интегральных сумм $\underline{s}_n$ и $\overline{s}_n$. Для каждого разбиения будут справедливы соотношения (2)

$$\underline{s}_n < s_n < \overline{s}_n.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$ и пользуясь равенствами (23) и теоремой 4 § 5 гл. II, получаем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_n = s,$$

где s — предел, определенный в свойстве 3.

Этот предел, как уже говорилось выше, и называется определенным интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Итак, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{24}$$

Отметим, что среди разрывных функций есть как интегрируемые, так и неинтегрируемые.

Замечание 1. Отметим, что определенный интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой. Поэтому, не изменяя величины определенного интеграла, можно заменить букву x другой буквой:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \dots = \int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Замечание 2. При введении понятия определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ мы предполагали, что $a < b$. В случае $b < a$ примем ***по определению***

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{25}$$

Так, например,

$$\int\limits_5^0 x^2\,dx = -\int\limits_0^5 x^2\,dx.$$

Замечание 3. В случае $a = b$ полагаем ***по определению***, что для любой функции $f(x)$ имеет место

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{26}$$

Это естественно и с геометрической точки зрения. В самом деле, основание криволинейной трапеции имеет длину, равную нулю, следовательно, и площадь этой криволинейной трапеции равна нулю.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int_a^b kx\,dx$ $(b > a)$.

Решение. Геометрически задача эквивалентна вычислению площади Q трапеции, ограниченной линиями $y = kx$, $x = a$, $y = 0$ (рис. 215).

Функция $y = kx$, стоящая под знаком интеграла, непрерывна. Следовательно, для вычисления определенного интеграла мы вправе, как это было замечено выше, произвести разбиение отрезка $[a, b]$ произвольным образом и произвольно выбрать промежуточные точки ξ_k. Результат вычисления определенного интеграла не зависит от способа построения интегральной суммы — лишь бы шаг разбиения стремился к нулю.

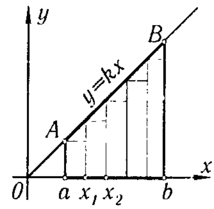


Рис. 215

Делим отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков.

Длина Δx каждого частичного отрезка равна $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$; это число и будет шагом разбиения. Точки деления имеют координаты:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x.$$

В качестве точек ξ_k возьмем левые концы каждого отрезка

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta x, \quad \xi_3 = a + 2\Delta x, \ldots, \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Составим интегральную сумму (1). Так как $f(\xi_i) = k\xi_i$, то

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \cdots + k\xi_n\Delta x = \\ &= ka\Delta x + [k(a + \Delta x)]\Delta x + \cdots + \{k[a + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \cdots + [a + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \cdots + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\Delta x\}\Delta x, \end{aligned}$$

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{a}$. Учитывая, что

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(как сумма геометрической прогрессии), получим:

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \dfrac{b-a}{2}\right](b-a) = k\dfrac{b^2-a^2}{2}$. Итак,

$$\int_a^b kx\,dx = k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Площадь $ABba$ (рис. 215) легко вычислить методами элементарной геометрии. Результат получится тот же.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_a^b x^2\,dx$.

Решение. Данный интеграл равен площади Q криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, ординатой $x = b$ и прямой $y = 0$ (рис. 216).

Разобьем отрезок $[0, b]$ на n равных частей точками:

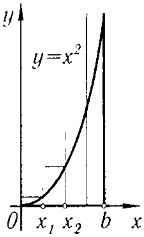


Рис. 216

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_n = b = n\Delta x,$$
$$\Delta x = b/n.$$

За точки ξ_i возьмем крайние правые точки каждого из отрезков. Составим интегральную сумму:

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \cdots + x_n^2\Delta x =$$
$$= [(\Delta x)^2\Delta x + (2\Delta x)^2\Delta x + \cdots + (n\Delta x)^2\Delta x] =$$
$$= (\Delta x)^3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2].$$

Как известно,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

поэтому

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_a^b m\,dx$ ($m = \text{const}$).

Решение.

$$\int\limits_a^b m\,dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n m\Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} m\sum_{i=1}^n \Delta x_i =$$
$$= m\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a).$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^n$ есть сумма длин отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$. При любом способе разбиения эта сумма равна длине отрезка $b - a$.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_a^b e^x\,dx$.

Решение. Снова разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

За точки ξ_i возьмем левые крайние точки. Составим интегральную сумму:

$$s_n = e^a\Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \cdots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x =$$
$$= e^a(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \cdots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x.$$

Выражение в скобках есть геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{\Delta x}$ и первым членом 1, поэтому

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Далее, имеем:

$$n\Delta x = b - a, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

(По правилу Лопиталя $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1$.) Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

т.е.

$$\int\limits_a^b e^x\, dx = e^b - e^a.$$

Замечание 4. Только что рассмотренные примеры показывают, что непосредственное вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано с большими трудностями. Даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются очень простыми (kx, x^2, e^x), этот способ требует громоздких подсчетов. Нахождение же определенных интегралов от более сложных функций приводит к еще бо́льшим трудностям. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов. Этот метод, открытый Ньютоном и Лейбницем, использует глубокую связь, существующую между интегрированием и дифференцированием. Изложению и обоснованию этого метода посвящены следующие параграфы настоящей главы.

§ 3. Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: если* $A = \text{const}$, *то*

$$\int\limits_a^b A f(x)\, dx = A \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b A f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = A \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Свойство 2. *Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.* Так, в случае двух слагаемых

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Доказательство проводится аналогично для любого числа слагаемых.

Свойства 1 и 2, хотя и доказаны только для случая $a < b$, остаются в силе и при $a \geqslant b$.

Однако следующее свойство справедливо при $a < b$:

Свойство 3. *Если на отрезке* $[a, b]$, *где* $a < b$, *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условию* $f(x) \leqslant \varphi(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i.$$

Здесь каждая разность $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geqslant 0$, $\Delta x_i \geqslant 0$. Следовательно, каждое слагаемое суммы неотрицательно, неотрицательна вся сумма и неотрицателен ее предел, т.е.

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx \geqslant 0$$

или

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0,$$

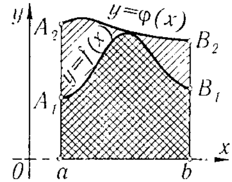


Рис. 217

откуда следует неравенство (3).

Если $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, то указанное свойство наглядно иллюстрируется геометрически (рис. 217). Так как $\varphi(x) \geqslant f(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади криволинейной трапеции aA_2B_2b.

Свойство 4. *Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a \leqslant b$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Доказательство. По условию

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

На основании свойства (3) имеем:

$$\int_a^b m\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b M\, dx. \tag{4'}$$

Но

$$\int_a^b m\, dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\, dx = M(b-a)$$

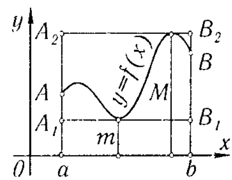


Рис. 218

(см. пример 3 § 2 гл. XI). Подставляя эти выражения в неравенство (4'), получим неравенство (4).

Если $f(x) \geqslant 0$, то это свойство легко иллюстрируется геометрически (рис. 218): площадь криволинейной трапеции $aABb$ содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b.

Свойство 5 (теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо следующее равенство:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(\xi). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$. Если m и M суть, соответственно, наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то в силу формулы (4)

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Отсюда

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \mu, \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M. Следовательно, при некотором значении ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ будет $\mu = f(\xi)$, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Свойство 6. *Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

если только все эти три интеграла существуют.

Доказательство. Предположим сначала, что $a < c < b$, и составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, то мы будем разбивать отрезок $[a, b]$ на малые отрезки так, чтобы точка c была точкой деления. Разобьем далее интегральную сумму $\sum\limits_a^b$, соответствующую отрезку $[a, b]$ на две суммы: сумму $\sum\limits_a^c$, соответствующую отрезку $[a, c]$ и сумму $\sum\limits_c^b$, соответствующую отрезку $[c, b]$.

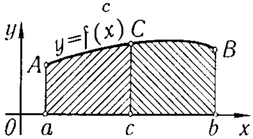


Рис. 219

Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, получим соотношение (6).

Если $a < b < c$, то на основании доказанного можем написать:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx;$$

но на основании формулы (4) § 2 имеем:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx,$$

поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Аналогичным способом доказывается это свойство при любом другом расположении точек a, b и c.

На рис. 219 дана геометрическая иллюстрация свойства 6 для того случая, когда $f(x) > 0$ и $a < c < b$: площадь трапеции $aABb$ равна сумме площадей трапеций $aACc$ и $cCBb$.

§ 4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

нижний предел a закреплен, а верхний предел b меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла, т.е. интеграл есть ***функция верхнего предела***.

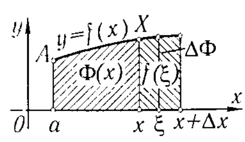


Рис. 220

Для того чтобы иметь привычные обозначения, верхний предел обозначим через x, а чтобы не смешивать его с переменной интегрирования, последнюю обозначим через t. (От обозначения переменной интегрирования значение интеграла не зависит.) Получим интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$. При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x. Эту функцию мы обозначим через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Если $f(t)$ — неотрицательная функция, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$ (рис. 220). Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от изменения x.

Найдем производную от $\Phi(x)$ по x, т.е. найдем производную определенного интеграла (1) по верхнему пределу.

Теорема 1. *Если $f(x)$ — непрерывная функция и $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, то имеет место равенство*

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Иными словами, *производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела* (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

Доказательство. Дадим аргументу x положительное или отрицательное приращение Δx; тогда (учитывая свойство 6 определенного интеграла) получим:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Приращение функции $\Phi(x)$ равно

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt,$$

т.е.

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем значении (свойство 5 определенного интеграла)

$$\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x,$$

где ξ заключено между x и $x+\Delta x$.

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi).$$

Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Но так как $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi),$$

а вследствие непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Таким образом, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Данная теорема просто иллюстрируется геометрически (рис. 220): приращение $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ равняется площади криволинейной трапеции с основанием Δx, а производная $\Phi'(x) = f(x)$ равна длине отрезка xX.

Замечание. Из доказанной теоремы, в частности, следует, что *всякая непрерывная функция имеет первообразную.* Действительно, если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$, то, как указывалось в § 2 гл. XI, в этом случае определенный интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ существует, т.е. существует функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Но по доказанному выше она является первообразной от $f(x)$.

Теорема 2. *Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница**).

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная от функции $f(x)$. По теореме 1 функция $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ есть также первообразная от $f(x)$. Но две любые первообразные от данной

*) Необходимо отметить, что такое название формулы (2) условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Но важно то, что именно Лейбниц и Ньютон впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенных интегралов.

функции отличаются на постоянное слагаемое C^*. Следовательно, можно написать:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{3}$$

Это равенство при соответствующем выборе C^* справедливо при всех значениях x, т.е. является тождеством. Для определения постоянного C^* положим в этом тождестве $x = a$; тогда

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

или

$$0 = F(a) + C^*,$$

откуда

$$C^* = -F(a).$$

Следовательно,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

или, заменив обозначение переменной интегрирования на x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Отметим, что разность $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной F, так как все первообразные отличаются на постоянную величину, которая при вычитании все равно уничтожается.

Если ввести обозначение*)

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b,$$

---

*) Выражение $\big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки. В литературе встречаются две формы записи: или

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

или

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Мы в дальнейшем будем употреблять и тот и другой способы записи.

го формулу (2) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции. Только с открытием этой формулы определенный интеграл смог получить то значение в математике, какое он имеет в настоящее время. Хотя с процессом, аналогичным вычислению определенного интеграла как предела интегральной суммы, были знакомы еще в древности (Архимед), однако приложения этого метода ограничивались теми простейшими случаями, когда предел интегральной суммы мог быть вычислен непосредственно. Формула Ньютона–Лейбница значительно расширила область применения определенного интеграла, так как математика получила ***общий метод*** для решения различных задач частного вида и поэтому смогла значительно расширить круг различных приложений определенного интеграла к технике, механике, астрономии и т.д.

Пример 1.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Пример 2.

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Пример 3.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

Пример 4.

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\big|_a^b = e^b - e^a.$$

Пример 5.

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Пример 6.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Замена переменного в определенном интеграле

Теорема. *Пусть дан интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Введем новое переменное t по формуле

$$x = \varphi(t).$$

Если

1) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,$
2) $\varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha,\beta]$,
3) $f[\varphi(t)]$ *определена на отрезке* $[\alpha,\beta]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то можем написать следующие равенства:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \tag{3}$$

Справедливость последнего равенства проверяется дифференцированием обеих частей по t. (Оно так же следует из формулы (2) § 4 гл. X.) Из равенства (2) получаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Из равенства (3) получаем:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Правые части последних выражений равны, следовательно, равны и левые.

Замечание. Отметим, что при вычислении определенного интеграла по формуле (1) мы не возвращаемся к старой переменной. Если мы вычислим второй из определенных интегралов равенства (1), то мы получим некоторое число; этому же числу равняется и первый интеграл.

Пример. Вычислить интеграл

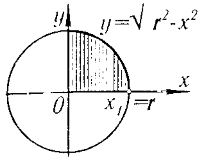


Рис. 221

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Решение. Сделаем замену переменного:

$$x = r\sin t, \quad dx = r\cos t\,dt.$$

Определим новые пределы:

$$x=0 \quad \text{при} \quad t=0, \quad x=r \quad \text{при} \quad t=\pi/2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\, r\cos t\,dt =$$

$$= r^2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= r^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = r^2\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Вычисленный интеграл с геометрической точки зрения представляет площадь 1/4 круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=r^2$ (рис. 221).

§ 6. Интегрирование по частям

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Тогда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx. \tag{1}$$

Так как $\int (uv)'\,dx = uv + C$, то $\int\limits_a^b (uv)'\,dx = uv\big|_a^b$; поэтому равенство (1) может быть записано в виде

$$uv\big|_a^b = \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\,dv,$$

или окончательно

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример. Вычислить интеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{d\cos x}_{dv} =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos x \cos x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

В выбранных обозначениях последнее равенство можно записать так:

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда находим:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{2}$$

Тем же приемом найдем:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

поэтому

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Продолжая таким же образом далее, мы дойдем или до I_0 или до I_1 в зависимости от того, будет ли число n четным или нечетным.

Рассмотрим два случая:

1) n — число четное, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) n — число нечетное, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

но так как

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1,$$

то

$$I_{2m} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$I_{2m+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Из этих формул следует *формула Валлиса*, выражающая число $\pi/2$ в виде бесконечного произведения.

Действительно, из последних двух равенств путем почленного деления находим:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}\right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \tag{3}$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Для всех x интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ справедливы неравенства

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x.$$

Интегрируя в пределах от 0 до $\pi/2$, получим:

$$I_{2m-1} \geqslant I_{2m} \geqslant I_{2m+1},$$

откуда

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geqslant \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geqslant 1. \tag{4}$$

Из равенства (2) следует:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

Из неравенства (4) получаем:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Переходя к пределу в формуле (3), получим *формулу Валлиса*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}\right)^2 \frac{1}{2m+1}\right].$$

Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}\right).$$

§ 7. Несобственные интегралы

1. **Интегралы с бесконечными пределами**. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leqslant x < +\infty$. Рассмотрим интеграл

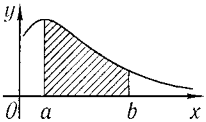


Рис. 222

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении b интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b (см. § 4). Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \to +\infty$ (рис. 222).

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Следовательно, по определению, имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *существует* или *сходится*. Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *не существует* или *расходится*.

Легко выяснить геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x) \geqslant 0$: если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$, то естественно считать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Последнее равенство следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует (сходится), по определению, и интеграл, стоящий слева.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (рис. 223 и 224).

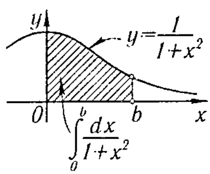


Рис. 223

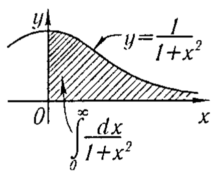


Рис. 224

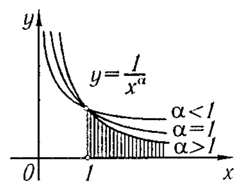


Рис. 225

Решение. По определению несобственного интеграла находим:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотренный интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 224.

Пример 2. Установить, при каких значениях α (рис. 225) интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и при каких расходится.

Решение. Так как (при $\alpha\neq 1$)

$$\int_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1),$$

то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1).$$

Следовательно, относительно рассматриваемого интеграла можно сделать следующие выводы:

$$\text{если} \quad \alpha > 1, \quad \text{то} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \text{т.е. интеграл сходится;}$$

$$\text{если} \quad \alpha < 1, \quad \text{то} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty, \quad \text{т.е. интеграл расходится.}$$

$$\text{При} \quad \alpha = 1, \quad \text{то} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = \infty \quad - \quad \text{интеграл расходится.}$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Второй интеграл равен $\frac{\pi}{2}$ (см. пример 1). Вычислим первый интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} x|_\alpha^0 = \lim_{a \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, и оценить его значение. Для этого могут быть полезными следующие теоремы, которые мы приведем без доказательств, а применение их докажем на примерах.

Теорема 1. *Если для всех* x $(x \geqslant a)$ *выполняется неравенство*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$$

и если $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *также сходится, при этом*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Пример 4. Исследовать, сходится ли интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Решение. Заметим, что при $1 \leqslant x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Далее,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

сходится и его значение меньше 1.

Теорема 2. *Если для всех x $(x \geqslant a)$ выполняется неравенство $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, причем $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Пример 5. Исследовать, сходится ли интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

Замечаем, что

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Но

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^b = +\infty.$$

Следовательно, расходится и данный интеграл.

В последних двух теоремах рассматривались несобственные интегралы от неотрицательных функций. Для случая функции $f(x)$, меняющей знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

В этом случае последний интеграл называется *абсолютно сходящимся*.

Пример 6. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx.$$

Решение. Здесь подынтегральная функция — знакопеременная. Замечаем, что

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right|. \quad \text{Но} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ сходится. Отсюда следует, что сходится и данный интеграл.

2. **Интеграл от разрывной функции.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leqslant x < c$, а при $x = c$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ как о пределе интегральных сумм, так как $f(x)$ не непрерывна на отрезке $[a, c]$, и поэтому этот предел может и не существовать.

Интеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ от функции $f(x)$, ***разрывной в точке** c*, определяется следующим образом:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел, стоящий справа, существует, то интеграл называют несобственным *сходящимся* интегралом, в противном случае интеграл называют *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a, c]$ (т.е. при $x = a$), то по ***определению***

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = x_0$ ***внутри*** отрезка $[a, c]$, то полагают

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части равенства, существуют.

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1-0} \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b \to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b \to 1-0} 2(\sqrt{1-b} - 1) = 2.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Так как внутри отрезка интегрирования существует точка $x = 0$, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл нужно представить как сумму двух слагаемых:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int\limits_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int\limits_{1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

Следовательно, на участке $[-1, 0]$ интеграл расходится:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

Значит, на участке $[0, 1]$ интеграл также расходится.

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке $[-1, 1]$. Отметим, что если бы мы стали вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции в точке $x = 0$, то получили бы неверный результат. Действительно,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

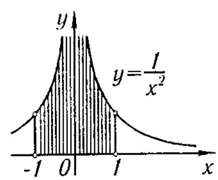


Рис. 226

что невозможно (рис. 226).

Замечание. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва a_1, $a_2, \ldots, a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части равенства сходится. Если же хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ называют расходящимся.

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений часто могут быть применены теоремы, аналогичные теоремам для оценки интегралов с бесконечными пределами.

Теорема I′. *Если на отрезке $[a,c]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке c, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства*

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

и если $\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ также сходится.

Теорема II′. *Если на отрезке $[a,c]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке c, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства*

$$f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0,$$

и если $\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ расходится, то и $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ расходится.

Теорема III′. *Если $f(x)$ — функция знакопеременная на отрезке $[a,c]$, разрывная только в точке c, и несобственный интеграл $\int\limits_a^c |f(x)|\,dx$ от абсолютной величины этой функции сходится, то сходится также интеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ от самой функции.*

В качестве функций, с которыми удобно сравнивать функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, часто берут $1/(c-x)^\alpha$. Легко проверить, что $\int\limits_a^c \frac{1}{(c-x)^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Это же относится и к интегралам $\int\limits_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$.

Пример 9. Сходится ли интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$?

Решение. Подынтегральная функция разрывна в левом конце отрезка $[0,1]$. Сравнивая ее с функцией $\frac{1}{\sqrt{x}}$, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ существует. Следовательно, несобственный интеграл от меньшей функции, т.е. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$, тоже существует.

§ 8. Приближенное вычисление определенных интегралов

В конце главы X указывалось, что не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона–Лейбница затруднительно, и применяются различные методы *приближенного* вычисления определенных интегралов. Сейчас мы изложим несколько способов приближенного интегрирования, исходя из понятия определенного интеграла как предела суммы.

I. **Формула прямоугольников**. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Разделим отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n = b$ на n равных частей длины Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Обозначим далее через $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1},\ y_n$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, т.е.

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \ \ldots, \ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы:

$$\begin{gathered} y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x, \\ y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x. \end{gathered}$$

Каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и поэтому приближенно вычисляет интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \tag{1'}$$

Это и есть *формулы прямоугольников*. Из рис. 227 ясно, что если $f(x)$ — положительная и возрастающая функция, то формула (1) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула (1′) — площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников.

Ошибка, совершаемая при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число n (т.е. чем меньше шаг деления $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$).

II. **Формула трапеций**. Естественно считать, что мы получим более точное значение определенного интеграла, если данную кривую $y = f(x)$ заменим не ступенчатой линией, как это было

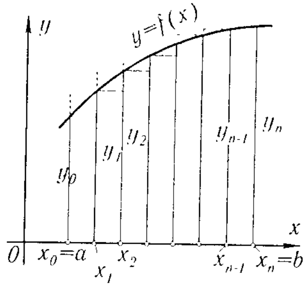


Рис. 227

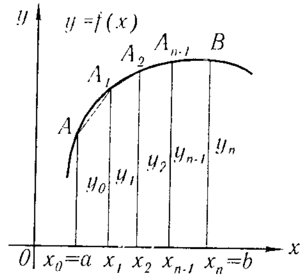


Рис. 228

в формуле прямоугольников, а ***вписанной*** ломаной (рис. 228). Тогда площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$. Так как площадь первой из этих трапеций равна $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, площадь второй равна $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ и т.д., то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right), \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Это и есть *формула трапеций.* Отметим, что число, стоящее в правой части формулы (2), есть среднее арифметическое чисел, стоящих в правых частях формул (1) и (1′).

Число n выбирается произвольно. Чем больше будет это число и чем меньше, следовательно, будет шаг $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, тем с большей точностью сумма, написанная в правой части приближенного равенства (2), будет давать значение интеграла.

III. **Формула парабол (формула Симпсона).** Разделим отрезок $[a,b]$ на ***четное*** число равных частей $n = 2m$. Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и ограниченной заданной кривой $y = f(x)$, заменим площадью криволинейной трапеции, которая ограничена ***параболой второй степени***, проходящей через три точки: $M(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, и имеющей ось, параллельную оси Oy (рис. 229). Такую криволинейную трапецию будем называть *параболической* трапецией.

Уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy, имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Коэффициенты A, B и C однозначно определяются из условия, что парабола проходит через три заданные точки. Аналогичные

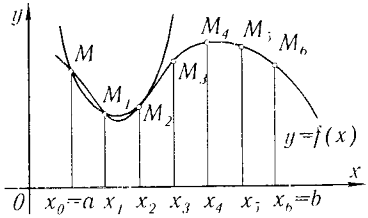


Рис. 229

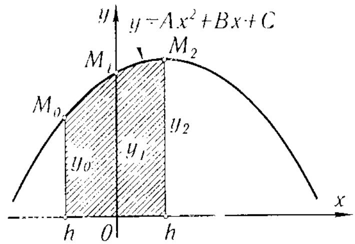


Рис. 230

параболы строим и для других пар отрезков. Сумма площадей параболических трапеций и даст приближенное значение интеграла.

Вычислим сначала площадь одной параболической трапеции.

Лемма. *Если криволинейная трапеция ограничена параболой*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

осью Ox и двумя ординатами, расстояние между которыми равно $2h$, то ее площадь равна

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{3}$$

где y_0 и y_2 — крайние ординаты, а y_1 — ордината кривой в середине отрезка.

Доказательство. Расположим вспомогательную систему координат так, как показано на рис. 230.

Коэффициенты в уравнении параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ определяются из следующих уравнений:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{если} & x_0 = -h, & \text{то} & y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ \text{если} & x_1 = 0, & \text{то} & y_1 = C, \\ \text{если} & x_2 = h, & \text{то} & y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Считая коэффициенты A, B, C, известными, определим площадь параболической трапеции с помощью определенного интеграла:

$$S = \int\limits_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Но из равенств (4) следует, что

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Следовательно,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся снова к основной нашей задаче (см. рис. 229). Пользуясь формулой (3), мы можем написать следующие приближенные равенства ($h = \Delta x$):

$$\int\limits_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int\limits_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Складывая левые и правые части, получим слева искомый интеграл, справа его приближенное значение:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \quad (5)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})].$$

Это и есть *формула Симпсона*. Здесь число точек деления $2m$ произвольно, но чем больше это число, тем точнее сумма в правой части равенства (5) дает значение интеграла*).

Пример. Вычислить приближенно

$$\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Решение. Разделим отрезок $[1, 2]$ на 10 равных частей (рис. 231). Полагая

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

---

*) Для того, чтобы знать, сколько точек деления надо взять, чтобы подсчитать интеграл с заданной степенью точности, можно воспользоваться формулами оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла. Мы не приводим здесь этих оценок. Читатель может найти их в более подробных курсах анализа: см., например, ***Фихтенгольц***, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1970, т. II, гл. IX, § 5.

составим таблицу значений подынтегральной функции:

x	$y = 1/x$	x	$y = 1/x$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$	$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,52632$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,50000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

I. По первой формуле прямоугольников (1) получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0 + y_1 + \cdots + y_9) = 0,1 \cdot 7,1877 = 0,71877.$$

По второй формуле прямоугольников (1′) получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

Непосредственно из рис. 231 следует, что в данном случае первая формула дает значение интеграла с ***избытком***, вторая — с ***недостатком***.

II. По формуле трапеций (2) получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2} + 6,18773\right) = 0,69377.$$

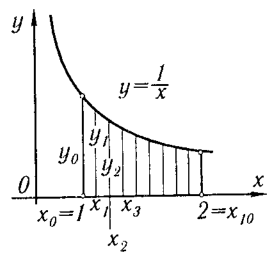


Рис. 231

III. По формуле Симпсона (5) имеем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] =$$

$$= \frac{0,1}{3}(1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315.$$

В действительности $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472$ (с точностью до седьмого знака).

Таким образом, при разбиении отрезка [0, 1] на 10 частей по формуле Симпсона мы получили пять верных знаков; по формуле трапеций — лишь три верных знака; по формуле прямоугольников мы можем ручаться только за первый знак.

§ 9. Формула Чебышева

В технических вычислениях часто применяется формула приближенного интегрирования Чебышева.

Пусть снова требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом $P(x)$ Лагранжа (§ 9, гл. VII), взяв на отрезке $[a,b]$ некоторые n значений функции: $f(x_1)$, $f(x_2),\ldots,f(x_n)$, где x_1, $x_2,\ldots,x_n$ — какие угодно точки отрезка $[a,b]$:

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}f(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}f(x_2)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}f(x_n). \quad (1)$$

Получим следующую приближенную формулу интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\int\limits_a^b P(x)\,dx; \quad (2)$$

после некоторых вычислений она примет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n), \quad (3)$$

где коэффициенты C_i вычисляются по формулам

$$C_i=\int\limits_a^b\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,dx. \quad (4)$$

Формула (3) громоздка и неудобна для вычислений, так как коэффициенты C_i выражаются сложными дробями.

Чебышев поставил обратную задачу: задать не абсциссы x_1, $x_2,\ldots,x_n$, а коэффициенты C_1, $C_2,\ldots,C_n$ и определить абсциссы x_1, $x_2,\ldots,x_n$.

Коэффициенты C_i задаются так, чтобы формула (3) была возможно проще для вычислений. Очевидно, что это будет тогда, когда все коэффициенты C_i равны между собой:

$$C_1=C_2=\cdots=C_n.$$

Если обозначить общее значение коэффициентов C_1, $C_2,\ldots,C_n$ через C_n, то формула (3) примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx C_n[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]. \quad (5)$$

Формула (5) представляет вообще ***приближенное*** равенство, но если $f(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$, то равенство будет ***точным***. Это обстоятельство и позволяет определить величины $C_n,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы получить формулу, удобную для любого промежутка интегрирования, преобразуем отрезок интегрирования $[a, b]$ в отрезок $[-1, 1]$. Для этого положим

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t;$$

тогда при $t=-1$ будет $x=a$, при $t=1$ будет $x=b$.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt,$$

где через $\varphi(t)$ обозначена функция от t, стоящая под знаком интеграла. Таким образом, задача интегрирования данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ всегда может быть сведена к интегрированию некоторой другой функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, задача свелась к тому, чтобы в формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \tag{6}$$

подобрать числа $C_n,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы эта формула была точной для всякой функции $f(x)$ вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} + \dfrac{a_6}{7} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{n}\right), & \text{если } n \text{ — число нечетное;} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \cdots + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right), & \text{если } n \text{ — число четное.} \end{cases} \tag{8}$$

С другой стороны, сумма, стоящая в правой части равенства (6), на основании (7) будет равна

$$C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + \ldots$$
$$\cdots + a_{n-1}(x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1})]. \tag{9}$$

Приравнивая выражения (8) и (9), получим равенство, которое должно быть справедливо при любых a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) = C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \\ + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + \cdots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1})].$$

Приравняем коэффициенты при a_0, a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{n-1}$ в левой и правой частях равенства:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = C_n n \quad \text{или} \quad C_n = \dfrac{2}{n}, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \dfrac{2}{3C_n} = \dfrac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 = \dfrac{2}{5C_n} = \dfrac{n}{5}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}. \qquad (10)$$

Из последних $n-1$ уравнений находим абсциссы x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Эти решения найдены Чебышевым для различных значений n. Ниже приводятся найденные им решения в случаях, когда число n промежуточных точек равно 3, 4, 5, 6, 7, 9:

Число ординат n	Коэффициент C_n	Значения абсцисс $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Таким образом, приближенное вычисление интеграла на отрезке $[-1, 1]$ производится по следующей *формуле Чебышева*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

где n — какое-либо из чисел 3, 4, 5, 6, 7 или 9, а $x_1, \ldots, x_n$ — числа, приведенные в таблице. В качестве n нельзя брать число 8 или числа, превосходящие 9; в этом случае система уравнений (10) дает мнимые корни. Когда заданный интеграл имеет пределы интегрирования a и b, то формула Чебышева принимает вид

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

где $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а x_i имеют указанные в таблице значения.

Пример. Вычислить $\int_1^2 \frac{dx}{x} (= \ln 2)$.

Решение. Прежде всего заменой переменных преобразуем этот интеграл в новый интеграл, у которого границы интегрирования будут -1 и 1:

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2}t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

Тогда

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}.$$

Вычислим последний интеграл, приняв $n = 3$, по формуле Чебышева

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

Так как $f(0,707107) = 0,269752$, $f(0) = 0,333333$, $f(-0,707107) = 0,436130$, то

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t} = \frac{2}{3}(0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693.$$

Сравнивая этот результат с результатами вычисления по формулам прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона (см. пример в предыдущем параграфе), мы замечаем, что результат, полученный нами по формуле Чебышева (с тремя промежуточными точками), лучше согласуется с истинным значением интеграла, чем результат, полученный по формуле трапеций (с девятью промежуточными точками).

Отметим, что теория приближенного вычисления интегралов получила дальнейшее развитие в работах академика А.Н. Крылова (1863–1945).

§ 10. Интегралы, зависящие от параметра. Гамма-функция

Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Пусть дан интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{1}$$

в котором подынтегральная функция зависит от некоторого параметра α. Если параметр α будет меняться, то будет меняться и значение определенного интеграла. Таким образом, определенный интеграл есть ***функция*** от α; поэтому мы его можем обозначить через $I(\alpha)$.

1. Предположим, что $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ есть непрерывные функции при

$$c \leqslant \alpha \leqslant d \text{ и } a \leqslant x \leqslant b. \tag{2}$$

Найдем производную интеграла по параметру α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha).$$

Для нахождения этой производной заметим, что

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Применяя теорему Лагранжа к подынтегральной функции, будем иметь: $\dfrac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)$, где $0<\theta<1$. Так как $f'_\alpha(x,\alpha)$ непрерывна в замкнутой области (2), то $f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) = f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon$, где величина ε, зависящая от x, α, $\Delta\alpha$, стремится к нулю при $\Delta\alpha \to 0$. Таким образом,

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b [f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Переходя к пределу при $\Delta\alpha \to 0$, получаем*):

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha) = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

или

$$\left[\int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Последняя формула называется *формулой Лейбница.*

2. Предположим теперь, что в интеграле (1) ***пределы интегрирования*** a ***и*** b ***являются функциями от*** α:

$$I(\alpha) = \Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx. \tag{1'}$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ есть сложная функция от α, причем a и b являются промежуточными аргументами. Для того, чтобы найти производную от $I(\alpha)$, применим правило дифференцирования сложной функции от нескольких переменных (см. § 10 гл. VIII)

$$I'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \tag{3}$$

На основании теоремы о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу (см. § 4) получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx = f[b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_b^a f(x, \alpha)\, dx = -f[a(\alpha), \alpha].$$

Наконец, для вычисления $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ применяем формулу Лейбница:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

---

*) Подынтегральная функция в интеграле $I = \int\limits_a^b \varepsilon\, d\alpha$ стремится к нулю при $\Delta\alpha \to 0$. Из того, что подынтегральная функция в каждой точке стремится к нулю, не всегда следует, что интеграл также стремится к нулю. Однако в данном случае I стремится к нулю при $\Delta\alpha \to 0$. Этот факт мы принимаем без доказательства.

Подставляя в формулу (3) полученные выражения производных, будем иметь:

$$I'_\alpha(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha} = f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha}. \qquad (4)$$

С помощью формулы Лейбница можно вычислить некоторые определенные интегралы.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Решение. Заметим прежде всего, что непосредственно вычислить этот интеграл мы не можем, так как первообразная от функции $e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления данного интеграла будем рассматривать его как функцию от параметра α. Тогда его производная по α найдется по выведенной выше формуле Лейбница*):

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^\infty \left[e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right]'_\alpha dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx.$$

Но последний интеграл легко вычисляется с помощью элементарных функций; он равен $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Поэтому $I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$. Интегрируя полученное тождество, найдем $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \operatorname{arctg}\alpha + C. \qquad (5)$$

Остается определить C. Для этого замечаем, что

$$I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin 0\cdot x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty 0\,dx = 0.$$

Кроме того, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Подставляя в равенство (5) $\alpha = 0$, найдем: $I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C$, откуда $C = 0$. Следовательно, для любого значения α имеет место равенство $I(\alpha) = \operatorname{arctg}\alpha$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x} = \operatorname{arctg}\alpha.$$

---

*) Формула Лейбница выведена в предположении, что пределы интеграции a и b конечны. Однако в данном случае формула Лейбница также справедлива, хотя один из пределов интегрирования равен бесконечности. Об условиях, при которых допустимо дифференцирование несобственных интегралов по параметру, см., например, в книге: ***Г.М. Фихтенгольц***, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, 1970, т. II, гл. XIV, § 3.

Пример 2. Гамма-функция.

Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра α,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{6}$$

Покажем, что этот несобственный интеграл существует (сходится) при $\alpha > 0$. Представим его в виде суммы

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Первый интеграл правой части сходится, так как

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Второй интеграл также сходится. Действительно, пусть n — целое число такое, что $n > \alpha - 1$. Тогда, очевидно,

$$0 < \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx < \infty.$$

Последний интеграл вычисляем путем интегрирования по частям с учетом того, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0 \tag{7}$$

при любом целом положительном k. Итак интеграл (6) определяет некоторую функцию α. Ее обозначают $\Gamma(\alpha)$ и называют ***гамма-функцией***:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{8}$$

Эта функция часто используется в приложениях математики. Найдем значения $\Gamma(\alpha)$ при целых α. При $\alpha = 1$ имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1. \tag{9}$$

Пусть целое $\alpha > 1$. Интегрируя по частям:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx$$

или, учитывая (7),

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \tag{10}$$

На основании (10) и (9) находим при $\alpha = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{11}$$

§ 11. Интегрирование комплексной функции действительного переменного

В § 4 гл. VII была определена комплексная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ действительного переменного x и ее производная $\tilde{f}(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Определение. Функция $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ называется *первообразной от комплексной функции действительного переменного* $\tilde{f}(x)$, если

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \tag{1}$$

т.е., если

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x). \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, т.е. $U(x)$ есть первообразная для $u(x)$ и $V(x)$ есть первообразная для $v(x)$.

Из определения и этого замечания следует, если $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ есть первообразная для функции $\tilde{f}(x)$, то любая первообразная для $\tilde{f}(x)$ имеет вид $\tilde{F}(x) + C$, где C — комплексная произвольная постоянная. Выражение $\tilde{F}(x) + C$ будем называть *неопределенным интегралом от комплексной функции действительного переменного* и писать

$$\int \tilde{f}(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx = \tilde{F}(x) + C. \tag{3}$$

Определенный интеграл от комплексной функции действительного переменного $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ определяем так:

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^b u(x) + i\int_a^b v(x)\,dx. \tag{4}$$

Это определение не противоречит, а вполне согласуется с определением определенного интеграла как предела суммы.

Упражнения к главе XI

1. Составляя интегральную сумму s_n и переходя к пределу, вычислить определенные интегралы $\int_a^b x^2\,dx$. **Указание.** Отрезок $[a, b]$ разделить на n частей точками $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, где $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. *Отв.* $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, где $0 < a < b$. *Отв.* $\ln\frac{b}{a}$. **Указание.** Деление отрезка $[a, b]$ производить также, как и в предыдущем примере.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$. **Указание.** См. предыдущий пример.

4. $\int\limits_a^b \sin x\,dx$. *Отв.* $\cos\alpha - \cos\beta$. **Указание**. Предварительно установить следующее тождество: $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2\sin h}$, для этого надо умножить и разделить все члены левой части на $\sin h$ и заменить произведение синусов разностью косинусов.

5. $\int\limits_a^b \cos x\,dx$. *Отв.* $\sin b - \sin a$.

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, вычислить определенные интегралы: **6.** $\int\limits_0^1 x^4\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}$. **7.** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$. *Отв.* $e-1$. **8.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$. *Отв.* 1. **9.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **10.** $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **11.** $\int\limits_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$. *Отв.* $\ln 2$. **12.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$. *Отв.* 1. **13.** $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$. *Отв.* $\ln|x|$. **14.** $\int\limits_0^x \sin x\,dx$. *Отв.* $2\sin^2\frac{x}{2}$. **15.** $\int\limits_{\sqrt[3]{a}}^x x^2\,dx$. *Отв.* $\frac{x^3-a}{3}$. **16.** $\int\limits_1^z \frac{dx}{2x-1}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln|2z-1|$. **17.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **18.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить значения нижеследующих интегралов, применяя указанные подстановки: **19.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$. *Отв.* $\frac{1}{3}$. **20.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. *Отв.* $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **21.** $\int\limits_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. *Отв.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **22.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x = \operatorname{tg} t$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **23.** $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $x-1=t^2$. *Отв.* $2(2-\operatorname{arctg} 2)$. **24.** $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$. *Отв.* $\ln\frac{3}{2}$. **25.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\sin\varphi+\sin^2\varphi}$, $\sin\varphi = t$. *Отв.* $\ln\frac{4}{3}$.

Доказать, что **26.** $\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ $(m>0,\ n>0)$. **27.** $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx$. **28.** $\int\limits_0^a f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^a f(x^2)\,dx$.

Вычислить следующие несобственные интегралы: **29.** $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* 1. **30.** $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$. *Отв.* 1. **31.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$. **32.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2}$. **33.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^5}$. *Отв.* $\frac{1}{4}$. **34.** $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$. *Отв.* -1. **35.** $\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx$. *Отв.* Интеграл расходится. **36.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* Интеграл расходится. **37.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Отв.* π. **38.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. **39.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^3}$. *Отв.* Интеграл расходится. **40.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Отв. $\frac{\pi}{2}$. **41.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. *Отв.* Интеграл расходится. **42.** $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx$ $(a > 0)$. *Отв.* $\frac{b}{a^2+b^2}$. **43.** $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx$ $(a > 0)$. *Отв.* $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Вычислить приближенные значения интегралов: **44.** $\ln 5 = \int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона $(n = 12)$. *Отв.* 1,6182 (по формуле трапеций); 1,6098 (по формуле Симпсона). **45.** $\int\limits_{1}^{11} x^3\, dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона $(n = 10)$. *Отв.* 3690; 3660. **46.** $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^3}dx$ по формуле трапеций $(n = 6)$. *Отв.* 0,8109. **47.** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{2x-1}$ по формуле Симпсона $(n = 4)$. *Отв.* 0,8111. **48.** $\int\limits_{4}^{10} \lg_{10} x dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона $(n = 10)$. *Отв.* 6,0656; 6,0896. **49.** Вычислить значение π из соотношения $\frac{\pi}{4} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, применяя формулу Симпсона $(n = 10)$. *Отв.* 3,14159. **50.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ по формуле Симпсона $(n = 10)$. *Отв.* 1,371. **51.** Исходя из равенства $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$, где $\alpha > 0$, найти при целом $n > 0$ величину интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} x^n dx$. *Отв.* $n!$ **52.** Исходя из равенства $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, найти величину интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$.

53. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x} dx$. *Отв.* $\ln(1 + \alpha)$ $(\alpha > -1)$.

54. Пользуясь равенством $\int\limits_{0}^{1} x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1} x^{n-1} (\ln x)^k dx$. *Отв.* $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

Глава XII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geqslant 0)$, то, как известно (§ 2, гл. XI), *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 214), равна

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если $f(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ также $\leqslant 0$. По абсолютной величине он равен площади Q соответствующей криволинейной трапеции:

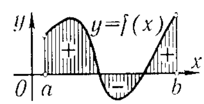


Рис. 232

$$-Q = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a, b]$, то интеграл по всему отрезку $[a, b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл будет положителен на тех отрезках, где $f(x) \geqslant 0$, и отрицателен там, где $f(x) \leqslant 0$. Интеграл по всему отрезку даст соответствующую алгебраическую сумму площадей, лежащих выше и ниже оси Ox (рис. 232). Для того чтобы получить сумму площадей в обычном смысле, нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам или вычислить интеграл

$$Q = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь Q фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox, при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (рис. 233).

Решение. Так как $\sin x \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $\sin x \leqslant 0$ при $\pi < x \leqslant 2\pi$, то

$$Q = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx + \left|\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x\,dx\right| = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx,$$

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x|_\pi^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -2.$$

Следовательно, $Q = 2 + |-2| = 4$.

Если нужно вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и ординатами $x = a$, $x = b$, то при условии $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ будем иметь (рис. 234):

$$Q = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx - \int\limits_a^b f_2(x)\,dx = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx. \tag{2}$$

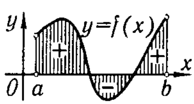


Рис. 232

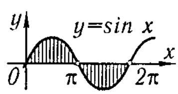


Рис. 233

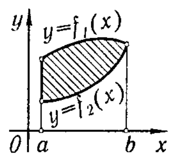


Рис. 234

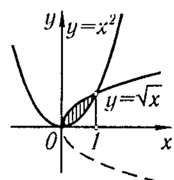


Рис. 235

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми (рис. 235) $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Находим точки пересечения кривых: $\sqrt{x} = x^2$, $x = x^4$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Следовательно,

$$Q = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим теперь площадь криволинейной трапеции в случае, если кривая задана уравнениями в параметрической форме (рис. 236):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть уравнения (3) определяют некоторую функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

$$Q = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b y\,dx.$$

Сделаем замену переменного в этом интеграле: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$. На основании уравнений (3) получим: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Следовательно,

$$Q = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Это и есть формула для вычисления площади криволинейной трапеции в случае кривой, заданной параметрически.

Пример 3. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом,

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь x изменяется от $-a$ до $+a$, следовательно, t изменяется от π до 0,

$$Q = 2\int\limits_{\pi}^{0} (b\sin t)(-a\sin t\,dt) = -2ab\int\limits_{\pi}^{0} \sin^2 t\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt =$$
$$= 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi ab.$$

Пример 4. Вычислить площадь области, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Изменению t от 0 до 2π соответствует изменение x от 0 до $2\pi a$. По формуле (4) имеем:

$$Q = \int\limits_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt = a^2\int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt =$$
$$= a^2\left[\int\limits_{0}^{2\pi} dt - 2\int\limits_{0}^{2\pi} \cos t\,dt + \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 t\,dt\right],$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi, \quad \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t\,dt = 0, \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi.$$

Окончательно получаем: $q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$.

§ 2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением

$$\rho = f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — непрерывная функция при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$.

Определим площадь сектора OAB, ограниченную кривой $\rho=f(\theta)$ и радиус-векторами $\theta=\alpha$ и $\theta=\beta$.

Разобьем данную область радиус-векторами $\alpha=\theta_0$, $\theta=\theta_1$, $\ldots$, $\theta_n=\beta$ на n частей. Обозначим через $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\ldots$, $\Delta\theta_n$ углы между проведенными радиус-векторами (рис. 237).

Обозначим через $\overline{\rho}_i$ длину радиус-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\overline{\theta}_i$, заключенному между θ_{i-1} и θ_i.

Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\overline{\rho}_i$ и центральным углом $\Delta\theta_i$. Его площадь будет равна

$$\Delta Q_i=\frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2\Delta\theta_i.$$

Сумма

$$Q_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(\overline{\theta}_i)]^2\Delta\theta_i$$

даст площадь «ступенчатого» сектора.

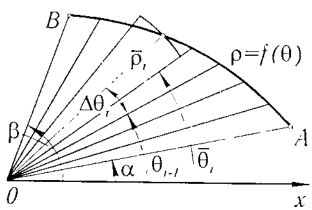


Рис. 237

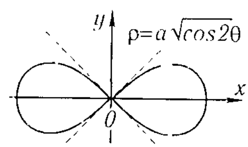


Рис. 238

Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2=[f(\theta)]^2$ на отрезке $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, то ее предел при $\max\Delta\theta_i\to 0$ есть определенный интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta.$$

Он не зависит от того, какой радиус-вектор $\overline{\rho}_i$ мы возьмем внутри угла $\Delta\theta_i$. Этот предел естественно считать искомой площадью фигуры*). Таким образом, площадь сектора OAB равна

$$Q=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta \tag{1}$$

*) Можно было бы показать, что это определение площади не противоречит данному ранее; иначе говоря, если вычислять площадь криволинейного сектора с помощью криволинейных трапеций, то мы получим тот же результат

или

$$Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \qquad (1')$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой (рис. 238):

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Решение. Радиус-вектор опишет область с площадью, равной четверти искомой площади, если θ меняется от 0 до $\pi/4$:

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Таким образом, площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, будет равна $Q = a^2$.

§ 3. Длина дуги кривой

1. **Длина дуги кривой в прямоугольных координатах.** Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением $y = f(x)$.

Найдем длину дуги AB этой кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 239).

В главе VI (§ 1) было дано определение длины дуги. Напомним это определение. Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, B$ с абсциссами $a = x_0$, x_1, x_2, …, x_i, …, $x_n = b$ и проведем хорды AM_1, M_1M_2, …, $M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через Δs_1, Δs_2, …, Δs_n. Тогда получим ломаную $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу $\overset{\frown}{AB}$. Длина ломаной равна

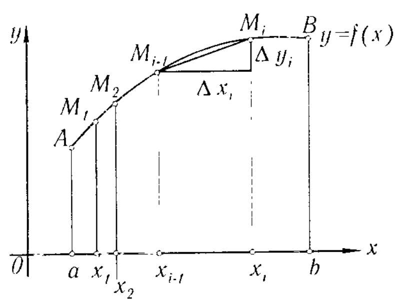


Рис. 239

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$

Длиной s дуги AB называется тот предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю.

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \qquad (1)$$

Мы докажем сейчас, что если на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Вместе с тем будет дан и способ вычисления длины дуги.

Введем обозначение: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тогда

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа имеем:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Следовательно, $\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$.

Таким образом, длина вписанной ломаной равна

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i.$$

По условию, $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел написанной интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Итак, получили формулу для вычисления длины дуги

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \qquad (2)$$

Замечание 1. Исходя из последней формулы, можно получить производную от длины дуги по абсциссе. Если верхний предел интегрирования будем считать переменным и обозначим через x (переменную интегрирования менять не будем), то длина дуги s будет функцией от x:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Дифференцируя этот интеграл по верхнему пределу, получим:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (3)$$

Эта формула была получена в § 1 гл. VI при иных предположениях.

Пример 1. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Вычислим сразу длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Тогда уравнение дуги AB будет:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}s = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int\limits_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}.$$

Длина всей окружности $s = 2\pi r$.

Найдем теперь длину дуги кривой в том случае, когда уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными, причем $\varphi'(t)$ на заданном участке не обращается в нуль. В этом случае уравнение (4) определяют некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда, сделав в интеграле (2) подстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\, dt$, получим

$$s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t)\, dt, \quad \text{или} \quad s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{5}$$

Замечание 2. Можно доказать, что формула (5) остается в силе для таких кривых, которые пересекаются вертикальными прямыми более чем в одной точке (в частности, для замкнутых кривых), лишь бы во всех точках кривой были непрерывны обе производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пример 2. Вычислить длину астроиды: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Решение. Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Находим: $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$. Параметр t будет изменяться от 0 до $\pi/2$. Следовательно,

$$\frac{1}{4}s = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt = 3a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 3a\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t\, dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \qquad s = 6a.$$

Замечание 3. Если задана ***пространственная*** кривая параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{6}$$

где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (см. § 1 гл. IX), то длина ее дуги определяется (так же и для плоской дуги) как предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина наибольшего звена стремится к нулю. Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha, \beta]$, то кривая имеет определенную длину (т.е. для нее не существует вышеуказанный предел), которая вычисляется по формуле

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt. \tag{7}$$

Последний результат мы принимаем без доказательства.

Пример 3. Вычислить длину дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = amt$ при изменении t от 0 до 2π.

Решение. Из данных уравнений находим: $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $dz = am\,dt$. Подставляя в формулу (7), получим:

$$s = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\, dt = a\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\, dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. **Длина дуги кривой в полярных координатах.** Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой

$$\rho = f(\theta), \tag{8}$$

где ρ — полярный радиус, θ — полярный угол.

Напишем формулы перехода от полярных координат к декартовым: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Если сюда вместо ρ подставим его выражение (8) через θ, то получим уравнения $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$. Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления длины дуги применить формулу (5). Для этого найдем производные от x и y по параметру θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta.$$

Тогда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Следовательно,

$$s = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.$$

Пример 4. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\theta)$ (рис. 240).

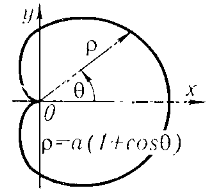


Рис. 240

Изменяя полярный угол θ от 0 до π, получим половину искомой длины. Здесь $\rho' = -a\sin\theta$. Следовательно,

$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Пример 5. Вычислить длину эллипса:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t, \end{aligned}\right\}\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

предполагая, что $a > b$.

Решение. Для вычисления воспользуемся формулой (5). Вычислим сначала 1/4 длины дуги, т.е. длину дуги, соответствующей изменению параметра от $t = 0$ до $t = \pi/2$:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt,$$

где $k = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$. Следовательно,

$$s = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt.$$

Остается только вычислить последний интеграл. Но он, как известно, не выражается в элементарных функциях (см. § 14 гл. X). Этот интеграл можно вычислить только приближенными методами (например, по формуле Симпсона).

В частности, если большая полуось эллипса равна 5, а малая равна 4, то $k = 3/5$, и длина эллипса равна

$$s = 4\cdot 5\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл по формуле Симпсона (деля отрезок $[0, \pi/2]$ на четыре части), получим приближенное значение интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{5}\cos^2 t}\, dt \approx 1,298,$$

и, следовательно, длина дуги всего эллипса приближенно равна

$$s \approx 25,96 \text{ единицы длины.}$$

§ 4. Вычисление объема тела по площади параллельных сечений

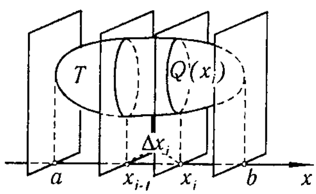


Рис. 241

Пусть имеем некоторое тело T. Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (рис. 241). Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от x:

$$Q = Q(x).$$

Предположим, что $Q(x)$ есть непрерывная функция от x и определим объем данного тела. Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n = b$.

Эти плоскости разобьют тело на слои.

В каждом частичном промежутке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждого значения $i = 1, 2, \ldots, n$ построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси Ox, а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x = \xi_i$. Объем такого элементарного цилиндра с площадью основания $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ и высотой Δx_i равен $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Объем всех цилиндров будет:

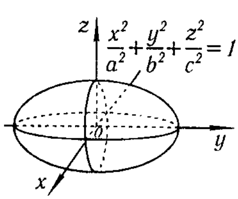


Рис. 242

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i.$$

Предел этой суммы при $\max x_i \to 0$ (если он существует) называется объемом данного тела

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i.$$

Так как v_n представляет собой, очевидно, интегральную сумму для непрерывной функции $Q(x)$ на отрезке

$a \leqslant x \leqslant b$, то указанный предел существует и выражается определенным интегралом

$$v = \int_a^b Q(x)\,dx. \tag{1}$$

Пример. Вычислить объем трехосного эллипсоида (рис. 242)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. В сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oyz и отстоящей на расстоянии x от нее, получится эллипс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

с полуосями

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Но площадь такого эллипса равняется $\pi b_1 c_1$ (см. пример 3 § 1). Поэтому

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Объем эллипсоида будет равен

$$v = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, если $a = b = c$, эллипсоид превращается в шар, и в этом случае мы получаем:

$$v = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого

$$Q = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2.$$

Применяя общую формулу для вычисления объема [(1) § 4], получим формулу для вычисления объема ***тела вращения:***

$$v = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

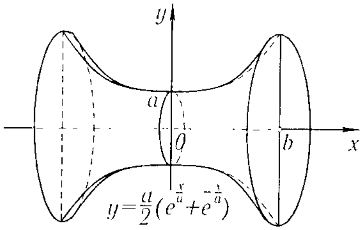


Рис. 243

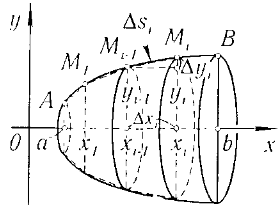


Рис. 244

Пример. Найти объем тела, образуемого вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

вокруг оси Ox на участке от $x = 0$ до $x = b$ (рис. 243).

Решение.

$$v = \pi\frac{a^2}{4}\int_0^b (e^{x/a} + e^{-x/a})^2\,dx = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^b (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a})\,dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2x/a}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8}(e^{2b/a} - e^{-2b/a}) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

§ 6. Площадь поверхности тела вращения

Пусть нам дана поверхность, образованная вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Определим площадь этой поверхности на участке $a \leqslant x \leqslant b$. Функцию $f(x)$ предположим непрерывной и имеющей непрерывную производную во всех точках отрезка $[a, b]$.

Как и в § 3, проведем хорды AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, длины которых обозначим через Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n (рис. 244).

Каждая хорда длины Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при вращении опишет усеченный конус, площадь поверхности которого ΔP_i равна

$$\Delta P_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta s_i.$$

Но

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \text{где} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i;$$

следовательно,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

Площадь поверхности, описанной ломаной, будет равна

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

или сумме

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i, \tag{1}$$

распространенной на все звенья ломаной. Предел этой суммы, когда наибольшее звено ломаной Δs_i стремится к нулю, называется ***площадью*** рассматриваемой ***поверхности вращения***. Сумма (1) не является интегральной суммой для функции

$$2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}, \tag{2}$$

так как в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, фигурирует несколько точек этого отрезка x_{i-1}, x_i, ξ_i. Но можно доказать, что предел суммы (1) равняется пределу интегральной суммы для функции (2), т.е.

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

или

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{3}$$

Пример. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 2px$, соответствующей изменению x от $x = 0$ до $x = a$.

Решение.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}.$$

По формуле (3) получим:

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\, dx = 2\pi\sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x + p}\, dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x + p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}[(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}].$$

§ 7. Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть под действием некоторой силы F материальная точка M движется по прямой Os, причем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется найти работу, произведенную силой F при перемещении точки M из положения $s = a$ в положение $s = b$.

1) Если сила F постоянна, то работа A выражается произведением силы F на длину пути, т.е.

$$A = F(b - a).$$

2) Предположим, что сила F непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, т.е. представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a \leqslant s \leqslant b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей с длинами

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n,$$

затем в каждом частичном отрезке $[s_{i-1}, s_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $F(s)$ на пути Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произведением

$$F(\xi_i)\Delta s_i.$$

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу F за постоянную, а именно полагаем $F = F(\xi_i)$. В таком случае выражение $F(\xi_i)\Delta s_i$ при достаточно малом Δs_i дает нам приближенное значение работы силы F на пути Δs_i, а сумма

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$$

будет приближенным выражением работы силы F на всем отрезке $[a, b]$.

Очевидно, A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $F = F(s)$ на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы при $\max(\Delta s_i) \to 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s = a$ до точки $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)ds. \qquad (1)$$

Пример 1. Сжатие S винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 5 *см*, если для сжатия ее на 1 *см* нужна сила в 1 *кг* (рис. 245).

Решение. Сила F и перемещение S связаны по условию зависимостью $F = kS$, где k — постоянная.

Будем выражать S в метрах, F — в килограммах. При $S = 0,01$ $F = 1$, т.е. $1 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 100$, $F = 100S$.

На основании формулы (1) имеем:

$$A = \int\limits_0^{0,05} 100 S dS = 100 \frac{S^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кгм}.$$

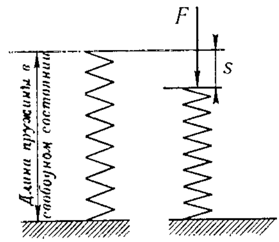


Рис. 245

Пример 2. Сила F, с которой электрический заряд e_1 отталкивает заряд e_2 (того же знака), находящийся от него на расстоянии r, выражается формулой

$$F = k\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

где k — постоянная.

Определить работу силы F при перемещении заряда e_2 из точки A_1, отстоящей от e_1 на расстоянии r_1, в точку A_2, отстоящую от e_1 на расстоянии r_2, полагая, что заряд e_1 помещен в точке A_0, принятой за начало отсчета.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$A = \int\limits_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

при $r_2 = \infty$ получим:

$$A = \int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2} dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1}.$$

При $e_2 = 1$ $A = k\frac{e_1}{r}$. Последняя величина называется потенциалом поля, создаваемого зарядом e_1.

§ 8. Координаты центра тяжести

Пусть на плоскости Oxy дана система материальных точек

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$$

с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Произведения $x_i m_i$ и $y_i m_i$ называются *статическими моментами* массы m_i относительно осей Oy и Ox.

Обозначим через x_c и y_c координаты центра тяжести данной системы. Тогда, как известно из курса механики, координаты центра тяжести описанной материальной системы определяются формулами:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (2)$$

Мы используем эти формулы при отыскании центров тяжести различных фигур и тел.

1. **Центр тяжести плоской линии.** Пусть дана кривая AB уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть эта кривая представляет собой ***материальную*** линию.

Предположим, что линейная плотность*) такой материальной кривой равна γ. Разобьем линию на n частей длины Δs_1, Δs_2, $\ldots$, Δs_n. Массы этих частей будут равняться произведению их длин на (постоянную) плотность: $\Delta m_i = \gamma\Delta s_i$. На каждой части дуги Δs_i возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i. Представляя теперь каждую часть дуги Δs_i материальной точкой $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ с массой $\gamma\Delta s_i$ и подставляя в формулы (1) и (2) вместо x_i значение ξ_i, вместо y_i значение $f(\xi_i)$, а вместо m_i значение $\gamma\Delta s_i$ (массы частей Δs_i), получим приближенные формулы для определения центра тяжести дуги:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum f(xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum \gamma\Delta s_i}.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то стоящие в числителе и знаменателе каждой дроби суммы при $\max \Delta s_i \to 0$ имеют пределы, равные пределам соответствующих интегральных сумм. Таким образом, координаты центра тяжести дуги выражаются определенными интегралами:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \tag{1'}$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \tag{2'}$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной над осью Ox.

Решение. Определим ординату центра тяжести:

$$y = \sqrt{a^2-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$y_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a} = \frac{a\int\limits_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi},$$

$x_c = 0$ (так как полуокружность симметрична относительно оси Oy).

*) Линейной плотностью называется масса единицы длины данной линии. Мы предполагаем, что линейная плотность на всех участках кривой одинакова.

2. **Центр тяжести плоской фигуры.** Пусть данная фигура, ограниченная линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, представляет собой материальную плоскую фигуру. Поверхностную плотность, т.е. массу единицы площади поверхности, мы будем считать постоянной и равной δ для всех частей фигуры.

Разобьем данную фигуру прямыми $x = a$, $x = x_1$, ..., $x = x_n = b$ на полоски ширины Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Масса каждой полоски будет равна произведению ее площади на плотность δ. Если каждую полоску заменить прямоугольником (рис. 246) с основанием Δx_i и высотой $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, где $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, то масса полоски будет приближенно равна

$$\Delta m_i = \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Приближенно центр тяжести этой полоски будет находиться в центре соответствующего прямоугольника:

$$(x_i)_c = \xi_i, \quad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Заменяя теперь каждую полоску материальной точкой, масса которой равна массе соответствующей полоски и сосредоточена в центре тяжести этой полоски, найдем приближенное значение координат центра тяжести всей фигуры (по формулам (1) и (2)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum[f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

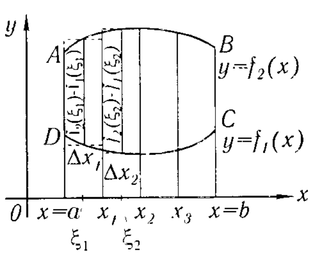


Рис. 246

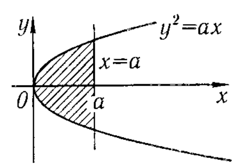


Рис. 247

Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}.$$

Эти формулы справедливы для любой однородной (т.е. имеющей постоянную плотность во всех точках) плоской фигуры. Как мы видим, координаты центра тяжести не зависят от плотности δ фигуры (в процессе вычисления δ сократилось).

Пример 2. Определить координаты центра тяжести сегмента параболы $y^2 = ax$, отсекаемого прямой $x = a$ (рис. 247).

Решение. В данном случае $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_2(x) = -\sqrt{ax}$, поэтому

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int\limits_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{2\sqrt{a}\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a,$$

$y_c = 0$ (так как сегмент симметричен относительно оси Ox).

§ 9. Вычисление момента инерции линии, круга и цилиндра с помощью определенного интеграла

Пусть на плоскости xOy дана система материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$, с массами m_1, m_2, ..., m_n. Тогда, как известно из механики, момент инерции системы материальных точек относительно точки O определяется так:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)m_i, \quad \text{или} \quad I_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{1}$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Как и в § 8, пусть кривая AB дана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Пусть эта кривая представляет собой материальную линию. Пусть линейная плотность линии равна γ. Снова разобьем линию на n частей длины Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n, где $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, а массы этих частей $\Delta m_1 = \gamma\Delta s_1$, $\Delta m_2 = \gamma\Delta s_2$, ..., $\Delta m_n = \gamma\Delta s_n$. На каждой части дуги возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i. Ордината этой точки будет $\eta_i = f(\xi_i)$. Приближенно момент инерции дуги относительно точки O в соответствии с формулой (1) будет:

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2 + \eta_i^2)\gamma\Delta s_i. \tag{(2)}$$

Если функция $y = f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то при $\Delta s_i \to 0$ сумма (2) имеет предел. Этот предел, выражающийся определенным интегралом, и определяет момент инерции материальной линии:

$$I_O = \gamma\int\limits_a^b [x^2 + f^2(x)]\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{3}$$

1. **Момент инерции тонкого однородного стержня длины l относительно его конца.** Совместим стержень с отрезком оси Ox: $0 \leqslant x \leqslant l$ (рис. 248). В этом случае $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma \Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ и формула (3) принимает вид

$$I_{O_c} = \gamma \int_0^l x^2\,dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \tag{4}$$

Если дана масса стержня M, то $\gamma = M/l$ и формула (4) принимает вид

$$I_{O_c} = \frac{1}{3} M l^2. \tag{5}$$

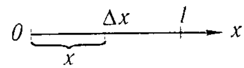


Рис. 248

2. **Момент инерции окружности радиуса r относительно центра.** Так как все точки окружности находятся на расстоянии r от центра, а его масса $m = 2\pi r \cdot \gamma$, то момент инерции окружности будет:

$$I_O = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \tag{6}$$

3. **Момент инерции однородного круга радиуса R относительно центра.** Пусть δ — масса единицы площади круга. Разобьем круг на n колец.

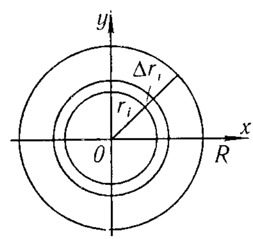


Рис. 249

Рассмотрим одно кольцо (рис. 249).

Пусть его внутренний радиус r_i, внешний $r_i + \Delta r_i$. Масса этого кольца Δm_i с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δr_i будет $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$. Момент инерции этой массы относительно центра в соответствии с формулой (6) приближенно будет:

$$(\Delta I_O)_i \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i.$$

Момент инерции всего круга как системы колец будет выражаться приближенной формулой

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i. \tag{7}$$

Переходя к пределу при $\max \Delta r_i \to 0$, получим момент инерции площади круга относительно центра

$$I_O = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi\delta \frac{R^4}{2}. \tag{8}$$

Если дана масса круга M, то поверхностная плотность δ определяется так:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Подставляя это значение, окончательно получаем:

$$I_O = MR^2/2. \tag{9}$$

4. Очевидно, что если имеем круглый цилиндр, радиус основания которого R и масса M, то его момент инерции относительно оси выражается формулой (9).

Упражнения к главе XII

Вычисление площадей

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$. *Отв.* $\frac{1}{2}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной равнобочной гиперболой $xy = a^2$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = 2a$. *Отв.* $a^2 \ln 2$.

3. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox. *Отв.* 32/3.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Отв.* $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной цепной линией $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, осью Ox, осью Oy и прямой $x = a$. *Отв.* $a^2 \operatorname{sh} e$.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью Oy. *Отв.* 12.

7. Найти площадь области, ограниченной одной полуволной синусоиды и осью абсцисс. *Отв.* 2.

8. Найти площадь области, заключенной между параболами $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$. *Отв.* $4p^2/3$.

9. Найти всю площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$. *Отв.* $\frac{3}{2}$.

10. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс. *Отв.* $3\pi a^2$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. *Отв.* $3\pi a^2/8$.

12. Найти площадь всей области, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. *Отв.* a^2.

13. Вычислить площадь области, ограниченной одной петлей кривой $\rho = a \sin 2\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/8$.

14. Вычислить полную площадь области, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. *Отв.* $3\pi a^2/2$.

15. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a\cos\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.

16. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a\cos 2\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.

17. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = \cos 3\varphi$. *Отв.* $\pi/4$.

18. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a\cos 4\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.

Вычисление объемов

19. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

20. Отрезок прямой, соединяющий начало координат с точкой (a, b), вращается вокруг оси y. Найти объем полученного конуса. *Отв.* $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.

21. Найти объем тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ вокруг оси Ox (предполагается, что $b \geqslant a$). *Отв.* $2\pi^2 a^2 b$.

22. Фигура, ограниченная линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* πpa^2.

23. Фигура, ограниченная астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* $32\pi a^3/105$.

24. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi^2/2$.

25. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 4$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* 32π.

26. Фигура, ограниченная кривой $y = xe^x$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

27. Фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. *Отв.* $5\pi^2 a^3$.

28. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения. *Отв.* $6\pi^2 a^3$.

29. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси Oy и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi a^3(9\pi^2 - 16)/6$.

30. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси Ox и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $7\pi^2 a^3$.

31. Цилиндр радиуса R пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Найти объем отсеченной части. *Отв.* $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.

32. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$. *Отв.* $16R^3/3$.

33. Точка пересечения диагонали квадрата перемещается вдоль диаметра круга радиуса a; при этом плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности (при движении величина квадрата, очевидно, меняется). Найти объем тела, образуемого этим движущимся квадратом. *Отв.* $8a^3/3$.

34. Вычислить объем сегмента, отсекаемого от эллиптического параболоида $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ плоскостью $x = a$. *Отв.* $\pi a^2\sqrt{pq}$.

35. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 0$, цилиндрическими поверхностями $x^2 = 2py$ и $z^2 = 2px$ и плоскостью $x = a$. *Отв.* $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (в первом октанте).

36. Прямая движется параллельно плоскости Oyz, пересекая два эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, лежащих в плоскостях Oxy и Oxz. Вычислить объем полученного тела. *Отв.* $8abc/3$.

Вычисление длин дуг

37. Найти всю длину астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Отв.* $6a$.

38. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2=x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x=5a$. *Отв.* $335a/27$.

39. Найти длину цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от начала координат до точки (x, y). *Отв.* $a\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2}$.

40. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$ $y=a(1-\cos t)$. *Отв.* $8a$.

41. Найти длину дуги кривой $y=\ln x$ в пределах от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$. *Отв.* $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

42. Найти длину дуги кривой $y=1-\ln\cos x$ в пределах от $x=0$ до $x=\pi/4$. *Отв.* $\ln\operatorname{tg}(3\pi/8)$.

43. Найти длину спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ от полюса до конца первого завитка. *Отв.* $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

44. Найти длину спирали $\rho=e^{\alpha\varphi}$ от полюса до точки (ρ, φ). *Отв.* $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}=\frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$.

45. Найти всю длину кривой $\rho=a\sin^3(\varphi/3)$. *Отв.* $3\pi a/2$.

46. Найти длину эволюты эллипса $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$. *Отв.* $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

47. Найти длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$. *Отв.* $8a$.

48. Найти длину дуги эвольвенты круга $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_1$. *Отв.* $a\varphi_1^2/2$.

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

49. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы $y^2=4ax$ вокруг оси Ox, от начала O до точки с абсциссой $x=3a$. *Отв.* $56\pi a^2/3$.

50. Найти площадь поверхности конуса, образуемого вращением отрезка прямой $y=2x$ от $x=0$ до $x=2$: а)Вокруг оси Ox. *Отв.* $8\pi\sqrt{5}$. б) Вокруг оси Oy. *Отв.* $4\pi\sqrt{5}$.

51. Найти площадь поверхности тора, полученного вращением круга $x^2+(y-b)^2=a^2$ вокруг оси Ox $(b>a)$. *Отв.* $4\pi^2ab$.

52. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кардиоиды вокруг оси Ox. Кардиоида задана параметрическими уравнениями $x=a(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y=a(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$. *Отв.* $128\pi a^2/5$.

53. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ около оси Ox. *Отв.* $64\pi a^2/3$.

54. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается вокруг оси Oy. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $16\pi^2a^2+\frac{64}{3}\pi a^2$.

55. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается около касательной, параллельной оси Ox и проходящей через вершину. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $32\pi a^2/3$.

56. Астроида $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ вращается около оси Ox. Найти поверхность тела вращения; *Отв.* $12\pi a^2/5$.

57. Поверхность синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = 2\pi$ вращается около оси Ox.Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

58. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ вращается вокруг оси Ox. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $2\pi b^2 + 2\pi ab\dfrac{\arcsin e}{c}$, где $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Различные приложения определенного интеграла

59. Найти центр тяжести площади четверти эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$. *Отв.* $4a/3\pi$; $4b/3\pi$.

60. Найти центр тяжести площади фигуры, ограничённой параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox. *Отв.* $(0; 8/5)$.

61. Найти центр тяжести объема полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $3R/8$ от основания.

62. Найти центр тяжести поверхности полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $R/2$ от основания.

63. Найти центр тяжести поверхности кругового прямого конуса, радиус основания которого R, а высота h. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $h/3$ от основания.

64. Фигура ограничена линиями $y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y = 0$. Найти центр тяжести площади этой фигуры. *Отв.* $(\pi/2, \pi/8)$.

65. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 20x$, $x^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. *Отв.* $(9; 9)$.

66. Найти центр тяжести площади кругового сектора с центральным углом 2α и радиусом R. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $\dfrac{2}{3}R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ от вершины сектора.

67. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 м. *Отв.* 1056 т.

68. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 м, лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза, образуемую давлением квадрата одной из его диагоналей. *Отв.* 85 333,33 кг, 170 666,67 кг.

69. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 м. *Отв.* $2,5 \cdot 10^6\pi$ кгм.

70. Тело движется прямолинейно по закону $x + ct^3$, где x — длина пути, проходимого за время t, $c = \text{const}$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Найти работу, производимую сопротивлением при передвижении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$. *Отв.* $\dfrac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$.

71. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H, а радиус основания R. *Отв.* $\pi\gamma R^2H^2/12$.

72. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 4000$ см^2, а высота $H = 50$ см, плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность? (Удельный вес дерева 0,8). *Отв.* $\gamma^2 H^2 S/2 = 32$ кгм.

73. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6,4$ м, ниже $b = 4,2$ м, а высота $H = 3$ м. *Отв.* 22,2 т.

74. Найти осевую составляющую P кг полного давления пара на сферическое дно котла. Диаметр цилиндрической части котла D мм, давление пара в котле p кг/см^2. *Отв.* $P = \pi p D^2/400$.

75. Конец вертикального вала радиуса r поддерживается плоским подпятником. Вес вала P распределяется равномерно на всю поверхность опоры. Вычислить полную работу сил трения при одном обороте вала. Коэффициент трения μ. *Отв.* $4\pi\mu Pr/3$.

76. Вертикальный вал оканчивается пятой, имеющей форму усеченного конуса. Удельное давление пяты на подпятник постоянно равно P. Верхний диаметр пяты D, нижний d, угол при вершине конуса 2α. Коэффициент трения μ. Найти работу сил трения за один оборот вала. *Отв.* $\dfrac{\pi^2 P\mu}{6\sin\alpha}(D^3 - d^3)$.

77. Призматический стержень длины l растягивается медленно возрастающей от 0 до P силой так, что в каждый момент растягивающая сила уравновешивается силами упругости стержня. Вычислить работу A, затраченную силой на растяжение, предполагая, что растяжение происходит в пределах упругости. Площадь поперечного сечения стержня равна F, модуль упругости материала равен E.

Указание. Если x — удлинение стержня, а f — соответствующая сила, то $f = \dfrac{EF}{l}x$. Удлинение под действием силы P равно $\Delta l = \dfrac{Pl}{EF}$. *Отв.* $A = \dfrac{P\Delta l}{2} = \dfrac{P^2 l}{2EF}$.

78. Призматический брус подвешен вертикально, и к нижнему его концу приложена растягивающая сила P. Вычислить удлинение бруса под действием силы его веса и силы P, если дано, что длина бруса в нерастянутом состоянии равна l, площадь поперечного сечения F, вес бруса Q и модуль упругости материала E. *Отв.* $\Delta l = \dfrac{(Q+2P)l}{2EF}$.

79. Определить время, в течении которого жидкость выльется из призматического сосуда, наполненного до высоты H. Площадь поперечного сечения сосуда F, площадь отверстия f, скорость истечения определяется по формуле $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, h — расстояние от отверстия до уровня жидкости. *Отв.* $T = \dfrac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}} = \dfrac{F}{\mu f}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

80. Определить расход Q воды (количество воды, вытекающей в единицу времени) через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива h, ширина b. *Отв.* $Q = \dfrac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.

81. Определить расход воды Q, вытекающей из бокового прямоугольного отверстия высотой a и шириной b, если высота свободной поверхности воды над нижней стороной отверстия равна H. *Отв.* $Q = \dfrac{2b\mu\sqrt{2g}}{3}[H^{3/2} - (H-a)^{3/2}]$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ