

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.4
П 43
УДК 513.73

Алексей Васильевич Погорелов
Геометрические методы в нелинейной
теории упругих оболочек
Москва, 1967 г., 280 стр. с илл.
Редактор *И. Х. Сабитов*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 20/X 1966 г. Подписано
к печати 7/II 1967 г. Бумага 84 X 108¹/₈₂.
Физ. печ. л. 8,75. Условн. печ. л. 14,7.
Уч.-изд. л. 12,71. Тираж 9 000 экз. Т-01750.
Цена книги 1 р. 01 к. Заказ № 636.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 1 «Печатный
Двор» имени А. М. Горького Главполиграф-
прома Комитета по печати при Совете
Министров СССР, г. Ленинград,
Гатчинская ул., 26.

2-2-3
88-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Пластинки. Закон Гука	15
§ 2. Общее плоское напряженное состояние пластинки.	18
§ 3. Оболочки. Энергия деформации	22
§ 4. Основная задача теории оболочек. Геометрический подход к ее решению	27

ГЛАВА ВТОРАЯ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП А И ЕГО ОБОСНОВАНИЕ

§ 1. Упругое состояние сферического сегмента при больших осесимметрических деформациях	31
§ 2. Энергия упругой деформации оболочки. Формулировка принципа А	41
§ 3. Решение вариационной задачи для функционала J . Определение постоянных c , c' и c''	52
§ 4. Влияние закрепления края оболочки на энергию деформации, спрямляющей ребро.	60

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

§ 1. Закритическая деформация и геометрические изгибания.	67
§ 2. Определение основных величин в случае зеркального выпукливания малых областей	72
§ 3. Закритические деформации оболочек под действием сосредоточенной силы и момента	76
§ 4. Закритические деформации строго выпуклой оболочки под внешним давлением	81
§ 5. Упруго-пластические закритические деформации.	93

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

§ 1. Изгибание сферического сегмента. Уравнения изгибаия	101
§ 2. Решение уравнений изгибаия	106
§ 3. Определение некоторых величин для поверхности, полученной изгибанием сферического сегмента	110
§ 4. Энергия деформации оболочки	114
§ 5. Об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки	120
§ 6. О нижней критической нагрузке для пологой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении	127

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Энергия деформации оболочки	130
§ 2. Формулировки принципа В и его обоснование	137
§ 3. Определение критической нагрузки для строго выпуклых оболочек при равномерном внешнем давлении. Другие способы нагружения	141
§ 4. Потеря устойчивости пологих строго выпуклых оболочек под действием внешней нагрузки, передаваемой через жесткую опору	149
§ 5. Потеря устойчивости трехслойных оболочек	155

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СТРОГО ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Общее представление для изгибающих полей	160
§ 2. Сопряжение изгибающих полей τ и τ' в простейшем случае	164
§ 3. Сопряжение изгибающих полей в общем случае	169

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК С ВЫПУЧИВАНИЕМ ПО СИСТЕМЕ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Энергия деформации оболочки при выпучивании	174
§ 2. Глобальное изменение метрики поверхности при выпучивании	180
§ 3. Общее критическое напряженное состояние пологой оболочки. Потеря устойчивости оболочек вращения	186

*ГЛАВА ВОСЬМАЯ***СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

§ 1. Некоторые общие свойства развертывающихся поверхностей	194
§ 2. Изометрическое преобразование цилиндрической поверхности с периодичностью строения	197
§ 3. Изометрическое преобразование цилиндрической поверхности с винтовой симметрией	203
§ 4. Изометрические преобразования цилиндрической поверхности, удовлетворяющие условию опирания на окружности по краям	209

*ГЛАВА ДЕВЯТАЯ***ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ**

§ 1. Цилиндрические оболочки при осевом сжатии	218
§ 2. Цилиндрические оболочки под внешним давлением	232
§ 3. Цилиндрические оболочки при кручении	244

*ДОПОЛНЕНИЕ***НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ**

§ 1. Строго выпуклые оболочки при динамическом нагружении	253
1. Динамика «хлопка» при равномерном нагружении оболочки (253). 2. Критический импульс (256).	
§ 2. Динамическое нагружение цилиндрической оболочки	259
1. Критический импульс при осевом сжатии (259). 2. Критический импульс при внешнем давлении (265).	
§ 3. Большие колебания оболочек	270
1. Колебания с большой амплитудой тяжелого груза, жестко соединенного с оболочкой (270). 2. Собственные колебания цилиндрической оболочки (273). 3. Вынужденные колебания оболочек (277).	

Цитированная литература	280
-------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании этой монографии автор использовал свои предыдущие публикации [1 — 7] и особенно книгу [8], вплоть до сохранения в отдельных местах прежнего текста. Но вместе с тем здесь впервые публикуется ряд новых результатов, полученных в последнее время. Например, подвергнуто более глубокому анализу упругое состояние оболочки в окрестности ребра изометрического преобразования и получено уточненное выражение для энергии деформации, спрямляющей ребро. Это упростило многие выводы и окончательные результаты. Рассмотрен ряд новых задач о потере устойчивости строго выпуклых оболочек. В частности, изучена потеря устойчивости таких оболочек при сосредоточенном нагружении силой и моментом через жесткую опору. Рассмотрено общее критическое напряженное состояние строго выпуклой оболочки, произвольно нагружаемой вдоль края. Разработан общий метод решения задач о потере устойчивости строго выпуклых оболочек с выпучиванием по системе малых областей. Рассмотрены некоторые новые задачи динамики строго выпуклых оболочек. Многие вопросы предыдущих публикаций переизложены заново и замеченные дефекты устранены. Оригинальной части работы предпослана глава, содержащая краткое изложение элементов общей теории оболочек, что делает книгу доступной широкому кругу читателей.

Я пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность редактору книги И. Х. Сабитову за ценные замечания при подготовке рукописи к печати.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Оболочкой называется упругое тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с остальными размерами этого тела. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Когда говорят о форме оболочки, обычно имеют в виду форму ее срединной поверхности. Как упругое тело, оболочка под действием приложенной к ней нагрузки испытывает деформацию. При этом в ее материале возникают напряжения. Основная задача теории оболочек состоит в определении деформаций и напряжений, обусловленных действующей на оболочку нагрузкой. Напряжения в материале оболочки находятся просто, если известна деформация оболочки. Поэтому можно считать, что указанная задача сводится к определению деформаций оболочки.

Представим себе, что оболочка F деформируется, принимая форму F' . При этой деформации внутренние усилия, возникающие в материале оболочки, производят некоторую работу. Эта работа называется энергией деформации. Пусть

$$\sum g_{ij} du^i du^j, \quad \sum h_{ij} du^i du^j, \quad i, j = 1, 2,$$

— первая и вторая квадратичные формы исходной поверхности, а

$$\sum g'_{ij} du^i du^j, \quad \sum h'_{ij} du^i du^j$$

— соответствующие формы поверхности F' . Обозначим через ϵ_1 и ϵ_2 экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum (g'_{ij} - g_{ij}) du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j},$$

а через α_1 и α_2 — экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum (h'_{ij} - h_{ij}) du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j}.$$

Тогда энергия деформации $U_{F'}$, связанная с переходом оболочки из формы F в F' , вычисляется по формуле

$$U_{F'} = \iint_F \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\nu\alpha_1\alpha_2) d\sigma + \\ + \iint_F \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) d\sigma,$$

где E и ν — упругие постоянные материала оболочки, δ — ее толщина, а интегрирование выполняется по площади поверхности F .

Если к оболочке приложена некоторая нагрузка q , то при деформации оболочки из формы F в F' эта нагрузка производит некоторую работу. Обозначим ее через $A_{F'}(q)$.

Один из методов решения основной задачи теории оболочек основан на следующем вариационном принципе.

Под действием заданной нагрузки q , среди всех возможных форм F' , удовлетворяющих условиям закрепления, оболочка принимает такую форму, на которой функционал

$$W = U_{F'} - A_{F'}(q)$$

стационарен, то есть имеет равную нулю вариацию.

Легко представить себе трудности, которые возникают при решении указанной вариационной задачи. Если обозначить через w_1, w_2, w_3 составляющие перемещения точек поверхности F при деформации ее в F' , то подынтегральная функция для энергии деформации $U_{F'}$ представляет собой довольно сложное выражение, содержащее функции w_i и их производные первого и второго порядка. Поэтому решение этой задачи даже в простейших случаях практически невыполнимо.

Если заранее предположить, что форма деформированной оболочки F' близка к первоначальной (F), то функционал W естественно упрощается и приводится к квадратичному. Соответствующая система уравнений Эйлера для функций w_i , реализующих экстремум функционала W , будет линейной. Решение основной задачи в этом простейшем случае составляет предмет линейной теории оболочек.

Пусть оболочка F находится под действием некоторой нагрузки q . Если нагрузка мала, то упругое состояние оболочки среди форм, близких к F , определяется однозначно. Будем увеличивать нагрузку q . Тогда может наступить такой момент, когда указанным условием близости упругое состояние оболочки однозначно не определяется. Именно, наряду с основной формой упругого равновесия оболочки, для которой деформированная поверхность оболочки остается близкой к первоначальной форме (F) и при дальнейшем увеличении нагрузки, существуют другие формы, которые развиваются практически без добавочного увеличения действующей нагрузки, причем это развитие сопровождается значительными изменениями внешней формы оболочки. Наименьшая нагрузка, при которой имеет место указанная неоднозначность упругих состояний, называется *верхней критической нагрузкой*, а переход к неосновным формам упругих состояний — потерей устойчивости оболочки.

Упругие состояния оболочки, возникающие в результате потери устойчивости, мы условно называем *закритическими*. Определение и исследование этих состояний представляет собой существенно нелинейную задачу. Решая ее, обычно задаются характером прогибов оболочки, сводя таким образом вариационную задачу для функционала W к задаче на экстремум для функций от параметров, характеризующих деформацию. При этом результат существенно зависит от того, насколько удачно выбраны функции, задающие деформацию. Предлагаемый нами метод исследования закритических упругих состояний оболочек основан в своей существенной части на геометрических соображениях и в общих чертах состоит в следующем.

Прежде всего, мы исходим из предположения о том, что закритическая деформация оболочки представляет собой в основном геометрическое изгибание. Это нетрудно обосновать. Действительно, наиболее ходовые конструктивные материалы — металлы — в упругой области допускают малые относительные деформации. Так, например, для стали с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и временным сопротивлением $\sigma_b = 4 \cdot 10^3$ кг/см² относительные деформации меньше, чем $\sigma_b/E = 2 \cdot 10^{-3}$. Это значит, что всякая упругая деформация стальной оболочки сопровождается относительным изменением метрики ее срединной поверхности, меньшим, чем $2 \cdot 10^{-3}$.

Поэтому, если такая деформация приводит к значительным изменениям формы оболочки, то она представляет собой геометрическое изгибание.

Далее, обычные условия закрепления края оболочки гарантируют геометрическую неизгибаемость ее срединной поверхности в классе регулярных поверхностей. Поэтому изгибания, соответствующие закритическим деформациям, принадлежат более широкому классу кусочно-регулярных поверхностей. Это значит, что поверхность, воспроизводящая форму оболочки при закритической деформации, должна иметь ребра. На поверхности оболочки эти ребра сглажены.

Близость закритической деформации оболочки к некоторому ее изометрическому преобразованию с особенностями вдоль линий (ребер) создает определенную специфику в распределении энергии деформации по поверхности оболочки. А именно, она заметно концентрируется в окрестности ребер. Соображения, основанные на вариационном принципе, позволяют уточнить форму деформированной оболочки вблизи ребер и определить энергию деформации в окрестности ребер в зависимости от геометрических величин, относящихся к ребру. В результате функционал U — энергия деформации — оказывается определенным на изометрических преобразованиях срединной поверхности, воспроизводящих форму оболочки при закритической деформации. Так мы приходим к следующему вариационному принципу А.

Значительная закритическая деформация упругой оболочки под действием данной нагрузки близка к той форме изометрического преобразования исходной поверхности, которая сообщает стационарное значение функционалу

$$W = U_{\tilde{F}} - A_{\tilde{F}}.$$

Этот функционал определен на кусочно-регулярных изометрических преобразованиях \tilde{F} срединной поверхности оболочки. Его слагаемое $U_{\tilde{F}}$ (энергия деформации) определяется следующей формулой:

$$U_{\tilde{F}} = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu\Delta k_1\Delta k_2) d\sigma + \\ + cE\delta^{5/2} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\tilde{\Gamma}} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\tilde{\Gamma}} \alpha (-2k - 2\nu k_{\tilde{\Gamma}} + k_e + k_i) ds_{\tilde{\Gamma}}.$$

Здесь Δk_1 и Δk_2 — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы оболочки F к изометрическому преобразованию \tilde{F} ; 2α — угол между касательными плоскостями поверхности \tilde{F} вдоль ребра (ребер) $\tilde{\gamma}$; ρ — радиус кривизны кривой $\tilde{\gamma}$, k_γ — нормальная кривизна поверхности F в направлении, соответствующем ребру $\tilde{\gamma}$; k_e и k_i — нормальные кривизны поверхности \tilde{F} в направлении, перпендикулярном ребру $\tilde{\gamma}$, k — нормальная кривизна поверхности F в соответствующем направлении; δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона. Постоянная $c \simeq 0,19$. Интегрирование в первом слагаемом выполняется по площади поверхности \tilde{F} , а в остальных двух слагаемых — по дуге кривой $\tilde{\gamma}$.

Слагаемое $A_{\tilde{F}}$ представляет собой производимую внешней нагрузкой работу при деформации оболочки из формы F в \tilde{F} и вычисляется как обычно.

Упругие деформации оболочки в форме, близкой к \tilde{F} , определяемой принципом А, сопровождаются появлением на ее поверхности значительных напряжений от изгиба в окрестности ребер. Максимальные напряжения σ , связанные с этим изгибом, определяются по формуле

$$\sigma = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

$$c' \simeq 0,9.$$

Таким образом, применение принципа А позволяет найти форму оболочки в основном приближении и возникающие на ее поверхности максимальные напряжения. А это и есть решение основной задачи.

Применение принципа А позволяет выяснить, как изменяется воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации и, таким образом, найти наименьшую воспринимаемую оболочкой нагрузку. Она называется *нижней критической*. Определение этой нагрузки представляет значительный интерес по следующей причине. Реальные оболочки геометрически несовершенны, несовершенны также и нагружение оболочки. Оба эти фактора снижают, притом весьма неопределенно, верхнее критическое значение нагрузки. В связи с этим,

чтобы полностью исключить возможность потери устойчивости оболочки, приходится ориентироваться на нижнюю критическую нагрузку. Нижняя критическая нагрузка связана со значительными деформациями оболочки и поэтому менее чувствительна к несовершенству геометрической формы и способу нагружения. Определение упругих закритических состояний оболочки позволяет дать естественную оценку снизу для влияния геометрических несовершенств ее формы на величину верхней критической нагрузки.

Следует заметить, что сведение общего вариационного принципа в случае закритических деформаций к принципу А предполагает решение задачи об изометрических преобразованиях исходной поверхности. Эта задача также является довольно трудной. Однако в ряде конкретных случаев геометрические и другие соображения качественного характера позволяют значительно сузить класс изометрических преобразований, на которых надо рассматривать функционал W . Так, например, изучая вопрос о закритических деформациях пологих строго выпуклых оболочек, закрепленных по краю, представляется возможным ограничиться простейшими изометрическими преобразованиями — зеркальным выпучиванием. Зеркальное выпучивание состоит в зеркальном отражении произвольного сегмента поверхности в плоскости его основания.

Как указано выше, значительный интерес представляет определение нагрузки, при которой оболочка теряет устойчивость. Предлагаемый нами метод позволяет подойти к решению и этой задачи. Дело в том, что воспринимаемая оболочкой нагрузка в момент потери устойчивости стационарна, и при переходе к закритическим деформациям она практически не изменяется, в то время как форма оболочки изменяется весьма существенно. В связи с этим представляется возможным определять верхнюю критическую нагрузку как нагрузку, воспринимаемую оболочкой при значительном выпучивании. Исследование в этом плане в итоге приводит к следующему принципу В.

Если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала

$$W = U - A$$

на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной

поверхности имеет нетривиальное решение, то есть изгибающее поле, являющееся решением, не равно тождественно нулю. Функционал W определяется на полях бесконечно малых изгибаний с разрывами вдоль линий, где удовлетворяются условия сопряжения

$$\tau - \tau' = \kappa e.$$

Здесь разность $\tau - \tau'$ есть разрыв изгибающего поля, а e — единичный вектор бинормали кривой γ , вдоль которой происходит разрыв. Слагаемое U функционала W (энергия деформации) вычисляется по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E\delta^2 \alpha^2 \kappa}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \rho} ds,$$

где ρ , α , δ , E и ν имеют прежнее значение, κ — величина разрыва, а интегрирование выполняется по дуге кривой (кривых) γ . Слагаемое A функционала W вычисляется обычным образом как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

Теперь о содержании книги. Она состоит из девяти глав и Дополнения. В главе первой приводятся основные сведения по теории упругих оболочек — от закона Гука до общего вариационного принципа. Глава вторая посвящена обоснованию вариационного принципа А, который в главах 3 и 9 применяется для решения различных задач, связанных с рассмотрением закритических деформаций (строго выпуклые оболочки в гл. 3 и цилиндрические оболочки в гл. 9). В четвертой главе рассматривается вопрос об устойчивости осесимметрических деформаций сферических оболочек при осесимметрическом нагружении. В пятой главе дается обоснование вариационного принципа В, с помощью которого решаются различные задачи о потере устойчивости оболочек. Шестая глава посвящена специальному исследованию бесконечно малых изгибаний строго выпуклых поверхностей. Результаты этого исследования применяются при изучении потери устойчивости оболочек вращения в гл. 7. В главе восьмой рассматриваются специальные изометрические преобразования цилиндрических поверхностей, с помощью которых

в гл. 9 описываются закритические деформации цилиндрических оболочек. В Дополнении к книге методы, развитые при решении статических задач, применяются для решения некоторых задач динамики оболочек (динамическое нагружение, колебания с большой амплитудой).

Чтение предлагаемой книги не требует больших познаний в теории оболочек, однако предполагает известную геометрическую культуру. Основные результаты сформулированы, как правило, вполне доступно. Они представлены либо соответствующими формулами, либо графиками. В этом смысле книга доступна широкому кругу читателей.

В этой главе мы приведем некоторые сведения из общей теории оболочек, нужные для наших целей. Разумеется, эти сведения в более пространном изложении можно найти в любом курсе по теории оболочек.

§ 1. Пластины. Закон Гука

Пластинкой называется призматическое тело, один из размеров которого (толщина пластинки) мал по сравнению с другими линейными размерами (рис. 1, а). Рассмотрим прямоугольную пластинку длины l , ширины b и толщины h , находящуюся под действием равномерно распределенных усилий, приложенных к сторонам b (рис. 1, б). Величину усилий, отнесенных к единице площади, обозначим σ . Нагружение пластинки усилиями σ вызывает ее деформацию (растяжение, сжатие) на некоторую величину Δl . Соответствующая относительная деформация будет $\epsilon = \Delta l/l$.

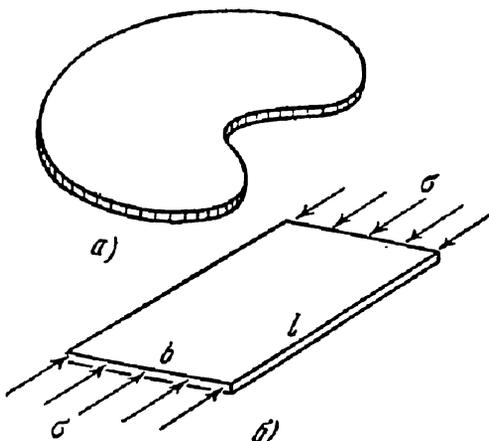


Рис. 1.

Опыт показывает, что деформация ϵ в известных пределах пропорциональна усилию σ (закон Гука), т. е.

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma.$$

Постоянная E называется *модулем упругости (модуль Юнга)*. Для наиболее распространенных конструктивных материалов — металлов и их сплавов — модуль упругости E в системе единиц (кг, см) составляет величину порядка $10^5 \div 10^6$ кг/см².

На рис. 2, а представлена экспериментальная зависимость относительной деформации ϵ от усилия σ (диаграмма состояния). На участке OA эта зависимость линейная с угловым коэффициентом E . За точкой A в материале оболочки наступают пластические (необратимые) деформации. График $\sigma(\epsilon)$ на этом участке достаточно пологий. Усилие σ , отвечающее точке A (концу линейного участка диаграммы состояния), называется *пределом упругости*, а максимальное значение $\sigma = \sigma|_B$ — *временным сопротивлением*.

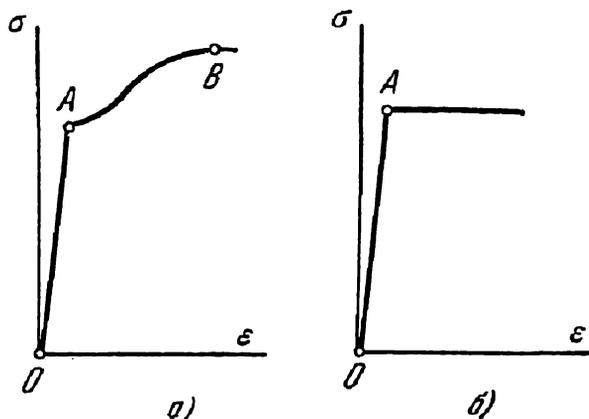


Рис. 2.

В теоретических рассуждениях участок диаграммы состояния за точкой A часто изображают горизонтальной прямой рис. 2, б (классическая диаграмма состояния материала с ограниченной упругостью).

Опыт показывает, что растяжение (сжатие) пластинки в одном направлении сопровождается пропорциональным сжатием (растяжением) в поперечном (перпендикулярном) направлении. В рассматриваемом случае нагружения пластинки относительная деформация по ширине пластинки равна

$$\epsilon' = \nu \epsilon,$$

где ν — постоянная (коэффициент Пуассона). Величина ν в среднем составляет 0,3.

Предположим, что усилия σ , приложенные к сторонам b пластинки (рис. 1, б), медленно нарастают от нулевого значения до некоторого значения σ . При этом они производят работу, которая называется *энергией деформации*. Вычислим

энергию деформации пластинки на единицу ее объема. Элементарная работа на единицу объема равна

$$dU = \sigma d\varepsilon.$$

Подставляя сюда $\varepsilon = \sigma/E$ и интегрируя, получим

$$U = \frac{\sigma^2}{2E},$$

или, переходя к относительной деформации ε ,

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

Пусть теперь на пластинку, кроме усилий σ , действуют еще равномерно распределенные по сторонам l усилия σ' . Тогда, принимая во внимание сопутствующую поперечную деформацию, для ε и ε' получим значения

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma'}{E}, \quad \varepsilon' = \frac{\sigma'}{E} - \nu \frac{\sigma}{E}.$$

Здесь растягивающее усилие и соответственно деформация растяжения считаются положительными, а усилие сжатия и деформация сжатия отрицательными.

Полученные соотношения между усилиями и деформациями можно разрешить относительно σ и σ' . Тогда получим

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon + \nu\varepsilon'), \quad \sigma' = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon' + \nu\varepsilon).$$

Нетрудно найти энергию деформации единицы объема пластинки при рассматриваемом нагружении. Имеем

$$dU = \sigma d\varepsilon + \sigma' d\varepsilon'.$$

Подставляя сюда значения ε , ε' и интегрируя, получим

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma^2 - 2\nu\sigma\sigma' + \sigma'^2).$$

В относительных деформациях ε , ε' будет

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon^2 + 2\nu\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon'^2).$$

§ 2. Общее плоское напряженное состояние пластинки

Представим себе любое упругое тело T , находящееся под действием уравновешенной системы сил Q . Разрежем мысленно тело T некоторой поверхностью S на две части T' и T'' . Пусть Q' — часть нагрузки Q , действующая на T' . Тело T' находится в равновесии под действием сил Q' и внутренних усилий, обусловленных деформацией, со стороны тела T'' . Эти усилия, действующие по поверхности S и отнесенные к единице площади поверхности, называются *напряжениями*.

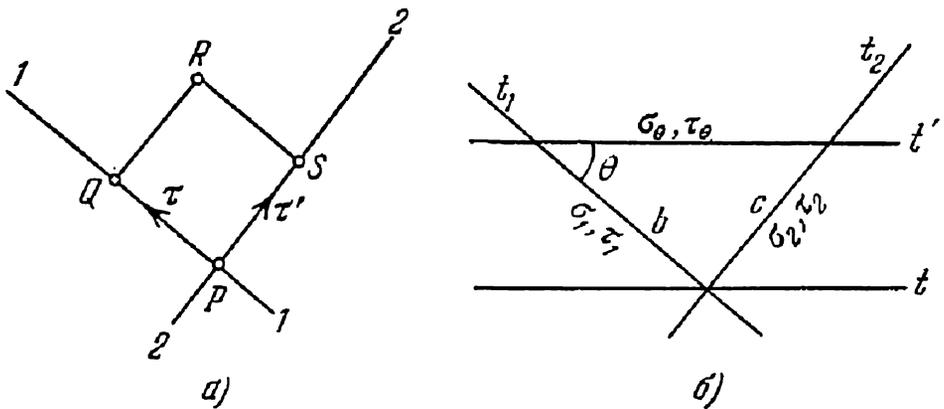


Рис. 3.

Составляющая, перпендикулярная поверхности S , называется *нормальным напряжением*, а составляющая в касательной плоскости — *касательным напряжением*.

В рассматриваемом выше случае равномерного нагружения пластинки по ее сторонам усилиями σ и σ' (§ 1) нормальные напряжения в сечениях, перпендикулярных сторонам l , равны σ , а в сечениях, перпендикулярных сторонам b , равны σ' . Касательные напряжения в обоих сечениях равны нулю. К этому выводу легко прийти, если рассмотреть условия равновесия каждой из частей пластинки, определяемых указанными сечениями, сделав естественное предположение о постоянстве напряжений по этим сечениям.

Пусть пластинка нагружена произвольной системой усилий, действующих в ее плоскости вдоль края. Рассмотрим напряжения в пластинке по различным сечениям в произвольной точке P . Прежде всего покажем, что *касательные напряжения в перпендикулярных сечениях равны*. Для этого

выделим достаточно малый квадрат $PQRS$ (рис. 3, а) с двумя сторонами в рассматриваемых сечениях 1, 2. Пусть τ и τ' — касательные напряжения в точке P в сечениях 1 и 2 соответственно. Равновесие квадрата под действием приложенных к нему усилий требует, чтобы момент этих усилий относительно точки R был равен нулю.

Предполагая достаточную регулярность напряженного состояния, заключаем, что моменты нормальных усилий по сторонам QR и PS , так же как и моменты нормальных усилий по сторонам PQ и SR , взаимно компенсируются. Действительно, нормальные напряжения по сторонам PS и QR близки по предположению регулярности напряженного состояния. Точки приложения равнодействующих этих напряжений находятся в серединах соответствующих сторон PS и QR . Поэтому моменты относительно R равны по величине и противоположно направлены, следовательно, они компенсируют друг друга. Таким образом, при толщине оболочки h мы приходим к условию равновесия квадрата:

$$h |PQ| \tau = h |SP| \tau',$$

то есть $\tau = \tau'$.

Определим напряжения σ , τ в сечении t в зависимости от нормальных напряжений σ_1 и σ_2 в перпендикулярных сечениях t_1 и t_2 и касательного напряжения τ в этих сечениях (рис. 3, б). Слегка сместив сечение t , выделим малый прямоугольный треугольник и рассмотрим его равновесие под действием приложенных к его сторонам усилий. Проектируя эти усилия на направление t и на направление, перпендикулярное t , получим

$$ha\sigma_\vartheta = hb\sigma_1 \cos \vartheta + hc\sigma_2 \sin \vartheta + hb\tau \sin \vartheta + hc\tau \cos \vartheta,$$

$$h\tau\vartheta = hb\sigma_1 \sin \vartheta - hc\sigma_2 \cos \vartheta - hb\tau \cos \vartheta + hc\tau \sin \vartheta,$$

где b , c — катеты, a — гипотенуза треугольника, h — толщина оболочки. Отсюда после деления на ha и перехода к пределу при $t' \rightarrow t$ получаем формулы

$$\sigma_\vartheta = \sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta + 2\tau \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\tau_\vartheta = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \vartheta \cos \vartheta - \tau (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta).$$

Из формулы для τ_ϑ видно, что *всегда найдутся два взаимно перпендикулярных направления, в которых касательные*

напряжения равны нулю. Если эти направления принять за t_1 и t_2 , то формула для σ_ϑ принимает вид

$$\sigma_\vartheta = \sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta.$$

Отсюда следует, что направления, в которых $\tau = 0$, соответствуют экстремальным значениям нормальных напряжений. Эти направления называются главными, а напряжения в них — главными напряжениями.

Пусть относительная деформация пластинки в точке P по главным направлениям t_1 и t_2 равна ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Найдем относительную деформацию по любому направлению t . Пусть это направление составляет угол ϑ с главным направлением t_1 (рис. 4).

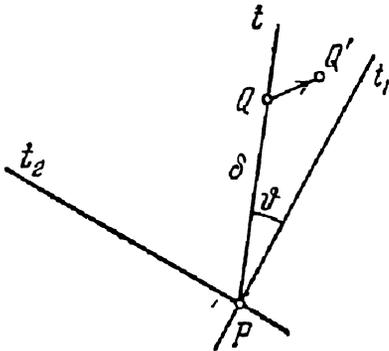


Рис. 4.

Возьмем в направлении t на малом расстоянии δ от P точку Q . Смещение этой точки в направлении t_1 будет $\delta \epsilon_1 \cos \vartheta$, смещение в направлении t_2 будет $\delta \epsilon_2 \sin \vartheta$. Отсюда смещение точки Q в направлении PQ , то есть изменение длины PQ , будет

$$\Delta = \delta \epsilon_1 \cos^2 \vartheta + \delta \epsilon_2 \sin^2 \vartheta.$$

Следовательно, относительная деформация в направлении t равна

$$\epsilon_\vartheta = \epsilon_1 \cos^2 \vartheta + \epsilon_2 \sin^2 \vartheta.$$

Отсюда мы делаем важный вывод о том, что ϵ_1 и ϵ_2 являются экстремальными значениями относительной деформации.

Угол между главными направлениями при деформации пластинки не изменяется (остается прямым). В случае произвольных двух взаимно перпендикулярных направлений он изменяется на некоторую величину 2γ . Найдем эту величину. Пусть рассматриваемые направления получаются из главных поворотом на угол ϑ в направлении от t_1 к t_2 . Так же как и в предыдущем рассмотрении относительной деформации (рис. 4), получим, что смещение точки Q в направлении, перпендикулярном PQ , равно

$$\Delta' = -\delta \epsilon_1 \cos \vartheta \sin \vartheta + \delta \epsilon_2 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Отсюда угол поворота Δ'/δ первого направления при деформации будет

$$\gamma' = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Аналогично для второго (перпендикулярного направления) имеем

$$\gamma'' = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

В итоге изменение угла между рассматриваемыми направлениями равно

$$2\gamma = \gamma' - \gamma'' = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Рассмотрим энергию деформации пластинки, находящейся в общем напряженном состоянии. Для этого выделим малый прямоугольник, содержащий произвольную точку P , со сторонами, параллельными главным направлениям в P . Ввиду малости прямоугольника его напряженное состояние близко к напряженному состоянию прямоугольной пластинки, рассмотренному в § 1, и, следовательно, энергия его деформации равна

$$\Delta U = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) \Delta S,$$

где ε_1 и ε_2 — экстремальные значения относительных деформаций в P , а ΔS — площадь прямоугольника. Энергия деформации всей пластинки, очевидно, определяется по формуле

$$U = \iint \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) dS,$$

где интегрирование выполняется по площади пластинки.

Деформация пластинки вблизи данной точки P полностью определяется заданием относительных деформаций (растяжения, сжатия) по двум взаимно перпендикулярным направлениям ε_1 , ε_2 и изменением 2γ угла между ними. Выразим энергию деформации пластинки в зависимости от этих величин. Пусть $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$ — главные деформации. Тогда, как показано выше,

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \vartheta + \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \vartheta,$$

$$\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \vartheta + \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \vartheta,$$

$$2\gamma = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2, & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2) \cos 2\vartheta, \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4\gamma^2 &= (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2, & -\varepsilon_1\varepsilon_2 + \gamma^2 &= -\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2, \\ \bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + 2\nu\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 &= (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)^2 - 2(1-\nu)\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 = \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma^2). \end{aligned}$$

Следовательно, энергия деформации пластинки в зависимости от величин ε_1 , ε_2 , γ , характеризующих деформацию, определяется по формуле

$$U = \iint \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma^2)] dS.$$

§ 3. Оболочки. Энергия деформации

Пусть F — регулярная поверхность. Отложим по нормальным этой поверхности в обе стороны от нее малые отрезки длины $\delta/2$. Тело, заполненное этими отрезками, называется оболочкой. Величина δ называется *толщиной оболочки*, а поверхность F — *срединной поверхностью*. Поверхности, эквидистантные к F и проведенные на расстоянии t и $t + dt$ от нее, образуют *эквидистантный слой (или просто слой) толщины dt* .

Исследование упругого состояния оболочки представляет собой довольно трудную задачу. Решая ее, обычно принимают *гипотезу Кирхгофа-Лява*. Согласно этой гипотезе при упругой деформации нормали срединной поверхности исходной оболочки переходят в нормали соответствующей деформированной поверхности, а тонкие эквидистантные слои оболочки находятся в плоском напряженном состоянии. Рассмотрим деформации в материале оболочки, приняв за основу эту гипотезу.

Совместим исходную и деформированную оболочки двумя соответствующими точками срединной поверхности и главными направлениями в этих точках (речь идет о главных направлениях напряженного состояния в срединной поверхности). Примем точку совмещения P за начало декартовой системы координат, а касательную плоскость за плоскость xu . Оси координат x и y направим вдоль касательных к линиям кривизны исходной поверхности в точке P .

Уравнение срединной поверхности оболочки до деформации вблизи точки P можно записать в виде

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2) + (*),$$

где не выписаны члены более высокого порядка малости по x и y . Уравнение деформированной срединной поверхности запишется так:

$$\tilde{x} = x + \varepsilon_1 x + \gamma y + (*),$$

$$\tilde{y} = y + \varepsilon_2 y + \gamma x + (*),$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{2}(\tilde{a}x^2 + 2\tilde{b}xy + \tilde{c}y^2) + (*),$$

где ε_1 и ε_2 — относительные деформации в направлении координатных осей в точке P , а 2γ — изменение угла между ними. В этих уравнениях x и y играют роль криволинейных координат точки на деформированной поверхности (декартовы координаты точки суть \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z}).

Рассмотрим деформацию тонкого эквидистантного слоя на расстоянии t от срединной поверхности. Пусть (x, y, z) — точка срединной поверхности. Тогда координаты соответствующей точки слоя будут $x + t\xi$, $y + t\eta$, $z + t\zeta$, где ξ , η , ζ — компоненты вектора единичной нормали. Величины ξ , η , ζ для исходной поверхности пропорциональны величинам $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, — 1. Поэтому вблизи точки P с точностью до величин второго порядка малости по x и y имеем

$$\xi = ax, \quad \eta = cy, \quad \zeta = -1.$$

Уравнение слоя t вблизи точки P_t , расположенной над P , будет

$$x' = x + tax + (*),$$

$$y' = y + tcy + (*),$$

$$z' =$$

Аналогично, исходя из уравнения деформированной срединной поверхности, можно получить уравнение соответствующего слоя деформированной оболочки. Координаты точки в слое через координаты соответствующей точки деформированной срединной поверхности запишутся так:

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + t\tilde{\xi}, \quad \tilde{y}' = \tilde{y} + t\tilde{\eta}, \quad \tilde{z}' = \tilde{z} + t\tilde{\zeta}.$$

Величины $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ пропорциональны определителям

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_x \tilde{z}_x \\ \tilde{y}_y \tilde{z}_y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \tilde{z}_x \tilde{x}_x \\ \tilde{z}_y \tilde{x}_y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}_x \tilde{y}_x \\ \tilde{x}_x \tilde{y}_y \end{vmatrix}.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы для \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} , находим следующие значения $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ вблизи точки P :

$$\tilde{\xi} = \tilde{a}x + \tilde{b}y + (*),$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{b}x + \tilde{c}y + (*),$$

$$\tilde{\zeta} =$$

В первых двух формулах не выписаны члены второго порядка по x , y и члены первого порядка с коэффициентами в виде произведения \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} на относительные деформации ε_1 , ε_2 и γ .

Таким образом, координаты точки деформированного слоя будут

$$\tilde{x}' = x + \varepsilon_1 x + \gamma y + t(\tilde{a}x + \tilde{b}y) + (*),$$

$$\tilde{y}' = y + \varepsilon_2 y + \gamma x + t(\tilde{b}x + \tilde{c}y) + (*),$$

$$\tilde{z}' =$$

Мы опустили указанные линейные слагаемые по x , y в формулах $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ на том основании, что в формулы \tilde{x}' и \tilde{y}' эти слагаемые войдут с коэффициентами в виде произведения $t\tilde{a}$, $t\tilde{b}$, $t\tilde{c}$ на относительные деформации ε_1 , ε_2 , γ . Величины $t\tilde{a}$, $t\tilde{b}$, $t\tilde{c}$ имеют порядок δ/R , где R — радиус нормальной кривизны поверхности, а для рассматриваемых оболочек величина δ/R предполагается достаточно малой.

Найдем относительные деформации слоя (t) в точке P_t . Принимая во внимание уравнения исходного и деформированного слоя, для относительной деформации в направлении линии x в точке P_t получаем

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1 + \varepsilon_1 + t\tilde{a}}{1 + t\tilde{a}} - 1.$$

Отсюда ввиду малости ta (причина указана выше)

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1 + t\Delta a, \quad \Delta a = \tilde{a} - a.$$

Аналогично для относительной деформации слоя в направлении линии y в точке P_t будет

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_2 + t\Delta c, \quad \Delta c = \tilde{c} - c.$$

Первоначальный прямой угол между линиями x и y на срединной поверхности в точке P_t (выбор координатных осей x , y и свойство эквидистантных поверхностей) при деформации слоя (t) изменится на величину $2\gamma(t)$. Ввиду малости относительных деформаций имеем

$$2\gamma(t) \simeq \sin(2\gamma(t)) = (\tilde{x}')_x (\tilde{x}')_y + (\tilde{y}')_x (\tilde{y}')_y.$$

Отсюда, принимая во внимание выражения для \tilde{x}' и \tilde{y}' , находим

$$2\gamma(t) = 2\gamma + 2t\Delta b,$$

где для симметрии записи обозначено $\Delta b = \tilde{b}$.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл величин Δa , Δb и Δc , рассмотрим нормальную кривизну срединной поверхности до и после деформации оболочки в точке P . Нормальная кривизна исходной поверхности в направлении $dx:dy$ равна

$$k = \frac{adx^2 + 2bdx dy + cdy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Нормальная кривизна в том же направлении после деформации будет

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{a}dx^2 + 2\tilde{b}dx dy + \tilde{c}dy^2}{dx^2 + dy^2},$$

где не выписаны члены порядка относительных деформаций ε_1 , ε_2 и γ . Отсюда следует, что величина

$$\frac{\Delta a dx^2 + 2\Delta b dx dy + \Delta c dy^2}{dx^2 + dy^2} = \Delta k$$

представляет собой изменение нормальной кривизны срединной поверхности оболочки при ее деформации.

Вычислим теперь энергию деформации оболочки. Возьмем малый кусок оболочки, содержащий точку P . Энергия деформации в t -слое этого куска будет

$$dU = \frac{E\delta dS}{2(1-\nu^2)} [(\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t))^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t) - \gamma^2(t))] dt,$$

где dt — толщина слоя, а dS — площадь выделенного куска

оболочки. Интегрируя это выражение по толщине оболочки (в пределах $(-\delta/2, \delta/2)$), получим

$$dU = \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma^2)] dS + \\ + \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} [(\Delta a + \Delta c)^2 - 2(1-\nu)(\Delta a\Delta c - \Delta b^2)] dS.$$

Чтобы найти энергию деформации всей оболочки, остается проинтегрировать dU по площади оболочки.

Как мы знаем, выражение в первом слагаемом полученной формулы можно представить в виде

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma^2) = \bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + 2\nu\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2,$$

где $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$ — главные относительные деформации срединной поверхности. Рассмотрим соответствующее выражение во втором слагаемом формулы. Экстремальные значения $\Delta k_1, \Delta k_2$ отношения

$$\frac{\Delta a dx^2 + 2\Delta b dx dy + \Delta c dy^2}{dx^2 + dy^2} = \Delta k$$

определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \Delta a - \Delta k & \Delta b \\ \Delta b & \Delta c - \Delta k \end{vmatrix} = \\ = \Delta k^2 - \Delta k(\Delta a + \Delta c) + (\Delta a\Delta c - \Delta b^2) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta a + \Delta c = \Delta k_1 + \Delta k_2, \quad \Delta a\Delta c - \Delta b^2 = \Delta k_1\Delta k_2.$$

Следовательно,

$$(\Delta a + \Delta c)^2 - 2(1-\nu)(\Delta a\Delta c - \Delta b^2) = \Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu\Delta k_1\Delta k_2.$$

Пусть теперь срединная поверхность оболочки как-либо параметризована (отнесена к криволинейным координатам u^1, u^2). Пусть $g_{ij} du^i du^j$ — первая квадратичная форма этой поверхности, а $\tilde{g}_{ij} du^i du^j$ — первая форма деформированной поверхности. Тогда экстремальные относительные деформации ε_1 и ε_2 срединной поверхности суть экстремальные значения отношения

$$\frac{(\tilde{g}_{ij} - g_{ij}) du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}. \quad (*)$$

Пусть $h_{ij}du^i du^j$, $\tilde{h}_{ij}du^i du^j$ — вторые квадратичные формы тех же поверхностей. Тогда экстремальные изменения Δk_1 и Δk_2 нормальных кривизин при деформации срединной поверхности будут экстремальными значениями отношения

$$\frac{(\tilde{h}_{ij} - h_{ij}) du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} \quad (**)$$

Проведенное исследование можно подытожить следующим выводом. Энергия деформации оболочки определяется по формуле

$$U = \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} \iint (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2) dS + \\ + \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \iint (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu\Delta k_1\Delta k_2) dS,$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — экстремальные значения отношения квадратичных форм (*), а Δk_1 и Δk_2 — экстремальные значения отношения форм (**). Первое слагаемое этой формулы связано с внутренними деформациями срединной поверхности, а второе с изменением ее формы (то есть с изгибом).

§ 4. Основная задача теории оболочек. Геометрический подход к ее решению

Основная задача теории оболочек состоит в определении деформаций оболочки и возникающих в ее материале напряжений под действием заданной нагрузки. Один из методов решения этой задачи основан на вариационном принципе Лагранжа. Если действующая на оболочку нагрузка консервативна, то есть производимая ею работа при деформации оболочки из исходной формы F в F' зависит только от формы F' , но не зависит от характера перехода из F в F' , то указанный вариационный принцип состоит в следующем.

Оболочка под действием данной нагрузки q среди всех возможных форм F' , удовлетворяющих условию закрепления вдоль края, принимает такую форму, для которой функционал

$$W = U(F') - A_q(F')$$

стационарен, то есть его вариация $\delta W = 0$. Здесь U — энергия деформации оболочки, A_q — производимая внешней нагрузкой (q) работа.

Если через u, v, w обозначить составляющие перемещения точек срединной поверхности оболочки при ее деформации, то подынтегральное выражение в энергии деформации U представляет собой довольно сложное выражение, содержащее функции u, v, w и их производные до второго порядка. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала W представляют собой систему трех дифференциальных уравнений четвертого порядка для функций u, v, w . Вполне понятно, что решение основной задачи теории оболочек на этом пути представляется довольно трудным, если не безнадежным.

В ряде случаев представляется возможным предположить известную малость смещения точек срединной поверхности и изменения ее нормальных кривизн при деформации. В этом предположении функционал W можно упростить, ограничиваясь квадратичной его частью. Соответствующая система уравнений Эйлера-Лагранжа будет линейной. Решение основной задачи теории оболочек в предположении указанной малости деформации составляет предмет *линейной теории*.

Если рассматриваемые деформации оболочки не сопровождаются значительными изменениями нормальных кривизн, в выражении энергии деформации U может быть опущено слабое, связанное с изгибом оболочки. Теория оболочек, включающая и это упрощающее предположение, называется *безмоментной теорией* оболочек.

Мы будем рассматривать такие упругие состояния оболочки, которые отличаются весьма значительными изменениями первоначальной формы. В этих рассмотренных принципиально недопустима линеаризация задачи, а также применение безмоментной теории. Однако, как мы сейчас покажем, именно предположение о значительных изменениях формы оболочки при ее деформации делает возможным новый подход к решению задачи, основанный на простых геометрических соображениях.

Дело в том, что наше предположение о значительных изменениях формы оболочки влечет за собой важное заключение о характере деформации. Именно, *форма срединной поверхности оболочки при такой деформации неизбежно близка к одной из форм ее изометрического преобразова-*

ния. Действительно, для основных конструктивных материалов модули упругости имеют порядок $10^5 \div 10^6$ кг/см², а временное сопротивление порядка $10^2 \div 10^3$ кг/см². Таким образом, максимальная относительная деформация имеет порядок 10^{-3} . Отсюда следует, что, несмотря на значительные изменения формы оболочки, внутренняя метрика ее срединной поверхности практически не изменяется (изменение составляет величину порядка 0,1%). Деформация поверхности без изменения ее внутренней метрики есть геометрическое изгибание. Деформация с малым изменением внутренней метрики естественно приводит к формам, близким к изометрическим преобразованиям.

Так как форма оболочки при значительной деформации близка к изометрическому преобразованию исходной поверхности, то в поисках решения вариационной задачи для функционала $W = U - A$ естественно ограничиться рассмотрением форм, близких к изометрическим преобразованиям. Решение задачи облегчается еще благодаря некоторой специфике изометрических преобразований, вблизи которых находится искомая форма.

Дело в том, что срединная поверхность оболочки ввиду закрепления ее края обычно не допускает *регулярных* геометрических изгибаний. Как говорят, оболочка геометрически неизгибаема. Геометрически изгибаемая оболочка воспринимала бы действующую на нее нагрузку только за счет изгиба, а при малой толщине оболочки жесткость ее на изгиб ничтожна. Поэтому каждая грамотно сконструированная оболочка должна быть геометрически неизгибаемой. Поскольку срединная поверхность не допускает регулярных изгибаний, то изометрические преобразования, о которых шла речь выше, должны быть в более широком классе поверхностей с *нарушением регулярности* вдоль линий. Наличие этих особенностей на изометрическом преобразовании и дает ключ к решению основной задачи.

Решение вариационной задачи для функционала $W = U - A$ мы расчленим на два этапа. На первом этапе изометрическое преобразование фиксируется и функционал рассматривается на формах, близких к этому изометрическому преобразованию. Решение задачи на этом этапе удастся получить в замкнутом виде при самых общих предположениях о поверхности оболочки и ее изометрическом преобразовании.

В результате решения этой задачи функционал W оказывается теперь определенным на изометрических преобразованиях и общий вариационный принцип принимает геометрическую форму (*принцип А*, гл. 2). Найденное на втором этапе изометрическое преобразование, исправленное малой добавкой, полученной на первом этапе, и дает истинную форму оболочки при заданном нагружении.

Основная трудность при решении задачи на втором этапе состоит в определении возможных изометрических преобразований срединной поверхности, совместимых с условиями закрепления. Качественные соображения о характере ожидаемых деформаций оболочки, подсказываемые опытом, часто облегчают решение этой задачи, сужая класс изометрических преобразований, на которых следует рассматривать функционал W . Что касается самого функционала, то он, будучи определенным на изометрических преобразованиях с нарушением регулярности вдоль линий, зависит от одной или нескольких функций, задающих форму этих линий на поверхности.

Описанный метод решения вариационной задачи для функционала W является на первом этапе приближенным. Именно поэтому и удается получить решение на этом этапе в замкнутой форме. Однако, будучи приближенным, этот метод выгодно отличается от других методов тем, что даваемое им решение тем точнее, чем тоньше оболочка при заданных масштабах рассматриваемых деформаций, и оно становится точным, когда толщина оболочки неограниченно убывает. Если рассматривать вариационную задачу для функционала W как задачу с малым параметром (толщина оболочки), то получаемое нами решение представляет собой основное приближение к точному решению.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП А И ЕГО ОБОСНОВАНИЕ

Как указано в гл. 1, § 4, определение упругого состояния оболочки, находящейся под действием данной консервативной нагрузки q , сводится к изучению вариационной задачи для функционала $W = U_F - A_F(q)$, который рассматривается на всевозможных деформациях F срединной поверхности оболочки, совместимых с условиями закрепления вдоль края. Для упругих состояний с большими изменениями формы срединной поверхности оказывается возможным ограничиться поиском решений среди деформаций F , близких к изометрическим преобразованиям. При этом благодаря специфике деформации и распределения энергии деформации по поверхности оболочки удается частично решить рассматриваемую вариационную задачу в самых общих предположениях и свести ее таким образом к более простой. В итоге определение упругого состояния оболочки с большими прогибами сводится к вариационной задаче для функционала, рассматриваемого на изометрических преобразованиях исходной формы. Это составляет содержание вариационного принципа А, обоснованию которого посвящается настоящая глава. Ввиду общности постановки задачи обоснование принципа А, данное в § 2, осложняется некоторыми деталями, которые затегают существо дела. В связи с этим мы начнем наше изложение рассмотрением простого примера, где руководящие соображения, применяемые при обосновании вариационного принципа А, выступают особенно отчетливо.

§ 1. Упругое состояние сферического сегмента при больших осесимметричных деформациях

Представим себе стальной, жестко закрепленный по краю сферический сегмент, испытывающий значительную осесимметрическую деформацию. Пусть для определенности эта деформация вызывается сосредоточенной силой f , приложенной в

центре сегмента (рис. 5). Определим упругое состояние сегмента, в частности, установим связь между действующей нагрузкой f и деформацией сегмента (прогибом в центре).

Прежде всего мы замечаем, что форма сегмента в деформированном состоянии близка к одной из форм изометрического преобразования. Действительно, так как оболочка изготовлена из стали и, следовательно, имеет модуль упругости $E \simeq 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, а временное сопротивление $\sigma_{\text{в}} = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$, то относительная деформация срединной поверхности, предполагаемая упругой, не превосходит величины $\sigma_{\text{в}}/E \simeq 2 \cdot 10^{-3}$, и, следовательно, достаточно мала. Деформация с таким изменением метрики срединной поверхности естественно близка

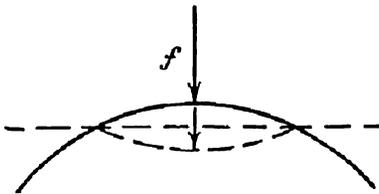


Рис. 5.

к изометрическому преобразованию, при котором метрика вообще не изменяется.

Так как рассматриваемая деформация сегмента осесимметрическая, то деформированная поверхность является поверхностью вращения. Всякое изометрическое преобразование сегмента в поверхность вращения получается зеркальным отражением его части в некоторой плоскости, перпендикулярной оси, либо последовательным выполнением ряда таких отражений. В рассматриваемом варианте нагружения сегмента сосредоточенной силой соответствующее изометрическое преобразование получается, очевидно, одним зеркальным отражением (рис. 5, пунктир).

Так как упругое выпучивание сегмента под действием сосредоточенной силы f близко к некоторому зеркальному выпучиванию, то естественно искать истинную форму деформированного сегмента, варьируя это зеркальное выпучивание. При этом мы будем исходить из общего вариационного принципа, согласно которому для истинной формы сегмента под действием нагрузки f функционал $W = U - A$ стационарен. Найдем выражение для энергии деформации U и производимой силой f работы A .

Очевидно, работу A можно вычислять просто по изометрическому преобразованию сегмента, полагая

$$A = f \cdot 2h,$$

где h — высота зеркально отражаемого сегмента. Что касается энергии деформации, то ее нельзя так просто выразить в зависимости от параметров изометрического преобразования. Дело в том, что изометрическое преобразование хорошо воспроизводит истинную форму оболочки в классе непрерывных поверхностей, но не отражает ее строения вблизи геометрического ребра (характер сглаживания ребра), а это существенно при определении энергии деформации.

Переход оболочки в деформированное состояние связан со значительным изгибом в плоскости меридиана, о чем свидетельствует наличие геометрического ребра на соответствующем изометрическом преобразовании. Этот изгиб сопровождается появлением значительных напряжений растяжения — сжатия в срединной поверхности в направлении параллели. Из наглядных соображений мы заключаем, что деформация сильного изгиба на границе выпучивания и соответствующие деформации срединной поверхности для достаточно тонких оболочек должны иметь местный характер. Это можно пояснить следующим образом.

Ослабим оболочку по ребру шарниром и приложим к каждой из частей, на которые оболочка разбивается ребром, равномерно распределенный момент m , восстанавливающий форму оболочки. Выделим двумя близкими меридианами элемент оболочки в одной из частей, например вне области выпучивания. Этот элемент можно уподобить балке на упругом основании. Упругим основанием является часть оболочки вне выделенного сегмента. Очевидно, жесткость основания определяется жесткостью оболочки на растяжение — сжатие $\sim E\delta$ и геометрическими характеристиками оболочки (ее кривизной). Жесткость балки на изгиб $\sim E\delta^3$ (δ — толщина оболочки). При $\delta \rightarrow 0$ жесткость балки убывает гораздо быстрее, чем жесткость основания. Поэтому действие момента m , приложенного к концу балки, будет быстро затухать и, следовательно, для оболочек малой толщины δ оно ограничивается малой окрестностью ребра.

Принимая во внимание изложенные выше соображения, мы разобьем поверхность сегмента на три области: G_{12} (окрестность ребра) и оставшиеся две области G_1 и G_2 , на которые эта окрестность разбивает всю поверхность. Для определенности будем считать область G_2 внешней (прилегающей к краю сегмента). Вне окрестности ребра G_{12} , то есть в областях

G_1 и G_2 , энергию деформации оболочки можно вычислять обычным образом по изометрическому преобразованию.

В области G_2 изменения нормальных кривизн Δk_1 и Δk_2 равны нулю. Поэтому

$$U(G_2) = 0.$$

В области G_1

$$\Delta k_1 = -\frac{2}{R}, \quad \Delta k_2 = -\frac{2}{R}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U(G_1) &= \frac{D}{2} \iint_{G_1} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) dS = \\ &= \frac{E\delta^3}{3(1-\nu^2)} \frac{1}{R^2} S(G_1) (1 + \nu), \end{aligned}$$

где $S(G_1)$ — площадь области G_1 . При достаточно малой толщине оболочки зона G_{12} достаточно узкая и поэтому площадь области G_1 можно считать равной площади S_1 зеркально отражаемого сегмента. Тогда

$$U(G_1) \simeq \frac{E\delta^3}{3(1-\nu)} \frac{1}{R^2} S_1.$$

Обратимся теперь к энергии деформации в переходной зоне G_{12} . Рассмотрим сначала внешнюю полуокрестность ребра. Пусть u и v — радиальное и осевое смещения точки при варьировании изометрического преобразования в истинную форму оболочки. Относительная деформация растяжения — сжатия срединной поверхности вдоль параллели радиуса ρ будет

$$\varepsilon = \frac{2\pi(\rho + u) - 2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{u}{\rho}.$$

Предполагая зону G_{12} достаточно узкой, можно считать

$$\varepsilon \simeq \frac{u}{r},$$

где r — радиус параллели вдоль ребра. Из наглядных соображений видно, что деформация растяжения — сжатия вдоль меридиана имеет подчиненное значение. Поэтому мы полагаем ее равной нулю. Впрочем, к такому же выводу можно прийти и при более глубоком теоретическом рассмотрении вопроса [1]. Таким образом, энергия деформации растяжения —

сжатия во внешней полуокрестности ребра определяется по формуле

$$U = \frac{D'}{2} \iint \left(\frac{u}{r}\right)^2 d\sigma, \quad D' = \frac{E\delta}{2},$$

где интегрирование выполняется по площади внешней полуокрестности. Во внутренней полуокрестности ребра для энергии деформации растяжения — сжатия получается аналогичное выражение.

Рассмотрим теперь энергию деформации изгиба в переходной зоне G_{12} , связанную со спрямлением геометрического ребра. Начнем с внешней полуокрестности. Очевидно, главные изменения нормальных кривизн при рассматриваемой деформации происходят в направлении меридианов и параллелей поверхности. При достаточной пологости оболочки кривизна деформированного меридиана будет

$$\tilde{k}_1 \simeq \frac{1}{R} + v''.$$

Отсюда изменение кривизны при изгибе равно

$$\Delta k_1 = v''$$

(дифференцирование по дуге s меридиана).

Найдем кривизну деформированной оболочки вдоль параллели. Как известно, для поверхности вращения радиус нормальной кривизны в направлении параллели равен отрезку нормали между точкой поверхности и пересечением с осью. Отсюда для нормальной кривизны вблизи ребра получается выражение

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{v'}{\alpha}\right),$$

где α — угол, под которым пересекает исходный сегмент плоскость зеркального отражения. Так как нормальная кривизна исходной поверхности равна $1/R$, то интересующее нас изменение кривизны при деформации будет

$$\Delta k_2 = \frac{v'}{\alpha R}$$

(положительное направление отсчета v по внутренней нормали исходного сегмента в его центре).

Энергия деформации изгиба во внешней полукрестности ребра равна

$$U = \frac{D}{2} \int \int \left[v''^2 + \left(\frac{v'}{\alpha R} \right)^2 + 2\nu v'' \frac{v'}{\alpha R} \right] d\sigma, \quad \bar{D} = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

где интегрирование выполняется по площади полукрестности. Ввиду осевой симметрии деформации и малой ширины полукрестности $\bar{\epsilon}$ будет

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{\epsilon}} \left[v''^2 + \left(\frac{v'}{\alpha R} \right)^2 + 2\nu v'' \frac{v'}{\alpha R} \right] ds.$$

Среднее слагаемое подынтегрального выражения имеет подчиненное значение и поэтому может быть опущено. Третье слагаемое без труда интегрируется. Отсюда, замечая, что $v'(0) = -\alpha$, $v'(\bar{\epsilon}) \simeq 0$, получаем выражение для энергии изгиба в виде

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{\epsilon}} v''^2 ds - \pi r D \nu \frac{\alpha}{R}.$$

Полная энергия деформации во внешней полукрестности равна

$$U'' = \pi r D \int_0^{\bar{\epsilon}} v''^2 ds + \pi r D_1 \int_0^{\bar{\epsilon}} \frac{u^2}{r^2} ds - \pi r D \nu \frac{\alpha}{R}.$$

Обратимся теперь к энергии изгиба во внутренней полукрестности ребра. Кривизна деформированной оболочки в направлении меридиана

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{R} + v''.$$

Соответственно изменение кривизны по меридиану

$$\Delta k_1 = v'' - \frac{2}{R}.$$

Кривизна деформированной оболочки вдоль параллели

$$\tilde{k}_2 = -\frac{1}{R} \left(1 + \frac{v'}{\alpha} \right).$$

Изменение кривизны

$$\Delta k_2 = -\frac{v'}{aR} - \frac{2}{R}.$$

Подставляя эти значения Δk_1 и Δk_2 в формулу для энергии деформации изгиба и опуская члены, имеющие подчиненное значение, для внутренней полуокрестности ребра получим

$$U = \frac{D}{2} \int \int \left[v''^2 - \frac{4(1+\nu)}{R} v'' - 2\nu \frac{v''v'}{aR} \right] d\sigma,$$

или после интегрирования

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds - \frac{4(1+\nu)\pi r D \alpha}{R} + \pi r D \nu \frac{\alpha}{R}.$$

Полная энергия деформации оболочки во внутренней полуокрестности равна

$$U' = \pi r D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds + \pi r D_1 \int_0^{\bar{s}} \frac{u^2}{r^2} ds - \frac{4(1+\nu)\pi r D \alpha}{R} + \pi r D \nu \frac{\alpha}{R}.$$

Как указано выше, истинная форма деформированной оболочки хорошо приближается изометрическим преобразованием вне окрестности ребра G_{12} . Переход от изометрического преобразования к истинной форме варьированием в области G_{12} не влияет на производимую внешней нагрузкой f работу A . Поэтому форма деформированной оболочки в области G_{12} естественно должна быть определена из условия минимума энергии деформации в этой области. Рассмотрим эту задачу сначала для внешней полуокрестности.

Для энергии деформации оболочки во внешней полуокрестности мы получили следующее выражение:

$$U'' = \pi r \left(D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds + D' \int_0^{\bar{s}} \frac{u^2}{r^2} ds \right).$$

Задача состоит в том, чтобы найти функции u , v , сообщающие этому выражению минимальное значение. Из наглядных соображений о характере рассматриваемых деформаций для функций u , v получаются следующие граничные условия:

$$1) v'(0) = -\alpha.$$

Это условие означает, что при сглаживании ребра деформацией u , v касательные плоскости вдоль ребра переходят в горизонтальную плоскость (перпендикулярную оси оболочки).

$$2) u(0) = 0.$$

Это значит, что вдоль ребра радиальные смещения отсутствуют.

$$3) u(\bar{\epsilon}) = 0, \quad v'(\epsilon) = 0.$$

Эти условия выражают локальный характер деформаций, спрямляющих ребро. При удалении от ребра деформации u , v быстро затухают.

Имеется еще одно условие, которому подчинены функции u , v . Это условие выражает равенство нулю относительных деформаций оболочки вдоль меридиана. Найдем его. Для исходной поверхности оболочки линейный элемент меридиана будет

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2,$$

ρ и z — цилиндрические координаты. У деформированной оболочки

$$ds^2 = (d\rho + du)^2 + (dz + dv)^2.$$

Отсюда

$$d\rho du + dz dv + \frac{1}{2}(du^2 + dv^2) = 0.$$

При малом $\bar{\epsilon}$

$$\left| \frac{dz}{d\rho} \right| \simeq \alpha, \quad u'^2 \ll |u'|.$$

Поэтому связь между функциями u , v , задающими деформацию, можно записать в виде

$$u' + \alpha v' + \frac{1}{2} v'^2 = 0. \quad (*)$$

Итак, определение истинной формы оболочки вблизи ребра во внешней окрестности сводится к задаче на минимум для функционала U'' при краевых условиях 1), 2), 3) и неголономной связи (*).

Для внутренней окрестности ребра возникает аналогичная вариационная задача для функционала U' с теми же граничными условиями и неголономной связью для варьируе-

мых функций. Заметим, что выражения U'' и U' отличаются только слагаемым, не зависящим от варьируемых функций (u , v). Отсюда следует, что оба функционала U' и U'' минимизируются одной и той же системой функций $u(s)$, $v(s)$. В связи с этим можно ограничиться рассмотрением задачи о минимуме только для внешней полуокрестности, то есть для функционала U'' .

Исследуя вариационную задачу для функционала U'' , удобно ввести безразмерные переменные. Положим

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon r \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{r\varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12r^2\alpha^2}.$$

В новых переменных

$$U'' = \frac{\pi r E \delta^{5/2} \alpha^{5/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2) r^{1/2}} J,$$

где

$$J = \int_0^{\bar{\varepsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds, \quad \bar{\varepsilon}^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{r\varepsilon}.$$

Черта над обозначениями новых переменных опущена. Прежние краевые условия примут вид

$$u(0) = 0, \quad v(0) = -1, \quad u(\bar{\varepsilon}^*) = 0, \quad v(\bar{\varepsilon}^*) = 0.$$

Из выражения для $\bar{\varepsilon}^*$ видно, что эта величина неограниченно возрастает с убыванием толщины оболочки δ . В связи с этим для оболочек малой толщины при заданном масштабе общей деформации верхний предел в J можно взять равным $+\infty$, полагая, таким образом,

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Неголономная связь в безразмерных переменных принимает вид

$$u' + v + \frac{1}{2} v^2 = 0. \quad (*)$$

Теперь наша вариационная задача стала вполне определенной. Требуется определить функции u , v , реализующие минимум функционала J при граничных условиях $u(0) = 0$, $v(0) = -1$, $u(\infty) = v(\infty) = 0$ и неголономной связи (*). Эта вариационная задача решается нами в § 3. Находятся

функции u , v , реализующие минимум J , и величина минимума ($\approx 1,15$).

Если значение $\min J$ подставить в выражение энергии деформации, то после суммирования отдельных слагаемых для энергии деформации всей оболочки, то есть по всем областям G_1 , G_2 и G_{12} , получается следующее простое выражение:

$$U = 2\pi r c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \frac{1}{r^{1/2}},$$

где c — постоянная, равная $\sim 0,19$.

Предполагая достаточную пологость сегмента, можно считать

$$\alpha \approx \frac{r}{R}, \quad 2h = \frac{r^2}{R}.$$

Подставляя эти значения в формулу для U , получим энергию деформации в зависимости от прогиба $2h$ в центре сегмента:

$$U = 2\pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} \frac{1}{R}.$$

Теперь функционал W , к рассмотрению которого сводится наша задача, выглядит довольно просто:

$$W = 2\pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} \frac{1}{R} - 2hf.$$

Он представляет собой функцию одной варьируемой величины h . Из условия экстремума

$$\frac{dW}{dh} = 0$$

находим связь между действующей на оболочку силой f и прогибом, который она вызывает:

$$2h = \frac{R^2 f^2}{9\pi^2 c^2 E^2 \delta^5}.$$

Зная величину $2h$, находим зеркальное выпучивание, соответствующее упругой деформации под действием силы f . Функции u , v , реализующие минимум функционала J , восстанавливают детали формы оболочки в переходной зоне G_{12} . В частности, через них определяются максимальные напряжения от местного изгиба на границе выпучивания и напряжения в срединной поверхности. Определение этих величин

обычно составляет основной объем исследования упругого состояния оболочки.

Изложенное решение задачи об упругом состоянии сферического сегмента является, конечно, приближенным. По ходу этого решения мы сделали ряд упрощающих предположений, что и позволило нам получить окончательный результат в замкнутом виде. Наиболее существенным среди сделанных предположений является предположение о локальном характере деформации, спрямляющей ребро при переходе от изометрического преобразования к истинной форме оболочки. Это предположение выполняется тем точнее, чем тоньше оболочка. В связи с этим можно утверждать, что полученное решение задачи будет сколь угодно близко к точному в отношении основных величин (максимальный прогиб, максимальные напряжения от изгиба и растяжения — сжатия в срединной поверхности), если оболочка достаточно тонкая, а рассматриваемые деформации значительны.

§ 2. Энергия упругой деформации оболочки.

Формулировка принципа А

Предметом нашего исследования будут упругие состояния оболочек, при которых форма деформированной поверхности оболочки существенно отличается от первоначальной. Такие упругие состояния возникают обычно в результате потери устойчивости оболочки, поэтому мы будем называть их *закритическими*. Мы будем предполагать, что характер закрепления оболочки по краю гарантирует ее геометрическую неизгибаемость, то есть исключает изометрические преобразования ее срединной поверхности в классе регулярных (дважды дифференцируемых) поверхностей. Это условие обычно всегда выполнено и является обязательным требованием для каждой правильно сконструированной оболочки.

Исследуя закритические упругие состояния оболочек, мы будем исходить из предположения о том, что упругая деформация оболочки, сопровождающаяся значительным изменением ее формы, близка к некоторому изометрическому преобразованию. Основанием для этой гипотезы является то, что основные конструктивные материалы, каковыми являются металлы и их сплавы, допускают незначительные упругие деформации. Поэтому оболочка из такого материала даже

при значительном изменении ее формы при деформации испытывает незначительные изменения метрики срединной поверхности. Естественно, такая деформация близка к изометрическому преобразованию, при котором происходит изменение формы поверхности, но не меняется ее внутренняя метрика.

Приведенные общие соображения легко подкрепить некоторыми количественными оценками внутренних деформаций оболочки. Для металлов и их сплавов модуль упругости составляет величину порядка 10^6 кг/см², временное сопротивление (заведомо превосходящее предел упругости) имеет порядок 10^3 кг/см². Поэтому максимальная относительная деформация составляет величину порядка 10^{-3} . Таким образом, рассматриваемые деформации оболочки сопровождаются изменением метрики срединной поверхности порядка 0,1%. Естественно, такую деформацию в исходном приближении надо считать изометрическим преобразованием.

Так как срединная поверхность оболочки не допускает регулярных изометрических преобразований, то изометрическое приближение упруго деформируемой оболочки должно принадлежать более широкому классу кусочно-регулярных поверхностей. Соответствующие опыты дают основание для такого предположения.

Исследуя упругие состояния оболочки при закритических деформациях, мы будем исходить из общего вариационного принципа, согласно которому истинная форма оболочки сообщает функционалу $W=U-A$ стационарное значение. Ввиду близости истинной формы деформированной оболочки к некоторому ее изометрическому преобразованию мы будем искать эту форму на основе указанной близости. Итогом нашего исследования будет *вариационный принцип А*, согласно которому изометрическое приближение истинной формы оболочки определяется из условия стационарности некоторого функционала \tilde{W} , по смыслу сходного с W , но определенного уже только на изометрических преобразованиях исходной формы срединной поверхности. Решение вариационной задачи для функционала \tilde{W} дает ответ на основные вопросы, возникающие при исследовании закритического упругого состояния оболочки (максимальные прогибы, максимальные напряжения, характер устойчивости упругого равновесия и др.).

Пусть упругая оболочка F с регулярной поверхностью под действием некоторой нагрузки, которую уточнять не будем, испытывает закритическую деформацию, принимая форму \bar{F} . Если срединная поверхность оболочки геометрически неизгибаема в классе регулярных поверхностей, то деформированная оболочка \bar{F} близка к соответствующей форме \tilde{F} изометрического преобразования F с нарушением регулярности вдоль некоторых линий $\tilde{\gamma}$ и образованием ребер вдоль этих линий. Наличие особенностей в виде ребер на изометрическом преобразовании \tilde{F} поверхности F и близость поверхности \tilde{F} к \bar{F} дают основание говорить о ребрах (сглаженных ребрах) на деформированной поверхности оболочки \bar{F} . Разумеется, их форма и положение определены только в известном приближении, зависящем от близости деформированной оболочки \bar{F} к поверхности \tilde{F} . Для того, чтобы условным ребрам $\bar{\gamma}$ на поверхности деформированной оболочки приписать определенную форму и положение, мы поступим следующим образом. Ребру γ на поверхности \tilde{F} по изометрии соответствует некоторая кривая γ на исходной поверхности F . При рассматриваемой деформации этой кривой на деформированной оболочке соответствует кривая $\bar{\gamma}$. Эту кривую естественно принять за условное ребро.

Наша ближайшая задача состоит в определении энергии упругой деформации при переходе от F к \bar{F} . Эту энергию U представляется целесообразным разбить на две части — U' и U'' . Под U' мы будем понимать энергию деформации по основной поверхности оболочки вне окрестности ребер $\bar{\gamma}$, а под U'' — энергию деформации внутри указанных окрестностей.

Относительно энергии U' мы будем предполагать, что она состоит в основном из энергии изгиба, и, следовательно, на единицу площади поверхности она определяется по известной формуле

$$\bar{U}' = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2),$$

где D — жесткость оболочки на изгиб, Δk_1 и Δk_2 — главные изменения нормальных кривизн оболочки при ее деформации в форму \bar{F} . Ввиду того, что нарушение регулярности

поверхности \tilde{F} происходит только на ребрах $\tilde{\gamma}$, можно считать, что поверхности \tilde{F} и \bar{F} вне окрестности ребер не только точечно близки, но имеют также близкие нормальные кривизны по соответствующим направлениям. Отсюда следует, что в формуле для \bar{U} величины Δk_1 и Δk_2 можно считать изменениями нормальных кривизн при переходе от поверхности F к изометрическому преобразованию \tilde{F} .

Для того чтобы получить энергию U' , надо проинтегрировать выражение \bar{U} по площади поверхности \tilde{F} , исключая окрестности ребер. При этом, если окрестности малы, как

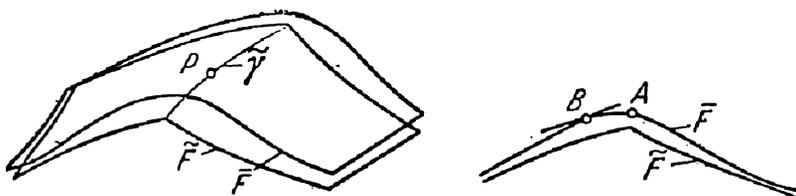


Рис. 6.

это мы и будем предполагать, то интегрирование можно распространить на всю поверхность \tilde{F} . Поэтому

$$U' = \frac{D}{2} \iint_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Обратимся теперь к энергии деформации U'' в окрестности ребер. Так же как в рассматриваемом примере сферической оболочки (§ 1), будем различать внешнюю и внутреннюю полуокрестность ребер и обозначим энергию деформации в этих окрестностях U''_i и U''_e соответственно. Начнем с рассмотрения внешней полуокрестности.

Пусть P — произвольная точка ребра $\tilde{\gamma}$ на поверхности \tilde{F} . Ограничиваясь рассмотрением вблизи этой точки, введем цилиндрическую систему координат φ, r, z , приняв в качестве оси системы прямую, проходящую через центр соприкасающегося круга кривой $\tilde{\gamma}$ в точке P перпендикулярно плоскости этого круга. Выделим двумя радиальными плоскостями, близкими P , элемент оболочки из окрестности кривой $\tilde{\gamma}$ и вычислим в нем энергию деформации (рис. 6). Из наглядных соображений о деформации оболочки в окрестности ребра мы заключаем, что энергия деформации выделенного эле-

мента состоит в основном из энергии изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру и энергии растяжения-сжатия в направлении ребра.

Пусть сечение поверхности \tilde{F} плоскостью, перпендикулярной ребру в точке P , в координатах r, z задается уравнением

$$z = z(r).$$

Обозначим через u и v смещения точек поверхности \tilde{F} при деформации ее в \bar{F} : u — по главной нормали, а v — по бинормали кривой $\tilde{\gamma}$ в точке P .

Определим изменение нормальных кривизн Δk_1 и Δk_2 при переходе от поверхности F к \bar{F} во внешней полуокрестности ребра. В связи с этим целесообразно ввести в рассмотрение соприкасающуюся поверхность вращения к поверхности \tilde{F} в точке P . Спрямление ребра на такой поверхности вблизи P будет, очевидно, сопровождаться такими же изменениями нормальных кривизн, как и для поверхности \tilde{F} . Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что сама поверхность \tilde{F} уже является поверхностью вращения.

Пусть k_e — нормальная кривизна поверхности \tilde{F} в точке P в направлении, перпендикулярном ребру $\tilde{\gamma}$, в сторону внешней полуокрестности. Тогда, если касательные плоскости поверхности \tilde{F} вдоль ребра $\tilde{\gamma}$ образуют малый угол, то нормальная кривизна поверхности \bar{F} в направлении, перпендикулярном ребру, будет

$$\bar{k}_1 = k_e + v''.$$

Соответственно, для изменения нормальной кривизны при переходе от поверхности F к \bar{F} получается величина

$$\Delta k_1 = k_e - k + v'',$$

где k — нормальная кривизна исходной поверхности в соответствующем направлении. В случае, когда изометрическое преобразование сводится к зеркальному отражению, мы получим тот же результат, что и в разобранным примере (§ 1).

Найдем изменение нормальной кривизны в перпендикулярном направлении. Подобно тому как в рассмотренном

примере, для кривизны \bar{k}_2 поверхности \bar{F} получается выражение

$$\bar{k}_2 = \tilde{k}_\gamma \left(1 - \frac{v'}{\alpha}\right),$$

где \tilde{k}_γ — нормальная кривизна поверхности \tilde{F} в направлении ребра, а α — угол между соприкасающейся плоскостью ребра и касательными плоскостями поверхности \tilde{F} в точке P . Кривизна k_2 обращается в нуль на самом ребре, а вдали от ребра ввиду затухания деформаций, спрямляющих ребро ($v' \rightarrow 0$), она такая же, как и у поверхности \tilde{F} . Изменение кривизны при деформации поверхности F в \bar{F} равно

$$\Delta k_2 = \tilde{k}_\gamma \left(1 - \frac{v'}{\alpha}\right) - k_\gamma,$$

где k_γ — нормальная кривизна исходной поверхности F в направлении, соответствующем ребру.

Зная изменение кривизн Δk_1 и Δk_2 , нетрудно записать выражение для энергии изгиба во внешней полуокрестности на единицу длины ребра:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\epsilon}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) ds,$$

где интегрирование выполняется по ширине $\bar{\epsilon}$ внешней полуокрестности ребра. Ввиду того что спрямление ребра сопровождается значительными деформациями изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, в подынтегральном выражении энергии деформации U естественно сохранить только члены, характеризующие этот изгиб, то есть содержащие производную v'' , и отбросить остальные члены, играющие подчиненную роль. При этом для энергии изгиба получается выражение

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\epsilon}} \left\{ v''^2 + 2v'' (k_e - k) + 2\nu v'' \left[\tilde{k}_\gamma \left(1 - \frac{v'}{\alpha}\right) - k_\gamma \right] \right\} ds.$$

Определим энергию растяжения — сжатия срединной поверхности во внешней полуокрестности ребра при рассматриваемой деформации. Прежде всего мы предполагаем, что спрямление ребра сопровождается появлением существенных

деформаций только в направлении ребра. Деформацию срединной поверхности в сечениях, перпендикулярных ребру, мы полагаем равной нулю. Относительная деформация срединной поверхности в направлении ребра равна

$$\varepsilon = \frac{u}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны ребра $\tilde{\gamma}$ в точке P . Отсюда для энергии деформации растяжения — сжатия срединной поверхности на единицу длины ребра получаем выражение

$$U = \frac{D'}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{u^2}{\rho^2} ds,$$

где D' — жесткость оболочки на растяжение — сжатие.

Полная энергия деформации оболочки во внешней полуокрестности ребра будет

$$U_e^r = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{s}} v'^2 ds + \frac{D'}{2} \int_0^{\bar{s}} \frac{u^2}{\rho^2} ds + R,$$

$$R = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{s}} \left\{ 2v''(k_e - k) + 2vv'' \left[\tilde{k}_\gamma \left(1 - \frac{v'}{\alpha} \right) - k_\gamma \right] \right\} ds.$$

По поводу слагаемого R выражения U_e^r существенно заметить, что интегрирование в нем выполняется просто, и, таким образом, R зависит только от значений производной v' на границе полуокрестности, то есть при $s=0$ и $s=\bar{s}$.

Обратимся теперь к энергии деформации во внутренней полуокрестности ребра. Она вычисляется точно также, и для нее получается аналогичное выражение. Разница будет только в том, что соответствующие величины дополнительного члена берутся со стороны внутренней полуокрестности. В частности, вместо k_e будет k_i — нормальная кривизна поверхности \tilde{F} в направлении, перпендикулярном ребру со стороны внутренней полуокрестности. Что касается \tilde{k}_γ , то эта величина относится к внутренней полуокрестности, но отличается только знаком от соответствующей величины внешней полуокрестности. Величины k и k_γ относятся к исходной поверхности F и поэтому сохраняют свое значение.

Поскольку мы игнорируем деформацию срединной поверхности в направлении, перпендикулярном ребру, то переменные u , v , определяющие деформацию оболочки, должны удовлетворять некоторому условию. Это условие мы получим, приравнявая линейные элементы $d\tilde{S}^2$ и $d\bar{S}^2$ поверхностей \tilde{F} и \bar{F} в сечении, перпендикулярном ребру. Имеем

$$d\tilde{S}^2 = dr^2 + dz^2, \quad d\bar{S}^2 = (dr + du)^2 + (dz + dv)^2.$$

Отсюда

$$-dr du + dz dv + \frac{1}{2}(du^2 + dv^2) = 0.$$

Обозначим через 2α угол между касательными плоскостями поверхности \tilde{F} вдоль ребра $\tilde{\gamma}$. Так как геодезические кривизны ребра $\tilde{\gamma}$ по поверхности \tilde{F} отличаются только знаком при подходе к $\tilde{\gamma}$ с двух сторон, то соприкасающаяся плоскость ребра образует с касательными плоскостями поверхности одинаковые углы, равные α . В предположении малости угла α соотношение между перемещениями u , v можно упростить. Именно, замечая, что

$$\left| \frac{dz}{dr} \right| \simeq \alpha \quad \text{и} \quad u'^2 \ll |u'|,$$

можем записать это соотношение в следующем виде:

$$u' + \alpha v' + \frac{1}{2}v'^2 = 0.$$

Мы предполагаем, что деформация (u, v) , спрямляющая ребро при переходе от изометрического преобразования \tilde{F} к истинной форме \bar{F} , быстро затухает при удалении от ребра. При этом, если вблизи ребра нет сосредоточенных нагрузок или близких к ним, варьирование формы оболочки вблизи ребра практически не влияет на слагаемое A функционала W . В связи с этим форма оболочки \bar{F} вблизи ребра определяется из условия минимума энергии деформации, спрямляющей ребро. Рассмотрим эту вариационную задачу сначала во внешней полукрестности ребра.

Вариационная задача для функционала U_e'' содержит некоторую неопределенность. Именно, отсутствуют пока граничные условия для варьируемых функций u , v , характеризую-

щих деформацию, и не определена ширина $\bar{\epsilon}$ области задания этих функций. Что касается граничных условий для функций u , v , то они естественно вытекают из наглядных соображений о характере рассматриваемых деформаций. Именно, можно считать, что повороты касательных плоскостей при спрямлении ребра одинаковы по обе стороны и поэтому на ребре $v'(0) = -\alpha$ (по соображениям удобства дифференцирование ведется по дуге s геодезической, перпендикулярной ребру, вместо дифференцирования по r). Далее, можно считать, что радиальные смещения на ребре равны нулю, то есть $u(0) = 0$. Наконец, вдали от ребра, на границе полукрестности, ввиду затухания деформаций, $u = 0$, $v' = 0$.

Для того чтобы устранить неопределенность, связанную с величиной $\bar{\epsilon}$, перейдем к безразмерным переменным \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} , полагая

$$\bar{u} = \frac{u}{\epsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \epsilon},$$

где

$$\epsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

Замечая, что

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D' = \frac{E\delta}{1-\nu^2},$$

для энергии деформации U_e'' в новых переменных получим выражение

$$U_e'' = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}J}{2 \cdot 12^{1/4}(1-\nu^2)\rho^{1/2}} + R,$$

где

$$J = \int_0^{\bar{\epsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds, \quad \bar{\epsilon}^* = \frac{\bar{\epsilon}}{\rho \epsilon}.$$

Черта над обозначениями новых переменных для простоты записи опущена.

Связь между перемещениями в новых переменных принимает вид

$$u' + v + \frac{1}{2}v^2 = 0. \quad (*)$$

Предел интегрирования $\bar{\epsilon}^*$ зависит от параметра ϵ , причем когда $\epsilon \rightarrow 0$, $\bar{\epsilon}^* \rightarrow \infty$. В связи с этим ограничиваясь

случае таких оболочек и их деформаций, для которых этот параметр мал, заменим верхний предел интегрирования $\bar{\epsilon}^*$ в J на $+\infty$, приняв, таким образом,

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Теперь задача по определению функций u , v и соответствующей энергии деформации сводится к задаче на минимум функционала J при неголономной связи (*) для варьируемых функций и граничных условиях

$$v(0) = -1, \quad u(0) = 0, \quad v(\infty) = 0, \quad u(\infty) = 0.$$

Определение функций u , v , задающих деформацию во внутренней полуокрестности ребра, сводится к аналогичной вариационной задаче. Соответствующий функционал отличается только дополнительным членом R , в котором кривизны относятся к внутренней полуокрестности. Поэтому, если обозначить

$$\min J = J_0,$$

то энергия деформации, связанная со спрямлением ребра, запишется в виде

$$U'' = \frac{E\delta^{5/2}a^{5/2}J_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)\rho^{1/2}} + D\alpha(k_e + k_i - 2k - 2\nu k_\gamma).$$

Второе слагаемое выражения U'' получается от дополнительных членов R энергии деформации во внутренней и внешней полуокрестности ребра. Полная энергия деформации оболочки, связанная с переходом ее из исходной формы F в \bar{F} , равна

$$U \cong U' + U''.$$

Производимая внешней нагрузкой работа A , ввиду близости упругой деформации к изометрическому преобразованию, определяется с помощью последнего обычным образом. В итоге получается, что оба слагаемых функционала W определены на изометрических преобразованиях исходной формы и поэтому общий вариационный принцип сводится к следующему вариационному принципу А.

Значительная закритическая деформация упругой оболочки под действием данной нагрузки близка к той форме изометрического преобразования исходной поверхности, которая сообщает стационарное значение функционалу

$$W = U(\tilde{F}) - A(\tilde{F}).$$

Этот функционал определен на изометрических преобразованиях срединной поверхности оболочки. Слагаемое $U(\tilde{F})$ определяется следующей формулой:

$$U(\tilde{F}) = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma + \\ + cE\delta^{5/2} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\gamma} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\tilde{\gamma}} \alpha(-2k - 2\nu k_{\gamma} + k_e + k_i) ds_{\gamma}.$$

Здесь Δk_1 и Δk_2 — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы оболочки F к изометрическому преобразованию \tilde{F} ; 2α — угол между касательными плоскостями поверхности \tilde{F} вдоль ребра (ребер) $\tilde{\gamma}$; ρ — радиус кривизны кривой $\tilde{\gamma}$; k_{γ} — нормальная кривизна поверхности F в направлении, соответствующем ребру $\tilde{\gamma}$; k_e и k_i — нормальные кривизны поверхности \tilde{F} в направлении, перпендикулярном ребру $\tilde{\gamma}$, k — нормальная кривизна поверхности F в соответствующем направлении; δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. Постоянная

$$c = \frac{J_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)}.$$

Интегрирование в первом слагаемом выполняется по площади поверхности \tilde{F} , а в остальных двух слагаемых — по дуге ребер $\tilde{\gamma}$.

Слагаемое $A(\tilde{F})$ представляет собой производимую внешней нагрузкой работу при деформации оболочки в форму \tilde{F} и вычисляется обычным образом.

Принцип А определяет не только форму оболочки при закритической деформации, но также и максимальные напряжения в ее материале при этой деформации. Действительно, максимальные напряжения возникают, очевидно, в окрестности ребра и обусловлены либо изгибом в плоскости,

перпендикулярной ребру, либо растяжением (сжатием) срединной поверхности в перпендикулярном направлении. В исходных переменных u , v для максимального напряжения σ' от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, имеем

$$\sigma' \simeq \frac{E\delta}{2} \max |v''|.$$

Максимальные напряжения растяжения (сжатия) срединной поверхности в направлении ребра будут

$$\sigma'' \simeq E \max \left| \frac{u}{\rho} \right|.$$

Переходя в этих формулах к безразмерным переменным \bar{u} , \bar{v} , получим

$$\sigma' = c' E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad \sigma'' = c'' E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

где c' и c'' — постоянные, определяемые с помощью функций u , v , реализующих минимум функционала J , по формулам

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'|, \quad c'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}}.$$

Значения этих постоянных, а также постоянную c в функционале W мы найдем в следующем параграфе.

§ 3. Решение вариационной задачи для функционала J . Определение постоянных c , c' и c''

Рассматривая вопрос об энергии упругой закритической деформации оболочки, мы пришли к задаче на минимум функционала

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при неголономной связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0$$

и следующих граничных условиях для варьируемых функций:

$$u(0) = 0, \quad v(0) = -1, \quad u(\infty) = v(\infty) = 0.$$

Так как $v(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то при больших s связь между u и v можно упростить, отбросив несущественное слагаемое $v^2/2$. Тогда получим

$$u' + v = 0.$$

Если исключить функцию v , выразив ее через u с учетом связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0,$$

то функционал J примет вид

$$J = \int_0^{\infty} f(u, u', u'') ds.$$

При больших s

$$f \simeq u''^2 + u^2.$$

Поэтому уравнение Эйлера для нашей вариационной задачи при больших s имеет вид

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение

$$u = \sum_k c_k e^{\omega_k s},$$

где ω_k — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0.$$

Ввиду условия $u(\infty) = 0$, в выражении для u должны быть только слагаемые, соответствующие корням ω_k с отрицательной вещественной частью, то есть корням

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad \omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Таким образом, при больших s

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_3 s}, \quad v = -u' = -c_1 \omega_1 e^{\omega_1 s} - c_2 \omega_3 e^{\omega_3 s}.$$

Принимая во внимание найденное асимптотическое представление (при больших s) для функций u , v , будем искать v на всей полуоси в виде

$$v = a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + \dots,$$

где для краткости обозначено

$$x = e^{\omega_1 s}, \quad y = e^{\omega_2 s}.$$

Составим уравнение Эйлера для функции v . Согласно методу Эйлера — Лагранжа, решение задачи на минимум для функционала J при заданной неголономной связи эквивалентно решению задачи на безусловный экстремум для функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left(u^2 + v^2 + \lambda(s) \left(u' + v + \frac{v^2}{2} \right) \right) ds.$$

Уравнения Эйлера для этого функционала будут

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0, \quad 2u - \lambda' = 0.$$

К этим двум уравнениям надо присоединить уравнение связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах $(0, \infty)$ и замечая, что $u(\infty) = 0$, получим

$$u = \int_s^{\infty} \left(v + \frac{v^2}{2} \right) ds.$$

Из уравнения

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0$$

следует, что $\lambda(\infty) = 0$, так как $v(\infty) = 0$ и, следовательно, можно считать $v''(\infty) = 0$. Подставляя полученное интегральное представление для u в уравнение

$$2u - \lambda' = 0,$$

и интегрируя его в пределах (s, ∞) , получим

$$\lambda = -2 \int_s^{\infty} \int_t^{\infty} \left(v + \frac{v^2}{2} \right) dt ds.$$

А теперь с помощью уравнения

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0$$

получаем искомое интегро-дифференциальное уравнение для v

$$v'' + (1 + v) \int_s^{\infty} \int_t^{\infty} \left(v + \frac{v^2}{2} \right) dt ds = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для v в виде ряда по степеням x, y , будем иметь

$$\begin{aligned} x \left(\alpha_1 \omega_1^2 + \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \right) + y \left(\alpha_2 \omega_2^2 + \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \right) + \\ + x^2 \left(4\alpha_{11} \omega_1^2 + \frac{1}{4\omega_1^2} \left(\alpha_{11} + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \frac{\alpha_1^2}{\omega_1^2} \right) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при x, y, x^2 , получим бесконечную систему уравнений для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}$. Первые два уравнения этой системы удовлетворяются тождественно, так как ω_1 и ω_2 суть корни уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0.$$

Остальные уравнения позволяют определить α_{11}, α_{12} в зависимости от α_1 и α_2 .

Выразив таким образом коэффициенты разложения через α_1 и α_2 , воспользуемся для определения последних крайними условиями: $u(0) = 0, v(0) = -1$. Имеем

$$u + \frac{\alpha_1}{\omega_1} x + \frac{\alpha_2}{\omega_2} y + \frac{x^2}{2\omega_1} \left(\alpha_{11} (\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \dots = 0.$$

Отсюда, полагая $s = 0$, получим

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + \frac{1}{2\omega_1} \left(\alpha_{11} (\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \dots = 0.$$

Второе уравнение для α_1, α_2 получается из краевого условия $v(0) = -1$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{11} (\alpha_1, \alpha_2) + \dots = -1.$$

Полученную систему уравнений для α_1, α_2 удобно представить в виде

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + P(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + Q(\alpha_1, \alpha_2) = -1.$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом последовательных приближений. Первое приближение получается решением системы

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\omega_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{\omega_2} = 0, \quad \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = -1.$$

Для получения второго приближения подставим найденные значения $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$ в P и Q и решаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1^{(2)}}{\omega_1} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{\omega_2} + P(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + Q(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) &= -1. \end{aligned}$$

Аналогично находятся последующие приближения.

Описанным способом, ограничиваясь вторым приближением, найдено значение

$$J_0 \simeq 1,2.$$

Для соответствующих функций u , v будет

$$\max |v'| \simeq 1, \quad \max |u| \simeq 0,5.$$

Мы обращаем внимание на эти значения потому, что с их помощью определяются постоянные c' и c'' в формулах для максимальных напряжений (§ 2).

В связи с рассмотрением вопроса об упруго-пластических закритических деформациях мы сейчас предложим другой способ решения вариационной задачи для функционала J . Это решение, приближенное по существу, будет основано на наглядных представлениях о характере деформации оболочки вблизи ребра, с изучением которой связана наша вариационная задача.

На рис. 6 справа изображены сечение деформированной оболочки плоскостью, перпендикулярной к ребру, и сечение той же плоскостью поверхности \bar{F} , которая приближает форму оболочки. Новые переменные u , v , которые мы теперь употребляем, представляют собой соответственно нормированное радиальное смещение точки поверхности \bar{F} при деформации ее в \bar{F} и нормированный угол поворота касательной. Нормировка угла выполнена таким образом, что его значение в точке A ($s = +0$) равно -1 .

Исходя из представления о локальном характере деформации оболочки в зоне сильного изгиба, естественно пред-

положить, что за точкой B , где $v=0$, величина v остается малой, и в дифференциальной связи переменных u , v членом $v^2/2$ можно пренебречь. Тогда связь примет вид

$$u' + v = 0.$$

Далее, очевидно, что максимум изгиба деформированной оболочки должен достигаться в непосредственной близости от точки A . Отсюда следует, что вблизи точки A значение v' , определяющее величину изгиба, изменяется мало, и естественно считать v' постоянной в некоторой окрестности точки A .

Принимая во внимание указанные два соображения, будем искать минимум функционала J на множестве функций u , v , удовлетворяющих условиям

$$1. \text{ При } s \leq \sigma \quad u' + v + \frac{v^2}{2} = 0, \quad v' = \text{const.}$$

$$2. \text{ При } s \geq \sigma \quad u' + v = 0.$$

Здесь σ — параметр, подлежащий варьированию. Минимум функционала J при заданном σ будет известной функцией от σ : $J_{\min} = J(\sigma)$. Для определения величины J_0 минимизируем эту функцию по σ :

$$J_0 = \min_{(\sigma)} J(\sigma).$$

Найдем функцию $J(\sigma)$. Полагая при $s \leq \sigma$

$$v' = \frac{1}{\lambda} = \text{const.},$$

после интегрирования получим

$$v = \frac{s}{\lambda} + \text{const.}$$

Так как $v = -1$ при $s = 0$, то

$$v = \frac{s}{\lambda} - 1.$$

Параметр λ имеет простой смысл. Именно, это такое значение s , при котором v обращается в нуль, то есть $\lambda = \sigma$. Таким образом, при $s \leq \sigma$ имеем

$$v(s) = \frac{s - \sigma}{\sigma}.$$

Из уравнения

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0$$

находим функцию $u(s)$ при $s \leq \sigma$:

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \text{const.}$$

Постоянная интегрирования определяется краевым условием $u(0) = 0$, и она равна $\sigma/3$. Таким образом, при $s \leq \sigma$ будет

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Значения функций u , v на конце σ отрезка $(0, \sigma)$ соответственно равны $\frac{\sigma}{3}$ и 0 и они представляют собой начальные значения для варьируемых функций u , v на оставшейся части полуоси (σ, ∞) .

Так как при $s \geq \sigma$ по предположению

$$u' + v = 0,$$

то функционал J можно представить в виде

$$J = \int_0^{\sigma} (v'^2 + u^2) ds + \int_{\sigma}^{\infty} (u''^2 + u^2) ds.$$

Функция $u(s)$, реализующая минимум функционала на полуоси (σ, ∞) , удовлетворяет уравнению Эйлера

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение, исчезающее на бесконечности, допускает представление

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s},$$

где ω_1 и ω_2 — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0$$

с отрицательной вещественной частью, то есть

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются условиями сопряжения функций u , v при $s = \sigma$. Имеем

$$u(\sigma) = c_1 e^{\omega_1 \sigma} + c_2 e^{\omega_2 \sigma} = \frac{\sigma}{3},$$

$$v(\sigma) = -u'(\sigma) = -c_1 \omega_1 e^{\omega_1 \sigma} - c_2 \omega_2 e^{\omega_2 \sigma} = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = -\frac{\sigma \omega_1}{3\sqrt{2}} e^{-\omega_1 \sigma}, \quad c_2 = -\frac{\sigma \omega_2}{3\sqrt{2}} e^{-\omega_2 \sigma}.$$

Вычислим теперь значение $J(\sigma)$. При $s \leq \sigma$ будет

$$v = \frac{s - \sigma}{\sigma}, \quad u = -\frac{1}{2\sigma} (s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2} (s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\sigma} (v^2 + u^2) ds = \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3.$$

При $s \geq \sigma$ имеем

$$u = -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}} (\omega_1 e^{\omega_1 (s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s-\sigma)}),$$

$$v' = -\frac{\sigma i}{3\sqrt{2}} (-\omega_1 e^{\omega_1 (s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s-\sigma)}),$$

$$u^2 + v'^2 = \frac{2\sigma^2}{9} e^{-\sqrt{2}(s-\sigma)}.$$

Отсюда

$$\int_{\sigma}^{\infty} (u^2 + v'^2) ds = \frac{2\sigma^2}{9\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$J(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}\sigma^3}{9} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3.$$

Минимизируя $J(\sigma)$ по σ , находим J_0 :

$$J_0 = \min_{(\sigma)} J(\sigma) \simeq 1,15.$$

Найденное значение J_0 , по-видимому, близко к истинному. Во всяком случае, применение электронных вычислительных машин для определения J_0 дало для него значение

$$J_0 = 1,1156,$$

причем первые три знака в этом выражении гарантированы

Вычислим теперь значения постоянных c , c' и c'' , введенных в § 2. Имеем.

$$c = \frac{J_0}{12^{3/4} (1 - \nu^2)}.$$

Полагая $\nu = 0,3$ и $J_0 = 1,11$, находим

$$c \simeq 0,19.$$

Постоянная

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'|.$$

Полагая $\max |v'| = 1$, будем иметь

$$c' \simeq 0,9.$$

Постоянная

$$c'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}}.$$

При $\max |u| = 0,5$

$$c'' \simeq 0,27.$$

Сравним значения максимальных напряжений σ' и σ'' соответственно от изгиба и растяжения (сжатия) в срединной поверхности оболочки. Имеем (§ 2)

$$\sigma' = 0,9E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad (*)$$

$$\sigma'' = 0,27E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}.$$

Мы видим, что максимальные напряжения от изгиба гораздо больше, чем напряжения растяжения (сжатия) в срединной поверхности. Отсюда следует, что расчет на прочность оболочки при закритических деформациях следует вести по напряжениям изгиба в окрестности ребер. Эти напряжения определяются по формуле (*).

§ 4. Влияние закрепления края оболочки на энергию деформации, спрямляющей ребро

Если ребро $\tilde{\gamma}$ на изометрическом преобразовании срединной поверхности близко к краю оболочки, который жестко закреплен, то деформация, спрямляющая ребро, естественно

затрудняется. Соответственно, энергия этой деформации должна возрастать при сближении ребра с краем. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о влиянии закрепления края на энергию деформации, спрямляющей ребро, предполагая достаточную близость его к краю. Этот вопрос представляет значительный интерес в связи с рассмотрением устойчивых упругих состояний, в которые переходит оболочка в результате потери устойчивости. В ряде случаев для таких упругих состояний граница выпучивания (ребро изометрического преобразования) оказывается вблизи края оболочки.

Исследуя энергию деформации, спрямляющей ребро $\tilde{\gamma}$, мы в § 2 вели раздельное рассмотрение деформации во внутренней и внешней полуокрестностях ребра. Такое разделение было удобно, так как при естественных граничных условиях для функций u , v , задающих деформацию, оно приводило по существу к одной и той же вариационной задаче для обеих полуокрестностей. Если же ребро близко к краю оболочки, то такое разделение представляется неестественным. Близость края нарушает симметрию задачи по полуокрестностям и затрудняет право-подобный выбор граничных условий на ребре для функций, задающих деформацию. Мы имеем в виду радиальное смещение u , которое уже нельзя полагать равным нулю на ребре из-за влияния закрепления края, стесняющего деформацию в радиальном направлении. Что касается краевого условия для осевого смещения на ребре, то здесь по-прежнему можно считать $v' = -\alpha$.

Принимая во внимание изложенные соображения, мы будем рассматривать вариационную задачу для энергии деформации, спрямляющей ребро, одновременно в обеих полуокрестностях. Общее выражение энергии деформации в рассматриваемом случае близости ребра к краю оболочки по форме не отличается от выражения, полученного в § 2. Разница лишь в том, что интегрирование в J для внешней полуокрестности (прилегающей к краю оболочки) распространяется не на всю полуось $(0, \infty)$, а только на ее отрезок $(0, \tau)$, где τ — безразмерное расстояние ребра от края. Таким образом, в случае близости ребра к краю оболочки для внутренней полуокрестности ребра имеем

$$U'_i = \frac{E_0^{5/2} \alpha^{5/2}}{2 \cdot 12^{3/4} (1 - \nu^2) \rho^{1/2}} J_i + R_i, \quad J_i = \int_0^{\infty} (u^2 + v'^2) ds.$$

Для внешней полуокрестности ребра будет

$$U_e^r = \frac{E\delta^{5/2}a^{5/2}}{2 \cdot 12^{3/4} (1 - \nu^2) \rho^{1/2}} J_e + R_e, \quad J_e = \int_0^\tau (u^2 + v^2) ds.$$

Теперь по поводу граничных условий при $s=0$. Как указано выше, близость края нарушает симметрию задачи по полуокрестностям. В связи с этим, сохраняя условие для v ($v(0) = -1$), примем $u(0) = \epsilon$ для внутренней полуокрестности и $u(0) = -\epsilon$ для внешней. Минимизируя функционал

$$J = \frac{J_e + J_i}{2},$$

будем варьировать не только функции u , v , но также и параметр ϵ , задающий краевое условие для функции u при $s=0$. Граничные значения при $s=\infty$ для внутренней полуокрестности и при $s=\tau$ для внешней полуокрестности естественно будем считать нулевыми.

Для решения задачи о минимуме функционала J воспользуемся вторым методом, изложенным в § 3. Пусть σ — значение параметра s , отвечающее первому нулю функции v ($v(\sigma) = 0$). По соображениям, изложенным в § 3, производную $v'(s)$ на интервале $(0, \sigma)$ можно считать постоянной для обеих полуокрестностей. В этом предположении для функции $v(s)$ при $s \leq \sigma$ получается выражение

$$v(s) = \frac{s}{\sigma} - 1.$$

После этого определяем функцию $u(s)$ на отрезке $(0, \sigma)$, используя связь

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0. \quad (*)$$

Принимая во внимание краевые условия при $s=0$, для внутренней полуокрестности будем иметь

$$u(s) = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3} + \epsilon, \quad 0 \leq s \leq \sigma.$$

Для тех же значений s во внешней полуокрестности имеем

$$u(s) = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3} - \epsilon.$$

Далее определяем функции $u(s)$ и $v(s)$ на полуоси (σ, ∞) во внутренней полуокрестности, применяя соображения, изложенные в § 3. Получаются

$$u = - \left(\frac{\sigma}{3} + \varepsilon \right) \sqrt{2} (\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}),$$

$$v' = - i \left(\frac{\sigma}{3} + \varepsilon \right) \sqrt{2} (-\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}).$$

Наконец, определим функции u , v во внешней полуокрестности на отрезке (σ, τ) . Так же как во внутренней полуокрестности при $s > \sigma$, во внешней полуокрестности при $\sigma < s < \tau$ можно упростить связь (*) между варьируемыми функциями u , v , отбросив член $v^2/2$. При этом определение функций u и $v = u'$ на отрезке (σ, τ) сводится к вариационной задаче для функционала

$$J = \int_{\sigma}^{\tau} (u^2 + u'^2) ds$$

при краевых условиях для функции u :

$$u(\tau) = u'(\tau) = 0, \quad u(\sigma) = \frac{\sigma}{3} - \varepsilon, \quad u'(\sigma) = 0.$$

Решение вариационной задачи для функционала J' не составляет труда. Полагая $\tau - \sigma = \vartheta$ и принимая край оболочки за начало отсчета дуг s , будем иметь

$$J = \int_0^{\vartheta} (u^2 + u'^2) ds.$$

Краевые условия для функции $u(s)$ будут

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(\vartheta) = \frac{\sigma}{3} - \varepsilon, \quad u'(\vartheta) = 0.$$

Функция $u(s)$, реализующая минимум функционала J' , удовлетворяет уравнению

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$u(s) = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s} + c_3 e^{\omega_3 s} + c_4 e^{\omega_4 s},$$

где ω_i — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0,$$

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_4 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

Опуская соответствующие выкладки, приведем значения постоянных c_i , при которых удовлетворяются нулевые краевые условия — $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u'(\vartheta) = 0$:

$$\begin{aligned} c_1 &= (\omega_1 + \omega_2)e^{\vartheta\omega_1} - \omega_1 e^{\vartheta\omega_3} - \omega_2 e^{\vartheta\omega_3}, \\ c_2 &= (\omega_1 + \omega_3)e^{\vartheta\omega_3} - \omega_2 e^{\vartheta\omega_1} - \omega_1 e^{\vartheta\omega_1}, \\ c_3 &= -(\omega_3 + \omega_4)e^{\vartheta\omega_2} + \omega_3 e^{\vartheta\omega_4} + \omega_4 e^{\vartheta\omega_1}, \\ c_4 &= -(\omega_3 + \omega_4)e^{\vartheta\omega_1} + \omega_4 e^{\vartheta\omega_3} + \omega_3 e^{\vartheta\omega_2}. \end{aligned}$$

Для решения $u_0(s)$ с такими значениями постоянных c_i имеем

$$u_0(\vartheta) = 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{\cos(\vartheta\sqrt{2}) + \operatorname{ch}(\vartheta\sqrt{2})}{2} \right).$$

Так как функция $u(s)$, минимизирующая функционал J' , отличается от $u_0(s)$ только множителем $\left(\frac{\sigma}{3} - \varepsilon\right)/u_0(\vartheta)$, то

$$\min J = \frac{\left(\frac{\sigma}{3} - \varepsilon\right)^2}{u_0^3(\vartheta)} J'(u_0),$$

$$\begin{aligned} J'(u_0) &= \int_0^\vartheta (u_0^3 + u_0'^2) ds = \\ &= 4\sqrt{2} \{ \sin(2\vartheta\sqrt{2}) + \operatorname{sh}(2\vartheta\sqrt{2}) - 4[\operatorname{sh}(\vartheta\sqrt{2}) + \sin(\vartheta\sqrt{2})] + \\ &\quad + 2(\sin(\vartheta\sqrt{2}) \operatorname{ch}(\vartheta\sqrt{2}) + \operatorname{sh}(\vartheta\sqrt{2}) \cos(\vartheta\sqrt{2})) \}. \end{aligned}$$

Ввиду того что энергия деформации определяется при условии известной близости ребра к краю оболочки, значение τ не слишком велико, тем более невелико ϑ ($\vartheta < \tau$). Поэтому естественно разложить $J'(u_0)$ по степеням ϑ . Получим

$$J'(u_0) = \frac{32}{3} \vartheta^5 + O(\vartheta^9).$$

Соответственно разложим по степеням ϑ и $u_0(\vartheta)$:

$$u_0(\vartheta) = \frac{2}{3} \sqrt{2} \vartheta^4 + O(\vartheta^8).$$

Подставляя эти значения в выражение для $\min J$ и вспоминая, что $\vartheta = \tau - \sigma$, получим

$$J = \frac{12}{(\tau - \sigma)^3} \left(\frac{\sigma}{3} - \varepsilon \right)^2$$

Теперь выражение для функционала

$$J = \frac{1}{2} (J_i + J_e)$$

становится известной функцией параметров τ , σ и ε . Именно,

$$J = \left(\frac{\sigma}{3} + \varepsilon \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sigma} + \\ + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3 + \varepsilon^2 \sigma + \\ + \frac{6}{(\tau - \sigma)^3} \left(\frac{\sigma}{3} - \varepsilon \right)^2.$$

Минимизируя J по параметру ε , получим

$$J(\tau, \sigma) = \frac{\sigma^2}{9\sqrt{2}} + \frac{2\sigma^2}{3(\tau - \sigma)^3} + \\ + \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3 + \\ + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma - \frac{4\sigma}{(\tau - \sigma)^3} \right)^2}{4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{6}{(\tau - \sigma)^3} + \sigma \right)}.$$

Минимум $J(\tau, \sigma)$ по параметру $\sigma (0 < \sigma < \tau)$ в замкнутом виде не получается. Численное решение приводит к результату, который представлен на рис. 7. Здесь τ — безразмерное расстояние ребра от края, а

$$c(\tau) = \frac{J_0(\tau)}{12^{3/4} (1 - \nu^2)}, \quad J_0(\tau) = \min_{(\sigma)} J(\tau, \sigma).$$

Итак, энергия деформации на единицу длины ребра вблизи закрепленного края оболочки определяется по формуле

$$U = c(\tau) E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2} + D \alpha (k_e + k_i - 2k - 2\nu k_7).$$

Значения коэффициента $c(\tau)$ даны на графике (рис. 7).

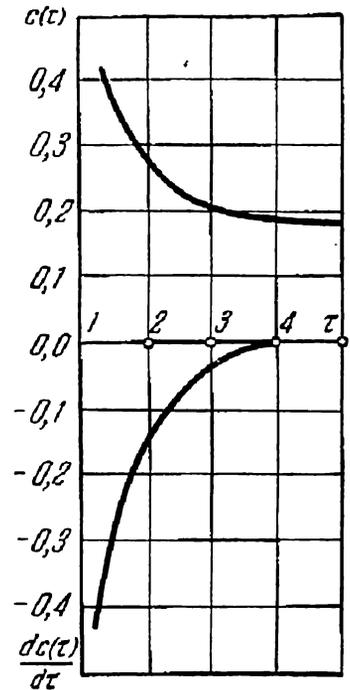


Рис. 7.

Напомним, что истинное расстояние l ребра от края оболочки связано с безразмерным расстоянием τ соотношением

$$l = \rho \varepsilon \tau,$$

где ρ — радиус кривизны ребра, а

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2 a^2}.$$

Таким образом,

$$l = \frac{1}{12^{1/4}} \sqrt{\frac{\rho \delta}{a}} \tau.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Вариационный принцип А мы применим прежде всего для исследования закритических упругих состояний строго выпуклых оболочек. Так называются оболочки, у которых нормальная кривизна срединной поверхности строго положительна по любому направлению. Оказывается, изометрическое преобразование срединной поверхности такой оболочки, жестко закрепленной по краю, получается довольно просто, именно зеркальным отражением произвольного сегмента поверхности в отсекающей его плоскости или последовательным выполнением таких отражений. Благодаря этому применение вариационного принципа А к исследованию строго выпуклых оболочек, закрепленных по краю, достаточно просто. Представляется возможным получить решение основных задач в замкнутом виде с соответствующими формулами для величин, характеризующих закритическую деформацию (максимальные прогибы, максимальные напряжения и т. п.).

Мы рассмотрим сосредоточенное нагружение силой и моментом, нагружение равномерным давлением и комбинированное нагружение и приведем некоторые данные экспериментального исследования этих задач.

Реальные оболочки, то есть оболочки, обладающие ограниченной упругостью, в закритическом состоянии, как правило, испытывают упруго-пластические деформации. В связи с этим вопрос о закритических деформациях ограниченно упругих оболочек требует дополнительного исследования. Такое качественное исследование с оценкой некоторых количественных характеристик деформации будет дано тоже в этой главе.

§ 1. Закритическая деформация и геометрические изгибания.

Упругие деформации оболочки сопровождаются малыми изменениями метрики ее срединной поверхности. Поэтому, если такая деформация оболочки приводит к значительным

изменениям ее внешней формы, то она (форма) определяется в основном геометрией ее исходного состояния и близка к изометрическому преобразованию. В связи с этим мы напомним некоторые геометрические факты, относящиеся к изгибанию поверхностей.

Пусть F — регулярная (по крайней мере дважды дифференцируемая) поверхность. Это значит, что на поверхности может быть введена криволинейная координатная сеть u, v так, что вектор-функция $r(u, v)$, задающая поверхность в этих координатах, является регулярной (по крайней мере дважды дифференцируемой) функцией. Линейным элементом поверхности, отвечающим данной параметризации u, v , называется дифференциальная квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2.$$

Поверхности, у которых при соответствующей параметризации u, v линейные элементы одинаковы, называются *изометричными*. Геометрически это означает, что существует соответствие точек этих поверхностей, при котором любые две соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Указанное геометрическое свойство может быть принято за определение понятия изометрии. В таком виде оно имеет смысл и для нерегулярных поверхностей.

Если среди поверхностей данного класса каждая поверхность, изометричная F , равна F , то поверхность F называется *однозначно определенной* в этом классе. Например, любая замкнутая выпуклая поверхность (даже без предположения о регулярности) является однозначно определенной в классе выпуклых поверхностей [9].

Указание класса рассматриваемых поверхностей существенно. Одна и та же поверхность может быть однозначно определенной в одном классе поверхностей и в то же время не быть однозначно определенной в другом, более широком классе. Так, замкнутая выпуклая поверхность не является однозначно определенной в классе кусочно-выпуклых поверхностей.

Действительно, пусть F — замкнутая выпуклая поверхность. Проведем плоскость α , пересекающую поверхность F , и отразим одну из ее частей, на которые она разбивается

плоскостью α , зеркально в этой плоскости (рис. 8). Замкнутая поверхность F^* , составленная из части S_2 исходной поверхности и S_1^* — зеркального отражения S_1 в плоскости α , изометрична поверхности F . Изометрическое соответствие состоит в сопоставлении каждой точке P поверхности F , принадлежащей S_2 , совпадающей с ней точки поверхности F^* , а точке P , принадлежащей S_1 , — точки P^* , являющейся зеркальным изображением P в плоскости α . Очевидно, такое отображение F на F^* является изометрическим. Но поверхности F и F^* заведомо не равны, ибо не существует такого движения или движения и зеркального отражения для всей поверхности F (а не отдельных ее частей), которое совмещало бы ее с поверхностью F^* . Условимся называть рассмотренное изометрическое преобразование поверхности F в F^* *зеркальным выпучиванием*.

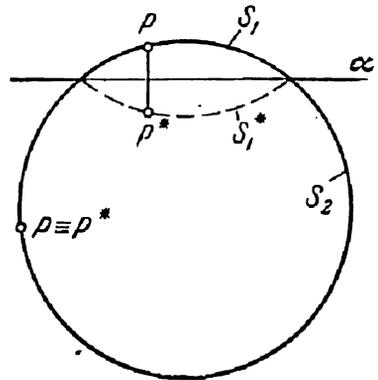


Рис. 8.

Если F — данная поверхность и F' — поверхность, изометричная F , то говорят также, что F' получена *геометрическим изгибанием* (или просто *изгибанием*)

из F . Иногда под изгибанием понимают непрерывную деформацию поверхности F в F' с сохранением изометрии в каждый момент деформации. Мы будем употреблять слово изгибание как в том, так и в другом смысле, уточняя его в тех случаях, когда это может привести к недоразумениям. Заметим, что в рассмотренном примере зеркального выпучивания выпуклой поверхности F поверхность F^* может быть получена непрерывным изгибанием из F . Для этого достаточно взять плоскость α , сначала не пересекающую поверхность, и затем надвигать ее на поверхность, выполняя в каждом положении указанное построение с зеркальным отражением отсекаемой части.

В связи с предстоящими приложениями для нас особый интерес представляют изгибания строго выпуклых регулярных поверхностей с краем при условии неподвижности точек края и касательных плоскостей поверхности в этих точках. Для таких поверхностей мы прежде всего установим их

однозначную определенность в классе дважды дифференцируемых поверхностей.

Пусть F — дважды дифференцируемая строго выпуклая поверхность с краем γ . Нетрудно дополнить ее до некоторой замкнутой выпуклой поверхности Φ , например, взяв выпуклую оболочку поверхности F . Если бы поверхность F при указанном закреплении края γ допускала нетривиальное изометрическое преобразование в классе регулярных поверхностей, то замкнутая поверхность Φ , очевидно, допускала бы изометрическое преобразование в классе выпуклых поверхностей. Но это невозможно в силу теоремы об однозначной определенности для таких поверхностей. Утверждение доказано.

Как указано выше, поверхность F , будучи неизгибаемой в одном классе поверхностей, может быть изгибаема в более широком классе. В частности, регулярная, закрепленная по краю строго выпуклая поверхность неизгибаема в классе регулярных поверхностей, но изгибаема в классе кусочно-регулярных поверхностей. В этом нас убеждает пример зеркального выпучивания. Здесь изометрическое преобразование связано с нарушением регулярности (образованием ребра) вдоль некоторой кривой, ограничивающей выпуклую область на поверхности. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос. Каково наиболее общее изометрическое преобразование регулярной, закрепленной по краю, строго выпуклой поверхности в классе кусочно-регулярных поверхностей, если нарушение регулярности разрешается лишь вдоль заданной кривой γ , ограничивающей выпуклую область G на поверхности F ?

Пусть G' — часть поверхности F , расположенная вне области G и примыкающая к краю. Прежде всего, мы утверждаем, что при любом изометрическом преобразовании поверхности F с нарушением регулярности только вдоль кривой γ поверхность G' не изменяется, то есть точки ее остаются неподвижными. Это вытекает из единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, к рассмотрению которого сводится задача о построении поверхности, изометричной данной. Это уравнение Монжа — Ампера эллиптического типа. Закрепление края поверхности дает начальные условия для указанной задачи Коши. Неизменяемость области G' влечет за собой неизменяемость ее края γ .

Таким образом, при изометрическом преобразовании поверхности F деформируется только часть G , причем γ — край области G — остается неподвижным. Пусть при изометрическом преобразовании F в \bar{F} ее часть G переходит в \bar{G} .

Если поверхность \bar{G} обращена выпуклостью в ту же сторону, что и G , то \bar{F} будет выпуклой поверхностью. Нетрудно заключить, что в этом случае она должна совпадать с F . Для этого достаточно воспользоваться рассуждением, с помощью которого установлена однозначная определенность F в классе регулярных поверхностей. Итак, если поверхность F допускает нетривиальное изометрическое преобразование, то надо считать, что \bar{G}

обращена выпуклостью в другую сторону. При этом поверхности G и \bar{G} , имея общий край γ , составляют замкнутую выпуклую поверхность (рис. 9). Обозначим ее Φ . Поверхность Φ допускает изометрическое отображение на себя. Это отображение состоит в сопоставлении каждой точке P области G соответствующей по изометрии точки области \bar{G} и каждой точке P области \bar{G} соответствующей по изометрии точки области G .

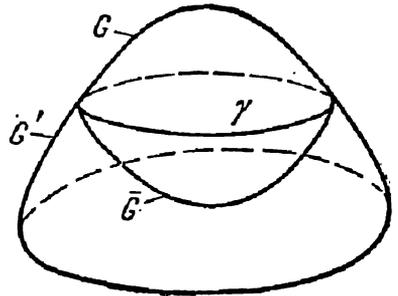


Рис. 9.

Ввиду однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей построенное изометрическое отображение поверхности Φ на себя должно сводиться к движению или к движению и зеркальному отражению. Так как точки кривой γ при изометрическом отображении остаются неподвижными, то дело сводится к зеркальному отражению поверхности Φ относительно некоторой плоскости. Кривая γ , будучи неподвижной, должна лежать в этой плоскости. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Изометрическое преобразование строго выпуклой регулярной поверхности, закрепленной по краю, в классе кусочно-регулярных поверхностей с нарушением регулярности только вдоль кривой γ , ограничивающей выпуклую область G , возможно только тогда, когда кривая γ плоская, и в этом случае оно сводится к зеркальному отражению области G в плоскости кривой γ .

§ 2. Определение основных величин в случае зеркального выпучивания малых областей

Применение принципа А при изучении закритических упругих состояний оболочки предполагает определение ряда величин изометрического преобразования срединной поверхности. Имея в виду ближайшие приложения, мы определим такие величины в случае зеркального выпучивания малых областей.

Как известно, форма регулярной строго выпуклой поверхности в достаточно малой окрестности данной точки P хорошо приближается некоторым эллиптическим параболоидом, который называется соприкасающимся. Если принять касательную плоскость в точке P за плоскость xu , а главные направления поверхности в этой точке за направления координатных осей, то уравнение соприкасающегося параболоида будет иметь вид

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности в точке P . Отсюда следует, что область зеркального выпучивания оболочки с центром выпучивания P при малой высоте выпучивания $2h$ (прогиб в точке P) задается неравенством

$$\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \leq h,$$

и, следовательно, представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2h}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{k_2}}.$$

В связи с определением энергии упругой деформации при выпучивании нам понадобятся выражения для кривизны кривой, ограничивающей область выпучивания, и для нормальной кривизны поверхности. Найдем выражения для этих величин.

Граница выпучивания, как эллипс с полуосями a , b , допускает параметрическое задание

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Пользуясь формулой для кривизны кривой, находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}},$$

где ρ — радиус кривизны.

Определим нормальную кривизну поверхности в направлении границы выпучивания. Ввиду того, что область выпучивания мала, можно считать, что главные кривизны на границе выпучивания близки к k_1 и k_2 — главным кривизнам в P (центре выпучивания), а главные направления близки к главным направлениям в P .

По формуле Эйлера нормальная кривизна в направлении, которое образует угол ϑ с главным направлением, отвечающим кривизне k_1 , равна

$$k_\vartheta = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta.$$

В рассматриваемом случае

$$\cos \vartheta = \frac{-a \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{b \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}.$$

Поэтому нормальная кривизна поверхности в направлении границы выпучивания равна

$$k_n = k_1 \frac{a^2 \sin^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + k_2 \frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

или, замечая, что

$$k_1 = \frac{2h}{a^2}, \quad k_2 = \frac{2h}{b^2},$$

получим

$$k_n = \frac{2h}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Нормальная кривизна в направлении, перпендикулярном границе выпучивания, равна

$$\bar{k}_n = k_1 \sin^2 \vartheta + k_2 \cos^2 \vartheta,$$

или, принимая во внимание выражения для $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$, k_1 и k_2 , получим

$$\bar{k}_n = 2h \frac{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Определим угол α между плоскостью кривой γ , ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности. По формуле Менье

$$\rho k_n = \sin \alpha.$$

Для малых областей выпучивания, и, следовательно, малых α , имеем

$$\alpha = \rho k_n.$$

Подставляя сюда найденные значения ρ и k_n , получим

$$\alpha = \frac{2h}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}.$$

Вычислим теперь U — энергию деформации оболочки. Она у нас состоит из двух частей — U_G и U_γ , где U_G — энергия изгиба по основной поверхности, а U_γ — энергия деформации в окрестности границы γ области выпучивания. Величина U_G определяется по формуле (стр. 44)

$$U_G = \frac{D}{2} \iint (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Здесь Δk_1 и Δk_2 — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы к изометрическому преобразованию,

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, а интегрирование выполняется по площади всей поверхности. В рассматриваемом случае зеркального выпучивания величины Δk_1 и Δk_2 вне области выпучивания G равны нулю, а внутри этой области $\Delta k_1 = 2k_1$, $\Delta k_2 = 2k_2$, где k_1 и k_2 — главные кривизны. Ввиду предположения о малости области выпучивания, k_1 и k_2 можно считать равными их значениям в центре выпучивания P . С учетом величины площади области выпучивания получим

$$U_G = \frac{\pi h}{3\sqrt{k_1 k_2}} \frac{E\delta^3}{(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2).$$

Здесь $2h$ — высота выпучивания (нормальный прогиб в центре выпучивания P), k_1 и k_2 — главные кривизны в P , δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Вычислим теперь энергию деформации на γ —границе выпучивания. Для нее была получена формула (стр. 51)

$$U_{\gamma} = \\ = cE\delta^{5/2} \int_{\gamma} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\gamma} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\gamma} \alpha(-2k - 2\nu k_{\gamma} + k_e + k_i) ds_{\gamma}.$$

Здесь α —угол между плоскостью кривой γ и касательными плоскостями деформированной поверхности, k —нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, перпендикулярном границе выпучивания, k_{γ} —нормальная кривизна в направлении границы, k_e и k_i —нормальные кривизны изометрически преобразованной поверхности соответственно со стороны внутренней и внешней полуокрестности границы выпучивания.

В случае зеркального выпучивания $k_e = k$, $k_i = -k$. Таким образом, второе слагаемое в формуле для U_{γ} можно записать в виде $-\frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_{\gamma} (k + \nu k_{\gamma}) ds_{\gamma}$. Принимая во внима-

ние полученные выше значения для нормальной кривизны k_{γ} , $k = \bar{k}_n$, угла α , и замечая, что $ds_{\gamma} = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$, будем иметь

$$\int_{\gamma} (k + \nu k_{\gamma}) \alpha ds_{\gamma} = \frac{4h^3}{ab} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t + \nu \right) dt = \\ = \frac{4\pi h^3}{ab} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\nu \right).$$

Таким образом, второе слагаемое в выражении для U_{γ} равно

$$-\frac{E\delta^3 \pi h}{3\sqrt{k_1 k_2} (1-\nu^2)} (k_1^3 + k_2^3 + 2\nu k_1 k_2).$$

Оно отличается от выражения U_G только знаком.

Определим максимальные напряжения σ в материале оболочки при выпучивании. Такие напряжения возникают от изгиба на границе выпучивания и определяются по формуле (гл. 2, §. 2)

$$\sigma = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}.$$

Подставляя сюда значения α и ρ , получим

$$\sigma = c'E\delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}.$$

Существенно заметить, что эти напряжения постоянны вдоль границы выпучивания.

Итак, при зеркальном выпучивании малой области строго выпуклой оболочки энергия деформации U определяется по формуле

$$U = \pi c E \delta^{5/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2), \quad c \simeq 0,19.$$

Максимальные, возникающие от изгиба на границе выпучивания напряжения равны

$$\sigma = c' E \delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}, \quad c' \simeq 0,9.$$

§ 3. Закритические деформации оболочек под действием сосредоточенной силы и момента

Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под действием сосредоточенной силы f , нормальной к поверхности оболочки в точке приложения. Если эта сила вызывает значительную деформацию, то определение упругого состояния оболочки сводится к задаче на экстремум функционала $W = U - A$, который определен и рассматривается на изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. Мы будем предполагать, что выпучивание оболочки, вызванное действием силы f , охватывает выпуклую область. В этом случае, как показано в § 1, класс изометрических преобразований, на которых надо рассматривать нашу вариационную задачу, сужается до зеркального выпучивания.

В случае зеркального выпучивания для функционала U в § 2 получено следующее выражение:

$$U = \pi c E \delta^{5/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2).$$

Предполагая, что точка приложения силы f является центром выпучивания, будем иметь для функционала A , представляющего собой работу, производимую силой f при деформации оболочки, формулу $A = 2fh$.

Из условия стационарности $d(U - A) = 0$ функционала W получаем зависимость между величиной действующей силы f и деформацией $(2h)$, которую она вызывает. Имеем

$$dW = 3\pi c E \delta^{5/2} (2h)^{1/2} (k_1 + k_2) dh - 2f dh = 0.$$

Отсюда

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h}.$$

Из этой формулы видно, что при увеличении деформации воспринимаемая оболочкой нагрузка f растет. Это указывает на устойчивость состояний равновесия оболочки под действием сосредоточенной нагрузки.

К выводу об устойчивости состояний равновесия можно прийти и другим путем, рассматривая вторую вариацию функционала W . Имеем

$$d^2 W = 3\pi c E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{2h}} dh^2 > 0.$$

А это значит, что состояние равновесия устойчиво.

Рассмотрим особо случай сферической оболочки. Для сферической оболочки радиуса R имеем $k_1 = k_2 = 1/R$, и формула, устанавливающая зависимость между действующей силой f и прогибом $2h$, который она вызывает, принимает вид

$$f = 3\pi c E \delta^{5/2} \sqrt{2h} \frac{1}{R}.$$

Если радиус круга выпучивания обозначить через ρ и заметить, что $2h \simeq \rho^2/R$, то эту зависимость можно еще записать так

$$f = 3\pi c E \frac{\delta^{5/2}}{R^{3/2}} \rho.$$

Таким образом, зависимость радиуса круга выпучивания от действующей силы f является линейной.

Полученная зависимость прогиба $2h$ от действующей силы f для сферических оболочек была подвергнута экспериментальной проверке*). Установка, на которой проводился соответ-

*) Эти эксперименты, так же как и другие, описанные ниже проведены автором при участии сотрудников: М. М. Пуголовка, Ю. И. Кравецкого, Н. С. Сухленка, Н. И. Котова, В. А. Чистюхина, А. Н. Педоренко. Эксперименты проводились в Физико-техническом институте низких температур АН УССР.

ствующий эксперимент, устроена довольно просто и схематически представлена на рис. 10.

Испытуемый сферический сегмент 1 свободно опирается на жесткое кольцо 2. Действие груза f , состоящего из калиброванных по весу шайб, через вертикальный стержень 3 передается на поверхность сегмента. Чтобы исключить пластические деформации сегмента в непосредственной близости точки приложения сосредоточенной силы, наконечник стержня, контактирующий с поверхностью сегмента, выполнен со сравнительно малой, но большей, чем у сегмента, кривизной. Вертикальные перемещения стержня, то есть прогибы оболочки ($2h$), регистрировались с помощью точного оптического прибора 4, позволяющего измерять эти перемещения с точностью до 10^{-3} мм.

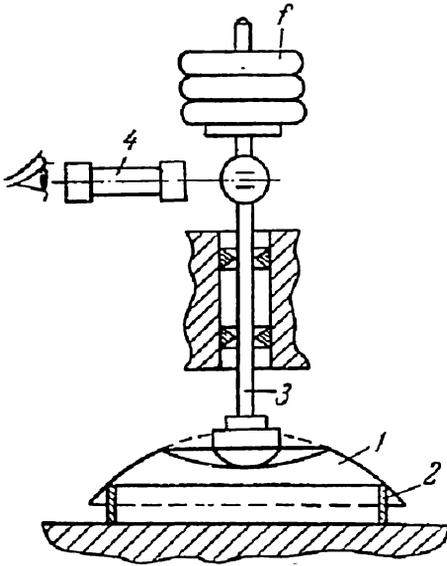


Рис. 10.

Эксперимент проводился на серии медных оболочек радиуса $R = 150$ мм с различной толщиной δ от 0,03 до 0,10 мм. Оболочки получались путем напыления меди в вакууме на стальную подложку сферической формы. Сферичность подложки, а следовательно, и получаемых оболочек, была выдержана с высокой (оптической) точностью. Специальные режимы напыления позволили получить образцы, обладающие высоким пределом упругости. Это существенно для экспериментов с закритическими деформациями, так как напряжения в зоне сильного местного изгиба (на границе выпучивания) при таких деформациях весьма значительны.

На рис. 11 представлены графики теоретической зависимости прогибов оболочки под действием сосредоточенной силы

для сферических оболочек радиуса $R = 150$ мм и различных толщин $\delta = 0,037$, 0,048 и 0,056 мм. Графики построены

$$2h = \frac{R^3}{9\pi^2 c^3 E^2 \delta^5} f^2$$

для сферических оболочек радиуса $R = 150$ мм и различных толщин $\delta = 0,037$, 0,048 и 0,056 мм. Графики построены

с учетом фактического значения модуля упругости E , который определялся путем специального испытания на изгиб плоских образцов, получаемых напылением в сходных условиях.

Отдельные точки на графиках дают экспериментальные значения прогибов $2h$ при различных значениях действующей силы f . Мы видим, что теория и опыт в рассматриваемом вопросе находятся в удовлетворительном соответствии.

Теоретическое и экспериментальное исследование вопроса о деформациях строго выпуклой оболочки под действием сосредоточенной силы мы подытожим следующим выводом.

Прогиб $2h$ строго выпуклой оболочки под действием сосредоточенной силы f , нормальной к поверхности оболочки, определяется соотношением

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h},$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны оболочки в точке приложения силы, δ — толщина оболочки, а постоянная $c \simeq 0,19$. В частности, для сферической оболочки радиуса R

$$f = 3\pi c E \delta^{5/2} \frac{\sqrt{2h}}{R}.$$

Рассмотрим упругое состояние жестко закрепленной по краю строго выпуклой оболочки под действием сосредоточенного момента M , приложенного в некоторой точке P и действующего в плоскости, нормальной к срединной поверхности оболочки. Такое нагружение может иметь место в действительности, например, при следующих обстоятельствах. Представим себе, что некоторая масса Q соединяется

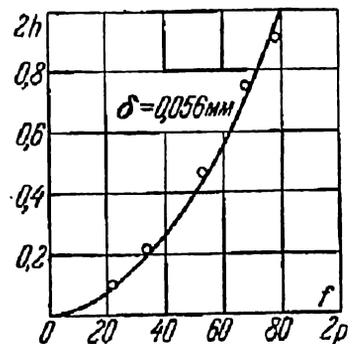
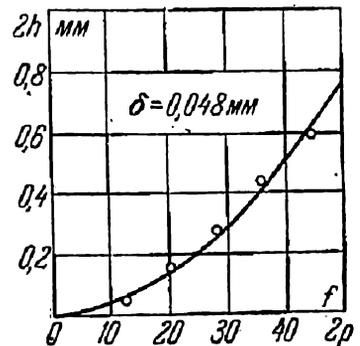
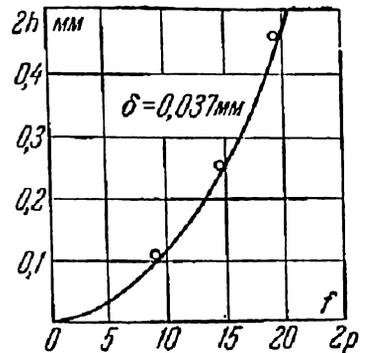


Рис. 11.

с оболочкой, с помощью жесткого стержня. Тогда боковое усилие на груз Q , например сила инерции при неравномерном движении оболочки, и создает момент у основания

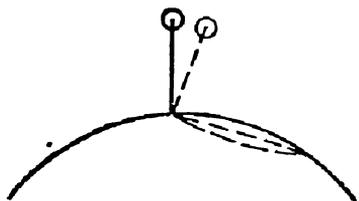


Рис. 12.

стержня. Для простоты исследования будем предполагать, что момент M действует в одной из плоскостей главных нормальных сечений.

Значительную деформацию оболочки под действием момента M мы представляем себе в виде зеркального выпучивания, обозначенного на рис. 12 пунктиром. Установим связь между действующим моментом M и углом α , характеризующим деформацию оболочки.

Как показано выше, упругое выпучивание оболочки уравновешивается силой

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h}, \quad (*)$$

приложенной в центре выпучивания перпендикулярно поверхности оболочки. Отсюда следует, что эта сила создает относительно точки O момент

$$M = fd, \quad (**)$$

где d — плечо силы f .

Прогиб $2h$ в центре выпучивания, плечо d силы f , угол α , характеризующий деформацию, и нормальная кривизна k_1 в плоскости момента M связаны очевидными геометрическими соотношениями

$$k_1 d \simeq \frac{\alpha}{2}, \quad h \simeq \frac{k_1 d^2}{2}.$$

Если к ним присоединить соотношения (*) и (**), то момент M выражается только в зависимости от α . Именно,

$$M = \frac{3}{8} \pi c E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \frac{\alpha^2}{k_1^{3/2}}.$$

Для сферической оболочки радиуса R

$$M = \frac{3}{4} \pi c E \delta^{5/2} \sqrt{R} \alpha^2.$$

§ 4. Закритические деформации строго выпуклой оболочки под внешним давлением

Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под действием равномерного внешнего давления p . Рассмотрим состояния упругого равновесия оболочки, при которых ее форма испытывает закритические деформации. Согласно принципу А определение этих состояний сводится к решению задачи на экстремум для функционала

$$W = U - A$$

на множестве изометрических преобразований исходной поверхности. Если предположить, что деформация сопровождается выпучиванием выпуклой области, то класс изометрических преобразований, на которых рассматривается функционал, сужается до изометрических преобразований, сводящихся к зеркальному выпучиванию (§ 1).

В случае зеркального выпучивания энергия деформации U определяется по формуле

$$U = \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2),$$

где $2h$ — высота выпучивания в центре области, k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности, δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, а постоянная $c \simeq 0,19$. Определим производимую внешним давлением p работу A . Она равна произведению величины давления на изменение (при деформации) объема, ограничиваемого оболочкой, т. е.

$$A = p \Delta V.$$

Найдем ΔV . Приняв центр выпучивания P за начало координат, а касательную плоскость в P за плоскость xy , при соответствующем направлении осей x , y можем задать поверхность оболочки вблизи P уравнением

$$z = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Если обозначить через $S(z)$ площадь области, определяемой неравенством

$$\frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2) \leq z,$$

то интересующий нас объем

$$\Delta V = 2 \int_0^h S(z) dz.$$

Площадь $S(z)$, как площадь эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2z}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2z}{k_2}}$$

равна πab , и, следовательно,

$$S(z) = \pi \frac{2z}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Отсюда после интегрирования по z получаем объем

$$\Delta V = \frac{2\pi h^2}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Производимая внешним давлением p работа равна

$$A = \frac{2\pi h^2 p}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Теперь из условия стационарности функционала W в состоянии упругого равновесия оболочки находим зависимость воспринимаемого оболочкой давления p от прогиба $2h$ в центре выпучиваний. Имеем

$$dW = 3\pi cE (2h)^{1/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2) dh - \frac{4\pi h p}{\sqrt{k_1 k_2}} dh = 0,$$

откуда

$$p = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h}}.$$

Из этой формулы видно, что воспринимаемое оболочкой давление p уменьшается при увеличении деформации ($2h$). А это указывает на неустойчивость закритических деформаций под внешним давлением. Заключение о неустойчивости найденных упругих состояний соответствует экспериментальным данным о характере закритических деформаций под внешним давлением. Согласно этим данным, закритические деформации после потери устойчивости оболочки развиваются без увеличения нагрузки и даже при ее уменьшении.

Наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации называется *нижней критической* в отли-

чие от верхней критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости основной формы. Рассмотрим вопрос о величине нижней критической нагрузки для строго выпуклых оболочек, находящихся под внешним давлением. Ввиду того, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации, нижняя критическая нагрузка соответствует наибольшей геометрически допустимой деформации. Если эту деформацию обозначить $2h_i$, то нижняя критическая нагрузка p_i будет определяться по формуле

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

Рассмотрим в качестве примера строго выпуклую оболочку вращения, подкрепленную жесткими элементами, идущими вдоль параллелей и меридианов поверхности (рис. 13). Пусть F — отсек оболочки, ограниченный подкрепляющими элементами, $2a$ и $2b$ — размеры отсека по параллели и меридиану соответственно. Так как размеры области выпучивания по главным направлениям при высоте выпучивания $2h$ равны

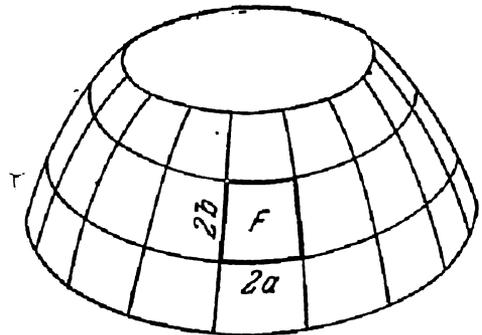


Рис. 13.

$$\sqrt{\frac{2h}{k_1}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{2h}{k_2}},$$

то максимальная деформация $2h_i$ отсека F определяется меньшей из двух величин

$$k_1 a^2 \quad \text{и} \quad k_2 b^2,$$

где k_1 — нормальная кривизна поверхности в направлении параллели, а k_2 — нормальная кривизна по меридиану, т. е.

$$2h_i = \min \{ k_1 a^2, k_2 b^2 \}.$$

Подставляя величину $2h_i$ в формулу для p , получим нижнее критическое давление

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

В связи с экспериментальной проверкой полученного результата о величине нижней критической нагрузки рас-

смотрим закритические деформации жестко закрепленного по краю сферического сегмента. Если радиус кривизны сегмента равен R , то воспринимаемое им давление p при выпучивании на высоту $2h$ определяется по формуле

$$p = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

При высоте сегмента h_0 для максимальной геометрически допустимой деформации $2h$ имеем

$$2h = 2h_0.$$

Поэтому нижнее критическое давление для сферического сегмента равно

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h_0}}$$

Если в эту формулу ввести вместо высоты h_0 радиус основания сегмента

$$r \simeq \sqrt{2h_0 R},$$

то она принимает вид

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}.$$

Выясним теперь область применимости полученных результатов к реальным оболочкам, обладающим ограниченной упругостью. Наше основное предположение при рассмотрении закритических деформаций состояло в том, что изменение формы оболочки при таких деформациях весьма значительно. Практически это значит, что размеры области выпучивания имеют порядок размеров всей оболочки. Ввиду ограниченной упругости материала оболочки, ее упругие деформации естественным образом ограничены, а это ограничивает размеры оболочек, к которым полученные результаты применимы. Для того чтобы придать этим ограничениям конкретную форму, рассмотрим для примера сферическую оболочку в форме сегмента.

Максимальные напряжения в материале оболочки (на границе выпучивания) при деформации $2h$ равны

$$\sigma = c'E (2h)^{1/2} \delta^{1/2} \frac{1}{R}.$$

Если временное сопротивление материала оболочки обозначить σ_b , то область ее упругих деформаций ограничивается условием

$$c'E(2h)^{1/2}\delta^{1/2} \frac{1}{R} < \sigma_b,$$

или, вводя вместо $2h$ радиус круга выпучивания ρ по формуле

$$2h = \frac{\rho^2}{R},$$

получим

$$c'E \frac{\rho}{R} \sqrt{\frac{\delta}{R}} < \sigma_b.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\rho}{R} < \frac{\sigma_b}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Для того чтобы деформацию считать значительной, надо, чтобы ρ имело порядок радиуса основания сегмента r . Таким образом, наши рассуждения относятся к таким сферическим оболочкам, у которых величины

$$\frac{r}{R} \text{ и } \frac{\sigma_b}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}$$

имеют один порядок. При обычных соотношениях между величинами σ_b , E , δ и R это означает, что оболочки должны быть очень пологими.

Еще более жестким условием ограничивается применение формулы для нижней критической нагрузки. Именно, так как нижняя критическая нагрузка соответствует максимальной геометрически допустимой деформации, то соответствующее условие для сферических оболочек сводится к тому, что

$$\frac{r}{R} \leq \frac{\sigma_b}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Нижняя критическая нагрузка для пологих сферических сегментов была подвергнута экспериментальному исследованию. Соответствующий эксперимент состоял в следующем.

Внутри массивного цилиндрического сосуда 1 (рис. 14), закрытого сверху испытуемой сферической оболочкой 2, с помощью микрометрического винта подавался поршень 3. При

этом, в жидкости, заполняющей сосуд, нарастало давление, которое регистрировалось определенным устройством. Достигнув критического значения, давление начинало уменьшаться и снижалось до некоторого минимума, после чего снова увеличивалось. Максимальное давление отвечает моменту потери устойчивости оболочки и является верхним критическим давлением. А минимум давления соответствует нижней критической нагрузке, как мы ее определили.

Отметим некоторые особенности конструкции экспериментальной установки и работы на ней. Прежде всего мы стремились избежать резкого «хлопка», которым обычно сопровождается потеря устойчивости оболочки в экспериментах такого рода.

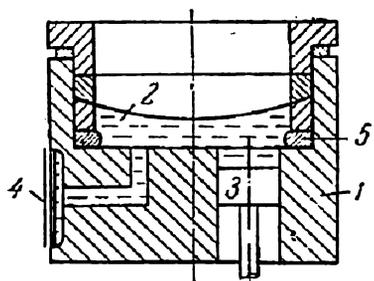


Рис. 14.

В связи с этим все упругие элементы конструкции были сделаны «максимально жесткими». Именно поэтому в качестве среды, заполняющей сосуд и сообщающей давление на оболочку, была взята жидкость, а сам сосуд выполнен достаточно массивным, с толстыми стенками. Давление регистрировалось при помощи весьма чувствительного тензометрического датчика 4, укрепленного на поверхности сосуда. В результате всех указанных мер давление после «хлопка» не снижалось до минимума и достигало этого минимума только при дальнейшем продвижении поршня внутрь сосуда. Это важно для оболочек с ограниченной упругостью, которые после энергичного «хлопка» могут показать даже отрицательное нижнее критическое давление.

Испытуемый сегмент был зажат между двух стальных колец, из которых нижнее опиралось на резиновую прокладку 5, а верхнее прижималось флянцем. Условия защемления сегмента по краю, близкие к идеальным, обеспечивались притиркой колец по соответствующим сферическим поверхностям и равномерностью давления колец благодаря эластичности прокладки 5.

Четыре тензометрических датчика 4, расположенные на боковой поверхности сосуда, — два по окружности, а два другие в осевом направлении — были соединены обычным способом в мостиковую схему, которая подключалась к источнику

питания и гальванометру. Показания гальванометра предварительно тарировались.

Испытанию подвергались медные сферические сегменты, полученные напылением в вакууме. Радиус кривизны сегментов $R = 80$ мм, а толщина δ изменялась в пределах от 0,03 до 0,09 мм. Внутренний диаметр колец $2r$, зажимающих испытуемые сегменты, равнялся $2r = 16$ мм.

На рис. 15а пунктирной линией изображена зависимость нижнего критического давления p_i , даваемого формулой

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}},$$

от толщины оболочки δ . Модуль упругости E принят равным $1,1 \cdot 10^6$ кг/см², постоянная $c = 0,19$, а R и r имеют указанные выше значения. Отдельные точки, отмеченные крестиками, дают значения нижнего критического давления, полученные в эксперименте.

Мы видим, что для всех значений δ теоретическое значение p_i меньше экспериментального. И это понятно. Действительно, при выводе формулы для p_i мы предполагали, что коэффициент c в выражении энергии деформации остается постоянным. В действительности, как показано в гл. 2, § 4, он увеличивается при сближении ребра границы выпучивания

с заземленным краем оболочки. Отсюда очевидным образом следует, что найденное значение p_i заведомо меньше истинного. Найдем уточненную формулу для p_i , учитывая зависимость коэффициента c от расстояния до края оболочки.

Как показано выше, энергия деформации и производимая внешним давлением работа при выпучивании сферического сегмента определяются по формулам

$$U = 2\pi c(\tau) E \left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2} \rho^3, \quad A = \frac{\pi \rho^4}{2R} \bar{p} E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

Пусть r — радиус основания сегмента и h — его высота. Тогда расстояние ребра на границе выпучивания от края

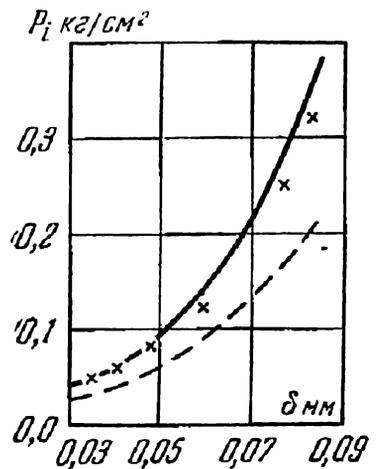


Рис. 15а.

оболочки равно (гл. 2, § 4)

$$l = r - \rho = \frac{1}{12^{1/4}} \sqrt{\frac{\rho \delta}{\alpha}} \tau,$$

где α — угол между касательной плоскостью зеркально отражаемого сегмента (вдоль его края) и плоскостью основания.

Замечая, что $\rho/\alpha = R$, будем иметь

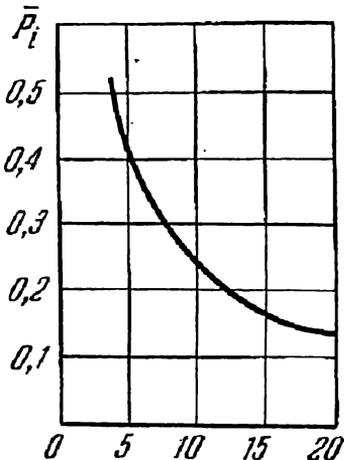


Рис. 156.

$$\rho = r - \frac{\tau}{12^{1/4}} \sqrt{R \delta},$$

или, вводя высоту сегмента $h \simeq \simeq r^2/2R$,

$$\rho = r \left(1 - 0,38\tau \sqrt{\frac{\delta}{h}} \right).$$

Таким образом, радиус круга выпучивания ρ представлен в зависимости от безразмерного расстояния τ ребра от края оболочки.

Далее обычным способом из условия стационарности функционала $U - A$

$$\frac{d}{d\tau} (U - A) = 0$$

находим воспринимаемое оболочкой давление \bar{p} в зависимости от параметра τ и нижнее критическое значение, равное

$$\bar{p}_i = \frac{3c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\delta}{h}} \min_{(\tau)} \left(\frac{c(\tau)}{1 - 0,38\tau \sqrt{\frac{\delta}{h}}} - \frac{c'(\tau)}{1,14 \sqrt{\frac{\delta}{h}}} \right).$$

На рис. 156 зависимость $\bar{p}_i \left(\frac{h}{\delta} \right)$ представлена графически.

На рис. 15а сплошная кривая дает величину критического давления p_i , определяемого по уточненной формуле

$$p_i = \bar{p}_i \left(\frac{h}{\delta} \right) E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2$$

для сферических сегментов радиуса $R = 80$ мм, радиуса основания $r = 8$ мм в зависимости от толщины оболочки δ .

Модуль упругости E принят равным $0,9 \cdot 10^6$ кг/см², что составляет среднее значение для образцов, получаемых из меди напылением в вакууме. Мы видим, что теоретическое значение величины p_i , определяемое по уточненной формуле, близко к значениям, получаемым в эксперименте. В особенности это относится к достаточно тонким образцам, точнее, к образцам с большой подъемистостью (h/δ).

В заключение заметим, что при подъемистости $h/\delta > \sigma$ величину нижнего критического давления можно определять по формуле

$$p = \frac{\frac{3c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\delta}{h}}}{1 - 1,3 \sqrt{\frac{\delta}{h}}}, \quad c \approx 0,19.$$

Эта формула получена из анализа графической зависимости величины $\bar{p}_i/\sqrt{\delta/h}$ от $\sqrt{\delta/h}$ при $h/\delta > \sigma$. Если сферический сегмент характеризовать радиусом кривизны R , толщиной δ и радиусом основания r , то соответствующая формула принимает вид

$$\bar{p}_i = \frac{3c \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}{1 - 1,85 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}.$$

В. И. Бабенко [12], исходя из других соображений при оценке влияния края сегмента на величину нижнего критического давления, получил следующую формулу:

$$\bar{p}_i = \frac{3c \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}{1 - 3 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}.$$

Проведенное исследование закритических деформаций строго выпуклых оболочек под внешним давлением можно резюмировать следующим образом:

1. При закритической деформации пологой строго выпуклой оболочки, жестко закрепленной по краю, воспринимаемая ею нагрузка p (внешнее давление) в зависимости от прогиба $2h$ в центре выпучивания определяется

по формуле

$$p = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h}}.$$

2. Нижняя критическая нагрузка p_i , то есть наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка, определяется максимальной геометрически допустимой деформацией $2h_i$ по формуле

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

Определяемое этой формулой значение p_i меньше истинного, но близко к нему*). Для сферических сегментов имеет место уточненная формула нижней критической нагрузки. Именно,

$$p_i = \frac{3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\delta R}}{r - 1,85 \sqrt{\delta R}}.$$

3. Все перечисленные результаты применимы для реальных оболочек, обладающих ограниченной упругостью, только при их достаточной пологости. В частности, применение формулы для нижнего критического давления в случае сферических сегментов предполагает выполненным условие

$$\frac{r}{R} < \frac{\sigma_g}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Рассматривая вопрос о нижней критической нагрузке для общих строго выпуклых оболочек, мы предполагали их достаточную пологость. Условие пологости состояло в том, что по области выпучивания касательные плоскости срединной поверхности оболочки образовывали малые углы, а нормальные кривизны мало отличались от некоторых средних значений. Это позволило решить задачу в замкнутом виде для оболочек произвольной формы. Однако в каждом конкретном случае

*) Разумеется, когда деформация $2h$ приближается к геометрически допустимой $2h_i$, начинает сказываться закрепление края. Так что полученная формула, строго говоря, дает оценку снизу для нижней критической нагрузки. Даваемое формулой значение нижней критической нагрузки тем точнее, чем меньше отношение $\delta/2h_i$.

применяемый нами метод позволяет решать задачу и при более общих предположениях, когда, в частности, второе условие, относящееся к нормальным кривизнам, может и не выполняться. В качестве примера найдем внешнее нижнее критическое давление для эллипсоидального днища цилиндрического резервуара (рис. 16).

Мы будем предполагать, что закритическая деформация днища обладает осевой симметрией, как и первоначальная форма. Чтобы упростить вывод, мы будем считать оболочку достаточно тонкой. В этом случае в выражении энергии деформации можно отбросить слагаемое порядка $E\delta^3$ и, таким образом, принять

$$U = 2\pi c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{1/2},$$

где δ — толщина днища, ρ — радиус области выпучивания, α — угол между плоскостью кривой, ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности, E — модуль упругости, а постоянная $c \simeq 0,19$.

Производимая внешним давлением p работа при выпучивании днища равна

$$A = pV,$$

где V — изменение объема резервуара при деформации днища.

Будем характеризовать выпучивание днища параметром ρ . Тогда условие упругого равновесия днища при выпучивании будет

$$\frac{d}{d\rho} (U - A) = 0.$$

Предполагая достаточную пологость области выпучивания, будем иметь

$$\frac{d\alpha}{d\rho} \simeq k,$$

где k — кривизна днища в исходной форме по радиальному сечению. Отсюда

$$\frac{dU}{d\rho} = \pi c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2} \left(5 \frac{\rho}{\alpha} k + 1 \right).$$

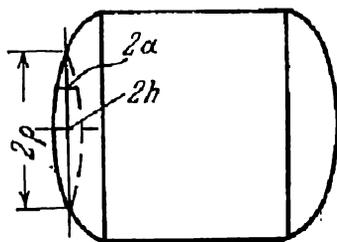


Рис. 16.

Обозначим через h высоту зеркально отражаемого сегмента. Тогда

$$\frac{dA}{d\rho} = p \frac{dV}{dh} \frac{dh}{d\rho}, \quad \frac{dV}{dh} = 2\pi\rho^2, \quad \frac{dh}{d\rho} \simeq \alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{dA}{d\rho} = 2\pi\rho^2\alpha.$$

Подставляя полученные значения $dU/d\rho$ и $dA/d\rho$ в уравнение равновесия, получаем связь между воспринимаемым давлением p и деформацией днища:

$$p = \frac{1}{2} cE \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{5/2} \alpha^{3/2} \left(5 \frac{\rho}{\alpha} k + 1 \right).$$

Введем вместо ρ параметр $\xi = \rho/R$, где R — радиус основания днища. В зависимости от этого параметра величины α и k выражаются по формулам

$$\alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda \xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}, \quad k \simeq \frac{\lambda}{R} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{3/2}},$$

где λ — отношение высоты днища к радиусу основания, то есть отношение малой полуоси эллипсоида к большой полуоси. Подставляя найденные значения α и k в зависимости от ξ в формулу для p , получим

$$p = \frac{c}{2} E \left(\frac{\delta}{R} \right)^{5/2} \lambda^{3/2} \theta(\xi), \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{3/4}} \left(\frac{5}{1 - \xi^2} + 1 \right).$$

Нижнее критическое давление p_i отвечает наименьшему значению θ . Оно получается при $\xi \simeq 0,5$ и равно $\simeq 18,8$. Отсюда, принимая во внимание значение постоянной $c \simeq 0,19$, получаем следующую формулу для нижнего критического давления

$$p_i = 1,8E \left(\frac{\delta}{R} \right)^{5/2} \lambda^{3/2}.$$

В ходе нашего вывода мы заранее предполагали, что α мало. Покажем, что это предположение выполняется, если достаточно мало λ . Действительно

$$\alpha \simeq \frac{\lambda \xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}.$$

При $\xi = 0,5$

$$\alpha \simeq 0,5\lambda,$$

и, следовательно, α мало вместе с λ . Можно считать, что условие малости α выполнено, если $\lambda < 0,5$.

З а м е ч а н и е. Чтобы упростить исследование вопроса, мы приняли для энергии деформации упрощенное выражение. Как было указано, это можно сделать при данной форме днаща (данном λ), если оболочка достаточно тонкая. Если же это не оговаривать, то следует пользоваться общим выражением энергии деформации, которое предписывается вариационным принципом А. При данной толщине днаща δ и достаточно малом λ это может существенно повлиять на результат.

§ 5. Упруго-пластические закритические деформации

Закритическая деформация, будучи связана со значительными изменениями внешней формы оболочки, приводит к очень большим напряжениям в материале оболочки, в особенности на границе областей выпучивания. Поэтому реальные оболочки, обладающие ограниченной упругостью, как правило, испытывают при этом упруго-пластическую деформацию. В связи с этим представляет безусловный интерес исследование вопроса о том, как протекает закритическая деформация оболочек с ограниченной упругостью.

Допустим, закритическая деформация оболочки настолько значительна, что напряжения от изгиба на границе выпучивания вызывают пластические деформации. Вычислим энергию упруго-пластической деформации элемента оболочки на границе выпучивания.

Мы будем предполагать, что материал оболочки имеет классическую диаграмму состояния. Это значит, что относительная деформация (растяжение — сжатие) ϵ и вызывающие ее напряжения σ связаны зависимостью, представленной на рис. 17. Таким образом, при $|\epsilon| \leq \epsilon_e$ деформация является

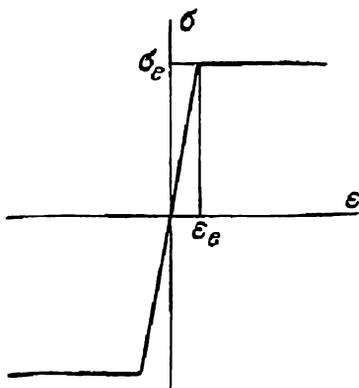


Рис. 17.

упругой, и соответствующие ей напряжения σ в материале определяются по формуле

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Деформация ε при $|\varepsilon| > \varepsilon_e$ является пластической. В области пластических деформаций напряжения в материале остаются постоянными, равными σ_e при растяжении и $(-\sigma_e)$ при сжатии.

Пусть элемент оболочки подвергается значительному изгибу. Если изменение кривизны срединной поверхности оболочки, вызванное этим изгибом, равно k , то относительная деформация растяжения (сжатия) в материале оболочки на расстоянии h от срединной поверхности будет

$$\varepsilon = kh.$$

При этом, если k велико так, что $\varepsilon \gg \varepsilon_c$, то энергия деформации, отнесенная к единице объема, на этом расстоянии будет

$$A(h) \simeq \sigma_e kh.$$

Энергия деформации оболочки, отнесенная к единице площади срединной поверхности, равна

$$A = 2 \int_0^{\delta/2} A(h) dh = \sigma_e k \frac{\delta^2}{4}.$$

Предположим теперь, что элемент оболочки испытывает значительный изгиб с изменением кривизны на k сначала в одном направлении, а затем в противоположном с восстановлением первоначальной формы. Энергия такой деформации оболочки на единицу площади срединной поверхности будет

$$A' = \frac{\sigma_e k \delta^2}{2}.$$

Пусть в ходе закритической деформации оболочки область выпучивания расширяется и в некоторый момент на ее границе возникают пластические деформации. Вычислим энергию упруго-пластической деформации во внешней окрестности условного ребра, ограничивающего область выпучивания. Мы будем предполагать, что пластические деформации оболочки возникают только от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру. Деформация срединной поверхности предполагается упругой.

Обозначим через ε_e^* ширину внешней полуокрестности ребра, охваченной пластическими деформациями. Полную энергию деформации U во внешней полуокрестности можно представить в виде

$$U = U' + U'',$$

где U' — энергия упруго-пластической деформации в непосредственной близости ребра, U'' — энергия чисто упругой деформации в оставшейся части зоны сильного изгиба.

Сохраняя обозначения гл. 2 § 2, можем записать

$$\bar{U}'' = \delta E \int_{\varepsilon_e^*}^{\varepsilon_e^*} \left(\frac{\delta^2 v'^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds.$$

(Чтобы упростить исследование, принято $\nu = 0$.) Энергия упруго-пластической деформации равна

$$U' = \delta E \int_0^{\varepsilon_e^*} \frac{u^2}{\rho^2} ds + \int_0^{\varepsilon_e^*} \frac{\sigma_e v' \delta^2}{4} ds$$

или

$$\bar{U}' = \delta E \int_0^{\varepsilon_e^*} \frac{u^2}{\rho^2} ds + \frac{\sigma_e \delta^2}{4} (v'(\varepsilon_e^*) - v'(0)).$$

Здесь второй член учитывает энергию упруго-пластической деформации от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, а первый член — энергию деформации в срединной поверхности, сопровождающей этот изгиб. Обе формулы дают энергию деформации, отнесенную к единице длины ребра.

Так же, как при исследовании упругих деформаций, введем вместо переменных u , v , s новые переменные \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} согласно формулам

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon_e \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon}, \quad \varepsilon_e^4 = \frac{\delta^2}{12 \rho^2 \alpha^2}.$$

В новых переменных, над обозначениями которых черта опускается, будем иметь

$$U'' = K \int_{\bar{\varepsilon}_e^*}^{\bar{\varepsilon}_e^*} (v^2 + u^2) d\bar{s}, \quad \bar{U}' = K \int_0^{\bar{\varepsilon}_e^*} u^2 d\bar{s} + \frac{\alpha \delta^2 \sigma_e}{4} (v(\bar{\varepsilon}_e^*) + 1),$$

где $\bar{\varepsilon}_e^*$ и $\bar{\varepsilon}_e^{**}$ — новые пределы интегрирования.

В тех же предположениях, что и в гл. 2, § 2, предел интегрирования $\bar{\epsilon}^*$ можно принять равным ∞ . Если при этом $\bar{\epsilon}_e^*$ для простоты записи обозначить σ , то полную энергию \bar{U} упруго-пластической деформации во внешней полуокрестности ребра можно записать так:

$$\bar{U} = K \int_0^{\infty} (\vartheta v'^2 + u^2) ds + \frac{\alpha \bar{\sigma}^2 \sigma_e}{4} (v(\sigma) + 1),$$

где $\vartheta(s) = 0$ при $s \leq \sigma$, $\vartheta(s) = 1$ при $s > \sigma$,

$$K = \frac{E \bar{\sigma}^{5/2} \alpha^{5/2}}{2 \cdot 12^{3/4} \rho^{1/2}}.$$

Истинная форма, которую принимает оболочка во внешней полуокрестности ребра — границы выпучивания — определяется из условия минимума функционала \bar{U} . Рассмотрим задачу о минимуме этого функционала.

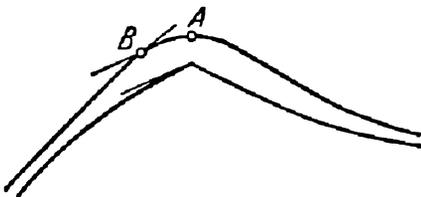


Рис. 18.

Исходя из наглядных представлений о характере деформации оболочки во внешней полуокрестности ребра, будем

предполагать, что область пластических деформаций от изгиба охватывает участок AB (рис. 18). Точка B определяется тем условием, что касательная в ней параллельна внешней полукасательной у ребра. Аналитически положение точки B определяется условием

$$v(\sigma) = 0.$$

В таком предположении относительно зоны пластических деформаций для энергии деформации \bar{U} будем иметь

$$\bar{U} = K \int_0^{\infty} (\vartheta v'^2 + u^2) ds + \frac{\alpha \bar{\sigma}^2 \sigma_e}{4}.$$

Так же как в случае неограниченно упругих оболочек (гл. 2, § 3), будем считать, что $v' = \text{const}$ при $s \leq \sigma$. Далее, предполагая v сравнительно малым при $s > \sigma$, опустим член $v^2/2$

в дифференциальной связи функций u , v

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Фиксировав σ , найдем минимум функционала \bar{U} и функции u , v , которые его реализуют.

Так как $v' = \text{const}$ при $s \leq \sigma$, и

$$v(0) = -1, \quad v(\sigma) = 0,$$

то при $s \leq \sigma$

$$v(s) = \frac{s - \sigma}{\sigma}.$$

Зная $v(s)$ при $s \leq \sigma$, находим $u(s)$, используя связь между этими функциями

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Принимая во внимание, что $u(0) = 0$, получаем следующее выражение для $u(s)$ при $s \leq \sigma$:

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Для определения функций $u(s)$ и $v(s)$ при $s > \sigma$ минимизируем функционал

$$\int_{\sigma}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при неголономной связи между варьируемыми функциями

$$u' + v = 0.$$

Решение этой задачи ничем не отличается от приведенного в гл. 2, § 3, и оно дает следующие выражения для функций u и v' при $s > \sigma$:

$$u = -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}} (\omega_1 e^{\omega_1 (s - \sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s - \sigma)}),$$

$$v' = -\frac{\sigma i}{3\sqrt{2}} (-\omega_1 e^{\omega_1 (s - \sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s - \sigma)}),$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i).$$

Подставив найденные значения функций u , v в выражение функционала \bar{U} , получим его значение в зависимости от параметра σ

$$\bar{U}(\sigma) = K \left\{ \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{9} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{7.36} \right) \sigma^3 \right\} + \frac{\alpha \delta^2 \sigma_r}{4}$$

Далее мы должны минимизировать выражение $\bar{U}(\sigma)$ по σ . Однако мы видим, что $\bar{U}(\sigma)$ монотонно убывает при $\sigma \rightarrow 0$. Это значит, что рассматриваемая нами задача регулярного решения не имеет, ибо при $\sigma \rightarrow 0$ на отрезке $(0, \sigma)$

$$v' = \frac{1}{\sigma} \rightarrow \infty.$$

Физический смысл полученного результата состоит в том, что появление пластических деформаций на границе выпучивания ведет к образованию действительного ребра на поверхности оболочки ($k \simeq 1/\sigma \rightarrow \infty$).

Нетрудно пояснить механизм образования ребра наглядными соображениями. Действительно, упругое состояние оболочки до появления пластических деформаций определяется в основном изгибом в плоскости, перпендикулярной ребру, и сопровождающими этот изгиб растяжением срединной поверхности во внешней зоне и сжатием во внутренней (рис. 19).

Если в точке C на ребре возникают пластические деформации, то жесткость оболочки на изгиб уменьшается. При этом растяжение срединной поверхности во внешней зоне и сжатие во внутренней увеличивают деформацию изгиба в C . Это ведет к дальнейшему ослаблению оболочки на изгиб. В итоге оболочка принимает форму с очень большой, теоретически бесконечно большой кривизной в направлении, перпендикулярном ребру.

Появление пластических деформаций на границе выпучивания останавливает закритическую деформацию.

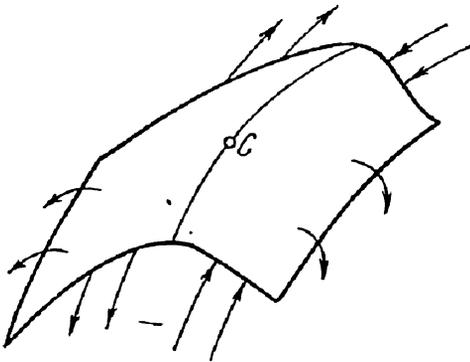


Рис. 19.

Действительно, закритическая деформация сопровождается изменением области выпучивания, и, следовательно, перемещением ребра, ограничивающего эту область. Если в данной точке ребра возникают пластические деформации от изгиба, то кривизна k поверхности в направлении, перпендикулярном ребру, становится очень большой (в нашем рассмотрении бесконечно большой). Перемещение ребра связано с изгибом оболочки сначала в одном направлении до кривизны k , а затем с изгибом в противоположном направлении, практически восстанавливающим первоначальную форму. Энергия на единицу площади поверхности оболочки, связанная с такой деформацией, равна

$$\simeq \frac{\sigma_c k \delta^2}{2}$$

Поэтому перемещение элемента ребра Δl на величину Δs требует выполнения работы

$$\frac{\sigma_c k \delta^2}{2} \Delta l \Delta s.$$

Эту работу должна выполнять действующая на оболочку нагрузка. Но нагрузка конечна, а величина k очень велика (бесконечно велика). Следовательно, $\Delta s = 0$, то есть появление пластических деформаций останавливает закритическую деформацию.

Теперь мы можем сформулировать принцип А применительно к ограниченно упругим оболочкам.

Ограниченно упругая оболочка допускает только такие закритические деформации, определяемые принципом А, при которых напряжения σ на границе выпучивания, определяемые по формуле

$$\sigma = c' E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

не превосходят временного сопротивления σ_v (мы считаем, что временное сопротивление является пределом упругости).

Применим полученный результат для исследования закритических деформаций строго выпуклых оболочек под внешним давлением.

В предположениях § 4 наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка p_i при закритической деформации определяется

максимальной допустимой деформацией и вычисляется по формуле

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

В случае неограниченно упругих оболочек максимальная деформация $2h_i$ определяется геометрическими размерами оболочки. В случае ограниченно упругих оболочек максимальная деформация может определяться условием появления на границе выпучивания пластических деформаций, то есть условием

$$c'E\sqrt{2h_i}\delta^{1/2}\sqrt{k_1 k_2} = \sigma_s. \quad (*)$$

Определяя отсюда $2h_i$ и подставляя его в формулу для p_i получим нижнюю критическую нагрузку для ограниченно упругих оболочек

$$p_i = \frac{3}{2} cc' \left(\frac{E}{\sigma_s} \right) (k_1 + k_2) k_1 k_2 E \delta^3.$$

Применение этой формулы естественно предполагает, что деформация, определяемая условием (*), является геометрически допустимой.

В случае сферической оболочки радиуса R формула для нижней критической нагрузки принимает вид

$$p_i = 3cc' \left(\frac{E}{\sigma_s} \right) E \left(\frac{\delta}{R} \right)^3.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В гл. 3 при рассмотрении закритических деформаций пологих строго выпуклых оболочек, жестко закрепленных по краю, показано, что такие деформации в основном приближении сводятся к зеркальному выпучиванию. Установление этого факта существенно опирается на два предположения: 1) деформация оболочки должна быть значительной и 2) закрепление края оболочки является достаточно жестким. При нарушении хотя бы одного из этих условий мы вправе ожидать и другого результата. В этом нас убеждают данные соответствующих опытов. Закритическая деформация сферической оболочки при выпучивании области малых размеров, а также при недостаточной жесткости закрепления края может не обладать осевой симметрией, хотя оболочка и способ нагружения ее являются осесимметрическими. Область выпучивания часто имеет форму треугольника или четырехугольника со скругленными вершинами. В связи с этим в настоящей главе мы хотим исследовать вопрос об устойчивости осесимметрических закритических деформаций сферической оболочки при осесимметрической нагрузке. Будут рассмотрены два случая нагружения оболочки: равномерным внешним давлением и сосредоточенной силой. В последнем случае результаты теоретического рассмотрения будут сопоставлены с данными соответствующего эксперимента.

§ 1. Изгибание сферического сегмента. Уравнения изгибаия

Пусть F — пологий сферический сегмент с единичной кривизной и радиусом основания $\rho_0 \ll 1$. Введем декартовы координаты x, y, z , приняв касательную плоскость в вершине сегмента за плоскость xy , а внутреннюю нормаль — за положительную полуось z . В этих координатах сегмент задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

Обозначим через γ кривую на поверхности сегмента, которая на плоскость xu проектируется в кривую, задаваемую в полярных координатах r, ϑ уравнением

$$r = \rho(1 + \lambda \cos k\vartheta),$$

$$\rho \ll \rho_0, \quad \lambda \ll 1.$$

Кривая γ разбивает поверхность сегмента на две области: внутреннюю — F'' , ограниченную кривой γ , и внешнюю — F' . Рассмотрим задачу об изгибании сегмента с продавливанием области F'' внутрь, образованием ребра вдоль кривой γ и сохранением края в исходной плоскости (рис. 20). Предлагается следующий метод решения задачи.

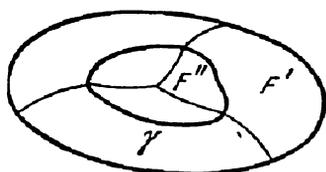


Рис. 20.

Для каждой из поверхностей F' и F'' мы построим независимые изгибания. Такие изгибания возможны и притом с большим произволом. Этим произволом мы распорядимся так, чтобы

кривые, ограничивающие области F' и F'' , оказались совмещенными. В результате получим поверхность с ребром вдоль γ , изометричную исходному сегменту. Рассмотрим изгибание поверхностей F' и F'' .

Пусть r — вектор точки одной из поверхностей, например, F' , и τ — вектор смещения этой точки при изгибании поверхности. Так как линейный элемент поверхности при изгибании не изменяется, то должно иметь место равенство

$$dr^2 = (dr + d\tau)^2.$$

Отсюда для вектор-функции τ получается уравнение

$$dr d\tau + \frac{1}{2} d\tau^2 = 0.$$

Кривая γ на поверхности сегмента, переходящая в ребро при изгибании, зависит от параметра λ . Параметр λ мал, и поэтому представляется целесообразным разлагать вектор-функцию τ по степеням этого параметра

$$\tau = \lambda\tau_1 + \lambda^2\tau_2 + \dots$$

Мы полагаем τ_0 равным нулю, так как при $\lambda = 0$ задача об изгибании имеет тривиальное решение с зеркальным отра-

жением сегмента F'' относительно плоскости кривой γ . При этом поле τ на поверхности F' равно нулю тождественно.

Подставляя разложение τ по степеням λ в уравнение изгиба, получим для вектор-функций τ_1, τ_2, \dots бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} drd\tau_1 &= 0, \\ drd\tau_2 + \frac{d\tau_1^2}{2} &= 0, \end{aligned}$$

Векторные поля τ_1, τ_2, \dots называются изгибающими полями первого, второго и т. д. порядков.

Введем в пространстве нормированные цилиндрические координаты u, v, z . Для произвольной точки A они имеют следующие значения: $\rho^2 z$ — с точностью до знака расстояние точки A от плоскости xu , ρu — расстояние точки A от оси z , v — угол, образуемый плоскостью σ , проходящей через ось z и точку A , с плоскостью xz . Такая нормировка координат удобна при рассмотрении задачи об изгибании в случае малой области F'' .

С каждой точкой A пространства мы свяжем подвижный триедр из трех единичных взаимно перпендикулярных векторов e_1, e_2, e_3 (рис. 21). Вектор e_3 направлен по оси z в сторону $z > 0$, вектор e_1 лежит в плоскости σ и направлен от оси z , а вектор e_2 перпендикулярен этой плоскости. Очевидно, вектор e_3 не зависит от точки A , а векторы e_1, e_2 зависят только от координаты v этой плоскости. При этом можно считать, что вектор e_2 направлен так, что

$$\frac{de_1}{dv} = e_2.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{de_2}{dv} = -e_1.$$

Будем рассматривать случай малых областей F'' , то есть случай малых значений параметра ρ . При этом целесообразно

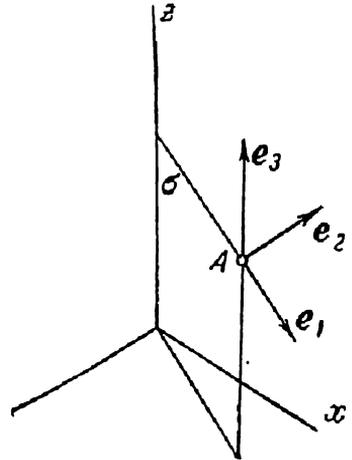


Рис. 21.

нормировать координаты вектора смещения τ с помощью параметра ρ . Именно, компоненты вектора τ относительно базиса e_1, e_2, e_3 удобно представить в следующем виде:

$$\rho^3 \xi, \rho^3 \eta, \rho^2 \zeta.$$

Уравнение изгиба

$$dr d\tau + \frac{d\tau^2}{2} = 0$$

эквивалентно системе трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} r_u \tau_u + \frac{\tau_u^2}{2} &= 0, \\ r_u \tau_v + r_v \tau_u + \tau_u \tau_v &= 0, \\ r_v \tau_v + \frac{\tau_v^2}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} (*)$$

Если в первое уравнение этой системы подставить векторы r и τ , разложенные в базисе e_1, e_2, e_3 , именно

$$r = \rho u e_1 + \rho^2 z e_3, \quad \tau = \rho^3 \xi e_1 + \rho^3 \eta e_2 + \rho^2 \zeta e_3,$$

и воспользоваться формулами дифференцирования для векторов базиса

$$\frac{de_1}{dv} = e_3, \quad \frac{de_2}{dv} = -e_1,$$

то получим

$$\xi_u + z_u \zeta_u + \frac{1}{2} \zeta_u^2 + \frac{\rho^2}{2} (\xi_u^2 + \eta_u^2) = 0.$$

При малом ρ последнее слагаемое в этом уравнении может быть отброшено. Кроме того, из уравнения сегмента

$$\rho^2 z = 1 - \sqrt{1 - \rho^2 u^2}$$

при малом ρ получается

$$z_u \simeq u.$$

В итоге уравнение для ξ, η, ζ при малых значениях ρ можно представить в виде

$$\xi_u + u \zeta_u + \frac{1}{2} \zeta_u^2 = 0.$$

Аналогично, из двух других уравнений изгибания после подстановки значений τ и τ' при малых значениях параметра ρ получается

$$u(\eta_v + \xi) + \frac{1}{2} \zeta_v^2 = 0, \quad \xi_v - \eta + u\zeta_v + u\eta_u + \zeta_u \zeta_v = 0.$$

При рассмотрении изгибания поверхности F' нам предстоит решать систему уравнений (*) для функций ξ , η , ζ в области

$$1 + \lambda \cos kv \leq u \leq \frac{\rho_0}{\rho}$$

при краевом условии

$$\zeta\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = 0.$$

Однако ввиду предполагаемой малости параметра ρ мы будем искать решение в области, определяемой только первым неравенством, и краевое условие отнесем к бесконечности, то есть будем считать, что $\zeta(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Аналогичные рассуждения можно провести для изгибания другой части сегмента — F'' . При этом получается в точности такая же система уравнений для функций ξ , η , ζ . Но ее решение нужно рассматривать на оставшейся части плоскости, то есть в области

$$u \leq 1 + \lambda \cos kv.$$

Для того чтобы из поверхностей, получаемых изгибанием областей F' и F'' , составлялась поверхность, изометричная сегменту с ребром вдоль γ , надо, чтобы соответствующие смещения τ' и τ'' в указанных областях на их общей границе

$$u = 1 + \lambda \cos kv$$

удовлетворяли условиям

$$\xi' = \xi'', \quad \eta' = \eta'', \quad \zeta' + \zeta'' + u^3 = 0.$$

При выполнении этих условий край поверхности \tilde{F}'' , полученной изгибанием из F'' , после зеркального отражения в плоскости xu совместится с краем поверхности \tilde{F}' , полученной изгибанием из F' , и образуется интересующая нас поверхность с ребром, изометричная сегменту.

В дальнейшем указанные выше условия для решений τ' и τ'' на кривой $u = 1 + \lambda \cos kv$ будут называться условиями сопряжения.

§ 2. Решение уравнений изгибаия

Общий план решения задачи об изгибании сегмента будет состоять в следующем. Прежде всего мы замечаем, что $\zeta_0'' = -1$. Это непосредственно вытекает из условия сопряжения

$$\zeta' + \zeta'' + u^2 = 0.$$

Что касается двух других составляющих ξ_0'' и η_0'' , то, не ограничивая общности, их можно принять равными нулю. Этого всегда можно добиться движением, параллельным плоскости xu .

Далее, мы определим изгибающие поля первого порядка τ'_1, τ''_1 для поверхностей F', F'' , и произволом, который при этом получается, распорядимся так, чтобы условия сопряжения выполнялись с точностью до величин порядка λ . Затем определяем изгибающие поля второго порядка, удовлетворяя условиям сопряжения с точностью до λ^2 , и т. д.

Изгибающие поля первого порядка удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\xi_u + u\zeta_u &= 0, \\ \eta_v + \xi &= 0, \\ \xi_v - \eta + u\zeta_v + u\eta_u &= 0.\end{aligned}$$

Если из этих трех уравнений исключить функции ξ и η , то для ζ получается уравнение

$$\frac{\zeta_{vv}}{u} + (u\zeta_u)_u = 0.$$

Оно представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах u, v .

Будем искать решение уравнения для ζ в виде тригонометрического ряда. При этом ввиду симметрии ожидаемого решения можно считать, что в этом разложении присутствуют только члены, содержащие косинусы дуг, кратных kv . Таким образом,

$$\zeta = \sum c_n(u) \cos nv,$$

где n принимает только целые кратные k значения. Общее решение для ζ в такой форме имеет вид

$$\zeta = \sum \left(\frac{a_n}{u^n} + b_n u^n \right) \cos nv.$$

В случае изгиба поверхности F' надо положить $a_0 = 0$ и $b_n = 0$, так как $\zeta \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Таким образом, для составляющей ζ изгибающего поля τ' поверхности F' получается выражение

$$\zeta = \sum \frac{a_n}{u^n} \cos nv,$$

где суммирование начинается с $n > 0$ и идет по целым n , кратным k . По соображениям удобства мы придадим ζ следующую форму:

$$\zeta = \sum (-a_n) \frac{n-1}{n} \frac{\cos nv}{u^n}.$$

Имея ζ , нетрудно найти из уравнений изгиба две другие компоненты ξ и η . Получается

$$\xi = \sum a_n \frac{\cos nv}{u^{n-1}}, \quad \eta = \sum (-a_n) \frac{\sin nv}{nu^{n-1}}.$$

Постоянные интегрирования приняты равными нулю из-за предполагаемой симметрии изгиба.

В случае изгибающего поля τ'' поверхности F'' в выражении

$$\zeta = \sum \left(\frac{a_n}{u^n} + b_n u^n \right) \cos nv$$

надо положить равными нулю постоянные a_n , так как ζ должна быть ограничена в нуле (при $u = 0$). Свободный член разложения b_0 тоже можно считать равным нулю, так как он соответствует простому смещению поверхности, как целого, а это смещение учтено особо. Так же как и для поверхности F' , по соображениям удобства, ζ для поверхности F'' представляем в виде

$$\zeta = \sum (-b_n) \frac{n+1}{n} u^n \cos nv.$$

С помощью системы уравнений изгиба и полученного выражения для ζ находим ξ и η

$$\xi = \sum b_n u^{n+1} \cos nv, \quad \eta = \sum (-b_n) \frac{u^{n+1}}{n} \sin nv.$$

Найдем теперь решения, удовлетворяющие условиям сопряжения с точностью до величин порядка λ . Условия сопряжения можно записать в виде

$$\lambda \xi_1' + O(\lambda^2) = \lambda \xi_1'' + O(\lambda^2),$$

$$\lambda \eta_1' + O(\lambda^2) = \lambda \eta_1'' + O(\lambda^2),$$

$$\lambda \zeta_1' + \lambda \zeta_1'' + \zeta_0'' + 1 + 2\lambda \cos kv + O(\lambda^2) = 0.$$

($\zeta_0'' = -1$). Выделяя в этих равенствах члены, имеющие порядок λ , получим

$$\sum a_n \cos nv = \sum b_n \cos nv,$$

$$\sum \left(-\frac{a_n}{n}\right) \sin nv = \sum \left(-\frac{b_n}{n}\right) \sin nv,$$

$$\sum (-a_n) \frac{n-1}{n} \cos nv + \sum \left(-b_n\right) \frac{n+1}{n} \cos nv + 2 \cos kv = 0.$$

Из первых двух равенств следует, что

$$a_n = b_n.$$

Из третьего равенства получается при $n > k$

$$a_n \frac{n-1}{n} + b_n \frac{n+1}{n} = 0,$$

а при $n = k$

$$-a_k \frac{k-1}{k} - b_k \frac{k+1}{k} + 2 = 0.$$

Отсюда заключаем, что при $n > k$ все a_n и b_n равны нулю, а при $n = k$ они определяются из системы

$$a_k = b_k, \quad -a_k \frac{k-1}{k} - b_k \frac{k+1}{k} + 2 = 0.$$

Решение этой системы следующее:

$$a_k = b_k = 1.$$

Таким образом, чтобы удовлетворить условию сопряжения с точностью до величин порядка λ , надо взять изгибающие поля первого порядка в следующей форме.

Для поверхности F' :

$$\xi_1 = \frac{\cos kv}{u^{k-1}}, \quad \eta_1 = -\frac{\sin kv}{ku^{k-1}}, \quad \zeta_1 = -\frac{k-1}{k} \frac{\cos kv}{u^k}.$$

Для поверхности F'' :

$$\xi_1 = u^{k+1} \cos kv, \quad \eta_1 = -\frac{u^{k+1}}{k} \sin kv, \quad \zeta_1 = -\frac{k+1}{k} u^k \cos kv.$$

Обратимся теперь к изгибающим полям второго порядка. Они удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \xi_u + u\zeta_u + \frac{1}{2}\zeta_{1u}^2 &= 0, \\ u(\eta_v + \xi) + \frac{1}{2}\zeta_{1v}^2 &= 0, \\ \xi_v - \eta + u\zeta_v + u\eta_u + \zeta_{1u}\zeta_{1v} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система неоднородна относительно искомым функций, и ее общее решение получается сложением какого-нибудь частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Последняя представляет собой систему уравнений для изгибающего поля первого порядка.

Добавками изгибающих полей первого порядка при получении общих решений для изгибающих полей второго порядка мы распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить условиям сопряжения с точностью до величин порядка λ^2 . Оказывается, эти добавки указанным условием определяются однозначно.

Опуская соответствующие выкладки, приведем выражения для компонент смещения τ с точностью до величин второго порядка по параметру λ .

Для поверхности F' :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\lambda \cos kv}{u^{k-1}} - \lambda^2 \frac{(k-1)^2}{4u^{2k+1}} + \\ \eta &= -\frac{\lambda \sin kv}{ku^{k-1}} - \\ \zeta &= -\lambda \frac{k-1}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \lambda^2 \frac{(k-1)^2}{4u^{2k+2}} + \dots \end{aligned}$$

Для поверхности F'' :

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda u^{k+1} \cos kv - \frac{\lambda^2}{4} (k+1)^2 u^{2k-1} + \dots, \\ \eta &= -\frac{\lambda u^{k+1}}{k} \sin kv + \dots, \\ \zeta &= -1 - \lambda \frac{k+1}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2}{4} (k+1)^2 u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Здесь всюду не выписаны члены вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv;$$

Они хотя и имеют порядок λ^2 , но в наших дальнейших рассмотрениях несущественны.

§ 3. Определение некоторых величин для поверхности, полученной изгибанием сферического сегмента

В § 2 мы нашли выражения для компонент вектора смещений τ точки сферического сегмента при его изгибании. Их значения получены с точностью до величин порядка λ^2 . В дальнейшем нас будут интересовать некоторые интегральные выражения вида

$$J = \iint \varphi(\tau, \tau_u, \tau_v \dots) du dv,$$

где интегрирование по v выполняется в пределах $0, 2\pi$. Очевидно, если мы возьмем τ с точностью до величин порядка λ^2 , то с такой же точностью мы получим и величину J .

Оказывается, если в выражении τ опустить члены вида

$$\lambda^2 \cos 2kv, \quad \lambda^2 \sin 2kv,$$

то с точностью до величин порядка λ^2 получается то же значение J . Действительно, связанное с этой операцией изменение подынтегральной функции будет иметь вид

$$\lambda^2 C' \cos 2kv + \lambda^2 C'' \sin 2kv + O(\lambda^3),$$

где C' и C'' не зависят от v . А при интегрировании этого выражения получается величина порядка λ^3 . Именно поэтому в конце предыдущего пункта мы привели упрощенное выражение для функций ξ , η , ζ , опустив в них члены порядка λ^2 , имеющие вид

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Обозначим через \tilde{F}' и \tilde{F}'' части изометричной сегменту поверхности, соответствующие по изометрии областям F' и F'' . Найдем уравнения этих поверхностей. Так как нормированные компоненты смещения точки при изгибании сегмента

равны ξ , η , ζ , то истинные смещения будут

$$\rho^3\xi, \quad \rho^3\eta, \quad \rho^2\zeta.$$

Поэтому уравнение поверхности \tilde{F}' можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1(\rho u + \rho^3\xi') + \mathbf{e}_2(\rho^3\eta') + \mathbf{e}_3\left(\frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2\zeta'\right), \\ u \geq 1 + \lambda \cos kv.$$

Соответственно уравнение поверхности \tilde{F}'' будет

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1(\rho u + \rho^3\xi'') + \mathbf{e}_2(\rho^3\eta'') - \mathbf{e}_3\left(\frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2\zeta''\right), \\ u \leq 1 + \lambda \cos kv.$$

Ввиду того, что мы предполагаем параметр ρ достаточно малым, члены порядка ρ^3 в уравнениях поверхностей можно опустить. Тогда получим:

для поверхности \tilde{F}'

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1(\rho u) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2\zeta'\right),$$

для поверхности \tilde{F}''

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1(\rho u) - \mathbf{e}_3\left(\frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2\zeta''\right).$$

Поверхности \tilde{F}' и \tilde{F}'' , образуя изометричную сегменту поверхность, разделены ребром γ . Определим угол α при этом ребре между F' и F'' . Для этого сначала найдем единичные векторы нормалей \mathbf{n}' и \mathbf{n}'' поверхностей вдоль ребра.

Имеем

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}, \quad \mathbf{n}'' = \frac{\mathbf{r}''_u \times \mathbf{r}''_v}{|\mathbf{r}''_u \times \mathbf{r}''_v|}$$

Ввиду того, что поверхность \tilde{F} получается изометрическим преобразованием сегмента F , знаменатели этих формул в точках ребра γ имеют то же значение, что и для сегмента. А для него при малых ρ

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \simeq \rho^2 u.$$

Вычислим производные вектора \mathbf{r}' по u и v . Имеем

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{e}_1\rho + \mathbf{e}_3\rho^2(u + \zeta_u), \quad \mathbf{r}'_v = \mathbf{e}_3\rho u + \mathbf{e}_3\rho^2\zeta_v.$$

Отсюда, определяя векторное умножение равенствами

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$$

получим

$$r'_u \times r'_v = e_3 (\rho^2 u) - e_2 (\rho^3 \zeta'_v) - e_1 (\rho^3 u^2 + \rho^3 u \zeta'_u).$$

Аналогично находим

$$r''_u \times r''_v = e_3 (\rho^2 u) + e_2 (\rho^3 \zeta''_v) + e_1 (\rho^3 u^2 + \rho^3 u \zeta''_u).$$

Таким образом,

$$n' = e_3 - e_2 \left(\frac{\rho}{u} \zeta'_v \right) - e_1 \rho (u + \zeta'_u),$$

$$n'' = e_3 + e_2 \left(\frac{\rho}{u} \zeta''_v \right) + e_1 \rho (u + \zeta''_u).$$

А теперь, принимая во внимание, что

$$(n' \times n'')^2 = \sin^2 \alpha,$$

где α — угол при ребре γ , находим

$$\sin^2 \alpha = \rho^2 \left\{ \left(\frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta'_u + \zeta''_u)^2 \right\} +$$

где не выписаны члены, имеющие порядок ρ^4 . Ввиду малости ρ с той же точностью (ρ^4) имеем

$$\alpha^2 = \rho^2 \left\{ \left(\frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta'_u + \zeta''_u)^2 \right\} +$$

Найдем кривизну ребра γ на поверхности \tilde{F} . Ее можно выразить через геодезическую кривизну k_g и угол при ребре. Ввиду изометрии поверхностей F и \tilde{F} геодезическую кривизну k_g можно вычислить на исходной поверхности. При этом очевидно, что при малом ρ геодезическая кривизна k_g , с точностью до величин более высокого порядка относительно ρ , равна обычной кривизне кривой на плоскости, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \rho (1 + \lambda \cos kv).$$

Последняя вычисляется по известной формуле и для нее получается следующее выражение:

$$k_g = \frac{1}{\rho} \frac{\left| 1 + \lambda (2 + k^2) \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (1 + 3k^2) \right|}{\left(1 + 2\lambda \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (1 + k^2) \right)^{3/2}} + \dots$$

Здесь не выписаны члены порядка выше λ^2 и члены порядка λ^2 вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Ввиду малости ρ , $\alpha \sim \rho$, и можно считать, что для кривизны k ребра на поверхности \tilde{F} имеем

$$k \simeq k_g.$$

Это равенство переходит в точное при $\rho \rightarrow 0$.

Вычислим элемент дуги ds вдоль ребра γ поверхности \tilde{F} . Принимая во внимание изометрию поверхностей \tilde{F} и F , при малых ρ элемент дуги ds вдоль ребра γ можно вычислять по формуле

$$ds = ds_e +$$

где ds_e — элемент дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \rho (1 + \lambda \cos kv),$$

а невыписанные члены имеют более высокий порядок малости по ρ . Таким образом,

$$ds = \rho \left[(1 + 2\lambda \cos kv) + \frac{\lambda^2}{2} (1 + k^2) \right]^{1/2} dv.$$

В дальнейшем нам понадобится средняя кривизна поверхности \tilde{F} . Вычислим ее. По известной формуле средняя кривизна поверхности равна

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2FM + NE}{EG - F^2}.$$

где E, F, G, L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Что касается коэффициентов первой квадратичной формы, то они те же, что и у исходной

поверхности (сферического сегмента). Следовательно, при малом ρ

$$E = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2 u^2.$$

Найдём коэффициенты L и N второй квадратичной формы. Для поверхности \tilde{F}'

$$\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{e}_3 (\rho^2 + \rho^2 \zeta_{uu}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \left(\frac{\rho}{u} \zeta_v \right) - \mathbf{e}_1 (\rho u + \rho^2 \zeta_u).$$

Отсюда

$$L = \mathbf{r}_{uu} \mathbf{n} = \rho^2 + \rho^2 \zeta_{uu}.$$

Аналогично получается

$$N = \mathbf{r}_{vv} \mathbf{n} = \rho^2 \zeta_{vv} + \rho^2 u (u + \zeta_u).$$

Для поверхности \tilde{F}'' получаются такие же выражения коэффициентов L и N , только со своей функцией ζ и с противоположным знаком.

Подставляя полученные выражения коэффициентов квадратичных форм поверхности в формулу для средней кривизны, находим:

для поверхности \tilde{F}'

$$H = \frac{1}{2u^2} \{ u^2 (1 + \zeta_{uu}) + \zeta'_{vv} + u(u + \zeta'_u) \},$$

для поверхности \tilde{F}''

$$H = - \frac{1}{2u^2} \{ u^2 (1 + \zeta''_{uu}) + \zeta''_{vv} + u(u + \zeta''_u) \}.$$

В заключение заметим еще, что гауссова кривизна поверхности \tilde{F} равна гауссовой кривизне исходной поверхности, следовательно, она постоянна и равна единице.

§ 4. Энергия деформации оболочки

Для энергии деформации оболочки в гл. 2, § 2 мы получили следующую формулу:

$$U = \int_{\tilde{F}} c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} k^{1/2} ds_{\tilde{F}} + \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} \alpha \left(-k_n - \nu k_{\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{k_i + k_e}{2} \right) ds_{\tilde{F}} + \frac{E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Будем обозначать для краткости слагаемые правой части этой формулы через U' , U'' и U''' соответственно, и вычислим последовательно каждое из этих слагаемых.

Величины, входящие в формулу для U' , вычислены нами в § 3. Следует, однако, иметь в виду, что полученные там значения относятся к сфере единичного радиуса. Поэтому для рассматриваемой оболочки, радиус кривизны которой мы будем обозначать R , линейные величины необходимо увеличить в R раз.

В § 3 для угла α_γ , образованного касательными плоскостями поверхности \tilde{F} вдоль ребра γ , получено следующее выражение:

$$\alpha_\gamma^2 = \rho^2 \left\{ \left(\frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta''_u + \zeta'''_u)^2 \right\}.$$

Принимая во внимание, что угол α , входящий в слагаемое U' , в два раза меньше α_γ , будем иметь

$$\alpha^2 = \rho^2 \left\{ \left(\frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{2u} \right)^2 + \left(u + \frac{\zeta'_u + \zeta''_u}{2} \right)^2 \right\}.$$

Подставляя сюда

$$u = 1 + \lambda \cos kv,$$

$$\zeta'_v = - \frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}} + \dots$$

$$\zeta''_v = -1 - \frac{\lambda(k+1)}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2(k+1)^2}{4} u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots,$$

будем иметь

$$\alpha^2 = \rho^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots \right).$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем в аналогичных случаях, не выписаны члены порядка выше λ^2 и члены порядка λ^2 вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Вычислим теперь

$$\sqrt{k} ds.$$

Принимая во внимание полученные в § 3 выражения для k и ds , найдем

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho} \frac{\left| 1 + \lambda (k^2 + 2) \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (3k^2 + 1) \right|^{1/2}}{\left(1 + 2\lambda \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (k^2 + 1) \right)^{1/4}} dv.$$

Если правую часть равенства разложить по степеням λ , опустив члены порядка выше λ^2 и несущественные члены порядка λ^3 , то получим

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} (k^2 + 1) \cos kv + \lambda^2 \left(\frac{3k^2}{8} - \frac{1 + k^2}{16} \right) \right\} dv.$$

Для сферы радиуса R результат надо умножить на \sqrt{R} . Таким образом, для рассматриваемой оболочки имеем

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho R} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} (k^2 + 1) \cos kv + \lambda^2 \left(\frac{3k^2}{8} - \frac{1 + k^2}{16} \right) \right\} dv.$$

Подставляя значения α и $\sqrt{k} ds$ в формулу для U' , получим

$$U' = 2\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left(k^2 - \frac{(1 + k^2)^2}{16} \right) \right\}.$$

Займемся теперь выражением U'' . В связи с этим прежде всего найдем нормальные кривизны k_i и k_e .

Как известно, нормальные кривизны вычисляются по формуле

$$k = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

где E, F, G, L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Для рассматриваемой нами поверхности \tilde{F} , полученной изгибанием сферического сегмента, мы имеем

$$E = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2 u^2.$$

Что касается коэффициентов второй квадратичной формы, то для поверхности \tilde{F}' будет

$$\begin{aligned} L' &= \rho^2 (1 + \zeta'_{uu}), \\ M' &= \rho^2 \left(\zeta'_{uv} - \frac{\zeta'_v}{u} \right), \\ N' &= \rho^2 (\zeta'_{vv} + u^2 + u \zeta'_u). \end{aligned}$$

А для поверхности \tilde{F}'' имеем

$$\begin{aligned} L'' &= -\rho^2 (1 + \zeta''_{uu}), \\ M'' &= -\rho^2 \left(\zeta''_{uv} - \frac{\zeta''_v}{u} \right), \\ N'' &= -\rho^2 (\zeta''_{vv} + u^2 + u\zeta''_u). \end{aligned}$$

Так как кривая γ в координатах u, v задается уравнением

$$u = 1 + \lambda \cos kv,$$

то ее направление в произвольной точке u, v будет

$$du : dv = -\lambda k \sin kv : 1.$$

Следовательно, перпендикулярное направление, то есть направление, в котором измеряются нормальные кривизны k_i и k_e , будет

$$du : dv = u^2 : (\lambda k \sin kv).$$

Подставляя полученные значения коэффициентов квадратичных форм и du, dv в формулу для нормальных кривизн k_i, k_e и удерживая только существенные члены, получим

$$\begin{aligned} k_e &= 1 + \zeta'_{uu} + 2(\zeta'_{uv} - \zeta'_v) \lambda k \sin kv + \dots \\ k_i &= -1 - \zeta''_{uv} - 2(\zeta''_{uv} - \zeta''_v) \lambda k \sin kv + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k_i + k_e &= (\zeta'_{uu} - \zeta''_{uu}) + 2\lambda k (\zeta'_{uv} - \zeta''_{uv}) \sin kv - \\ &\quad - 2\lambda k (\zeta'_v - \zeta''_v) \sin kv + \dots \end{aligned}$$

Все это относится к сегменту единичной кривизны; для рассматриваемой оболочки полученное значение $k_i + k_e$ надо разделить на радиус R .

Элемент дуги кривой γ равен

$$ds_\gamma = R\rho (\lambda^2 k^2 \sin^2 kv + u^2)^{1/2} dv = R\rho \left\{ u \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{4} + \dots \right) \right\} dv.$$

Принимая во внимание найденные выражения для $\alpha, k_i + k_e$ и ds_γ , находим

$$\int \alpha (k_i + k_e) ds_\gamma = 0.$$

Таким образом, при $\nu = 0$

$$U'' = -\frac{E\delta^3}{6} \frac{1}{R} \int_{\Gamma} \alpha ds_{\Gamma}.$$

Подставляя сюда выражения α и ds_{Γ} , получим

$$\tilde{U}'' = -\frac{2\pi E\delta^3 \rho^2}{6} \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2}\right).$$

Вычислим теперь выражение

$$U''' = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Чтобы упростить выкладки, будем считать коэффициент Пуассона $\nu = 0$. Имеем

$$\Delta k_1 = \frac{1}{R} - k_1, \quad \Delta k_2 = \frac{1}{R} - k_2,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности \tilde{F} . Отсюда на единицу площади поверхности получим

$$\bar{U}''' = \frac{E\delta^3}{24} \left(\frac{2}{R^2} - 2K - \frac{4H}{R} + 4H^2\right),$$

где K — гауссова, а H — средняя кривизна поверхности \tilde{F} . Так как при изгибании поверхности ее гауссова кривизна не изменяется, то

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\bar{U}''' = \frac{E\delta^3}{6} \left(H^2 - \frac{H}{R}\right).$$

В § 3 для средней кривизны H поверхности \tilde{F}' мы нашли выражение

$$H = 1 + \frac{\zeta'_{uu}}{2} + \frac{\zeta'_{vv}}{2u^2} + \frac{\zeta'_u}{2u}.$$

Так как наша оболочка имеет радиус R , то она при подобном изгибании будет иметь среднюю кривизну

$$H = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\zeta'_{uu}}{2} + \frac{\zeta'_{vv}}{2u^2} + \frac{\zeta'_u}{2u}\right).$$

Средняя кривизна поверхности \tilde{F}'' вычисляется по той же формуле, но со своей функцией ζ и с противоположным знаком.

Положим

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{6} \iint_{\tilde{F}''} \left(H^2 - \frac{H}{R} \right) d\sigma,$$

$$U_2''' = \frac{E\delta^3}{6} \iint_{\tilde{F}''} \left(H^2 - \frac{H}{R} \right) d\sigma.$$

Так как элемент площади единичной сферы равен $\rho^2 u \, du \, dv$, то для рассматриваемой оболочки элемент площади будет

$$d\sigma = R^2 \rho^2 u \, du \, dv,$$

поэтому

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{6} \iint \left(H^2 - \frac{H}{R} \right) R^2 \rho^2 u \, du \, dv,$$

где интегрирование выполняется по области переменных u , v , определяемой неравенством

$$u > 1 + \lambda \cos kv.$$

Для удобства предстоящих выкладок преобразуем подынтегральное выражение в U_1''' следующим образом:

$$H^2 - \frac{H}{R} = \left(H - \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{1}{R} \left(H - \frac{1}{R} \right).$$

Для \tilde{F}' имеем

$$\zeta = - \frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{2u^{2k+1}} + \dots \right).$$

Положим

$$u(v) = 1 + \lambda \cos kv.$$

Тогда

$$\int_{u(v)}^{\infty} \left(\frac{H}{R} - \frac{1}{R^2} \right) R^2 \rho^2 u \, du = \frac{\lambda^2 \rho^2}{4} (k-1)^2 (k+1) + \dots,$$

$$\int_{u(v)}^{\infty} \left(H - \frac{1}{R} \right)^2 R^2 \rho^2 u \, du = 0 + \dots$$

Отсюда

$$\int_{\tilde{F}'} \left(\frac{H}{R} - \frac{1}{R^2} \right) d\sigma = \frac{\pi\lambda^2\rho^2}{2} (k-1)^2 (k+1) + \dots$$

$$\int_{\tilde{F}'} \left(H - \frac{1}{R} \right)^2 d\sigma = 0 +$$

Следовательно, с точностью до величины порядка λ^2 будет

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{12} \pi\lambda^2\rho^2 (k-1)^2 (k+1).$$

Величина U_2''' вычисляется аналогично. Для нее получается следующее выражение:

$$U_2''' = \frac{\pi\rho^2 E\delta^3}{6} \left\{ 2 + \lambda^2 \left[1 + \frac{3}{2} (k+1)^2 (k-1) \right] \right\}.$$

Таким образом,

$$U''' = \frac{\pi\rho^2 E\delta^3}{6} \{ 2 + \lambda^2 (2k^3 - 2k + k^2) \}.$$

Суммируя слагаемые U , U' и U''' , находим следующее выражение для энергии деформации:

$$U = 2\pi c E\delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left(k^3 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi\rho^2 E\delta^3 \lambda^2}{3} (k^3 - k).$$

§ 5. Об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки

Опыт показывает, что сферическая оболочка под действием сосредоточенной силы испытывает осесимметрическую деформацию до определенного момента. Когда же действующая сила достигает некоторого критического значения, осевая симметрия деформации постепенно утрачивается. Область выпучивания вместо круга принимает сначала форму треугольника со сглаженными вершинами, затем четырехугольника и т. д.

Аналогично обстоит дело и в случае равномерного нагружения. Значительная деформация, не стесняемая близостью

края, отличается от осесимметрической и имеет звездное строение. Мы исследуем условия перехода к деформациям, не обладающим осевой симметрией, приняв в качестве начальных осесимметрические деформации.

Критическая осесимметрическая деформация характеризуется наличием близких форм равновесия, не обладающих осевой симметрией. Мы будем искать эти формы среди изометрических преобразований, построенных в § 2.

Согласно принципу А, закритическое состояние равновесия под данной нагрузкой определяется из условия стационарности функционала

$$W = U - A$$

на множестве изометрических преобразований исходной формы. В рассматриваемом случае

$$U = 2\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left(k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) \right\} + \frac{\pi \rho^3 E \delta^3 \lambda^2}{3} (k^3 - k).$$

При нагружении сосредоточенной силой f , действующей по внутренней нормали сегмента в его центре, производимая ею работа равна

$$A = fh,$$

где h — прогиб в центре выпучивания. Принимая во внимание уравнение поверхности \tilde{F} , полученное в § 3, видим, что

$$h = R\rho^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right).$$

Следовательно,

$$A = fR\rho^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right).$$

Для оболочки, находящейся в состоянии равновесия, параметры ρ и λ , характеризующие деформацию, определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} (U - A) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (U - A) &= 0. \end{aligned}$$

При фиксированном ρ эта система относительно f и λ всегда имеет решение с $\lambda = 0$ (осесимметрическая деформация). Если ρ достаточно мало, то это решение будет единственным.

Это значит, что при малой деформации область выпучивания имеет форму круга. Напротив, при больших деформациях (то есть при больших ρ) система допускает решение с $\lambda \neq 0$. Значение ρ , разграничивающее эти два случая, определяет критическую осесимметрическую деформацию. Таким образом, оно определяется условиями

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (U - A)|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U - A)|_{\lambda=0} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения U и A , получим

$$6\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 - 2f\rho R = 0,$$

$$2\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \left(k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) + \frac{\pi \rho^3 E \delta^3}{3} (k^3 - k) - \frac{fR\rho^2 k^2}{2} = 0.$$

Умножая первое уравнение на ρk^2 , второе на 4 и вычитая почленно, будем иметь

$$\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \frac{(k^2 - 1)^2}{2} + \frac{4}{3} \pi \rho^2 E \delta^3 k (1 - k^2) = 0.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Обозначим через

$$r = R\rho$$

радиус круга выпучивания и введем параметр

$$\varepsilon = \frac{R\delta}{r^2}.$$

Принимая во внимание полученное выше значение для ρ , находим соответствующее ему значение ε :

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{3c(k^2 - 1)}{8k}.$$

Следовательно, при деформациях, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{\varepsilon} \geq \frac{3c(k^2 - 1)}{8k},$$

выпучивание оболочки в форме круга является устойчивым по отношению к возмущениям, которые определяются параметром k .

Следует, однако, заметить, что этот вывод мы можем сделать только по отношению к возмущениям, отвечающим небольшим значениям k , так как $\sqrt{\epsilon} > 1$ при больших k . А определение энергии деформации на границе выпучивания предполагает достаточную малость параметра ϵ ($\epsilon \ll 1$).

Опыт показывает, что потеря устойчивости осесимметрической формы выпучивания обычно происходит с переходом к звездной форме с тремя вершинами ($k=3$). Поэтому мы можем считать форму выпучивания осесимметрической при

$$\rho \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Для радиуса круга выпучивания $r = R\rho$ получим

$$r \leq \frac{1}{c} \sqrt{R\delta}.$$

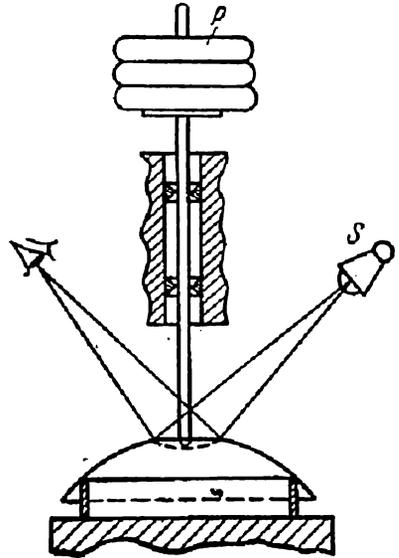


Рис. 22.

Найдем теперь силу f , при которой область выпучивания начинает принимать звездную форму с тремя вершинами ($k=3$). В момент перехода к звездной форме выпучивания в состоянии равновесия оболочки действующая сила f с параметром выпучивания ρ связана соотношением

$$6\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 - 2f\rho R = 0.$$

Отсюда находим значение

$$f = \frac{3\pi E \delta^3}{R}.$$

Когда действующая сила достигает этой величины, область выпучивания начинает принимать звездную форму с тремя вершинами.

Полученный результат об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки при нагружении сосредоточенной силой был подвергнут экспериментальной проверке. Испытуемый сферический сегмент свободно опирался на стальное кольцо (рис. 22). Действие сосредоточенной силы P

в виде груза нескольких стальных шайб передавалось через вертикальный стержень на испытываемую оболочку. Оболочка освещалась источником света S . Блик вдоль параболической линии на границе выпучивания наблюдался и фотографировался. При постепенном увеличении груза P отмечался момент, когда начинается переход от выпучивания в форме круга к форме «треугольника».

Результаты экспериментального исследования представлены на рис. 23. Здесь сплошная линия изображает полученную выше зависимость критической силы P от толщины оболочки

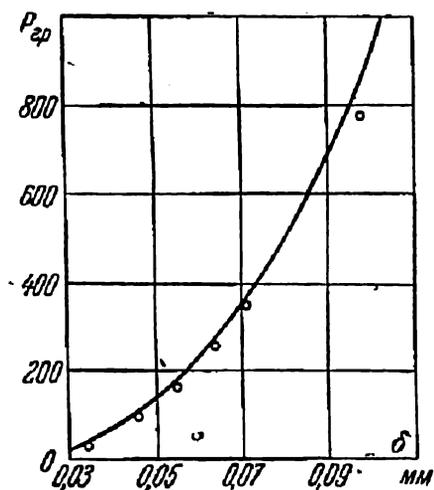


Рис. 23.

$$P = \frac{3\pi E \delta^3}{R}$$

для медных оболочек радиуса $R = 80$ мм. Отдельные точки дают значения критической силы для оболочек различной толщины, над которыми проводился эксперимент. Видно, что экспериментальное значение величины P близко к ее теоретическому значению.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости осесимметрической деформации сферической оболочки при нагружении равномерным внешним давлением p .

В случае равномерного внешнего давления p на оболочку для производимой им работы A имеем

$$A = pV,$$

где V — изменение (при деформации) объема, ограниченного оболочкой.

Изменение объема равно

$$V = \iint_{\tilde{F}} \Delta z \, d\sigma,$$

где Δz — прогиб оболочки в направлении оси z при деформации ее в форму \tilde{F} . На поверхности \tilde{F}

$$\Delta z = p^2 \zeta'.$$

На поверхности \tilde{F}''

$$\Delta z = -(u^2 \rho^2 + \rho^2 \zeta'').$$

Для вычисления величины V удобно разбить ее на две части V' и V'' , соответственно разбиению области интегрирования кривой $u = 1 + \lambda \cos kv$. Вычислим величину V' . Имеем

$$V' = \int_0^{2\pi} \int_{u(v)}^{\infty} \rho^4 \zeta' u \, du \, dv.$$

Подставляя сюда

$$\zeta' = -\frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}} + \dots,$$

получим с точностью до величин порядка λ^2 следующее выражение для V' :

$$V' = \pi \lambda^2 \rho^4 \left(\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)^2}{4k} \right).$$

Вычислим объем V'' . Имеем

$$V'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{u(v)} -\rho^4 (u^2 + \zeta'') u \, du \, dv.$$

Подставляя сюда

$$\zeta'' = -1 - \frac{\lambda(k+1)}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2(k+1)^2}{4} u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots,$$

получим

$$V'' = \frac{\pi \rho^4}{2} + \pi \lambda^2 \rho^4 \left\{ -1 + \frac{k+1}{k} - \frac{(k+1)^2}{4k} + \frac{k^2}{2} \right\}.$$

Складывая V' и V'' , находим V :

$$V = \frac{\pi \rho^4}{2} (1 + \lambda^2 k^2).$$

Для оболочки радиуса R этот результат надо умножить на R^3 . Таким образом, изменение ограничиваемого оболочкой объема равно

$$V = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2).$$

Следовательно, производимая внешним давлением p работа равна

$$A = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2) p.$$

Так же как при сосредоточенном нагружении, в момент перехода к звездной форме выпучивания выполняются условия

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (U - A) \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U - A) \Big|_{\lambda=0} = 0,$$

где

$$A = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2) p,$$

а U имеет прежнее значение. Подставляя в эти условия значения U и A , будем иметь

$$6\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 - 2\pi \rho^3 R^3 p = 0,$$

$$2\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \rho^3 \left(k^2 - \frac{(1 + k^2)^2}{16} \right) + \frac{\pi \rho^3 E \delta^3}{3} (k^3 - k) - \frac{\pi \rho^4 R^3 k^2 p}{2} = 0.$$

Отсюда находим значение ρ , отвечающее критической деформации

$$\rho = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Любопытно, что это значение ρ имеет точно такое же значение, как и в случае сосредоточенного нагружения.

Обозначая, как и раньше, через $r = \rho R$ радиус круга выпучивания, будем иметь

$$r = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{R \delta}.$$

Или, принимая во внимание, что переход к звездной форме выпучивания происходит при $k = 3$ (к звездной форме с тремя вершинами), имеем

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R \delta}.$$

Полученный результат об устойчивости осесимметрической деформации сферической оболочки можно представить в более обозримой форме, если вместо радиуса r круга выпучивания ввести прогиб в центре $2h$. Имеем

$$2h = \frac{r^2}{R}.$$

Подставляя сюда критическое значение r , определяемое по формуле

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R\delta},$$

получим критический прогиб

$$2h = \frac{1}{c^2} \delta.$$

Отсюда

$$\frac{2h}{\delta} = \frac{1}{c^2} \simeq 28.$$

Итак, закритическая деформация пологой сферической оболочки под действием сосредоточенной силы или равномерного внешнего давления является осесимметрической до тех пор, пока прогиб $2h$ в центре области выпучивания удовлетворяет условию

$$\frac{2h}{\delta} \leq \frac{1}{c^2} \simeq 28.$$

§ 6. О нижней критической нагрузке для пологой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении

В гл. 3 мы получили ряд формул, относящихся к закритическим деформациям сферических оболочек. Применение этих формул ограничивалось рядом условий весьма общего и неопределенного содержания, гарантирующих по существу осесимметричность рассматриваемых закритических деформаций. Теперь, когда условия устойчивости осесимметричности деформаций нами выяснены, область применимости указанных формул может быть оценена более определенно.

Для пологого сферического сегмента с кривизной $1/R$, радиусом основания r и толщиной δ в предположении

неограниченной упругости материала оболочки была получена следующая формула для нижней критической нагрузки:

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}.$$

Поскольку при

$$r \leq \frac{1}{c} \sqrt{R\delta}$$

деформации являются заведомо осесимметрическими, то при таких r применение указанной формулы не надо ограничивать никакими условиями, в том числе можно не настаивать и на особой жесткости закрепления края.

Итак, для пологих, неограниченно упругих сферических сегментов, у которых отношение высоты сегмента h к толщине δ удовлетворяет условию

$$\frac{h}{\delta} \leq 14,$$

нижняя критическая нагрузка при равномерном внешнем давлении определяется по формуле

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}.$$

Или, что то же самое,

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

Для сферических оболочек, обладающих ограниченной упругостью, была выведена следующая формула для нижней критической нагрузки при внешнем давлении:

$$p_i = 3c' E \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \left(\frac{E}{\sigma_B} \right).$$

Эта формула получена из того условия, что закритические деформации ограниченно упругих оболочек останавливаются при появлении на границе выпучивания пластических деформаций от изгиба, то есть из условия

$$c' E \frac{r}{R} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{1/2} = \sigma_B, \quad (*)$$

где r — радиус круга выпучивания. Посмотрим, когда определяемая этим условием деформация является осесимметрической.

Подставляя в условие (*) критическое значение

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R\delta},$$

получим

$$\frac{c'}{c} E \frac{\delta}{R} = \sigma_g.$$

Таким образом, рассматриваемые деформации будут осесимметрическими, если

$$\frac{R}{\delta} < \frac{c'E}{c\sigma_g}.$$

Итак, применение формулы

$$p_i = 3cc'E \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \left(\frac{E}{\sigma_g}\right)$$

для нижней критической нагрузки ограничено упругих сферических оболочек при внешнем давлении ограничивается условием

$$\frac{R}{\delta} < \frac{c'E}{c\sigma_g}.$$

Рассмотрим для примера стальную оболочку. Полагая

$$\sigma_g = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

$$c' \simeq 0,9, \quad c \simeq 0,19,$$

получим

$$\frac{R}{\delta} < 2500.$$

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости строго выпуклых оболочек при различных способах нагружения. Основу нашего метода рассмотрения вопроса составляют следующие два соображения:

1) Воспринимаемая оболочкой нагрузка в момент потери устойчивости стационарна и, следовательно, мало изменяется при заметном выпучивании оболочки.

2) При значительном выпучивании деформацию оболочки вне окрестности границы области выпучивания можно считать геометрическим изгибанием.

Исходя из этих соображений, мы сформулируем и обоснуем некоторый общий принцип, который затем будем применять к решению конкретных задач. Этот принцип (будем называть его «принцип В») связан с принципом А (гл. 2, § 2) и он сводит рассмотрение вопроса об устойчивости оболочек к решению некоторой вариационной задачи для функционала, определенного на бесконечно малых изгибаниях исходной поверхности оболочки.

§ 1. Энергия деформации оболочки

Пусть упругая оболочка F находится под действием некоторой нагрузки q , которую пока уточнять не будем. Если нагрузка мала, то упругое состояние оболочки среди форм, близких к F , определяется однозначно. Будем увеличивать нагрузку q . Тогда может наступить такой момент, когда указанным условием близости упругое состояние оболочки однозначно не определяется. Именно, наряду с основной формой упругого равновесия оболочки, для которой деформированная поверхность оболочки остается близка к первоначальной форме (F) и при дальнейшем увеличении нагрузки, существуют другие формы, которые развиваются практически без увеличения действующей нагрузки, причем это развитие сопровож-

дается значительными изменениями внешней формы оболочки. Нагрузка, при которой имеет место указанная неоднозначность упругих состояний оболочки, называется *критической*. Наименьшая критическая нагрузка называется *верхней критической* нагрузкой.

Отмеченная специфика упругих состояний оболочки под действием критической нагрузки — значительные изменения формы при стационарной нагрузке — позволяет свести задачу об определении таких нагрузок к рассмотрению закритических состояний оболочки и применить методы, развитые в гл. 2, к изучению этих состояний.

Пусть потеря устойчивости оболочки под действием данной нагрузки сопровождается выпучиванием области G , ограниченной кривой γ . Исходя из наглядного представления о характере выпучивания, мы полагаем, что существенные деформации оболочка испытывает лишь в окрестности границы области G , а вне этой окрестности форма деформированной оболочки близка к первоначальной. При этом естественно считать, что энергия деформированной оболочки сосредоточена в указанной окрестности. Для определения этой энергии мы воспользуемся теми же соображениями, что и при рассмотрении существенно закритических деформаций в гл. 2, § 2.

Отождествляя изометрическое преобразование исходной поверхности с самой этой поверхностью и воспроизводя рассуждения гл. 2, § 2, получим такое же по форме, как и там, выражение для \bar{U}_γ — энергии деформации оболочки на единицу длины γ (границы области G). Именно,

$$\bar{U}_\gamma = \frac{D}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v'^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{u^2}{\rho^2} ds.$$

Соответствующая формула для существенно закритических деформаций содержала еще два слагаемых. В данном случае эти слагаемые равны нулю.

Напомним, что в формуле для \bar{U}_γ величины u и v обозначают смещения (при деформации) соответственно по направлению главной нормали и бинормали кривой γ той точки поверхности, к которой \bar{U}_γ относится, а через D и D' обозначены жесткости оболочки на изгиб и растяжение — сжатие

соответственно. Перемещения u , v связаны соотношением

$$u' + \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0,$$

где α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательной плоскостью поверхности.

Так же как в гл. 2, § 2, вместо переменных u , v , s вводим новые переменные \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} согласно формулам

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12 \rho^2 \alpha^2}.$$

Здесь ρ — радиус кривизны кривой γ , δ — толщина оболочки.

В новых переменных, черту над которыми для простоты записи опускаем, мы получим

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_{-\bar{s}^*}^{\bar{s}^*} (v'^2 + u^2) ds.$$

Пределы интегрирования \bar{s}^* и $-\bar{s}^*$ неограниченно растут по абсолютной величине вместе с $\rho \alpha / \delta$. Поэтому, ограничиваясь случаем таких оболочек и деформаций, для которых $\delta / \rho \alpha$ мало, пределы интегрирования можно заменить на $\pm \infty$. Тогда

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Как всегда, будем предполагать симметрию функции $v(s)$ и антисимметрию $u(s)$. Тогда можно ограничиться интегрированием в пределах $(0, \infty)$. Поэтому

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Условимся обозначать ту часть области G , которая расположена вне рассматриваемой окрестности кривой γ , через A_1 , саму окрестность — через A_{12} , а оставшуюся часть оболочки — через A_2 . Найденное нами выражение для энергии \bar{U} существенно зависит от формы оболочки в переходной зоне A_{12} , которая (форма) определяется функциями u , v , задающими деформацию. Так же, как при исследовании закритических

деформаций в гл. 2, энергию \bar{U} мы определим из условия минимума при заданной общей деформации. Эту деформацию мы характеризуем прогибом h в области продавливания вблизи данной точки кривой γ , к которой (точке) энергия \bar{U} относится. Все это приобретает точный смысл, когда ширина переходной зоны A_{12} неограниченно убывает.

В исходных переменных v и s величина h допускает очевидное представление

$$h = - \int_{-\bar{\epsilon}^*}^{\bar{\epsilon}^*} v' ds.$$

Если перейти к новым переменным и пределы интегрирования $\bar{\epsilon}^*$ и $-\bar{\epsilon}^*$ заменить на $\pm \infty$, то получим

$$h = - \frac{1}{12^{1/4}} V \sqrt{\delta \rho \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v ds$$

или, учитывая предполагаемую симметрию функции $v(s)$,

$$h = - \frac{2}{12^{1/4}} V \sqrt{\delta \rho \alpha} \int_0^{\infty} v ds.$$

Таким образом, энергия \bar{U} , а следовательно, и функции u , v , от которых она зависит, определяются из условия минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{-1/2}}{12^{3/4} (1 - v^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при добавочном ограничении

$$- \frac{2}{12^{1/4}} V \sqrt{\delta \rho \alpha} \int_0^{\infty} v ds = h = \text{const.}$$

Варьируемые функции u , v , помимо указанной интегральной связи, удовлетворяют еще соотношению

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (*)$$

и обращаются в нуль на бесконечности.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала \bar{U} . В связи с этим прежде всего преобразуем связь

$$-\frac{2\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^\infty v \, ds = h$$

при помощи соотношения (*). Если это соотношение проинтегрировать в пределах $(-\infty, \infty)$ и учесть при этом, что $u(-\infty) = u(\infty) = 0$, то получим

$$-\int_{-\infty}^\infty v \, ds = \int_{-\infty}^\infty \frac{v^2}{2} \, ds.$$

Отсюда, принимая во внимание симметрию функции $v(s)$, получим

$$-\int_0^\infty v \, ds = \int_0^\infty \frac{v^2}{2} \, ds.$$

Следовательно, интегральная связь, которой подчинена функция $v(s)$, может быть представлена в виде

$$\frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^\infty v^2 \, ds = h.$$

Итак, наша вариационная задача состоит в определении минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-v^2)} \int_0^\infty (v'^2 + u^2) \, ds$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^\infty v^2 \, ds &= h = \text{const}, \\ u' + v + \frac{v^2}{2} &= 0, \\ u(0) = u(\infty) = v(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} (*)$$

Поскольку нас интересует начальная стадия закритической деформации, то в соотношении (*) слагаемым $v^2/2$ можно пренебречь, придав, таким образом, этому соотношению со-

всем простую форму

$$u' + v = 0.$$

Если теперь всюду заменить v на $-u'$, то мы приходим к задаче о минимуме функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_0^\infty (u'^2 + u^2) ds$$

с интегральной связью

$$\frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^\infty u'^2 ds = h = \text{const}$$

и краевых условиях для варьируемой функции

$$u(0) = u(\infty) = 0.$$

Согласно методу Эйлера — Лагранжа, наша вариационная задача сводится к рассмотрению безусловного экстремума функционала

$$W = \int_0^\infty \left\{ \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} (u^2 + u'^2) - \lambda \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} u'^2 \right\} ds,$$

где λ — некоторое постоянное.

Полагая для краткости

$$\sigma = \frac{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho\lambda}{E\alpha^2\delta^2},$$

можем считать, что речь идет об экстремуме функционала

$$J = \int_0^\infty (u^2 + u'^2 - \sigma u'^2) ds,$$

который отличается от W только постоянным множителем.

Уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала J будет

$$u^{IV} + u + \sigma u'' = 0.$$

Его общее решение —

$$u(s) = \sum c_k e^{\omega_k s},$$

где ω_k — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 + \sigma\omega^2 = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить краевому условию $u(\infty) = 0$, надо, чтобы среди характеристических корней ω_k были два корня с отрицательной вещественной частью. Если эти корни обозначить ω_1 и ω_2 , то решение нашей вариационной задачи дает функция $u(s)$ вида

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s}.$$

Для того чтобы удовлетворить и второму краевому условию

$$u(0) = 0,$$

надо потребовать, чтобы

$$c_1 = -c_2 = c.$$

При этом для функции $u(s)$ получается выражение

$$u = c(e^{\omega_1 s} - e^{\omega_2 s}).$$

Подставим найденную функцию в выражение функционала \bar{U} и в связь. Тогда получим

$$\int_0^{\infty} u'^2 ds = -c^2 \left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} - \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right),$$

$$\int_0^{\infty} u^2 ds = -c^2 \left(\frac{1}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_2} - \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \right),$$

$$\int_0^{\infty} u''^2 ds = -c^2 \left(\frac{\omega_1^3}{2} + \frac{\omega_2^3}{2} - \frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} \right).$$

Замечая, что в нашем случае корни ω_1 и ω_2 попарно сопряжены и равны единице по абсолютной величине, можем записать

$$\omega_1 = e^{i\theta}, \quad \omega_2 = e^{-i\theta}.$$

Подстановка этих значений в наши интегралы дает

$$\int_0^{\infty} u'^2 ds = c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

$$\int_0^{\infty} (u^2 + u''^2) ds = c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2 + 4 \cos^2 \theta).$$

Отсюда

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} (2 + 4 \cos^2 \vartheta), \quad h = \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

Следовательно,

$$\bar{U} = \frac{E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} (2 + 4 \cos^2 \vartheta).$$

Минимум \bar{U} при $h = \text{const}$ достигается при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. И мы получаем следующее окончательное выражение для энергии деформации:

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho}.$$

§ 2. Формулировка принципа В и его обоснование

Пусть потеря устойчивости оболочки под действием данной нагрузки сопровождается выпучиванием области Q , ограниченной кривой γ . Так же как и при рассмотрении существенно закритических деформаций в гл. 2, будем приближать форму оболочки после потери устойчивости и заметном выпучивании изометрическим преобразованием исходной поверхности. Принимая во внимание, что существенные деформации оболочка испытывает лишь в окрестности границы выпучивания, мы представляем себе, что это изометрическое преобразование сопровождается появлением двух ребер γ' и γ'' , близких к γ (рис. 24).

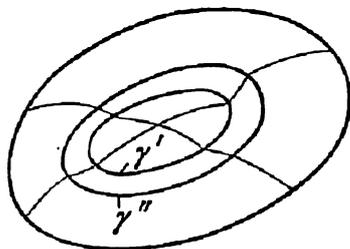


Рис. 24.

Если γ' и γ'' являются плоскими кривыми, то примером такого изометрического преобразования является зеркальное отражение области, ограниченной кривой γ'' , с последующим зеркальным отражением ее части, ограниченной кривой γ' . Чтобы сократить обозначения, предположим, что кривая γ'' совпадает с γ . Кроме того, для определенности будем считать, что кривая γ' расположена внутри области Q и ограничивает область Q' .

Рассмотрим задачу об изометрическом преобразовании поверхности F с продавливанием области G' и образованием ребер вдоль кривых γ и γ' .

Некоторую неопределенность этой задачи мы устраним требованием, чтобы искомая поверхность внутри области G' и вне области G была одинаково ориентирована с F , а в области G вне области G' имела противоположную ориентацию.

Если кривая γ' совпадает с γ , то задача имеет тривиальное решение. Изометрически преобразованная поверхность есть сама поверхность F . Естественно предположить, что при достаточной близости кривых γ и γ' изометрическое преобразование поверхности F отличается существенными деформациями только в полосе между этими кривыми. Что касается остальной части поверхности, то здесь конечные изгибания могут быть заменены бесконечно малыми.

Имея в виду конкретные приложения, мы не будем выяснять строение преобразованной поверхности в полосе между кривыми γ и γ' , так как в действительности деформация в этой полосе для упругой оболочки определяется энергетическими соображениями. Изгибание указанной полосы мы охарактеризуем некоторым общим свойством, которое позволит нам выяснить условия сопряжения бесконечно малых изгибаний вне области G и внутри области G' при переходе к пределу:

$$\gamma' \rightarrow \gamma.$$

Пусть P — произвольная точка на кривой γ . Проведем из этой точки внутрь области G геодезический перпендикуляр до пересечения с кривой γ' в точке P' . Пусть s — длина этого перпендикуляра. При переходе от поверхности F к изометрически преобразованной поверхности точки P и P' получают смещения τ_P и $\tau'_{P'}$, где τ и τ' обозначают изгибающие поля поверхности F в соответствующих областях. Определим разность $\tau_P - \tau'_{P'}$, предполагая достаточную близость кривых γ и γ' .

Образование ребра по линии γ при изометрическом преобразовании поверхности F сопровождается поворотом касательной плоскости около касательной к кривой γ . При переходе к пределу $\gamma' \rightarrow \gamma$ этот поворот сводится к зеркальному отражению в соприкасающейся плоскости кривой γ . Отсюда следует, что при достаточной близости кривых γ и γ' век-

тор $\tau_P - \tau'_P$, можно считать направленным перпендикулярно соприкасающейся плоскости кривой γ , то есть по бинормали этой кривой. Тогда

$$\tau_P - \tau'_P = \sigma e,$$

где e — единичный вектор бинормали. Что касается множителя σ , то при малом угле α между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательными плоскостями поверхности он равен $2\alpha s$.

Как указано выше, в связи с предстоящими приложениями нас будет интересовать случай близких кривых γ' и γ . В связи с этим мы переходим к пределу $\gamma' \rightarrow \gamma$. Теперь задача об изгибании поверхности F состоит в том, чтобы найти поля бесконечно малых изгибаний — поле τ' внутри области Q и τ — вне этой области, которые на общей границе областей γ удовлетворяют условию

$$\tau - \tau' = \sigma e. \quad (*)$$

Здесь e — единичный вектор бинормали кривой γ , а σ — некоторая функция, заданная на этой кривой. Условие (*) мы будем называть условием сопряжения.

Зная изгибающие поля τ и τ' , мы знаем форму деформированной оболочки вне окрестности границы выпучивания γ , следовательно, мы можем определить энергию деформации U и производимую внешней нагрузкой работу A . Действительно, в выражении энергии деформации \bar{U} (§ 1) содержится величина h — прогиб в области выпучивания вблизи границы γ (точнее, изменение прогиба при переходе через границу). Этот прогиб есть не что иное, как величина σ , входящая в условие сопряжения полей τ и τ' . Таким образом, можно считать, что энергия деформации определяется изгибающими полями. Далее, поскольку изгибающие поля определяют в основном форму деформированной оболочки, то при заданной нагрузке они определяют производимую этой нагрузкой работу при деформации.

Мы видим, что состоянию упругого равновесия оболочки с выпучиванием под действием критической нагрузки соответствует поле бесконечно малого изгибания с разрывами вдоль некоторых линий, которое, как обычно, сообщает функционалу

$$W = U - A$$

стационарное значение.

Таким образом, мы приходим к следующему принципу В.

Если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала

$$W = U - A$$

на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности оболочки имеет нетривиальное решение, то есть изгибающее поле, являющееся решением, не равно нулю тождественно.

Функционал W определен на полях бесконечно малых изгибаний с разрывами, удовлетворяющими условию

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где $\tau - \tau'$ — разрыв изгибающего поля, а e — единичный вектор бинормали кривой γ , вдоль которой происходит разрыв.

Слагаемое U функционала W определяется по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E\delta^2\alpha^2\sigma}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} ds.$$

Здесь ρ — радиус кривизны кривой γ , где происходит разрыв изгибающего поля; α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательной плоскостью поверхности; σ — составляющая разрыва изгибающего поля по бинормали кривой γ , δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по дуге s кривой γ .

Слагаемое A функционала W определяется обычным образом как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

Решение задачи по определению критической нагрузки с помощью принципа В сопряжено с известными трудностями, так как мы не знаем ни линий разрыва для изгибающего поля, ни характера разрыва (функцию σ). Однако, в конкретных задачах мы можем получить соответствующую информацию из данных опыта и таким образом устранить указанное затруднение.

В заключение мы хотим обратить внимание еще на одно обстоятельство, связанное с применением принципа В. Если действующая на оболочку нагрузка сосредоточена вдоль некоторой линии и потеря устойчивости происходит так, что

эта линия оказывается в окрестности границы выпучивания, то, определяя работу A , производимую нагрузкой, необходимо учитывать форму деформированной оболочки в указанной окрестности. Как это следует делать, мы покажем в § 4 на конкретном примере потери устойчивости пологой оболочки вращения под действием нормального внешнего давления, равномерно распределенного вдоль некоторой параллели.

§ 3. Определение критической нагрузки для строго выпуклых оболочек при равномерном внешнем давлении. Другие способы нагружения

Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под внешним давлением p . Когда давление достигает критического значения, оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Пусть G — область выпучивания и γ — ограничивающая ее кривая. Согласно принципу В, при критическом нагружении вариационная задача для функционала

$$W = U - A,$$

определяемого на бесконечно малых изгибаниях с разрывом непрерывности вдоль γ , имеет нетривиальное решение. Воспользуемся этим свойством критической нагрузки для ее определения.

Прежде всего, мы ограничим класс изгибающих полей, на которых рассматривается функционал W . Для этого воспользуемся условием жесткости закрепления оболочки вдоль края.

Пусть τ' — изгибающее поле вне области G , а τ — изгибающее поле внутри этой области. На границу γ области G поля τ и τ' удовлетворяют условию сопряжения

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где e — единичный вектор бинормали кривой γ . В силу жесткости закрепления края поверхности мы должны считать поле τ' на краю поверхности равным нулю. А тогда по известной теореме оно равно нулю на всей поверхности, то есть вне области G . Отсюда, принимая во внимание условие сопряжения полей τ' и τ , заключаем, что на кривой γ

$$\tau = \sigma e.$$

Исходя из наглядной картины деформации, можно считать, что кривая γ мало отличается от плоской кривой, и что $\sigma \simeq \text{const}$, а при таких условиях соответствующие бесконечно малые изгибания мало отличаются от тривиальных.

Таким образом, жесткость закрепления края поверхности предопределяет форму области выпучивания и характер изгибающих полей. Именно, область выпучивания ограничена плоской кривой, причем вне этой области изгибающее поле $\tau' = 0$, а внутри области изгибающее поле $\tau = a \times r + b$, где r — радиус-вектор поверхности, a и b — постоянные векторы.

Заметим, что приближение формы деформированной оболочки бесконечно малым изометрическим преобразованием,

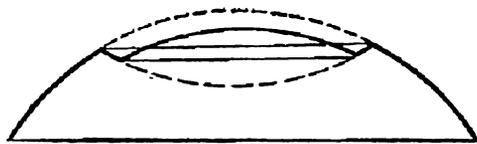


Рис. 25.

которое мы получили, есть по существу приближение двукратным зеркальным отражением. Здесь роль кривых γ' и γ'' , близких к γ , играют плоские кривые. Изометрическое преобразование

состоит в зеркальном отражении области, ограниченной кривой γ' , в плоскости этой кривой, и затем зеркальное отражение ее части, ограниченной кривой γ'' , в плоскости последней (рис. 25).

Введем систему декартовых координат, приняв касательную плоскость поверхности, параллельную плоскости кривой γ , за плоскость xu , а точку касания P — за начало координат. Оси координат x и y направим по главным направлениям поверхности в точке P . Так как поле $\tau = a \times r + b$, то для его составляющей ζ по оси z получим

$$\zeta = c_1 x + c_2 y + h,$$

где x , y — координаты точки, в которой вычисляется эта составляющая, а c_1 , c_2 и h — постоянные.

Предположим теперь, что область выпучивания мала. В этом случае она имеет форму эллипса, подобного индикатрисе кривизны в точке P , и ее граница γ может быть задана уравнениями

$$x = \lambda \sqrt{R_1} \cos t, \quad y = \lambda \sqrt{R_2} \sin t.$$

Здесь R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в центре выпучивания P , а λ — параметр, характеризующий размеры области выпучивания.

Вычислим энергию деформации оболочки. Имеем

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E\delta^2\alpha^2\zeta}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} ds.$$

Здесь α — угол между плоскостью кривой γ и касательной плоскостью поверхности вдоль кривой, ρ — радиус кривизны кривой γ , а ζ — прогиб в области выпучивания вдоль кривой γ .

Определим величины α и ρ , входящие в формулу для энергии деформации U . Имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{(R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

По формуле Менье угол

$$\alpha \simeq \rho k_n,$$

где k_n — нормальная кривизна поверхности оболочки в направлении касательной кривой γ . По формуле Эйлера кривизна

$$k_n = \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1 \sin^2 t}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{R_2 \cos^2 t}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t} \right),$$

то есть

$$k_n = \frac{1}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t}.$$

Элемент дуги кривой γ равен

$$ds = \lambda(R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t)^{1/2} dt.$$

Подставляя найденные значения в формулу для U , получим

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{2E\delta^2\zeta^2 \lambda^2 dt}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\sqrt{R_1 R_2}},$$

то есть

$$U = \frac{4\pi E\delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Вычислим теперь производимую внешней нагрузкой работу A . Имеем

$$A = Qh.$$

Здесь Q — суммарная нагрузка, действующая на область выпучивания, а h — прогиб в центре выпучивания P . Очевидно,

$$Q = pS,$$

где S — площадь области выпучивания, а p — давление. В рассматриваемом случае площадь S , как площадь эллипса с полуосями $\lambda\sqrt{R_1}$ и $\lambda\sqrt{R_2}$, равна

$$\pi\lambda^2\sqrt{R_1R_2}.$$

Следовательно,

$$A = Qh = pSh = \pi p\sqrt{R_1R_2}h\lambda^2.$$

Теперь из условия равновесия

$$d(U - A) = 0$$

находим воспринимаемую оболочкой нагрузку. Имеем

$$d\left\{\frac{4\pi E\delta^3 h\lambda^2}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\sqrt{R_1R_2}} - \pi p\sqrt{R_1R_2}h\lambda^2\right\} = 0.$$

Отсюда

$$p = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{R_1R_2}.$$

Как и следовало ожидать, нагрузка p стационарна по отношению к параметру $h\lambda^2$, характеризующему выпучивание.

Итак, верхнее критическое давление p_e для пологой строго выпуклой оболочки, жестко закрепленной по краю, определяется по формуле

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{R_1R_2},$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны оболочки, δ — толщина ее, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Заметим, что $1/R_1R_2$ есть гауссова кривизна. Поэтому формулу можно записать еще и в таком виде:

$$p_e = \frac{2E\delta^3K}{\sqrt{3}(1-\nu^2)},$$

где K — гауссова кривизна срединной поверхности оболочки.

Для сферической оболочки радиуса R имеем

$$R_1 = R_2 = R,$$

и формула для величины критического давления принимает вид

$$p_c = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

Ввиду того, что

$$1 - \nu^2 \simeq 1,$$

эта формула дает по существу хорошо известный результат для сферических оболочек

$$p_c = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

Из формулы, определяющей величину воспринимаемого оболочкой давления при выпучивании, мы видим, что эта величина не зависит от параметра $h\lambda^2$, характеризующего деформацию, в частности, от размера области выпучивания (параметр λ). Отсюда естественно сделать вывод, что при неравномерном, но медленно меняющемся внешнем давлении на оболочку критическая нагрузка определяется величиной максимального давления.

Рассмотрим теперь другие случаи нагружения оболочки внешним давлением, где условие непрерывности распределения нагрузки по поверхности оболочки существенно не выполняется. Таковыми являются, в частности, нагружение внешним давлением, равномерно распределенным вдоль некоторой линии, нагружение сосредоточенной силой, нормальной к поверхности оболочки, и комбинированное нагружение равномерным внешним давлением и сосредоточенной силой.

Начнем с изучения потери устойчивости оболочки под нагрузкой, непрерывно распределенной вдоль некоторой линии. Нетрудно привести пример, где такое нагружение реализуется. Мы имеем в виду нагружение оболочки давлением туго натянутой на нее нити. Рассмотрим задачу о потере устойчивости и критической нагрузке в этой конкретной постановке.

Итак, пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, испытывает давление туго натянутой на нее нити (рис. 26, а). При некотором натяжении нити Q оболочка теряет устойчивость с образованием областей выпучивания

вдоль линии прилегания нити (рис. 26, б). Определим величину этого критического натяжения.

В отличие от рассмотренного случая давления, распределенного по поверхности, где потеря устойчивости сопровождается выпучиванием сразу некоторой конечной области, в данном случае выпучивание распространяется с некоторого центра на линии прилегания нити к оболочке.

Представляется естественным приближать форму оболочки при закритической деформации с помощью простого зеркального выпучивания, как это делалось в гл. 3. При этом для энергии U упругой деформации оболочки получается выражение

$$U = \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2).$$

Здесь $2h$ — прогиб в центре выпучивания, k_1 и k_2 — главные кривизны оболочки, δ — толщина, E — модуль упругости, а постоянная $c \simeq 0,19$.

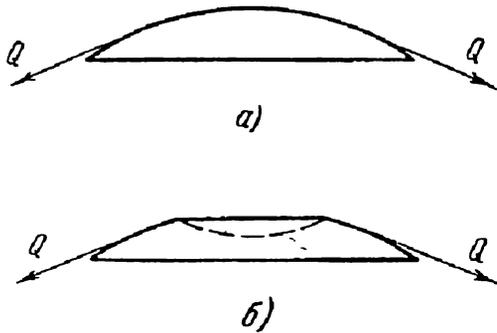


Рис. 26.

Производимая натяжением нити Q работа равна

$$A = Q\Delta l,$$

где Δl — общее перемещение концов нити, связанное с выпучиванием оболочки.

Предполагая, что трение между нитью и оболочкой отсутствует, и, следовательно, нить прилегает к оболочке по некоторой дуге AB геодезической линии, без труда находим Δl . Оно равно разности между дугой AB и хордой, соединяющей ее концы. Если обозначить нормальную кривизну поверхности оболочки в направлении нити через k_n , а прогиб в центре выпучивания через $2h$, то

$$\Delta l = \frac{1}{3} (2h)^{3/2} \sqrt{k_n}. \quad (*)$$

Действительно, если ввести декартовы координаты x , y , z , приняв соприкасающуюся плоскость нити в центре выпучивания за плоскость xy , а касательную за ось x , то нить, прилегая к поверхности по геодезической, будет

задаваться уравнениями

$$y = \frac{k_n x^2}{2} + O(x^3), \quad z = O(x^3),$$

где через $O(x^3)$ обозначены величины, имеющие порядок x^3 .

Если хорда AB имеет длину $2d$, то длина дуги AB равна

$$s = \int_{-d}^d \sqrt{1 + k_n^2 x^2} dx \simeq 2d + \frac{k_n^2 d^3}{3}.$$

Или, замечая, что $2h \simeq k_n d^2$, получим

$$s = 2d + \frac{1}{3} (2h)^{3/2} \sqrt{k_n}.$$

Отсюда и получается указанное по формуле (*) значение Δl .

Подставляя значение Δl в выражение работы A , получим

$$A = \frac{1}{3} Q (2h)^{3/2} \sqrt{k_n}.$$

Теперь из условия равновесия оболочки

$$d(U - A) = 0,$$

где варьируется прогиб $2h$, находим воспринимаемую оболочкой нагрузку Q . Имеем

$$d \left\{ \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2) - \frac{1}{3} Q (2h)^{3/2} \sqrt{k_n} \right\} = 0.$$

Отсюда

$$Q = 3\pi c E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{k_n}}.$$

Мы видим, что как и в рассмотренном случае непрерывного нагружения поверхности оболочки, натяжение Q стационарно по отношению к параметру $2h$, характеризующему выпучивание.

Итак, критическое натяжение Q_e нити, при котором оболочка может потерять устойчивость и начать выпучиваться, определяется по формуле

$$Q_e = 3\pi c E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{k_n}}.$$

Для сферической оболочки радиуса R имеем

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R},$$

и формула для величины критического натяжения принимает вид

$$Q_c = 6\pi c E \delta^3 \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Вопрос о сосредоточенном нагружении строго выпуклой оболочки нами уже рассматривался в гл. 3, § 3, где показано, что такое нагружение не приводит к потере устойчивости.

Рассмотрим потерю устойчивости жестко закрепленной по краю пологой строго выпуклой оболочки под действием равномерного внешнего давления p , меньшего верхнего критического значения

$$p_c = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{\delta^2}{R_1 R_2},$$

и значительной сосредоточенной силы Q , действующей нормально к поверхности оболочки. Форму оболочки при таком нагружении, как и в случае нагружения равномерно распределенного вдоль линии, естественно приближать простым зеркальным отражением.

Энергия деформации оболочки при зеркальном выпучивании

$$U = \pi c E (2h)^3 \delta^{5/2} (k_1 + k_2),$$

где $2h$ — прогиб в центре выпучивания, а k_1 и k_2 — главные кривизны оболочки. Производимая внешним давлением p работа при выпучивании оболочки равна (гл. 3, § 4)

$$A_1 = \frac{2\pi h^2 p}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Работа, производимая сосредоточенной силой Q , будет

$$A_2 = 2hQ.$$

В случае упругого равновесия оболочки

$$\frac{dW}{dh} = 0, \quad W = U - A_1 - A_2.$$

Отсюда находим соотношение между действующей на оболочку нагрузкой (p, Q) и деформацией, которую она вызывает ($2h$):

$$3\pi c E \sqrt{2h} \delta^{5/2} (k_1 + k_2) - \frac{4\pi h p}{\sqrt{k_1 k_2}} - 2Q = 0.$$

Состояние равновесия оболочки будет устойчивым или неустойчивым смотря по тому, будет ли $d^2 W/dh^2$ больше нуля или меньше нуля. Критическое состояние определяется равенством

$$\frac{d^2 W}{dh^2} = 0,$$

то есть

$$3\pi c E \frac{1}{\sqrt{2h}} \delta^{5/2} (k_1 + k_2) - \frac{4\pi p}{\sqrt{k_1 k_2}} = 0.$$

Если подставить определяемое этим равенством значение h в условие равновесия оболочки, то мы получим *соотношение между величинами p и Q , отвечающими критическому нагружению*:

$$pQ = \frac{9}{16} \pi c^3 E^2 \delta^3 (k_1 + k_2)^2 \sqrt{k_1 k_2}.$$

Для сферической оболочки радиуса R

$$pQ = \frac{9}{4} \pi c^3 E^2 \delta^3 \frac{1}{R^3}.$$

§ 4. Потеря устойчивости пологих строго выпуклых оболочек под действием внешней нагрузки, передаваемой через жесткую опору

В настоящем параграфе мы рассмотрим потерю устойчивости оболочки при сосредоточенном нагружении, которое передается на оболочку через жесткий элемент. Мы рассмотрим три случая такого нагружения: сосредоточенной силой, действующей на жестко скрепленную с оболочкой опору, моментом, действие которого передается через опору, и нагружение оболочки вращения сосредоточенной силой через жесткое кольцо, прилегающее к оболочке вдоль некоторой параллели. Начнем с первого случая.

Пусть оболочка усилена по некоторой области H жестким элементом, на который действует сила Q , нормальная к поверхности оболочки (рис. 27). В момент потери устойчивости происходит выпучивание оболочки по некоторой области G , охватывающей опору H .

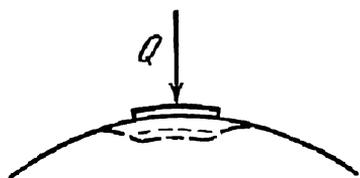


Рис. 27.

Энергия деформации, связанная с выпучиванием, будет (§ 3)

$$U = \frac{4\pi E\delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}},$$

где h — прогиб в центре выпучивания, λ — параметр, характеризующий размер области выпучивания. Производимая силой Q работа при деформации равна

$$A = Qh.$$

Критическое значение Q , определяемое из условия стационарности функционала $W = U - A$, будет

$$Q = \frac{4\pi E\delta^2 \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}}.$$

Граница области выпучивания в соответствующих координатах (см. § 3) задается уравнениями

$$x = \lambda \sqrt{R_1} \cos t, \quad y = \lambda \sqrt{R_2} \sin t.$$

Площадь области выпучивания равна

$$S = \pi \lambda^2 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя определяемое этим соотношением значение λ в формулу для Q , получим

$$Q = \frac{2E\delta^2 S}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) R_1 R_2}.$$

Наименьшее значение нагрузки Q , способной вызвать потерю устойчивости оболочки, соответствует минимуму S . Этот минимум есть площадь эллипса, подобного и подобно расположенного индикатрисе кривизны, описанного около области опоры H . Если эту площадь обозначить $S(H)$, то наименьшая сила Q_e , вызывающая потерю устойчивости оболочки, определяется по формуле

$$Q_e = \frac{2E\delta^2 S(H)}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) R_1 R_2}.$$

Рассмотрим в качестве примера сферическую оболочку радиуса R . Пусть жесткий элемент H , через который передается действие силы Q , имеет форму круга радиуса ρ . В этом случае $S(H) = \pi\rho^2$ и, следовательно, критическая сила равна

$$Q_c = \frac{2\pi E\rho^2\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)R^2}.$$

Пусть теперь к жесткому элементу H , подкрепляющему оболочку, приложен момент M , действующий в плоскости, нормальной к поверхности оболочки. В момент потери устойчивости действие момента M эквивалентно паре сил Q , одна из которых приложена к H в центре выпучивания, а другая на его границе. Энергия деформации оболочки

$$U = \frac{4\pi E\delta^2 h\lambda^2}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Производимая моментом M работа при деформации

$$A = Qh = \frac{M}{d}h,$$

где d — плечо пары сил Q . Из условия стационарности функционала $W = U - A$ для момента M , вызывающего выпучивание, получаем выражение

$$M = \frac{2\pi E\delta^2 \lambda^2 d}{\sqrt{3}(1-\nu^2)\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (*)$$

Величина $2d$ имеет простой геометрический смысл. Это диаметр области выпучивания в сечении поверхности плоскостью момента M . Наименьшее значение M , определяемое по формуле (*), получается в том случае, когда область выпучивания минимальна. В этом случае она представляет собой эллипс, подобный и подобно расположенный индикатрисе кривизны, описанный около области H . Пусть $S(H)$ — площадь этого эллипса, а $2d$ — его диаметр в плоскости момента M . Тогда *наименьший момент, действующий на оболочку через опору H и способный вызвать потерю устойчивости, определяется по формуле*

$$M_c = \frac{E\delta^2 S(H)}{\sqrt{3}(1-\nu^2)R_1 R_2} d(H).$$

Для сферической оболочки радиуса R с опорой в виде круга радиуса ρ $S(H) = \pi\rho^2$, а $d(H) = 2\rho$. Соответственно критический момент равен

$$M_c = \frac{2\pi E \rho^3 \delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2) R^2}.$$

Рассмотрим вопрос о потере устойчивости и критической нагрузке для пологой оболочки вращения, находящейся под действием внешнего давления, равномерно распределенного вдоль некоторой параллели. При рассмотрении этого вопроса принцип В непосредственно применить нельзя. Причина состоит в следующем. Если действующая на оболочку нагрузка непрерывно распределена по поверхности, то энергия деформации локализована в окрестности границы выпучивания, в то время как нагрузка в основном находится вне этой окрестности. Именно на этом основании мы при определении энергии деформации просто минимизировали функционал U , игнорируя действующую на оболочку нагрузку в окрестности границы выпучивания. В рассматриваемой теперь задаче нагрузка, как и энергия деформации, сосредоточена в окрестности границы выпучивания. Поэтому, варьируя форму оболочки в указанной окрестности, нельзя игнорировать производимую внешней нагрузкой работу.

Пусть для определенности действующее на оболочку усилие Q передается через жесткое кольцо, прилегающее к оболочке по параллели радиуса ρ . При этом естественно предположить, что деформация оболочки в момент потери устойчивости обладает осевой симметрией. Выражение энергии деформации в нормированных переменных u , v , задающих деформацию, имеет вид

$$U = \frac{\pi E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{*1/2}}{12^{3/4} (1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Производимая давлением кольца работа при выпучивании оболочки равна

$$A = \frac{Q}{12^{1/4}} \sqrt{\delta \rho^* \alpha} \int_{-\infty}^{s^*} v ds.$$

В этих формулах ρ^* — радиус круга выпучивания, а s^* — значение безразмерного параметра s , отвечающее радиусу кольца.

Из наглядных соображений естественно считать, что $\rho^* = \rho$. Что касается величины s^* , то о ней можно сказать следующее. Очевидно, прогиб будет максимальным вдоль параллели, где прилегает кольцо. Поэтому s^* соответствует максимуму интеграла, определяющего прогиб. Таким образом, можно считать, что

$$\int_{-\infty}^{s^*} v ds = \max_{(s)} \int_{-\infty}^s v ds.$$

Определение состояния упругого равновесия при заметном выпучивании сводится к задаче на экстремум функционала

$$W = U - A,$$

где варьируемые функции u , v связаны соотношением

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (**)$$

и удовлетворяют краевым условиям

$$u(\infty) = u(-\infty) = 0, \quad v(\infty) = v(-\infty) = 0.$$

Эта вариационная задача решается численно следующим способом. Исходя из наглядного представления о характере рассматриваемых деформаций, считаем функцию $v(s)$ в окрестности параллели, где происходит нагружение, функцией вида

$$v(s) = \lambda(\sigma - |s|), \quad |s| \leq \sigma,$$

где λ и σ — некоторые параметры. При этом функция $u(s)$ в том же интервале $|s| \leq \sigma$ определяется связью (**). Вне этого интервала, то есть при $|s| \geq \sigma$, функции u , v определяются из условия стационарности функционала U и условия гладкости сопряжения со значениями внутри интервала.

Если указанным способом найти функции $u(s)$, $v(s)$ и подставить их в выражения функционалов U и A , то последние станут определенными функциями параметров λ и σ . Теперь, фиксируя значение функции A , то есть значение интеграла

$$K = \int_{-\infty}^{s^*} v ds,$$

будем искать минимум функции U или, что то же самое, минимум интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Обозначим этот минимум $J(K)$. Теперь наша вариационная задача сводится к задаче на экстремум функции

$$W = \frac{\pi E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \rho^{1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} J(K) - \frac{Q}{12^{1/4}} \sqrt{\delta \rho \alpha} K.$$

Из условия стационарности этой функции находим воспринимаемую оболочкой нагрузку Q при выпучивании:

$$Q = \frac{\pi E \delta^2 \alpha^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{dJ}{dK}.$$

Верхнее критическое давление отвечает максимуму dJ/dK . Численный расчет по описанной схеме дает для этой величины dJ/dK значение ≈ 3 .

Следовательно, критическое усилие Q_e , действующее на пологую оболочку вращения через жесткое

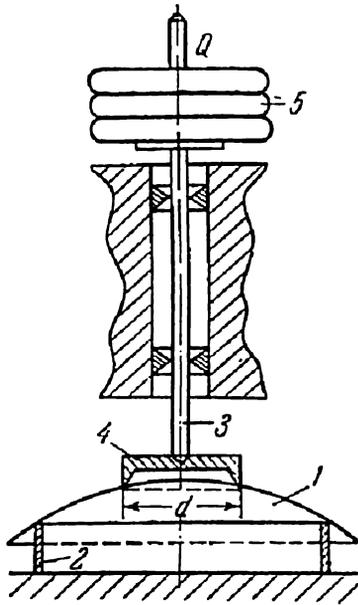


Рис. 28.

кольцо, определяется по формуле

$$Q_e = \frac{3\pi E \delta^2 \alpha^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)}.$$

Напомним, что здесь ρ — радиус параллели, по которой прилегает кольцо к оболочке, α — угол между плоскостью параллели и касательными плоскостями поверхности, δ — толщина оболочки, а E и ν — упругие постоянные материала. Для сферической оболочки радиуса R имеем $\alpha \approx \rho/R$ и, следовательно,

$$Q_e = \frac{3\pi E \delta^2 \rho^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) R^2}.$$

Формула для критического усилия Q_e в случае сферической оболочки была подвергнута экспериментальной проверке. Испытуемая сферическая оболочка 1 свободно опиралась на жесткое кольцо 2 (рис. 28). Действие груза Q через

вертикальный стержень 3 передавался на колпачок 4, который опирался на оболочку вдоль параллели диаметра $d = 2r$.

Эксперимент заключался в том, что груз Q , состоящий из стальных шайб 5, постепенно увеличивался до момента потери устойчивости оболочки, которая сопровождалась отчетливым щелчком и резким опусканием стержня 3. Значение Q , отвечающее моменту потери устойчивости оболочки, принималось за верхнее критическое значение.

Для одной и той же оболочки опыт проводился четыре раза с четырьмя различными колпачками 4, диаметром $d = 8, 10, 12$ и 14 мм. Так же как и в предыдущих экспериментах, образцы сферических оболочек получались из меди путем напыления в вакууме на стальную форму.

На рис. 29 представлены графики зависимости верхней критической нагрузки Q_c от диаметра $d = 2r$ параллели, вдоль которой распределяется давление. Три кривые отвечают трем различным оболочкам с одним и тем же радиусом кривизны $R = 150$ мм, но различными толщинами $\delta = 0,047, \delta = 0,055, \delta = 0,072$ мм.

Отдельные точки, изображенные кружками, дают экспериментальные значения верхней критической нагрузки Q_c , отвечающей четырем различным значениям $d = 8, 10, 12$ и 14 мм. Как видим, экспериментальные значения практически не отличаются от теоретических.

§ 5. Потеря устойчивости трехслойных оболочек

Полученные нами результаты об устойчивости пологих строго выпуклых оболочек при различных способах нагружения могут быть перенесены на случай так называемых трехслойных оболочек. Трехслойная оболочка состоит из

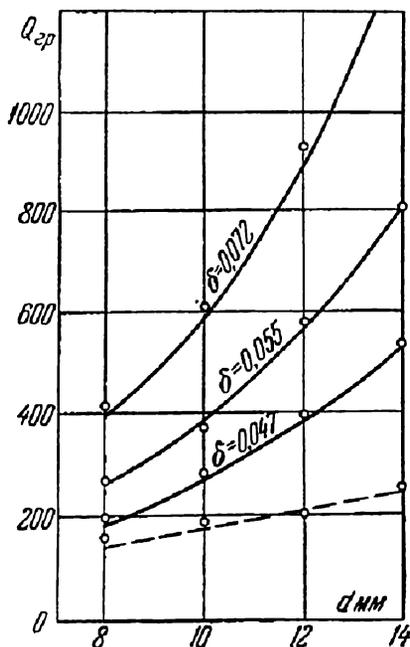


Рис. 29.

тонких наружных слоев, изготовленных из материала с высокими механическими характеристиками, и сравнительно толстого слоя заполнителя, изготовленного из слабого материала. Так же как и для обычных оболочек, при выпучивании трехслойной оболочки энергия ее деформации сосредоточена в основном на границе области выпучивания и она состоит из энергии деформации наружных слоев и энергии деформации заполнителя.

Обозначая через u и v смещения (при деформации) точек поверхности оболочки в касательной плоскости и по нормали соответственно, мы получили для энергии деформации наружных слоев на единицу длины γ границы выпучивания следующее выражение:

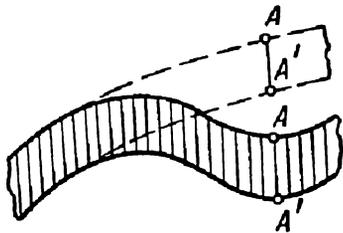


Рис. 30.

$$\bar{U}_e = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} \left(\frac{\delta^2 v''^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds.$$

Здесь δ — толщина наружных слоев, ρ — радиус кривизны γ , E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по окрестности условной границы выпучивания γ .

Для того чтобы получить энергию деформации среднего слоя (заполнителя), мы предположим, что наружные слои деформируются одинаково (рис. 30). При этом в среднем слое получают деформации сдвига, определяемые производной функции v , и энергия деформации на единицу объема заполнителя будет равна

$$\frac{Gv'^2}{2},$$

где G — модуль сдвига заполнителя. Соответственно энергия деформации заполнителя на единицу длины границы выпучивания будет

$$\bar{U}_i = \frac{Gt}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} v'^2 ds,$$

где t — толщина заполнителя.

Итак, полная энергия деформации на единицу длины γ трехслойной оболочки равна

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} \left(\frac{\delta^2 v'^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds + \frac{Gt}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} v^2 ds.$$

Далее, как и для обычных оболочек в § 1, мы нормируем переменные u , v , s , полагая

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon},$$

где α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательными плоскостями поверхности, а

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^3}.$$

При этом для энергии деформации получается выражение

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} (\bar{v}^2 + \bar{u}^2) d\bar{s} + \frac{Gt\alpha^2\rho\varepsilon}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} \bar{v}^2 d\bar{s}.$$

Ограничиваясь случаем таких оболочек и их деформаций, когда параметр $\delta/\rho\alpha$ мал, заменим пределы интегрирования на $\pm\infty$. Тогда получим

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{v}^2 + \bar{u}^2) d\bar{s} + \frac{Gt\alpha^2\rho\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}^2 d\bar{s}.$$

Черта над обозначениями переменных \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} для простоты записи здесь и в дальнейшем опускается.

Форму оболочки при выпучивании в зоне сильного местного изгиба мы определим из условия минимума энергии при заданной общей деформации

$$h = -\frac{1}{2 \cdot 12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 ds$$

(см. § 1). Таким образом, задача сводится к тому, чтобы минимизировать функционал

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i$$

при условии

$$h = \text{const.}$$

Имеем

$$\frac{Gt\alpha^2\rho e}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 ds = tGah.$$

Следовательно, функционал U для трехслойной оболочки отличается от соответствующего функционала для обычной оболочки слагаемым, не зависящим от варьируемых функций u , v . Это значит, что рассматриваемый теперь функционал получает стационарное значение при тех же u , v , что и в соответствующей задаче из § 1.

Используя полученный в § 1 результат, находим для энергии деформации трехслойной оболочки выражение

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{2E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} + tGah.$$

Для того чтобы получить полную энергию деформации оболочки, это выражение надо проинтегрировать по дуге кривой γ , ограничивающей область выпучивания.

Интегрирование первого слагаемого в выражении $\bar{U}_e + \bar{U}_i$ выполнено в гл. 3 § 1. Если воспользоваться полученным там результатом, то получим

$$\int_{\gamma} \bar{U}_e ds_{\gamma} = 2 \frac{4\pi E\delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\sqrt{R_1 R_2}},$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в центре выпучивания.

Найдем теперь

$$\int_{\gamma} \bar{U}_i ds_{\gamma}.$$

Имеем (§ 1)

$$\alpha = \rho k_n,$$

где k_n — нормальная кривизна поверхности оболочки в направлении γ . Так как

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\lambda (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)^{3/2}},$$

$$k_n = \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi},$$

$$ds_{\gamma} = \lambda (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)^{1/2} d\varphi,$$

$$\alpha ds_{\gamma} = \frac{\lambda^2 (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{R_1 R_2}} d\varphi,$$

то отсюда имеем

$$\int_{\gamma} \bar{U}_i ds_{\gamma} = Ght \int_{\gamma} \alpha ds_{\gamma} = \frac{\pi Gt (R_1 + R_2)}{\sqrt{R_1 R_2}} h\lambda^2.$$

Итак, полная энергия деформации оболочки равна

$$U = \frac{8\pi E\delta^2 h\lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}} + \frac{\pi Gt (R_1 + R_2)}{\sqrt{R_1 R_2}} h\lambda^2.$$

Производимая внешним давлением p работа

$$A = \pi p \sqrt{R_1 R_2} h\lambda^2.$$

Теперь из условия равновесия оболочки

$$d(U - A) = 0,$$

где варьируется параметр $h\lambda^2$, находим величину воспринимаемого оболочкой давления при выпучивании, то есть *критическое давление*

$$p = \frac{4E\delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) R_1 R_2} + \frac{Gt (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}.$$

Напомним, что здесь R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны оболочки, δ — толщина наружных слоев, t — толщина слоя заполнителя, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона для наружных слоев, G — модуль сдвига для заполнителя.

Формулу для p можно представить еще в таком виде:

$$p = \frac{4E\delta^3 K}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} + 2GtH,$$

где K — гауссова, а H — средняя кривизна оболочки в центре выпучивания.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СТРОГО ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Применение принципа В для исследования потери устойчивости оболочек и определения критических нагрузок предполагает построение бесконечно малых изгибаний поверхности оболочки с разрывом непрерывности на границе предполагаемой области выпучивания. В общем случае для произвольной поверхности и произвольной границы выпучивания эта задача представляется довольно трудной. Однако в ряде практически важных задач области выпучивания малы и имеют форму, близкую к эллипсу. В этих случаях для оболочек с достаточной регулярностью поверхности задача о построении указанного бесконечно малого изгибания может быть решена в замкнутом виде. Это решение будет дано в настоящей главе.

Напомним постановку задачи. Пусть F — регулярная строго выпуклая поверхность и G — малая эллиптическая область на ней, с центром P . Требуется построить поле бесконечно малого изгибания τ , регулярное всюду, кроме границы γ области G , где оно разрывно, причем этот разрыв удовлетворяет следующему условию сопряжения:

$$\Delta\tau = \sigma e,$$

где e — единичный вектор бинормали кривой γ , а σ — некоторая функция, заданная вдоль γ . В связи с конкретными приложениями мы еще будем предполагать, что поле τ исчезает (стремится к нулю) при удалении от области выпучивания.

§ 1. Общее представление для изгибающих полей

Пусть P — центр области продавливания G . Поскольку существенные деформации поверхности F ограничиваются малой окрестностью точки P , естественно ввести прямоугольные декартовы координаты x, y, z , приняв касательную пло-

скость в точке P за плоскость xu , нормаль поверхности за ось z , а саму точку P за начало координат. При этом, если за направление осей x, y принять главные направления в точке P , то поверхность F вблизи этой точки можно задать уравнением

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

где a и b — главные кривизны поверхности в точке P . В простейшем случае, когда область G соосна с индикатрисой кривизны в точке P , она задается неравенством

$$Ax^2 + By^2 \leq 1.$$

Введем на поверхности координаты u, v , полагая

$$u = x\sqrt{a}, \quad v = y\sqrt{b}.$$

В этих координатах наша поверхность задается уравнениями

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{b}}, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Пусть ξ, η, ζ — составляющие изгибающего поля по осям x, y, z соответственно. Из уравнения бесконечно малых изгибаний

$$dr d\tau = 0,$$

где r — вектор точки поверхности, а τ — вектор изгибающего поля, получается следующая система для функций ξ, η, ζ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}}\xi_u + u\zeta_u &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}}\eta_v + v\zeta_v &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}}\eta_u + \frac{1}{\sqrt{a}}\xi_v + u\zeta_v + v\zeta_u &= 0. \end{aligned}$$

Если из этой системы исключить функции ξ и η , то для ζ получается уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Полагая

$$\omega = u + iv,$$

можем представить общее выражение для составляющей ζ с помощью аналитической функции комплексного переменного w

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(w).$$

Что касается двух других составляющих изгибающего поля ξ и η , то они через функцию $\zeta(w)$ выражаются по формулам

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left(-n\zeta(w) + \int \zeta(w) dw \right),$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left(-v\zeta(w) - i \int \zeta(w) dw \right).$$

Найденное представление для изгибающих полей в равной степени относится и к общему случаю. Однако, имея в виду решение задачи о сопряжении, представляется целесообразным выражению для изгибающего поля в общем случае придать несколько другую форму.

Область продавливания G в общем случае задается неравенством

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \leq 1.$$

Введем новые переменные u , v согласно формулам

$$x = \lambda_{11}u + \lambda_{12}v, \quad y = \lambda_{21}u + \lambda_{22}v.$$

Коэффициенты λ_{ij} этих формул подберем так, чтобы в координатах u , v поверхность задавалась уравнением

$$z = \frac{1}{2} (u^2 + v^2),$$

а область продавливания G неравенством

$$Au^2 + Bv^2 \leq 1.$$

Возможность подобрать коэффициенты λ_{ij} таким образом гарантируется положительной определенностью квадратичных форм

$$\frac{1}{2} (ax^2 + by^2), \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

которые указанным преобразованием приводятся одновременно к каноническому виду.

Введем, кроме того, переменные \tilde{x} , \tilde{y} согласно равенствам

$$\tilde{x} = x \sqrt{a}, \quad \tilde{y} = y \sqrt{b}.$$

Это преобразование также приводит форму z к сумме квадратов

$$z = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2).$$

Очевидно, преобразование переменных \tilde{x} , \tilde{y} в u , v является ортогональным и задается формулами

$$\tilde{x} = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta, \quad \tilde{y} = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta.$$

Следовательно, связь между переменными x , y и u , v устанавливается формулами вида

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}} (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta).$$

Угол ϑ находится из того условия, что наше преобразование переводит форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \text{ в } Au^2 + Bv^2.$$

Величины A и B являются собственными значениями формы

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

относительно формы

$$ax^2 + by^2,$$

и, следовательно, являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda a & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda b \end{vmatrix} = 0.$$

Как показано выше, в переменных \tilde{x} , \tilde{y} изгибающее поле задается равенствами

$$\zeta = \operatorname{Re} \tilde{\zeta}(\tilde{z}),$$

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} (-\tilde{x}\tilde{\zeta} + \int \tilde{\zeta} d\tilde{z}),$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} (-\tilde{y}\tilde{\zeta} - i \int \tilde{\zeta} d\tilde{z}),$$

где $\tilde{\zeta}(\tilde{z})$ — аналитическая функция комплексного переменного $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$.

Перейдем в этих формулах к переменным u , v . Замечая, что

$$\tilde{z} = \omega e^{i\vartheta}, \quad \omega = u + iv,$$

будем иметь

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(\omega),$$

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ - (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \zeta + e^{i\vartheta} \int \zeta d\omega \right\},$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ - (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \zeta - i e^{i\vartheta} \int \zeta d\omega \right\},$$

где $\zeta(\omega) = \tilde{\zeta}(\omega e^{i\vartheta})$ — аналитическая функция комплексного переменного ω .

Таково представление для изгибающих полей поверхности в общем случае.

§ 2. Сопряжение изгибающих полей τ и τ' в простейшем случае

В § 1 мы нашли общее представление для изгибающих полей с помощью аналитической функции комплексного переменного $\omega = u + iv$. Именно,

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(\omega),$$

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left(- u \zeta(\omega) + \int \zeta(\omega) d\omega \right),$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left(- v \zeta(\omega) - i \int \zeta(\omega) d\omega \right).$$

Изгибающему полю τ' соответствует аналитическая функция $\zeta'(\omega)$ внутри области G , то есть внутри эллипса

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$

а изгибающему полю τ соответствует аналитическая функция $\zeta(\omega)$ вне указанного эллипса.

Интересующая нас разность изгибающих полей на кривой γ , то есть при

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$

задается системой формул:

$$\Delta \zeta = \operatorname{Re} \Delta \zeta (w),$$

$$\Delta \xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left(-u \Delta \zeta + \int \Delta \zeta (w) dw \right),$$

$$\Delta \eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left(-v \Delta \zeta - i \int \Delta \zeta (w) dw \right),$$

где $\Delta \zeta (w)$ обозначает разность аналитических функций $\zeta (w)$ и $\zeta' (w)$ на эллипсе

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1.$$

Перейдем от комплексного переменного w к переменному ω , полагая

$$w = \lambda \omega + \frac{\mu}{\omega}.$$

Подберем постоянные λ и μ таким образом, чтобы окружности $|\omega| = 1$ из плоскости комплексного переменного ω соответствовал эллипс

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1$$

на плоскости w . Очевидно, для этого достаточно подчинить величины λ, μ условиям

$$\lambda + \mu = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad \lambda - \mu = \sqrt{\frac{b}{B}}.$$

На границе области G , то есть на эллипсе

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$

$\omega = e^{i\varphi}$ и, следовательно,

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Перейдем в формулах, задающих $\Delta \tau = \tau - \tau'$, от переменного w к $\omega = e^{i\varphi}$, полагая

$$\Delta \zeta (w) = P(\varphi) + iQ(\varphi).$$

Тогда будем иметь

$$\Delta \zeta = P,$$

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= -\sqrt{a} \left\{ (\lambda + \mu) P \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int ((\lambda + \mu) P \sin \varphi + (\lambda - \mu) Q \cos \varphi) d\varphi \right\}, \\ \Delta \eta &= \sqrt{b} \left\{ -(\lambda - \mu) P \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int ((\lambda - \mu) P \cos \varphi - (\lambda + \mu) Q \sin \varphi) d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Составим уравнение кривой γ — границы области G на поверхности, приняв в качестве параметра на этой кривой угол $\varphi = \arg \omega$. Имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{\sqrt{a}} = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \\ y &= \frac{v}{\sqrt{b}} = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi, \\ z &= \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, наша кривая задается уравнениями

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi, \quad z = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi.$$

Найдем вектор бинормали кривой γ . Его компоненты по осям x, y, z являются минорами матрицы

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}.$$

Положим

$$a_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательное выражение для величин a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4}{\sqrt{b}} (\lambda - \mu) \lambda \mu \cos^3 \varphi, \\ a_2 &= \frac{4}{\sqrt{a}} (\lambda + \mu) \lambda \mu \sin^3 \varphi, \\ a_3 &= \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Условие сопряжения изгибающих полей можно записать в виде

$$\Delta\xi = \sigma a_1, \quad \Delta\eta = \sigma a_2, \quad \Delta\zeta = \sigma a_3,$$

включив множитель, нормирующий вектор бинормали, в σ .

Продифференцируем эти условия сопряжения по φ и подставим в них найденные выше выражения для $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$. Имеем:

$$(\Delta\zeta)' = P',$$

$$(\Delta\xi)' = -\sqrt{a} \{ (\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q(\lambda - \mu) \cos \varphi \},$$

$$(\Delta\eta)' = -\sqrt{b} \{ (\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q(\lambda + \mu) \sin \varphi \}.$$

Условия сопряжения принимают вид

$$(\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q(\lambda - \mu) \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{ab}} (\lambda - \mu) \lambda \mu (\sigma \cos^3 \varphi)',$$

$$(\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q(\lambda + \mu) \sin \varphi = -\frac{4}{\sqrt{ab}} (\lambda + \mu) \lambda \mu (\sigma \sin^3 \varphi)',$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^3 - \mu^3) \sigma'.$$

Включая множитель $1/\sqrt{ab}$ в σ , получим

$$(\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q(\lambda - \mu) \cos \varphi = 4 (\lambda - \mu) \lambda \mu (\sigma \cos^3 \varphi)',$$

$$(\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q(\lambda + \mu) \sin \varphi = -4 (\lambda + \mu) \lambda \mu (\sigma \sin^3 \varphi)',$$

$$P' = (\lambda^3 - \mu^3) \sigma'.$$

На первый взгляд в этих условиях можно усмотреть некоторую некорректность нашей первоначальной задачи об изгибании, так как функция σ , ввиду произвола кривой γ , по существу является произвольной функцией, и для двух функций P и Q получаются три уравнения. Однако, как легко видеть, третье уравнение является следствием первых двух. Таким образом, мы имеем в сущности два уравнения для двух функций P и Q , из которых они и определяются.

В интересующем нас приложении, где для области продавливания Q принимается в известном смысле простейшая форма — эллипс, представляется целесообразным взять в качестве σ простейшую функцию, каковой является постоянная. Все дальнейшее рассмотрение будет вестись для этого случая.

Итак, пусть

$$\sigma = \text{const.}$$

Тогда

$$P = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma, \quad Q = -6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi.$$

Следовательно, для аналитических функций ζ и ζ' , задающих наши изгибающие поля, на кривой γ выполняется условие

$$\zeta - \zeta' = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma - i6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi. \quad (*)$$

Найдем теперь сами аналитические функции ζ и ζ' . При этом от функции ζ мы потребуем, чтобы определяемое ею изгибающее поле τ вне области G исчезало на бесконечности. Это условие диктуется последующими приложениями. Оно будет выполнено, если потребовать, чтобы на бесконечности функция ζ убывала как $1/\omega^2$.

Условие (*) определяет известную задачу Римана, которая в нашем случае имеет единственное решение. Найдем это решение. Положим

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2}, \quad \zeta' = \beta\omega^2 + c,$$

где α , β и c — некоторые постоянные.

На границе области G , то есть при $|\omega| = 1$, будет

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\alpha}{\omega^2} = \alpha(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi), \\ \zeta' &= \beta \left(\lambda\omega + \frac{\mu}{\omega} \right)^2 + c = \\ &= \beta \{ (\lambda^2 + \mu^2) \cos 2\varphi + i(\lambda^2 - \mu^2) \sin 2\varphi + 2\lambda\mu \} + c. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \zeta - \zeta' &= [\alpha - \beta(\lambda^2 + \mu^2)] \cos 2\varphi - \\ &\quad - i[\alpha + \beta(\lambda^2 - \mu^2)] \sin 2\varphi - 2\lambda\mu\beta - c. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание условие (*), получаем для постоянных α , β , c следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta(\lambda^2 + \mu^2) &= 0, \\ \alpha + \beta(\lambda^2 - \mu^2) &= 6\lambda\mu\sigma, \\ -2\lambda\mu\beta - c &= (\lambda^2 - \mu^2)\sigma. \end{aligned}$$

Из этой системы находим

$$\beta = \frac{3\mu\sigma}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{3\mu\sigma}{\lambda}(\lambda^2 + \mu^2).$$

Определив функции ζ и ζ' , мы нашли тем самым изгибающие поля τ , τ' и решили задачу об изгибании поверхности F , поставленную в § 1. Если исходная поверхность задается вектор-функцией r , то изометрически преобразованная поверхность задается вектор-функцией $r + \tau'$ внутри области продавливания и вектор-функцией $r + \tau$ вне этой области. Вектор-функции τ и τ' определяются с помощью аналитических функций ζ и ζ' по формулам, полученным в этом § 2.

§ 3. Сопряжение изгибающих полей в общем случае

Так же как и в рассмотренном простейшем случае, изгибающие поля τ и τ' на границе γ области продавливания удовлетворяют условию сопряжения

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где e — вектор бинормали кривой γ , а σ — некоторая функция, заданная на этой кривой.

Для изгибающих полей τ и τ' имеет место представление с помощью соответствующих аналитических функций $\zeta(\omega)$:

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(\omega),$$

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \zeta(\omega) + e^{i\vartheta} \int \zeta(\omega) d\omega \right\},$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \zeta(\omega) - i e^{i\vartheta} \int \zeta(\omega) d\omega \right\}$$

Для поля τ функция $\zeta(\omega)$ является аналитической в области

$$Au^2 + Bv^2 \geq 1,$$

а для поля τ' соответствующая функция $\zeta'(\omega)$ является аналитической в области

$$Au^2 + Bv^2 \leq 1.$$

Граница этих областей есть эллипс, задаваемый уравнением

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Разность изгибающих полей $\tau - \tau'$ вдоль кривой γ задается системой формул

$$\begin{aligned}\Delta\zeta &= \operatorname{Re} \Delta\zeta(\omega), \\ \Delta\xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \Delta\zeta + e^{i\vartheta} \int \Delta\zeta(\omega) d\omega \right\}, \\ \Delta\eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \Delta\zeta - ie^{i\vartheta} \int \Delta\zeta(\omega) d\omega \right\},\end{aligned}$$

где $\Delta\zeta(\omega)$ есть разность аналитических функций $\zeta(\omega)$ и $\zeta'(\omega)$ на эллипсе

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Так же как и в простейшем случае, вводим комплексное переменное ω , полагая

$$\omega = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega},$$

и постоянные λ, μ определяем из того условия, чтобы единичной окружности $|\omega| = 1$ на плоскости ω соответствовал эллипс

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Для этого надо потребовать, чтобы

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \lambda - \mu = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

На границе области G , то есть на кривой γ ,

$$\omega = e^{i\varphi}$$

и, следовательно,

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Перейдем в формулах, задающих разность изгибающих полей $\Delta\tau$ вдоль кривой γ , от переменного ω к $\omega = e^{i\varphi}$. Полагая, как и в простейшем случае, на γ

$$\Delta\zeta(\omega) = P(\varphi) + iQ(\varphi),$$

будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))(P + iQ) + \right. \\ &\quad \left. + ie^{i\vartheta} \int (P + iQ)(\lambda e^{i\varphi} - \mu e^{-i\varphi}) d\varphi \right\} = \\ &= \sqrt{a} \left\{ -(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))P - \right. \\ &\quad \left. - \int (\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \mu \sin(\vartheta - \varphi))P d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int (\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \mu \cos(\vartheta - \varphi))Q d\varphi \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\xi) = -\sqrt{a} \{(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))P' + (\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \mu \cos(\vartheta - \varphi))Q\}.$$

Аналогично получается

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\eta) = -\sqrt{b} \{(\lambda \sin(\vartheta + \varphi) + \mu \sin(\vartheta - \varphi))P' + (\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \mu \sin(\vartheta - \varphi))Q\}.$$

Наконец,

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\zeta) = P'.$$

Если обозначить компоненты вектора бинормали кривой через a_1 , a_2 , a_3 , то условия сопряжения после дифференцирования по φ запишутся так:

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\xi) = (a_1\sigma)',$$

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\eta) = (a_2\sigma)',$$

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\zeta) = (a_3\sigma)'.$$

Найдем выражения для составляющих a_1 , a_2 , a_3 и подставим их в эти формулы.

Поверхность F в координатах u , v задается уравнениями

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}}(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta),$$

$$z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Вдоль кривой γ

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Подставляя эти значения u , v в уравнения поверхности, получим уравнения кривой γ :

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} ((\lambda + \mu) \cos \varphi \cos \vartheta - (\lambda - \mu) \sin \varphi \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} ((\lambda + \mu) \cos \varphi \sin \vartheta + (\lambda - \mu) \sin \varphi \cos \vartheta),$$

$$z = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi.$$

С помощью уравнений кривой находим компоненты вектора бинормали

$$a_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = -\frac{4\lambda\mu}{\sqrt{b}} (\lambda + \mu) \sin \vartheta \sin^3 \varphi - \\ - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{b}} (\lambda - \mu) \cos \vartheta \cos^3 \varphi,$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} = \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{a}} (\lambda + \mu) \cos \vartheta \sin^3 \varphi - \\ - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{a}} (\lambda - \mu) \sin \vartheta \cos^3 \varphi,$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^2 - \mu^2).$$

Подставляя полученные значения a_1 , a_2 , a_3 в условия сопряжения и включая множитель $1/\sqrt{ab}$ в σ , получим

$$-(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi)) P' - Q(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \\ - \mu \cos(\vartheta - \varphi)) = -4\lambda\mu \{ \sigma (\lambda + \mu) \sin \vartheta \sin^3 \varphi + \\ + \sigma (\lambda - \mu) \cos \vartheta \cos^3 \varphi \}',$$

$$-(\lambda \sin(\varphi + \vartheta) + \mu \sin(\vartheta - \varphi)) P' - Q(\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \\ - \mu \sin(\vartheta - \varphi)) = 4\lambda\mu \{ \sigma (\lambda + \mu) \cos \vartheta \sin^3 \varphi - \\ - \sigma (\lambda - \mu) \sin \vartheta \cos^3 \varphi \}',$$

$$P' = \{ \sigma (\lambda^2 - \mu^2) \}'.$$

Умножая второе равенство на i и прибавляя к первому, получаем

$$-P' (\lambda e^{i(\varphi + \vartheta)} + \mu e^{i(\vartheta - \varphi)}) - Q (\lambda e^{i(\varphi + \vartheta)} - \mu e^{i(\vartheta - \varphi)}) = \\ = \{ 4\lambda\mu\sigma (\lambda + \mu) e^{i\vartheta} i \sin^3 \varphi - 4\lambda\mu\sigma (\lambda - \mu) e^{i\vartheta} \cos^3 \varphi \}'.$$

Если теперь это равенство сократить на $e^{i\vartheta}$ и отделить вещественную часть от мнимой, то получаются следующие два соотношения:

$$P'(\lambda + \mu) \cos \varphi + Q(\lambda - \mu) \cos \varphi = \{4\lambda\mu(\lambda - \mu)\sigma \cos^3 \varphi\}',$$

$$P'(\lambda - \mu) \sin \varphi + Q(\lambda + \mu) \sin \varphi = -\{4\lambda\mu(\lambda + \mu)\sigma \sin^3 \varphi\}'.$$

Мы видим, что в общем случае для функций P и Q получается точно такая же система уравнений, как и в простейшем случае. Так же как и там, мы полагаем

$$\sigma = \text{const.}$$

Тогда

$$P = (\lambda^3 - \mu^3)\sigma, \quad Q = -6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi.$$

После этого, так же как и в рассмотренном случае, находим аналитические функции ζ и ζ' , задающие изгибающие поля

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2}, \quad \zeta' = \beta\omega^2 + c, \quad \beta = \frac{3\mu}{\lambda}\sigma, \quad \alpha = \frac{3\mu}{\lambda}\sigma(\lambda^3 + \mu^3).$$

С помощью функций ζ и ζ' находим по соответствующим формулам изгибающие поля τ и τ' , а с ними и вектор-функцию, задающую изометрически преобразованную поверхность.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК С ВЫПУЧИВАНИЕМ ПО СИСТЕМЕ ОБЛАСТЕЙ

Исследование вопроса о потере устойчивости оболочек, основанное на применении принципа В, в общем случае представляет собой довольно трудную задачу. Трудность состоит прежде всего в отыскании изгибающих полей, на которых рассматривается функционал W . Исходя из наглядных соображений о характере выпучивания, при решении конкретных задач иногда удается разумно ограничить класс рассматриваемых полей и таким образом упростить задачу. Именно так мы поступили, изучая в гл. 5 потерю устойчивости пологих строго выпуклых оболочек. Во всех рассмотренных там примерах потеря устойчивости сопровождалась появлением одной области выпучивания. В известных предположениях о характере регулярности поверхности оболочки и размерах области выпучивания нам удалось найти решение рассматриваемых задач в замкнутом виде.

В ряде случаев нагружения строго выпуклой оболочки потеря устойчивости сопровождается выпучиванием по системе областей. В настоящей главе мы рассмотрим потерю устойчивости с выпучиванием такого сорта, предполагая отдельные области малыми, а их число достаточно большим. Итогом нашего исследования будет общий метод решения соответствующих задач. Применение этого метода мы проиллюстрируем на конкретных примерах. Именно, мы рассмотрим потерю устойчивости строго выпуклых панелей при общем нагружении вдоль края и потерю устойчивости оболочек вращения в различных вариантах нагружения (внутренним давлением, сосредоточенной силой изнутри и кручением).

§ 1. Энергия деформации оболочки при выпучивании

Согласно принципу В исследование потери устойчивости оболочки сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала $W = U - A$, определенного на разрывных изги-

бающих полях срединной поверхности. Такие поля для случая одной малой области выпучивания эллиптической формы найдены в гл. 6. В случае многих областей выпучивания изгибающее поле τ получается суперпозицией полей τ_k , отвечающих отдельным областям:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots$$

Поле τ_k , соответствующее выпучиванию по области G_k , имеет разрыв только на границе γ_k этой области. Поле, соответствующее выпучиванию по всей системе областей G_k , имеет разрыв на каждой кривой γ_k . Энергия деформации оболочки при выпучивании определяется разрывом изгибающего поля. На каждой кривой γ_k разрывы полей τ и τ_k совпадают. Отсюда следует, что энергия деформации оболочки при выпучивании по системе областей G_k получается простым сложением энергий деформации, отвечающих выпучиванию по отдельным областям G_k . Таким образом, дело сводится к определению энергии деформации при выпучивании одной области. Будем обозначать эту область через G , а ее границу — через γ . Сначала рассмотрим тот случай, когда область выпучивания G соосна с индикатрисой кривизны в центре выпучивания.

Как показано в гл. 5, § 1, энергия деформации на единицу длины границы выпучивания γ определяется по формуле

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2\alpha^2h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho}.$$

Здесь h — нормальный прогиб по области выпучивания вдоль границы γ , то есть нормальная составляющая разрыва изгибающего поля, ρ — радиус кривизны γ , α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательными плоскостями поверхности, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Для разрыва h изгибающего поля в гл. 6 § 2 получено следующее выражение:

$$h = \operatorname{Re}(\Delta\xi)_\gamma,$$

где $(\Delta\xi)_\gamma$ — разность аналитических функций вдоль γ , задающих изгибающие поля вне области G и внутри этой области.

Так как область продавливания G мала, то угол α можно определять по формуле

$$\alpha = \frac{k_n}{k},$$

где k — кривизна кривой γ , а k_n — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении γ . Вычислим k и k_n .

Введем, как и ранее, систему декартовых координат x, y, z , приняв касательную плоскость в центре выпучивания P за плоскость xy , нормаль к поверхности за ось z , а точку P — за начало координат. Оси координат x и y направим по касательным к линиям кривизны в точке P . Тогда вблизи точки P поверхность задается уравнением

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2).$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности вблизи точки P будут

$$I = dx^2 + dy^2, \quad II = a dx^2 + b dy^2.$$

Отсюда для нормальной кривизны поверхности получается выражение

$$k_n = \frac{a dx^2 + b dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Как показано в гл. 6 § 2 кривая γ задается уравнениями

$$x = p \cos \varphi, \quad y = q \sin \varphi,$$

где

$$p = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}}, \quad q = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}},$$

а λ и μ находятся из уравнений

$$\lambda + \mu = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad \lambda - \mu = \sqrt{\frac{b}{B}}.$$

Постоянные A и B определяют область выпучивания G :

$$Ax^2 + By^2 \leq 1.$$

Ввиду того, что область G мала, кривизну γ можно определять по ее проекции на плоскость xy , которая задается

теми же двумя уравнениями

$$x = p \cos \varphi, \quad y = q \sin \varphi.$$

При этом получается следующее выражение для кривизны:

$$k = \frac{pq}{(p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Подставляя в общее выражение для нормальной кривизны поверхности выражения

$$dx = -p \sin \varphi d\varphi, \quad dy = q \cos \varphi d\varphi,$$

получим нормальную кривизну поверхности в направлении γ

$$k_n = \frac{(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi}{p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi}.$$

Если теперь подставить полученные значения в формулу для \bar{U} и проинтегрировать по дуге кривой γ , то получим полную энергию деформации. Имеем

$$\frac{\alpha^2}{\rho} = \left(\frac{(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi}{p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 \frac{(p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{pq},$$

$$ds = (p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\alpha^2}{\rho} ds &= \int_0^{2\pi} \{(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi\}^2 \frac{d\varphi}{pq} = \\ &= (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) \frac{2\pi}{pq}. \end{aligned}$$

Учитывая значения p и q , получим

$$\int_{\gamma} \frac{\alpha^2}{\rho} ds = \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Полная энергия деформации равна

$$U = \int_{\gamma} \bar{U} ds = \frac{2E \delta^2 h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Ввиду малости области G , при нашем выборе системы координат величину h можно принять равной разности составляющих по оси z изгибающих полей τ и τ' . При этом

$$h = P(\varphi) = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma.$$

В результате для энергии деформации оболочки получается следующее окончательное выражение:

$$U = \frac{2E\delta^2\sigma 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда область выпучивания G произвольным образом ориентирована относительно главных направлений на поверхности. Пусть ϑ — угол, который составляет ее большая полуось с главным направлением, отвечающим кривизне a . Подобно тому как в § 3 гл. 6, введем переменные u, v , связанные с x, y соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a}} (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{b}} (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta). \end{aligned}$$

В координатах u, v кривая γ задается уравнениями:

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Так же как и в рассмотренном простейшем случае, можно считать, что

$$\alpha = \frac{k_n}{k},$$

где k — кривизна кривой γ , а k_n — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении γ . Общее выражение нормальной кривизны имеет вид

$$k_n = \frac{a dx^2 + b dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Подставляя сюда значения

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a}} \{(\lambda + \mu) \cos \varphi \cos \vartheta - (\lambda - \mu) \sin \varphi \sin \vartheta\}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{b}} \{(\lambda + \mu) \cos \varphi \sin \vartheta + (\lambda - \mu) \sin \varphi \cos \vartheta\}, \end{aligned}$$

получим нормальную кривизну поверхности в направлении γ :

$$k_n = \frac{ax'^2 + by'^2}{x'^2 + y'^2},$$

где дифференцирование выполняется по переменному φ .

Для малой области выпучивания кривизну γ можно определять по ее проекции на плоскость $xу$. Получим

$$k = \frac{|x''y' - y''x'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Элемент дуги кривой γ равен

$$ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2} d\varphi.$$

Вычислим теперь интеграл

$$\int_{\gamma} \alpha^2 k ds = \int_0^{2\pi} \frac{(ax'^2 + by'^2)^2}{|x''y' - y''x'|} d\varphi.$$

Имеем

$$|x''y' - y''x'| = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^2 - \mu^2),$$

$$ax'^2 + by'^2 = (\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi.$$

Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, находим

$$\int_{\gamma} \alpha^2 k ds = \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Полная энергия деформации для одной области выпучивания равна

$$U_1 = \int_{\gamma} \bar{U} ds_{\gamma} = \frac{2E\delta^2 h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Подставляя сюда

$$h = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma,$$

получим

$$U_1 = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) \sigma.$$

Как показано выше, энергия деформации оболочки при выпучивании по системе областей G_k получается простым сложением энергий деформации, отвечающих отдельным областям выпучивания. Отсюда следует, что если области выпучивания характеризуются примерно одинаковыми значениями параметров λ , μ , σ и плотность распределения центров

выпучивания равна γ , то энергия деформации оболочки, отнесенная к единице площади поверхности, определяется по формуле

$$U = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) \sigma\gamma.$$

§ 2. Глобальное изменение метрики поверхности при выпучивании

Пусть поверхность S деформируется с выпучиванием по системе малых, примерно одинаковых областей, центры которых располагаются достаточно равномерно, так что можно говорить о плотности их распределения. Пусть S' — поверхность, полученная при такой деформации из S . Возьмем на поверхности S две произвольные точки A и B . На поверхности S' им соответствует некоторая пара точек A' и B' . Пусть d и d' — пространственные расстояния между этими точками. Величина

$$\varepsilon = \frac{d' - d}{d} \quad (*)$$

в пределе при $B \rightarrow A$ (следовательно, при $d \rightarrow 0$) дает относительную деформацию поверхности S при переходе ее в S' . Эту относительную деформацию мы будем называть *локальной* в отличие от *глобальной* относительной деформации, которую наглядно можно себе представить как относительную деформацию в грубом рассмотрении формы поверхности S' , игнорируя детали, связанные с выпучиванием. Более точное определение этого понятия состоит в следующем.

Ввиду правильности распределения областей выпучивания при деформации поверхности S в S' отношение (*) мало изменяется при значениях d , значительных по сравнению с размерами отдельно взятой области выпучивания и малых по сравнению с радиусом нормальной кривизны поверхности. В связи с этим величина ε для таких d в некотором смысле характеризует деформацию поверхности, связанную с выпучиванием. Мы будем называть величину ε *глобальной относительной деформацией метрики поверхности*. Приведем пример, поясняющий это определение. Представим себе, что поверхность S есть прямоугольная плоская область, а деформация с выпучиванием в поверхность S' состоит в образова-

нии гофра путем изометрического преобразования (рис. 31). Тогда локальная относительная деформация, очевидно, равна нулю, а глобальная деформация равна

$$\varepsilon = \frac{b' - b}{b} < 0.$$

Понятие глобального изменения метрики поверхности при деформации с выпучиванием представляет интерес в связи с рассмотрением вопроса потери устойчивости строго выпуклых оболочек в случае, когда выпучивание происходит по системе областей. Именно в связи с этим в настоящем параграфе мы и определим глобальные относительные деформации строго выпуклой поверхности при изометрическом выпучивании по системе областей с данной плотностью распределения их центров.

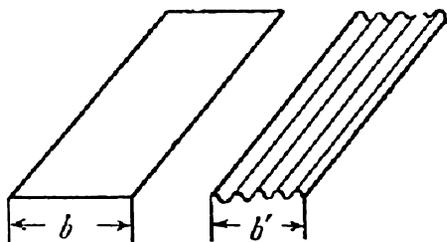


Рис. 31.

Предполагая выпучивание малым, можем перейти от конечного изгибания к бесконечно малому с разрывами по границе областей выпучивания, как это мы делали в гл. 5. Пусть требуется определить относительную глобальную деформацию в окрестности точки O поверхности. Введем прямоугольные декартовы координаты x, y, z , приняв точку O за начало координат, касательную плоскость за плоскость xu , а оси x и y направим по касательным к линиям кривизны поверхности в точке O . Определим сначала глобальную относительную деформацию ε_1 — растяжение (сжатие) в направлении оси x , и изменение γ угла между осями x и y . В связи с этим возьмем две точки P и Q на поверхности, проектирующиеся на плоскость xu в точки \bar{P} и \bar{Q} оси x . Пусть точки \bar{P} и \bar{Q} располагаются по разные стороны начала координат O на значительном удалении от него по сравнению с размерами областей выпучивания.

При выпучивании поверхности точки P и Q , а следовательно, и их проекции \bar{P} и \bar{Q} как-то смещаются. При этом ввиду пологости поверхности можно считать, что относительное изменение расстояния между \bar{P} и \bar{Q} при этом

смещении и есть ϵ_1 , а угол отклонения прямой \overline{PQ} от оси x есть γ . Найдем величины ϵ_1 и γ .

Рассмотрим сначала тот случай, когда центры областей выпучивания располагаются равномерно в один ряд на оси $y=0$, точнее, проектируются на эту ось. Пусть Δy — шаг, с которым располагаются центры областей. Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат O тоже является центром одной из областей. Пусть ξ_k и η_k — горизонтальные составляющие изгибающего поля, отвечающие выпучиванию по области G_k с центром $(0, y_k)$. Тогда горизонтальные смещения точки P при выпучивании поверхности по рассматриваемой системе областей будут

$$\tilde{\xi} = \sum_k \xi_k^-(P), \quad \tilde{\eta} = \sum_k \eta_k(P).$$

Для компонент смещения ξ , η при выпучивании малой эллиптической области с центром в начале координат мы в § 3 гл. 6. получили следующие формулы:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \zeta + e^{i\vartheta} \int \zeta d\omega \right\}, \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \zeta - ie^{i\vartheta} \int \zeta d\omega \right\}, \end{aligned}$$

где a и b — главные кривизны в центре выпучивания O , ϑ — угол, который составляет большая полуось области выпучивания с главным направлением, отвечающим кривизне a , ζ — аналитическая функция комплексного переменного ω , которая вне области выпучивания имеет вид

$$\zeta(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2}, \quad \omega = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega}, \quad \alpha = -\frac{3\mu}{\lambda}(\lambda^2 + \mu^2)\sigma.$$

Здесь λ , μ и σ — параметры, характеризующие область выпучивания (см. § 3 гл. 6).

Для малых областей выпучивания или, что то же самое, вдали от области выпучивания $|\omega|$ велик. Поэтому можно считать

$$\omega \simeq \lambda\omega.$$

Соответственно

$$\zeta(\omega) = \frac{a\lambda^2}{\omega^2}.$$

Подставляя это значение ζ в формулы для ξ и η , будем иметь

$$\xi = \sqrt{a} \alpha \lambda^3 \operatorname{Re} \left\{ \frac{(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta)}{w^2} - \frac{e^{i\vartheta}}{w} \right\},$$

$$\eta = \sqrt{b} \alpha \lambda^3 \operatorname{Re} \left\{ \frac{(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta)}{w^2} + i \frac{e^{i\vartheta}}{w} \right\}.$$

Отсюда, выделяя вещественную часть Re , получим

$$\xi = -2\alpha \sqrt{a} \lambda^3 \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} (u^3 \cos \vartheta + v^3 \sin \vartheta),$$

$$\eta = -2\alpha \sqrt{b} \lambda^3 \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} (v^3 \cos \vartheta - u^3 \sin \vartheta).$$

Перейдем в этих формулах от переменных u , v к декартовым координатам x , y . Имеем

$$u = \sqrt{a} x \cos \vartheta + \sqrt{b} y \sin \vartheta,$$

$$v = \sqrt{b} y \cos \vartheta - \sqrt{a} x \sin \vartheta.$$

Если эти значения u , v подставить в выражения ξ и η , то получим

$$\xi = -2\alpha a^2 \lambda^3 \frac{x^3 \cos 2\vartheta + Ax^2y + By^3}{(ax^2 + by^2)^2},$$

$$\eta = a\sqrt{ab} \lambda^3 \frac{(ax^2 + 3bxy^2) \sin 2\vartheta + A'x^2y + B'y^3}{(ax^2 + by^2)^2},$$

где A , B , A' и B' — некоторые выражения, не содержащие переменных x и y . По соображениям, которые выясняются далее, мы не приводим явных значений этих величин.

Обозначим через h и 0 координаты x , y точки \bar{P} . Тогда, предполагая, что область G_k получается из G_0 (с центром в точке O) смещением на отрезок y_k по оси y , будем иметь

$$\xi_k(P) = \xi(h, y_k), \quad \eta_k(P) = \eta(h, y_k).$$

Соответственно

$$\tilde{\xi} = \sum_k \xi(h, y_k), \quad \tilde{\eta} = \sum_k \eta(h, y_k).$$

Замечаем, что при суммировании по k слагаемые, содержащие нечетные степени y_k , дают нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= -2\alpha a^2 \lambda^2 h^3 \cos 2\vartheta \sum_k \frac{1}{(ah^2 + by_k^2)^2}, \\ \tilde{\eta} &= \alpha \sqrt{ab} \lambda^2 \sin 2\vartheta \sum_k \frac{ah^3 + 3bhy_k^2}{(ah^2 + by_k^2)^2}.\end{aligned}$$

Если шаг Δy расположения центров выпучивания мал, то суммирование в правых частях этих формул можно заменить интегрированием. Тогда получим

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= -2\alpha a^2 \lambda^2 h^3 \cos 2\vartheta \frac{1}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(ah^2 + by^2)^2}, \\ \tilde{\eta} &= \alpha \sqrt{ab} \lambda^2 \sin 2\vartheta \frac{1}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ah^3 + 3bhy^2}{(ah^2 + by^2)^2}.\end{aligned}$$

Введем новое переменное интегрирование t , полагая

$$y = h \sqrt{\frac{a}{b}} t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= -2\alpha \lambda^2 \sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\vartheta \frac{1}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}, \\ \tilde{\eta} &= \alpha \lambda^2 \sin 2\vartheta \frac{1}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2 + 1}{(1+t^2)^2} dt,\end{aligned}$$

или, замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2 + 1}{(1+t^2)^2} dt = 2\pi, \quad \alpha = -\frac{3\mu\sigma}{\lambda} (\lambda^2 + \mu^2),$$

получим

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= \frac{3\pi\lambda\mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\vartheta, \\ \tilde{\eta} &= -\frac{6\pi\lambda\mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma}{\Delta y} \sin 2\vartheta.\end{aligned}$$

В точности такие же смещения получает и точка \bar{Q} , только с противоположным знаком. Отсюда следует, что относительное изменение расстояния l между точками \bar{P} , \bar{Q} равно

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma}{l\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\vartheta, \quad (**)$$

а изменение угла между прямой $\bar{P}\bar{Q}$ и осью x будет

$$\gamma = \frac{12\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)}{l\Delta y} \sin 2\vartheta. \quad (***)$$

Существенно заметить, что значения полученной относительной деформации не зависят от расстояний h до оси, вдоль которой располагаются центры областей выпучивания. Принимая это во внимание, нетрудно найти относительные деформации и в общем случае, когда области выпучивания правильно расположены уже не на прямой $y=0$, а по всей поверхности, образуя прямоугольную решетку. Пусть Δx — шаг решетки в направлении оси x , а Δy — шаг в направлении оси y . Для относительного смещения точек \bar{P} , \bar{Q} в случае одного ряда областей выпучивания, разделяющего эти точки, мы получили формулы (**) и (***). Так как теперь точки \bar{P} и \bar{Q} разделяются не одним, а $l/\Delta x$ рядами областей, то соответствующие выражения получают множитель $l/\Delta x$. Таким образом, мы получаем следующие формулы для глобального изменения метрики:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\vartheta, \\ \gamma &= \frac{12\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma}{\Delta x \Delta y} \sin 2\vartheta. \end{aligned}$$

Величина относительной деформации ε_2 в направлении оси y может быть записана по аналогии с ε_1 . Для этого в выражении ε_1 надо поменять ролями λ и μ , a и b , а ϑ заменить на $\vartheta + \frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$\varepsilon_2 = -\frac{6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\frac{b}{a}} \cos 2\vartheta.$$

Мы нашли выражение для глобальных относительных деформаций ε_1 , ε_2 и γ , предполагая правильность расположения

центров областей выпучивания. Из наглядных соображений представляется очевидным, что эти формулы имеют место и без этого предположения, лишь бы распределение имело определенную плотность, а области выпучивания были бы близки по размерам (λ , μ , σ) и ориентации (ϑ).

Итак, *относительные глобальные деформации поверхности по главным направлениям при выпучивании по системе областей с параметрами λ , μ , σ , ϑ и плотностью распределения γ центров выпучивания определяются по формулам:*

$$\varepsilon_1 = 6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma\gamma \sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\vartheta,$$

$$\varepsilon_2 = -6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma\gamma \sqrt{\frac{b}{a}} \cos 2\vartheta,$$

$$\gamma = 12\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma\gamma \sin 2\vartheta.$$

§ 3. Общее критическое напряженное состояние пологой оболочки.

Потеря устойчивости оболочек вращения

В настоящем параграфе мы рассмотрим ряд задач о потере устойчивости строго выпуклых оболочек с выпучиванием по системе областей. В частности, мы рассмотрим общее критическое напряженное состояние пологой оболочки с нагружением вдоль края; рассмотрим потерю устойчивости оболочек вращения при нагружении равномерным внутренним давлением, сосредоточенной силой, действующей изнутри, и моментом.

Представим себе строго выпуклую пологую оболочку, находящуюся в основном напряженном состоянии под действием произвольной нагрузки, распределенной по ее краю. Пусть в этом состоянии в срединной поверхности оболочки возникают напряжения σ_1 , σ_2 и τ , отнесенные к главным направлениям на поверхности. Мы хотим выяснить, при каких условиях напряженное состояние, характеризуемое величинами σ и τ , становится неустойчивым и появляется возможность выпучивания оболочки.

Рассматривая эту задачу, мы будем предполагать оболочку достаточно пологой, будем считать, что главные кривизны и главные направления на срединной поверхности из-

меняются мало, и, наконец, мало изменяются напряжения σ и τ , характеризующие напряженное состояние. Что касается закрепления края оболочки, то мы предполагаем только, что оно исключает перемещения, нормальные к поверхности оболочки.

Пусть потеря устойчивости оболочки сопровождается выпучиванием системы малых эллиптических областей, равномерно распределенных по ее поверхности. В этом предположении энергия деформации выпучивания на единицу площади поверхности определяется по формуле (§ 1)

$$U = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) \sigma\gamma,$$

где a и b — главные кривизны оболочки, λ , μ , σ — параметры, характеризующие отдельно взятую область выпучивания, а γ — плотность распределения центров выпучивания.

Производимая внешней нагрузкой работа, также отнесенная к единице площади поверхности, равна

$$A = (\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2 + \gamma\tau) \delta,$$

где ε_1 , ε_2 и γ — величины, задающие относительную глобальную деформацию (§ 2), а σ_1 , σ_2 , τ — нормальные и касательные напряжения, отнесенные к главным направлениям на поверхности. В § 2 получено выражение для величин ε_1 , ε_2 и γ в зависимости от параметров, характеризующих выпучивание. Если эти значения подставить в выражение A , то получим

$$A = 6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) \sigma\gamma \left\{ \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \sigma_1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \sigma_2 \right) \cos 2\vartheta + \right. \\ \left. + 2\tau \sin 2\vartheta \right\}.$$

Из условия стационарности функционала $W = U - A$ по параметру выпучивания σ получаем

$$\frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) = \\ = 6\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) \left\{ \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \sigma_1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \sigma_2 \right) \cos 2\vartheta + \right. \\ \left. + 2\tau \sin 2\vartheta \right\} \delta. \quad (*)$$

Таким образом, для того чтобы в данном напряженном состоянии $(\sigma_1, \sigma_2, \tau)$ возможно было выпучивание, необходимо, чтобы равенство (*) было возможно для некоторой системы параметров λ, μ, ϑ . Выразим это условие в зависимости от величин, характеризующих напряженное состояние и геометрические параметры оболочки. В связи с этим прежде всего заметим, что

$$\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2 \geq 3\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2).$$

Далее, при любом ϑ

$$\left| \left(\sigma_1 \sqrt{\frac{a}{b}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cos 2\vartheta + 2\tau \sin 2\vartheta \right| \leq \left\{ \left(\sigma_1 \sqrt{\frac{a}{b}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 + 4\tau^2 \right\}^{1/2}$$

Существенно, что равенство в обоих случаях достигается. Именно, в первом случае это будет, когда $\lambda = \mu$, а во втором при

$$-\left(\sigma_1 \sqrt{\frac{a}{b}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \sin 2\vartheta + 2\tau \cos 2\vartheta = 0.$$

Отсюда следует, что всегда найдется система величин λ, μ, ϑ , удовлетворяющая уравнению (*), и, следовательно, выпучивание возможно, если

$$\frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} \cdot 3 \leq 6\pi \left[\left(\sigma_1 \sqrt{\frac{a}{b}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 + 4\tau^2 \right]^{1/2} \delta.$$

Вводя в это неравенство вместо главных кривизн a, b главные радиусы кривизны R_1 и R_2 и производя очевидные преобразования, получим

$$\frac{E\delta}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \leq [(R_2\sigma_1 - R_1\sigma_2)^2 + 4R_1R_2\tau^2]^{1/2}.$$

Это и есть то условие, при котором нагружение, действующее по краю оболочки, может вызвать потерю устойчивости с выпучиванием по системе областей.

Наименьшая нагрузка, при которой оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться, по определению называется *верхней критической*. Будем называть основное напряженное состояние, соответствующее этой нагрузке, *верх-*

ним критическим. Определим это состояние в рассматриваемом случае нагружения оболочки. Оно характеризуется равенствами:

$$1) \quad \lambda = \mu;$$

$$2) \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2\tau}{\sigma_1 \sqrt{\frac{a}{b}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{b}{a}}};$$

$$3) \quad \frac{E\delta}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} = [(R_2\sigma_1 - R_1\sigma_2)^2 + 4R_1R_2\tau^2]^{1/2}.$$

Первое из них указывает на вырождение эллипса выпучивания в прямолинейный отрезок (величины $\lambda + \mu$ и $\lambda - \mu$ пропорциональны полуосям эллипса). Физически это значит, что потеря устойчивости сопровождается появлением сильно вытянутых областей выпучивания. Второе условие определяет ориентацию областей выпучивания. Угол ϑ — это угол между большой полуосью области выпучивания и главным направлением, отвечающим кривизне a . Наконец, третье условие дает критическую комбинацию величин σ_1 , σ_2 , τ , характеризующих напряженное состояние.

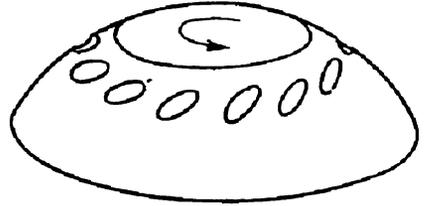


Рис. 32.

Рассмотрим пример. Пусть пологая оболочка вращения с радиусами кривизны R_1 и R_2 по меридиану и параллели соответственно нагружена равномерно распределенными по краям касательными усилиями, создающими момент M (рис. 32). Определим верхнее критическое значение этого момента. При указанном нагружении нормальные напряжения σ_1 и σ_2 по главным направлениям (меридианам и параллелям) равны нулю, а касательные равны

$$\tau = \frac{M}{2\pi\rho^2\delta},$$

где ρ — радиус параллели. Момент M , способный вызвать потерю устойчивости с выпучиванием системы областей вдоль параллели ρ , определяется неравенством

$$\frac{E\delta}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \leq 2\sqrt{R_1R_2} \frac{M}{2\pi\rho^2\delta}.$$

Отсюда получаем *верхнее критическое значение момента*

$$M_c = \frac{2\pi E \delta^2 \rho_{\min}^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}},$$

где ρ_{\min} — радиус меньшей параллели. Потеря устойчивости сопровождается образованием сильно вытянутых вмятин, наклоненных к меридиану под углом $\vartheta = 45^\circ$ ($\operatorname{tg} 2\theta = \infty$).

Рассмотрим теперь потерю устойчивости выпуклой оболочки вращения под равномерным внутренним давлением. Опыт показывает, что выпуклая оболочка вращения при известных условиях может терять устойчивость под внутренним давлением с выпучиванием по системе областей, расположенных вдоль некоторой параллели. Физически это объясняется тем, что при определенном соотношении между главными кривизнами такой оболочки внутреннее давление вызывает напряжения сжатия в меридиональных сечениях, что имеет своим следствием выпучивание.

Пусть потеря устойчивости оболочки сопровождается образованием системы вмятин, заполняющих слой шириной h в окрестности параллели радиуса ρ . Энергия деформации, связанная с выпучиванием, будет

$$U = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) \sigma \gamma (2\pi \rho h).$$

Определим работу A , производимую внутренним давлением p при выпучивании. Имеем

$$A = p \Delta V,$$

где ΔV — изменение объема, ограничиваемого оболочкой, при ее деформации. Пусть ε_1 и ε_2 — глобальные относительные деформации поверхности оболочки при выпучивании (ε_1 — вдоль меридиана, а ε_2 — вдоль параллели). Проведем две плоскости, перпендикулярные оси оболочки и ограничивающие h -слой, занятый областями выпучивания. Изменение объема, ограниченного оболочкой, связано только с деформацией поверхности между построенными плоскостями. При этом изменение объема, обусловленное деформацией меридиана, равно

$$\Delta V_1 = \pi \rho^2 (h \varepsilon_1) \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением меридиана вдоль параллели радиуса ρ с осью поверхности. Изменение объема,

связанное с деформацией параллели, равно

$$\Delta V_2 = 2\pi r (\rho \epsilon_2) (h \cos \alpha).$$

Полное изменение объема будет

$$\Delta V = \pi r^2 h (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) \cos \alpha.$$

Соответственно, работа, производимая внутренним давлением при выпучивании оболочки, равна

$$A = \pi r^2 h (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) p \cos \alpha,$$

или, вводя значения ϵ_1 и глобальной относительной деформации, получим

$$A = 6\pi\lambda\mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma \gamma \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \pi r^2 h p \cos \alpha.$$

(Принято $\vartheta = 0$, так как вмятины, очевидно, ориентированы по меридиану.)

Из условия стационарности функционала $W = U - A$ по параметру выпучивания σ' получим

$$\begin{aligned} \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) \gamma (2\pi r h) = \\ = 6\pi\lambda\mu (\lambda^2 + \mu^2) \gamma \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \pi r^2 h p \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда, так же как и в предыдущей задаче, заключаем, что потеря устойчивости оболочки под внутренним давлением p может иметь место только при выполнении условия

$$\frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \gamma (2\pi r h) \cdot 3 \leq 6\pi\gamma \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \pi r^2 h p \cos \alpha,$$

а для этого прежде всего необходимо, чтобы

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} > 0, \text{ то есть } a > 2b.$$

Заметим, что это есть необходимое условие для появления сжимающих усилий в меридиональных сечениях при нагружении оболочки равномерным внутренним давлением.

Предполагая условие $a > 2b$ выполненным, разрешим полученное выше неравенство относительно p . Тогда получим

$$p \geq \frac{2E\delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b} - 2} \sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{1}{\rho \cos \alpha}.$$

Замечая, что $\rho^{-1} \cos \alpha$ есть нормальная кривизна поверхности вдоль параллели, и вводя вместо главных кривизн a и b соответствующие радиусы кривизны, будем иметь

$$p \geq \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1 - 2\frac{R_1}{R_2}}$$

Это и есть то условие, при котором оболочка вращения под внутренним давлением p может терять устойчивость с образованием системы вмятин вдоль параллели радиуса ρ .

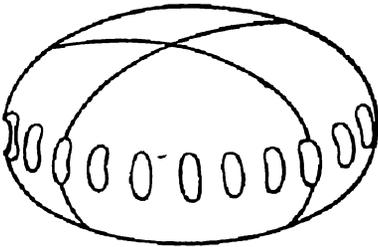


Рис. 33.

Рассмотрим в качестве примера потерю устойчивости оболочки вращения в форме сплюснутого эллипсоида вращения с полуосями a и b (рис. 33). В этом случае потеря устойчивости сопровождается появлением вытянутых

вдоль меридиана вмятин, расположенных на экваторе. На экваторе

$$\rho = a, \quad R_2 = a, \quad R_1 = \frac{b^2}{a}.$$

Соответственно, эллипсоид теряет устойчивость под внутренним давлением при

$$p \geq \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{a^2 - 2b^2}.$$

Верхнее критическое значение для внутреннего давления равно

$$p_e = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{a^2 - 2b^2}.$$

Рассмотрим, наконец, потерю устойчивости оболочки вращения под действием сосредоточенной силы, приложенной в

вершине изнутри. Такая сила при известной величине может вызвать потерю устойчивости оболочки, сходную с той, которая нами рассмотрена в случае равномерного внутреннего давления.

Выражение для энергии деформации, связанной с выпучиванием, сохраняет свое прежнее значение. Что касается работы, производимой силой Q , то она теперь будет

$$A = Q (h \varepsilon_1) \cos \alpha = 6\pi \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma \gamma \sqrt{\frac{a}{b}} (h \cos \alpha).$$

Дальше, как и в случае равномерного внутреннего давления, находим условие, при котором сила Q может вызвать потерю устойчивости:

$$\frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \gamma (2\pi \rho h) : 3 \leq Q 2\pi \gamma \sqrt{\frac{a}{b}} h \cos \alpha.$$

Отсюда, замечая, что $\rho^{-1} \cos \alpha = b$, получаем

$$Q \geq \frac{2\pi E \delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)}.$$

Верхнее критическое значение нагрузки равно

$$Q_e = \frac{2\pi E \delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)}.$$

Любопытно, что величина Q_e не зависит от формы оболочки.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Согласно принципу А исследование закритических упругих состояний оболочек сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала W , определенного на изометрических преобразованиях исходной формы. Имея в виду соответствующую задачу для цилиндрических оболочек, мы рассмотрим в настоящей главе специальные изометрические преобразования цилиндрических поверхностей.

Опыт показывает, что закритическая деформация геометрически совершенной цилиндрической оболочки в основных случаях нагружения (осевое сжатие, внешнее давление, кручение) обладает определенной правильностью строения. Именно, наблюдается отчетливая периодичность формы деформированной поверхности в окружном направлении. В связи с этим мы сужаем нашу задачу и ограничиваемся рассмотрением изометрических преобразований, обладающих указанной правильностью строения.

§ 1. Некоторые общие свойства развертывающихся поверхностей

Мы будем рассматривать развертывающиеся поверхности с нарушением регулярности (двукратной дифференцируемости) вдоль отдельных линий. На этих линиях может происходить либо нарушение гладкости (образование ребер), либо разрывы для нормальных кривизн, которые, однако, предполагаются ограниченными. Согласно определению, развертывающаяся поверхность допускает наложение на плоскость с сохранением длин кривых, следовательно, и углов между ними. Рассмотрим некоторые свойства развертывающихся поверхностей, используемые в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что каждая гладкая точка развертывающейся поверхности является внутренней точкой прямолинейного отрезка, лежащего целиком на поверхности

(прямолинейная образующая). Для регулярных, дважды дифференцируемых поверхностей, это хорошо известный факт из дифференциальной геометрии. Для более общих поверхностей, которые мы рассматриваем, это по существу устанавливается в работе [10]. Действительно, так как точка гладкая, а гладкость поверхности нарушается вдоль отдельных линий, то у этой точки есть гладкая окрестность. Ввиду того, что нормальные кривизны всюду, где они существуют, ограничены, рассматриваемая окрестность представляет собой поверхность ограниченной внешней кривизны. А каждая точка такой развертываемой поверхности является внутренней точкой отрезка, целиком лежащего на поверхности.

Если через точку развертываемой поверхности проходят две прямолинейные образующие, то эта точка имеет плоскую окрестность, то есть окрестность, являющуюся куском плоскости. Действительно, достаточно показать, что любой отрезок AB с концами на образующих принадлежит поверхности (рис. 34). Соединим точки A и B кратчайшей γ на поверхности. Развернем теперь окрестность точки O на плоскость. При этом отрезки OA и OB прямолинейных образующих перейдут в прямолинейные отрезки той же длины и с тем же углом между ними. Следовательно, при этой операции не изменится и расстояние между точками A , B . Кратчайшая γ перейдет в кратчайшую, то есть в прямолинейный отрезок, соединяющий точки A , B . Отсюда заключаем, что пространственное расстояние между точками A и B равно длине кривой γ . Но это может быть только в том случае, если кривая γ совпадает с прямолинейным отрезком AB . Отсюда следует, что отрезок AB лежит на поверхности.

Пусть AB — прямолинейная образующая на развертываемой поверхности. Покажем, что если какая-нибудь точка образующей имеет плоскую окрестность, то каждая внутренняя точка образующей тоже имеет такую окрестность (в этом случае мы будем говорить, что вдоль образующей имеет место уплощение поверхности). Действительно, пусть точка C образующей имеет плоскую окрестность. Проведем через C прямолинейный отрезок DE на поверхности (точка C

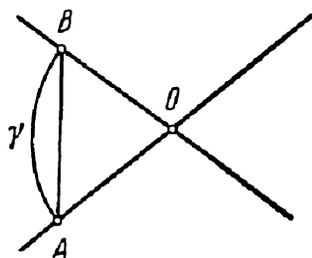


Рис. 34.

внутренняя для отрезка DE) так, чтобы он не налегал на AB (рис. 35). Это возможно, так как точка C имеет плоскую окрестность. Рассмотрим геодезический четырехугольник, ограниченный кратчайшими AD , DB , BE и EA . Приведенным выше рассуждением легко устанавливается, что этот четырехугольник плоский, а каждая внутренняя точка отрезка AB

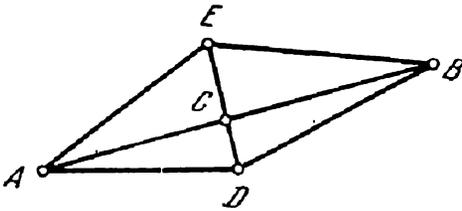


Рис. 35.

является внутренней для четырехугольника, что и требовалось доказать. Точно так же доказывается, что если прямолинейные образующие AB и CD развертывающейся поверхности имеют общую точку (концы не исключаются), то геоде-

зический четырехугольник с вершинами A, B, C, D (вырождающийся в треугольник, если общая точка является концом образующей) будет плоским.

Если вдоль прямолинейной образующей развертывающейся поверхности нет уплощения, то она упирается своими концами либо в ребро, либо в край поверхности. Действительно, пусть точка A — конец прямолинейной образующей g — является внутренней точкой поверхности и не принадлежит ребру. Тогда в точке A поверхность является гладкой, поэтому через точку A проходит прямолинейный отрезок δ , лежащий на поверхности, причем точка A является его внутренней точкой. Если этот отрезок с одной стороны налегает на образующую g , то A не является концом образующей g вопреки предположению. Если же отрезок δ не налегает на образующую g , то по доказанному выше вдоль образующей имеет место уплощение, что также исключено. Утверждение доказано.

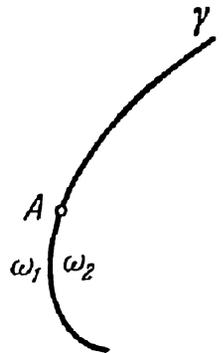


Рис. 36.

Если геодезическая кривизна ребра γ на развертывающейся поверхности отлична от нуля, то такое ребро не может иметь плоской полуокрестности. Допустим противное. Пусть одна из полуокрестностей ребра γ плоская (рис. 36). Предположим, что это полуокрестность со стороны выпуклости (ω_1). Возьмем на γ произвольную точку A . Касательная плоскость

к поверхности в точке A со стороны полуокрестности ω_1 совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра γ . Покажем, что касательная плоскость поверхности со стороны ω_2 совпадает с той же плоскостью. Действительно, так как поверхность разворачивается на плоскость, то геодезические кривизны ребра γ со стороны ω_1 и ω_2 одинаковы и отличаются только знаком. Углы, которые составляет соприкасающаяся плоскость ребра с касательными плоскостями поверхности, определяются только кривизной ребра и его геодезическими кривизнами; следовательно, эти углы равны. Так как одна из касательных плоскостей поверхности (со стороны ω_1) совпадает с соприкасающейся плоскостью, то и другая касательная плоскость (со стороны ω_2) должна обладать тем же свойством. В итоге получается, что точка A является гладкой точкой поверхности вопреки предположению. Утверждение доказано.

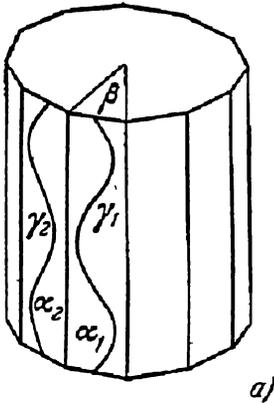
§ 2. Изометрическое преобразование цилиндрической поверхности с периодичностью строения

Возьмем правильную призму с четным числом сторон ($2n$) и проведем на одной из ее боковых граней α_1 произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось призмы (рис. 37, а). Отразим кривую γ_1 зеркально в плоскости β , проходящей через боковое ребро грани α_1 и ось призмы. При этом получится кривая γ_2 , лежащая в боковой грани α_2 , смежной α_1 . Затем аналогично строим кривую γ_3 в грани α_3 , смежной α_2 , и т. д. Так в каждой грани α_i построим кривую γ_i .

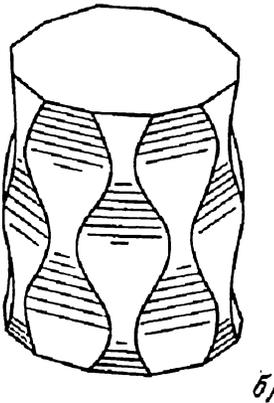
Проведем теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично построим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Поверхности Z_{12} , Z_{23} , ... составляют трубчатую поверхность Z , всюду гладкую, кроме ребер γ_1 , γ_2 , ... (рис. 37, б). Утверждается, что *построенная таким образом поверхность Z изометрична цилиндру*.

Для того, чтобы это доказать, покажем сначала, что поверхность Z локально изометрична плоскости, то есть что каждая точка этой поверхности имеет окрестность, изометричную куску плоскости. Это очевидно для точек, не лежащих на ребрах γ_i поверхности. Рассмотрим точки на одной из кривых γ_i , например, γ_2 .

Отразим поверхность Z_{23} зеркально в плоскости грани α_2 . Полученная при этом поверхность Z_{23}^* является продолжением поверхности Z_{12} за край γ_2 в виде цилиндрической поверхности. Поверхность, составленная из Z_{12} и Z_{23}^* , как цилиндрическая, вдоль кривой γ_2 локально изометрична плоскости. Отсюда следует, что вдоль этой кривой поверхность, составленная из Z_{12} и Z_{23} , а следовательно, и Z , тоже локально изометрична плоскости.



а)



б)

Приведенная конструкция позволяет без труда заключить также, что замкнутая ломаная $\bar{\gamma}$, составленная из прямолинейных образующих поверхностей Z_{12} , Z_{23} , ..., то есть пересечение поверхности Z с плоскостью, перпендикулярной оси призмы, является замкнутой геодезической. Двух приведенных соображений (о локальной изометрии плоскости и замкнутых геодезических) достаточно для того, чтобы заключить об изометрии поверхности Z круговому цилиндру.

Определим радиус цилиндра, изометричного поверхности Z . Для этого рассмотрим пересечение поверхности Z с плоскостью, перпендикулярной оси призмы. Как было указано, получаемая при этом замкнутая ломаная $\bar{\gamma}$ является геодезической, и, следовательно, ее длина L связана с радиусом R цилиндра соотношением

$$L = 2\pi R.$$

Рис. 37.

Ломаная $\bar{\gamma}$ вписана в правильный $2n$ -угольник $\bar{\gamma}_0$, по которому плоскость, в которой лежит $\bar{\gamma}$, пересекает боковую поверхность призмы (рис. 38). Так как стороны $\bar{\gamma}$ со сторонами многоугольника $\bar{\gamma}_0$ образуют равные углы ($\pi/2n$), то независимо от формы ломаная $\bar{\gamma}$ имеет всегда один и тот же периметр L , равный периметру правильного $2n$ -угольника с вершинами в серединах сторон многоугольника $\bar{\gamma}_0$. Теперь не составляет труда найти периметр ломаной $\bar{\gamma}$, а сле-

довательно, и радиус R цилиндра, изометричного поверхности Z .

Приведенное соображение позволяет сделать важный вывод. Именно, радиус цилиндра, изометричного Z , не зависит от того, какова была взята кривая γ на грани призмы α_1 при построении поверхности Z .

Проведем через ось призмы и одно из ее боковых ребер плоскость. Она пересечет поверхность Z по некоторой кривой $\tilde{\gamma}$. На поверхности кругового цилиндра, которому изометрична поверхность Z , кривой $\tilde{\gamma}$ по изометрии соответствует прямолинейная образующая. Следовательно, длина кривой $\tilde{\gamma}$ равна высоте цилиндра, изометричного Z , и не зависит от того, через какое из боковых ребер проведена секущая плоскость, определяющая кривую $\tilde{\gamma}$.

Предположим теперь, что кривая γ_1 на боковой грани α_1 , с помощью которой описанной выше конструкцией получается поверхность Z , произвольным образом деформируется, но так, что длина кривой $\tilde{\gamma}$ сохраняется. При этом поверхность Z также деформируется. И так как радиус и высота цилиндра, изометричного Z , не изменяется, то *эта деформация есть геометрическое изгибание*. С помощью такого изгибания мы будем приближать упругую деформацию цилиндрической оболочки в закритической стадии.

В связи с применением принципа А к исследованию закритических упругих состояний цилиндрических оболочек при осевом сжатии нам предстоит рассматривать функционал

$$W = U - A$$

на множестве всех изометрических преобразований цилиндрической поверхности, обладающих периодичностью строения. Если в качестве кривой γ , с помощью которой строится описанным выше способом поверхность Z , взять периодическую кривую, то поверхность Z будет обладать такой же периодичностью. Но возникает вопрос, всякая ли изометричная ци-

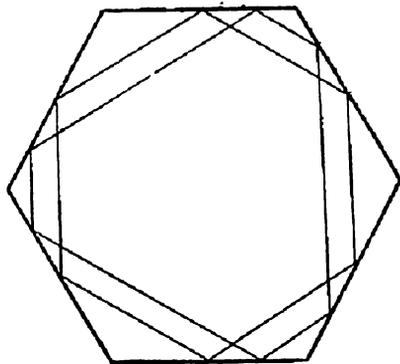


Рис. 38.

линдру поверхность, обладающая периодичностью строения, может быть построена таким способом. Покажем, что это действительно так.

Пусть некоторая поверхность Z обладает периодичностью строения по высоте и в окружном направлении. Требуется показать, что она получается описанной выше конструкцией. Сохраняя преемственность обозначений, назовем β одну из радиальных плоскостей симметрии поверхности Z (рис. 39). Эта плоскость пересекает поверхность по некоторой кривой $\tilde{\gamma}$.

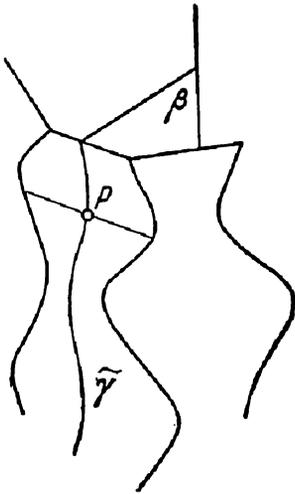


Рис. 39.

Пусть P — произвольная точка на этой кривой. Так как поверхность Z разветвляющаяся, то через каждую ее точку, в частности через точку P , проходит прямолинейная образующая $g(P)$. Если предположить для простоты, что поверхность Z не содержит плоских кусков, то прямолинейная образующая $g(P)$, проходящая через точку P , будет единственной.

В силу симметрии поверхности Z относительно плоскости β , прямолинейная образующая $g(P)$, будучи единственной, лежит либо в плоскости β , либо перпендикулярна этой плоскости. Первая возможность исключается, так как в про-

отивном случае переход цилиндрической поверхности в поверхность Z не сопровождается осевым сжатием. Таким образом, прямолинейные образующие поверхности в точках линии $\tilde{\gamma}$ должны быть перпендикулярны плоскости β , и, следовательно, параллельны друг другу. А это значит, что поверхность Z вблизи линии $\tilde{\gamma}$ должна быть цилиндрической поверхностью, с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии β . Такое же строение имеет поверхность Z с противоположной стороны вблизи линии $\tilde{\gamma}_1$.

Так как поверхность Z имеет n плоскостей симметрии, то она должна состоять из $2n$ цилиндрических поверхностей, с образующими, перпендикулярными этим плоскостям. Будучи так устроена, поверхность Z должна иметь особые линии — ребра. Пусть γ — одно из таких ребер, и Z_1, Z_2 — цилиндрические поверхности, которые пересекаются по этому ребру (рис. 40). Так как поверхность Z локально изометрична пло-

скости, то поверхности Z_1 и Z_2 не могут быть совершенно произвольными. Установим связь между ними.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — пересечение поверхности Z_1 с плоскостью симметрии Z , перпендикулярной ее образующим. Кривая $\tilde{\gamma}$ является геодезической линией. Будем характеризовать положение произвольной точки P кривой γ расстоянием $u(s)$ этой точки от $\tilde{\gamma}$ по образующей (s — дуга вдоль $\tilde{\gamma}$, рис. 40). Так как поверхность Z локально изометрична плоскости, то сумма геодезических кривизн линии γ на поверхностях Z_1 и Z_2 должна быть равна нулю. При заданной поверхности Z_1 и направлении образующих поверхности Z_2 это условие дает некоторое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(s)$:

$$u'' = \varphi(u', s). \quad (*)$$

Из единственности решения этого уравнения следует, что кривая γ определяется однозначно (на поверхности Z_1), если задана какая-нибудь ее точка и направление в ней.

Ввиду периодичности строения поверхности Z по высоте, на линии γ найдется такая точка P_0 , в которой касательная к ней параллельна оси поверхности (осью мы называем прямую, по которой пересекаются плоскости симметрии). Проведем через точку P_0 плоскость α , параллельную оси поверхности, так, чтобы образующие поверхностей Z_1 и Z_2 , исходящие из точки P_0 , составляли равные углы с плоскостью α и располагались по одну ее сторону. Пусть γ' — кривая, по которой плоскость α пересекает поверхность Z_1 и ее продолжение за кривую γ . Кривая γ' удовлетворяет уравнению (*). Соответствующая поверхность Z_2' строится зеркальным отражением в плоскости α той части поверхности Z_1 и ее продолжения, которая находится за кривой γ' . Так как кривые γ и γ' имеют общую точку (P_0) и общее направление в ней, то они совпадают. Отсюда следует, что поверхность Z получается описанной выше конструкцией. Плоскость α является одной из граней призмы.

В связи с вычислением функционала

$$W = U - A$$

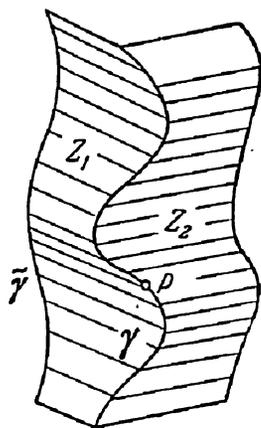


Рис. 40.

на изометрических преобразованиях исходной поверхности оболочки, определим некоторые величины для построенной, изометричной цилиндру, поверхности Z .

Обозначим α одну из граней призмы, в которую вписана поверхность Z . Ребро этой поверхности, лежащее в грани α , обозначим γ . Проведем через ось призмы и боковое ребро грани α плоскость β , и пересечение ее с поверхностью Z обозначим $\tilde{\gamma}$. Кривая $\tilde{\gamma}$ представляет собой нормальное сечение поверхности Z , перпендикулярное образующим.

Введем в плоскости грани α прямоугольную декартову систему координат x, y , приняв за ось x прямую, параллельную боковым ребрам грани и проходящую посередине между ними, а за ось y — прямую, перпендикулярную оси x . Пусть в этих координатах ребро γ поверхности Z задается уравнением

$$y = y(x).$$

В плоскости β также введем прямоугольную декартову систему координат, приняв за оси x и y проекции осей координат, введенных в плоскости α . В этих координатах нормальное сечение $\tilde{\gamma}$ поверхности Z задается уравнением

$$y = \tilde{y}(x) = \sin \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Мы будем предполагать n достаточно большим, и поэтому можно считать, что

$$\tilde{y}(x) \simeq \frac{\pi}{2n} y(x).$$

По известной формуле кривизна ребра γ поверхности Z равна

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Нормальная кривизна поверхности Z в сечении, перпендикулярном образующим, будет

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{y}''}{(1 + \tilde{y}'^2)^{3/2}}.$$

Предполагая n большим, мы опустим член \tilde{y}'^2 в знаменателе этой формулы. Тогда получим

$$\tilde{k} = \tilde{y}''.$$

Или, вводя вместо \tilde{y} функцию y ,

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y''.$$

Определим угол ϑ , который образует плоскость ребра γ поверхности Z с касательными плоскостями. С этой целью систему координат xu в плоскости β дополним до пространственной системы координат xuz . В такой системе координат угловые коэффициенты плоскости ребра γ , то есть плоскости α , будут $0, 1, -\pi/2n$, угловые коэффициенты касательной плоскости поверхности будут $\pi y'/2n, 1, 0$. Угол между плоскостями равен углу между векторами $(0, 1, -\frac{\pi}{2n})$, $(\frac{\pi y'}{2n}, 1, 0)$. Отсюда для угла ϑ при большом n получается следующее значение:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}.$$

§ 3. Изометрическое преобразование цилиндрической поверхности с винтовой симметрией

Возьмем правильную бесконечную призму с четным числом n граней. Пусть α — одна из граней призмы, l — ребро этой грани и β — плоскость, проходящая через ось призмы и ребро l . Обозначим через e единичный вектор, направленный по оси призмы, и через e' — вектор, перпендикулярный плоскости β . Представим себе, что из точки P грани α исходит луч S , перпендикулярный плоскости β , который отражается от внутренних поверхностей граней. Нетрудно видеть, что этот луч после отражения от всех граней снова попадет в точку P (рис. 41). Траектория луча представляет собой многоугольник U_P , вписанный в сечение призмы, перпендикулярное оси. Периметр l многоугольника U_P не зависит от точки P .

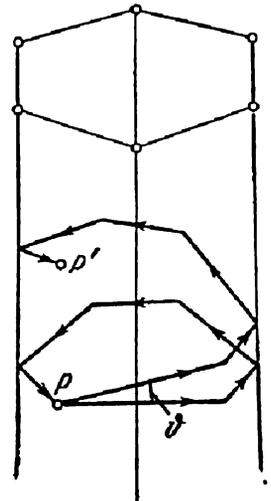


Рис. 41.

Пусть теперь луч S , исходящий из точки P , имеет направление вектора $e' + e \operatorname{tg} \vartheta$. Такой луч после отражения от всех граней призмы попадет в некоторую точку P'

грани α (рис. 41). Траектория луча PP' представляет собой ломаную, звенья которой составляют с осью призмы постоянный угол $\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Проекция этой ломаной на сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ее оси и проходящей через точку P , есть не что иное как многоугольник U_P . Отсюда следует, что расстояние между точками P и P' не зависит от точки P и равно $u \operatorname{tg} \vartheta$, где u — периметр многоугольника U_P .

Возьмем теперь на грани α призмы бесконечную в обе стороны периодическую кривую γ с периодом $u \operatorname{tg} \vartheta$ и проведем из каждой ее точки P луч S_P . Эти лучи образуют некоторую поверхность Z с ребрами на гранях призмы (рис. 42). Покажем, что эта поверхность изометрична цилиндру.

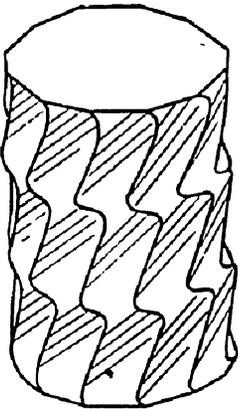


Рис. 42.

Действительно, пусть Z' и Z'' — регулярные части поверхности Z , примыкающие по ребру γ' , лежащему в грани α' . Поверхности Z' и Z'' являются цилиндрическими. Продолжим образующие поверхности Z' за грань α' . Тогда получим поверхность \bar{Z}' . Эта поверхность получается зеркальным отражением поверхности Z'' относительно плоскости α' . Отсюда следует,

что поверхность, составленная из Z' и Z'' , и поверхность, составленная из Z' и \bar{Z}' , в окрестности ребра γ' изометричны. А так как вторая поверхность, очевидно, локально изометрична плоскости в окрестности ребра γ' , то этим же свойством обладает и первая поверхность. Итак, поверхность Z локально изометрична плоскости всюду, в том числе и на ребрах. Так как поверхность Z полная, локально изометрична плоскости и топологически эквивалентна цилиндру, то она изометрична цилиндру. Утверждение доказано.

В связи с предстоящими приложениями мы сейчас воспроизведем построение поверхности Z в несколько видоизмененной форме, удобной для использования. Возьмем правильную n -угольную призму высоты L с периметром основания $2\pi R$. Пусть α_1 и α_2 — две смежные грани призмы и AA' — боковое ребро, по которому они примыкают. Проведем радиальную плоскость β через ребро AA' и построим плоскость α ,

параллельную оси призмы и делящую грани α_1 и α_2 пополам (рис. 43, а).

Введем в плоскости β прямоугольные декартовы координаты x, y , приняв за ось x прямую, по которой пересекаются плоскости α и β , а за начало координат — середину отрезка этой прямой внутри призмы. Пусть γ — кривая в плоскости β , задаваемая уравнением

$$y = y(x),$$

где $y(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $y(x) = y(-x)$,
- 2) $y\left(x \pm \frac{L}{4}\right) = -y\left(\pm \frac{L}{4} - x\right)$.

Проведем через кривую γ цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными отрезку PQ , соединяющему

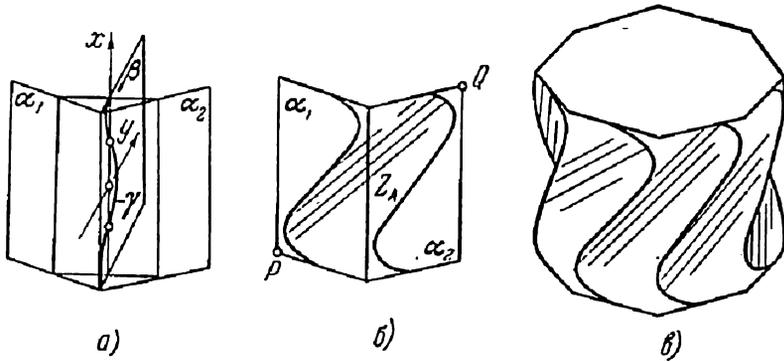


Рис. 43.

вершины P и Q граней α_1 и α_2 (рис. 43, б). Часть этой поверхности, расположенную внутри призмы, обозначим Z_A . Она ограничена кривыми γ_1 и γ_2 , лежащими в гранях α_1 и α_2 соответственно. Ввиду условий 1) и 2), наложенных на функцию $y(x)$, кривая γ_1 после поворота около оси призмы на угол $2\pi/n$ в соответствующем направлении совмещается с кривой γ_2 . Отсюда следует, что если мы для каждой пары смежных граней призмы указанным способом построим цилиндрическую поверхность Z_A , то они образуют замкнутую поверхность Z (рис. 43, в). Построенная так поверхность Z изометрична цилиндру.

Вычислим некоторые величины для поверхности Z , используемые в дальнейшем. Ввиду того, что поверхность Z

составлена из частей, конгруэнтных Z_A , мы можем ограничиться рассмотрением только этого куска.

Прежде всего, мы замечаем, что при значительном n для угла ϑ между образующими поверхности Z_A и осью призмы имеем

$$\vartheta \simeq \frac{4\pi R}{nL}.$$

Найдем нормальную кривизну поверхности Z_A в направлении, перпендикулярном ее образующим. Кривизна в радиальном сечении равна

$$k_r \simeq y'',$$

так как $y'^2 + 1 \simeq 1$. Отсюда по формуле Эйлера нормальная кривизна поверхности Z_A в направлении, перпендикулярном образующим, будет

$$k \simeq \frac{y''}{\vartheta^2}.$$

Определим кривизну ребер γ_1 и γ_2 , ограничивающих область Z_A на поверхности Z . Для этого дополним систему координат x, y в плоскости β до пространственной системы координат x, y, z . Тогда уравнение поверхности Z_A будет

$$x = u + v \cos \vartheta,$$

$$y = y(u),$$

$$z = v \sin \vartheta.$$

Грани призмы α_1 и α_2 , в которых лежат кривые γ_1 и γ_2 , задаются уравнениями

$$\pm y = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) z + \operatorname{const}.$$

Кривые γ_1 и γ_2 , как пересечения поверхности Z_A с гранями призмы, задаются соответствующей системой четырех уравнений.

Принимая u за параметр вдоль кривых γ_1 и γ_2 , находим

$$x' = 1 \pm \frac{y'}{\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}, \quad y' = y'(u), \quad z' = \pm \frac{y'}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}},$$

$$x'' = \pm \frac{y''}{\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}, \quad y'' = y''(u), \quad z'' = \pm \frac{y''}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

При малых π/n и ϑ для кривизны κ кривых γ_1 и γ_2 получается формула

$$\kappa = \frac{n|y''|}{\pi \left\{ \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{3/2}}.$$

Найдем угол φ , образуемый касательными плоскостями поверхности Z_A с плоскостями кривых γ_1 и γ_2 , то есть гранями призмы α_1 и α_2 . Нормали к плоскостям граней призмы имеют угловые коэффициенты

$$0, \pm 1, -\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Угловые коэффициенты нормали к поверхности Z_A равны

$$y' \sin \vartheta, -\sin \vartheta, -y' \cos \vartheta.$$

Отсюда для угла φ получается выражение

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \left\{ \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{1/2}$$

Элемент дуги кривых γ_1 и γ_2 равен

$$ds = \left\{ \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{1/2} du.$$

Возьмем две точки X и X' на кривых, ограничивающих поверхность Z , и расположенные на одной вертикали (рис. 44).

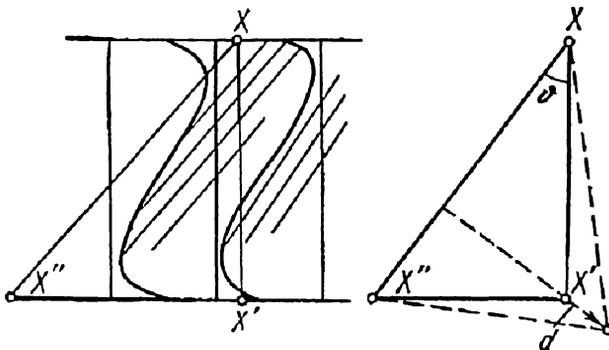


Рис. 44.

Если поверхность Z изометрически наложить на исходную цилиндрическую поверхность, то точки X и X' не будут находиться на одной образующей. Найдем угловое смещение точки X относительно X' при таком наложении.

Продолжим по периодичности поверхность Z_A за линию γ_1 . Пусть X'' — второй конец прямолинейной образующей, исходящей из точки X (рис. 44). Треугольник $XX'X''$ — прямоугольный с прямым углом в точке X' . Если мы будем разворачивать нашу цилиндрическую поверхность на плоскость треугольника $XX'X''$, фиксируя точки X и X'' , то X' переместится в направлении высоты треугольника на некоторое расстояние d . При этом расстояние между точками X и X' увеличится на величину

$$\Delta h = d \sin \vartheta,$$

а интересующее нас смещение точки X' относительно X будет

$$\delta = 2d \cos \vartheta.$$

Для величины Δh мы можем получить выражение с помощью функции $y(x)$, задающей кривую γ , через которую проходит поверхность Z_A . Именно, так как Δh есть разность между расстоянием точек X и X' на поверхности Z_A и в пространстве, то

$$\Delta h \simeq \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Отсюда для величины смещения X относительно X' получается следующее выражение:

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx,$$

или, так как угол ϑ мал, то

$$\delta = \frac{1}{\vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

По величине линейного смещения δ можно найти угловое смещение

$$\omega = \frac{\delta}{R} = \frac{1}{R\vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Угол ω мы будем называть углом закручивания цилиндрической поверхности при изгибании ее в поверхность Z .

§ 4. Изометрические преобразования цилиндрической поверхности, удовлетворяющие условию опирания на окружности по краям

Построенные в §§ 2, 3 изометрические преобразования просты в геометрическом и аналитическом описании. К сожалению, их применение к исследованию закритических упругих состояний цилиндрических оболочек имеет один недостаток. Именно, для них не выполняется обычное условие опирания оболочки по краям на окружности.

В настоящем параграфе мы построим изометрические преобразования, свободные от этого недостатка. Правда, они более сложны и их применение для решения соответствующих задач о закритических упругих состояниях цилиндрических оболочек представляет известные аналитические трудности.

Пусть цилиндрическая поверхность подвергается геометрическому изгибанию с образованием системы конгруэнтных вмятин на всю длину исходной поверхности,

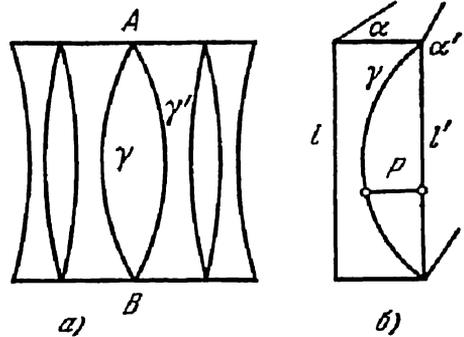


Рис. 45.

правильно расположенных в окружном направлении (рис. 45, а) Предположение о том, что вмятины распространяются на всю длину поверхности, мы понимаем в том смысле, что ограничивающие ее ребра γ , γ' соединяют точки основания A , B . Правильное расположение вмятин означает, что деформированная поверхность имеет периодическое строение в окружном направлении. Каждую вмятину мы будем предполагать выпуклой и симметричной относительно плоскости, проходящей через ее граничные точки A и B на основании цилиндра. Задача, которую мы хотим решить, заключается в качественном описании формы деформированной поверхности. Ввиду периодичности строения можно ограничиться рассмотрением части поверхности, расположенной между двумя смежными плоскостями симметрии α и α' . Плоскость α' проходит по оси вмятины, а плоскость α — посередине между двумя вмятинами (рис. 45, б).

Прежде всего мы заметим, что линии пересечения l и l' поверхности с плоскостями симметрии α и α' являются геодезическими. На исходной цилиндрической поверхности им соответствуют прямолинейные образующие. Это следует из того, что плоскости α и α' являются плоскостями симметрии, следовательно, пересекают поверхность ортогонально.

Предположим, что на линии l' нет прямолинейных отрезков. Тогда через каждую точку P этой линии проходит прямолинейная образующая, упирающаяся концом в ребро γ . Действительно, прямолинейная образующая не может идти в направлении l' , ибо в этом случае она на нее налагает по свойству геодезических, а по предположению l' не содержит прямолинейных отрезков. Остается допустить, что образующая, проходящая через точку P , не перпендикулярна плоскости α' и не лежит в этой плоскости. Но тогда по симметрии относительно плоскости α' существует еще одна образующая, проходящая через P и, следовательно, P имеет плоскую окрестность. А это так же невозможно из-за отсутствия прямолинейных участков кривой l' . Итак, через каждую точку P кривой l' проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости α' . Эта образующая упирается своим концом в ребро поверхности γ (§ 1). Отсюда следует, что рассматриваемая поверхность в области вмятины является цилиндрической, с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии α' .

Выясним теперь, как устроена наша поверхность вне вмятины, то есть в области между ребром γ и кривой l . В отличие от случая кривой l' для кривой l нельзя предполагать отсутствие прямолинейных участков. Такое предположение немедленно приводит нас к заключению о том, что рассматриваемая поверхность и в области между l и γ тоже цилиндрическая, с образующими, перпендикулярными плоскости α . Но для такой поверхности (это построенная в § 2 поверхность Z) условие опирания по краям на окружности очевидным образом не выполняется. Таким образом, на кривой l должны быть прямолинейные участки.

Мы утверждаем, что по крайней мере один из концов прямолинейного отрезка кривой l принадлежит краю поверхности. Действительно, допустим, что оба конца A и B прямолинейного участка δ линии l являются ее внутренними точками. Так как точки A и B заведомо не имеют плоских окрестностей, то через них проходят прямолинейные обра-

зующие g_A и g_B , перпендикулярные плоскости α , упирающиеся в ребро γ . Часть поверхности ω , ограниченная образующими g_A , g_B и кривыми γ , l , является плоской. Действительно, так как кривая γ обращена выпуклостью в сторону ω , то через каждую внутреннюю точку P этой области проходит геодезическая, не пересекающая γ , с концами либо на отрезке δ , либо на образующих g_A и g_B . Рассуждением, подобным рассуждению из § 1, легко устанавливается, что эта геодезическая является прямолинейным отрезком. Отсюда следует, что область ω является плоской. Так как ω плоская область, то на участке между образующими g_A и g_B ребро γ имеет плоскую полукрестность, что исключено в силу выпуклости γ (§ 1). Утверждение доказано.

Далее, мы утверждаем, что вблизи концов кривая l должна быть определенно прямолинейной. Действительно, в противном случае найдется последовательность точек Q на кривой l , сходящаяся к концу, через которые проходят прямолинейные образующие, перпендикулярные плоскости α и упирающиеся в ребро γ . Переходя к пределу, заключаем, что через конец l проходит прямолинейная образующая, идущая вдоль края поверхности. Но это невозможно, так как край поверхности не содержит прямолинейных участков (окружность). В итоге мы приходим к следующим двум возможностям. Либо кривая l является прямолинейным отрезком, либо она содержит ровно два прямолинейных отрезка, каждый из которых одним концом упирается в край поверхности. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

Предположим, что рассматриваемая поверхность имеет плоскость симметрии β , параллельную основаниям и расположенную посередине между ними. Рассмотрим дугу AB кривой пересечения плоскости симметрии β с поверхностью. Утверждаем, что если кривая AB содержит прямолинейный отрезок, то одним из его концов является точка B . Действительно, допустим противное. Тогда на дуге AB найдется прямолинейный отрезок $A'B'$ (рис. 46, а), причем $B' \neq B$, а A' может совпадать с A . Так как точки A' и B' заведомо не имеют плоских окрестностей, то через них проходят прямолинейные образующие, перпендикулярные плоскости β и упирающиеся в край поверхности. После этого известным способом заключаем, что часть поверхности, ограниченная этими образующими, плоская. Следовательно, край

поверхности содержит прямолинейный отрезок. А это невозможно.

Покажем, что дуга AB определенно имеет прямолинейный участок $A'B$. Действительно, в противном случае через каждую точку дуги AB проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости β , с концами на краю поверхности. Эта образующая лежит на исходной цилиндрической поверхности. Рассмотрим линию AC пересечения плоскости β с поверхностью. Она состоит из окружности AB и прямолинейного отрезка BC . По изометрии на исходной цилиндрической поверхности ей соответствует круговое сечение и,

следовательно, длина дуги AC равна длине дуги окружности края. Вместе с тем она заведомо короче этой дуги из-за прямолинейности участка BC . Итак, на кривой AB имеется, и притом один, прямолинейный отрезок с концом в точке B .

Обратимся к двум упомянутым выше возможностям для кривой l . Начнем

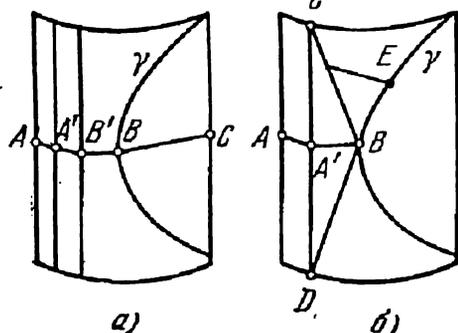


Рис. 46.

со случая, когда l — прямолинейный отрезок. По доказанному, на AB есть прямолинейный отрезок $A'B$. Через каждую точку дуги AB' проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости β , с концами на краю поверхности. Часть поверхности, несущая эти образующие, совпадает с исходной цилиндрической поверхностью.

Выясним строение поверхности между образующей CD и ребром γ (рис. 46, б). Так как $A'B$ и CD прямолинейные отрезки на поверхности, то треугольник $B'CD$ плоский (§ 1). Рассмотрим область между образующей BC и ребром γ . Утверждаем, что эта область не содержит уплощений и каждая ее образующая упирается одним концом в край поверхности, а другим — в ребро γ . Действительно, если прямолинейная образующая одним концом упирается в BC , а другим в ребро γ в некоторой точке E , то дуга BE ребра γ имеет плоскую окрестность, что невозможно (§ 1). Если же она упирается одним концом в край, другим — в BC , то на краю поверхности будет прямолинейный отрезок, что также невоз-

можно. Оба конца образующей ни краю, ни ребру одновременно не могут принадлежать. Итак, один конец образующей на краю поверхности, а другой — на ребре γ .

Допустим теперь, что в некоторой точке рассматриваемой области имеется уплощение (плоская окрестность). Проведем две прямолинейные образующие через точки этой окрестности. Тогда либо край поверхности, либо ребро γ эти образующие пересекают в разных точках. Если это будет ребро, то его дуга между точками пересечения имеет плоскую полуокрестность. Если это будет край, то отрезок между точками пересечения должен быть прямолинейным. Однако и то, и другое исключается. Итак, если сечение поверхности плоскостью α является прямолинейным отрезком, то поверхность имеет строение, указанное на рис. 47, а, где штриховкой обозначены направления образующих, а незаштрихованные участки — плоские.

Рассмотрим теперь второй случай: на кривой l имеются два прямолинейных участка, расположенные симметрично относительно плоскости β и упирающиеся в край поверхности. Через каждую точку кривой l между прямолинейными отрезками проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости β , упирающаяся в ребро γ . Строение поверхности на оставшейся части выясняется рассмотрением, подобным предыдущему. Окончательный результат представлен на рис. 47, б, где, как и в предыдущем случае, штриховкой обозначено направление образующих, а незаштрихованные части — плоские.

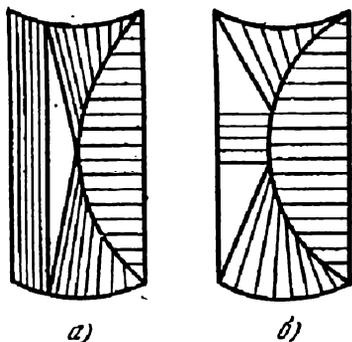


Рис. 47.

Мы рассмотрели изометрическое преобразование цилиндрической поверхности при условии осевой симметрии вмятин. Такое преобразование соответствует симметричному нагружению оболочки, например, равномерным внешним давлением. В других случаях нагружения, например, при кручении, изометрическое преобразование, обладая периодичностью строения в окружном направлении, имеет центрально-симметрические вмятины. Такое преобразование может быть качественно исследовано аналогичным приемом. Мы не будем приводить

этого исследования и сформулируем лишь окончательный результат, предполагая поверхность в области вмятины цилиндрической. Этот результат представлен на рис. 48 и не нуждается в пояснениях.

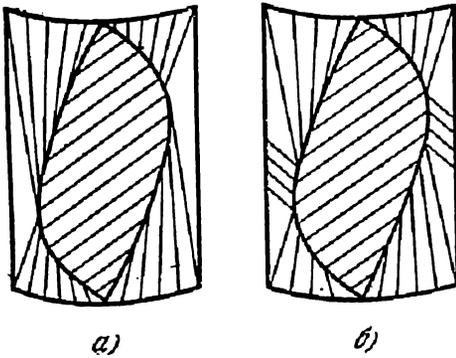


Рис. 48.

Практическое использование изометрического преобразования цилиндрической поверхности, полученное выше для исследования критического упругого состояния цилиндрической оболочки, предполагает удобное аналитическое представление

этого преобразования. Сейчас мы дадим такое представление для того случая, когда вмятины имеют ось симметрии и достаточно вытянуты по длине оболочки.

Введем на развертке цилиндра координаты t и β , приняв за ось t ось симметрии предполагаемой вмятины, а за ось β — край поверхности. Пусть в этих координатах предполагаемое ребро γ задается уравнением

$$\beta = \beta(t).$$

Введем, далее, пространственные прямоугольные координаты x, y, z , связанные с рассматриваемой поверхностью, приняв за ось x прямую, соединяющую граничные точки вмятины на краю поверхности, а за ось y касательную к краю поверхности в одной из этих точек (рис. 49).

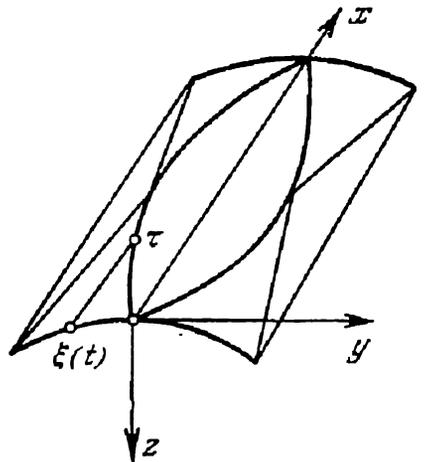


Рис. 49.

Уравнения ребра γ (границы вмятины) в этих координатах запишутся так:

$$x = x(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \lambda(t).$$

Ограничиваясь практически важным случаем, когда λ' не слишком велико, можно принять $x(t) \simeq t$. Тогда уравнения ребра

примут вид

$$x = t, \quad y = \beta(t), \quad z = \lambda(t).$$

Аналитическое описание изометрического преобразования в варианте, представленном на рис. 47, б; предполагает определение функции $\lambda(t)$ и функции $\xi(t)$, задающей y — координату конца прямолинейной образующей в зависимости от параметра t (см. рис. 49). Для этих двух функций могут быть составлены два дифференциальных уравнения, выражающие собой геометрическое условие наложимости рассматриваемой поверхности на плоскость. Найдем эти уравнения.

Так как поверхность изометрична плоскости, то вдоль ребра касательные плоскости поверхности образуют с соприкасающейся плоскостью ребра равные углы. Проведем из точки (t) на ребре γ соприкасающуюся плоскость ребра и касательные плоскости поверхности. Нормали к ним лежат в одной плоскости и в силу характера рассматриваемых деформаций образуют малые углы. Поэтому указанное условие равенства углов между нормалью можно отнести к их проекциям на плоскость $x = 0$. При проектировании на эту плоскость нормали касательной плоскости со стороны вмятины она (нормаль) перейдет в ось z . Найдем углы, образуемые проекциями нормалей двух других плоскостей с осью z .

Компоненты нормали соприкасающейся плоскости ребра по осям y и z соответственно равны

$$\begin{vmatrix} \lambda' & 1 \\ \lambda'' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda'', \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \beta'' \end{vmatrix} = \beta''.$$

Угол проекции нормали на плоскость $x = 0$ с осью y можно считать равным $\simeq -\lambda''/\beta''$.

Касательная плоскость поверхности у ребра со стороны, внешней по отношению к вмятине, проходит через касательную к ребру и касается края поверхности. Вдоль края поверхности

$$y = \xi(t), \quad z \simeq \frac{1}{2R} \xi^2(t),$$

где R — радиус основания. Поэтому компоненты нормали касательной плоскости по осям y и z соответственно будут

$$\begin{vmatrix} \lambda' & 1 \\ \frac{\xi\xi'}{R}, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\xi\xi'}{R}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \xi' \end{vmatrix} = \xi'.$$

Угол проекции нормали на плоскость $x=0$ с осью y можно считать равным $\simeq -\xi/R$.

Теперь упомянутое выше условие разворачивания поверхности вдоль ребра можно выразить в форме следующего уравнения:

$$\frac{\lambda''}{\beta''} = \frac{\xi}{2R}. \quad (*)$$

Условие наложимости на плоскость поверхности вне вмятины сводится к компланарности трех прямых: прямолинейной образующей $(t, \xi(t))$, касательной к ребру γ и касательной к краю поверхности на конце образующей. Это условие состоит в том, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta' & \lambda' \\ 0 & 1 & \frac{\xi}{R} \\ t, \beta - \xi, \lambda - \frac{\xi^2}{2R} \end{vmatrix} = 0,$$

то есть

$$(\lambda - t\lambda') + \frac{\xi}{R}(\beta't - \beta) + \frac{\xi^2}{2R} = 0, \quad (**)$$

Дифференцируя уравнение (**), исключая λ'' с помощью уравнения (*), получим $\frac{1}{2}(\beta''t) + \xi'(\beta't - \beta) + \xi\xi' = 0$. После умножения на ξ это уравнение интегрируется и получается $\frac{2}{3}\xi^3 + \xi^2(\beta't - \beta) = \text{const}$. Постоянная интегрирования равна нулю, так как $\xi=0$ при $t=0$. В результате для $\xi(t)$ получается следующее выражение: $\xi = \frac{3}{2}(\beta - t\beta')$.

Эту формулу можно интерпретировать геометрически. Именно, касательная кривой γ на развертке цилиндра отсекает на краю цилиндра отрезок $\beta - \beta't$, а образующая, исходящая из той же точки, отсекает в полтора раза больший отрезок. Отсюда нетрудно заключить, что изометрическое преобразование в рассматриваемом варианте будет иметь место до тех пор, пока ширина вмятины не превосходит двух третей между осями соседних вмятин.

Теперь, когда функция $\xi(t)$ известна, функция $\lambda(t)$ находится с помощью квадратур из уравнения

$$\lambda'' = \frac{3\beta''}{4R} (\beta - \beta't).$$

Одна из этих квадратур выполняется в общем случае (при любом $\beta(t)$). Действительно, умножив уравнение на t и интегрируя, получим $\lambda't - \lambda = -\frac{3}{8R} (\beta't - \beta)^2$ (постоянная интегрирования равна нулю, так как при $t=0$ будет $\beta=0$ и $\lambda=0$). Окончательно функция $\lambda(t)$ представляется в виде

$$\lambda = -\frac{3t}{8R} \int_0^t \left(\beta' - \frac{\beta}{t} \right)^2 dt + ct.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия $\lambda(L) = 0$, где L — длина цилиндра.

Мы рассмотрели случай, когда соседние вмятины разделены куском исходной цилиндрической поверхности. В другом варианте, когда между вмятинами появляется цилиндрическая поверхность, перпендикулярная плоскости симметрии β , описание формы в этой части ничем не отличается от того, которое было проведено в § 2.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Среди оболочек, встречающихся в реальных конструкциях, наиболее распространенными являются оболочки, имеющие форму разворачивающихся поверхностей. В значительной степени это объясняется простотой их получения из листового материала. Среди разворачивающихся оболочек наиболее распространенными, пожалуй, являются цилиндрические. В связи с этим изучение прочностных свойств этих оболочек представляет большой практический интерес.

Цилиндрическая оболочка как элемент конструкции может работать в различных условиях нагружения. Среди них основными являются: осевое сжатие, внешнее давление и кручение. Обычно разрушение оболочки происходит в результате потери устойчивости. Закритические деформации, которые при этом возникают, приводят к концентрации напряжений в определенных зонах, что и ведет в конце концов к разрушению. В связи с этим возникает естественная задача об определении упругих состояний оболочки при закритических деформациях.

В настоящей главе мы исследуем закритические упругие состояния цилиндрических оболочек в основных случаях нагружения: осевое сжатие (§ 1), внешнее давление (§ 2) и кручение (§ 3). Так же как и в случае строго выпуклых оболочек (гл. 3), это исследование будет основано на принципе А. Результатом исследования будет полное описание закритического упругого состояния, в частности, определение нижних критических нагрузок.

§ 1. Цилиндрические оболочки при осевом сжатии

Согласно принципу А определение закритических упругих состояний оболочки сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала $W = U - A$, который определяется на изометрических преобразованиях исходной формы оболоч-

ки. Опыт показывает, что закритическая деформация цилиндрической оболочки при осевом сжатии обладает периодичностью строения в окружном направлении и по высоте. В связи с этим представляется естественным при рассмотрении вариационной задачи для функционала W ограничиться изометрическими преобразованиями Z , построенными в гл. 8, § 2.

Поверхность Z полностью определяется заданием кривой γ на грани призмы. Для того чтобы эта поверхность обладала периодичностью строения по высоте, необходимо, чтобы функция $y(x)$, задающая кривую γ , была периодической. Пусть m — число полных волн кривой γ .

Проведем через вершины кривой γ плоскости, перпендикулярные оси призмы, и назовем их горизонтальными сечениями. Кроме того, проведем полуплоскости через ось призмы и ее боковые ребра — радиальные сечения. Эти плоскости разбивают поверхность Z на

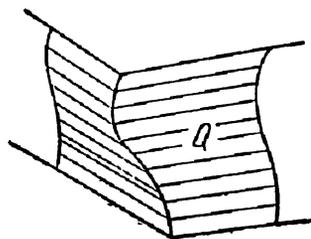


Рис. 50.

$4mn$ равных областей Q , каждая из которых изометрична прямоугольнику (рис. 50). Определим стороны этого прямоугольника в зависимости от параметров цилиндра, изометричного Z , то есть радиуса основания, высоты, чисел m и n .

Если высота цилиндра L , то, очевидно, высота прямоугольника Q равна

$$b = \frac{L}{2m}.$$

Если радиус цилиндра R , то ширина прямоугольника Q равна

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

По изометрии разбиению поверхности Z на области Q соответствует разбиение цилиндра, изометричного Z , на $4mn$ прямоугольных областей плоскостями, перпендикулярными оси, отстоящими друг от друга на расстоянии b , и радиальными полуплоскостями, делящими полный угол при оси цилиндра на $2n$ равных частей. Найдем энергию деформации оболочки.

Энергия деформации в области Q состоит из двух частей: U_Q — энергии деформации по основной поверхности и U_γ —

энергии деформации вдоль ребра. Энергия U_Q определяется изгибом исходной цилиндрической формы в форму Z всюду, кроме ребра γ . На единицу площади поверхности она определяется по формуле

$$\bar{U}_Q = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2).$$

Здесь Δk_1 и Δk_2 — главные изменения нормальных кривизн при указанной деформации поверхности, а D — жесткость оболочки на изгиб, то есть

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

где δ — толщина оболочки, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Для нормальных кривизн k_1 и k_2 исходной цилиндрической поверхности имеем

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

По соответствующим направлениям нормальные кривизны поверхности Z равны

$$k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} y'', \quad k_2 = 0.$$

(Нормальные кривизны в смежных радиальных нормальных сечениях поверхности, образующих угол π/n , равны по величине, но противоположны по знаку. Этим объясняется двузначность в выражении k_1). Таким образом, при рассматриваемой деформации поверхности будет

$$\Delta k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} y'', \quad \Delta k_2 = -\frac{1}{R}.$$

Отсюда

$$U_Q = \frac{D}{2} \iint_{(Q)} \left\{ \left(\frac{\pi y''}{2n} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \pm 2\nu \left(\frac{\pi y''}{2n} \right) \frac{1}{R} \right\} dx dy.$$

Выполняя интегрирование по y , получим

$$U_Q = \frac{Da}{2} \int_{(b)} \left(\frac{\pi y''}{2n} \right)^2 dx + \nu D \int_{(b)} \frac{\pi}{2nR} y'' (a' - a'') dx + \text{const},$$

где a' и a'' — длины отрезков образующих поверхности Z в области Q , разделяемые ребром γ . При большом n

$$a' \simeq \frac{a}{2} - y, \quad a'' \simeq \frac{a}{2} + y.$$

Поэтому

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = -2 \int_{(b)} y y'' dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и замечая, что y' на концах интервала интегрирования (b) равно нулю, получим

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = 2 \int_{(b)} y'^2 dx.$$

Следовательно,

$$U_Q = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{\nu D\pi}{nR} \int_{(b)} y'^2 dx + \text{const.}$$

Энергия деформаций U_γ вдоль ребра γ определяется по формуле

$$U_\gamma = U_\gamma^0 + \Delta U_\gamma,$$

где

$$U_\gamma^0 = \int_\gamma c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} k^{1/2} ds,$$

$$\Delta U_\gamma = \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha \left(-k_n - \nu k_\gamma + \frac{k_i + k_e}{2} \right) ds.$$

Здесь k — кривизна кривой γ , α — угол между плоскостью ребра γ и касательными плоскостями поверхности Z вдоль ребра; k_i и k_e — нормальные кривизны поверхности Z в направлении, перпендикулярном ребру, k_n — нормальная кривизна исходной поверхности в соответствующем направлении, k_γ — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, соответствующем ребру. Интегрирование выполняется по дуге s кривой γ .

Найдем значение ΔU_γ . Нормальные кривизны k_i и k_e равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$k_i + k_e = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta U_\gamma = - \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha (k_n + \nu k_\gamma) ds.$$

Угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} (1 + y'^2)^{1/2}.$$

По формуле Эйлера нормальная кривизна

$$k_n = \frac{1}{R} \cos^2 \vartheta, \quad k_\gamma = \frac{1}{R} \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол, который составляет прямолинейная образующая исходной цилиндрической поверхности с направлением кривой, соответствующей по изометрии γ , т. е.

$$\cos \vartheta = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}.$$

Наконец, элемент дуги кривой γ равен

$$ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx.$$

Подставляя значения α , k_n , k_γ и ds в формулу для ΔU_γ , получим

$$\Delta U_\gamma = - \frac{\sqrt{D}\pi}{nR} \int_{(b)} y'^2 dx + \text{const.}$$

Вычислим U_γ^0 . Принимая во внимание выражения для α , ds и

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

получим

$$U_\gamma^0 = cE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_\gamma |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx.$$

Полная энергия деформации U_1 по области Q получается сложением величин U_Q , U_γ^0 и ΔU_γ :

$$U_1 = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + cE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx + \text{const.}$$

Области Q , расположенные между двумя плоскостями, проходящими через смежные вершины ребра γ перпендикулярно оси призмы, образуют кольцевой пояс высотой b . В дальнейшем нам будет удобно рассматривать не всю оболочку,

а этот пояс. Энергия деформации U оболочки внутри указанного пояса получается умножением энергии деформации в области Q на $2n$ — число областей внутри пояса, то есть

$$U = \frac{D\pi^2 a}{4n} \int_{(b)} y'^2 dx + \\ + 2cnE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx + \text{const.}$$

Найдем осевое сжатие при изометрическом преобразовании кругового цилиндра в поверхность Z . Возьмем на цилиндре область G , расположенную между двумя сечениями, перпендикулярными оси и отстоящими друг от друга на расстоянии b . Изометричная ей область Z_G на поверхности Z ограничена двумя плоскостями, перпендикулярными оси призмы и отстоящими друг от друга на некотором расстоянии b' . Осевое сжатие, о котором идет речь, есть разность $b - b' = \Delta b$.

Высота b пояса G на цилиндре, как показано выше, равна длине кривой $\tilde{\gamma}$ на поверхности Z_G . Следовательно,

$$b = \int \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} dx,$$

где интегрирование выполняется по высоте пояса Z_G поверхности Z , и

$$\int dx = b'.$$

Предполагая, как и раньше, \tilde{y}'^2 малым, можем записать

$$b \simeq \int \left(1 + \frac{\tilde{y}'^2}{2}\right) dx = b' + \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Отсюда

$$\Delta b \simeq \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Зная осевое сжатие оболочки, без труда находим работу, производимую внешней нагрузкой p . Именно,

$$A = 2\pi R \delta p \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

В выражение энергии деформации оболочки U и работы A , производимой осевым сжатием, входят целочисленные

параметры m и n , характеризующие периодичность строения поверхности Z . Для того, чтобы определить эти параметры, мы предположим, что характер периодичности прогибов оболочки сохраняется в течение всего времени закритической деформации и, следовательно, он остается таким же, как и в момент потери устойчивости.

В линейной теории оболочек доказывается, что нормальный прогиб w цилиндрической оболочки радиуса R в момент потери устойчивости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (*)$$

Здесь x и y — криволинейные координаты: x — по образующей, y — по круговому сечению, перпендикулярному оси; D — жесткость оболочки на изгиб, p — критическая нагрузка, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа. Анализируя это уравнение, приходят к выводу о том, что прогиб оболочки в момент потери устойчивости при условии шарнирного опирания по краям имеет вид

$$w = c \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*), получим связь между параметрами волнообразования m , n и критической нагрузкой p :

$$\frac{D}{\delta} \left(\frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^4 - p \left(\frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^3 \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^2 = 0.$$

Введем вместо m и n параметры ξ и η

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi R m}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R}.$$

Тогда, полагая

$$p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$\bar{p} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} \eta + \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta}.$$

Наименьшее значение \bar{p} отвечает верхней критической нагрузке. Оно получается, если параметры ξ и η связаны соотношением

$$\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2 \eta} = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}. \quad (**)$$

Тогда

$$\bar{p}_c = \min \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \simeq 0,6.$$

Соотношение (**) не определяет ξ и η , а следовательно, m и n неоднозначно. Однако, как показывает опыт, оболочка теряет устойчивость таким образом, что значение $\xi \simeq 1$. Если для ξ принять это значение, то соотношение (**) определяет η , а значит, m и n . В частности, для n получается следующая формула:

$$n = \frac{1}{2} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

При $\nu = 0,3$

$$n \simeq 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Предположив, что периодичность прогибов оболочки сохраняется при закритической деформации, и, следовательно, она такая же, как и в момент потери устойчивости, мы должны считать, что размеры a , b области Q оболочки одинаковы, так как

$$\frac{a}{b} = \xi = 1,$$

а параметр n определяется по указанной выше формуле.

Истинная форма оболочки при закритической деформации, сопровождающейся осевым сжатием Δb , определяется из условия минимума функционала $U(y)$ в классе функций $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$\Delta b = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

Для решения этой вариационной задачи представляется целесообразным перейти к безразмерным переменным \bar{x} и \bar{y} ,

полагая

$$x = \frac{b}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh} \bar{y},$$

где h обозначает осевое сжатие оболочки (т. е. $h = \Delta b$). В новых переменных \bar{x} , \bar{y} , черту над которыми мы для простоты записи опускаем, будет

$$U = \frac{2E\delta^3 a n h}{3(1-\nu^2)b^2} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\ + 2ncE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 (bh)^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{16n^2 h}{\pi^2 b} y''^2\right) dx + \text{const.}$$

Положим теперь

$$\frac{b}{a} = \xi, \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n}\right)^2 \frac{\lambda}{b}.$$

Тогда получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \lambda}{12(1-\nu^2)n\xi^2} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\ + 2^{1/4} c \pi^3 \frac{1}{4n^2} E \delta^{5/2} R^{1/2} \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\lambda}{\xi^2} y''^2\right) dx + \text{const.}$$

Как показано выше, в момент потери устойчивости оболочки имеем

$$\xi = 1, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Подставляя эти значения в выражение энергии деформации, получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} \left(\lambda \int_{-1}^1 y''^2 dx + \right. \\ \left. + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y''^2) dx \right) + \text{const.}$$

Здесь принято $\nu = 0,3$, $c = 0,19$

Положим

$$J(y) = \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx.$$

Тогда определение формы оболочки при закритической деформации сводится к нахождению функции $y(x)$, реализующей минимум функционала $J(y)$ при условии

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

Относительно функции $y(x)$, для которой функционал J достигает минимума, существенно заметить, что график этой функции имеет точку перегиба при $x = 0$, а в точках $x = \pm 1$

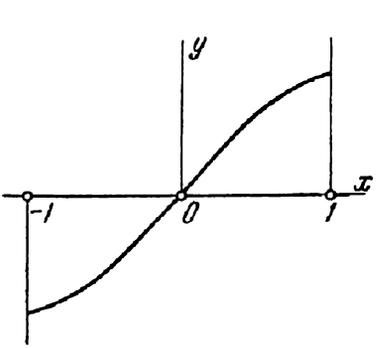


Рис. 51.

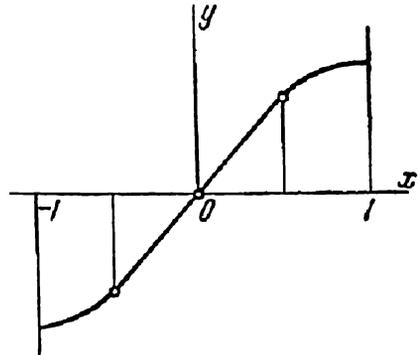


Рис. 52.

кривизна стационарна (рис. 51). Поэтому представляется естественным аппроксимировать этот график двумя параболлами с вершинами на прямых $x = \pm 1$, расположенными симметрично относительно начала координат, и гладко примыкающим к ним прямолинейным отрезком (рис. 52). Функцию $y(x)$, задаваемую этим графиком, мы будем характеризовать двумя параметрами k и l . Величина k — это угловой коэффициент наклонных участков графика $y'(x)$, а l — значение $y'(x)$ в нуле. Таким образом, $k = |y''|$ при $x = \pm 1$, а $l = y'(0)$.

Несложным рассмотрением показывается, что область допустимых значений параметра l , определяемая условием

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Так же показывается, что значения λ , характеризующие общую деформацию оболочки, ограничены, именно

$$\lambda < \frac{4}{3}.$$

Для функции $y(x)$ указанного вида имеем

$$J = 2kl\lambda + \frac{4l}{\sqrt{k}} \lambda^{1/3} + \frac{8l^3}{3\sqrt{k}} \lambda^{5/3}$$

а условие

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$

переходит в связь между k и l

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2l} - \frac{3}{4l^3}.$$

Для определения минимума J и значений k , l , при которых этот минимум достигается, были вычислены значения J для различных l из указанного выше интервала

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

и значений λ , не превосходящих $4/3$. При этом оказалось, что $\min J$ при $\lambda = \text{const}$ практически всегда получается при одном и том же значении $l \simeq 0,82$. А так как значение J в точке, где достигается минимум, стационарно, то, не совершая большой ошибки, можно принять, что минимум J равен его значению при $l = 0,82$. Тогда получим

$$\min J = 3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/3} + \lambda^{5/3}.$$

Следовательно, энергия упругой деформации оболочки в состоянии равновесия равна

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} (3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/3} + \lambda^{5/3}) + \text{const},$$

Обратимся теперь к работе A , производимой внешней нагрузкой p . Имеем

$$A = 2\pi R \delta p h.$$

Вводя сюда вместо h параметр λ согласно равенству

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\lambda}{b},$$

и замечая, что

$$\frac{b}{a} = \xi = 1, \quad a = \frac{\pi R}{n}, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}, \quad p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$A = \frac{\pi^4}{3,3n} E \delta^3 \bar{p} \lambda.$$

Для оболочки, находящейся в состоянии упругого равновесия, имеем

$$d(U - A) = 0.$$

Отсюда получается величина безразмерной нагрузки \bar{p} в зависимости от параметра λ , характеризующего осевое сжатие

$$p = 0,03 \times (3,5 + 0,56\lambda^{-3/4} + 1,25\lambda^{1/4}).$$

Напомним, что здесь, как и везде в аналогичных случаях, параметр λ нельзя брать сколь угодно малым, так как он характеризует деформацию, которая предполагается значительной.

Графически зависимость \bar{p} от λ представлена на рис. 53. Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка после потери устойчивости падает. Наименьшее значение $\bar{p} \simeq 0,16$.

Таким образом, нижняя критическая нагрузка p для цилиндрической оболочки при осевом сжатии определяется по формуле

$$p = 0,16 E \frac{\delta}{R}.$$

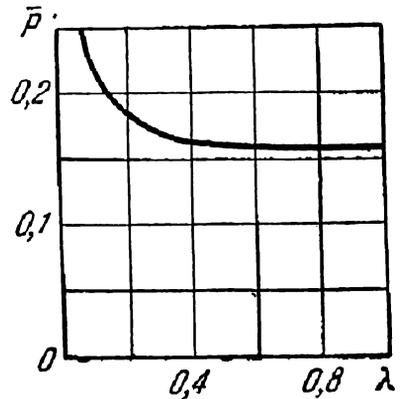


Рис. 53.

Полученная формула для p была подвергнута экспериментальной проверке. Экспериментальное определение критических нагрузок при осевом сжатии цилиндрической оболочки производилось на установке, которая схематически изображена на рис. 54. Основным элементом установки являются два строго параллельных диска 1 , которые при затягивании гайки 2 , выполненной в виде штурвала, сближаются и сжимают испытываемую оболочку 3 .

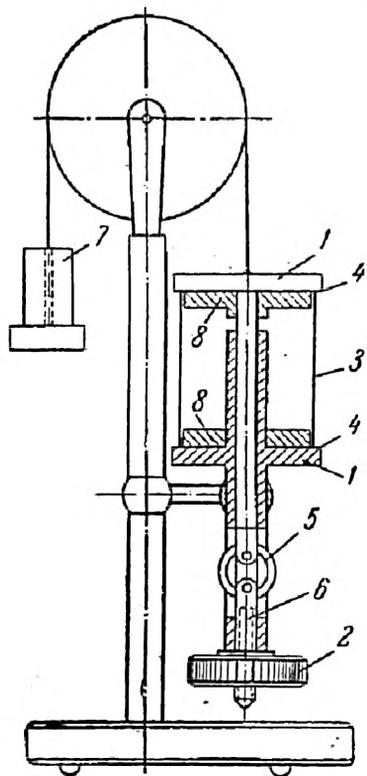


Рис. 54.

Нижний диск имеет втулку, в которой проходит стержень верхнего диска. Оба диска после сочленения втулки и стержня по скользящей посадке обработаны с одной установкой, чем и достигнута строгая параллельность их друг другу.

Испытуемые оболочки радиуса $R = 40$ мм, длины $L = 80$ мм получались из меди напылением в вакууме на геометрически совершенную полированную цилиндрическую поверхность. Края оболочки обрезались на специальной оправке также с одной установки станка.

Для того чтобы обеспечить полную равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки, между опорными дисками $1-1$ и торцами оболочки поставлена тонкая эластичная прокладка 4 .

Края оболочки центрировались на конических шайбах 8 .

Сжимающее усилие регистрировалось с помощью тензометрических датчиков, установленных на кольце 5 , через которое передавалось усилие от винта 6 на стержень верхнего опорного диска 1 . Тензометрические датчики тарировались на величину сжимающего усилия с помощью съемного груза 7 .

Эксперимент проводился следующим образом. Испытуемый образец устанавливался между опорными дисками $1-1$. С помощью съемного груза 7 тарировались показания тензометрических датчиков на величину сжимающего усилия. Затем вращением штурвала 2 оболочка сжималась. Сжимающее усилие

регистрировалось показанием гальванометра, подключенного к тензометрическим датчикам. Когда сжимающее усилие достигало верхнего критического значения f_e , оболочка теряла устойчивость с образованием системы правильно расположенных вмятин на ее поверхности (рис. 55).

В результате потери устойчивости воспринимаемая оболочкой нагрузка снижалась и продолжала снижаться при дальнейшем сближении опорных дисков. В конце концов она достигала минимального значения f_i (нижнее критическое значение).

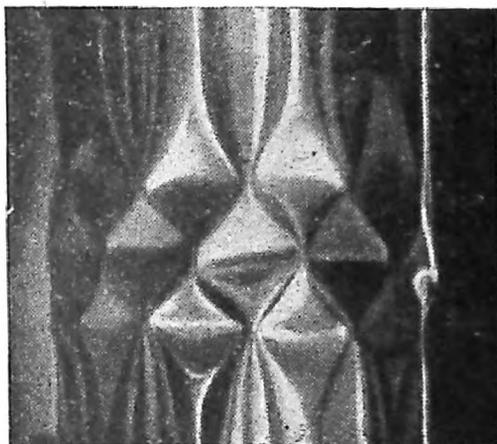


Рис. 55.

Испытанию подвергались цилиндрические оболочки радиуса $R = 40$ мм, высоты $L = 80$ мм с различной толщиной δ от 0,03 до 0,09 мм. На рис. 56 представлены графики теоретической зависимости величин f_e и f_i от толщины оболочки

$$f_e = 0,6E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta), \quad f_i = 0,16E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta).$$

Модуль упругости E для меди принят равным $0,9 \cdot 10^6$ кг/см². (Это среднее значение модуля упругости для медных образцов, получаемых напылением в вакууме). Отдельные точки, обозначенные кружками, дают экспериментальное значение величины f_e . Как видно, эти значения близки к теоретическим. Следует, однако, заметить, что близость экспериментального значения f_e к теоретическому была получена только после тщательной отладки установки и подготовки образцов, обеспечивающих равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки.

Экспериментальное исследование величины верхнего критического усилия f_e дает основание утверждать, что в реальной конструкции теоретическое значение f_e практически никогда не достигается, и на это значение критического усилия

нельзя ориентироваться при расчете оболочек на устойчивость.

Экспериментальные значения нижнего критического значения на рис. 56 отмечены крестиками. Нижнее критическое значение f_i отличалось значительной стабильностью.

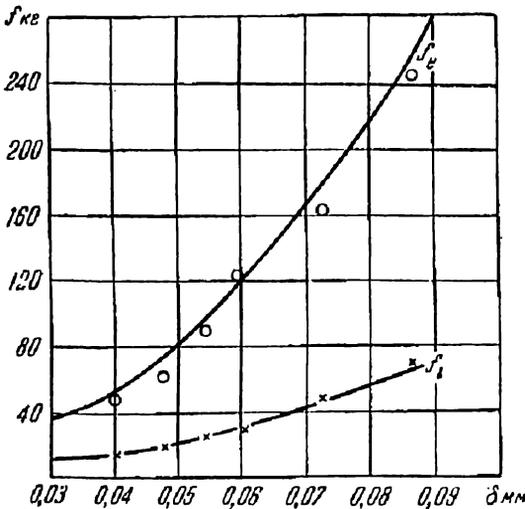


Рис. 56.

Его экспериментальное значение было близко к теоретическому во всех случаях, в том числе и тогда, когда верхнее критическое значение f_c было гораздо ниже теоретического. Кроме того, значение f_i практически не изменялось при повторных испытаниях, чего нельзя сказать о верхнем критическом значении.

Сопоставление экспериментального значения f_i с его теоретическим значением дает основание ре-

комендовать в качестве расчетного значения для критической нагрузки p сжатой цилиндрической оболочки полученную выше формулу

$$p = 0,16E \frac{\delta}{R}.$$

§ 2. Цилиндрические оболочки под внешним давлением

В этом параграфе мы рассмотрим закритические деформации цилиндрических оболочек, возникающие в результате потери устойчивости под равномерно распределенным внешним давлением. Так же как и в случае осевого сжатия (§ 1), это рассмотрение будет основано на применении принципа А.

Согласно принципу А исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки сводится к рассмотрению некоторого функционала, определенного на изометрических преобразованиях основной формы, при удовлетворении некоторых граничных условий, отвечающих способу опи-

рания оболочки. Для изометрических преобразований, построенных в гл. 3, эти граничные условия не удовлетворяются.

Правда, в тех случаях, когда закритическая деформация отличается периодичностью строения по длине оболочки, например при осевом сжатии или комбинированном нагружении с преобладанием осевого сжатия, роль граничных условий значительно снижается. Удовлетворение граничных условий при рассмотрении соответствующих задач вряд ли может существенно повлиять на результаты гл. 3. Иначе обстоит дело в тех случаях, когда закритическая деформация сопровождается образованием сплошных выпучин на всю длину оболочки, например в случае внешнего давления и кручения. Здесь нет основания игнорировать граничные условия. И поэтому надо брать те изометрические преобразования, построенные в гл. 8, § 4, для которых краевые условия выполняются. К сожалению, аналитическое решение задачи при этом значительно усложняется. Поэтому мы ограничимся только формулировкой окончательного результата. Что касается метода решения задачи, то мы проиллюстрируем его, пользуясь простейшими изометрическими преобразованиями, как и при осевом сжатии. Напомним эти преобразования применительно к рассматриваемой задаче.

Возьмем правильную призму с числом боковых граней $2l$ и проведем на какой-нибудь её грани α произвольную кривую γ , соединяющую середины оснований этой грани и однозначно проектирующуюся на ось призмы. Отразим кривую γ зеркально в радиальной плоскости, проходящей через ось призмы и ребро грани α . При этом получим кривую γ' в грани α' , смежной α . После этого с помощью грани α' и кривой γ' в ней строим кривую γ'' в грани α'' , смежной α' , и т. д. Таким образом, в каждой грани α^i получится кривая γ^i . Проведем теперь произвольную плоскость σ , перпендикулярную оси призмы. Она пересечет кривые γ^i в точках A^i . Пусть P_σ — многоугольник с вершинами A^i . Когда плоскость σ параллельно смещается, многоугольник P_σ описывает изометричную цилиндру поверхность Z . Кривые γ^i являются ребрами на этой поверхности (рис. 57).

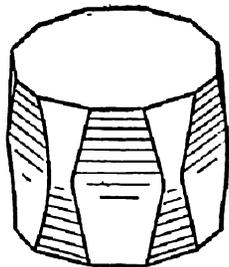


Рис. 57.

Определим некоторые геометрические величины для поверхности Z . В связи с этим в грани α введем прямоугольные декартовы координаты x, y , приняв центр грани за начало координат, а прямые, проходящие через центр грани параллельно ее сторонам — за координатные оси. В этих координатах кривая γ задается уравнением

$$y = y(x).$$

Кривизна кривой γ равна

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Если n достаточно велико, или, лучше сказать, грань α заметно вытянута в направлении оси призмы, то для интересующих нас кривых γ можно считать $1 + y'^2 \simeq 1$ и поэтому

$$k \simeq |y''|.$$

Для угла ϑ между плоскостью ребра γ и касательными плоскостями поверхности Z получается выражение

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Здесь также можно игнорировать y'^2 под знаком корня. Тогда для угла ϑ получается выражение

$$\vartheta \simeq \frac{\pi}{2n}.$$

При определении энергии упругой деформации оболочки в форме Z нам понадобится нормальная кривизна \tilde{k} этой поверхности. Для нее получается выражение

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y''.$$

Это выражение, так же как и предыдущие, получается после аналогичных упрощений.

Производимая внешним давлением работа измеряется произведением величины давления на изменение объема, ограничиваемого оболочкой, при деформации последней. В связи с этим найдем объем, который ограничивает поверхность Z вместе с основаниями призмы, которые ее закрывают,

Пересечение поверхности Z с плоскостью σ , перпендикулярной ее оси, есть $2n$ -угольник P_σ . Если его площадь обозначить S , то интересующий нас объем равен

$$V = \int_{-L/2}^{L/2} S dx.$$

Таким образом, для того чтобы найти объем V в зависимости от функции $y(x)$, задающей форму поверхности Z , нам надо прежде всего найти выражение S в зависимости от y .

Пусть $2n$ -угольник с вершинами в серединах сторон многоугольника, лежащего в основании призмы, обозначен через P_0 . Тогда независимо от положения плоскости σ у каждого $2n$ -угольника P_σ стороны параллельны сторонам P_0 .

Плоскость σ пересекает призму по правильному $2n$ -угольнику \bar{P} . Заномеруем вершины этого многоугольника в порядке их следования и обозначим через P' правильный n -угольник с четными вершинами \bar{P} , а через P'' — правильный n -угольник с нечетными вершинами \bar{P} . Многоугольник P_σ вписан в \bar{P} , и его стороны образуют равные углы со сторонами \bar{P} . Отсюда следует, что многоугольник P_σ получается линейным смешиванием многоугольников P' и P'' по Минковскому*). Именно,

$$P_\sigma = \frac{a-y}{a} P' + \frac{a+y}{a} P'',$$

где a — сторона многоугольника \bar{P} .

По известной формуле площадь многоугольника

$$P = \lambda P' + \mu P'' \quad (\lambda + \mu = 1)$$

равна

$$S = \lambda^2 S' + 2\lambda\mu S_{12} + \mu^2 S'', \quad S_{12} = 2S_0 - \frac{S' + S''}{2},$$

*) Линейной комбинацией фигур F' и F'' , лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, называется фигура

$$F = \lambda F' + \mu F'',$$

которую описывает конец вектора $r = \lambda r' + \mu r''$, когда концы векторов r' и r'' независимо описывают фигуры F' и F'' . См. А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1950 г.

где S' и S'' — площади многоугольников P' и P'' соответственно, а S_0 — площадь многоугольника P , который получается в линейной комбинации P' и P'' при $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. В нашем случае S_0 представляет собой площадь $2n$ -угольника P_0 .

Принимая во внимание, что $\lambda + \mu = 1$ и $S' = S''$, формулу для S можно преобразовать. Именно,

$$S = S' + 4\lambda\mu (S_0 - S').$$

Подставляя сюда

$$\lambda = \frac{\frac{a}{2} - y}{a}, \quad \mu = \frac{\frac{a}{2} + y}{a},$$

получим

$$S = (*) - \frac{4y^2}{a^2} (S_0 - S'),$$

где (*) — слагаемое, не зависящее от y .

Вводя теперь в формулу для объема V найденное выражение S , получим

$$V = (*) - \frac{4}{a^2} (S_0 - S') \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

В связи с предстоящими выкладками целесообразно перейти от переменных x, y , которыми мы до сих пор пользовались, к новым, безразмерным \bar{x}, \bar{y} , полагая

$$x = \frac{L}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{a}{2} \bar{y}.$$

Здесь L — высота призмы, которую мы будем отождествлять с высотой исходной оболочки, a — сторона основания призмы. Если радиус исходной оболочки равен R , то

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

Интервал изменения переменных \bar{x} и \bar{y} , очевидно, есть $(-1, +1)$. В новых переменных, черту над обозначениями которых в дальнейшем будем опускать, интересующие нас

геометрические величины будут вычисляться по формулам:

$$k = \frac{2\pi R^3}{nL^2} |y''|,$$

$$\tilde{k} = \frac{\pi^2 R}{n^2 L^2} y'',$$

$$V = (*) - \frac{\pi^3 R^2 L}{8n^2} \int_{-1}^1 y^3 dx.$$

Так же как в случае осевого сжатия, для энергии деформации оболочки получается следующее выражение:

$$U = \frac{\pi^5 E \delta^3}{24 (1 - \nu^2) n^4} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \int_{-1}^1 y''^3 dx +$$

$$+ \frac{\pi^3 c}{4n^2} E \delta^{5/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx + \text{const.}$$

Содержащийся в этой формуле целочисленный параметр n мы определим из условия периодичности прогибов по окружности оболочки в момент потери устойчивости.

Поперечный прогиб w цилиндрической оболочки в момент потери устойчивости под давлением q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{qR}{\delta} \Delta \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (*)$$

Показывается, что при условии шарнирного опирания оболочки решение этого уравнения имеет вид

$$w = c \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Подставляя это выражение w в уравнение (*), получим некоторое соотношение между параметрами m , n и нагрузкой q . Если вместо m и n ввести параметры

$$\xi = \frac{\pi m R}{Ln}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R}$$

и безразмерную нагрузку

$$\bar{q} = \frac{qR^2}{E\delta^2},$$

то указанному соотношению можно придать вид

$$\bar{q} = \frac{1 + \xi^2}{12(1 - \nu^2)} \eta + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)\eta}.$$

Минимальное значение \bar{q} отвечает верхней критической нагрузке, Если параметр

$$\epsilon = \frac{R\delta}{L^2}$$

мал, то

$$\min \bar{q} = \bar{q}_e = \frac{4\pi \sqrt{\epsilon}}{(36(1 - \nu^2))^{3/4}} \simeq 0,92 \sqrt{\epsilon}.$$

Это минимальное значение \bar{q} получается для $m = 1$ и n , определяемого соотношением

$$\left(\frac{\pi R}{Ln}\right)^8 = \frac{\pi^4 \epsilon^2}{36(1 - \nu^2)}. \quad (**)$$

Так как характер периодичности прогибов в процессе закритической деформации сохраняется, то значение n , которое входит в выражение энергии деформации, определяется соотношением (**). Подставляя значение n в формулу для U , получим

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1 - \nu^2) n^2} \left(\frac{R}{L}\right) \left\{ \frac{\pi \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 y'^2 dx + \right. \\ \left. + 6(1 - \nu^2) \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx \right\} + \text{const.}$$

Найдем производимую внешним давлением q работу при деформации оболочки. Изменение объема, ограниченного оболочкой, равно

$$\Delta V = \frac{\pi^3 R^2 L}{8n^2} \int_{-1}^1 y^3 dx + \text{const.}$$

Работа

$$A = q \Delta V.$$

Отсюда

$$A = \frac{\pi^3 R^2 L q}{8n^2} \int_{-1}^1 y^3 dx + \text{const.}$$

Или, вводя безразмерную величину \bar{q} , связанную с внешним давлением соотношением

$$q = \bar{q}E \frac{\delta^2}{R^2},$$

получим

$$A = \frac{\pi^2 \bar{q} E \delta^3}{8n^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{R}{L} \right) \int_{-1}^1 y^2 dx + \text{const.}$$

Положим

$$J = \frac{\pi V \epsilon}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 y'^2 dx + 6(1 - \nu^2) \frac{c}{V \epsilon} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx,$$

$$\lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx.$$

Тогда

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{24(1 - \nu^2)n^2} \left(\frac{R}{L} \right) J + \text{const}, \quad A = \frac{\pi^2 \bar{q} E \delta^3}{8n^2 \epsilon} \left(\frac{R}{L} \right) \lambda + \text{const.}$$

Истинную форму оболочки в состоянии равновесия под нагрузкой q мы будем определять из условия минимума функционала J при условии стационарности λ . Для решения этой изопериметрической задачи применим приближенный метод решения, как и в случае осевого сжатия в § 1.

Функцию $y(x)$, реализующую минимум функционала J , мы будем искать в классе гладких функций, определяемых условиями

$$y'' = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq \alpha, \\ a & \text{при } |x| < \alpha, \end{cases}$$

где a и α — варьируемые параметры. График такой функции представлен на рис. 58. Он состоит из параболы на участке

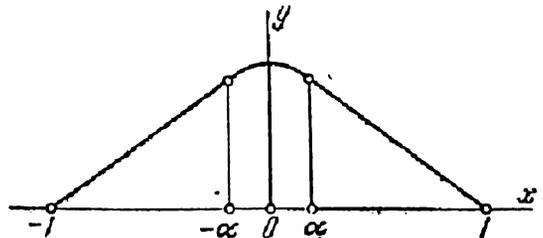


Рис. 58.

($-\alpha, \alpha$) и двух гладко примыкающих к ней прямолинейных отрезков. Такой выбор функции $y(x)$ подсказывается очевидной симметрией функции, реализующей минимум J , и обращением ее в нуль вместе со вторыми производными на концах интервала ($-1, 1$).

Аналитическое выражение функции $y(x)$ следующее:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{2} - \frac{aa^2}{2} + aa(1-x), & |x| \leq a, \\ aa(1-x), & |x| > a. \end{cases}$$

Можно показать, что для функции, реализующей минимум функционала J , значение параметра a мало вместе с ε . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y''^3 dx &= 2aa^2, \\ \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx &= 2a^{1/2}a, \\ \int_{-1}^1 y^3 dx &= \frac{2}{3} a^2 a^3 (1 + *), \end{aligned}$$

где звездочкой обозначены выражения, имеющие подчиненное значение при малом a .

Подставляя значения полученных интегралов в выражения J и λ и игнорируя члены $*$, будем иметь

$$J = \frac{\pi \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{6}} 2aa^2 + 12(1-\nu^2) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} a \sqrt{a}, \quad \lambda = \frac{2}{3} a^2 a^3.$$

Вводя в выражение J величину λ вместо a , получим J как функцию только одного параметра a

$$J = (\pi \sqrt{\lambda \varepsilon}) a + \left(12(1-\nu^2) c \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \right) \frac{1}{\sqrt{a}},$$

При $\nu = 0,3$ и $c = 0,19$ будет

$$J = (\pi \sqrt{\lambda \varepsilon}) a + 2,5 \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Легко видеть, что при варьировании по параметру a

$$\min J = 5,1 \varepsilon^{-1/6} \sqrt{\lambda},$$

и этот минимум достигается при

$$a = 0,54 \varepsilon^{-2/3},$$

Для оболочки, находящейся в состоянии упругого равновесия,

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}.$$

Принимая во внимание полученное выражение для $\min J$, отсюда находим величину внешнего давления \bar{q} в зависимости от общей деформации оболочки, которую мы характеризуем параметром λ :

$$\bar{q} = \varepsilon \left(0,95 \frac{\varepsilon^{-1/6}}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации (λ). Состояния равновесия оболочки неустойчивы. Это вполне согласуется с данными экспериментального исследования оболочек под внешним давлением: переход к закритическим деформациям оболочки в результате потери устойчивости происходит без увеличения внешней нагрузки.

Определим максимальную геометрически допустимую деформацию (λ). Так как $|y(x)|$ по смыслу не больше единицы, и $\max y(x)$ достигается при $x=0$, то

$$\left| -\frac{a\alpha^2}{2} + a\alpha(1-\alpha) \right| \leq 1.$$

Величина

$$\lambda \simeq \frac{2}{3} a^2 \alpha^2.$$

Отсюда, принимая во внимание указанное неравенство, при малом ε (следовательно, малом α), получаем

$$\max \lambda \simeq \frac{2}{3}.$$

Подставляя это значение λ в формулу для \bar{q} , получим значение нижней критической нагрузки

$$\bar{q}_i = \varepsilon (1,16\varepsilon^{-1/6}), \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Сравнивая полученное значение \bar{q}_i с величиной верхней критической нагрузки

$$\bar{q}_e = 0,92 \sqrt{\varepsilon},$$

будем иметь

$$q_i = q_e (1,26\varepsilon^{1/3}).$$

Мы нашли нижнюю критическую нагрузку q_i из условия максимальной геометрически допустимой деформации ($\lambda = 2/3$), которая определяется касанием смежных ребер поверхности Z . Однако вывод формулы для энергии деформации вблизи ребер предполагает отсутствие в его окрестности других ребер. Поэтому для применения этой формулы при сближении ребер у нас нет достаточных оснований. Возникает ситуация, сходная с той, которая была при рассмотрении нижнего критического давления для строго выпуклой оболочки, когда величина этого давления определялась максимальной геометрически допустимой деформацией (гл. 3, § 3). Полученное там уточненное решение задачи для сферического сегмента было основано на изучении влияния закрепления края на энергию деформации вдоль ребра зеркального выпучивания при сближении его с краем. В рассматриваемой задаче при уточненном решении естественно выяснить влияние сближения ребер на энергию деформации.

Проведем плоскость симметрии β поверхности Z между двумя сближающимися при деформации ребрами γ и γ' . Пусть $\tilde{\gamma}$ — пересечение этой плоскости с поверхностью Z . Рассмотрим деформацию u , v , восстанавливающую истинную форму деформированной поверхности из формы Z вблизи ребра γ (гл. 2, § 2). Мы утверждаем, что краевые условия для функций u и v вдоль $\tilde{\gamma}$ близки к тем условиям, которые диктуются жестким защемлением (гл. 2, § 4). Действительно, так как плоскость β является плоскостью симметрии, то она пересекает и поверхность Z , и истинную форму оболочки под прямым углом. Отсюда немедленно следует, что на $\tilde{\gamma}$ $v' = 0$. Далее, так как β является плоскостью симметрии деформации, то нормальная к ней составляющая перемещения равна нулю. Отсюда вытекает, что $u \cos \vartheta + v \sin \vartheta = 0$ и, следовательно, ввиду малости ϑ ($\vartheta \simeq \frac{\pi}{2n}$) можно считать $u \simeq 0$. Таким образом, вдоль $\tilde{\gamma}$ выполняются краевые условия: $v' = 0$, $u = 0$.

В безразмерных переменных. (гл. 2, § 2) это значит, что $u = 0$, $v = 0$. Именно при таких краевых условиях решалась задача о влиянии сближения ребра с защемленным краем на

энергию деформации (гл. 2, § 4). Приведенные соображения дают нам основание воспользоваться найденным значением коэффициента $c(\tau)$ в выражении энергии деформации (гл. 2, § 4), считая τ безразмерным расстоянием ребра γ от плоскости симметрии β .

Сохраняя смысл введенных ранее обозначений a и α , можно считать, что расстояние ребра γ от плоскости симметрии β в центральной (параболической) части ребра равно

$$h \simeq (1 - \alpha\alpha) \frac{\pi R}{2n},$$

или в зависимости от безразмерного параметра τ (гл. 2, § 4),

$$h = \frac{1}{12^{1/4}} \sqrt{\frac{\rho \delta}{\vartheta}} \tau.$$

Величины ρ и ϑ имеют в данном случае следующие значения

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n}, \quad \rho = \frac{nL^2}{2\pi Ra}.$$

Сравнивая полученные два выражения для h и замечая, что параметр волнообразования n определяется соотношением

$$\left(\frac{\pi R}{Ln}\right)^2 = \frac{\pi}{(36(1-\nu^2))^{1/4}} \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}},$$

получим

$$1 - \alpha\alpha = \frac{2}{\pi} (3(1-\nu^2))^{1/4} \frac{\tau}{\sqrt{a}}.$$

Положим $\alpha\alpha = \xi$. Тогда

$$\sqrt{a} = \frac{0,815\tau}{1-\xi}.$$

Подставляя определяемое этой формулой значение a и $\alpha\alpha = \xi$ в формулу для энергии деформации оболочки, получим

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)n^2} \left(\frac{R}{L}\right) J + \text{const},$$

$$J = \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{6}} \xi \left(\frac{0,815\tau}{1-\xi}\right)^2 + 12(1-\nu^2) \frac{c(\tau)}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \frac{1-\xi}{0,815\tau}.$$

Производимая внешним давлением работа равна

$$A = \frac{\pi^3 \bar{q} E \delta^3}{8n^2 \varepsilon} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \xi^3 + \text{const.}$$

Далее обычным способом для величины нижнего критического давления получается следующая формула:

$$q_i = q_e k(\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{R \delta}{L^2},$$

$$k(\varepsilon) = 0,3 \sqrt{\varepsilon} \min_{(\xi)} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \min_{(\tau)} J(\xi, \tau) \right).$$

Численные значения коэффициента $k(\varepsilon)$ представлены на рис. 59.

В. В. Михайлов [11] рассмотрел вопрос о величине нижнего критического давления для цилиндрических оболочек, пользуясь изометрическими преобразованиями, полностью удовлетворяющими условию опирания оболочки по краям (гл. 8, § 4).

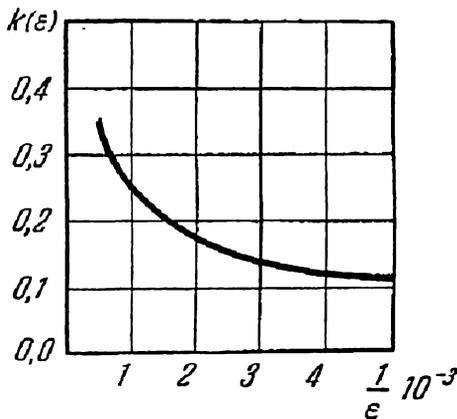


Рис. 59.

§ 3. Цилиндрические оболочки при кручении

Исследуя закритическое упругое состояние цилиндрической оболочки при кручении, мы будем приближать форму деформированной оболочки изометричной цилиндру поверхностью Z , построенной в § 3 гл. 8. Найдем для этого случая выражение для энергии деформации U и производимой внешней нагрузкой работы A . Энергия деформации

$$U = U_z + U_\gamma,$$

где U_z — энергия изгиба по основной поверхности, U_γ — энергия деформации вдоль ребер. Энергия U_z на единицу площади поверхности оболочки вычисляется по формуле

$$\bar{U}_z = \frac{E \delta^3}{24(1-\nu^2)} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2),$$

где Δk_1 и Δk_2 — экстремальные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной цилиндрической поверхности к поверхности Z . Ввиду малости угла ϑ можно считать, что

$$\Delta k_1 \simeq k - \frac{1}{R}, \quad \Delta k_2 = 0,$$

где k — нормальная кривизна поверхности Z в направлении перпендикулярном ее образующим, а R — радиус исходной оболочки.

Так как поверхность Z составлена из n конгруэнтных областей Z_A , то

$$U_Z = \iint_Z \bar{U} dS = n \iint_{Z_A} \bar{U} dS.$$

Обозначая $b(x)$ длину отрезка образующей поверхности Z_A , проходящей через точку (x) кривой γ , при малых ϑ и π/n будем иметь

$$\iint_{Z_A} \bar{U} ds \simeq \frac{E\delta^3\vartheta}{24(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} b(x) \left(k(x) - \frac{1}{R}\right)^2 dx.$$

Длина отрезка образующей

$$b(x) = \left(\frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{n} + y(x)\right) \frac{2}{\sin \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

Принимая во внимание малость величин π/n и ϑ , а также выражение для $a = 2\pi R/n$, получим

$$b(x) = \left(\frac{\pi^2 R}{n^2} + y(x)\right) \frac{2n}{\pi \vartheta}.$$

Отсюда

$$\iint_{Z_A} \bar{U} ds = \frac{nE\delta^3}{12\pi(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\pi^2 R}{n^2} + y(x)\right) \left(\frac{y''}{\vartheta^2} - \frac{1}{R}\right)^2 dx.$$

Ввиду условий 1) и 2), которым удовлетворяет функция $y(x)$ (см. гл. 8, § 3), можем записать

$$\int_{-L/2}^{L/2} y y''^2 dx = 0, \quad \int_{-L/2}^{L/2} y'' dx = 0, \quad \int_{-L/2}^{L/2} y dx = 0,$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} y'' y dx = - \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx,$$

Поэтому

$$\int_{Z_A} \bar{U} dS = \frac{\pi ER\delta^3}{12n(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y''^2 dx + \\ + \frac{nE\delta^3}{6\pi(1-\nu^2)R\vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx + \text{const.}$$

Итак, энергия изгиба по основной поверхности оболочки равна

$$U_Z = \frac{\pi ER\delta^3}{12(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y''^2 dx + \\ + \frac{n^2 E\delta^3}{6\pi(1-\nu^2)R\vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx + \text{const.}$$

Вычислим теперь энергию U_γ . Имеем

$$U_\gamma = U_\gamma^0 + \Delta U_\gamma$$

где

$$U_\gamma^0 = n \int_\gamma cE\delta^{5/2}\varphi^{3/2}x^{1/2} ds_\gamma,$$

$$\Delta U_\gamma = n \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_\gamma \varphi(-2k_n - 2\nu k_\gamma + k_e + k_i) ds_\gamma.$$

Здесь φ — угол между плоскостью кривой γ и касательными плоскостями поверхности Z вдоль этой кривой, k_e и k_i — нормальные кривизны поверхности Z в направлении, перпендикулярном ребру, k_n — нормальная кривизна исходной цилиндрической поверхности в соответствующем направлении, k_γ — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, соответствующем ребру γ . Начнем с определения величины ΔU_γ .

Из построения поверхности Z следует, что нормальные кривизны k_e и k_i равны по величине и имеют противоположные знаки. Поэтому $k_i + k_e = 0$, и, следовательно,

$$\Delta U_\gamma = n \frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \varphi(k_n + \nu k_\gamma) ds_\gamma.$$

Если обозначить через α угол между касательной к кривой γ и направлением оси призмы, то

$$k_n \simeq \frac{1}{R} \cos^2 \alpha, \quad k_\gamma = \frac{1}{R} \sin^2 \alpha.$$

Нетрудно получить выражение для угла α , исходя из уравнения кривой γ . При малых π/n и ϑ имеем

$$\cos^2 \alpha = \frac{\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2}{\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2}}.$$

Угол

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \left(\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Элемент дуги кривой γ равен

$$ds_\gamma = \left(\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right)^{1/2} dx.$$

Подставляя эти значения в формулу для ΔU_γ , при малом ϑ получим

$$\Delta U_\gamma = - \frac{n^2 E \delta^3}{6\pi (1 - \nu^2) R \vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Вычислим теперь U_γ^0 . Подставляя значения φ , χ и ds_γ в формулу для U_γ^0 , будем иметь для одного ребра γ_i

$$\begin{aligned} U_{\gamma_i}^0 &= \int_{-L/2}^{L/2} c E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 |y''|^{1/2} \left(\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right) dx = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} c E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Ввиду малости ϑ будет

$$\left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 \gg \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2$$

Поэтому можно считать, что

$$U_{\gamma_i}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} c E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 \right) dx.$$

Энергия, связанная с местным изгибом по всем ребрам поверхности Z , равна

$$U_1^0 = c n E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi \delta} \right)^2 \right) dx.$$

Складывая полученные формулы для U_Z , U_1^0 и ΔU_y находим полную энергию закритической деформации оболочки

$$U = \frac{\pi E R \delta^3}{12 (1 - \nu^2) \delta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y''^2 dx + \\ + c n E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi \delta} \right)^2 \right) dx + \text{const.}$$

Отсюда, принимая во внимание условия 1) и 2) для функции $y(x)$, получим

$$U = \frac{\pi E R \delta^3}{6 (1 - \nu^2) \delta^4} \int_{-L/4}^{L/4} y''^2 dx + \\ + 2 c n E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \int_{-L/4}^{L/4} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi \delta} \right)^2 \right) dx + \text{const.}$$

Введем безразмерные переменные \bar{x} и \bar{y} , полагая

$$x = \frac{L \bar{x}}{4}, \quad y = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{n} \bar{y} \simeq \frac{\pi^2 R}{n^2} \bar{y}.$$

В новых переменных \bar{x} и \bar{y} , черту над которыми мы будем опускать, имеем

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24 (1 - \nu^2)} \left(\frac{L}{R} \right) \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\ + 2 \pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx + \text{const}$$

Угол закручивания оболочки в новых переменных равен

$$\omega = 2 \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

Так же как и в предыдущих рассмотрениях, мы исходим из предположения о том, что периодичность прогибов оболочки при закритических деформациях определяется периодичностью прогибов в момент потери устойчивости. Поэтому параметр n , входящий в выражение энергии деформации, мы определим из рассмотрения потери устойчивости оболочки.

Пусть шарнирно опертая по краям цилиндрическая оболочка радиуса R , длины L и толщины δ находится под действием равномерно распределенного по краям касательного усилия s . Введем на поверхности оболочки криволинейные координаты x, y , так, как это делалось в предыдущих рассмотрениях, и обозначим через $w(x, y)$ радиальный прогиб оболочки в момент потери устойчивости. Функция $w(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2s \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

В линейной теории оболочек для прогиба $w(x, y)$ обычно принимают выражение вида

$$w = c \sin \frac{\pi x}{L} \cos \left(\frac{n(y - \gamma x)}{R} \right).$$

Если это выражение подставить в уравнение для w , то мы получим два соотношения для величин n, γ и s . Наименьшее значение s , определяемое этими соотношениями, равно

$$s_e \simeq 0,8E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4}$$

и оно представляет собой верхнюю критическую нагрузку. Это значение s получается при

$$\gamma = \bar{\gamma} \epsilon^{1/4}, \quad n = \frac{\pi R}{\bar{\xi} L} \epsilon^{-1/4},$$

где

$$\bar{\gamma} \simeq 1,8, \quad \bar{\xi} \simeq 0,75, \quad \epsilon = \frac{R\delta}{L^2}$$

Подставляя найденное значение n в выражение энергии деформации и угла закручивания, получим для них следующие

окончательные выражения:

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{R}\right) \int_{-1}^1 y'^2 dx +$$

$$+ 2\pi c \bar{\xi}^2 E \delta^3 \left(\frac{L}{R}\right) \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1+y'^2) dx + \text{const},$$

$$\omega = 2\xi^3 \left(\frac{L}{R}\right)^3 \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{3/4} \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

При $\bar{\xi} = 0,75$ имеем

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{R}\right) J(y), \quad \omega = 2 \cdot 0,75^3 \left(\frac{L}{R}\right)^3 \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{3/4} \lambda(y),$$

где

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4,35 |y''|^{1/2} (1+y'^2)) dx, \quad \lambda(y) = \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

Функцию $y(x)$, задающую форму оболочки при закритической деформации, мы будем определять из условия минимума энергии упругой деформации U при заданном угле закручивания ω , то есть из условия минимума $J(y)$ при $\lambda(y) = \text{const}$. Решение этой вариационной задачи будем

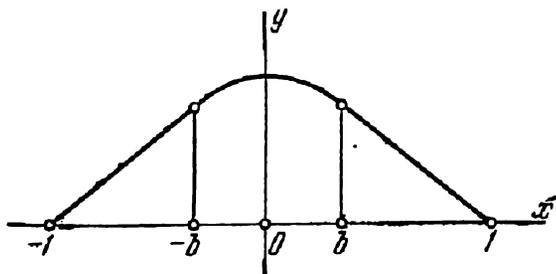


Рис. 60.

искать среди функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $y(-1) = y(1) = 0$;
- 2) $y''(x) = a$ при $|x| < b < 1$;
- 3) $y''(x) = 0$ при $|x| \geq b$,

где a и b — варьируемые параметры. Графически функция $y(x)$ представлена на рис. 60. График состоит из двух прямолинейных отрезков, гладко примыкающих к параболе. Аналитически функция $y(x)$ задается уравнениями:

$$y(x) = abx - ab \quad \text{при } x \geq b,$$

$$y(x) = -abx - ab \quad \text{при } x \leq -b,$$

$$y(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{ab^2}{2} - ab \quad \text{при } |x| < b.$$

Для интегралов, входящих в $J(y)$ и $\lambda(y)$, получаются следующие выражения:

$$\int_{-1}^1 y''^3 dx = 2a^3b, \quad \int_{-1}^1 y'^3 dx = 2a^3b^2 - \frac{4}{3}a^2b^3,$$

$$\int_{-1}^1 |y''|^{1/2}(1 + y'^3) dx = 2a^{1/2}b + \frac{2}{3}a^{5/2}b^3.$$

Подставляя эти значения в J и λ , получим

$$J = 2a^2b + 4,35 \left(2a^{1/2}b + \frac{2}{3}a^{5/2}b^3 \right), \quad \lambda = 2a^3b^2 - \frac{4}{3}a^2b^3.$$

Задачу о минимуме J при условии $\lambda = \text{const}$ мы решим численно. Именно, фиксировав λ , задаемся различными значениями параметра b , из условия $\lambda = \text{const}$ находим соответствующие им значения a , затем вычисляем J и определяем его наименьшее значение.

При таком решении задачи естественно возникает вопрос о том, каковы допустимые значения λ . Чтобы решить этот вопрос, заметим, что безразмерное переменное y по смыслу не превосходит единицы по модулю. А так как

$$\max |y| = -\frac{ab^2}{2} + ab, \quad \text{то} \quad -\frac{ab^2}{2} + ab \leq 1,$$

следовательно,

$$\lambda < \left(2 - \frac{4}{3}b \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{2} \right)^2} < 2,7.$$

Указанным выше способом при значениях λ из интервала $1 \leq \lambda \leq 2,8$, через каждые 0,2 были найдены значения $\min J$. При этом оказалось, что значение переменного b , для которого в указанном интервале значений λ достигался минимум J , практически не изменяется, и оно равно $\simeq 0,3$.

Подставляя значения $b = 0,3$ в выражения J и λ , получим

$$\lambda = 0,144a^3, \quad J = 0,6a^3 + 4,35a^{1/2} (0,6 + 0,018a^3).$$

Откуда

$$J = 4,15\lambda + 7,1\lambda^{1/3} (0,6 + 0,125\lambda).$$

Установим, связь между общей деформацией оболочки, которая характеризуется параметром λ , и воспринимаемой

оболочкой нагрузкой. Условие равновесия оболочки —

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda},$$

где $U(y)$ — энергия деформации, A — производимая внешней нагрузкой работа. Энергия деформации —

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{R}\right) J.$$

Найдем работу A . Имеем $A = 2\pi R \delta s \omega R$. Подставляя сюда значения

$$s = \bar{s} E \frac{\delta}{R}, \quad \omega = 2 \cdot 0,75^3 \left(\frac{L}{R}\right)^3 \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{3/4} \lambda,$$

получим

$$A = 1,7\pi \bar{s} E \delta^3 \left(\frac{L}{R}\right) \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{-1/4} \lambda.$$

Теперь из условия равновесия находим интересующую нас связь между нагрузкой и деформацией

$$\bar{s} = 0,0272 (4,15 + 1,06\lambda^{-3/4} + 1,1\lambda^{1/4}) (R\delta/L^2)^{1/4}.$$

Легко видеть, что функция $\bar{s}(\lambda)$ монотонно убывает при $\lambda < 2,9$, следовательно, и при всех допустимых значениях λ . Это вполне соответствует характеру перехода к закритическим деформациям. Найдем наименьшее значение \bar{s} . Имеем

$$\lambda \leq \left(2 - \frac{4}{3}b\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{2}\right)^2}.$$

При $b = 0,3$ величина $\lambda \leq 2,2$. Поэтому

$$\min s = 0,18 (R\delta/L^2)^{1/4}.$$

Таким образом, *наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации, то есть нижняя критическая нагрузка, определяется по формуле*

$$s_i = 0,18 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4}$$

и составляет примерно четверть верхней критической нагрузки

$$s_e = 0,8 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4}$$

ДОПОЛНЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ

Методы исследования закритических упругих состояний оболочек при статическом нагружении, развитые в этой книге, могут быть использованы также при решении задач динамики. В настоящем Дополнении применение этих методов иллюстрируется на конкретных задачах об устойчивости оболочек при динамическом нагружении, а также исследовании колебаний с большой амплитудой.

§ 1. Строго выпуклые оболочки при динамическом нагружении

Мы будем рассматривать пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю. Такая оболочка под внешним давлением q_0 , большим критического (p_c), теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Процесс выпучивания быстро прогрессирует и приводит к полному прощелкиванию оболочки, которое сопровождается «хлопком». Изучению динамики этого процесса будет посвящен п. 1.

Если на оболочку, находящуюся под внешним давлением q_0 , меньшим критического, действует кратковременная нагрузка q , гораздо большая критической, то потеря устойчивости оболочки, вызванная нагрузкой q , благодаря нагрузке q_0 может также привести к прощелкиванию оболочки. Определение минимального импульса $q\tau$, способного вызвать прощелкивание оболочки, находящейся под давлением q_0 , будет дано в п. 2.

1. Динамика «хлопка» при равномерном нагружении оболочки. Представим себе достаточно пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю, на которую действует равномерно распределенное внешнее давление $p > p_c$. Под этим давлением оболочка выпучивается и, таким образом, приходит в движение. Процесс деформации оболочки

завершается полным прощелкиванием оболочки с характерным «хлопком». Задача, которую мы хотим рассмотреть, заключается в изучении деформации оболочки по времени, в частности в выяснении физической причины «хлопка».

Качественно процесс деформации оболочки мы будем представлять себе так, как это изображено на рис. 61, а, где даны нормальные сечения оболочки в последовательные моменты времени.

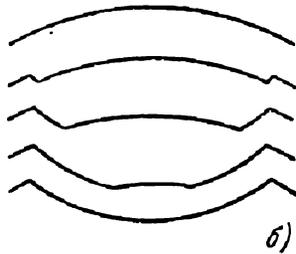
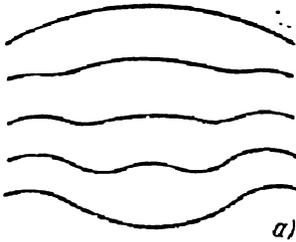


Рис. 61.

На рис. 61, б тот же процесс представлен схематически соответственно принятому нами способу приближения формы оболочки. Деформацию оболочки к моменту t мы представляем себе в виде двукратного зеркального выпучивания (рис. 61, в). Оно состоит в зеркальном отражении сегмента оболочки относительно плоскости α , близкой к краю, с последующим отражением относительно плоскости β .

Для того чтобы определить движение оболочки в процессе рассматриваемой деформации, воспользуемся вариационным принципом Гамильтона — Остроградского, согласно которому вариация функционала

$$J = \int W dt, \quad W = K - U + A,$$

равна нулю. Здесь K — кинетическая энергия движения, U — энергия деформации оболочки, A — работа,

производимая внешним давлением p . Поскольку нас интересует вопрос о физической причине «хлопка», мы ограничимся изучением движения в заключительной стадии, где наблюдается явление «хлопка».

Определим значения слагаемых K , U и A в подынтегральном выражении W . Начнем с энергии деформации U . Если плоскости α и β , определяющие зеркальное выпучивание, достаточно удалены друг от друга (а нас интересует сейчас именно этот случай), то

$$U = \pi c E \delta^{5/2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2} + (*),$$

где h — высота сегмента, отсекаемого плоскостью β , R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в центре выпучивания, δ — толщина оболочки. Знаком (*) обозначено аналогичное слагаемое, отвечающее плоскости α . В нашем предположении о характере рассматриваемой деформации это выражение стационарно, а поэтому оно несущественно.

Работа A , производимая внешним давлением p при деформации оболочки, с точностью до несущественного слагаемого, которое мы также будем обозначать (*), определяется по формуле

$$A = -2pV + (*),$$

где V — объем сегмента, отсекаемого плоскостью β , т. е.

$$V = \pi h^3 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Кинетическая энергия движения оболочки равна

$$K = \frac{1}{2} S \delta \gamma (2h')^2,$$

где S — площадь сегмента, отсекаемого плоскостью β , δ — толщина оболочки, γ — плотность материала, $2h'$ — скорость деформации. Имеем

$$S \simeq 2\pi h \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя полученные значения в выражение W , получим

$$W = 4\pi h \sqrt{R_1 R_2} \delta \gamma h^3 - \pi c E \delta^{5/2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2} - 2\pi p h^3 \sqrt{R_1 R_2} + (*).$$

Таким образом, выражение W имеет вид

$$W = c_0 (hh'^3 - c_1 h^{3/2} - c_2 h^3) + (*),$$

где c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные (не зависят от h).

Из обращения в нуль вариации функционала J следует, что функция $h(t)$, задающая деформацию, удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа

$$2hh'' + h'^3 + \frac{3}{2} c_1 \sqrt{h} + 2c_2 h = 0.$$

Умножая это уравнение на h' и интегрируя, получим

$$hh'^2 + c_1 h^{3/2} + c_2 h^3 = c = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования c , очевидно, больше нуля.

В момент полного прощелкивания ($h \rightarrow 0$) $h' \rightarrow \infty$. А так как h по смыслу неотрицательно, то скорость выпучивания (h') в момент прощелкивания терпит разрыв. Физически это значит, что прощелкивание сопровождается ударом. В результате этого удара и получается «хлопок».

2. Критический импульс. Будем рассматривать пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю, находящуюся под внешним давлением q_0 , меньшим верхнего критического значения q_c . Пусть такая оболочка испытывает кратковременное внешнее давление q , значительно превосходящее q_c . Тогда при достаточной интенсивности импульса $q\tau$, создаваемого этой нагрузкой, возможно полное прощелкивание оболочки. Оценим величину этого импульса.

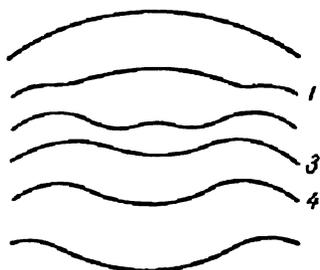


Рис. 62.

Мы будем представлять себе деформацию оболочки при указанном силовом воздействии на нее следующим образом (рис. 62). В начальный момент под нагрузкой q оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться (1).

Затем выпучивание увеличивается и приводит к частичному прощелкиванию (2). После этого оболочка либо восстанавливает свою первоначальную форму (выпучивание исчезает), либо в какой-то момент (3) деформация останавливается, а затем снова растет до полного прощелкивания. Нас интересует тот случай, когда реализуется вторая из указанных возможностей.

Ввиду кратковременности действия нагрузки q она сообщает области выпучивания скорость v , которая определяется соотношением

$$S\delta\gamma v = Sq\tau,$$

где S — площадь области выпучивания, δ — толщина оболочки, γ — плотность материала. Отсюда

$$v = \frac{q\tau}{\gamma\delta}.$$

Кинетическая энергия движения оболочки, обусловленная воздействием импульса $q\tau$, равна

$$K = \frac{S(q\tau)^2}{2\gamma\delta}.$$

Эта энергия, так же как и производимая давлением q_0 работа A , в состоянии (4) переходит в энергию деформации оболочки. Таким образом, мы имеем равенство

$$U(4) = K + A(4), \quad (*)$$

где (4) указывает на то, что соответствующая величина определяется для состояния оболочки (4), когда скорость деформации равна нулю.

Ввиду неустойчивости упругого состояния равновесия в форме (4) (гл. 3), оболочка с этого состояния либо восстанавливает свою первоначальную форму, либо переходит к полному прощелкиванию. Все зависит от того, будет ли нагрузка $q(4)$, воспринимаемая оболочкой в состоянии (4), меньше q_0 или больше q_0 .

В зависимости от прогиба $2h$ в центре выпучивания энергия деформации определяется по формуле

$$U = \pi c E \delta^{5/2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2}.$$

Производимая внешним давлением q_0 работа равна

$$A = 2\pi q_0 h^2 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя эти значения в соотношение (*), получим уравнение для прогиба $2h$ в состоянии (4).

Воспринимаемая оболочкой нагрузка при выпучивании в зависимости от прогиба в центре ($2h$) определяется по формуле

$$q(2h) = \frac{3}{2} c E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h}}.$$

Минимальное значение q_0 , при котором возможно прощелкивание оболочки из состояния (4), определяется условием

$$q_0 = q(2h), \quad (**)$$

где $2h$ находится из уравнения (*). Поэтому минимальный импульс $q\tau$ в зависимости от статической нагрузки q_0 мы получим, если исключим параметр h из уравнений (*), (**), и полученное соотношение разрешим относительно $q\tau$.

Обозначим через q_i нижнее критическое давление для оболочки. В гл. 3 для него получена формула

$$q_i = \frac{3}{2} c E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}},$$

где $2h_i$ — максимальный геометрически допустимый прогиб в центре выпучивания. Величины U и A в соотношении (*) можно записать так:

$$U = \frac{2}{3} \pi q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i},$$

$$A = \frac{\pi}{2} q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i}.$$

В выражении для A мы воспользовались равенством $q_0 = q(2h)$.

Теперь соотношения (*) и (**), из которых надлежит исключить h , запишутся так:

$$\frac{\pi}{6} q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i} = K,$$

$$q_i \sqrt{\frac{h_i}{h}} = q_0.$$

Параметр h легко исключается, и мы получаем

$$\frac{\pi}{6} q_i^4 \sqrt{R_1 R_2} (2h_i)^3 = K q_0^3.$$

Подставив в это соотношение значение

$$K = \frac{S (q\tau)^2}{2\gamma\delta},$$

будем иметь

$$\frac{\pi}{6} q_i^4 \sqrt{R_1 R_2} (2h_i)^3 = \frac{S (q\tau)^2}{2\gamma\delta} q_0^3.$$

Отсюда видно, что импульс $q\tau$ будет минимальным, если максимально S , то есть площадь области выпучивания в момент потери устойчивости. Будучи сегментом, эта область будет наибольшей при высоте $2h_i$. В этом случае

$$S = 2\pi h_i \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя это значение в полученное выше соотношение, находим

$$\frac{1}{3} q_i^4 (2h_i) = \frac{(q\tau)^2 q_0^3}{2\gamma\delta}.$$

Эта формула устанавливает связь между величиной статического внешнего давления q_0 на оболочку и кратковременной

нагрузкой q , действующей за время τ , способной вызвать полное прощелкивание оболочки. Напомним, что здесь q_i — нижнее критическое давление, как мы его определили в главе 3, $2h_i$ — максимальный геометрически допустимый прогиб оболочки при зеркальном выпучивании, δ — толщина оболочки, γ — плотность материала.

§ 2. Динамическое нагружение цилиндрической оболочки

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи, аналогичные тем, которые в § 1 решены для строго выпуклых оболочек. Представим себе цилиндрическую оболочку, шарнирно опертую по краям, находящуюся под действием осевой сжимающей нагрузки q_0 , меньшей верхнего критического значения. Пусть на эту оболочку кратковременно действует нагрузка q , значительно превосходящая верхнюю критическую. При этом оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. При достаточной интенсивности импульса нагрузки q может случиться, что оболочка не восстанавливает исходную цилиндрическую форму. Определение минимального такого импульса составляет содержание п. 1. В п. 2 рассматривается аналогичная задача для импульса, создаваемого внешним давлением.

1. Критический импульс при осевом сжатии. Будем рассматривать цилиндрическую оболочку радиуса R , длины L и толщины δ , шарнирно опертую по краям, находящуюся под действием осевой сжимающей нагрузки q_0 . Пусть, кроме того, на оболочку кратковременно действует нагрузка q в течение времени τ . Выясним, при каком значении q_0 оболочка, потеряв устойчивость под действием нагрузки q , восстанавливает свою первоначальную цилиндрическую форму. В связи с этим рассмотрим прежде всего начальную стадию деформации оболочки во времени.

Мы будем предполагать, что выпучивание оболочки в начальный момент описывается законом

$$w = u(t) \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Здесь w — нормальный прогиб оболочки, m и n — целочисленные параметры, характеризующие форму волнообразова-

ния на поверхности оболочки при выпучивании, x, y — координаты на поверхности оболочки: x — по образующей, y — по круговому сечению, перпендикулярному оси. Исходя из указанного предположения о характере прогибов оболочки при выпучивании, найдем функцию $u(t)$, задающую изменение прогиба во времени. С этой целью составим уравнение движения оболочки.

Движение оболочки определяется из условия стационарности функционала

$$J = \int (K - U + A) dt,$$

где K — кинетическая энергия движения, U — энергия деформации, A — производимая внешней нагрузкой работа. Найдем выражения для K, U и A . Мы будем предполагать, что кинетическая энергия движения оболочки обусловлена в основном радиальными перемещениями. Тогда она вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{2} \gamma \delta \iint w'^2 dx dy,$$

где γ — плотность материала оболочки. Несложный подсчет показывает, что

$$K = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2.$$

Найдем теперь производимую внешней нагрузкой q работу A . Поперечная деформация оболочки сопровождается осевым сжатием вдоль образующих. В сечении y это сжатие равно

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx.$$

Отсюда работа

$$A = \int_0^{2\pi R} \Delta L q \delta dy = \frac{q \delta}{2} \iint w_x^2 dx dy.$$

Несложные вычисления дают

$$A = \frac{q \pi^2 \delta m^2 R u^2}{L}.$$

Для того чтобы найти энергию деформации U , будем рассуждать следующим образом. Оболочка при статическом нагружении может терять устойчивость с различными формами волнообразования (мы характеризуем их параметрами m и n). Пусть q_e — критическая нагрузка, отвечающая рассматриваемой форме волнообразования:

$$W = u \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

При выпучивании оболочки в заданную форму под нагрузкой q_e производимая ею работа A_e полностью переходит в энергию деформации. Отсюда следует, что энергия деформации оболочки получается из найденного выше выражения для работы $A(q)$ при замене q на q_e , то есть

$$U = \frac{q_e \pi^3 \delta m^2 R u^2}{L}.$$

Теперь легко записать уравнение движения оболочки. Оно имеет вид

$$u'' - \omega^2 u = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2 \gamma} (q - q_e).$$

Так как прогиб u в начальный момент равен нулю, то интересующее нас решение уравнения движения имеет вид

$$u = c \operatorname{sh} \omega t.$$

Для того чтобы имело место выпучивание, c должно быть отлично от нуля. При этом

$$u'(0) = c\omega \neq 0.$$

Таким образом, выпучивание оболочки в начальный момент имеет отличную от нуля скорость. Это между прочим объясняет «хлопок», которым сопровождается потеря устойчивости.

Для того чтобы определить постоянную c и, следовательно, скорость деформации в момент потери устойчивости, будем рассуждать следующим образом.

Энергия деформации сжатия усилием q в момент потери устойчивости частично освобождается и переходит в энергию

движения, так как воспринимаемая оболочкой нагрузка при выпучивании снижается до q_e . Из этого условия можно определить кинетическую энергию, а следовательно, и скорость деформации.

Сжатие оболочки, вызванное нагрузкой q , равно

$$\Delta L = \frac{q}{E} L.$$

Суммарное усилие, действующее по краю оболочки и создаваемое нагрузкой q , будет

$$F = 2\pi R \delta q.$$

Отсюда энергия деформации равна

$$U_q = \frac{q^2}{E} \pi R L \delta.$$

В момент выпучивания усилие F_e , с которым оболочка сопротивляется, будет

$$F_e = 2\pi R \delta q_e.$$

Отсюда для освобождающейся части энергии получается выражение

$$U_0 = \frac{\pi R L \delta}{E} (q^2 - q_e^2).$$

Так как в результате потери устойчивости энергия U_0 переходит в кинетическую энергию выпучивания, то

$$\frac{q^2 - q_e^2}{E} \pi R L \delta = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2$$

Отсюда

$$u' = 2 \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E \gamma}}$$

и, следовательно, постоянная

$$c = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E \gamma}}.$$

Таким образом, в начальной стадии выпучивание происходит по закону

$$u = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E \gamma}} \operatorname{sh} \omega t.$$

К моменту τ прекращения действия нагрузки q полная энергия оболочки (кинетическая энергия и энергия деформации выпучивания) будет

$$V = \frac{\pi R L \delta}{E} (q^2 - q_e^2) \left(\operatorname{ch}^2 \omega \tau + \frac{q_e}{q - q_e} \operatorname{sh}^2 \omega \tau \right).$$

После прекращения действия нагрузки q оболочка продолжает выпучиваться под нагрузкой q_0 . При этом, если нагрузка q_0 невелика, выпучивание в некоторый момент останавливается и оболочка восстанавливает свою первоначальную форму, совершая периодические колебания. Напротив, при значительной нагрузке q_0 выпучивание, грубо говоря, неограниченно растет. Наибольшее значение q_0 , при котором оболочка еще восстанавливает свою форму, определяется тем условием, что в момент остановки выпучивания воспринимаемая оболочкой нагрузка в точности равна q_0 .

Пусть для определенности форма оболочки при выпучивании характеризуется одним параметром λ . Тогда в момент остановки выпучивания энергия V , сообщаемая импульсом q , τ , и работа $A(q_0, \lambda)$, производимая статической нагрузкой q_0 , полностью переходят в энергию деформации оболочки. Следовательно,

$$V + A(q_0, \lambda) = U(\lambda).$$

С другой стороны, воспринимаемая оболочкой нагрузка $q(\lambda)$ в этот момент равна q_0 . Таким образом,

$$q(\lambda) = q_0.$$

Эти два условия после исключения из них параметра λ и дают зависимость между параметрами q , τ и q_0 критической нагрузки.

Для того чтобы завершить решение поставленной задачи конкретным результатом, мы предположим, что нагрузка q не слишком велика по сравнению с верхним критическим значением q_e , отвечающим статическому нагружению. В этом случае естественно считать, что потеря устойчивости оболочки будет такой же, как и при статическом нагружении. Параметры, характеризующие волнообразование в момент потери устойчивости, будут

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm} = 1, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R} = 0,83.$$

Критическая нагрузка, отвечающая этой форме потери устойчивости, равна

$$q_e = 0,6E \frac{\delta}{R}.$$

Энергия, сообщаемая оболочке импульсом q , τ , будет

$$V = 0,36\pi \frac{L}{R} E \delta^3 (k^2 - 1) \left(\text{ch}^2 \omega \tau + \frac{1}{k-1} \text{sh}^2 \omega \tau \right),$$

где

$$k = \frac{q}{q_e}, \quad \omega = 0,7 \sqrt{\frac{(k-1)E}{\gamma R^2}}.$$

Для определения энергии деформации $U(\lambda)$ и работы $A(q_0, \lambda)$ мы можем воспользоваться уже готовыми результатами гл. 9, предположив, что функция $y(x)$, задающая поверхность Z , имеет прежнее значение. При этом в поясе оболочки высотой $L/2m$ имеем

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} (3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{5/4}) + \text{const},$$

$$A = \frac{\pi^4}{3,3n} E \delta^3 \bar{q}_0 \lambda, \quad \bar{q}_0 = \frac{q}{E} \frac{R}{\delta}.$$

Чтобы получить значения U и A для всей оболочки, указанные значения надо умножить на $2m$. Замечая, что $2m/n = L/\pi R$, будем иметь

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{L}{R} (3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{5/4}) + \text{const},$$

$$A = \frac{\pi^3}{3,3} E \delta^3 \frac{L}{R} \bar{q}_0 \lambda.$$

Выражение энергии деформации содержит постоянное слагаемое (const). Оно легко восстанавливается. Опуская элементарные вычисления, приведем окончательный результат:

$$\text{const} = \frac{\pi E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{L}{R}.$$

Соотношения, определяющие критическую комбинацию параметров нагрузки q , τ , q_0 , можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} V + A - U &= 0, \\ (V + A - U)'_{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

(Так как V не зависит от λ , то второе условие сводится к $A'_\lambda = U'_\lambda$, что эквивалентно $q(\lambda) = q_0$.) Подставляя найденные значения для величин V , A и U в уравнения (*) и разрешая их относительно параметров ϑ и

$$\vartheta = (k^2 - 1) \left(\operatorname{ch}^2 \omega \tau + \frac{1}{k-1} \operatorname{sh}^2 \omega \tau \right),$$

получим

$$\vartheta = 0,256 + 0,42\lambda^{1/4} - 0,064\lambda^{5/4},$$

$$\bar{q}_0 = 0,11 + 0,017\bar{\lambda}^{3/4} + 0,038\lambda^{1/4}.$$

На рис. 63 представлена зависимость критических параметров нагрузки ϑ и \bar{q}_0 . *Заштрихованная область соответствует тем значениям параметров, при которых оболочка, получив выпучивание под воздействием импульса q, τ , удерживается в выпученном состоянии нагрузкой q_0 .*

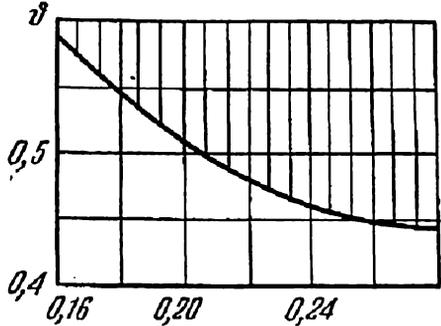


Рис. 63.

2. Критический импульс при внешнем давлении. Мы снова рассматриваем шарнирно опертую по краям цилиндрическую оболочку. Пусть эта оболочка находится под дей-

ствием стационарного внешнего давления q_0 и кратковременного (в течение τ) значительного давления q . Пусть давление q_0 меньше верхнего критического значения, а q гораздо больше него. Под давлением q оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Может случиться, что выпучивание, возникающее под давлением q , продолжает неограниченно расти. Задача состоит в определении критической комбинации величин q, τ, q_0 , при которых реализуется указанная возможность. Эта задача принципиально не отличается от рассмотренной в п. 1, и поэтому наше изложение здесь будет достаточно кратким.

Для прогибов w в начальной стадии выпучивания мы примем выражение

$$w = u(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}.$$

Зависимость u от t определяется из условия стационарности функционала

$$\int (K - U + A) dt,$$

где K — кинетическая энергия движения, U — энергия деформации оболочки, A — производимая давлением q работа при деформации. Имеем

$$K = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2, \quad U = \frac{1}{4} \omega^2 \pi R L \gamma \delta u^2,$$

где ω — частота собственных колебаний, отвечающая принятой форме волнообразования.

Вычислим работу A . Имеем

$$A = q \Delta V,$$

где ΔV — изменение объема, ограничиваемого оболочкой. Очевидно,

$$\Delta V = \int_0^L \Delta S dx,$$

где ΔS — изменение площади поперечного сечения при деформации цилиндра, т. е.

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 - (R + w)^2) d\varphi, \quad \varphi = \frac{y}{R}.$$

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi} w d\varphi = 0,$$

получаем

$$\Delta S = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi R} w^2 dy.$$

Следовательно,

$$\Delta V = \frac{1}{2R} \int \int w^2 dx dy = \frac{\pi L}{4} u^2.$$

Таким образом,

$$A = \frac{\pi L q}{2} u^2.$$

Энергию деформации можно определить как работу, производимую критической нагрузкой q_e , отвечающей принятой форме волнообразования в момент потери устойчивости. При этом для нее получается, очевидно, следующее выражение:

$$U = \frac{\pi L q_e}{2} u^2.$$

Теперь легко записать уравнение движения оболочки в начальной стадии выпучивания. Оно имеет вид

$$u'' - \omega^2 u = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{2(q - q_e)}{R\gamma\delta}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $t = 0$, будет

$$u = c \operatorname{sh} \omega t.$$

Для определения постоянной c воспользуемся теми же соображениями, что и в случае осевого сжатия в п. 1. В результате потери устойчивости и выпучивания оболочки энергия сжатия оболочки, сообщаемая давлением q , переходит частично в кинетическую энергию движения, связанного с выпучиванием. Сравнивая эту энергию с кинетической энергией выпучивания, мы и найдем постоянную c .

Энергия $U(q)$ на единицу площади поверхности равна $\delta \sigma^2 / 2E$, где σ — напряжения сжатия в оболочке, обусловленные давлением q . Принимая во внимание, что $\sigma = qR/\delta$, находим

$$U(q) = \frac{\pi q^2 R^3 L}{E \delta}.$$

В результате потери устойчивости часть энергии сжатия $U(q) - U(q_e)$ переходит в кинетическую энергию выпучивания. Отсюда

$$\frac{\pi R^3 L}{E \delta} (q^2 - q_e^2) = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2.$$

Скорость деформации равна

$$u' = 2 \frac{R}{\delta} \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E \gamma}}.$$

Так как, с другой стороны, $u' = c\omega$, то

$$c = \frac{2}{\omega} \frac{R}{\delta} \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E\gamma}}.$$

Итак, в начальной стадии выпучивание происходит по закону

$$u(t) = \frac{2R}{\omega\delta} \sqrt{\frac{q^2 - q_e^2}{E\gamma}} \operatorname{sh} \omega t.$$

К моменту прекращения действия нагрузки q , сообщенная ею оболочке энергия будет равна

$$U_0 = \frac{2\pi R^3 L q^2}{E\delta} \left(\operatorname{ch}^2 \omega \tau + \frac{q_e}{q - q_e} \operatorname{sh}^2 \omega \tau \right).$$

Изучим теперь деформацию оболочки во времени при значительном выпучивании. В гл. 9 дано общее выражение для энергии деформации оболочки U и производимой давлением q работы A при заданном характере прогибов $y(x)$. Если переменные x и y нормировать, полагая

$$x = \frac{L}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{\pi R}{2n} \bar{y},$$

то

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)n^4} \left(\frac{R}{L}\right) J, \quad A = \frac{\pi^3 \bar{q} E \delta^3}{8n^2 \varepsilon} \left(\frac{R}{L}\right) \lambda,$$

где

$$J = \frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \int_{-1}^1 y_{xx}^2 dx + \\ + 6(1-\nu^2) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1}^1 |y_{xx}|^{1/2} dx + \operatorname{const}, \\ \lambda = \int_{-1}^1 y^3 dx, \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

В выражении J и λ черта над нормированными переменными \bar{x} и \bar{y} для простоты записи опущена.

При исследовании статического равновесия оболочки под данным давлением мы приближали график функции прогибов $y(x)$ двумя прямолинейными отрезками, гладко примыкающими

к параболе на участке $|x| < \alpha$. В ходе этого исследования выяснилось, что величина α мала.

Если теперь в рассматриваемой динамической задаче о движении оболочки исходить из того же способа приближения прогибов, считая заранее α малым, то приходим к тому же выражению энергии деформации, что и в статической задаче. Это связано с малостью параметра $\epsilon = R\delta/L^2$. Физическая причина такого совпадения состоит в том, что энергия деформации сосредоточена в окрестности $|x| < \alpha$, а основная доля кинетической энергии сосредоточена вне этой окрестности, то есть при $|x| > \alpha$.

Следуя методу, изложенному в гл. 9, найдем выражения для энергии деформации и производимой внешним давлением работы. Они имеют вид

$$U = A_1 \sqrt{\lambda} + A_2 \lambda + A_0, \quad A = Cq_0 \lambda,$$

где A_1, \dots, C — постоянные, которые без труда определяются.

Если оболочка после прекращения действия нагрузки q совершает колебания около основной цилиндрической формы, то в момент, когда скорость движения равна нулю ($\lambda' = 0$), энергия U_0 и работа $A(\lambda)$ полностью переходят в энергию деформации $U(\lambda)$. Таким образом, в этот момент

$$U(\lambda) = U_0 + A(\lambda). \quad (*)$$

Если это соотношение рассматривать как уравнение относительно λ , то оно имеет решение всякий раз, когда оболочка восстанавливает свою форму, совершая колебания, и не имеет решения, если выпучивание неограниченно растёт. Максимальная нагрузка q_0 , при которой уравнение (*) имеет решение, отличается тем, что уравнение относительно λ

$$(U - U_0 - A)'_{\lambda} = 0 \quad (**)$$

имеет то же самое решение, что и уравнение (*). Критическая комбинация параметров q, τ, q_0 динамической нагрузки определяется соотношением

$$f(q, \tau, q_0) = 0,$$

которое получается из уравнений (*) и (**) исключением параметра λ .

Найдем соотношение $f = 0$. Имеем

$$U_0 = A_1 \sqrt{\lambda} + A_2 \lambda + A_0 - Cq_0 \lambda, \quad 0 = \frac{1}{2} A_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + A_2 - Cq_0.$$

Определяя из второго уравнения $\sqrt{\lambda}$ и подставляя его в первое уравнение, получим искомое соотношение.

§ 3. Большие колебания оболочек

Малые колебания тяжелого груза, жестко скрепленного с оболочкой, являются гармоническими. При переходе к колебаниям с большой амплитудой это свойство утрачивается. Мы это покажем в двух случаях крепления груза к оболочке и найдем зависимость периода колебаний от амплитуды (п. 1).

То обстоятельство, что способность оболочки сопротивляться внешнему воздействию обычно ослабевает при значительном выпучивании, имеет своим следствием уменьшение частоты собственных колебаний при увеличении амплитуды.

Более точное исследование этого вопроса будет дано в п. 2. Уменьшение частоты собственных колебаний при увеличении амплитуды имеет в свою очередь важное следствие. Именно, возмущение, находящееся в резонансе с малыми колебаниями, не приводит к неограниченному нарастанию последних. Изучение этого вопроса содержится в п. 3.

1. Колебания с большой амплитудой тяжелого груза, жестко соединенного с оболочкой. Рассмотрим свободные колебания тяжелого груза, жестко соединенного с тонкой оболочкой. Будем различать два случая крепления груза к оболочке: 1) непосредственное крепление к оболочке и 2) крепление посредством жесткого стержня (см. рис. 12). Оболочка предполагается строго выпуклой. В первом случае крепления мы будем рассматривать нормальные к поверхности колебания груза. Во втором случае будем рассматривать колебания с боковыми перемещениями. Начнем с первого случая.

Положение груза относительно исходной поверхности оболочки характеризуется нормальным прогибом $2h$. В зависимости от этого прогиба действующая со стороны оболочки на груз сила равна (гл. 3, § 2)

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h},$$

где δ — толщина, а k_1 и k_2 — нормальные кривизны оболочки. Сила инерции груза равна $m2h''$, где m — масса груза. Отсюда уравнение свободных колебаний груза будет

$$-2mh'' + \frac{3\pi c}{2} E\delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h} = 0.$$

Положим

$$x = \frac{2h}{\delta}, \quad \vartheta = \frac{3\pi c}{2m} E\delta^2 (k_1 + k_2).$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$-x'' + \vartheta \sqrt{x} = 0.$$

Умножая это уравнение на x' и интегрируя, получим

$$-\frac{1}{2} x'^2 + \frac{2}{3} \vartheta x^{3/2} = c. \quad (*)$$

Постоянная интегрирования c просто связана с амплитудой. Действительно, в крайнем положении груза его скорость $x' = 0$, а отклонение $x\delta$ — амплитуда колебаний. Таким образом,

$$c = \frac{2\vartheta}{3} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{3/2},$$

где a — амплитуда.

Нетрудно найти период колебаний из уравнения (*):

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{4\vartheta}{3} \left(\left(\frac{a}{\delta}\right)^{3/2} - x^{3/2} \right)}}.$$

Отсюда период полного колебания

$$T = \int_0^{\frac{a}{\delta}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\vartheta}{3} \left(\left(\frac{a}{\delta}\right)^3 - x^{3/2} \right)}}.$$

Вводя новое переменное интегрирования y по формуле

$$x = \frac{a}{\delta} y,$$

будем иметь

$$T = c_0 \sqrt{\frac{2m}{\pi c E \delta^{1/2} a^{3/2} (k_1 + k_2)}}, \quad c_0 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^{3/2}}}.$$

По поводу рассмотренного колебания груза существенно заметить следующее. Так как в масштабе максимальных отклонений груза (колебания с большой амплитудой) отклонение груза наружу исходной формы практически исключено, то груз, совершая колебания, как бы отражается от исходной формы.

Рассмотрим теперь колебания груза во втором случае крепления к оболочке. Для простоты рассмотрения предположим, что оболочка сферическая. Если положение груза характеризовать углом φ отклонения стержня от нормали исходной поверхности, то, как показано в гл. 3, § 2, уравновешивающий выпучивание оболочки момент равен

$$M = \frac{3}{8} \pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \varphi^3.$$

Момент, создаваемый инерцией груза, будет $-ml\varphi''$, где m — масса груза, а l — длина стержня. Уравнение колебаний груза

$$-ml\varphi'' + \frac{3}{8} \pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \varphi^3 = 0.$$

Положим

$$\chi = \frac{3\pi c}{8ml} E \delta^{5/2} R^{1/2}.$$

При этом уравнение движения примет вид

$$-\varphi'' + \chi\varphi^3 = 0.$$

Умножая его на φ' и интегрируя, получим

$$-\frac{1}{2} \varphi'^2 + \frac{1}{3} \chi\varphi^3 = c.$$

Постоянная интегрирования c связана с угловой амплитудой колебаний α_0 . Именно,

$$c = \frac{1}{3} \chi \alpha_0^3.$$

Подобно тому как в предыдущем рассмотрении, находим период собственных колебаний

$$T = c_0 \sqrt{\frac{ml}{\pi c E \delta^{5/2} R^{1/2} \alpha_0^3}}, \quad c_0 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^3}}.$$

2. Собственные колебания цилиндрической оболочки.

Пусть цилиндрическая оболочка, шарнирно опертая по краям, совершает свободные колебания с такой же периодичностью прогибов по поверхности, которой обладает функция $\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}$. Если колебания малы, то нормальный прогиб оболочки равен

$$w = u(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R},$$

где $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$u'' + \omega^2 u = 0.$$

Здесь ω — частота колебаний. Она определенным образом выражается через параметр волнообразования n , геометрические характеристики и механические свойства оболочки.

Рассмотрим теперь большие колебания оболочки. Найдем уравнение этих колебаний. Оно представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$\int (K - U) dt,$$

где K — кинетическая энергия движения, U — энергия деформации оболочки.

В главе 9 для энергии деформации получено выражение

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{24 (1 - \nu^2) n^2} \left(\frac{R}{L}\right) J + \text{const},$$

$$J = \frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \int_{-1}^1 y'^2 dx + 6(1 - \nu^2) \frac{c}{V_\epsilon} \int_{-1}^1 |y'|^{1/2} dx, \quad \epsilon = \frac{R \delta}{L^2}.$$

Функция $y(x)$ известным образом связана с нормальным прогибом оболочки. Так же, как в задачах о статическом нагружении оболочки (гл. 9), функцию $y(x)$ будем приближать функцией вида

$$y = \frac{ax^2}{2} - \frac{aa^2}{2} + aa(1 - a) \quad \text{при } |x| \leq a,$$

$$y = aa(1 - |x|) \quad \text{при } |x| \geq a.$$

График этой функции состоит из параболы на участке $|x| \leq \alpha$ и двух гладко примыкающих к ней прямолинейных отрезков с концами в точках $(-1,0)$ и $(+1,0)$. Если предположить априори, что параметр α мал, то, как и в случае статических задач, энергия при заданной общей деформации, ограниченной условием

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = \lambda = \text{const},$$

определяется из условия достижения $\min J$. Причина этого в том, что в указанном предположении энергия деформации сосредоточена в малой области $|x| \leq \alpha$, в то время как кинетическая энергия движения сосредоточена в основном вне этой области. Таким образом, определение энергии деформации в рассматриваемой задаче о колебаниях оболочки сводится к определению минимума функционала J при условии $\lambda = \text{const}$.

Подставляя значения $y(x)$ в интегралы, входящие в J , при малом α будем иметь

$$J = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 2\alpha a^2 + 12(1 - \nu^2) \frac{c}{V_\epsilon} \alpha a^{1/2}.$$

Параметр деформации

$$\lambda = \frac{2}{3} a^2 \alpha^2.$$

Минимум J находится без труда, и для него получается выражение

$$\min J = J_0 = 3,2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2/3} \left(\frac{R}{L}\right)^{2/3} \frac{1}{\epsilon^{1/3}} V \bar{\lambda}.$$

Ввиду того, что график функции $y(x)$ близок к ломаной, состоящей из двух звеньев, деформацию оболочки можно характеризовать максимальным прогибом $u(t)$. Установим связь между u и λ . В нормированных переменных имеем

$$\lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx.$$

В исходных переменных будет

$$\lambda = \frac{8n^2}{\pi^2 R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

Прогиб оболочки задается функцией

$$y = \frac{\pi}{2n} y.$$

Поэтому

$$\lambda = \frac{32n^4}{\pi^4 R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

Так как при рассматриваемых деформациях график функции $\tilde{y}(x)$ близок к ломаной из двух звеньев, то

$$\tilde{y}(x) \simeq \frac{|2x|}{L} u(t),$$

где $u(t)$ — максимальный прогиб (прогиб при $x=0$). Отсюда

$$\lambda = \frac{32n^4}{3\pi^4} \frac{u^2}{R^2}.$$

Подставляя это значение λ в выражение J_0 , находим энергию деформации оболочки в зависимости от максимального прогиба u :

$$U = 2A'_1 |u| + A'_0,$$

где A'_0, A'_1 — постоянные, причем

$$A'_1 = 1,15n^{4/3} \left(\frac{R}{L}\right)^{2/3} \frac{1}{\varepsilon^{1/3}} \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)L}.$$

Найдем теперь кинетическую энергию K движения оболочки. Так как функция \tilde{y} , задающая прогиб, изменяется по существу линейно в каждом интервале $(-L/2, 0)$, $(L/2, 0)$, обращается в нуль при $x = \pm L/2$ и имеет значение $u(t)$ при $x=0$, то

$$K = \frac{1}{2} \int \int \delta \gamma \left(\frac{2xu'}{L}\right)^2 dx dy = \frac{\pi RL \delta \gamma u'^2}{6}.$$

Составим уравнение колебаний оболочки при больших деформациях. Имеем

$$K - U = \frac{\pi RL \delta \gamma}{6} (u'^2 - 2A_1 |u|) + \text{const},$$

где

$$A_1 = 3,1n^{4/3} \frac{E}{\gamma} \frac{\delta^2}{(\delta R^2)^{1/3} L}.$$

Отсюда уравнение колебаний при больших прогибах имеет вид

$$u'' \pm A_1 = 0,$$

где знак «+» надо брать при $u > 0$, а знак «-» при $u < 0$. Таким образом, мы имеем два уравнения, описывающих движение оболочки:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \text{ при малом } |u|,$$

$$u'' \pm A_1 = 0 \text{ при большом } |u|.$$

Введем функцию $\vartheta(u)$, определяемую условиями

$$1) \vartheta(u) = -\vartheta(-u),$$

$$2) \vartheta(u) = \omega^2 u \quad \text{при } 0 \leq u \leq \frac{A_1}{\omega^2} = a,$$

$$3) \vartheta(u) = \pm A \quad \text{при } |u| \geq a.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$u'' + \vartheta(u) = 0. \quad (*)$$

При малом $|u|$ оно совпадает с уравнением $u'' + \omega^2 u = 0$, а при большом $|u|$ — с уравнением $u'' \pm A_1 = 0$. Мы будем предполагать, что уравнение (*) описывает движение оболочки во всем диапазоне изменения прогиба $u(t)$. В этом предположении рассмотрим вопрос о влиянии амплитуды на частоту собственных колебаний оболочки.

Прежде всего, мы замечаем, что если амплитуда не превосходит a , то частота колебаний постоянна и равна ω . При увеличении амплитуды частота колебаний будет убывать. Найдем частоту при амплитуде, большей a . Пусть α — амплитуда колебаний. Положим

$$\lambda = \int_0^{\alpha} \vartheta(u) du.$$

Умножим уравнение (*) на u' и проинтегрируем в пределах $(0, u)$. Получим

$$u'^2 + \int_0^u \vartheta(u) du = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования равна λ , так как $u' = 0$ при $u = \alpha$. Таким образом,

$$u'^2 + \int_0^u \vartheta(u) du = \lambda.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\left(\lambda - \int_0^u \vartheta(u) du\right)^{1/2}} = dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах четверти периода, что соответствует интегрированию по u от 0 до α , получим период колебаний

$$\tau(\alpha) = 4 \int_0^\alpha \frac{du}{\left(\lambda - \int_0^u \vartheta(u) du\right)^{1/2}}.$$

Следовательно, частота колебаний равна

$$\omega(\alpha) = \frac{2\pi}{\tau(\alpha)}.$$

Оценим частоту собственных колебаний в случае, когда амплитуда $\alpha \gg a$. Имеем

$$\vartheta(u) = \pm A_1, \quad \tau(\alpha) = 8 \sqrt{\frac{\alpha}{A_1}}.$$

Соответственно, частота колебаний при большой амплитуде α будет

$$\omega(\alpha) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{A_1}{\alpha}}.$$

3. Вынужденные колебания оболочек. Рассмотрим вынужденные колебания цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по краям. В п. 1 мы нашли уравнение свободных колебаний. Оно имеет вид

$$u'' + \vartheta(u) = 0,$$

где функция ϑ определяется условиями:

- 1) $\vartheta(u) = \omega^2 u$ при $|u| \leq a$,
- 2) $\vartheta(u) = \pm A_1$ при $|u| \geq a$.

Это уравнение представляет собой уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\int (K - U) dt,$$

где K — кинетическая энергия движения, U — энергия деформации. Уравнение вынужденных колебаний будет уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала $\int (K - U + A) dt$, где K и U имеют прежнее значение, A — производимая внешним возмущением работа. Отсюда следует, что уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$u'' + \vartheta(u) + \sigma = 0.$$

Найдем функцию σ для различных способов возмущения.

Пусть возмущение создается сосредоточенной силой f , нормальной к поверхности оболочки, $f = f_0 \sin \bar{\omega}t$. Обозначим через L' расстояние точки приложения силы f от ближайшего края оболочки ($L' < L/2$). Ввиду того, что прогиб оболочки на любой половине образующей изменяется почти линейно и равен нулю на краях оболочки, прогиб в точке приложения силы будет $\simeq 2u(t) L'/L$. Отсюда для работы A получается выражение

$$A = f_0 \sin \bar{\omega}t \frac{2L'}{L} u(t).$$

Для кинетической энергии K мы получим выражение вида

$$K = K_0 u'^2.$$

Отсюда следует, что функция σ в уравнении колебаний будет иметь следующий вид:

$$\sigma = \frac{2f_0 L'}{K_0 L} \sin \omega t = \lambda \sin \bar{\omega}t.$$

Итак, уравнение вынужденных колебаний в рассматриваемом случае при больших колебаниях будет

$$u'' + \vartheta(u) + \lambda \sin \bar{\omega}t = 0.$$

Пусть теперь возмущение создается пульсирующим, равномерно распределенным по оболочке давлением q , изменяющимся по закону

$$q(t) = q_0 \sin \bar{\omega}t.$$

Производимая этим давлением работа при деформации оболочки будет

$$A = q \Delta V,$$

где ΔV — изменение объема, ограничиваемого оболочкой, при деформации. Величина ΔV была определена в гл. 9 при изучении статического нагружения оболочки внешним давлением. Если воспользоваться полученным там результатом, то найдем

$$\Delta V = cu^2,$$

где c — некоторая постоянная, зависящая от геометрических размеров оболочки и параметра волнообразования n . Следовательно, работа A в рассматриваемом случае нагружения будет иметь выражение

$$A = c'qu^2 \sin \bar{\omega}t.$$

Соответственно уравнение колебаний при больших прогибах будет

$$u'' + \vartheta(u) + \lambda u \sin \bar{\omega}t = 0.$$

В случае, когда возмущение создается равномерно распределенным вдоль края оболочки пульсирующим давлением

$$p = p_0 \sin \bar{\omega}t,$$

уравнение получается таким же, но со своим значением коэффициента λ .

Предположим теперь, что на оболочку действует возмущение достаточно малой интенсивности, но с частотой $\bar{\omega} = \omega$. Если бы частота собственных колебаний оболочки не изменялась при увеличении амплитуды, то такое возмущение, как бы ни была мала его интенсивность, привело бы к неограниченному нарастанию колебаний (неограниченному росту амплитуды). Однако, как показано в п. 2, частота колебаний сохраняет постоянное значение (ω) до тех пор, пока амплитуда не превосходит величины

$$a = \frac{A_1}{\omega^2}.$$

При большей амплитуде колебаний резонанс возмущения и собственных колебаний нарушается. Отсюда мы делаем важный вывод о том, что возмущение достаточно малой интенсивности с частотой ω раскачивает оболочку до амплитуды

$$a < \frac{A_1}{\omega^2}.$$

Дальнейшее нарастание колебаний при частоте возмущения ω возможно только за счет увеличения интенсивности возмущения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Издательство Харьковского университета, 1960.
2. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, I. Осевое сжатие, Издательство Харьковского университета, 1962.
3. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, II. Внешнее давление, Издательство Харьковского университета, 1962.
4. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, III. Кручение, Издательство Харьковского университета, 1962.
5. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, IV. Ограниченно упругие оболочки. Панели. Ортотропные оболочки, Издательство Харьковского университета, 1963.
6. А. В. Погорелов, Строго выпуклые оболочки при закритических деформациях, I. Сферические оболочки, Издательство Харьковского университета, 1964.
7. А. В. Погорелов, Строго выпуклые оболочки при закритических деформациях, II. Потеря устойчивости оболочек, Издательство Харьковского университета, 1964.
8. А. В. Погорелов, Геометрическая теория устойчивости оболочек, Издательство «Наука», М., 1966.
9. А. В. Погорелов, Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей, Издательство АН УССР, 1952.
10. А. В. Погорелов, Поверхности внешней ограниченной кривизны, Издательство Харьковского университета, 1956.
11. В. В. Михайлов, О закритических деформациях цилиндрических оболочек под внешним давлением, ДАН УССР, № 12, 1966.
12. В. И. Бабенко, К теории закритических деформаций сферических оболочек, ДАН УССР, № 2, 1966.