

П.Р.ПОПОВИЧ  
Б.С.СКРЕБУШЕВСКИЙ

**БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ  
ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
КОСМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ**

П.Р.ПОПОВИЧ  
Б.С.СКРЕБУШЕВСКИЙ

# БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ



МОСКВА  
(МАШИНОСТРОЕНИЕ)  
1987

ББК 39.62  
П58  
УДК 629.785

Рецензент В.Н. Почукаев

**Попович П.Р., Скребушевский Б.С.**

П58 Баллистическое проектирование космических систем. —  
М.: Машиностроение, 1987. 240 с., ил.  
В пер. 1 р. 10 к.

Изложены методы баллистического проектирования космических систем. Показано, что баллистические характеристики космических аппаратов (КА) различного назначения в решающей степени определяются характером выполняемых задач, зависят от ограничений технического плана, а также физических условий области космического пространства, в которой происходит полет КА.

Рассмотрен поэтапный выбор орбитальных параметров космических систем, включающий в себя их определение исходя из кинематических соотношений и последующее уточнение с учетом влияния основных ограничений и возмущений. Приведены методы решения задач синтеза динамически устойчивых космических систем.

Для инженеров, занимающихся динамикой полета КА.

П  $\frac{3607000000-140}{038(01)-87}$  140-87

ББК 69.62

©Издательство "Машиностроение", 1987

Баллистическое проектирование является одним из важнейших элементов разработки и создания космических систем различного назначения; оно включает в себя решение широкого круга задач. Основными из них являются: определение параметров рабочих орбит КА, пригодных для решения основных задач, выбор времени старта ("окон старта"), траекторий выведения КА ракетой-носителем, траекторий сближения при решении задач встречи космических кораблей и определение основных характеристик процесса управления для поддержания номинальных параметров либо получения требуемых орбитальных параметров КА.

Важным вопросом при баллистическом проектировании является оценка ожидаемой точности выведения КА на рабочие орбиты. Приведенные в книге материалы по данному вопросу включают приближенную аналитическую оценку точности выведения КА на рабочие орбиты и подход к оценке точности вывода и формирования орбит, базирующийся на статистическом моделировании процесса вывода КА и управляемого движения.

Очевидно, что баллистическое проектирование космических систем практически невозможно без привлечения вспомогательных задач космической баллистики. Поэтому в книге значительное внимание уделено вопросам определения и уточнения орбитальных параметров движения КА по данным траекторных измерений, прогнозирования элементов орбит, оценки условий связи КА с пунктами управления и приема информации, определения эфемерид Луны, Солнца и т.д.

Рассматриваемые вопросы баллистического проектирования космических систем касаются применения как одиночных КА, так и нескольких КА, образующих орбитальную структуру и совместно выполняющих поставленные задачи. Процесс баллистического проектирования космических систем из нескольких КА, образующих орбитальную группировку, включает два основных этапа. Первый состоит в определении кинематически правильных орбитальных структур без учета основных возмущающих факторов, второй – в уточнении орбитальной структуры с учетом различного рода возмущений, действующих на КА в орбитальном полете, а также в определении закона управления орбитальным движением космических аппаратов.

Многие из задач баллистического проектирования космических систем околоземного космоса носят достаточно общий характер и могут быть распространены на системы, включающие КА, совершающие полеты в окрестности других планет.

Гл. 1–3, 6 написаны авторами совместно, гл. 5 написана летчиком-космонавтом СССР П.Р. Поповичем, гл. 4, 7 и приложения написаны Б.С. Скребушевским.

Авторы выражают искреннюю благодарность д-ру техн. наук В.Н. Почукаеву за ценные замечания и рекомендации, сделанные им при рецензировании рукописи.

# ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## 1.1. СОСТАВ И КЛАССИФИКАЦИЯ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В дальнейшем изложении под космической системой (КС) будем понимать условно выделенную совокупность элементов (систем), предназначенных для подготовки, выведения и поддержания функционирования одного или нескольких космических аппаратов (КА) на орбитах (траекториях), обеспечивающих выполнение целевых задач. На рис. 1.1 приведена укрупненная типовая схема космической системы.

Космические системы можно разделить по назначению на три класса: системы с КА, совершающими полеты в околоземном космическом пространстве;

системы с КА, совершающими полеты к Луне или в окололунном пространстве;

системы с КА, осуществляющими полеты к планетам Солнечной системы или за ее пределы.

Космические аппараты систем всех трех типов могут быть как беспилотными, так и пилотируемыми. В книге в основном рассматриваются системы околоземного космоса. Вместе с тем большинство положений пригодны для проектирования и анализа функционирования космических систем всех трех типов как с беспилотными, так и с пилотируемыми КА.

В свою очередь, космические системы с беспилотными КА классифицируются по своему целевому назначению и могут быть связными, метеорологическими и т.д. Рассмотрим некоторые типичные примеры космических систем.

**Системы для изучения Земли и Луны**, а также для исследования окружающего их космического пространства. Примером может служить система, включающая КА типа "Зонд" [20]. КА "Зонд" запускался на высокую орбиту, охватывающую околоземное и окололунное космическое пространство. Съемки земной поверхности, выполненные с автоматической станции, дали возможность получить черно-белые и цветные фотоизображения Земли и Луны, которые использовались затем для уточнения различных физических параметров внешней среды и непосредственно планет, в том числе параметров планетных эллипсоидов.

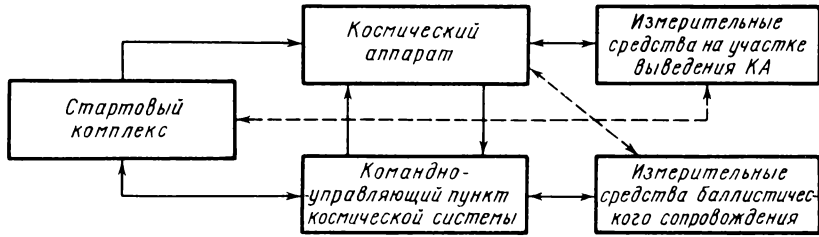


Рис. 1.1. Укрупненная схема космической системы

Так, по данным измерений автоматических станций "Зонд-6", "Зонд-8" была выявлена и оценена асимметрия обобщенной геометрической фигуры Луны. Большая полуось эллипсоида оказалась примерно на  $3 \pm 0,7$  км больше, чем полуось, направленная в сторону Земли, а для эллипса, аппроксимирующего фигуру вдоль меридиана с долготой  $215^\circ$ , разность полуосей оказалась примерно  $2 \pm 0,3$  км.

**Космические системы с КА для народного хозяйства и исследования природных ресурсов.** В качестве примера рассмотрим КА для изучения ресурсов Земли. Орбиты таких КА должны удовлетворять следующим основным требованиям [12, 17]:

полоса захвата и разрешение на местности бортовой информационной аппаратуры должны быть одинаковыми для различных географических областей;

должен быть обеспечен почти глобальный обзор Земли;

изменение солнечной освещенности трассы КА во время функционирования должно быть минимальным.

Для выполнения таких требований орбиту КА целесообразно выбирать околокруговой и солнечно-синхронной [12, 17]. Под солнечно-синхронной орбитой в дальнейшем будем понимать такую орбиту, у которой средняя прецессия линии узлов равна средней скорости относительного перемещения Солнца на небесной сфере. Относительное положение Солнца и плоскости орбиты с течением времени мало меняется, сказываются лишь сезонные колебания, связанные с относительным перемещением Солнца из южного полушария в северное, и наоборот, а также с эллиптичностью орбиты Земли. Вследствие последнего угловая скорость годового времени вращения Земли вокруг Солнца не является постоянной, а изменяется в небольших пределах.

**Космические системы связи.** Системы связи, включающие несколько КА, предназначенные для ретрансляции радио- и телевизионных сигналов между различными районами Земли, делятся по решаемым задачам на две группы [17; 29]:

региональные системы, обеспечивающие связь между (внутри) отдельными районами Земли;

системы глобальной связи, обеспечивающие связь обширных районов Земли или всей ее поверхности.

Примером региональной системы может служить система спутниковой связи "Орбита" с КА типа "Молния", обеспечивающими связь между западными и восточными районами Советского Союза [29]. В этой системе используются КА на высокоэллиптических орбитах в перигеем  $h_{\text{п}} = 600 \dots 650$  км, апогеем  $h_{\text{а}} \approx 40\,000$  км, с периодом обращения  $T = 12^{\text{ч}}$  (полусуточные орбиты) и наклоном, близким к критическому ( $i \approx i_{\text{кр}} \approx 63,4^\circ$ ). Апогей орбиты расположен над северным полушарием. Спутники в системе сдвинуты по фазе разнесением орбит в пространстве по долготе восходящего узла. Для обеспечения временного сдвига рабочих зон КА плоскости их орбит равномерно разнесены в пространстве по долготе восходящего узла орбит ( $\Omega_j$ ) на величину

$$\Delta\Omega_j, j-1 = \Omega_j - \Omega_{j-1} = \frac{2\pi}{\bar{j}}, j \leq \bar{j}, \tag{1.1.1}$$

где  $\bar{j}$  – число КА в системе. Разнесение орбит в пространстве обеспечивается соответствующим выбором времени запуска КА в процессе формирования и восполнения системы.

Система глобальной связи предполагает использование КА на стационарных орбитах с периодом обращения, равным звездным спутникам, и с параметрами  $i = 0^\circ, e = 0$ . Практически три стационарных КА, разнесенные по угловому расстоянию на  $\sim 120^\circ$ , обеспечат непрерывную связь для обширных районов нижних широт (рис. 1.2). Для создания спутниковой системы глобальной связи необходимо наличие еще трех

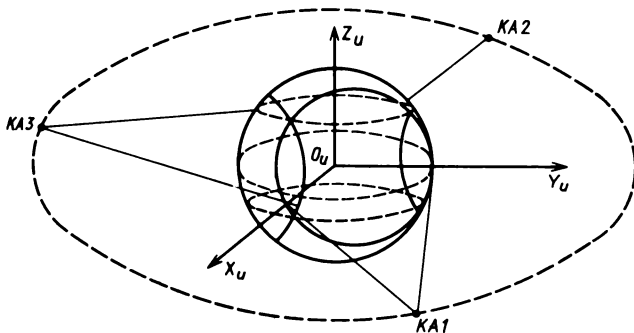


Рис. 1.2. Система связи с КА на стационарных орбитах



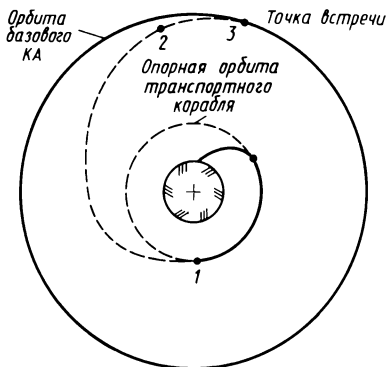


Рис. 1.3. Схема встречи космических аппаратов

КА на полярных орбитах ( $i = 90^\circ$ ) с периодом обращения  $T \cong 24^h$  и разнесенных по угловому расстоянию на  $120^\circ$ .

**Системы с КА, осуществляющими встречу.** Встреча космических аппаратов приобретает все более важное значение для решения широкого круга задач:

доставка и смена экипажа на орбитальных станциях;

обеспечение в будущем наладочных и ремонтных работ на беспилотных КА;

монтаж космических станций различного назначения с массой, многократно превышающей массу груза, выводимого штатными ракетами-носителями и т.п.

Процесс сближения космических аппаратов можно разделить на этапы дальнего и ближнего наведения (рис. 1.3). На этапе дальнего наведения (участок 1–2) транспортный корабль выводится в окрестность КА, осуществляющего полет на рабочей (транспортной) орбите. На участке дальнего наведения информация об орбитальных параметрах "КА–цели"  $\bar{\Xi}_B(t)$  и "КА–перехватчика"  $\bar{\Xi}_T(t)$ , как правило, поступает от наземных измерительных пунктов. При переходе на автоматическое управление сближением космических аппаратов начинается этап ближнего наведения (2–3), который в свою очередь, разбивается на отдельные участки. Например, при "мягкой встрече" космических аппаратов в конце участка ближнего наведения следует участок причаливания и непосредственной встречи при допустимых относительных скоростях космических аппаратов.

Для всех рассмотренных примеров космических систем, различных по своему целевому назначению, следует отметить общие технические компоненты (см. рис. 1.1), обеспечивающие нормальное функционирование системы: стартовый комплекс, командно-управляющий пункт системы, стационарные или передвижные пункты для измерения орбитальных параметров КА и космические аппараты на рабочих орбитах, обеспечивающих выполнение целевых задач.

## 1.2. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под баллистическими характеристиками космических систем понимается совокупность (множество) параметров, определяющих процесс выведения КА на рабочие орбиты, орбитальные параметры и кинематические характеристики (трассы КА, зоны видимости, параметры взаимного положения рабочих орбит в спутниковой системе и т.д.), т.е. совокупность орбитальных и кинематических характеристик КА, требуемых для выполнения целевых задач, поставленных перед КС.

Рассмотрим основные баллистические характеристики космических систем.

**Траектории выведения КА.** Выведение КА на рабочие орбиты осуществляется доставкой аппарата ракетой-носителем на фиксированную высоту  $h$  с заданным вектором скорости  $\vec{V}$ . Выбор траектории выведения спутника на орбиту представляет собой комплексную задачу, включающую определение времени старта  $t_{ст}$  и определение программы управления на участке выведения с учетом характера целевых задач и ограничений, связанных с параметрами РН и условиями запуска (допустимых трасс запуска и т.д.). Для описания и расчета траектории выведения КА применяют следующие системы координат.

**Стартовая система** (рис. 1.4) с началом на поверхности Земли в точке старта РН, ось  $O_0Y_c$  направлена по радиусу-вектору из центра Земли (противоположно направлению силы тяжести), ось  $O_0X_c$  лежит в плоскости местного горизонта и задается азимутом запуска, ось  $O_0Z_c$  дополняет систему до правой.

Влияние основных сил, действующих на РН, удобно описывать в связанной системе координат  $Ox_1Y_1Z_1$  с началом в центре масс ракеты. Ось  $Ox_1$  направлена по продольной оси ракеты, оси  $Oy_1, Oz_1$  расположены в плоскости, нормальной оси ракеты (на старте плоскость  $X_1O_1Y_1$  совпадает с плоскостью  $X_cO_0Y_c$ ).

**Нормальная (гироскопическая) система**  $Ox_gY_gZ_g$  совпадает в момент старта  $t_0$  со стартовой системой.

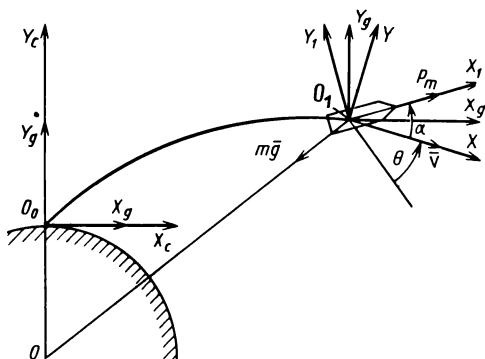


Рис. 1.4. Системы координат для описания движения ракеты-носителя

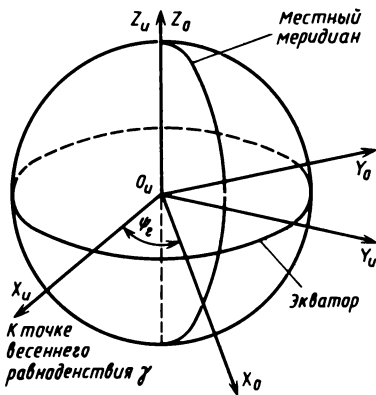


Рис. 1.5. Геоцентрические системы координат

В полете ориентация осей связанной системы координат относительно нормальной определяется углом тангажа  $\vartheta$  (углом между продольной осью  $OX$  и горизонтальной плоскостью  $OX_gZ_g$  нормальной системы координат), углом рыскания  $\psi$  (углом между осью  $OX_g$  и проекцией продольной оси  $OX$  на горизонтальную плоскость  $OX_gZ_g$ ) и углом крена  $\gamma$  (углом между поперечной осью ракеты  $OZ$  и осью  $OZ_g$ , смещенной в положение, при котором угол  $\psi = 0$ ).

Скоростная система координат  $O_1XYZ$  — начало совпадает с началом связанной системы координат, ось  $O_1X$  направлена по вектору скорости  $PH$ , ось  $O_1Y$  — перпендикулярна ей и лежит в плоскости траектории,  $O_1Z$  — образует правую систему. В этой системе угол  $\theta$  — угол между вектором скорости и вектором тяги  $PH$ .

**Орбитальные параметры космических аппаратов.** Для описания орбитальных параметров КА применяют различные системы координат. Наиболее распространенной является геоцентрическая инерциальная система  $O_nX_nY_nZ_n$ , в которой плоскость  $O_nX_nY_n$  совпадает с плоскостью экватора (рис. 1.5). Начало координат  $O_n$  совпадает с центром Земли, ось  $O_nX_n$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\gamma$ , ось  $O_nY_n$  — по нормали к  $O_nX_n$ , а ось  $O_nZ_n$  дополняет систему до правой. Орбитальные параметры характеризуются векторами координат и скорости соответственно

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} \dot{X}_n \\ \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix}.$$

Удобными и часто применяемыми на практике являются геоцентрическая подвижная система и система координат, использующая оскулирующие элементы.

Геоцентрическая подвижная система координат  $O_nX_0Y_0Z_0$  с началом в центре Земли (см. рис. 1.5) плоскость  $O_nX_0Y_0$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $O_nX_0$  направлена на точку пересечения гринвичского меридиана с плоскостью экватора, ось  $O_nY_0$  — по нормали к  $O_nX_0$  и

направлена на Восток, ось  $O_{и}Z_0$  – дополняет систему до правой. Зависимость между системами  $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$  и  $O_{и}X_0Y_0Z_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X_0 &= X_{и} \cos \psi_{\Gamma} + Y_{и} \sin \psi_{\Gamma}; \\ Y_0 &= -X_{и} \sin \psi_{\Gamma} + Y_{и} \cos \psi_{\Gamma}; \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$Z_0 = Z_{и};$$

$$\begin{aligned} X_{и} &= X_0 \cos \psi_{\Gamma} - Y_0 \sin \psi_{\Gamma}; \\ Y_{и} &= X_0 \sin \psi_{\Gamma} + Y_0 \cos \psi_{\Gamma}; \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$Z_{и} = Z_0.$$

В (1.2.1), (1.2.2) угол  $\psi_{\Gamma}$  определяется зависимостью

$$\psi_{\Gamma} = S_0 + \omega_3 t(1 + \nu_3),$$

где  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли;  $S_0$  – звездное время на 0 ч даты, для которой ведется пересчет;  $t$  – мировое время по Гринвичу от 0 ч даты;  $\nu_3 = 0,00273909$  – константа, учитывающая связь между звездными и солнечными сутками.

Уравнения движения КА в геоцентрической инерциальной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_{и}}{dt^2} &= \sum_i F_{xi} = F_x; \\ \frac{d^2 Y_{и}}{dt^2} &= \sum_i F_{yi} = F_y; \\ \frac{d^2 Z_{и}}{dt^2} &= \sum_i F_{zi} = F_z. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Точное решение системы (1.2.3) в общем виде не получено. На практике ограничиваются приближенными решениями, в том числе с применением методов небесной механики. В этом случае приближенное решение находят, как правило, последовательно. Вначале в правых частях уравнений сохраняют те основные силы, при которых возможно точное интегрирование уравнений. Для этого точного решения вводится система постоянных интегрирования  $\bar{E}_i, i = \overline{1,6}$ . Орбита, характеризуемая этим решением, называется промежуточной [17, 34] и описывает невозмущенное движение. В качестве промежуточной орбиты в произвольный момент времени  $t$  удобно выбрать эллипс. Этой орбите соответствует случай сохранения в правой части уравнений (1.2.3) сил, порожденных ньютоновским по-

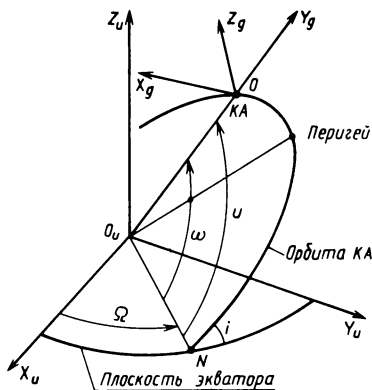


Рис. 1.6. Орбитальные элементы

тенциалом  $U_0 = \mu/r$ . Уравнения движения, соответствующие этому случаю, имеют вид

$$\begin{aligned} F_{0x} &= \frac{\partial U_0}{\partial X_{и}} = -\frac{\mu}{r^3} X_{и}; \\ F_{0y} &= \frac{\partial U_0}{\partial Y_{и}} = -\frac{\mu}{r^3} Y_{и}; \\ F_{0z} &= \frac{\partial U_0}{\partial Z_{и}} = -\frac{\mu}{r^3} Z_{и}, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

где  $\mu$  – параметр, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли.

Для описания движения КА по эллиптической орбите часто используют элементы  $a, e, i, \omega, \Omega, M$  (рис. 1.6). Параметры  $a$  и  $e$  определяют размер и форму орбиты;  $a$  – большая полуось орбиты;  $e$  – эксцентриситет. Элементы  $i, \Omega$  характеризуют ориентацию плоскости орбиты в пространстве. Прямая  $O_{и}N$ , по которой плоскость орбиты пересекается с плоскостью экватора, называется линией узлов, а точка пересечения этой линии с траекторией, в которой КА переходит из области  $Z_{и} < 0$  в область  $Z_{и} > 0$ , – восходящим узлом.

Перигеем называется точка кеплеровской орбиты с минимальным геоцентрическим расстоянием. Элемент  $\omega$  – аргумент перигея – характеризует ориентацию эллипса в плоскости орбиты. Элемент  $M_c$  – средняя аномалия в начальный момент – характеризует положение КА на орбите в момент  $t_0$ . Текущее положение КА на орбите определяется двумя углами  $\vartheta, u$ :  $\vartheta$  – истинная аномалия, отсчитывается в направлении движения угловым расстоянием от перигея до КА;  $u$  – аргумент широты – угловое расстояние от восходящего узла до КА. Перечисленные элементы связаны известными соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \omega + \vartheta; \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}; \\ E - e \sin E &= M; \\ M &= \bar{n}(t - t_0) + M_0; \\ \bar{n} &= \lambda_{cp} = \sqrt{\mu/a^3}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

В (1.2.5) переменная  $E$  – эксцентрическая аномалия. Прямоугольные координаты и составляющая вектора скорости КА определяются через введенные переменные следующим образом:

$$X_{\text{и}} = r\alpha; Y_{\text{и}} = r\beta; Z_{\text{и}} = r\gamma; \quad (1.2.6)$$

$$\dot{X}_{\text{и}} = V_r\alpha + V_\tau\alpha';$$

$$\dot{Y}_{\text{и}} = V_r\beta + V_\tau\beta'; \quad (1.2.7)$$

$$\dot{Z}_{\text{и}} = V_r\gamma + V_\tau\gamma';$$

$$\text{В (1.2.6) } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\vartheta} \quad (1.2.8)$$

– расстояние от центра Земли  $O_{\text{и}}$  до КА;

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} e\sin\vartheta; \quad (1.2.9)$$

$$V_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} (1 + e\cos\vartheta)$$

– соответственно радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости;  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\alpha', \beta', \gamma'$  – направляющие косинусы радиуса-вектора и трансверсали:

$$\alpha = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i; \quad (1.2.10)$$

$$\beta = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i;$$

$$\gamma = \sin u \sin i;$$

$$\alpha' = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i; \quad (1.2.11)$$

$$\beta' = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i;$$

$$\gamma' = \cos u \sin i.$$

Помимо приведенных элементов на практике часто используются и другие:

$$p = a(1 - e^2) \quad (1.2.12)$$

– параметр орбиты;

$$\tau = t_0 - \frac{M_0}{\bar{n}} \quad (1.2.13)$$

– момент прохождения через перигей орбиты,

$$l = e\cos\omega; \quad (1.2.14)$$

$$n = e\sin\omega$$

– компоненты вектора Лапласа.

**Баллистические характеристики КА, совершающих встречу.** Для участка дальнего наведения определяющими параметрами являются:

относительное положение ( $\Delta\bar{\mathcal{E}}_{б.т}$ ) космических аппаратов в конце участка дальнего наведения (д.н);

затраты характеристической скорости ( $\Sigma\Delta V_{д.н}$ ) на переход транспортного КК с опорной орбиты в район встречи.

Баллистические характеристики непосредственно участка встречи характеризуются вектором относительной дальности  $\bar{D}$  и относительной скорости  $\bar{D}$ .

Для описания орбитальных характеристик процесса дальнего наведения, как правило, применяются либо системы оскулирующих элементов, либо системы координат  $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$  и  $O_{и}X_0Y_0Z_0$ . При описании процесса коррекции траектории движения, как правило, применяют нормальную систему координат (см. рис. 1.6) с началом, совпадающим с центром масс пассивного КА, ось  $OY_g$  – направлена по радиусу-вектору КА,  $OZ_g$  – по нормали к плоскости орбиты и коллинеарна вектору угловой скорости КА,  $OX_g$  – дополняет систему до правой. Уравнения движения в этой системе координат можно получить, выбрав в качестве исходных дифференциальное уравнение управляемого движения космических аппаратов, в геоцентрической системе координат в центральном поле

$$\ddot{\bar{r}}_1 = -\frac{\mu}{r_1^3}\bar{r}_1 + \bar{U}_1; \quad (1.2.15)$$

$$\ddot{\bar{r}}_2 = -\frac{\mu}{r_2^3}\bar{r}_2 + \bar{U}_2; \quad (1.2.16)$$

где  $\bar{U}_1, \bar{U}_2$  – управляющие воздействия, развиваемые двигательными установками космических аппаратов.

Векторное дифференциальное уравнение относительного движения аппаратов можно получить, вычитая (1.2.15) из (1.2.16),

$$\ddot{\bar{r}}_{отн} = -\mu \left\{ \frac{(\bar{r}_1 + \bar{r}_{отн})}{[(\bar{r}_1 + \bar{r}_{отн})(\bar{r}_1 + \bar{r}_{отн})]^{3/2}} - \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} \right\} + (\bar{U}_2 - \bar{U}_1); \quad (1.2.17)$$

$$\bar{r}_{отн} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2.$$

Выражение (1.2.17) приводится к виду

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{\mu}{r_1^3} \left\{ \frac{1}{[1 + (2\bar{r}_{отн}\bar{r}_1)/\bar{r}_1^2 + (\bar{r}_{отн}/\bar{r}_1)]^{3/2}} \bar{r}_{отн} + \frac{1 - \left\{ 1 + [(2\bar{r}_{отн}\bar{r}_1)/\bar{r}_1^2] + (\bar{r}_{отн}/\bar{r}_1)^2 \right\}^{3/2}}{\left\{ 1 + [(2\bar{r}_{отн}\bar{r}_1)/\bar{r}_1^2] + (\bar{r}_{отн}/\bar{r}_1)^2 \right\}^{3/2}} \bar{r}_1 \right\} + (\bar{U}_2 - \bar{U}_1). \quad (1.2.18)$$

Для упрощения (1.2.18) разложим выражение  $[1 + \frac{2\bar{r}_{отн}\bar{r}_1}{r_1^2} + (\frac{\bar{r}_{отн}}{\bar{r}_1})^2]^{3/2}$  по формуле бинома Ньютона в ряд по степеням  $(\frac{\bar{r}_{отн}}{r_1})$ .

Отбрасывая члены выше первого порядка малости имеем

$$[1 + \frac{2\bar{r}_{отн}\bar{r}_1}{r_1^2} + (\frac{\bar{r}_{отн}}{\bar{r}_1})^2]^{3/2} \approx 1 + 3(\frac{\bar{r}_{отн}\bar{r}_1}{r_{отн}r_1}) \times (\frac{\bar{r}_{отн}}{r_1}) + \dots \quad (1.2.19)$$

Подставив (1.2.19) в (1.2.18), после несложных преобразований сможем записать

$$\ddot{\bar{r}}_{отн} \approx -\frac{\mu}{r_1^3}(\bar{r}_{отн} - 3\frac{\bar{r}_{отн}\bar{r}_1}{r_1}) + (\bar{U}_2 - \bar{U}_1). \quad (1.2.20)$$

В свою очередь, вектор относительной дальности можно записать в виде

$$\bar{r}_{отн} = X_g\bar{e}_x + Y_g\bar{e}_y + Z_g\bar{e}_z, \quad (1.2.21)$$

где  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  — орты.

Ввиду того, что активный КА движется относительно системы  $OX_gY_gZ_g$ , а сама система движется относительно инерционной системы  $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$ , значения относительных параметров  $X_g, Y_g, Z_g$  изменяются по величине, а единичные орты — по направлению. Приняв это во внимание, возьмем производную по времени от (1.2.21) и, используя формулу Пуассона для определения скорости единичных векторов системы координат с началом, находящимся во вращении с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг подвижного центра, получим

$$\dot{\bar{r}}_{отн} = (\dot{Y}_g - \omega_0 X_g)\bar{e}_y + (\dot{X}_g + \omega_0 Y_g)\bar{e}_x + \dot{Z}_g\bar{e}_z; \quad (1.2.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{r}}_{отн} = & (\ddot{Y}_g - 2\omega_0\dot{X}_g - \dot{\omega}_0 X_g - \omega_0^2 Y_g)\bar{e}_y + \\ & + (\ddot{X}_g + 2\omega_0\dot{Y}_g + \dot{\omega}_0 Y_g - \omega_0^2 X_g)\bar{e}_x + \ddot{Z}_g\bar{e}_z. \end{aligned}$$

Из (1.2.22) и (1.2.20) находим

$$\ddot{X}_g + 2\omega_0\dot{Y}_g + \dot{\omega}_0 Y_g - \omega_0^2 X_g - \frac{2\mu}{r_1^3} X_g = U_{2x} - U_{1x};$$

$$\ddot{Y}_g - 2\omega_0\dot{X}_g - \dot{\omega}_0 X_g + \omega_0^2 Y_g + \frac{\mu}{r_1^3} Y_g = U_{2y} - U_{1y}; \quad (1.2.23)$$

$$\ddot{Z}_g + \frac{\mu}{r_1^3} Z_g = U_{2z} - U_{1z}.$$



При движении пассивного аппарата-цели по круговой орбите

$$\dot{\omega}_0 = 0, \mu/r_1^3 = \omega_0^2, U_{1x} = U_{1y} = U_{1z} = 0. \quad (1.2.24)$$

В этом случае уравнения относительного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{X}_g + 2\omega_0 \dot{Y}_g - 3\omega_0^2 X_g &= U_{2x}; \\ \dot{Y}_g - 2\omega_0 \dot{X}_g &= U_{2y}; \\ \ddot{Z}_g + \omega_0^2 Z_g &= U_{2z}. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

**Баллистические характеристики спутниковых систем.** Под спутниковой системой (СС) будем понимать упорядоченную на орбитах группу КА, организованно выполняющих заданную совокупность задач. В зависимости от решаемых задач спутниковые системы будем называть связными, навигационными, метеорологическими и т.д. Каждой СС соответствует своя орбитальная структура (ОС). Под орбитальной структурой будем понимать орбитальные элементы КА космической системы и связи между ними, определяемые характером решаемых задач.

Из определения спутниковых систем следует, что они характеризуются  $j$  орбитами, каждая из них с шестью независимыми элементами  $\bar{\mathfrak{E}}_j$ ,  $j \leq \bar{j}$ . Таким образом, взаимное расположение орбит может быть охарактеризовано соотношением

$$\Delta \bar{\mathfrak{E}}_{l,m} = \bar{\mathfrak{E}}_l - \bar{\mathfrak{E}}_m, \quad l, m \leq \bar{j}, \quad (1.2.26)$$

где  $\bar{j}$  – число КА в системе;  $l, m$  – номера КА в СС.

Орбиты СС могут быть одного или различных классов. Принадлежность орбит к одному классу прежде всего будем определять одинаковой геометрией орбит, например параметром  $p$  или эксцентриситетом. Кроме того, могут быть одинаковыми и другие параметры орбит: наклонения  $i_l = i_m$  или ориентация в пространстве  $i_l = i_m$ ,  $\Omega_l = \Omega_m$ , либо одинаковая ориентация в плоскости  $\omega_l = \omega_m$ .

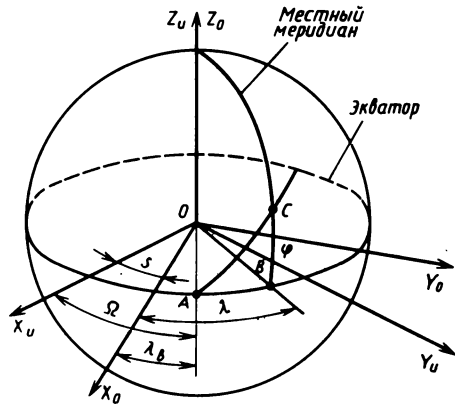
Таким образом, в зависимости от решаемых задач при выборе структуры системы определенная совокупность  $k$  элементов всех орбит может выбираться однотипной и относится в некоторой области  $G^k$  элементов орбит

$$\bar{\mathfrak{E}}_j^k \in G^k, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{j}, \quad (1.2.27)$$

а остальные элементы орбит взаимно разнесены в пространстве и позволяют организовать орбитальную структуру

$$\Delta \bar{\mathfrak{E}}_{l-m}^{6-k} = \bar{\mathfrak{E}}_l^{6-k} - \bar{\mathfrak{E}}_m^{6-k}, \quad l, m \leq \bar{j}. \quad (1.2.28)$$

Рис. 1.7. Трассы КА



**Примеры кинематических орбитальных характеристик.** Параметры орбит как отдельных КА, так и космических аппаратов, образующих СС, можно преобразовать к кинематическим характеристикам, определяемым в решающей степени характером целевых задач. Определение этих характеристик также является составной частью процесса баллистического проектирования КС. Рассмотрим некоторые из них.

Положение подспутниковой точки *C* (рис. 1.7) определяется широтой  $\varphi$  и географической долготой  $\lambda$  в подвижной системе координат  $OX_0Y_0Z_0$  (как правило, за опорное направление выбирают ось  $OX_0$ , направленную на гринвичский меридиан). Совокупность подспутниковых точек образуют трассу КА. Уравнение трассы можно получить, рассмотрим сферический треугольник  $ABC$ . Опираясь на теорему синусов из сферического треугольника, найдем широту подспутниковой точки

$$\sin \varphi = \sin i \sin u; \quad \varphi = \arcsin(\sin i \sin u). \quad (1.2.29)$$

Географическую долготу точки определим из соотношения

$$S + \lambda = \Omega + \overset{\frown}{AB}, \quad (1.2.30)$$

где  $\overset{\frown}{AB}$  – экваториальная дуга, заключенная между восходящим узлом и меридианом подспутниковой точки. Она также находится из сферического треугольника  $ABC$ :  $\text{tg} \overset{\frown}{AB} = \text{tg} u \cos i$ ;  $S$  – звездное время (определяет угол между направлением на точку весеннего равноденствия и направлением на гринвичский меридиан). Значение  $S$  определяется выражением

$$S = S_0 + \omega_3 t, \quad (1.2.31)$$

где  $S_0$  – звездное время на 0 ч даты;  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли;  $t$  – текущее время, отсчитываемое от 0 ч опорной даты.

Подставив значения  $S$  и  $\overset{\frown}{AB}$  в (1.2.30), получим

$$S_0 + \omega_3 t + \lambda = \Omega + \arctg(\text{tg} u \cos i), \quad (1.2.32)$$

откуда имеем

$$\lambda = \Omega - S_0 - \omega_3 t + \arctg(\text{tg} u \cos i). \quad (1.2.33)$$

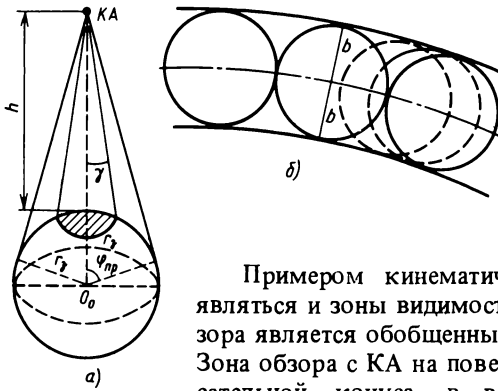


Рис. 1.8. Зоны обзора КА

Выражения (1.2.29) и (1.2.33) представляют собой уравнения трассы.

Примером кинематических характеристик могут являться и зоны видимости (обзора). Понятие зоны обзора является обобщенным и не зависит от классов КА. Зона обзора с КА на поверхности Земли ограничена касательной конуса, в вершине которого находится спутник (рис. 1.8,а). Предельный угол  $\varphi_{\text{пр}}$  для высоты  $h$  является одинаковым как при наблюдении с КА, так и с Земли и равен

$$\varphi_{\text{пр}} = \arccos\left(\frac{r_3}{r_3 + h}\right), \quad (1.2.34)$$

здесь  $r_3$  — средний радиус Земли.

Предельная зона обзора является предельно достижимой величиной, а фактическая зона всегда меньше предельной и зависит от угла обзора аппаратуры  $\gamma$ , а также от условий ее функционирования. При известных высоте полета  $h$  и угле  $\gamma$  зону обзора определяют, пользуясь зависимостью

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \arccos\left(\frac{r_3 + h}{r_3} \sin \gamma\right). \quad (1.2.35)$$

Величина  $\varphi_3$  в общем случае является мгновенной зоной. Для круговых орбит она является постоянной величиной. Для эллиптических орбит она меняется в зависимости от высоты полета КА, определяемой выражением

$$h = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(u - \omega)} - r_3. \quad (1.2.36)$$

Совокупность геометрических мест мгновенных зон обзора каждого КА системы образует полосу обзора (рис. 1.8,б). Ширина полосы обзора (рис. 1.8,б) определяется расстоянием между точками касания мгновенной зоны обзора. Она определяется на сфере длиной дуги большого круга

$$b = 2r_3 \varphi_3 = 2r_3 \left[ \frac{\pi}{2} - \gamma + \arcsin\left(\frac{r_3 + h}{r_3} \sin \gamma\right) \right]. \quad (1.2.37)$$

Помимо приведенных примеров в практике баллистического проектирования приходится сталкиваться с другими не менее важными и распространенными параметрами и баллистическими характеристиками, описывающими условия функционирования бортовых систем, взаимной видимости КА, прохождения теневого участка планеты и т.п.

### 1.3. ВЛИЯНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ И КА НА БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При баллистическом проектировании космических систем ограничения, определяемые возможностями РН и КА, имеют существенное значение, так как технические параметры РН (тяговооруженность, число ступеней и другие характеристики) и КА (тяговооруженность, компоновка двигательной установки, расположение датчиков и их тип, условия функционирования бортовых систем КА и т.д.) зачастую в решающей степени влияют на выбор схемы выведения РН и параметры рабочих орбит космических аппаратов.

Тяговооруженность РН или КА определяется известным соотношением  $n_T = \frac{P_T}{G_K}$ , где  $P_T$  – тяга двигательной установки;  $G_K$  – вес  $k$ -й ступени РН или космического аппарата.

Величина  $n_T$  существенно влияет на выбор и реализацию закона управления РН и в особенности космического аппарата. В дальнейшем изложении под управляемым движением КА будем понимать направленное изменение положения центра масс космического аппарата в пространстве. Условием успешного решения задачи управления в рассматриваемом случае является поддержание или изменение некоторых орбитальных параметров с заданной точностью. Таких параметров может быть несколько  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  (как правило,  $n < 6$ ). Управляемый КА обладает некоторым запасом рабочего тела или, как принято говорить, запасом характеристической скорости  $\Delta V_\Sigma$ . Расходуя запас  $\Delta V_\Sigma$  частично или полностью, КА в состоянии либо изменить свою первоначальную орбиту, либо поддержать ее в допустимой области. В процессе проектирования при выборе закона управления приходится рассматривать два случая: управление при помощи двигателей малой тяги, когда протяженностью времени исполнения расчетного приращения скорости нельзя пренебрегать, и управление в импульсной интерпретации, когда условно принимается мгновенная реализация расчетного импульса скорости.

При реализации управляющего воздействия существенны погрешнос-

ти, обусловленные двигательной установкой, основными из которых являются как погрешности, обусловленные переходными процессами двигательной установки, так и погрешности установившегося режима двигательной установки. Рассмотрим кратко физику явлений, сопровождающую отмеченные процессы.

В качестве примера проведем анализ переходного процесса жидкостно-реактивной установки КА. Обработка изменения вектора скорости КА в управляемом движении осуществляется за конечный промежуток времени. Время работы двигательной установки зависит от величины управляющего импульса ( $\Delta V$ ), непосредственно характеристик ДУ, массы КА. При расчетах времени работы двигательной установки ( $t_d$ ) тяга ДУ предполагается номинальной. Однако реальный процесс обработки расчетного  $\Delta V$  может существенно отличаться от номинального и как следствие исказить расчетную траекторию полета, а затем привести к дополнительным энергозатратам для коррекции фактической траектории. На рис. 1.9 приведен процесс включения и отсечки ДУ ЖРД при обработке расчетного импульса скорости. На рис. 1.9 интервал времени  $[t_0, t_{CT}]$  соответствует переходному процессу нарастания тяги, интервал  $[t_{CT}, t_{ВЫК}]$  — установившемуся режиму работы ЖРД и интервал  $[t_{ВЫК}, t_K]$  — спаду тяги. Моменты времени  $[t_0, t_{ВЫК}]$  соответствуют подаче сигналов на выключение и включение двигательной установки. Результаты экспериментальных исследований типичных ЖРД показали, что нарастание и спад тяги носят экспоненциальный характер [4]. На интервале  $[t_0, t_{CT}]$  нарастание тяги двигателями можно аппроксимировать уравнением

$$P_T = P_H (1 + \exp^{-t/T_T}), \quad (1.3.1)$$

а на участке спада  $t_{ВЫК}, t_H$  соответственно

$$P_T = P_{T.H} \exp^{-t/T_C}. \quad (1.3.2)$$

В (1.3.1), (1.3.2)  $T_H, T_C$  — постоянные времени нарастания и спада тяги зависят от динамических характеристик элементов системы ЖРД, а также от физико-химических свойств топлива и процессов в камере сгорания. В зависимости от размеров и конструкции ДУ время, соответствующее нарастанию и спаду тяги, может находиться в интервале от несколь-

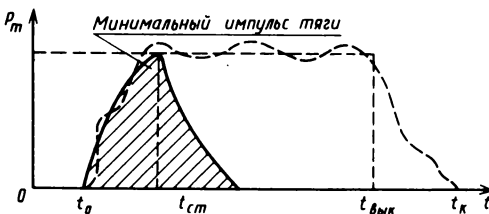


Рис. 1.9. Характеристики включения ЖРД

ких миллисекунд до нескольких секунд [4]. Особо следует отметить, что установившиеся процессы оказывают существенное влияние на точность отработки  $\Delta V$  при малых значениях последних. Определим минимально реализуемый импульс ДУ исходя из принятых предпосылок о динамике изменения тяги (рис. 1.9).

Ускорение на интервале времени  $[t_0, t_{CT}]$  для КА постоянной массы (переменностью массы на малых интервалах времени можем пренебречь) можно записать в виде

$$U_H = U_0(1 - \exp^{-t/T_H}), \quad (1.3.3)$$

а на интервале спада  $[t_{ВЫК}, t_K]$

$$U_C = U_0 \exp^{-t/T_C}, \quad (1.3.4)$$

где  $U_0 = P_H/m_0$  – номинальное ускорение от двигательной установки. Приращение скорости КА на этих же интервалах

$$\Delta V_H = U_0 \int_{t_0}^{t_{CT}} (1 - \exp^{-\frac{t}{T_H}}) dt; \quad (1.3.5)$$

$$\Delta V_C = U_0 \int_{t_{ВЫК}}^{t_K} \exp^{-\frac{t}{T_C}} dt.$$

Проинтегрировав (1.3.5), получим

$$\Delta V_H = U_0[\Delta t_H - T_H(1 - \exp^{-\Delta t_H/T_H})]; \quad (1.3.6)$$

$$\Delta V_C = U_0 T_C(1 - \exp^{-\Delta t_C/T_C}).$$

В уравнениях (1.3.6)  $\Delta t_H = t_{CT} - t_0$ ,  $\Delta t_C = t_K - t_{ВЫК}$  – интервалы времени, на которых вычисляются соответствующие приращения скорости КА. На практике достаточно принять  $\Delta t_H = 3T_H$ ,  $\Delta t_C = 3T_C$ . Это соответствует определению компонент  $\Delta V_H$ ,  $\Delta V_C$  с точностью не хуже 5%. Суммарная величина минимального импульса скорости, реализуемого ДУ, равна

$$\Delta V_{min} = \Delta V_H + \Delta V_C. \quad (1.3.7)$$

Эта величина должна приниматься во внимание при баллистическом проектировании в случае управляемого движения КА.

Рассмотрим далее погрешности установившегося режима двигательной установки КА. Они связаны с неустойчивым горением в камере сго-

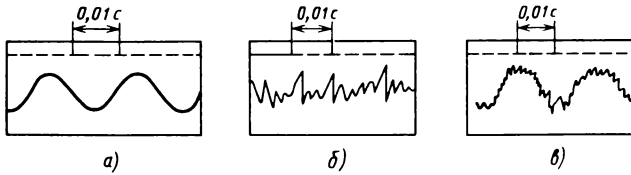


Рис. 1.10. Вид колебаний тяги длительной установки КА

рания. Различают низкочастотные и высокочастотные колебания давления в камере сгорания ЖРД. К первым относятся колебания с частотой менее 100 Гц (рис. 1.10,а), ко вторым – колебания с частотой более 100 Гц (рис. 1.10,б). Как правило, происходит наложение низкочастотных и высокочастотных колебаний (рис. 1.10,в). Причины возникновения низкочастотных колебаний лежат в динамических характеристиках элементов ЖРД (насосные устройства, топливные и газовые магистрали работают с отклонениями), а также связаны с физико-химическими процессами в камере сгорания, в том числе с процессом превращения жидкого топлива в газообразные продукты сгорания (распыл, смешение и горение не являются мгновенными). Отклонения тяги от номинального значения, обусловленные низкочастотными колебаниями, можно представить в виде

$$\Delta P_{Т.н} = \delta_{н} \sin(\omega_{н} t + \varphi'_0), \quad (1.3.8)$$

где  $\omega_{н}$  – случайная величина с нормальным распределением, определяет частоту колебания тяги;  $\delta_{н}$  – случайная величина с нормальным распределением, характеризует амплитудные отклонения;  $\varphi'_0$  – случайная величина с распределением в интервале  $[-\pi, +\pi]$ .

Амплитуда высокочастотных колебаний может изменяться в достаточно заметных пределах. Частота колебаний свыше 100 Гц. Период высокочастотных колебаний соответствует времени прохождения звуковой волны вдоль камеры сгорания. Поэтому их часто называют "акустическими". Отклонения тяги от номинальной можно представить в виде

$$\Delta P_{Т.н} = \delta_{в} \sin(\omega_{вт} + \psi'_0), \quad (1.3.9)$$

где  $\delta_{в}$  – случайная величина с нормальным распределением, определяющая амплитуду отклонения;  $\omega_{вт}$  – случайная величина характеризует частоту колебаний тяги;  $\psi'_0$  – случайная величина с равномерным распределением в интервале  $[-\pi, +\pi]$ .

При выборе схемы сближения космических аппаратов решающим фактором может оказаться компоновка двигательной установки и способ создания управляющих ускорений: декартовый или полярный [14]. Полярное управление предполагает произвольную ориентацию про-

дольной оси КА. Управляющие двигатели в этом случае создают силу тяги вдоль продольной оси (рис. 1.11,а). Управление вектором тяги осуществляется поворотом всего КА в требуемом направлении. Декартовое управление предполагает фиксированную ориентацию всех трех связанных осей КА, а двигатели создают тягу вдоль этих осей (рис. 1.11,б).

Полярная компоновка приводит к снижению энергозатрат  $\Delta V$ , однако полярное управление обладает целым рядом недостатков, основным из которых является необходимость разворота корпуса КА для изменения ориентации тяги, что может повлечь к нежелательным явлениям, связанным с временным задержкам в системе управления. Можно использовать также промежуточные между полярным и декартовым способы управления вектором тяги.

При баллистическом проектировании космических систем зачастую необходимо учитывать погрешности задания характеристик КА и точностные характеристики системы управления и средств, а также математического обеспечения баллистического сопровождения.

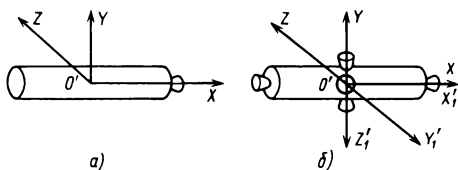
**Погрешности задания характеристик КА.** К ним прежде всего можно отнести погрешности задания начальной массы КА, а также погрешности определения ее в полете, обусловленные неточностью телеметрических данных. Погрешности определения массы КА приводят к отличию фактического ускорения от его расчетного значения, а погрешности определения моментов инерции КА приводят к дополнительным ошибкам системы угловой ориентации и стабилизации. Существенными могут оказаться и утечки газа из корпуса КА или из выносных элементов газореактивной системы, работающей на сжатом газе. Это влияние может усилиться, если процесс рассматривается на длительных временных интервалах. Приближенное значение ускорения, создаваемого утечкой газа, можно рассчитать по формуле

$$U_y = \frac{\rho_{\Gamma} S_y C_{\text{кр}}^2}{m}, \quad (1.3.10)$$

где  $\rho_{\Gamma}$  — плотность газа в корпусе КА или газобаллонной системе;  $S_y$  — площадь сечения, через которое происходит утечка газа;  $C_{\text{кр}}$  — критическая скорость истечения газа.

**Рис. 1.11. Компоновки двигательной установки КА:**

а —  $O'X$  — продольная ось; б —  $O'Y_1, O'Z_1$  — фиксируются относительно оси  $O'X'$  и инерциального пространства





**Погрешности контура управления.** Эти ошибки обусловлены построителями базовой системы координат на борту КА или РН, преобразующими устройствами и исполнительными органами системы угловой стабилизации. Рассмотрим кратко основные из них применительно к КА.

Ошибки начальной выставки гиросtabilизированной платформы инерциальной системы определяются способом начальной ориентации и точностью приборов, с помощью которых осуществляется выставка гиросплатформы. Например, при ориентации гиросплатформы визирированием на звезды при помощи звездного телескопа возникают погрешности связи между линией визирирования и ориентацией гиросплатформы. Погрешность в данном случае обусловлена неточным знанием углов между осями гиросплатформы и осями телескопов. Более подробные качественные и количественные данные по этому вопросу указаны в работе [4]. Там же приводятся методические материалы для приближенной оценки, достаточной для использования их при баллистическом проектировании, погрешности систем ориентации с ИК-вертикалью (обусловленные конфигурацией планеты, окружающей средой), погрешности вспомогательных и преобразующих устройств, а также исполнительных устройств системы угловой стабилизации и ориентации.

**Влияние условий работы бортовых приборов.** При баллистическом проектировании существенное внимание должно быть отведено вопросам определения участков орбиты, на которых бортовые приборы, предназначенные для решения целевых задач и построения опорных систем координат, могут находиться в критических условиях. Типичным примером таких задач, вытекающих из этих требований, может являться задача о критической освещенности приборов. Она позволяет решить широкий класс задач при общих предположениях.

Пусть  $\bar{s}$  – единичный вектор, направленный из центра масс КА на Солнце,  $\bar{k}$  – единичный вектор, направленный по оси прибора от центра масс КА,  $\rho$  – минимальный или максимальный допустимый угол между отмеченными векторами. В общем случае  $\bar{s} = \bar{s}(t)$ ,  $\rho = \rho(t)$ . Будем считать, что в момент  $t$  прибор находится в условиях критической освещенности, если выполняется условие (неравенство)

$$(\bar{k} \cdot \bar{s}) \Phi \cos \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{i}, \quad (1.3.11)$$

где под знаком  $\Phi$  можно понимать как „ $\geq$ “, так и „ $\leq$ “. Не ограничивая общности, будем считать  $\bar{i} = 1$ ,  $\rho_1 = \rho$ . Тогда характеристикой условий критической освещенности прибора на  $j$ -м витке обращения КА является совокупность временных интервалов  $(a_j, b_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, j$ , на которых выполняется условие (1.3.11).

#### 1.4 ФИЗИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОКРУЖАЮЩЕГО КОСМОСА И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ВЫБОР БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КА

Движение космических аппаратов происходит во внешней среде, которая зачастую существенным образом может влиять как на орбитальные параметры, так и на активное функционирование и износоустойчивость конструкций и приборов КА. Поэтому при баллистическом проектировании в зависимости от характера решаемых задач и области полета КА необходимо учитывать влияние внешней среды околоземного космического пространства. Рассмотрим вначале кратко некоторые характеристики околоземного космоса.

**Верхняя атмосфера Земли.** К верхней атмосфере Земли относят области атмосферы для высот  $h > 50$  км от поверхности Земли. Приближенная схема верхней атмосферы приводится на рис. 1.12. Длительное время полета КА и диссипативное влияние сил атмосферного сопротивления приводят к тому, что на высотах ниже 600 ... 1000 км тормозящее воздействие атмосферы оказывает существенное влияние на эволюцию орбит КА [17]. Сила сопротивления противоположна по направлению вектору скорости и равна

$$X_a = C_x S' \frac{\rho V_{\text{отн}}^2}{2}. \quad (1.4.1)$$

Здесь  $C_x$  – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления;  $S'$  – характерная площадь КА;  $\rho$  – плотность атмосферы;  $V_{\text{отн}}$  – скорость набегающего потока газа, равная скорости КА относительно воздуха.

Коэффициент  $C_x$  является функцией многих величин – геометрической формы и ориентации КА, свойств материала (его поверхности), состава атмосферы и ее параметров. Для верхних слоев атмосферы этот коэффициент находится в пределах 2,0 ... 2,5.

Площадь  $S'$  – это площадь максимального сечения КА, нормального к вектору скорости  $V_{\text{отн}}$ . Для ориентированного КА она строго определяется его геометрией. Для неориентированного КА площадь  $S'$  оказывается переменной, что приводит к необходимости применения ее осредненных значений.

Плотность атмосферы  $\rho$  является пространственно-временной функцией

$$\rho = f(h, \alpha, \delta, F_{10,7}, a_p, t, c_i), \quad i = 1, \dots, i^*. \quad (1.4.2)$$

Вид этой функции задается моделями верхней атмосферы. Основными аргументами динамических моделей верхней атмосферы являются сле-

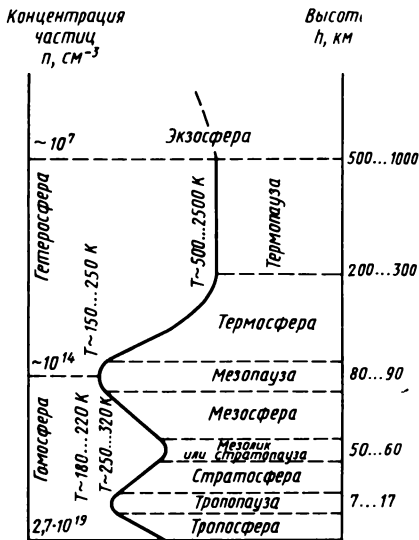


Рис. 1.12. Схема верхней нейтральной атмосферы

дующие величины:  $h$  – высота точки над поверхностью Земли;  $\alpha, \delta$  – сферические координаты точки;  $F_{10,7}$  – индекс солнечной активности, равный интенсивности радиоизлучения Солнца  $10^{-22} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})$  на волне 10,7 см;  $a_p$  – индекс, характеризующий геомагнитную возмущенность;  $t$  – время, которое используется в (1.4.2) при вычислении полугодового эффекта;  $c_i, i = 1, \dots, i^*$  – параметры модели. Высота  $h$  зависит от радиуса-вектора и широты точки

$$h = r - r_3(1 - \epsilon \sin^2 \varphi), \quad (1.4.3)$$

где  $r_3, \epsilon$  – экваториальный радиус и сжатие Земли соответственно.

Индексы  $F_{10,7}$  и  $a_p$  изменяются во времени. Индекс  $F_{10,7}$  изменяется более плавно (у него имеются 28-дневный и 11-летний периоды). Индекс  $a_p$  изменяется более динамично. Характерное время флюктуации индекса – порядка суток. Моменты сильных изменений индекса (магнитных бурь) нерегулярны и плохо предсказуемы.

Наиболее существенной компонентой в модели вида (1.4.2) является высота. Так, например, при ее изменении в диапазоне 200 ... 600 км плотность меняется в  $0,7 \cdot 10^3 \dots 3,1 \cdot 10^4$  раз. В относительно небольшом диапазоне высот зависимость плотности от высоты достаточно хорошо аппроксимируется соотношением

$$\rho(h) = \rho(h_0) \exp \frac{h - h_0}{H}, \quad (1.4.4)$$

где  $H$  – высота однородной атмосферы.

Влияние координат  $\alpha, \delta$  на плотность атмосферы связано с так называемым суточным эффектом. Происхождение названия эффекта объясняется различной степенью разогрева верхней атмосферы в дневное и ночное время. Влияние тепловой инерции приводит к тому, что максимум суточного изменения плотности приходится на 14 ... 15 ч местного времени. Амплитуда суточного эффекта зависит от высоты и уровня

солнечной активности. Максимальное отношение дневной плотности к ночной достигается на высотах 500 ... 600 км и составляет 2 ... 3.

Скорость движения КА относительно воздуха  $V_{отн}$  зависит от скорости КА в ГИСК и скорости движения атмосферы (ветров)  $W$ :

$$\vec{V}_{отн} = \vec{V} - \vec{W}. \quad (1.4.5)$$

По данным [17], в области малых широт на высотах 150 ... 300 км преобладают западные ночные ветры, скорость которых достигает 300 ... 350 м/с. Днем они сменяются восточными со скоростями 30 ... 150 м/с. В периоды сильных геометрических возмущений скорость ветра в различных направлениях может достигать 500 м/с. Однако эти процессы плохо изучены и достоверной модели ветров не создано.

**Магнитосфера.** Установлено, что магнитное поле Земли в среднем близко к полю простого магнитного диполя, расположенного в центре Земли, с осью, наклоненной к оси вращения Земли примерно на  $11^\circ$ . Прямые измерения с помощью КА (типа "Зонд" и др.) околоземного межпланетного космического пространства показали, что поток постоянно существующей солнечной плазмы (солнечного ветра) поджимает геомагнитное поле к Земле (рис. 1.13).

Область, где геомагнитное поле (искаженное этим сжатием) сохраняет в определенной мере постоянное направление силовых линий, называется магнитосферой. Поток солнечной плазмы, попадая на магнитосферу, образует ударную волну, фронт которой располагается

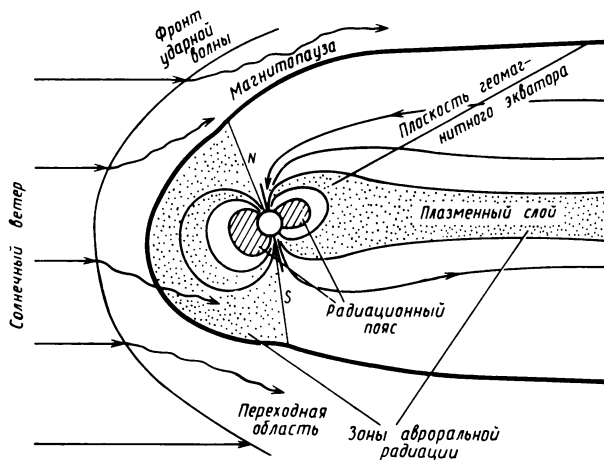


Рис. 1.13. Магнитосфера околоземного космического пространства

на несколько десятков тысяч километров перед магнитопаузой. Магнитопауза представляет собой резкую границу, отделяющую магнитосферу от области, в которой движется поток солнечной плазмы.

Имеются и другие факторы космического пространства, например метеорные потоки, могущие повлиять на выбор баллистических параметров космических систем.

При баллистическом проектировании влияние внешней среды, как правило, учитывают дифференцированно. В случае когда КА решает целевые задачи, не связанные с исследованием и изучением внешней космической среды, воздействие последней может накладывать соответствующие ограничения как на выбор орбитальных характеристик, так и непосредственно на функционирование приборов и средств управления КА. Например накопление значительных по величине электростатических зарядов на поверхности КА может существенно нарушить функционирование бортовых систем [38]. Известно также, что для пилотируемых КК длительный полет в районе радиационных поясов является весьма проблематичным.

Следовательно, при баллистическом проектировании на высоты полета космических аппаратов могут быть наложены ограничения типа

$$h_c^* \leq h_{\Pi}(t); h_a(t) \leq h_c^{**}, \quad (1.4.6)$$

где  $h_{\Pi}(t)$ ,  $h_a(t)$  – соответственно высоты полета спутника в перигее и апогее;  $h_c^*$ ,  $h_c^{**}$  – соответственно минимальные и максимальные предельно разрешимые высоты полета КА или ограничения вида

$$t_{h_1}^{h_2} \leq t_{\Phi}^*, \quad (1.4.7)$$

где  $t_{h_1}^{h_2}$  – длительность активного функционирования КА на высотах  $h_1 \leq h(t) \leq h_2$ ;  $t_{\Phi}^*$  – заданная длительность активного функционирования КА.

В случае когда определяются орбитальные параметры КА, предназначенного для изучения заранее определенных областей космического пространства (околоземного и межпланетного), ограничения на пространственно-временные параметры могут принимать отличный от (1.4.6) вид, в том числе

$$(t_{h_1}^{h_2})_{\Phi} \leq t_{\Phi}^{**}; \quad (1.4.8)$$

$$h_{\Phi}^* \leq h_{\Pi}(t); h_a(t) \leq h_{\Phi}^{**},$$

где  $h_{\Phi}^*$ ,  $h_{\Phi}^{**}$  – границы (по высоте) исследуемого пространства;  $(t_{h_1}^{h_2})_{\Phi} =$

$= t_{h_2} - t_{h_1}$ ;  $t_{h_2}$ ,  $t_{h_1}$  — соответственно моменты прохождения спутника на высотах  $h_2$ ,  $h_1$ ;  $t_{\Phi}^{**}$  — заданное время нахождения спутника в диапазоне высот  $h_2 \dots h_1$ , необходимое для накопления информации о исследуемой области.

### 1.5. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Процесс баллистического проектирования может рассматриваться с двух позиций: техническое (системное) проектирование и операционное проектирование\*.

**Системное проектирование** предполагает определение баллистических характеристик космических систем, удовлетворяющих решению целевых задач с учетом основных ограничений, обусловленных условиями внешней средой, техническими возможностями РН, КА, условиями связи и сброса целевой информации и других подобных характеристик. Укрупненная схема процесса системного баллистического проектирования приведены на рис. 1.14. Она включает в себя формализацию и решение совокупности задач, связанных с выбором орбитальных параметров и процесса управления КА на стадиях разработки технических предложений и эскизного проектирования. Такая схема является достаточно общей при решении задач баллистического проектирования космических систем различных по своему целевому назначению, хотя для каждого класса КС определяемые характеристики имеют и свою специфику. В целом же процесс системного проектирования, как правило, включает в себя несколько этапов, основными из которых являются:

анализ целевых задач, для решения которых осуществляется баллистическое проектирование космической системы;

выбор орбитальных характеристик КС в первом приближении (кинематически правильные параметры) без учета основных возмущающих факторов, воздействующих на КА в орбитальном полете;

анализ основных возмущений, оценка их влияния на предварительно выбранные орбитальные характеристики отдельного КА или группировки КА, совместно решающих заданные целевые задачи;

определение орбитальной эволюции КА на заданных временных интервалах активного функционирования под влиянием возмущающих

---

\* Термин операционное проектирование введен по аналогии с термином, введенным в монографии Д.Н. Шеверова "Проектирование беспилотных летательных аппаратов". М., Машиностроение, 1978, 264 с.

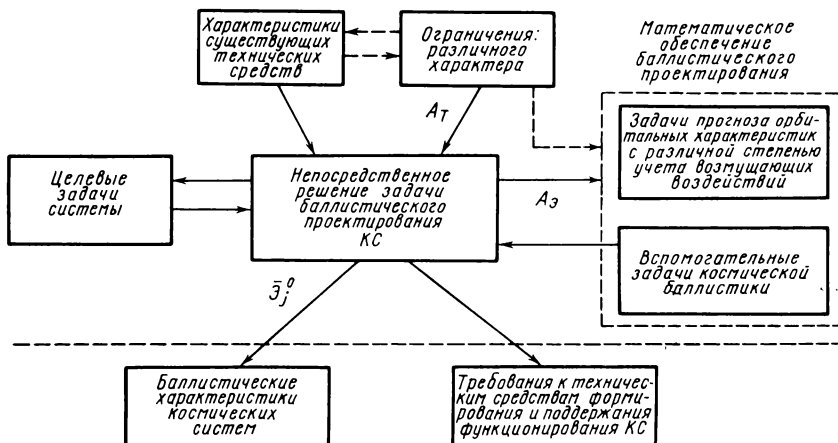


Рис. 1.14. Укрупненная схема баллистического проектирования

воздействий и оценка степени влияния орбитальной эволюции на качество решения целевых задач;

решения задачи уточнения орбитальных характеристик и закона управления с учетом орбитальной эволюции и оптимизации решения целевых задач;

решения задачи уточнения орбитальных характеристик и закона управления.

Таким образом, процесс системного баллистического проектирования можно представить в виде целенаправленной последовательности решений (т.е. как итерационный процесс) по выбору баллистических характеристик, начиная от их приближенных значений без учета основных возмущений и заканчивая поиском орбитальных параметров КА с учетом воздействия различного рода возмущающих факторов и наличия ограничений на условия полета и функционирования бортовых систем КА.

Операционное проектирование можно построить из некоторых частных компонент общей задачи баллистического проектирования. Операционное проектирование по сути представляет собой процесс баллистического сопровождения КА, в определенной степени адекватный реальным условиям полета космических аппаратов. Схема такого процесса представлена на рис. 1.15. На схеме  $\bar{\mathcal{E}}_j^Ф(t)$ ,  $\bar{\mathcal{E}}_j^Н(t)$  – соответственно фактические и номинальные параметры КА в произвольный момент времени  $t$ . Из схемы следует, что баллистическое сопровождение КА требует проведения измерений и их обработки, прогнозирования орбитальных пара-

метров, решения текущих задач по определению управляющих параметров для поддержания орбитальных характеристик пригодными для решения целевых задач.

Рассмотрим некоторые примеры постановки баллистического проектирования космических систем различного назначения.

Вначале рассмотрим примеры системного баллистического проектирования.

**Космическая система** с космическими аппаратами, совершающими встречу, включающая базовый КК на опорной (рабочей) орбите и транспортный КА, осуществляющий встречу.

Основные предпосылки.

1. Базовый КК осуществляет полет по опорной орбите с параметрами  $\bar{\mathcal{E}}_6(t)$  и в диапазоне высот

$$h_{ат} \leq h(t) \leq h_{рад},$$

где  $h_{ат}$  – нижняя граница, определяемая, например, атмосферным торможением;  $h_{рад}$  – верхняя граница, обусловленная естественными радиационными поясами Земли (как правило, это внутренний радиационный пояс);

2. Время активного функционирования базового КА ограничено

$$t_{\phi} \leq t'_{\phi},$$

где  $t'_{\phi}$  – предельно допустимый срок существования.

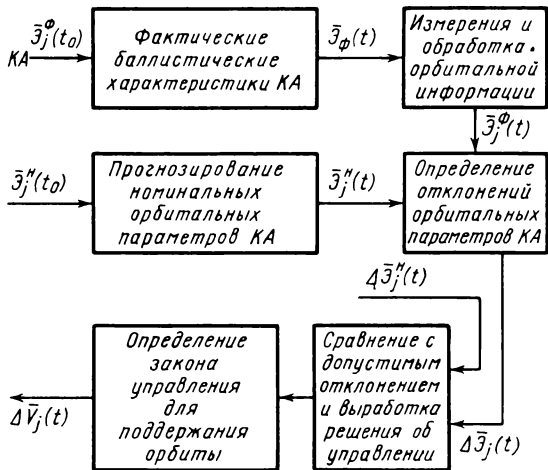


Рис. 1.15. Схема баллистического сопровождения космических аппаратов

$\Delta\bar{\mathcal{E}}_j(t)$  – допустимое отклонение орбиты



3. Известны закономерности управления орбитальным движением базового КК, т.е. известны как  $\Delta V_j$ , так и  $\Sigma \Delta V = \Sigma (\Delta V_j)$ .

4. Заданы либо выбраны типовые характеристики двигательных установок транспортного КК и известен суммарный запас характеристической скорости для осуществления встречи космических аппаратов.

Для системы определяемыми характеристиками будут следующие:

параметры опорной орбиты и корреляционная матрица вектора состояния транспортного КК  $[\bar{\Theta}_T(t), \|K_{\alpha\beta}\|]$ ;

схема дальнего наведения транспортного КК (компланарная, некопланарная, с фазированием или без фазирования) в район встречи и суммарные затраты энергии  $(\Sigma \Delta V_j)_{\text{дн}}$  на ее осуществление;

ожидаемое относительное положение КК и КА в конце участка дальнего наведения  $\Delta \bar{\Theta}_{\text{б.т}} = \Delta \bar{\Theta}_{\text{б.т}}(\bar{\Theta}_{\text{б.}}, \bar{\Theta}_{\text{т.}})$ ;

схема сближения, энергозатраты транспортного КА  $\Delta V_{\text{сбл}}$  и параметры относительного положения КК и КА на участке причаливания  $(r_{\text{сбл}}, \bar{V}_{\text{сбл}})$ .

Применительно к рассматриваемому примеру процесс баллистического проектирования может быть представлен в виде обобщенной схемы, приведенной на рис. 1.16.

**Космическая система**, включающая несколько космических аппаратов, организовано выполняющих целевые задачи, например непрерывное сослуживание, связь и т.п. заданных районов Земли.

**Задаваемые условия функционирования.** Будем считать, что обслуживание заданных на поверхности Земли пунктов осуществляется каждым КА на некотором интервале времени, называемом рабочей зоной (РЗ). Начало и конец РЗ являются функциями многих факторов: элементов орбиты, астрономо-баллистических условий, взаимного расположения космических аппаратов—пунктов обслуживания, связи, Солнца—КА, состояния бортовых систем и т.д.

Определим временной цикл (ВЦ) функционирования СС как интервал времени, границы которого совпадают с началом двух соседних рабочих зон одного и того же, например, первого КА (рис. 1.17). Временной интервал  $[a, e]$  функционирования СС можно покрыть упорядоченной последовательностью временных циклов, присвоив им индекс  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$ ) в дальнейшем для РЗ  $j$ -го КА на  $n$ -м временном цикле будем использовать обозначение  $(t_{\text{н.}}^n, t_{\text{к.}}^n)$ . Качество обслуживания заданных районов тем выше, чем меньше суммарная продолжительность  $H$  интервалов, свободных от обслуживания. Рассмотрим на  $n$ -м ВЦ две смежные РЗ, соответствующие  $j$ -му и  $(j + 1)$ -му КА. Возможны две ситуации: а)  $t_{\text{н.}}^n > t_{\text{к.}}^{n-1}$ ; б)  $t_{\text{н.}}^n \leq t_{\text{к.}}^{n-1}$ . В ситуации а) рабочие зоны раз-

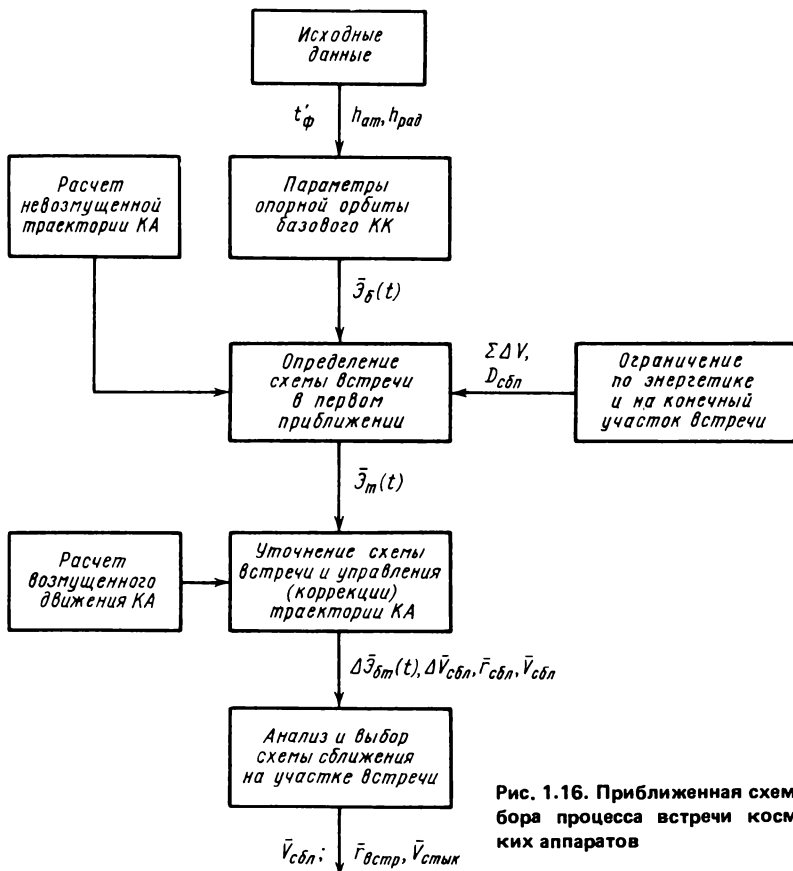
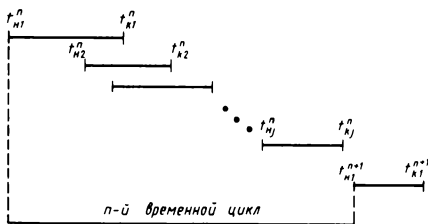


Рис. 1.16. Приближенная схема выбора процесса встречи космических аппаратов

Рис. 1.17. Временной цикл функционирования спутниковой системы



делены интервалом, свободным от обслуживания, продолжительность которого  $H_{j,j+1}^n$  равна

$$t_{н,j+1}^n - t_{кj}^n > 0;$$

в ситуации б этот интервал отсутствует и его продолжительность равна нулю. Таким образом, формально можно представить

$$H_{j,j+1}^n = \max(0, t_{н,j+1}^n - t_{кj}^n).$$

Следовательно, продолжительность интервалов, свободных от обслуживания на  $n$ -м ВЦ, определяется выражением

$$H^n = \sum_{j=1}^{\bar{j}-1} \max(0, t_{н,j+1}^n - t_{кj}^n) + \max(0, t_{н1}^{n+1} - t_{кj}^n), \quad (1.5.1)$$

а на заданном временном интервале

$$H = \sum_{n=1}^{\bar{n}} H^n = \sum_{j=1}^{\bar{j}-1} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \max(0, t_{н,j+1}^n - t_{кj}^n) + \sum_{n=1}^{\bar{n}} \max(0, t_{н1}^{n+1} - t_{кj}^n). \quad (1.5.2)$$

Если представить импульсы управления, реализуемые на  $n$ -м ВЦ для  $j$ -го КА через  $\Delta V_j^n$ , то величины  $t_{нj}^n$  и  $t_{кj}^n$  можно представить как некоторые функции от

$$a_j^0, e_j^0, i_j^0, \omega_j^0, \lambda_j^0, \Omega_j^0 \text{ и } \Delta V_j^n.$$

Следовательно, функция  $H$ , принимаемая в качестве функции цели при решении задачи баллистического проектирования, является в общем случае функцией от параметров

$$a_j^0, e_j^0, \dots, \Omega_j^0, \Delta V_j^n, j = 1, 2, \dots, \bar{j},$$

$$\text{т.е. } H = H(\bar{\Theta}_1^0, \bar{\Theta}_2^0, \dots, \bar{\Theta}_j^0; \bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_j), \quad (1.5.3)$$

где для краткости использованы обозначения

$$\bar{\Theta}_j^0 = \|a_j^0, e_j^0, i_j^0, \omega_j^0, \lambda_j^0, \Omega_j^0\|; \quad (1.5.4)$$

$$\bar{V}_j = \|\Delta V_j^1, V_j^2, \dots, \Delta V_j^{\bar{n}}\|.$$

Ограничения на орбитальные параметры, условия функционирования аппаратуры КА, условия связи запишем в общем виде

$$\bar{\Theta}_j^0 \in A_3, \quad (1.5.5)$$

где  $A_3$  – соответствующее допустимое множество.

Ограничения на запас рабочего тела (характеристической скорости) на борту каждого КА системы запишем в виде

$$\bar{V}_j \in A_V. \quad (1.5.6)$$

Таким образом, можно сформулировать задачу баллистического проектирования КС, состоящей из нескольких КА. Эта задача состоит в определении начальных векторов  $\bar{\Xi}_j^0$ , а следовательно, взаимного расположения орбит  $\Delta\bar{\Xi}$ , а также управляющего вектора  $\bar{V}_j$  для всех  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , минимизирующих функцию (1.5.3) при ограничениях (1.5.5), (1.5.6).

В качестве примера операции одного баллистического проектирования рассмотрим построение схемы наведения КА на участке сближения. Как правило, схема наведения строится такой, чтобы минимизировать конечный промах  $D_K$  при ограничениях на расход топлива ( $\Delta V^*$ ). Зачастую простую схему наведения не удается построить. Имеются факторы, заставляющие выполнить коррекцию траектории движения КА как можно раньше (требования сокращения энергозатрат), или факторы, заставляющие выполнить маневр как можно позже (разнесение во времени и пространстве траекторных измерений и обработка большого количества измерений для получения лучшей оценки орбитальных параметров).

В целом задача выбора величины корректирующих импульсов и моментов их приложения сложна, поскольку при выполнении одной коррекции необходимо принимать во внимание всю будущую схему наведения и наблюдения (измерений). В наземных условиях схему коррекции можно определить на основе уточненных реальных данных измерений в момент  $t_0$  и априорных оценок измерений в последующие моменты времени. Будем считать, что статистические характеристики ошибок исполнения коррекций известны. За показатель качества  $\Pi_j$ , подлежащий минимизации в любой момент времени  $t_j$ , можно принять ожидаемое значение суммы неопределенности  $Ne$  оценки траектории наведения непосредственно после последней коррекции (выполняемой в предварительно заданное конечное время  $t_K$ ) и квадрата ошибки, оставшейся нескорректированной в результате израсходования запаса топлива к моменту  $t_K$ , т.е.

$$\Pi_j = Ne[D_K + \Delta r_K^2], \quad (1.5.7)$$

где  $D_K$  – дисперсия конечной ошибки в определении траектории после коррекции в моменты времени  $t_j$  и  $t_K$ ;  $\Delta r_K$  – оценка промаха непосредственно после выполнения коррекции в момент времени  $t_K$ .

Таким образом, отыскиваются параметры  $V_K$ ,  $t_K$  и  $t$  измерений, при которых показатель качества  $\Pi_j$  принимает минимальное значение.

## ГЛАВА 2. ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ КА НА РАБОЧИЕ ОРБИТЫ

### 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫВЕДЕНИЯ КА

Выведение КА на рабочие орбиты может осуществляться двумя способами: прямым выводом КА ракетой-носителем и путем формирования конечных (рабочих) орбит с использованием дополнительных дозгонных импульсов (рис. 2.1,а,б). В отдельных источниках второй способ называют выведением с "дожогом" [22, 26].

Одной из основных задач баллистического проектирования процесса выведения КА является определение оптимальной траектории выведения. В общем случае движение РН происходит следующим образом.

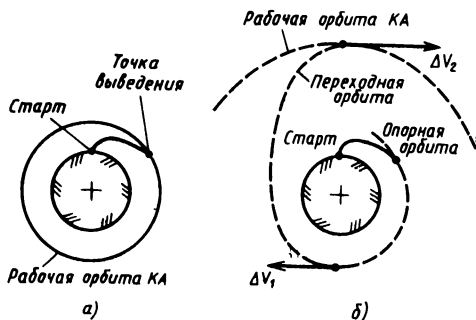
Старт РН, как правило, вертикален вследствие невысокой начальной тяговооруженности ( $n_T = P_{CT}/G_0 = 1,2 \dots 1,5$  [21, 26], где  $P_{CT}$  – стартовая тяга РН;  $G_0 = gm_0$ ,  $m_0$  – начальная масса РН;  $g$  – гравитационное ускорение на поверхности Земли). Вертикальный полет длится 10 ... 15 с, затем осуществляется относительно малое изменение угла атаки  $\alpha(t)$  ( $\alpha(t)$  – угол между вектором скорости и вектором тяги (см. рис. 1.4) и, следовательно, отклонение движения РН от вертикального. Закон изменения  $\alpha(t)$  на этом участке траектории может быть следующим [26]:

$$\alpha(t) = \alpha_m \sin^2 \frac{\pi(t - t_1)}{(t - t_1) + k(t_2 - t)}, \quad (2.1.1)$$

где  $(t_1, t_2)$  – моменты времени начала и конца изменения угла атаки;  $k$  – коэффициент;  $\alpha_m$  – минимальное значение угла  $\alpha(t)$ .

При дальнейшем движении в плотных слоях атмосферы необходимо стремиться к  $\alpha \rightarrow 0$ . Это определяется необходимостью ограничить воздействие аэродинамических моментов на ракету как для обеспечения прочности, так и для обеспечения требований к системе управления. На последующих участках траектории, где аэродинамическим сопротивлением можно пренебречь и где скоростной напор мал, угол атаки может быть отличным от нуля и принимать значения, соответствующие оптимизации энергозатрат на выведение. Когда система управления конструируется и весогабаритные параметры РН известны ориентировочно для оценочных расчетов траектории выведения, можно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения РН в скоростной системе

Рис. 2.1. Схемы выведения КА:  
 а — прямой вывод; б — выведение с догогом



координат (см. рис. 1.4).  
 Уравнения движения РН в  
 этом случае запишутся в  
 виде

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P_T}{m} \cos \alpha - X_a - \frac{\mu}{r^2} \sin \theta = f_1; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P_T}{mV} \sin \alpha + Y_a - \frac{\mu}{r^2 V} \cos \theta = f_2; \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta = f_3; \\ \dot{m} &= -\beta = f_4, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где  $X_a$  — сила аэродинамического сопротивления;  $Y_a$  — аэродинамическая подъемная сила;  $\alpha$  — угол атаки.

Для различных участков движения РН на величины  $\alpha(t)$ ,  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $\theta$  накладываются ограничения.

При известных характеристиках распределения ступеней РН и заданных ограничениях на параметры выведения задача выбора траектории выведения заключается в определении оптимального закона управления  $\alpha(t)$ , оптимизирующего либо расход энергии ( $\max G_K$ ), либо максимизирующих высоту выведения КА в случае прямого вывода.

Пути решения таких задач достаточно полно изложены в работах [22, 26, 31].

Положение плоскости орбиты (наклонение  $i$  и долгота восходящего узла  $\Omega$ ) в существенной мере определяется азимутом пус-

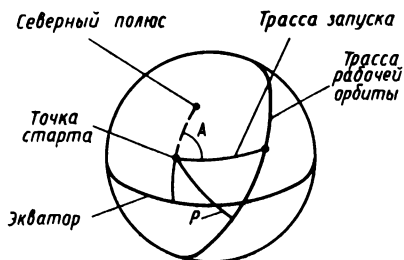


Рис. 2.2. К определению азимута пуска:  
 $\rho$  — кратчайшая угловая дальность точки старта до плоскости рабочей орбиты

ка ( $A$ ) и временем старта. Максимальные наклонения орбита будет иметь при  $A = 0^\circ$  или  $A = 180^\circ$  (полярные орбиты, рис. 2.2).

Известное соотношение, связывающее наклонение орбиты, азимут запуска и широту точки старта ( $\varphi_{СТ}$ ), имеет вид

$$\cos i = \sin A \cos \varphi_{СТ}. \quad (2.1.3)$$

Из (2.1.3) следует, что минимальные наклонения примерно равны широте точки старта при  $A = 90^\circ$ . Различные наклонения орбиты при одном и том же значении  $A$  можно получить доворотами РН на активных участках движения.

## 2.2. ВЫВЕДЕНИЕ КА С ДОРАЗГОНОМ НА РАБОЧИЕ ОРБИТЫ

Вывод КА ракетой-носителем на опорную орбиту является промежуточным звеном в построении (формировании) рабочих орбит. Формирование рабочих орбит в большинстве своем связано с использованием доразгонных блоков для орбитальных маневров, а на заключительной стадии, как правило, необходимы коррекции для получения орбитальных параметров с заданной точностью.

Рассмотрим кратко возможные схемы формирования рабочих орбит с доразгоном ("дожогом"), считая, что спутник предварительно выведен на опорную орбиту. Анализ схем проведем в предположении импульсной интерпретации и отсутствии жестких ограничений на время формирования рабочих орбит КА.

В зависимости от расположения опорной и конечной орбит рассмотрим несколько основных схем.

1. Компланерная схема формирования околокруговых орбит. В рассматриваемом случае целесообразно использовать двухимпульсную схему перехода КА с опорной круговой (промежуточной) орбиты на конечную по эллипсу, касающуюся обеих круговых орбит в своих апсидальных точках (рис. 2.3). Для перехода с внутренней круговой орбиты с радиусом  $r_0$  на внешнюю с радиусом  $r_1$  первый разгонный импульс  $\Delta V_1$  переводит КА на эллиптическую орбиту с апогеем, совпадающим по высоте с конечной орбитой. В точке касания орбит прикладывается второй импульс  $\Delta V_2$ . Величины импульсов определяются по известным соотношениям

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left( \sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}} - 1 \right); \quad (2.2.1)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_0}{r_0 + r_1}} \right). \quad (2.2.2)$$

Рис. 2.3. Формирование околокруговых орбит:

а — двухимпульсная схема; б — схема с биэллиптическим переходом

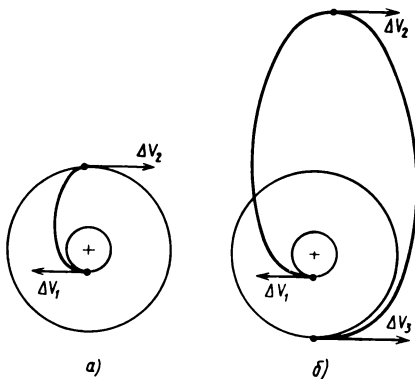
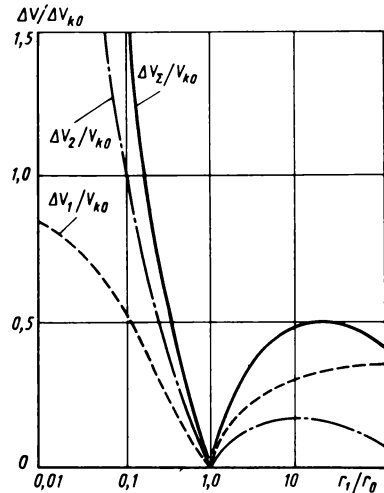


Рис. 2.4. Энергозатраты при двухимпульсном переходе



Среди двухимпульсных переходов между круговыми компланарными орбитами при незакрепленном времени перехода хомановский переход представляет собой глобально оптимальную схему для соотношений  $r_1/r_0 < 15,56$  [4]. На рис. 2.4 даны зависимости приращений скорости для отношений радиусов от 0,01 до 10. Из графиков следует, что переход с орбиты радиуса  $r_0$  на орбиту с  $k$  раз большим радиусом ( $k > 1$ ) всегда требует меньших энергетических затрат, чем переход на орбиту в соответствующее число раз меньшего радиуса ( $V_{K0}$  — скорость движения на орбите с радиусом  $r_0$ ).

В случае перехода на внешние орбиты ( $k > 1$ ) суммарная характеристическая скорость  $\Delta V_\Sigma$  при значениях  $k$ , близких к 10, достигает максимума, а затем с возрастанием  $k$  уменьшается. При соотношении  $r_1/r_0 = 15,16$  суммарная характеристическая скорость уменьшается по сравнению с хомановским при любом биэллиптическом переходе.

В таком случае КА первым импульсом переводится на полуэллипс с апогейным расстоянием, большим радиуса конечной орбиты. Вторым импульс  $\Delta V_2$  переводит КА из апогея первого полуэллипса на полуэллипс с расстоянием, равным радиусу конечной орбиты. Импульс  $\Delta V_3$  прикладывается при выходе на конечную орбиту. Для трехимпульсного биэллиптического перехода суммарная характеристическая скорость определяется выражением



$$\Delta V_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left[ \sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}} + \sqrt{\frac{2r_0 r_1}{r_a(r_a - r_1)}} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2r_0^2}{r_a(r_a + r_0)}} + \sqrt{\frac{2r_0 r_a}{r_1(r_a + r_1)}} - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} - 1 \right],$$

где  $r_a$  – расстояние от центра притяжения до апогея переходной орбиты.

Необходимо отметить, что такие биеллиптические переходы, как правило, занимают много времени при практически несущественной экономии в энергетике.

1. Схема формирования при переходе с опорной эллиптической на конечную круговую. В этом случае также целесообразно воспользоваться двухимпульсной схемой. Процесс поиска переходной и конечной орбит заключается в следующем. На эллиптической орбите выбирается произвольная точка, из которой формируется орбита перехода. Положение выбранной точки варьируется до получения минимальных суммарных энергетических затрат. Для двухимпульсного перехода из фиксированной точки с радиусом-вектором  $r_0$  на эллиптической орбите в точку на круговой орбите с радиусом  $r_1$  суммарная характеристическая скорость определяется выражением [4]:

$$\Delta V_{\Sigma} = \sqrt{\left[ V_{u0} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_1}} \frac{r_0}{r_1} \right]^2 + V_{r0}^2 -} \\ - \left( V_{u1} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_1}} \frac{r_1}{r_0} \right), \quad (2.2.3)$$

где  $V_{u0}$ ,  $V_{u1}$  – тангенциальные составляющие векторов скорости исходной и конечной орбит (здесь  $V_{u1} = V_{кр}$ );  $V_{r0}$  – радиальная составляющая вектора скорости исходной эллиптической орбиты.

Наиболее выгодным для двухимпульсной схемы является случай, когда переходная траектория связывает апогей опорной орбиты с круговой орбитой радиусом  $r_{кр1}$ . Полный требуемый импульс в этом случае определяется формулой

$$(\Delta V_{\Sigma})_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a + r_{кр1}} \frac{r_a}{r_{кр1}}} - V_{ua} - \\ - \sqrt{\frac{\mu}{r_a + r_{кр1}} \frac{r_{кр1}}{r_a}} - V_{кр1}. \quad (2.2.4)$$

Вариант, когда переходная траектория связывает перигей с конечной

круговой орбитой, является менее выгодным. Суммарная характеристическая скорость в этом случае определяется из выражения

$$\begin{aligned}
 (\Delta V_{\Sigma})_p &= V_{up} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p + r_{кр1}} \frac{r_p}{r_{кр1}}} + \\
 &+ V_{кр1} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p + r_{кр1}} \frac{r_{кр1}}{r_p}}, \quad (2.2.5)
 \end{aligned}$$

где  $r_p = r_{\Pi}$  – расстояние от центра притяжения до перицентра исходной орбиты.

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
 V_{крp} &= \sqrt{\frac{\mu}{r_{крp}}}; \quad V_{up} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_a + r_p} \frac{r_a}{r_p}}; \\
 V_{ua} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_a + r_p} \frac{r_p}{r_a}}, \quad (2.2.6)
 \end{aligned}$$

выражения для суммарной характеристической скорости (2.2.4), (2.2.5) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 (\Delta V_{\Sigma})_a &= \sqrt{\frac{\mu}{r_{кр1}}} \left[ \sqrt{\frac{r_{кр1}}{r_a}} \left( \sqrt{\frac{r_{кр1}}{r_a + r_{кр1}}} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \sqrt{\frac{2r_p}{r_a + r_p}} \right) + \sqrt{\frac{r_a}{r_a + r_{кр1}}} - 1 \right]; \quad (2.2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta V_{\Sigma})_p &= \sqrt{\frac{\mu}{r_{кр1}}} \left[ \sqrt{\frac{r_{кр1}}{r_p}} \left( \sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_p}} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \sqrt{\frac{r_{кр1}}{r_p + r_{кр1}}} \right) - \sqrt{\frac{r_p}{r_p + r_{кр1}}} + 1 \right]. \quad (2.2.8)
 \end{aligned}$$

Наиболее выгодной является траектория, связывающая апоцентр с круговой орбитой.

3. Формирование рабочих орбит с изменением ориентации плоскости относительно плоскости опорной орбиты, не изменяя ее формы и радиуса. Наиболее простой способ поворота плоскости орбиты заключается в приложении одного импульса скорости в узле начальной и конечной

орбит (рис. 2.5,а). Значение суммарного импульса  $\Delta V$  получим из треугольника скоростей (рис. 2.5,б) :

$$\Delta V^2 = V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1\cos\Delta\kappa, \quad (2.2.9)$$

где  $V_0, V_1$  – орбитальные скорости в точке узлов;  $\Delta\kappa$  – угол между плоскостями орбит.

Его значение можно определить, пользуясь формулой

$$\Delta\kappa = \arccos \frac{m_{310}m_{311} + m_{320}m_{321} + m_{330}m_{331}}{M_1M_2}, \quad (2.2.10)$$

где  $M_1 = \sqrt{m_{310}^2 + m_{320}^2 + m_{330}^2}$ ;

$$M_2 = \sqrt{m_{311}^2 + m_{321}^2 + m_{331}^2},$$

в свою очередь, значения  $m_{31k}, m_{32k}, m_{33k}$  ( $k = 0, 1$ ) определяются выражениями

$$m_{31k} = \sin\Omega_k \sin i_k; m_{32k} = -\cos\Omega_k \sin i_k; m_{33k} = \cos i_k.$$

В приведенных соотношениях принято  $k = 0$  для начальной орбиты,  $k = 1$  для конечной орбиты.

Для круговых орбит  $V_0 = V_1 = V_{кр}$ , следовательно,

$$\Delta V^2 = 2(1 - \cos\Delta\kappa)V_{кр}^2 \quad (2.2.11)$$

$$\text{или } \Delta V = 2\sin\frac{\Delta\kappa}{2} V_{кр}. \quad (2.2.12)$$

Наиболее распространенным является случай, когда требуется выполнить условия

$$\Omega_0 = \Omega_1; \Delta\kappa = \Delta i. \quad (2.2.13)$$

Из формулы (2.2.12) видно, что при  $\Delta i = 1,047$  рад ( $60^\circ$ ) для поворота плоскости орбиты требуется приращение скорости, равное местной круговой.

Очевидно, что маневр для изменения плоскости орбиты требует больших энергетических затрат. Анализ некомпланарных переходов

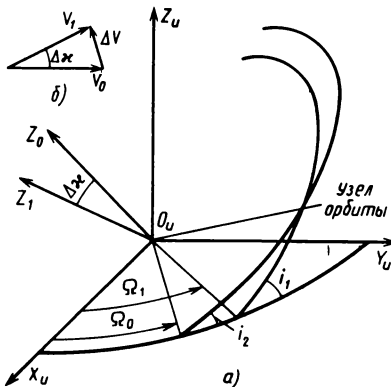


Рис. 2.5. Изменение ориентации плоскости орбиты

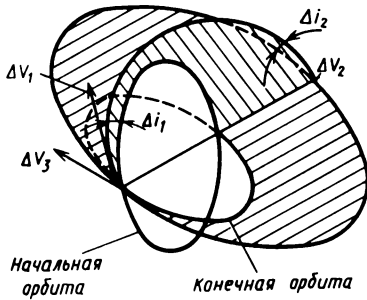


Рис. 2.6. Трехимпульсная схема выведения КА

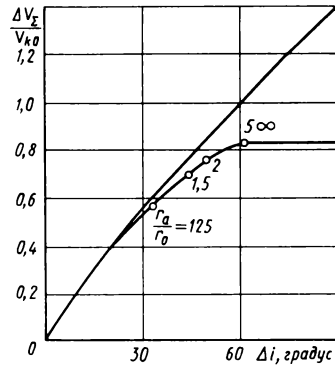


Рис. 2.7. График затрат характеристической скорости при трехимпульсной схеме выведения КА

дов показал, что при  $\Delta i \geq 0,68$  рад ( $38,94^\circ$ ) маневр изменения плоскости орбиты выгодно осуществлять при помощи нескольких импульсов [4, 14]. Экономичной является трехимпульсная программа с двумя последовательными поворотами плоскости орбиты. Первый импульс  $\Delta V_1$  приводит к повороту орбиты на угол  $\Delta i_1$  с одновременным изменением других элементов (рис. 2.6). Вторым импульс  $\Delta V_2$  поворачивает плоскость орбиты на угол  $\Delta i_2$ , импульс  $\Delta V_3$  корректирует элементы орбиты до требуемых конечных значений. Большая часть поворота плоскости орбиты должна приходиться на импульс, прикладываемый на внешней орбите, т.е.  $\Delta V_2$ . Угол же поворота  $\Delta i_1$ , как правило, не должен превышать  $0,104$  рад ( $6^\circ$ ). На рис. 2.7 приведен график затрат характеристической скорости при трехимпульсной схеме с радиусами  $r_0 = r_1 = r$ , когда изменение угла между орбитами распределено между двумя импульсами [4]. Там же для сравнения приведены затраты характеристической скорости при одноимпульсной схеме. Определенный интерес представляет случай, когда требуемый угол поворота плоскости орбиты составляет  $1,049$  рад ( $60, 158^\circ$ ). Здесь возможны два случая, которые приводят к одинаковому суммарному расходу энергии: трехимпульсная схема с конечным радиусом перехода и схема перелета через "бесконечность". При  $\Delta i > 1,049$  рад ( $60, 158^\circ$ ) теоретически поворот плоскости орбиты выгодно совершать в бесконечности при помощи бесконечно малого импульса. Поэтому в рассматриваемой области углов поворота величина  $\Delta V_\Sigma$  не зависит от значений  $\Delta i$ . Однако на практике переход через "бесконечность" не может быть реализован.

В общем случае при повороте плоскости орбиты при помощи нескольких импульсов можно записать

$$\Delta V_{\Sigma} = \sum_j \Delta V_j; \Delta i = \sum_j \Delta i_j. \quad (2.2.14)$$

Для минимизации  $\Delta V_{\Sigma}$  требуется обеспечить минимум функции

$$H = \sum_j \Delta V_j + \lambda_{\Delta} (\Delta i - \sum_j \Delta i_j), \quad (2.2.15)$$

где  $\lambda_{\Delta}$  – множитель Лагранжа.

Из (2.2.15) можно записать условие оптимального распределения импульсов в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta i_j} = \frac{\partial \Delta V_j}{\partial \Delta i_j} - \lambda_{\Delta} = 0, \quad (2.2.16)$$

после чего найти высоту апогея переходного эллипса, соответствующей минимуму  $\Delta V_{\Sigma}$ . Исследования, проведенные в ряде работ, приводят к выводу о том, что большинство оптимальных переходов двухимпульсные, хотя и существуют некоторые оптимальные трехимпульсные переходы.

4. Схема формирования стационарных орбит КА. Известно, что со стартовой позиции с широтой  $\varphi_{\text{ст}} \neq 0$  невозможно прямым выводом запустить спутник на геостационарную орбиту с требуемой географической долготой "висения". Поэтому на практике используют сложные схемы вывода КА на рабочие геостационарные орбиты. Рассмотрим вариант трехимпульсной схемы в предположении, что спутник предварительно выведен на квазикруговую орбиту радиусом  $r_0$ .

С исходной орбиты аппарат под воздействием импульса  $\Delta V_1$  переводится на эллиптическую орбиту с апогеем, равным высоте полета спутника на стационарной орбите. Величина импульса  $\Delta V_1$  определяется выражением

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} (\sqrt{1+e} - 1), \quad (2.2.17)$$

где  $e$  – эксцентриситет вновь получаемой эллиптической орбиты. Значение эксцентриситета определяется из соотношения

$$e = \frac{r'_c - r_0}{2a}, \quad (2.2.18)$$

где  $a = (r_0 + r'_c)/2$ ;  $r'_c$  – радиус-вектор стационарного КА. При использовании формул (2.2.17), (2.2.18) имеется в виду, что  $r_0 = r_p$  для переходной орбиты и  $r_a$  переходной орбиты равен радиусу стационарной, т.е.  $r_a =$

$= r'_c$ . Затем в точке апогея переходной орбиты прикладывается второй импульс для поворота ее плоскости от наклона  $i$  до  $i = 0^\circ$ . Считая, что при боковом маневре ориентация вектора тяги в пространстве остается постоянной в направлении разворота плоскости орбиты, а также учитывая условия, что скорость в апогее вновь получаемой орбиты не изменится (предполагается маневр выбора наклона без изменения конфигурации орбиты), возможно записать

$$V_b^- = V_b^+, \quad (2.2.19)$$

где знак "–" означает скорость в апогее орбиты до приложения импульса, знак "+" означает скорость в апогее после приложения импульса. Величина импульса, потребного для устранения наклона орбиты в соответствии с (2.2.12), (2.2.13), определяется при помощи выражения

$$\Delta V_2 = 2V_a \sin 0,5i_1, \quad (2.2.20)$$

так как в рассматриваемом случае  $\Delta k = i_1$ .

Период обращения  $T$  вновь полученной орбиты с апогеем, равным  $T_3$  высоте стационарного спутника, не равен звездным суткам ( $T_3$ ), вследствие чего происходит видимое смещение аппарата по долготе. Это явление используют для получения требуемой долготы "висения" КА. Величина смещения за один оборот КА определяется выражением

$$\Delta \lambda_T = \omega_3(T_3 - T), \quad (2.2.21)$$

где  $\omega_3$ ,  $T_3$  – соответственно угловая скорость вращения Земли и период обращения, равный звездным суткам.

При достижении спутником заданной географической долготы  $\lambda_T$  включается двигательная установка для реализации третьего импульса  $\Delta V_3$  и окончательной постановки КА на требуемой долготе "висения". Величина импульса, направленного на трансверсали к траектории спутника в апогее орбиты, определяется из выражения

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}(1 - \sqrt{1 - e}), \quad (2.2.22)$$

где  $r_c$  – радиус стационарной орбиты.

Здесь были рассмотрены процессы формирования рабочих орбит в предположении импульсной реализации изменений вектора скорости КА. Однако уже в процессе баллистического проектирования необходимо в той или иной мере учитывать реальные характеристики двигательных установок разгонных блоков (или непосредственно космических аппаратов) и их влияние на точность формирования рабочих орбит. В противном случае возможны существенные просчеты в оценке точности вывода

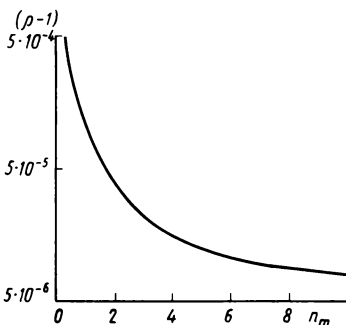
КА на рабочие орбиты и, как следствие, дополнительные затраты энергии на последующие коррекции орбит. Прежде всего при баллистическом проектировании необходимо обратить внимание проектантов на оценку влияния протяженности исполнения импульса скорости  $\Delta V$ . Величина протяженности в первом приближении может быть рассчитана по формуле

$$t_{\text{д}} = \frac{m}{\dot{m}} \left( 1 - \exp \frac{\Delta V}{C_{\text{и}}} \right), \quad (2.2.23)$$

где  $m$ ,  $\dot{m}$ ,  $C_{\text{и}}$  — соответственно масса КА, скорость изменения массы КА, скорость истечения продуктов сгорания.

Различные уровни тяги  $n_{\text{T}} = P_{\text{T}}/G_{\text{КА}}$  (здесь  $G_{\text{КА}}$  — вес КА;  $P_{\text{T}}$  — тяга двигательной установки КА), а следовательно, и различные протяженности времени исполнения приращения скорости приводят к отличным друг от друга перелетным и конечным орбитам при одинаковых начальных координатах КА. Для примера на рис. 2.8 приведена характеристика относительного радиального смещения  $(\rho - 1)$  в конце активного участка в зависимости от уровня тяги ( $\rho = r/r_0$ ;  $r$  — радиус-вектор КА в конце активного участка;  $r_0$  — начальный радиус-вектор).

Данные приведены для случая перехода КА с промежуточной орбиты высотой 550 км на конечную компланарную орбиту с высотой  $h_1 = 3700$  км по двухимпульсной схеме (хомановский переход). При этом первый переходной импульс  $\Delta V_1 = 673$  м/с и элементы переходной орбиты:  $e = 0,185319$ ,  $p = 8212,03$  км. Скорость истечения продуктов сгорания  $C_{\text{и}}$  принималась равной  $\sim 3048$  м/с. Из рисунка следует, что отклонения, обусловленные протяженностью исполнения импульса, могут иметь недопустимые значения. Поэтому уже в процессе проектирования необходимо предусмотреть мероприятия по устранению или сокращению влияния протяженности исполнения расчетных приращений импульсов



скорости на точность получения конечных параметров орбит. Для этого можно использовать программы управления с переменной ориентацией вектора тяги либо применять дополнительные мероприятия при использовании программ управления с постоянной ориентацией вектора тяги. Вместе с тем следует иметь в виду, что использование прог-

Рис. 2.8. Кривая влияния уровня тяги на радиальное смещение

рамм управления с переменной ориентацией вектора тяги, как правило, связано с большими динамическими ошибками системы ориентации, обусловленными непрерывной обработкой расчетных углов разворота КА или двигательной установки. Помимо этого реализация программ управления с переменной ориентацией требует достаточно сложного математического аппарата [4, 17]. Поэтому на практике наибольшее распространение получили программы управления с постоянной ориентацией вектора тяги на активных участках движения КА. Существуют достаточно простые методы компенсации влияния протяженности исполнения импульса  $t_{\text{д}}$ . Наиболее простой путь состоит в симметричном разнесении активного участка относительно расчетной точки [4]. Более эффективным способом повышения точности обработки приращения скорости КА является использование программ управления с несимметричным разнесением активного участка относительно расчетной точки приложения импульса [4, 24]. Время включения двигательной установки сдвигается на величину  $\Delta t = t_{\text{ц}} - t_0$ . Значение  $t_{\text{ц}}$  соответствует координате центра тяжести профиля ускорения КА, рассматриваемого как тело переменной массы с ускорением, равным

$$U(t) = \frac{P_{\text{T}}}{m_0 - \dot{m}t}; \quad t_0 \leq t \leq t_{\text{д}}, \quad (2.2.24)$$

где  $t_{\text{д}} = \frac{m}{\dot{m}} \left(1 - \exp - \frac{\Delta V}{C_{\text{и}}}\right)$ ;  $\Delta V$  – расчетный импульс скорости;  $\dot{m}$  – секундный массовый расход;  $m_0$  – начальная масса КА.

Значение  $t_{\text{ц}}$  определяется из зависимости

$$t_{\text{ц}} = \frac{\int_0^{t_{\text{д}}} t \frac{P_{\text{T}}}{m_0 - \dot{m}t} dt}{\int_0^{t_{\text{д}}} \frac{P_{\text{T}}}{m_0 - \dot{m}t} dt} \quad (2.2.25)$$

или после несложных преобразований (2.2.25)

$$t_{\text{ц}} = \frac{t_{\text{д}}}{\ln \frac{m_0 - \dot{m}t_{\text{д}}}{m_0}} + \frac{m_0}{\dot{m}}. \quad (2.2.26)$$



### 2.3. ВЫВЕДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ КА С ПОДЪЕМНОЙ СИЛОЙ В АТМОСФЕРЕ ПЛАНЕТ

Непрерывный рост запусков космических аппаратов различного назначения и выполнение ими широкого спектра операций в космосе поставили на повестку дня вопросы, связанные с выводением КА на орбиты существенно различных классов.

Кроме того, большие стоимости запусков невозвращаемых КА также ставят вопросы с необходимости разработки и создания КА много-разового применения. Наряду с перечисленным достаточно остро встает вопрос об использовании торможения в атмосфере планет для осуществления энергоемких маневров по изменению ориентации орбит КА в пространстве.

В последние годы за рубежом обращено внимание на проектирование и создание космических аппаратов, обладающих подъемной силой в атмосфере планет. Здесь мы рассмотрим два вопроса. Первый связан с использованием крылатых разгонных ступеней многоразового транспортного корабля (МТК), обладающего подъемной силой для выведения и посадки аппарата. Второй связан с использованием подъемной силы КА для осуществления маневра в атмосфере планет. Соответствующие схемы приведены на рис. 2.9,а,б [4, 26].

Вначале схематически рассмотрим применение крылатых разгонных конструкций для выведения МТК (рис. 2.9,а). В этом случае 1 – момент старта; 1–2 – работа первой ступени; 2–3 – работа второй ступени; 2 – момент сброса твердотопливного ускорителя первой ступени; 3 – сброс боковых отсеков второй ступени; 4 – рабочая орбита спутника; 5 – торможение МТК перед спуском в атмосферу; 7–8 – заход на посадку; 8 – посадка.

Для крылатого разгонного аппарата возможны как горизонтальный

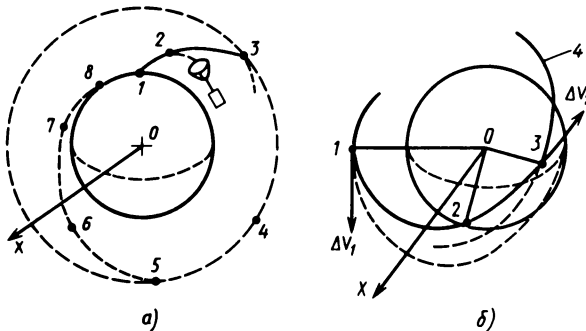


Рис. 2.9. Использование подъемной силы КА

(самолетный старт) с применением специальных ускорителей, так и вертикальный старт с использованием ракетных ускорителей\*.

В перспективных космических операциях значительное внимание уделяется исследованию схем управления КА, использующих подъемную силу, возникающую при их движении в атмосфере [4, 26].

Сила аэродинамического сопротивления, возникающая при движении КА в атмосфере, направлена противоположно движению аппарата и определяется известной зависимостью

$$R_A = c_R S_M \rho \frac{V^2}{2}, \quad (2.3.1)$$

где  $c_R$  — коэффициент аэродинамического сопротивления;  $S_M$  — площадь миделевого сечения КА (перпендикулярная вектору  $V$ );  $V$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность атмосферы.

Реально управление КА с помощью атмосферы возможно начиная с высот, для которых длина свободного пробега молекул меньше размера тела КА, т.е. когда атмосферу условно можно считать непрерывной средой. Для атмосферы Земли на высотах  $\sim 120$  км средняя длина свободного пробега молекул воздуха составляет около 0,3 м, а на высотах  $\sim 240$  км соответственно  $\sim 90$  м [4].

При движении в атмосфере значение аэродинамической силы определяется формой КА, его ориентацией относительно вектора скорости и плотностью атмосферы. Положение КА относительно вектора скорости  $V$  определяется двумя углами: углом атаки  $\alpha_a$  и углом скольжения  $\beta_a$  (рис. 2.10). Эти углы определяют положение вектора скорости относительно связанной системы координат  $OXYZ$ . Проекцию полной силы  $R_A$  на направление проекции вектора  $V$  на плоскость  $OXY$  обозначим  $R_{xa}$ . Проекцию  $R_A$  на плоскость  $O'XY$ , нормальную к  $R_{xa}$ , называют подъемной силой  $R_{ya}$  и проекцию  $R_A$  на ось  $OZ$  — боковой силой  $R_{za}$ . Значения указанных проекций полной аэродинамической силы запишем в виде

$$R_{ka} = c_{Rk} S \frac{\rho V^2}{2}; \quad k = X, Y, Z, \quad (2.3.2)$$

где  $c_{ax}$  — коэффициенты сопротивления.

Для управления траекторией необходимо использовать боковую  $R_{za}$  или подъемную  $R_{ya}$  силы. Соотношение между торможением и изменением траектории зависит от отношений  $R_{za}/R_{xa}$  и  $R_{ya}/R_{xa}$ . Управление осуществляется изменением углов  $\alpha_a$  и  $\beta_a$ . При выборе схемы маневра в атмосфере зачастую удобно вместо углов атаки и скольжения рас-

\*Космические аппараты. Под ред. К.П. Феоктистова. М.: Воениздат, 1983. 319 с.

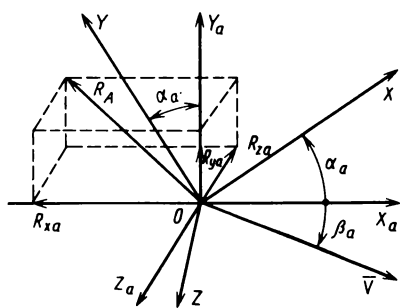


Рис. 2.10. Аэродинамические силы, действующие на КА:

$OX_aY_aZ_a$  — скоростная система координат ( $OX_a$  совпадает с направлением проекции  $\vec{V}$  на плоскость  $OXY$ )

считать эквивалентный им "скоростной угол крена"  $\gamma_a$ , определяемый как угол между оскулирующей плоскостью ( $r, \vec{V}$ ) и плоскостью симметрии КА. В этом случае вектор полной аэродинамической силы

$R_A$  можно разложить на силу сопротивления  $\vec{R}_{cx}$ , направленную противоположно вектору скорости, и подъемную силу  $\vec{R}_{cy}$ , нормальную к  $R_{cx}$ . По аналогии с (2.3.2) запишем

$$\vec{R}_{cx} = c_{xa} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad \vec{R}_{cy} = c_{ya} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2.3.3)$$

где  $c_{xa}, c_{ya}$  — коэффициенты лобового сопротивления и аэродинамической подъемной силы соответственно. Отношение  $c_{ya}/c_{xa}$  определяет аэродинамическое качество.

КА с подъемной силой могут совершать два вида управляемых маневров: маневр изменения плоскости орбиты (синергический маневр), маневр при посадке на поверхность планеты. На рис. 2.9,б приведена схема синергического маневра для околоземных орбит. В точке 1 включается двигательная установка и КА под воздействием тормозного импульса  $\Delta V_1$  переходит на эллиптическую орбиту с перигелием, лежащим в плотных слоях атмосферы. На участке 2–3 осуществляется изменение плоскости орбиты за счет боковой составляющей подъемной силы. Одновременно в точке 3 включается двигательная установка (импульс  $\Delta V_2$ ) для перевода КА на орбиту 4 с заданной высотой [4].

Методы управления полетом КА с подъемной силой можно разделить на две группы по характеру входной информации: методы, использующие информацию об изменении фазовых координат, и методы, использующие информацию о режиме полета КА (температура КА, скоростной напор, и т.п.). Последнюю группу методов целесообразно применять для управления траекториями снижения КА при их посадке.

Рассмотрим кратко примеры решения задач управления КА с подъемной силой, без учета ограничений связанных с уносом частиц поверхности КА под влиянием нагрева и скоростного напора и т.п.

**Маневр изменения плоскости орбиты.** Движение КА рассматривается для случая, когда осуществляется комбинированное управление с помощью подъемной силы и двигательной установки.

В момент времени  $t$  состояние КА определяется векторами положения  $\vec{r}(t)$ , скорости  $\vec{V}(t)$  и текущей массой  $m(t)$ .

Управляющий вектор тяги находится внутри сферы с центром в точке  $O'$  и радиусом, равным  $P_{T\max}$ . Примем для тяги двигательной установки ограничение (рис. 2.11)

$$0 \leq P_T \leq (P_T)_{\max}. \quad (2.3.4)$$

Для коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$  и угла крена  $\gamma_a$  имеются ограничения

$$0 \leq c_{ya} \leq (c_{ya})_{\max}; \quad (2.3.5)$$

$$0 \leq |\gamma_a| \leq |\gamma_a|_{\max}. \quad (2.3.6)$$

Аэродинамическую силу можно разложить на силу сопротивления  $\vec{R}_{cx}$ , противоположно направленную вектору  $\vec{V}$ , и подъемную силу  $\vec{R}_{cy}$ . Зависимость между коэффициентами  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$ , определяющими перечисленные силы, характеризуется полярой сопротивления

$$c_{xa} \stackrel{\text{def}}{=} c_{xa}(c_{ya}, V, \vec{r}). \quad (2.3.7)$$

На рис. 2.12 приведена для примера характеристика аэродинамической поляры сопротивления для соотношения  $c_{xa} = c_{xa}^0 + kc_{ya}^n$  ( $k$  – коэффициент).

Вектор аэродинамической силы  $\vec{R}_A$  можно охарактеризовать пространством управления  $U_a$  (см. рис. 2.11).

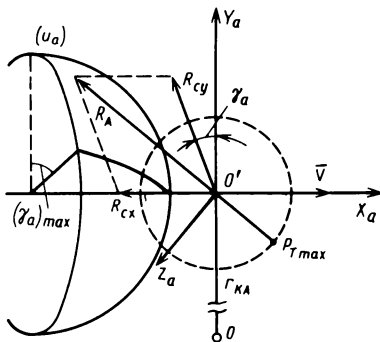


Рис. 2.11. Пространство управлений КА с подъемной силой

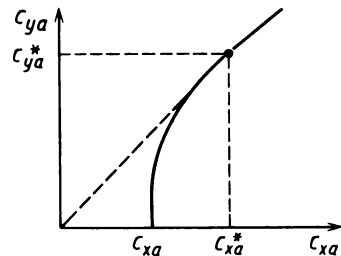


Рис. 2.12. Аэродинамическая полярa сопротивления

Движение КА с подъемной силой описывается системой уравнений

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}, \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{(\bar{P}_T + \bar{R}_A)}{m} + \bar{g}(\bar{r}, t), \quad (2.3.8)$$

где  $\bar{g}(\bar{r}, t)$  – ускорение силы тяжести.

Задача оптимального управления движением КА в рассматриваемом пространстве заключается в поиске управлений  $p_T(t)$  и  $\bar{R}_A(t)$ , обеспечивающих оптимизацию какого-либо обобщенного параметра, например минимизацию расхода топлива. Для такого примера введем дополнительное уравнение, характеризующее изменение текущей массы аппарата

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{P_T}{C_{и}}, \quad (2.3.9)$$

где  $C_{и}$  – скорость истечения продуктов сгорания двигательной установки КА. Начальные и конечные значения фазовых координат ( $t_0, \bar{r}_0, \bar{V}_0, t_K, \bar{r}_K, \bar{V}_K$ ) считаем заданными.

Для определения оптимальных управлений воспользуемся принципом максимума. С учетом уравнений (2.3.8), (2.3.9) гамильтониан  $H$  запишется в виде

$$H = - (p_m \frac{P_T}{C_{и}}) + \bar{P}_r \bar{V} + \bar{p}_V (\bar{p}_T + \bar{R}_A) / m + \bar{p}_V \bar{g}(\bar{r}, t). \quad (2.3.10)$$

Элементы  $\bar{p}_m, \bar{p}_r, \bar{p}_V$  определяются из системы сопряженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_m}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial m}, \quad \frac{\partial p_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial p_V}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial V}. \quad (2.3.11)$$

Для поиска оптимального управления необходимо решать совместно уравнения (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) при заданных граничных условиях в моменты времени  $t_0, t_K$ , при этом функция  $H$  должна максимизироваться путем выбора соответствующих значений управляющих функций  $\bar{P}_T, \bar{R}_A$ . Поскольку управление тягой не зависит от аэродинамической силы, то вначале максимизируется гамильтониан  $H$  по тяге  $P_T$ . Для максимизации скалярного произведения векторов  $p_V$  и  $p_T$  необходимо, чтобы они были коллинеарны. Следовательно, при включенной двигательной установке тяга должна быть направлена вдоль вектора  $\bar{p}_V$  и

$$\max(\bar{P}_V, \bar{P}_T) = p_V P_T. \quad (2.3.12)$$

Далее гамильтониан перепишем в виде

$$H = \bar{p}_r \bar{V} + \bar{p}_V [\bar{g}(\bar{r}, t) + (\frac{1}{m}) \bar{R}_A] + (P_T m) [p_V - (mp_m/C)]. \quad (2.3.13)$$

Из (2.3.13) следует функция переключения

$$\Pi = p_V - (mp_m/C). \quad (2.3.14)$$

Если  $\Pi > 0$ , то  $P_T = P_{T\max}$  (участок разгона), если  $\Pi < 0$ , то  $P_T = 0$  (пассивный участок). Условие  $\Pi = 0$  (особая точка) определяет точку соединения различных типов оптимальных участков траектории.

Следующим шагом является рассмотрение выбора аэродинамической силы  $R_A$ . Максимальное значение функции  $H$  можно получить, поместив конец вектора  $\bar{R}_A$  в точку касания плоскости, нормальной вектору  $\bar{p}_V$ , с поверхностью  $U_a$  (рис. 2.13). Чтобы найти эту точку, рассмотрим векторы  $\bar{V}$  и  $\bar{p}_V$ . Они образуют плоскость, которая пересекает поверхность  $U_a$  по меридиану, представляющему собой полярю сопротивления, определяемую соотношением (2.3.7). Угол между векторами  $\bar{V}$  и  $\bar{p}_V$  обозначим через  $\epsilon_a$ . Этот же угол равен также углу между вектором  $\bar{V}$  и направлением тяги, найденным из условия оптимальности. Ввиду того, что ось  $Y_a$  перпендикулярна вектору скорости  $\bar{V}$ , прямая касательная к полярю сопротивления и нормальная вектору  $\bar{p}_V$ , образует с осью  $Y_a$  также угол  $\epsilon_a$ . Из геометрических соотношений следует

$$\operatorname{tg} \epsilon_a = \partial R_{cx} / \partial R_{cy}. \quad (2.3.15)$$

Таким образом, закон оптимального управления подъемной силой определяется уравнением (2.3.15).

Из геометрических соотношений (см. рис. 2.13) также следует, что векторы  $\bar{p}_V$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{R}_A$  лежат в одной плоскости. Следовательно, справедливо соотношение

$$(\bar{V} \times \bar{p}_V) \bar{R}_A = 0. \quad (2.3.16)$$

Уравнения (2.3.15) и (2.3.16) совместно определяют оптимальные программы управления подъемной силой и креном, когда на аэродинамические силы не накладываются ограничения. Рассмотрим теперь случай, когда на управление аэродинамической силой наложены ограничения вида (2.3.5), (2.3.6) и на угол  $\epsilon_a$  также наложено ограничение

$$\epsilon_a \leq (\epsilon_a)_{\max}, \quad (2.3.17)$$

где  $(\epsilon_a)_{\max}$  — угол между касательной в точке максимального подъемной силы и направлением подъемной силы.

В данном случае оптимальная программа управления подъемной силой заменится соотношением

$$c_{ya} = (c_{ya})_{\max}. \quad (2.3.18)$$

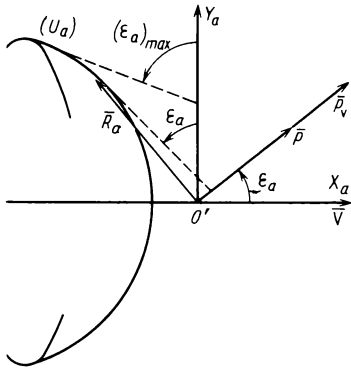


Рис. 2.13. К оптимальному управлению подъемной силой

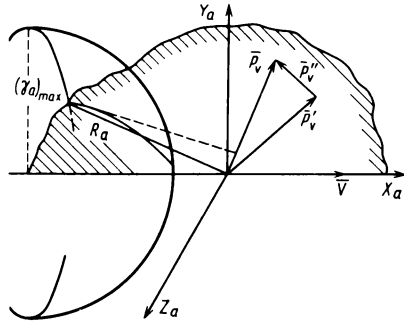


Рис. 2.14. Подъемная сила при максимальном угле крана

Если одновременно выполняется ограничение (2.3.6), то конец вектора  $\bar{R}_A$  следует выбирать на поляре сопротивления, что соответствует линии пересечения плоскости  $(\gamma_a)_{\max}$  и поверхности  $(U_a)$ . Соотношение для оптимального угла крана в этом случае можно заменить уравнением (рис. 2.14):

$$(\gamma_a)_{\text{опт}} = (\gamma_a)_{\max}. \quad (2.3.19)$$

Если обозначить проекцию вектора  $\bar{p}_V$  на плоскость  $(\gamma_a)_{\max}$  через  $\bar{p}'_V$ , то можно записать

$$\bar{p}_V = \bar{p}'_V + \bar{p}''_V, \quad (2.3.20)$$

где  $\bar{p}''_V$  — составляющая вектора  $\bar{p}_V$ , перпендикулярная плоскости, в которой находится вектор оптимальной аэродинамической силы. Отсюда

$$\bar{p}_V \bar{R}_A = \bar{p}'_V \bar{R}_A. \quad (2.3.21)$$

Из (2.3.21) следует, что выражение (2.3.19), отражающее процесс оптимального управления подъемной силой, может быть заменено законом

$$\text{tg} \epsilon'_a = \partial R_{cx} / \partial R_{cy}, \quad (2.3.22)$$

где  $\epsilon'_a$  — угол между векторами  $\bar{V}$  и  $\bar{p}'_V$  (проекцией вектора  $\bar{p}_V$  на плоскость  $(\gamma_a)_{\max}$ ).

Использование подъемной силы для изменения плоскости орбиты позволяет получить значительный выигрыш в затратах характеристической скорости. На рис. 2.15 приводятся сравнительные затраты характеристической скорости на изменение угла наклона плоскости круго-

Рис. 2.15. Сравнительные энергозатраты:

1 — одноимпульсный маневр при помощи двигательной установки; 2 — энергетический маневр КА ( $C_{ya}/C_{xa} = 2$ )

вой орбиты высотой 556 км [4]. Суммарные затраты  $\Sigma\Delta V$  при синергическом маневре складываются из трех импульсов скорости, требуемых для спуска, подъема и восстановления орбиты.

Управление в верхней атмосфере с учетом режима полета. Рассмотрим пример управляемого движения КА для случая, когда осуществляется управляемое движение КА на высоте, при которой существенно сказывается тормозящее воздействие атмосферы, например в случае синергического маневра, когда происходит непосредственное изменение плоскости орбиты, либо в случае посадки космического аппарата (в первом варианте температурные ограничения могут являться одновременно и ограничениями, которые необходимо иметь в виду при решении оптимизационной задачи управляемого движения). Рассмотрим конкретно случай, когда КА движется с понижением высоты. Программа изменения угла атаки в данном случае рассчитывается заранее и является функцией высоты полета и скорости

$$\alpha(t) = \alpha(t, h, \bar{V}). \quad (2.3.23)$$

Для реализации такой программы требуется система датчиков, измеряющая  $h$  и  $\bar{V}$ , и вычислительное устройство, вырабатывающее  $\alpha(t) = \alpha(t, h, \bar{V})$ . Однако такая система чувствительна к колебаниям плотности атмосферы. Для устранения неучтенных возмущений можно использовать систему регулирования температуры  $t_{КА}$  обшивки КА. Отклонение регулируемой величины от требуемой запишем в виде

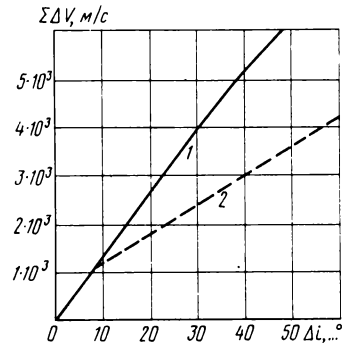
$$\Delta t_{КА} = t_{КА} - t_{КА}^H, \quad (2.3.24)$$

где  $t_{КА}^H$  — номинальное значение температуры обшивки КА.

Как правило, значения  $t_{КА}$  и  $\dot{t}_{КА}$  можно измерить достаточно точно в каждый момент времени. Для получения достоверных сведений о температуре на поверхности аппарата целесообразно размещать датчики температуры в нескольких точках. Закон регулирования угла атаки может быть выбран в виде

$$\alpha(t) = \alpha(h, \bar{V}) + k_t \Delta t_{КА} + k'_t \dot{\Delta t}_{КА},$$

здесь  $k_t, k'_t$  — коэффициенты регулирования.





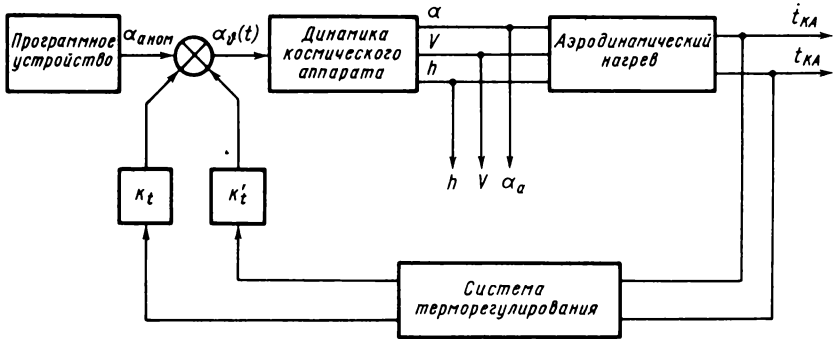


Рис. 2.16. Схема регулирования температуры корпуса КА

Схема системы регулирования полетом КА с подъемной силой в атмосфере приведена на рис. 2.16, здесь регулирующим параметром является угол атаки  $\alpha(t)$ .

## 2.4. К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ РАБОЧИХ ОРБИТ КА

В процессе баллистического проектирования КС при оценке схемы и построения рабочих орбит КА важным с практической точки зрения является вопрос оценки точности их формирования. Это можно осуществить двумя способами: приближенной оценкой с использованием аналитических соотношений и статистическим моделированием.

В методическом плане рассмотрим процесс оценки точности построения рабочих орбит КА для случая формирования орбит с "доразгоном".

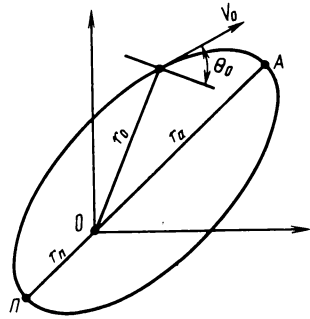
Приближенное определение отклонений. Задача ставится в виде: определить отклонения орбитальных параметров  $\Delta \bar{\mathcal{E}}$  в зависимости от известных ошибок  $\Delta \bar{r}_0, \Delta \bar{V}_0$  в момент  $t_0$  (последние могут быть следствием процесса выведения КА ракетой-носителем на опорную начальную орбиту) и может быть решена как задача определения влияния изменения начальных условий движения на изменение элементов орбиты. Подход к ее решению изложен в ряде работ [17, 21, 34]. Наиболее основополагающие результаты были получены П.Е. Эльясбергом [34]. В этих публикациях с приемлемой для практики точностью решение предлагается осуществить в два этапа: вначале рассмотреть задачу определения отклонений в плоскости орбиты (предполагая неизменным положение плоскости), затем рассмотреть изменение плоскости орбиты.

Рассмотрим в методическом плане подход к решению сформулиро-

Рис. 2.17. Полярная система координат

ванной задачи и ограничимся рассмотрением примера определения отклонений в плоскости орбиты.

Движение КА рассмотрим в полярной системе координат (рис. 2.17), где угол  $\theta$  — угол между вектором скорости и местным горизонтом. Для примера рассмотрим отклонения элементов  $a$ ,  $T$ ,  $r_{\Pi}$ ,  $r_a$ . Зависимость исследуемых элементов от начальных значений  $q_0 = r_0, V_0, \theta_0$  можно представить в виде  $\bar{\Xi}(a, \dots, r_a) = q(r_0, V_0, \theta_0)$ . Для определения изменения элементов  $\bar{\Xi}$  в зависимости от начальных отклонений  $q$  можно воспользоваться вариациями  $\Delta\bar{\Xi}$ ,  $\Delta q_0$ , считая их достаточно малыми. В этом случае с точностью до малых высшего порядка справедливы соотношения



$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial a}{\partial V_0} \Delta V + \frac{\partial a}{\partial \theta_0} \Delta \theta_0;$$

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial T}{\partial V_0} \Delta V + \frac{\partial T}{\partial \theta_0} \Delta \theta_0;$$

$$\Delta r_{\Pi} = \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial V_0} \Delta V + \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial \theta_0} \Delta \theta_0;$$

$$\Delta r_a = \frac{\partial r_a}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial r_a}{\partial V_0} \Delta V + \frac{\partial r_a}{\partial \theta_0} \Delta \theta_0.$$

Для нахождения производных  $\frac{\partial a}{\partial r_0}, \dots, \frac{\partial r_a}{\partial \theta_0}$  используются известные соотношения  $a = a(r, V, \theta_0), \dots, r_a = r_a(r, V, \theta_0)$  [17, 34]. Параметры  $a$  и  $T$  связаны соотношением  $T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ . Зависимость между вариациями  $\Delta a$  и  $\Delta T$  имеет вид

$$\Delta T = \frac{3}{2} \frac{T}{a} \Delta a. \quad (2.4.1)$$

Из выражений для большой полуоси

$$a = \frac{r_0}{2 - k_0}, \quad k_0 = \frac{r_0 V_0^2}{\mu} \quad (2.4.2)$$

(для круговых орбит  $k_0 = 1$ ) следует, что элементы  $a$  и  $T$  зависят только от величин  $r_0$  и от  $V_0$  и не зависят от угла  $\theta_0$ . Следовательно, вариации  $\frac{\partial a}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ . Выражения для производных  $\frac{\partial a}{\partial r_0}$   $\frac{\partial T}{\partial V_0}$  могут быть получены с использованием известных соотношений между элементами орбиты и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial r_0} &= \frac{2}{(2 - k_0)^2}, \quad \frac{\partial a}{\partial V_0} = \frac{2k_0}{(2 - k_0)} \frac{a}{V_0}; \\ \frac{\partial T}{\partial r_0} &= \frac{3}{(2 - k_0)^2} \frac{T}{a}, \quad \frac{\partial T}{\partial V_0} = \frac{3k_0}{(2 - k_0)} \frac{T}{V_0}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Выражение для  $k_0$  можно преобразовать к виду

$$k_0 = \frac{V_0^2 r_0}{\mu} = 2 - \frac{r_0}{a} = 1 + e \cos E_0 = \frac{1 + 2e \cos \vartheta_0 + e^2}{1 + e \cos \vartheta_0}. \quad (2.4.4)$$

Из (2.4.4) следует, что при перемещении исходной точки  $t_0$ ,  $r_0$ ,  $V_0$  от перигея в апогею орбиты величина  $k_0$  монотонно убывает (вследствие монотонного возрастания эксцентрисической аномалии  $E_0$  от 0 до  $\pi$ ).

Подстановкой (2.4.4) в (2.4.3) можно получить

$$\frac{2}{(2 - k_0)^2} = \frac{2}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{2(1 + e \cos \vartheta_0)^2}{(1 - e^2)^2}; \quad (2.4.5)$$

$$\frac{2k_0}{2 - k_0} = 2 \frac{1 + e \cos E_0}{1 - e \cos E_0} = 2 \frac{1 + 2e \cos \vartheta_0 + e^2}{1 - e^2}. \quad (2.4.6)$$

Подобные выражения имеют и коэффициенты  $\frac{3}{(2 - k_0)^2}$ ,  $\frac{3k_0}{(2 - k_0)}$ .

Следовательно, приведенные коэффициенты монотонно убывают при перемещении начальной точки от перигея к апоцентру.

Вариации для  $\Delta a$  и  $\Delta T$  с учетом (2.4.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{2}{(2 - k_0)^2} \Delta r_0, \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{2k_0}{(2 - k_0)} \frac{\Delta V_0}{V_0}; \\ \frac{\Delta T}{T} &= \frac{3}{(2 - k_0)^2} \frac{\Delta r_0}{a}, \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{3k_0}{(2 - k_0)} \frac{\Delta V_0}{V_0}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

В частных случаях для апогея и перигея справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{(2-k_0)^2} &= \begin{cases} \frac{2}{(1-e)^2} & \text{— в перигее;} \\ \frac{2}{(1+e)^2} & \text{— в апогее;} \end{cases} \\
 \frac{2k_0}{(2-k_0)} &= \begin{cases} 2\frac{1+e}{1-e} & \text{— в перигее;} \\ 2\frac{1-e}{1+e} & \text{— в апогее;} \end{cases} \\
 \frac{3}{(2-k_0)^2} &= \begin{cases} \frac{3}{(1-e)^2} & \text{— в перигее;} \\ \frac{3}{(1+e)^2} & \text{— в апогее;} \end{cases} ; \\
 \frac{3k_0}{(2-k_0)} &= \begin{cases} 3\frac{1+e}{1-e} & \text{— в перигее;} \\ 3\frac{1-e}{1+e} & \text{— в апогее;} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Из (2.4.3) и (2.4.8) следует, что влияние начальных возмущений  $\Delta r_0$ ,  $\Delta V_0$  элементы  $a$ ,  $T$  максимально в случае, соответствующем положению  $t_0$  в перигее, минимально при расположении в апогее. При увеличении эксцентриситета эта разница возрастает.

Изменение величин  $\Delta r_{\text{п}}$ ,  $\Delta r_{\text{а}}$ . Соотношение, связывающее радиус КА и элементы  $a$  и  $e$ , имеет вид

$$r = a(1 \pm e), \tag{2.4.9}$$

знак "+" соответствует апогею  $r = r_{\text{а}}$ , "-" — перигею  $r = r_{\text{п}}$ . Для оценки зависимости отклонений  $\Delta r_{\text{а}}$ ,  $\Delta r_{\text{п}}$  от отклонений начального параметра  $q = q(r_0, V_0, \theta_0)$  найдем выражение для производных:

$$\frac{\partial r'}{\partial q} = \frac{\partial a}{\partial q}(1 \pm e) \pm a \frac{\partial e}{\partial q}, \tag{2.4.10}$$

где знак "+" соответствует  $r' = r_{\text{а}}$ , "-" —  $r' = r_{\text{п}}$ .

Отклонения параметров  $r_{\text{а}}$ ,  $r_{\text{п}}$  запишутся в виде

$$\Delta r_{\text{а}} = \sum \frac{\partial r_{\text{а}}}{\partial q} \Delta q; \quad \Delta r_{\text{п}} = \sum \frac{\partial r_{\text{п}}}{\partial q} \Delta q. \tag{2.4.11}$$

Используя дополнительные соотношения (2.4.2), (2.4.7) и производные

$$\frac{\partial e}{\partial k_0} = \frac{k_0 - 1}{e} \cos^2 \theta_0, \quad \frac{\partial e}{\partial \theta_0} = \frac{k_0(2 - k_0)}{2e} \sin 2\theta_0,$$

выражения для производных, с помощью которых находятся вариации для  $\Delta r_{\text{п}}$ ,  $\Delta r_{\text{а}}$ , запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r'}{\partial \theta_0} &= \pm \frac{r_0 k_0}{2e} \sin 2\theta_0; \\ \frac{\partial r'}{\partial r_0} &= \frac{1}{2 - k_0} \left[ \frac{2(1 \pm e)}{2 - k_0} \pm \frac{k - 1}{e} k_0 \cos^2 \theta_0 \right]; \\ \frac{\partial r'}{\partial V_0} &= \frac{2ak_0}{V_0} \left( \frac{1 \pm e}{2 - k_0} \pm \frac{k_0 - 1}{e} \cos^2 \theta_0 \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

В [34] проводится анализ поведения компонент (2.4.12) для различных начальных условий, в том числе и для граничных ( $\theta_0 = 0$ ,  $k_0 = 1$  – в случае круговых орбит), и выведены приближенные зависимости для оценки вариаций  $\Delta r_{\text{п}}$ ,  $\Delta r_{\text{а}}$  для случая околокруговых орбит, когда  $\theta_0 \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow 0$  и производные (2.4.12) имеют разрыв.

Изложенный подход к оценке вариаций элементов  $a$ ,  $T$ ,  $r_{\text{п}}$ ,  $r_{\text{а}}$  при баллистическом проектировании может быть распространен на приближенное определение вариаций других элементов орбит ( $\Delta e$ ,  $\Delta \omega$ ), в том числе и для определения отклонения плоскости орбиты ( $\Delta i$ ,  $\Delta \Omega$ ).

**М о д е л и р о в а н и е** процесса определения ош и б о к ф о р м и р о в а н и я о р б и т. Более точные результаты оценки элементов рабочих орбит в зависимости от начальных возмущений можно получить моделированием на ЭВМ процесса формирования орбиты. Под моделью будем понимать совокупность соотношений, связывающих характеристики, описывающие процесс формирования орбиты (либо какой-нибудь другой процесс баллистического движения одного или нескольких КА) с его параметрами и условиями протекания его во времени. В общем случае параметры процесса и условия могут быть подвержены случайным возмущениям, природа и характер которых зачастую могут быть достаточно точно описаны. Таким образом, статистическую модель процесса формирования орбит и управляемого движения КА может рассматриваться как имитатор явлений, описывающих исследуемый процесс с особенностями протекания его во времени. Вместе с тем вследствие учета случайных факторов, без которых практически невозможно управляемое движение КА, единичные реализации на модели не могут быть его объективной характеристикой. Поэтому исследуемый процесс с достаточной надежностью можно охарактеризовать средними значе-

ниями исследуемых параметров лишь по данным множества реализаций. При моделировании важным моментом является правильный выбор основных возмущающих и управляющих параметров и факторов. Кроме того, важно не упустить на первый взгляд второстепенные факторы, которые в итоге могут существенно исказить данные моделирования. Характерным для иллюстрации может быть пример, когда для КА, совершающего полет на Луну, кажущаяся на первый взгляд незначительная ошибка порядка 0,3 м/с скорости выведения приводит к промаху на конечном этапе  $\sim 110$  км.

Статистическое моделирование позволяет решать широкий круг задач при баллистическом проектировании космических систем, начиная от участка выведения КА ракетой-носителем и включая последующие операции:

формирование рабочих орбит, процесс наведения КА в заданную точку или область космического пространства и т.д. В качестве примера рассмотрим схему модели наведения КА в заданную точку пространства. Моделируется процесс наведения КА из точки с начальными эфемеридами  $r_0, V_0$  в момент  $t_0$  (соответствующая матрица ошибок  $(K_{r_0 V_0})_{t_0}$ ). Решается задача наведения КА из точки, соответствующей моменту времени  $t_0$  (соответственно  $r_0, V_0$ ) в точку  $t_K, r_K, V_K$ . Требуется определить точность перехода КА в заданную точку пространства  $t_K, r_K, V_K$  при известных начальных ошибках, определяемых неточностями строботки переходного импульса вследствие факторов, приведенных в разд. 1.3. На рис. 2.18 приведена схема статистической модели, предназначенной для получения соответствующих оценок  $(\tilde{r}_K, \tilde{V}_K, (K_r, \nu)_{t_K})$  в момент  $t_K$ . Полученные данные позволяют судить о качестве реализуемого процесса, а также о влиянии различного рода ошибок на процесс управляемого перехода КА в заданную точку пространства.

Учитывая, что моделирование на ЭВМ в практике баллистического проектирования получило широкое применение, целесообразно остановиться на некоторых вопросах обработки результатов моделирования.

Пусть в результате моделирования получена совокупность  $l$  параметров  $(\xi_{11}, \dots, \xi_{1n}, \dots, \xi_{l1}, \dots, \xi_{ln})$ , характеризующих моделируемый процесс.

Средние значения  $\xi_j$  случайных величин определяются известным соотношением

$$\tilde{\xi}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.13)$$

Оценка дисперсии  $D$  случайных величин  $\xi_j$  находится при помощи выражений

$$D_{\xi_j} = 1/n \sum_{k=1}^n (\xi_{jk} - \tilde{\xi}_j)^2. \quad (2.4.14)$$

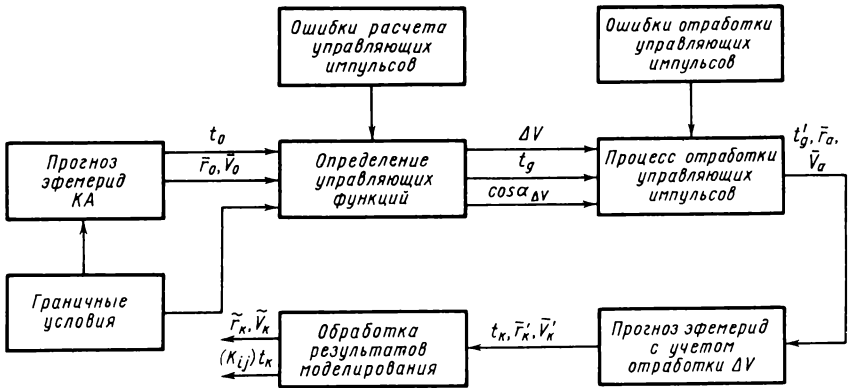


Рис. 2.18. Схема статистической модели процесса наведения КА

Формула (2.4.14) не всегда удобна для реализации на ЭВМ (вследствие того, что оценка  $\xi_j$  в процессе моделирования меняется по мере накопления числа реализаций). Поэтому для практических расчетов, как правило, используют при оценке дисперсии выражение

$$D(\xi_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{jk}^2 - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n \xi_{jk} \right)^2. \quad (2.4.15)$$

Корреляционные моменты находят, используя формулу

$$K_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_{jk} - \tilde{\xi}_j)(\xi_{ik} - \tilde{\xi}_i), \quad i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, l. \quad (2.4.16)$$

При реализации на ЭВМ выражение (2.4.16) более удобно представлять в виде

$$K_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{ik} \xi_{jk} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \xi_{ik} \sum_{k=1}^n \xi_{jk}. \quad (2.4.17)$$

Для выявления корреляции получаемых результатов от начальных условий в практических задачах целесообразно использовать нормированную корреляционную матрицу, которая в симметричном случае запишется в виде

$$(K_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{16} \\ & 1 & \rho_{23} & \rho_{26} \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Элементы ее находятся из выражений

$$\rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_{\xi_i} \sigma_{\xi_j}}; \quad (2.4.19)$$

$$\sigma_{\xi_i} = \sqrt{D(\xi_i)}; \quad \sigma_{\xi_j} = \sqrt{D(\xi_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Важным вопросом является определение количества реализаций, требуемых для обеспечения желаемой точности оценки моделируемого процесса. Обычно при обработке статистического материала кроме оценки точности решения оценивают и степень достоверности получаемых результатов.

По результатам испытаний получается оценка искомого параметра, которая является случайной величиной. Имеет место приближенное равенство

$$\xi_j \approx \tilde{\xi}_j, \quad (2.4.20)$$

которое имеет точность  $\epsilon_{\xi}$  с достоверностью  $\alpha_{\xi}$ , если вероятность неравенства

$$|\xi_j - \tilde{\xi}_j| < \epsilon_{\xi j}. \quad (2.4.21)$$

равна  $\alpha_{\xi}$ , т.е. справедливо соотношение

$$P(|\tilde{\xi}_j - \xi_j| < \epsilon_{\xi j}) = \alpha_{\xi j}. \quad (2.4.22)$$

Формула (2.4.22) имеет следующий смысл: примерно  $\alpha_{\xi j} \times 100\%$  значений оценок  $\tilde{\xi}_j$  будут отличаться от  $\xi$  на величину, не большую  $\epsilon_{\xi}$ , а остальные  $(1 - \alpha_{\xi j}) \times 100\%$  значений могут отличаться от  $\xi$  на величину, большую  $\epsilon_{\xi j}$ .

Рассмотрим далее связь между собой точности решения  $\epsilon_{\xi}$ , достоверности  $\alpha_{\xi j}$  и числа реализаций  $n$ . Можно показать, что с достоверностью

$$\delta_{\xi j} = 1 - \frac{D^2(\xi_j)}{\sigma_{\xi j}^2 n} \quad \text{ошибка в определении параметра } \xi_j \text{ будет не больше}$$

$\epsilon_{\xi j}$ , определяемого соотношением

$$\epsilon_{\xi j} = \sigma_{\xi j} \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta_{\xi j})^n}},$$

а оценка ошибки

$$|\tilde{\xi}_j - \xi_j| < \sigma_{\xi j} \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta_{\xi j})^n}}$$

показывает, что порядок убывания ошибки пропорционален  $1/\sqrt{n}$ . Это говорит о том, что увеличение точности полученных оценок связано со значительным увеличением числа реализаций моделируемого процесса.



## ГЛАВА 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ БАЛЛИСТИКИ

### 3.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ БАЛЛИСТИКИ

При баллистическом проектировании космических систем различного назначения, как правило, необходимо разрабатывать или применять дополнительные задачи космической баллистики. К таким задачам можно отнести определение условий прямой видимости КА с пункта управления, взаимной видимости космических аппаратов, расчет эфемерид Луны, Солнца и т.п. (в отличие от расчета основных характеристик – параметров траектории выведения ракетой-носителем КА на рабочую орбиту, определение орбитальных параметров КА для выполнения целевых задач, оценка эволюции КА и др.). На рис. 3.1 приведена двухуровневая схема решения вспомогательных задач космической баллистики. Первый уровень представлен в виде расчета исходных данных для вспомогательных задач космической баллистики (определение координат Луны, Солнца, временных привязок и т.д.). Второй уровень – определение условий функционирования бортовых систем и космической системы в целом: условия взаимной видимости КА–КП, условия прямой связи и другие задачи аналогичного плана.

При дальнейшем рассмотрении задач космической баллистики целесообразно в дополнение к материалам первой главы рассмотреть некоторые часто встречающиеся понятия.

**Эклиптика** – годичный путь Солнца на небесной сфере или линия пересечения с небесной сферой плоскости орбиты Земли (рис. 3.2), которая наклонена к плоскости экватора Земли на угол  $\sim 23,5^\circ$ . Небесный экватор – проекция экватора Земли на небесную сферу.

**Точка весеннего равноденствия** (восходящий узел эклиптики) – точка небесной сферы, в которой Солнце в своем видимом движении ежегодно пересекает небесный экватор с Юга на Север (см. рис. 3.2).

В дальнейшем содержании часто будем использовать фундаментальные аргументы:

$l'_л = L_л - \pi_л$  – средняя аномалия Луны;  $l' = L'_с - \pi'$  – средняя аномалия Солнца;  $F = L_л - \Omega'_л$  – аргумент широты Луны;  $D = L_л - L'_с$  – средняя элонгация Луны от Солнца.

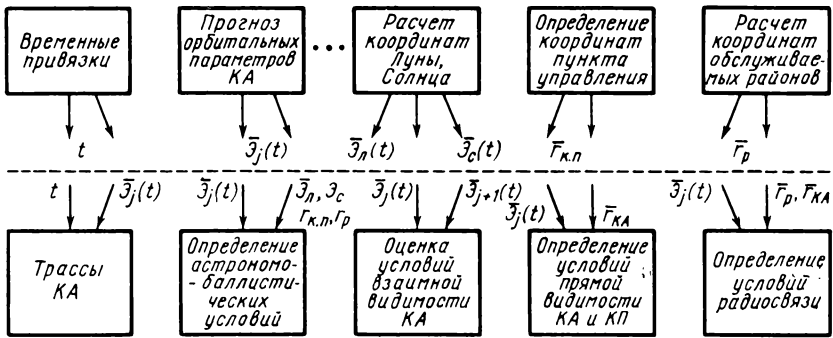


Рис. 3.1. Двухуровневая схема решения задач космической баллистики

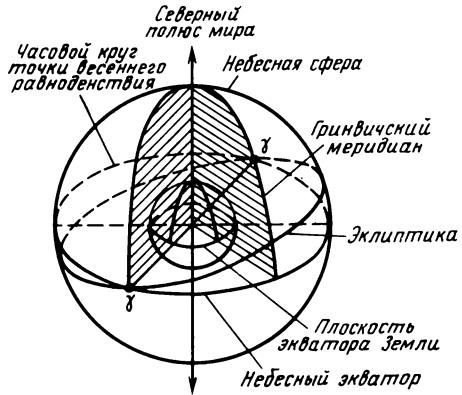


Рис. 3.2. Геометрия небесной сферы

Здесь  $L_{\text{л}}$  – средняя долгота Луны на дату;  $L'_{\text{с}}$  – средняя долгота Солнца;  $\pi_{\text{л}}$  – средняя долгота лунного перигея;  $\pi'_{\text{с}}$  – средняя долгота солнечного перигея;  $\Omega'_{\text{л}}$  – средняя долгота восходящего узла Луны.

Фундаментальные аргументы вычисляются по приближенной формуле

$$\{L_{\text{л}}, l'_{\text{л}}, l', F, D\} = A_0 + A_1 T_3 + A_2 T_3^2, \tag{3.1.1}$$

где  $T_3$  – время от начала эпохи.

Значения  $A_0, A_1, A_2$  в оборотах (1 оборот =  $2\pi = 360^\circ$ ) приведены в табл. 3.1.

В соответствии с выражением (3.1.1) и данными табл. 3.1 фундаментальные аргументы определяются по формулам

Таблица 3.1

Аргумент	$A_0$	$A_1$	$A_2 \cdot 10^3$
$L_{\Pi}$	0,7512060108	+ 1336,8552309491	- 0,00314815
$l'_{\Pi}$	0,8225128009	+ 1325,5523586343	+ 0,25532406
$l'$	0,9957662037	+ 99,9973604167	- 0,00041667
$F$	0,0312524691	+ 1342,2278476389	- 0,00891975
$D$	0,9742707958	+ 1236,8530950463	- 0,00398919

Таблица 3.2

Инерциальная система	$X_{\omega}$	$Y_{\omega}$	$Z_{\omega}$
$X_{\Pi}$	$(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i)$	$(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i)$	$(\sin i\sin\Omega)$
$Y_{\Pi}$	$(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)$	$(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)$	$(-\sin i\cos\Omega)$
$Z_{\Pi}$	$(\sin\omega\sin i)$	$(\cos\omega\sin i)$	$(\cos i)$

$$\begin{aligned}
 L_{\Pi} &= 0,7512060108 + (1336 + 0,85523095) T_3 - 0,00314815 \cdot 10^{-3} T_3^2; \\
 l'_{\Pi} &= 0,8225128009 + (1325 + 0,5523586343) T_3 + 0,25532406 \cdot 10^{-3} T_3^2; \\
 l' &= 0,9957662037 + (99 + 0,9973604167) T_3 - 0,00041667 \cdot 10^{-3} T_3^2; \quad (3.1.2) \\
 F &= 0,0312524691 + (1342 + 0,2278476389) T_3 - 0,00891975 \cdot 10^{-3} T_3^2; \\
 D &= 0,9742707948 + (1236 + 0,8530950463) T_3 - 0,00577161 \cdot 10^{-3} T_3^2.
 \end{aligned}$$

Коэффициент при  $T_3$  для избежания потери точности представлен в виде суммы  $A_1 = C' + D'$ , где  $C'$  – целая часть при  $A_1$ ,  $D'$  – дробная часть коэффициента.

При описании задач космической баллистики удобно применять вспомогательную геоцентрическую систему координат  $O_0 X_{\omega} Y_{\omega} Z_{\omega}$ . Ось  $O_0 X_{\omega}$  направлена на перигей орбиты,  $O_0 Y_{\omega}$  – в сторону движения КА,  $O_0 Z_{\omega}$  – по нормали к плоскости орбиты. Связь между геоцентрическими системами  $O_{\Pi} X_{\Pi} Y_{\Pi} Z_{\Pi}$  и  $O_0 X_{\omega} Y_{\omega} Z_{\omega}$  определяется по табл. 3.2.

Единичные векторы, определяющие положение КА в плоскости  $O_0 X_{\omega} Y_{\omega}$  при его известных геоцентрических координатах  $X_{\Pi} Y_{\Pi} Z_{\Pi}$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
 p_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i; \\
 p_y &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i; \\
 p_z &= \sin\omega\sin i; \\
 Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i; \\
 Q_y &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i; \\
 Q_z &= \cos\omega\sin i.
 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

### 3.2. ВРЕМЕННЫЕ ПРИВЯЗКИ В БАЛЛИСТИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

При проектировании КС и баллистическом сопровождении пассивных и активно существующих космических аппаратов важное значение отводится временным привязкам КА на орбитах, временным привязкам выполнения ими тех или иных операций управления движением центра масс и угловым положением, учету времени существования, а также чрезвычайно важной задаче определения временных увязок для определения момента встречи космических аппаратов при выполнении стыковки и в других не менее важных случаях.

В настоящем разделе мы кратко рассмотрим основные единицы меры и системы счета времени.

Время течет непрерывно. Вопросы, связанные с понятием времени, ставились и решались для различных эпох развития человечества. Кажущееся простое понятие времени – является по сути чрезвычайно сложным.

За единицу меры времени принимается любой постоянный промежуток времени. На практике для эталонных единиц принимается любой постоянный промежуток времени, основанный на применении следующих естественных периодических процессов:

- вращения Земли вокруг своей оси;
- обращения Земли вокруг Солнца.

Помимо естественных процессов для измерения времени используют различные искусственно создаваемые процессы, имеющие стабильный периодический характер, например, излучение (поглощение) электромагнитных волн атомами или молекулами некоторых веществ при определенных условиях и т.д.

Промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот вокруг своей оси относительно какой-либо точки на небе, называется сутками. Точками, определяющими продолжительность суток, могут быть: точка весеннего равноденствия, центр видимости диска Солнца (смещенный годичный аберацией), "среднее Солнце" – фиктивная точка, положение которой на небе теоретически может быть вычислено для любого момента времени.

Промежутки времени, определяемые при помощи вышеназванных точек, называются соответственно звездными сутками ( $T_3$ ), истинными солнечными сутками ( $T_H$ ), средними солнечными сутками ( $T_C$ ).

Звездные сутки начинаются в момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия. Звездное время измеряют часовым углом точки весеннего равноденствия. Из рис. 3.3, представляющего собой вид северного полушария небесной сферы сверху, следует

$$S = \alpha + t, \quad (3.2.1)$$

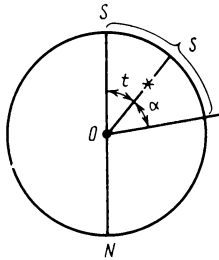


Рис. 3.3. К определению звездного времени

т.е. звездное время в любой момент равно прямому восхождению светила ( $\alpha$ ) плюс его часовой угол  $t$ . Если  $\alpha + t > 24^h$ , то  $S = (\alpha + t) - 24^h$ . В момент верхней кульминации светила его часовой угол  $t = 0^h$  и  $S = \alpha$ , в момент нижней кульминации (когда часовой угол светила  $t = 12^h$ )  $S = \alpha + 12^h$ .

В курсах сферической астрономии различают три типа точки весеннего равноденствия [3, 28]:

среднюю, движущуюся только вследствие прецессии;

истинную, смещающуюся от процессии и нутации;

квазиистинную, обладающую прецессионным движением и нутационными колебаниями только долгопериодического характера.

Средняя точка весеннего равноденствия перемещается по экватору вследствие прецессии в одну сторону, противоположную суточному вращению небесной сферы с годичной скоростью  $m$ , равной общей прецессии по прямому восхождению.

Используя эту точку получают средние звездные сутки и равномерное (среднее) звездное время, наиболее часто используемое в практике расчетов при баллистическом проектировании.

Истинная точка весеннего равноденствия колеблется относительно средней вследствие нутации. Нутация по прямому восхождению имеет вид

$$\Delta\alpha = \Delta\psi \cos\epsilon,$$

где  $\epsilon$  – угол наклона эклиптики к экватору;  $\Delta\psi$  – нутация по долготе, которая определяется эмпирической зависимостью, полученной из наблюдений (учитывающей только члены с коэффициентами более  $0,02''$ ) [3]:

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & -17,233'' \sin\Omega_{\text{л}} + 0,209'' \sin 2\Omega_{\text{л}} - \\ & - 1,272'' \sin 2L'_c + 0,126'' \sin g_{\odot} - 0,050'' \sin(2L'_0 + \\ & + g_{\odot}) + 0,021'' \sin(2L'_c - g_{\odot}) - 0,204'' \sin 2L_{\text{л}} + \\ & + 0,68'' \sin g_{\text{л}} - 0,034'' \sin(2L_{\text{л}} - \Omega_{\text{л}}) - \\ & - 0,026'' \sin(2L_{\text{л}} + g_{\text{л}}), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где  $\Omega_{\text{л}}$  – долгота восходящего узла лунной орбиты;  $L'_c$  – средняя долго-

та Солнца;  $L_{\text{л}}$  — средняя долгота Луны;  $g_{\text{л}}$  — средняя аномалия Луны;  $g_{\odot}$  — средняя аномалия Солнца.

Компоненты формулы (3.2.2) разделяются на группу с долгопериодическими и группу с короткопериодическими составляющими. Первые включают долготу восходящего узла лунной орбиты  $\Omega_{\text{л}}$ , члены зависящие от средней долготы Солнца  $L'_{\text{с}}$  и от средней аномалии Солнца  $g_{\odot}$ . Наибольший из долгопериодических членов нутации имеет величину  $17,233'' \sin \Omega_{\text{л}}$ .

Разность между равномерным и истинным звездным временем только от первого долгопериодического члена меняется в пределах от  $+1^{\text{s}},054$  до  $-1^{\text{s}},054$  с периодом 18,6 года (период изменения долготы лунного узла). Остальные долгопериодические члены увеличивают предел до  $\pm 1^{\text{s}},2$ .

Короткопериодические члены нутации оказывают на разность равномерного и истинного времени малое влияние, изменяя его значение не более чем на  $\pm 0^{\text{s}},02$ .

**Истинное солнечное время.** Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями истинного Солнца, отсчитанный на одном и том же географическом меридиане, называется **истинными солнечными сутками**. За начало истинных солнечных суток на любом меридиане принимается момент нижней кульминации истинного Солнца. Время, протекающее от нижней кульминации истинного Солнца до любого его положения, выраженное в долях истинных солнечных (т.е. в истинных солнечных часах, минутах, секундах), называется истинным солнечным временем  $T_{\odot}$ .

Истинное солнечное время  $T_{\odot}$  на фиксированном меридиане равно геоцентрическому часовому углу истинного Солнца, выраженному в часовой мере, плюс  $12^{\text{h}}$

$$T_{\odot} = t_{\odot}^{\text{h}} + 12^{\text{h}}. \quad (3.2.3)$$

Часовой угол истинного Солнца можно получить из астрономических наблюдений. Однако следует учитывать, что часовой угол Солнца изменяется не пропорционально углу поворота Земли вокруг его оси вследствие того, что Солнце движется не по экватору, а по эклиптике и движение его по эклиптике неравномерно.

**Среднее солнечное время.** Время, протекающее от нижней кульминации среднего Солнца до любого другого его положения, выраженное в долях средних солнечных суток\*, называется **средним солнечным**

---

\*Средними солнечными сутками называется промежуток времени между двумя последовательными, одноименными кульминациями среднего экваториального Солнца, отсчитанный на одном и том же географическом меридиане.

временем или просто средним временем  $T_m$ . Среднее время  $T_m$  в произвольный момент на фиксированном меридиане численно равно часовому углу среднего солнца  $t_m$ , выраженному в часовой мере, плюс  $12^h$ , т.е.

$$T_m = t_m^h + 12^h. \quad (3.2.4)$$

Часовой угол среднего Солнца, а следовательно, среднее время нельзя получить из наблюдений, они вычисляются при помощи полученных из наблюдений истинного солнечного или звездного времени.

**Связь истинного солнечного времени со средним.** Эту связь, как правило, называют уравнением времени, она представляет собой разность часовых углов истинного Солнца и среднего экваториального Солнца

$$\eta = t_{\odot} - t_m. \quad (3.2.5)$$

Разность истинного солнечного времени и среднего солнечного времени также равна величине  $\eta$ . Зная уравнение времени (3.2.5), можно достаточно просто перейти от истинного солнечного времени к среднему солнечному времени, и наоборот,

$$\begin{aligned} T_m &= T_{\odot} - \eta; \\ T_{\odot} &= T_m + \eta. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

**Измерение времени на длительных временных интервалах.** Как правило, такое измерение удобно осуществлять в годах. Промежуток времени между двумя последовательными прохождениеми среднего экваториального Солнца через среднюю точку весеннего равноденствия называется **тропическим годом**. Установлено, что тропический год содержит 365,2421988 средних солнечных суток. Звездных суток в тропическом году равно на одни больше, таким образом:

366,2421988 зв.сут. = 365,2421988 ср.солн.сут.,  
откуда

$$1 \text{ ср.солн.сут.} = \frac{366,2421988}{365,2421988} \text{ зв.сут.}$$

Коэффициент

$$\nu = \frac{366,2421988}{365,2421988} = 1,002737909 \quad (3.2.7)$$

служит для перевода промежутков времени, выраженных в среднем солнечном времени  $T_m$ , в промежутки, выраженные в звездном времени  $S$ , а коэффициент

$$\nu' = \frac{365,2421988}{366,2421988} = 0,997269566$$

для перевода промежутка, выраженного в звездном времени  $S$  в промежутки, выраженные в среднем солнечном времени  $T_m$ . Следовательно,

$$\Delta S = \nu \Delta T_m; \tag{3.2.8}$$

$$\Delta T_m = \nu' \Delta S. \tag{3.2.9}$$

Из формул (3.2.8), (3.2.9) можно получить важные для практических целей соотношения:

одни звездные сутки	=	$23^h 56^m 04^s$ , 090537	средн.солн.вр.
$1^h$ звездного времени	=	$59^m 50^s$ , 170438	” ” ”
$1^m$ ” ”	=	$59^s$ , 836174	” ” ”
$1^s$ ” ”	=	$0^s$ , 997270	” ” ”
одни ср.солн.сутки	=	$24^h 03^m 56^s$ , 555363	звездного времени
$1^h$ ср.солн.времени	=	$1^h 00^m 09^s$ , 856475	” ”
$1^m$ ” ”	=	$01^m 00^s$ , 164275	” ”
$1^s$ ” ”	=	$01^s$ , 002738	” ”

В повседневной жизни тропическими годами счет времени вести не очень удобно, так как в таком году не содержится целого числа средних солнечных суток и начало года приходится на различные моменты суток. Поэтому были придуманы календари.

В юлианском календаре (старый стиль) продолжительность календарного года считается равной 365 средним солнечным суткам три календарных года подряд, а каждый четвертый год содержит 366 суток. Год в 365 суток называется простым, а в 366 – високосным. Високосными годами в юлианском календаре являются те годы, номера которых без остатка делятся на четыре. Таким образом, продолжительность года в юлианском календаре в среднем на четыре года равна 365,25 средних солнечных суток.

Промежуток времени в 36 525 средних солнечных суток называется юлианском столетием.

Для временных привязок при баллистическом проектировании обычно время определяется от опорных моментов – ”эпох”. В настоящее время для баллистических расчетов часто за начало эпохи принимают 1900 г. Время  $T_3$  от начала эпохи рассчитывается из формулы  $T_3 =$

$$= \frac{t_3}{36525},$$

определяющей время в юлианских столетиях, прошедшее от 0-го января 1900 г. Значение  $t_3$  здесь определяется зависимостью



$$t_3 = 365N_0 + \left[ \frac{N_0 - 1}{4} \right] + d + t - 0,5, \quad (3.2.10)$$

где  $N_0 = N - 1900$ ;  $N$  – номер года, на который определяется эфемерида,  $\left[ \frac{N_0 - 1}{4} \right]$  – целая часть числа;  $d$  – число дней от 0-го января года, для которого ведутся вычисления;  $t$  – текущее время в выбранной дате.

### 3.3. ТРАССЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Определение трассы и система уравнений, описывающая ее поведение, приведены в гл. 1. Здесь мы рассмотрим основные свойства трасс и их особенности для некоторых типов орбит.

Смещение спутника по долготе за один виток в первом приближении можно определить по формуле

$$\Delta\lambda = T\omega_3, \quad (3.3.1)$$

где  $T$  – период обращения КА.

Смещение трассы происходит с востока на запад. Последующие витки можно получить смещением трассы на величину  $\Delta\lambda$  относительно предыдущего витка. Отношение

$$n_\lambda = 2\pi / \Delta\lambda = T_3 / T, \quad (3.3.2)$$

где  $T_3$  – звездные сутки, называемые числом витков орбиты.

В общем случае, когда отношение  $n_\lambda$  является иррациональным числом, КА не возвращается в исходное положение и последовательно проходит над всеми точками Земли в интервале широт

$$-i \leq \varphi \leq i \text{ при } 0 \leq i \leq \pi/2; \quad (3.3.3)$$

$$i - \pi \leq \varphi \leq \pi - i \text{ при } \frac{\pi}{2} < i \leq \pi.$$

Если же отношение  $2\pi/\Delta\lambda = n/m$  представляет рациональную дробь ( $n$  и  $m$  целые числа), то спутник возвратится в исходное положение через  $n$  витков либо через  $m$  суток. Орбиты, для которых выполняются такие условия, называются кратно-синхронными.

Следует отметить, что при анализе динамики трасс часто помимо уравнения (1.2.33) для описания текущей долготы трассы пользуются другим видом уравнения для определения долготы подспутниковой точки, которое можно получить, основываясь на рис. 1.7, и записать его в виде

$$\lambda = \lambda_B + \arctg(\operatorname{tg} \omega_3 \cos i) - \omega_3 t^*, \quad (3.3.4)$$

где  $\lambda_B$  – долгота, соответствующая моменту прохождения КА через вос-

ходящий узел орбиты;  $t^*$  – текущее время; отсчитываемое от момента прохождения КА через восходящий узел орбиты.

Совокупность уравнений (1.2.29), (3.3.4) определяет геометрическое место точек на поверхности Земли, через зенит которых проходит КА.

**Трассы околокруговых орбит.** Для орбит такого класса в первом приближении выполняется условие

$$t^* = \frac{u(\varphi)}{\lambda_{\text{CP}}} = \left( \frac{T}{2\pi} \right) u(\varphi), \quad (3.3.5)$$

где  $\lambda_{\text{CP}} = \frac{(\mu)^{1/2}}{(a_3 + h)^{3/2}}$  – среднее движение КА;  $u(\varphi) = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin i}\right)$  –

аргумент широты КА.

Из (3.3.4), (3.3.5) следует

$$\lambda_{\text{KP}}(\varphi) = \lambda_{\text{B}} + \arctg(\text{tg}u \cos i) - \frac{\omega_3}{\lambda_{\text{CP}}} u(\varphi). \quad (3.3.6)$$

Уравнения (1.2.29), (3.3.6) определяют трассу круговой орбиты в явном виде и могут использоваться при анализе кинематических параметров КА. Для практики определенный интерес представляет рассмотрение трасс суточных околокруговых спутников (для суточного спутника справедливо соотношение  $(T_3/T) \cong 1$ , часто такие спутники называют синхронными). В данном случае ( $\omega_3 = \lambda_{\text{CP}}$ ) выражение (3.3.6) примет вид

$$\lambda_{\text{KP}}^*(\varphi) = \lambda_{\text{B}} + \arctg(\text{tg}u \cos i) - \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin i}\right). \quad (3.3.7)$$

Формулы (1.2.29), (3.3.7) позволяют построить трассы суточных спутников.

**Влияние эллиптичности на трассу КА.** При баллистическом проектировании для приближенного анализа зачастую возникает необходимость оценок учета влияния эллиптичности орбиты на трассу КА. Для этой цели

можно воспользоваться уравнением Кеплера  $t = \tau_{\pi} + \frac{E - e \sin E}{\lambda_{\text{CP}}}$  и записать текущее время  $t^*$  в виде

$$t^* = \frac{1}{\lambda_{\text{CP}}} [M(\vartheta) - M(\omega)], \quad (3.3.8)$$

где  $M(\vartheta) = E(\vartheta) - e \sin E(\vartheta)$  – средняя аномалия. Разложив в ряд Тейло-

ра среднюю аномалию по эксцентриситету и ограничиваясь членами малости порядка  $e$ , выражение текущего времени можно представить в виде

$$t^* = \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}} (\vartheta - 2e \sin \vartheta + \omega - 2e \sin \omega). \quad (3.3.9)$$

Учитывая, что  $u = \vartheta + \omega$ , выражение (3.3.9) можно переписать

$$t^* = \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}} \left\{ u - 2e [\sin(u - \omega) - \sin \omega] \right\}. \quad (3.3.10)$$

Время полета КА по околокруговой (с наличием эллиптичности) и круговой орбитам определяются выражениями

$$t_{\text{эл}} = \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}} \left\{ u - 2e [\sin(u - \omega) + \sin \omega] \right\} + t_{\text{в1}}; \quad (3.3.11)$$

$$t_{\text{кр}} = \frac{u}{\lambda_{\text{ср}}} + t_{\text{в2}}, \quad (3.3.12)$$

где  $t_{\text{в1}}$ ,  $t_{\text{в2}}$  — моменты времени прохождения спутника через восходящий узел орбиты.

Считаем далее, что движение обоих спутников начинается в момент  $t_0$  с одним и тем же аргументом широты  $u_0$  (т.е. трассы в момент  $t_0$  пересекаются). Выражения (3.3.11), (3.3.12) для  $t_0$  в обоих случаях могут быть записаны в виде

$$t_0 = \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}} \left\{ u_0 - 2e [\sin(u_0 - \omega) + \sin \omega] \right\} + t_{\text{в1}}; \quad (3.3.13)$$

$$t_0 = \frac{u_0}{\lambda_{\text{ср}}} + t_{\text{в2}}.$$

Определив из этих уравнений  $t_{\text{в1}}$ ,  $t_{\text{в2}}$ , подставив их в (3.3.11), (3.3.12) и вычитая из (3.3.11) уравнение (3.3.12), получим

$$\begin{aligned} \Delta t &= - \frac{2e}{\lambda_{\text{ср}}} [\sin(u - \omega) - \sin(u_0 - \omega)] = \\ &= - \frac{2e}{\lambda_{\text{ср}}} (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Выражение (3.3.14) определяет различие во времени полета по эллипти-

ческой и круговой орбитам, что и приводит к смещению трассы эллиптической орбиты относительно трассы круговой орбиты.

Смещение спутника вдоль трассы можно получить, заменяя на малом участке трассу эллиптической орбиты дугой большого круга:

$$\Delta l = a_3 \lambda_{cp} \Delta t, \quad (3.3.15)$$

или с учетом (3.3.14) получим

$$\Delta l = -2a_3 e [\sin(u - \omega) - \sin(u_0 - \omega)]. \quad (3.3.16)$$

Для определения бокового смещения трассы, вызываемого эллиптичностью орбиты, воспользуемся выражением для произвольного момента времени

$$t_{эл} = t_{кр} + \Delta t, \quad (3.3.17)$$

и, подставив его в (3.3.14) с учетом выражения (3.3.7), запишем уравнение трассы эллиптической орбиты в виде

$$\lambda_{эл} = \lambda_{кр}(\varphi) + \Delta \lambda_e, \quad (3.3.18)$$

где  $\lambda_{эл} = \lambda_{эл}(\varphi)$ ;  $\lambda_{кр} = \lambda_{кр}(\varphi)$  – уравнение трасс эллиптической и круговой орбит;  $\Delta \lambda_e = \Delta \lambda_e(\varphi)$  – поправка, вызванная эллиптичностью орбиты.

Деформацию трассы круговой орбиты, вызванную ее эллиптичностью, удобно выразить в поперечном отклонении трассы квазикруговой орбиты. Так, отклонение  $\Delta z_e$  по нормали к трассе можно определить, пользуясь зависимостью

$$\Delta z_e = a_3 C_n e \sin i [\sin(2u - \omega) - \sin(2u_0 - \omega)], \quad (3.3.19)$$

где  $C_n = \omega_3 / \lambda_{cp}$ ,  $u_0$  – аргумент широты точки, в которой пересекаются трассы круговой и квазикруговой орбит;  $u$  – аргумент широты точки, для которой определяется смещение.

Из (3.3.14), (3.3.15) следует, что продольное смещение определяется эксцентриситетом орбиты и не зависит от высоты полета. Поправки трассы носят колебательный характер.

### 3.4. РАСЧЕТ ЭФЕМЕРИД ЛУНЫ И СОЛНЦА

#### Определение эфемерид Луны

Невозмущенное движение Луны. Луна движется вокруг Земли по эллиптической орбите (рис. 3.4). Угол наклоения плоскости орбиты к эклиптике  $i_l$  и долгота восходящего узла Луны  $\Omega_l$  определяют ориентацию лунной орбиты в пространстве. При этом понимается, что Луна в восходящем узле переходит из южного эллиптического

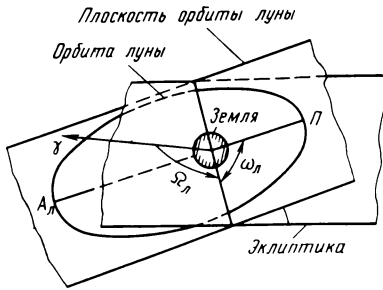


Рис. 3.4. Элементы невозмущенного движения Луны:

$A_{л}$  – апоселений;  $\Pi$  – периселений

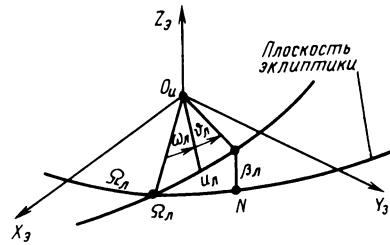


Рис. 3.5. Геометрия невозмущенной орбиты Луны

полушария в северное. Ориентацию орбиты Луны в плоскости ее движения определяют углом  $\omega_{л}$  между направлениями на восходящий узел орбиты и периселений в направлении движения. Введем еще некоторые величины.

Среднее движение Луны по орбите (средняя угловая скорость)

$$n_{л} = 2\pi/T_{л}, \quad (3.4.1)$$

где  $T_{л}$  – сидерический (звездный) месяц, равный промежутку времени между двумя последовательными прохождениями Луны относительно опорных звезд.

Средняя аномалия Луны

$$l'_{л} = n_{л}(t - \tau_{л}), \quad (3.4.2)$$

где  $\tau_{л}$  – момент времени, соответствующий прохождению Луны через периселений. Эксцентрисическая аномалия Луны определяется из выражения

$$E_{л} - e_{л} \sin E_{л} = P'_{л}, \quad (3.4.3)$$

где  $e_{л}$  – эксцентриситет орбиты Луны, определяемый соотношением

$$e_{л} = \frac{\sqrt{a_{л}^2 - b_{л}^2}}{a_{л}},$$

здесь  $a_{л}$ ,  $b_{л}$  – соответственно большая и малая полуоси орбиты Луны.

Истинная аномалия Луны находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_{л}}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_{л}}{1 - e_{л}}} \operatorname{tg} \frac{E_{л}}{2}, \quad (3.4.4)$$

где  $\frac{\vartheta_{л}}{2}$  и  $\frac{E_{л}}{2}$  – находятся в одном квадранте.

Невозмущенные эклиптические координаты Луны – широту  $\beta_{\text{л}}$  и видимую долготу  $l'_{\text{л}}$  определим, используя сферический треугольник  $\Omega_{\text{л}}\mu_{\text{л}}N$  (рис. 3.5):

$$\sin\beta_{\text{л}} = \sin i_{\text{л}} \sin(\omega_{\text{л}} + \vartheta_{\text{л}}); \tag{3.4.5}$$

$$\text{tg}(l'_{\text{л}} - \Omega_{\text{л}}) = \text{cos} i_{\text{л}} \text{tg}(\omega_{\text{л}} + \vartheta_{\text{л}}) \tag{3.4.6}$$

или

$$l'_{\text{л}} = \Omega_{\text{л}} + \text{arctg}[\text{cos} i_{\text{л}} \text{tg}(\omega_{\text{л}} + \vartheta_{\text{л}})]. \tag{3.4.7}$$

Значения  $(l'_{\text{л}} - \Omega_{\text{л}})$  и  $(\omega_{\text{л}} + \vartheta_{\text{л}})$  находятся в одном квадранте. Текущий радиус-вектор Луны равен

$$r_{\text{л}} = \frac{a_{\text{л}}(1 - e_{\text{л}}^2)}{1 + e_{\text{л}} \text{cos} \vartheta_{\text{л}}}. \tag{3.4.8}$$

На практике часто определяют горизонтальный параллакс

$$\Pi_{\text{л}} = \text{arcsin} \frac{r_{0\text{э}}}{r_{\text{л}}} = \text{arcsin} \frac{r_{0\text{э}}(1 + e_{\text{л}} \text{cos} \vartheta_{\text{л}})}{a_{\text{л}}(1 - e_{\text{л}}^2)}, \tag{3.4.9}$$

где  $r_{0\text{э}}$  – экваториальный радиус Земли.

Параметры, характеризующие невозмущенное движение Луны, приведены в табл. 3.3.

**Возмущенное движение Луны.** На движение Луны значительное влияние оказывают притяжение Солнца, планет, несферичность Земли,

Таблица 3.3

Параметр	Обозначение	Значение
Большая полуось орбиты	$a_{\text{л}}$	384400 км
Эксцентриситет орбиты	$e_{\text{л}}$	0,0549005
Наклон орбиты к эклип- тике	$i_{\text{л}}$	$5^{\circ} 08' 43,4''$
Среднее движение	$n_{\text{л}}$	$2,661699489 \cdot 10^{-6}$ рад/с или 13,1763965 градус за эфемеридные сутки
Средний горизонтальный параллакс	$\Pi_{\text{л}}$	$34 22,6''$
Сидерический месяц	$T_{\text{л}}$	$27^{\text{сут}} 07^{\text{h}} 43^{\text{m}} 11^{\text{s}},5$
Расстояние от Земли до Луны в перигее	–	363300 км
Расстояние от Земли до Луны в апогее	–	405500 км

вследствие чего ее движение существенно отличается от невозмущенного. Так, линия узлов вращается в плоскости эклиптики в сторону уменьшения угла, т.е. против движения Луны по орбите, совершая полный оборот за 18,6 года. Линия апсид вращается в плоскости орбиты в ту же сторону, что и Луна, совершая полный оборот за 8,6 года. Текущие значения этих углов определяются из выражений [13]:

$$\Omega_{\text{л}} = 259^{\circ}10'59'',79 - 1934^{\circ}08'31'',23T_3 + 7'',48T_3^2 + 0'',0080T_3^3; \quad (3.4.10)$$

$$\omega_{\text{л}} = 75^{\circ}08'46'',61 + 6003^{\circ}10'33'',75T_3 - 44'',65T_3^2 - 0'',053T_3^3, \quad (3.4.11)$$

где время  $T_3$  отсчитывается в юлианских столетиях.

Достаточно точный расчет координат Луны представляет собой сложную задачу и может быть проведен с использованием аппроксимации возмущенного движения в виде тригонометрических рядов Брауна [4, 13]. Разложения, аппроксимирующие движение Луны, Браун получил в два приема. Вначале была решена "главная проблема", в которой предполагалось, что Земля, Луна и Солнце взаимодействуют как материальные точки, а центр тяжести системы Земля–Луна движется по эллиптической орбите по закону Кеплера. В результате долготы, широты и синус параллакса были представлены в виде тригонометрических рядов с постоянными коэффициентами и аргументами, линейно зависящими от времени.

Затем учитывались отклонения в движении Луны от движения, определенного из решения "главной проблемы", под влиянием притяжения других тел солнечной системы. В результате в аргументы тригонометрических разложений добавились периодические члены, а в коэффициенты – периодические и вековые. Члены разложения, полученные из решения первой части задачи, названы солнечными, а из второй части – планетными. С учетом сказанного координаты Луны определяются при помощи выражений

$$l_{\text{л}} = L + \sum_n a_n \sin(il'_{\text{л}} + jl' + kF + mD) + \sum_i k_i \sin(a_i + b_i t); \quad (3.4.12)$$

$$\beta_{\text{л}} = \sum_n a_n \sin(il'_{\text{л}} + jl' + mD); \quad (3.4.13)$$

$$\Pi_{\text{л}} = \sin \Pi_{\text{л}} = \sum_n a_n \cos(il'_{\text{л}} + jl' + kF + mD); \quad (3.4.14)$$

$$r_{\text{л}} = \frac{1315,6 \cdot 10^6}{\Pi_{\text{л}}}, \quad (3.4.15)$$

где  $i, j, k, m$  – кратность соответствующих аргументов.

Значения солнечных членов вида  $a_n \frac{\sin}{\cos} (il'_n + jl' + kF + mD)$  приведены в приложении П1.1, П1.2, а планетные члены вида  $k_i \sin(a_i + b_i t)$ , которые входят только в долготу, – в Приложении П1.4 [4].

Приведенные выражения и данные таблиц приложения позволяют вычислить значения  $\beta_{\text{л}}$ ,  $l_{\text{л}}$  с точностью до угловых секунд. Дальнейшее повышение точности связано с более тщательным расчетом фундаментальных аргументов, учетом их периодических поправок ( $\delta L$ ,  $\delta \pi$ ,  $\delta l$ , ...) и учетом дополнительных членов разложения, которые приведены в работе М.А. Фурсенко\*.

Зная полярные координаты Луны, можно определить прямоугольные координаты вначале в геоцентрической эллиптической системе координат (ось  $OX_3$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\gamma$ ;  $OY_3$  – нормаль к  $OX_3$ ;  $OZ_3$  – к северному полюсу эклиптики):

$$\begin{aligned} X_{\text{эл}} &= r_{\text{л}} \cos \beta_{\text{л}} \cos l_{\text{л}} = \frac{r_{0\text{э}}}{\sin \Pi_{\text{л}}} \cos \beta_{\text{л}} \cos l_{\text{л}}; \\ Y_{\text{эл}} &= r_{\text{л}} \cos \beta_{\text{л}} \sin l_{\text{л}} = \frac{r_{0\text{э}}}{\sin \Pi_{\text{л}}} \cos \beta_{\text{л}} \sin l_{\text{л}}; \\ Z_{\text{эл}} &= r_{\text{л}} \sin \beta_{\text{л}} = \frac{r_{0\text{э}}}{\sin \Pi_{\text{л}}} \sin \beta_{\text{л}}, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

а затем в геоцентрической инерциальной системе координат  $O_{\text{и}} X_{\text{и}} Y_{\text{и}} Z_{\text{и}}$ :

$$\begin{aligned} X_{\text{ил}} &= r_{\text{л}} \cos \beta_{\text{л}} \cos \lambda_{\text{л}}; \\ Y_{\text{ил}} &= r_{\text{л}} (\cos \beta_{\text{л}} \sin \lambda_{\text{л}} \cos \epsilon - \sin \beta_{\text{л}} \sin \epsilon); \\ Z_{\text{ил}} &= r_{\text{л}} (\cos \beta_{\text{л}} \sin \lambda_{\text{л}} \sin \epsilon + \sin \beta_{\text{л}} \cos \epsilon), \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

где  $\epsilon$  – наклонение эклиптики к плоскости экватора.

В табл. 3.4 приведены основные параметры, характеризующие возмущенное движение Луны [13].

**Определение координат Солнца.** Координаты Солнца можно определить, пользуясь Астрономическим ежегодником (АЕ), либо рассчитать по приближенным формулам. С приемлемой для практики точностью эллиптические координаты Солнца могут быть рассчитаны по формулам

$$\lambda_{\text{с}} = \omega_{\text{с}} + \vartheta_{\text{с}}, \quad \beta_{\text{с}} = 0; \quad (3.4.18)$$

$$r_{\text{с}} = \frac{a_{\text{с}}(1 - e_{\text{с}}^2)}{1 + e_{\text{с}} \cos \vartheta_{\text{с}}}, \quad (3.4.19)$$

где  $\omega_{\text{с}} = L - D - l'$ ;

\* Фурсенко М.А. Методы вычисления эфемериды Луны // Бюллетень института теоретической астрономии. 1964. Т.Х. № 4. С. 272–315.



Таблица 3.4

Параметр	Обозначение	Значение
Большая полуось орбиты	$a_{\text{Л}}$	381 500 км $\leq a_{\text{Л}} \leq$ 387 300 км
Эксцентриситет орбиты	$e_{\text{Л}}$	$0,0432 \leq e_{\text{Л}} \leq 0,0666$
Наклон орбиты к эклиптике	$i_{\text{Л}}$	$4^{\circ} 59' \leq i_{\text{Л}} \leq 5^{\circ} 17'$
Минимальный горизонтальный параллакс	$(\Pi_{\text{Л}})_{\text{min}}$	3235''
Максимальный горизонтальный параллакс	$(\Pi_{\text{Л}})_{\text{max}}$	3691''
Расстояние от Земли до Луны в перигее	–	356 400 ... 370 500 км
Расстояние от Земли до Луны в апогее	–	404 000 ... 406 730 км

$$e_c = 0,01675104 - 0,0000418T_3;$$

$$\vartheta_c = M_c + 2e_c \sin M_c + \frac{5}{4} e_c^2 \sin 2M_c; \quad (3.4.20)$$

$$M_c = l;$$

$$a_c = 149,5 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Используя эллиптические координаты, можно определить координаты Солнца в геоцентрической системе координат

$$X_{\text{и.с}} = r_c \cos \lambda_c \cos \beta_c;$$

$$Y_{\text{и.с}} = r_c (\sin \lambda_c \cos \beta_c \cos \epsilon - \sin \beta_c \sin \epsilon); \quad (3.4.21)$$

$$Z_{\text{и.с}} = r_c (\sin \lambda_c \cos \beta_c \sin \epsilon + \sin \beta_c \cos \epsilon).$$

### 3.5. АСТРОНОМО-БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КА

При проектировании космических систем важным вопросом является определение условий освещенности космических аппаратов. Зачастую от этих условий зависит функционирование КА при использовании в качестве источника тока бортовых солнечных преобразователей [29]. Эффективность же последних существенным образом зависит от взаимного расположения КА, Солнца и Земли и, в первую очередь, от расположения КА на освещенных и теневых участках орбиты. Кроме того, теп-

ловые режимы конструкций и элементов КА, а также функционирование датчиков системы ориентации также зачастую решающим образом определяются астрономо-баллистическими условиями и, в первую очередь, условиями освещенности.

**Пребывание КА в тени Земли.** Наиболее часто встречающаяся задача при баллистическом проектировании состоит в определении продолжительности пребывания КА на теневых и освещенных участках орбиты. В общем случае тень планеты состоит из двух областей: полной тени и полутени (рис. 3.6). Полная тень образуется в конусе со стороны противоположной Солнцу. К полутени можно отнести область, лежащую в пространстве полной тенью и полной освещенностью. Уменьшение интенсивности солнечного излучения обусловлено тем, что диск Солнца частично закрывается планетой. Если условно принять, что энергия, излучаемая Солнцем, распределяется равномерно по диску, то интенсивность излучения в любой точке полутени будет прямо пропорционально площади солнечного диска, не закрытого Землей.

При рассмотрении вопроса освещенности КА целесообразно изложить его в двух аспектах: а) для задач непосредственно баллистического проектирования КС и б) баллистического сопровождения КА. В первом случае, как правило, достаточно ограничиться приближенным определением условий входа в тень и выхода из нее, и задача может быть сведена к оценкам максимального времени теневого участка. В рассматриваемом случае тень достаточно принять цилиндрической (полутень не рассматривается). Рассмотрим этот случай.

Рис. 3.6. Геометрия тени и полутени

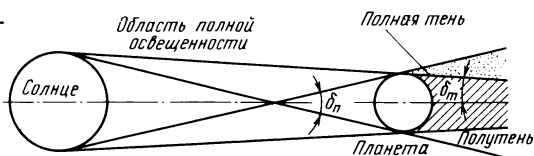
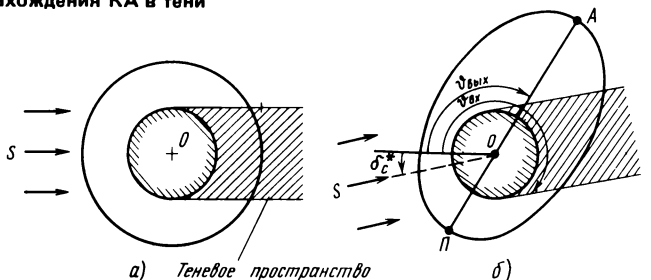


Рис. 3.7. К определению времени нахождения КА в тени



Максимальное время нахождения КА в тени соответствует варианту, когда Солнце будет находиться в плоскости орбиты КА.

Для круговых орбит максимальное время нахождения КА в тени определяется из соотношения (рис. 3.7,а)

$$\tau_T = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{r_3}{r}. \quad (3.5.1)$$

Для эллиптических орбит определению величины  $\tau_T$  может способствовать рис. 3.7,б, на котором  $\delta_c^*$  – угловое расстояние Солнца до плоскости экватора в плоскости орбиты, определяемое выражением

$$\delta_c^* = \arcsin(\sin \delta_c / \sin i), \quad (3.5.2)$$

здесь  $\delta_c$  – склонение Солнца, может быть взято из АЕ либо определено с использованием координат Солнца (3.4.21).

Выражения для определения истинной аномалии КА при входе в тень и выходе из нее могут быть получены с использованием уравнения эллипса в полярной системе координат  $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$  ;

$$p = \frac{C^2}{\mu}; \quad e = \frac{f^*}{\mu}, \quad \text{где } C, f^* \text{ – константы;}$$

$$\cos \vartheta_{\text{ВХ}} = \frac{1}{e} \left[ \frac{a(1 - e^2)}{r} \sin \left( \arcsin \frac{\sin \delta_c}{\sin i} - \vartheta_{\text{ВХ}} - \omega \right) - 1 \right];$$

$$\cos \vartheta_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{e} \left[ \frac{a(1 - e^2)}{r} \sin \left( \arcsin \frac{\sin \delta_c}{\sin i} - \vartheta_{\text{ВЫХ}} - \omega \right) - 1 \right], \quad (3.5.3)$$

здесь  $\vartheta_{\text{ВХ}}$ ,  $\vartheta_{\text{ВЫХ}}$  – истинная аномалия КА при входе в тень и выходе из тени.

Длительность нахождения в тени определяется как разность времен, соответствующих эксцентрическим аномалиям, определяемым через истинные аномалии

$$\tau_T = t_{\text{ВЫХ}} - t_{\text{ВХ}} = \sqrt{a^3} \mu [(E_{\text{ВЫХ}} - E_{\text{ВХ}} - e(\sin E_{\text{ВЫХ}} - \sin E_{\text{ВХ}}))], \quad (3.5.4)$$

здесь  $E_{\text{ВХ}}$ ,  $E_{\text{ВЫХ}}$  – эксцентрические аномалии  $(\text{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \cdot \text{tg} \frac{\vartheta}{2})$ .

Для баллистического сопровождения КА и в отдельных случаях при проектировании космических систем требуется более точный анализ условий освещенности КА. Рассмотрим вывод уравнений, характеризующих условия входа в тень и выходе из нее. Известными считаем, элементы орбиты, координаты Солнца (радиус-вектор  $r_c$ ), средний радиус Земли ( $r_3 = a_3$ ) либо другой планеты.

Из рис. 3.8 можно записать векторное соотношение

$$\bar{d} + \bar{a}_3 = \bar{r}. \tag{3.5.5}$$

Угол между радиусом-вектором КА и радиусом-вектором Солнца в момент входа и выхода из тени равен

$$\cos\varphi = - (r^2 - a_3^2)^{1/2} / r. \tag{3.5.6}$$

Одновременно величина угла  $\varphi$  может быть определена из уравнения

$$\cos\varphi = (\bar{r}_c \bar{r}) / |\bar{r}_c| |\bar{r}|, \tag{3.5.7}$$

а радиус-вектор КА, в свою очередь, может быть представлен в виде

$$\bar{r} = X_\omega \bar{p} + Y_\omega \bar{Q}, \tag{3.5.8}$$

где  $\bar{p}$  и  $\bar{Q}$  – единичные векторы, определяемые соотношением (3.1.3), значения  $X_\omega$ ,  $Y_\omega$  могут быть найдены из соотношений

$$X_\omega = r \cos\vartheta, \quad Y_\omega = r \sin\vartheta.$$

Следовательно, выражение (3.5.7) может быть представлено как

$$\cos\varphi = \frac{(X_\omega \bar{r}_c \bar{p} + Y_\omega \bar{r}_c \bar{Q})}{|\bar{r}_c| |\bar{r}|}, \tag{3.5.9}$$

или, введя обозначения для скалярных произведений, входящих в (3.5.9),

$$A = \frac{X_c p_x + Y_c p_y + Z_c p_z}{(X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2)^{1/2}}, \quad B = \frac{X_c Q_x + Y_c Q_y + Z_c Q_z}{(X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2)^{1/2}},$$

с учетом (3.5.8) выражение (3.5.9) может быть представлено в виде

$$\cos\varphi = A \cos\vartheta + B \sin\vartheta. \tag{3.5.10}$$

Возведя в квадрат (3.5.7), (3.5.10) и приравняв их правые части, а также учитывая уравнение орбиты  $r = p(1 + e \cos\vartheta)$ , можно получить "уравнение тени"

$$\Phi_T = a_3^2 (1 + e \cos\vartheta)^2 + p^2 (A \cos\vartheta + B \sin\vartheta)^2 - p^2. \tag{3.5.11}$$

Условием входа в тень или выхода из нее является равен-

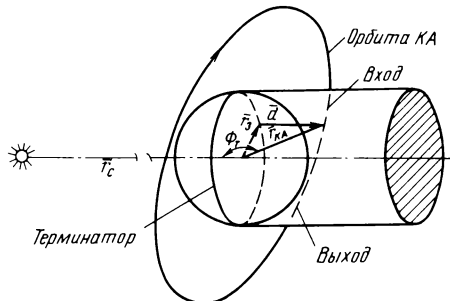


Рис. 3.8. К выводу уравнений входа в тень

ство  $\Phi_T = 0$ . Физический смысл ( $\cos\varphi \leq 0$ ) имеют те решения полученного уравнения, для которых выполняется условие

$$A \cos\vartheta + B \sin\vartheta < 0. \quad (3.5.12)$$

При выполнении условий

$$A \cos\vartheta + B \sin\vartheta = 0 \quad (3.5.13)$$

КА будет освещен прямыми лучами Солнца.

При анализе условий освещенности необходимо учитывать следующее правило: если КА входит в тень, то  $\Phi_T$  меняет знак с минуса на плюс, если КА выходит из тени —  $\Phi_T$  меняет знак с плюса на минус.

Уравнение (3.5.11) является уравнением четвертой степени относительно косинуса истинной аномалии и его можно привести к стандартной форме биквадратного уравнения, используя подстановки [4]:

$$\begin{aligned} A_0 &= [(a_3/p)^4 e^4 - 2(a_3/p)^2 (B^2 - A^2) e^2 + (A^2 + B^2)^2]; \\ A_1 &= [4(a_3/p)^4 e^3 - 4(a_3/p)^2 (B^2 - A^2) e]; \\ A_2 &= [6(a_3/p)^4 e^2 - 2(a_3/p)^2 (B^2 - A^2) - \\ &\quad - 2(a_3/p)^2 (1 - B^2) e^2 + 2(B^2 - A^2)(1 - B^2) - 4A^2 B^2]; \\ A_3 &= [4(a_3/p)^4 e - 4(a_3/p)^2 (1 - B) e]; \\ A_4 &= [(a_3/p)^4 - 2(a_3/p)^2 (1 - B^2) + (1 - B^2)^2]. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Выражение (3.5.11) можно записать в виде

$$\Phi_T^* = A_0 \cos^4 \vartheta + A_1 \cos^3 \vartheta + A_2 \cos^2 \vartheta + A_3 \cos \vartheta + A_4, \quad (3.5.15)$$

а затем решить его в явном виде через квадратные корни. При этом анализ решений следует осуществлять при помощи уравнений (3.5.12), (3.5.13), что позволит отбросить лишние корни.

После нахождения истинных аномалий входа в тень и выхода из тени можно рассчитать соответствующие им моменты времени входа в тень и выхода из нее, используя выражение

$$t_k = \tau_\pi + \frac{E_k - e \sin E_k}{\lambda_{cp}}, \quad (3.5.16)$$

где  $\lambda_{cp}$  — среднее движение КА;  $k$  — индекс, соответствующий входу в тень и выходу из нее.

Вопросы учета полутени рассмотрены в [4].

**Определение условий астроориентации.** Для нормального режима функционирования КА при решении целевых задач его ориентация обеспечивается с помощью различного рода датчиков. Как правило, при

построении опорной системы ориентации на борту КА важно знать значение угла между направлением от КА на центр Земли ( $r$ ) и от КА на Солнце ( $s$ ) [29], соответствующий угол обозначим СКЗ угол "Солнце–КА – Земля". Считая известными направляющие косинусы единичного вектора направления на Солнце в инерциальной системе координат, угол между векторами  $\bar{r}$  и  $\bar{s}$  определяется с помощью известного выражения

$$\angle \text{СКЗ} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{(\bar{r} \cdot \bar{s})}{r} \quad (3.5.17)$$

или в координатной форме

$$\angle \text{СКЗ} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{X_{\text{КА}} X_{\text{и.с}} + Y_{\text{КА}} Y_{\text{и.с}} + Z_{\text{КА}} Z_{\text{и.с}}}{r}, \quad (3.5.18)$$

где  $X_{\text{КА}}, \dots, Z_{\text{и.с}}$  – координаты КА и Солнца в геоцентрической системе координат.

### 3.6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ВЗАИМНОЙ ВИДИМОСТИ КА И НАЗЕМНОГО ПУНКТА. УСЛОВИЯ РАДИОВИДИМОСТИ КА

В практике баллистического проектирования космических систем различного назначения одной из первоочередных задач является определение условий прямой видимости КА как с пункта управления, так и с обслуживаемых наземных объектов, т.е. фактически определение орбитальных параметров КА, соответствующих условиям наблюдаемости наземного пункта.

Для решения поставленной задачи вначале задаются исходными параметрами:

координатами наземного пункта  $\varphi_{\text{п}}, \lambda_{\text{п}}$  (здесь  $\lambda_{\text{п}}$  для удобства пересчетов можно отсчитывать от направления на точку весеннего равноденствия, а в случае практической надобности определение долготы пункта в гринвичской системе координат не представит затруднений) (рис. 3.9,а), элементы орбиты КА  $a, e, i, \Omega, \omega, \tau_{\text{п}}$ , а также  $\bar{r}(t)$ .

Геометрическая картина условий граничной видимости КА и наземного пункта на рис. 3.9,а.

Исходные параметры могут быть варьируемыми или заданными. Первый случай, как правило, соответствует определению (поиску) требуемых параметров орбит и координат наземного пункта при проектировании, а второй – характерен для задач баллистического сопровождения.

Обычно в первом случае Землю достаточно принять за сферическое

тело со средним радиусом  $r_3$  ( $r_{\Pi} = r_3$ ). Тогда условие, соответствующее прямой видимости, запишется в виде (рис. 3.9,б)

$$\bar{r}_B \cdot \bar{r}_{\Pi} = \bar{r}_B \cdot \bar{r}_{\Pi} \cos \frac{\pi}{2}, \quad (3.6.1)$$

т.е. угол между линией прямой видимости ( $\bar{r}_B$ ) и радиусом Земли  $r_3$  должен быть равен  $\pi/2$ .

На практике считают, что наземный пункт находится в зоне радиовидимости КА в случае наблюдения с него спутника под некоторым углом  $\gamma$  к местному горизонту, превышающим допустимый угол  $\gamma_0$ . Наземную поверхность, для каждой точки которой обеспечивается радиотехническая видимость, называют зоной радиовидимости.

Величина зоны радиовидимости для известного угла  $\gamma_0$  определяется центральным углом  $\alpha$  [29] (рис. 3.9,б)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_3}{r_3 + h} \cos \gamma_0\right) - \gamma_0, \quad (3.6.2)$$

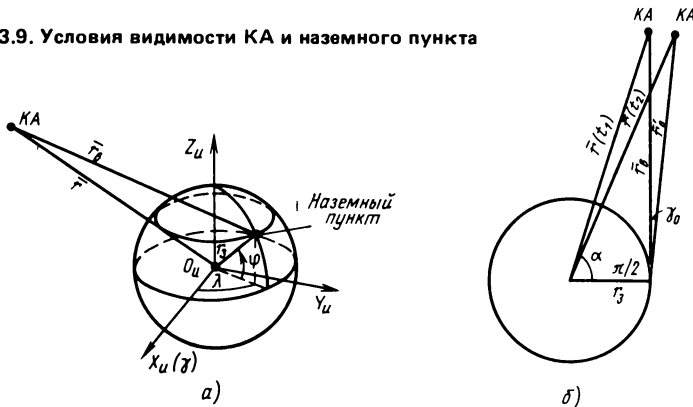
здесь  $h$  – высота орбиты КА в текущий момент времени.

Для всех точек зоны радиовидимости выполняются условия  $\gamma_0 \leq \gamma \leq \pi/2$ , а центром зоны является подспутниковая точка. В случае принятия предположения о сферичности Земли площадь зоны радиовидимости определяется по известной формуле

$$S = 2\pi r_3^2 (1 - \cos \alpha). \quad (3.6.3)$$

Увеличение зоны радиовидимости происходит с ростом высоты орбиты. Однако, начиная с высот  $\sim 50\,000$  км, дальнейший рост высоты полета не приводит к заметному увеличению зоны радиовидимости.

Рис. 3.9. Условия видимости КА и наземного пункта



При решении задач баллистического сопровождения, а также на заключительных этапах баллистического проектирования требуется более точное решение вопроса определения условий видимости КА и наземного пункта. Рассмотрим случай, когда Земля рассматривается как эллипсоид и учитываются общие ограничения на расположение пункта. Подобными могут быть не только ограничения из-за радиовидимости, но и другие ограничения (например, из-за гор и т.д.), т.е. угол прямой видимости увеличим на величину  $h_y$  (он будет составлять величину  $\pi/2 + h_y$ ), в частном случае для выполнения условий радиовидимости  $h_y = \gamma_0$ .

Для наземного пункта геоцентрические координаты определяются как

$$\begin{aligned} X_{\Pi} &= G_1 \cos \varphi_{\Pi} \cos \lambda_{\Pi}; & Y_{\Pi} &= G_1 \cos \varphi_{\Pi} \sin \lambda_{\Pi}; \\ Z_{\Pi} &= G_2 \sin \varphi_{\Pi}, \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

где  $\varphi_{\Pi}$  – геодезическая широта наземного пункта, определяемая из выражения

$$\varphi_{\Pi} = \arctg[\operatorname{tg} \varphi'_{\Pi} / (1 + \alpha_G)^2], \quad -\pi/2 \leq \varphi'_{\Pi} \leq \pi/2, \tag{3.6.5}$$

где  $\alpha_G$  – коэффициент, учитывающий сжатие Земли;  $\varphi'_{\Pi}$  – геоцентрическая широта наземного пункта (НП).

Величины  $G_1, G_2$  определяются из зависимостей [4]:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a_3}{[1 - (2\alpha_G - \alpha_G^2) \sin^2 \varphi_{\Pi}]^{1/2}} + H_3; \\ G_2 &= \frac{a_3 (1 - \alpha_G)^2}{[1 - (2\alpha_G - \alpha_G^2) \sin^2 \varphi_{\Pi}]^{1/2}} + H_3, \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

где  $H_3$  – высота НП над поверхностью земного эллипсоида.

В свою очередь, с учетом сжатия Земли при расчете угла  $h_y$  также необходимо внести поправку  $h'_y$ , равную

$$h'_y = \arccos\left(\frac{G_1 \cos^2 \varphi_{\Pi} + G_2 \sin^2 \varphi_{\Pi}}{r_3}\right), \quad 0 \leq h'_y \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.6.7}$$

В общем случае условие прямой видимости КА и НП имеет место при выполнении условий

$$\bar{r}_B \bar{r}_3 = r_B r_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + h_y\right) = -r_B r_3 \sin h_y. \tag{3.6.8}$$

Подставив в (3.6.8) значение  $\bar{r}_B = \bar{r} + \bar{r}_3$  (см. рис. 3.9,а), запишем

$$(\bar{r}_3 + \bar{r}) \bar{r}_3 = -r_B r_3 \sin h_y.$$

или

$$\bar{r} \bar{r}_3 = -r_3^2 - r_B r_3 \sin h_y. \tag{3.6.9}$$



С учетом (3.1.3), а также соотношений

$$\begin{aligned}\bar{r} &= X_\omega \bar{p} + Y_\omega \bar{Q}, \quad X_\omega = r \cos \vartheta = a(\cos E - e), \\ Y &= r \sin \vartheta = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E,\end{aligned}$$

выражение (3.6.9) можно переписать в виде

$$[a(\cos E - e)\bar{p} + a(1 - e^2)^{1/2} \sin E \bar{Q}]r_3 = -r_3^2 - r_B r_3 \sin h_y. \quad (3.6.10)$$

Исключим зависимость координат станции от времени (имеется в виду зависимость  $\lambda$  от времени в рассматриваемой системе координат).

Для этой цели воспользуемся уравнением Кеплера

$$t = \tau_\pi + \frac{E - e \sin E}{\lambda_{cp}} \quad (3.6.11)$$

и соотношением

$$\lambda_\pi = \lambda_\pi^0 + \omega_3(t - t_0) \quad (3.6.12)$$

(для Земли  $\omega_3 = 0,72921158 \cdot 10^{-4}$  1/с);  $\lambda_\pi^0$  — долгота станции в момент  $t_0$ .

С учетом (3.6.11) перепишем выражение (3.6.12) в виде

$$\lambda'_\pi = \lambda_\pi^0 + (\tau_\pi - t_0)\omega_3 + (E - e \sin E) \frac{\omega_3}{\lambda_{cp}}. \quad (3.6.13)$$

Откуда следует, что координаты НП в функции эксцентрической аномалии запишутся в виде

$$\begin{aligned}X'_\pi &= G_1 \cos \varphi_\pi \cos \lambda'_\pi; \quad Y'_\pi = G_1 \cos \varphi_\pi \sin \lambda'_\pi; \\ Z'_\pi &= G_2 \sin \varphi_\pi,\end{aligned} \quad (3.6.14)$$

где  $X'_\pi$ ,  $Y'_\pi$ ,  $Z'$  — являются составляющими вектора  $r_\pi$ , эквивалентного вектору  $\bar{r}_3$ , но являющегося функцией эксцентрической аномалии, а не  $\lambda_\pi = \lambda_\pi(t)$ .

В рассматриваемом случае уравнение (3.6.10), определяющее условие критического времени наблюдения, переписывается в виде

$$\begin{aligned}\Phi_B &= [a(\cos E - e)p_x + a(1 - e^2)^{1/2} \times \\ &\times \sin EQ_x] \cos \varphi_\pi \cos \lambda'_\pi + [a(\cos E - \\ &- e)p_y + a(1 - e^2)^{1/2} \sin EQ_y] \cos \varphi_\pi \times \\ &\times \sin \lambda'_\pi + [a(\cos E - e)p_z + a(1 - \\ &- e^2)^{1/2} \sin EQ_z] \frac{G_2}{G_1} \sin \varphi_\pi + [(r_3^2 + r_B r_3 \sin h_y / G_1)]\end{aligned} \quad (3.6.15)$$

и позволит найти условие прямой видимости КА с наземного пункта в функции эксцентрической и затем истинной аномалий.

Уравнение (3.6.16) решается относительно аргумента  $E$  итерационным способом. При решении необходимо учитывать следующие положения. Так как  $\Phi_B = \vec{r}_B r_3$ , а векторы  $\vec{r}_B$  и  $r_3$  образуют тупой угол ( $> \pi/2$ ), то КА в НП виден. Следовательно, условию видимости соответствует неравенство

$$\Phi_B < 0. \quad (3.6.16)$$

Точному граничному условию видимости отвечает выполнение условий

$$\Phi_B = 0. \quad (3.6.17)$$

Изменение функции  $\Phi_B$  от отрицательных значений к положительным соответствует условию захода КА за горизонт по отношению к пункту наблюдения, и наоборот, изменение функции  $\Phi_B$  от положительных значений к отрицательным означает, что КА по отношению к НП находится над горизонтом.

## ГЛАВА 4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ БАЛЛИСТИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

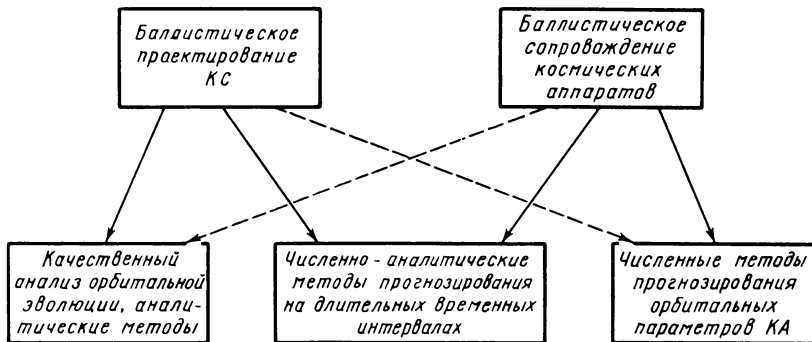
### 4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ВОЗМУЩЕННОЕ ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Баллистическое проектирование космических систем тесным образом связано с прогнозированием орбитальных параметров на различные по длительности временные интервалы  $[a, b]$  с требуемой точностью  $\Delta\bar{\Xi}_T$ . Выбор способов прогнозирования орбитальных параметров КА определяется характером решаемых задач и возможностями вычислительных средств, используемых в процессе проектирования. Вместе с тем практически во всех случаях (за исключением качественного анализа с использованием конечных аналитических соотношений) прогнозирование орбитальных параметров связано с решением тем или иным способом дифференциальных уравнений движения космических аппаратов. При баллистическом проектировании предпочтительными являются численно-аналитические методы прогнозирования орбитальных параметров и качественный анализ орбитальной эволюции (см. рис. 4.1)). Кроме того, для решения задач баллистического проектирования при оценке эволюции орбитальных параметров на интервалах  $[b - a] \gg T$ , а также для баллистического сопровождения нередко используются высокоточные, но трудоемкие с вычислительной точки зрения численные методы прогнозирования орбитальных параметров КА.

Существенное влияние при прогнозе орбитальных параметров на точность получаемых результатов оказывает степень учета различных возмущающих факторов, воздействующих на КА. Векторное дифференциальное уравнение возмущенного движения КА может быть представлено в виде

$$\bar{U} = \bar{U}_G + \sum_{k=1}^{n'} \bar{U}_{k \text{ в.т.}} + \bar{U}_a + \bar{U}_B + \bar{U}_{\text{в.в.}}, \quad (4.1.1)$$

где  $\bar{U} = \ddot{\bar{r}}$ ,  $\bar{r}$  – радиус-вектор КА;  $\bar{U}_G$  – вектор ускорения КА в поле притяжения Земли;  $\bar{U}_{k \text{ в.т.}}$  – вектор возмущающего ускорения от притяжения внешних тел ( $k$  – количество внешних притягивающих тел);  $\bar{U}_a$  – ускорение торможения под влиянием атмосферы;  $\bar{U}_B = \bar{U}'_C + \bar{U}_M$  –



**Рис. 4.1. Прогнозирование орбитальных параметров:**  
 — основные связи; - - - вспомогательные связи

суммарный вектор ускорения от воздействия светового давления и геомагнитного поля;  $\vec{U}_{в.в}$  – суммарный вектор возмущений, связанный с активным существованием спутника (утечка газов из газодыснительных систем, возмущения от управляющих двигателей системы угловой ориентации и стабилизации и т.д.).

Процесс выбора количества членов правой части дифференциального уравнения (4.1.1) при проектных расчетах и баллистическом сопровождении является достаточно сложным и в решающей степени зависит от требуемой точности расчета. Рассмотрим основные возмущающие факторы.

**Отличие гравитационного поля Земли от центрального.** Это отличие можно оценить возмущающей функцией

$$R_{\Sigma} = U(r, \varphi, \lambda) - U_0, \tag{4.1.2}$$

где  $U(\dots)$  – гравитационный потенциал Земли;  $U_0 = \mu/r$  – ньютоновский потенциал;  $r, \varphi, \lambda$  – сферические координаты точки: радиус-вектор, широта, долгота.

На практике часто пользуются разложением гравитационного потенциала Земли по полиномам Лежандра вида [7, 17]\*:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^6 C_{l0} \left(\frac{r_3}{r}\right)^l P_{l0}(\sin \varphi) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=1}^l \left(\frac{r_3}{r}\right)^l (C_{lk} \cos k\lambda + d_{lk} \sin k\lambda) P_{lk}(\sin \varphi) \right\}, \tag{4.1.3}$$

здесь  $r_3$  – средний экваториальный радиус Земли;  $C_{l0}, C_{lk}, d_{lk}$  – безраз-

\* Нормированные коэффициенты гравитационного поля Земли приведены в приложении 2.

мерные постоянные, характеризующие фигуру Земли;  $P_{l0}(\sin\varphi)$  – полином Лежандра  $l$ -го порядка;  $P_{lk}(\sin\varphi)$  – присоединенная функция Лежандра.

Компоненты потенциала (4.1.3) называются: при  $k = 0$  – зональными гармониками, при  $k \neq 0$  – тессеральными гармониками, при  $k = l$  – секториальными гармониками. Для вычисления функций Лежандра используют соотношения

$$P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l; \quad (4.1.4)$$

$$P_{lk}(x) = (\sqrt{1-x^2})^k \frac{d^k}{dx^k} P_{l0}(x),$$

которые удобны при малых  $l$ . Для вычисления при больших  $l$  рекомендуется применять рекуррентные соотношения

$$P_{l+1,0}(x) = \frac{2l+1}{l+1} x P_{l0}(x) - \frac{l}{l+1} P_{l-1,0}(x); \quad (4.1.5)$$

$$P_{l+1,k}(x) = x P_{lk}(x) + (l+k) \sqrt{1-x^2} P_{l,k-1}(x). \quad (4.1.6)$$

Удобной для оценки возмущений от произвольных гармоник является форма представления потенциала, предложенная У. Каула [10]. Она основана на преобразовании потенциала, являющегося функцией сферических координат, в функцию элементов орбиты. Им получено представление возмущающей функции в виде

$$R = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^l R_{lk}; \quad (4.1.7)$$

$$R_{lk} = \frac{\mu r_3^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{lkp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \times \\ \times S_{lkpq}(\omega, M, \Omega, S). \quad (4.1.8)$$

При учете только зональных гармоник ( $k = 0$ ) оно упрощается

$$R_{l0} = \frac{\mu r_3^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{l0p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \times \\ \times S_{l0pq}(\omega, M, -, -). \quad (4.1.9)$$

Индексы  $p, q$  является целочисленными. Выражения для функций наклона  $F_{lkp}(i)$  и эксцентриситета  $G_{lpq}(e)$  приведены в [10]. В разло-

жении функции  $G_{lpq}(e)$  по степеням  $e$  наименьшая степень равна  $|q|$ . Поэтому для орбит с малыми эксцентриситетами в разложениях (4.1.8), (4.1.9) можно удерживать только члены с малыми значениями  $|q|$  ( $q = 0, 1, -1$ ). Функция угловых аргументов  $S_{l0pq}(\omega, M, - , -)$  задается выражением

$$S_{l0pq}(\varphi) = \begin{cases} C_{l0} \cos \varphi & \text{при четном } l \\ C_{l0} \sin \varphi & \text{при нечетном } l \end{cases}, \quad (4.1.10)$$

где  $\varphi = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M$ . (4.1.11)

**Атмосферное торможение.** Длительное время полета КА на высотах ниже 600 ... 1000 км может привести к значительному изменению орбитальных параметров КА под влиянием торможения в атмосфере. Действие силы аэродинамического сопротивления (1.4.1) на КА массой  $m$  приводит к возникновению возмущающего ускорения ( $\bar{F} \equiv \bar{U}_a$ )

$$F = k_\delta \rho V_{отн}^2, \quad (4.1.12)$$

где  $k_\delta = \frac{C_x S'}{2m}$  – баллистический коэффициент.

При расчете эволюции орбит КА важно иметь данные о точности используемых моделей атмосферы. Как правило, относительная ошибка определения плотности составляет 7 ... 10%, во время магнитных бурь погрешности могут достигать до 60% [11, 17].

**Притяжение внешних тел.** При дальнейшем рассмотрении возмущений будем учитывать влияние притяжения Луны и Солнца (притяжение планет пренебрежимо мало для КА околоземного космоса).

Возмущающее ускорение под влиянием  $k$ -го внешнего тела ( $k = 1, 2$ ) с константой  $\mu$  определяется зависимостью

$$\begin{aligned} \bar{F}_k = \mu_k \left( \frac{\bar{r}_k - \bar{r}}{|\bar{r}_k - r|^3} - \frac{\bar{r}_k}{|\bar{r}_k|^3} \right) = \mu_k [r_k (|\bar{r}_k - r|^{-3} - \\ - |\bar{r}_k|^{-3}) - \bar{r} |\bar{r}_k - r|^{-3}]. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Здесь  $\bar{r}_k, \bar{r}$  – радиусы-векторы возмущающего тела и КА в системе координат  $OX_{и} Y_{и} Z_{и}$ . С учетом неравенства  $|\bar{r}_k| \gg |\bar{r}|$  и использованием обозначения

$$\epsilon_k = 2 \frac{\bar{r} r_k}{|\bar{r}_k|^2} - \left( \frac{r}{|\bar{r}_k|} \right)^2 \ll 1 \quad (4.1.14)$$

и разложения

$$(1 - \epsilon_k)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \epsilon_k + \frac{15}{8} \epsilon_k^2 + \dots, \quad (4.1.15)$$

в котором удерживаются члены не выше  $\epsilon_k^2$ , выражение (4.1.13) может быть преобразовано к виду

$$\bar{F}_k = \bar{F}_{k1} + \bar{F}_{k2}, \quad (4.1.16)$$

$$\text{где } \bar{F}_{k1} = \frac{\mu_k}{|\bar{r}_k|^2} \left( 3 \frac{\bar{r}_k}{|\bar{r}_k|} \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_k}{|\bar{r}_k|^2} - \frac{\bar{r}}{|\bar{r}_k|} \right); \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{k2} = \frac{\mu_k}{|\bar{r}_k|^2} \left\{ \frac{\bar{r}_k}{|\bar{r}_k|^2} \left[ \frac{15}{2} \left( \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_k}{|\bar{r}_k|^2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \left( \frac{|\bar{r}|}{|\bar{r}_k|} \right)^2 \right] - 3 \frac{\bar{r}}{|\bar{r}_k|} \left( \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_k}{|\bar{r}_k|^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Наиболее существенное влияние имеет возмущающее ускорение первого порядка  $F_{k1}$ . Второе слагаемое в (4.1.16) намного меньше. Для Луны оно составляет  $\sim 10\%$  от  $F_{k1}$  и его учитывают, для Солнца ( $k=2$ ) величиной  $F_{k2}$ , как правило, пренебрегают. Сравнительные данные по возмущениям различного характера приведены в табл. 4.1. Из нее следует, что на высоте менее 20 000 км лунно-солнечные возмущения малы, выше 20 000 км становятся заметными, а на высоте 50 000 км — соизмеримы с возмущениями от второй зональной гармоники.

**Световое давление.** Световое давление возникает при падении солнечного светового потока на КА и его отражении. Принимается, что сила

Высота, км	Максимальное возмущающее ускорение (абсолютное значение), $\text{м/с}^2$		
	От атмосферы	От Луны	От Солнца
100	$3 \cdot 10^{-1}$	$(1,1-1,25) \cdot 10^{-6}$	$(0,5-0,6) \cdot 10^{-6}$
200	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$(1,1-1,25) \cdot 10^{-6}$	$(0,5-0,6) \cdot 10^{-6}$
300	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$(1,1-1,25) \cdot 10^{-6}$	$(0,5-0,6) \cdot 10^{-6}$
2000	—	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$0,66 \cdot 10^{-6}$
10 000	—	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
20 000	—	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$
50 000	—	$9,8 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$
100 000	—	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-6}$

$g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

светового давления направлена по вектору Солнце–КА и создает ускорение

$$F_{\text{св}} = \frac{SE_0k}{cm} \left( \frac{r_{\text{ср}}}{\Delta} \right)^2, \tag{4.1.19}$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения КА;  $E_0$  – мощность потока солнечного излучения в районе Земли;  $c$  – скорость света;  $r_{\text{ср}}$  – средний радиус орбиты Земли;  $\Delta$  – расстояние рассматриваемого спутника от Солнца;  $k$  – коэффициент, зависящий от характера отражения света, а также от распределения теплового излучения по поверхности спутника:

$$\frac{E_0}{c} \approx 4,65 \cdot 10^{-5} \text{ дин/см}^2; \tag{4.1.20}$$

$$k \approx 1 \dots 1,44. \tag{4.1.21}$$

Из (4.1.19) следует, что действие светового давления в существенной мере зависит от характеристик КА: чем аппарат по размерам больше и легче, тем воздействие светового потока сильнее.

**Магнитное поле Земли.** Возмущение от геомагнитного поля Земли является результатом взаимодействия последнего с электромагнитным полем спутника, обусловленным токами и постоянными магнитами в приборах, а также остаточной намагниченностью элементов конструкции. Возмущающее ускорение от геомагнитного поля является функцией

Таблица 4.1

Отношение максимального возмущающего ускорения к $g_0$			
От атмосферы	От Луны	От Солнца	От второго члена разложения геопотенциала
$3,1 \cdot 10^{-2}$	$(1,12-1,3) \cdot 10^{-7}$	$(5,1-6,15) \cdot 10^{-8}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$
$2,3 \cdot 10^{-5}$	$(1,12-1,3) \cdot 10^{-7}$	$(5,1-6,15) \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$
$6,5 \cdot 10^{-6}$	$(1,12-1,3) \cdot 10^{-7}$	$(5,1-6,17) \cdot 10^{-8}$	$3,10^{-3}$
–	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
–	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$8,6 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$
–	$7,9 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
–	$7,7 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$
–	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$



эквивалентного магнитного диполя спутника  $\bar{d}_M$  и вектора индукции  $\bar{B}_M$ , т.е.

$$\bar{U}_M = \bar{U}_M(\bar{d}_M, \bar{B}_M).$$

Составляющая  $\bar{U}_M$  является незначительной. Из данных [7] следует, что величина  $\bar{U}_M$  в несколько раз меньше ускорения, обусловленного торможением атмосферы на высотах  $h > 700$  км и составляет величину порядка  $1 \cdot 10^{-7} g_0 < |U_M| \leq 6,5 \cdot 10^{-7}$ .

Дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты строятся методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Решение уравнений (4.1.1) отыскивается в том же виде, что и решение невозмущенной системы уравнений. При этом элементы  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$  рассматриваются как функции времени, определяемые таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения (1.2.3). Переменные элементы орбиты в возмущенном движении называются оскулирующими элементами. Для элементов эллиптической орбиты уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2}{p} \sin \vartheta \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}; \\ \frac{de}{dt} &= \tilde{S} \sin \vartheta + [\cos \vartheta + (\cos \vartheta + e) \frac{r}{p}] \tilde{T}; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \tilde{W} \cos u; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} W \sin u \operatorname{cosec} i; \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos \vartheta}{e} \tilde{S} + \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \tilde{W} \sin u \operatorname{ctg} i; \\ \frac{dM_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos \vartheta - 2e \frac{r}{p}\right) \tilde{S} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \sin \vartheta, \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

где  $\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S$ ;  $\tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T$ ;  $\tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W$ ;

$S, T, W$  – проекции возмущающего ускорения на оси нормальной (орбитальной) системы координат с осями по радиусу-вектору, трансверсали и бинормали.

Если обозначить проекции суммарного возмущающего ускорения

$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  на оси геоцентрической системы координат  $X_{и}, Y_{и}, Z_{и}$  через  $F_x, F_y, F_z$ , то составляющие  $S, T, W$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} S &= (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) F_x + (\cos u \sin \Omega + \\ &+ \sin u \cos \Omega \cos i) F_y + \sin u \sin i F_z; \\ T &= (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) F_x + \\ &+ (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) F_y + \cos u \sin i F_z; \\ W &= \sin \Omega \sin F_x - \cos \Omega \sin i F_y + \cos i F_z. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Текущее значение средней аномалии находится из выражения

$$M = M_0 + \int_{t_0}^t \lambda_{cp} dt, \quad (4.1.24)$$

где  $M_0$  находится из (4.1.22).

При использовании элементов  $l, h$  вместо  $e, \omega$  применяются уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \tilde{S} \sin u + [(l + \cos u) \frac{r}{p} + \cos u] \tilde{T} + \\ &+ \operatorname{ctg} i \left( \frac{r}{p} \right) h \tilde{W} \sin u; \\ \frac{dh}{dt} &= -\tilde{S} \cos u + [(h + \sin u) \frac{r}{p} + \sin u] \tilde{T} - \\ &- \operatorname{ctg} i \left( \frac{r}{p} \right) l \tilde{W} \sin u. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Часто применяются дифференциальные уравнения для аргумента широты

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{r}{p} \tilde{W} \sin u \operatorname{ctg} i. \quad (4.1.26)$$

На практике зачастую находят применение и другие виды дифференциальных уравнений возмущенного движения КА. Наиболее часто применяемые из них приведены в приложении 3 [4, 7, 17].

#### 4.2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА НА ДЛИТЕЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ

При прогнозировании орбитальных параметров значение вектора оскулирующих элементов  $\bar{\mathcal{E}}_j$  на  $n + 1$ -м витке можно представить в виде суммы их постоянной части в некоторой точке орбиты, например в апогее или в восходящем узле, и переменной части  $(\delta\bar{\mathcal{E}}_{n, n+1})_j$ , характеризующей эволюцию оскулирующих элементов за виток. При этом на практике в задачах баллистического проектирования с достаточной точностью можно принять условие

$$(\delta\bar{\mathcal{E}})_j = \sum_q (\delta\bar{\mathcal{E}}_q)_j; \quad (4.2.1)$$

где  $q$  – показатель учета характера возмущений,

$$(\delta\bar{\mathcal{E}}_q)_j = \delta\bar{\mathcal{E}}_G + \delta\bar{\mathcal{E}}_a + \delta\bar{\mathcal{E}}_л + \delta\bar{\mathcal{E}}_c + \dots,$$

здесь  $\delta\bar{\mathcal{E}}_G$ ,  $\delta\bar{\mathcal{E}}_a$ ,  $\delta\bar{\mathcal{E}}_л$ ,  $\delta\bar{\mathcal{E}}_c$  – векторы изменения оскулирующих элементов от возмущений, вызванных отличием поля притяжения Земли от центрального, торможением атмосферы, притяжением Луны и Солнца. При необходимости можно учесть и другие возмущающие факторы.

Значение величин  $(\delta\bar{\mathcal{E}}_q)_j$  для каждого витка будем считать пропорциональными отношению ускорений, вызванных соответствующим возмущением, к ускорению от центрального тела. То есть используется допущение о том, что приближенные уравнения описывают эволюцию орбит с линейным приближением от компонент возмущающих сил.

Значения приращений получаются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений типа (4.1.22) или (П.3.1) с учетом подстановки в правые части соответствующих возмущений

$$S = \sum_q S_q, \quad T = \sum_q T_q, \quad W = \sum_q W_q.$$

Для задач баллистического проектирования, целесообразно применять аналитические и численно-аналитические методы интегрирования уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах (4.1.22), которые с учетом (4.1.26) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} &= \sum_{i=1}^k \bar{\epsilon}_i \bar{f}_i(\bar{\mathcal{E}}, u); \\ \frac{du}{dt} &= \omega(\bar{\mathcal{E}}, u) + \sum_{i=1}^k \epsilon_i \varphi_i(\bar{\mathcal{E}}, u), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

где  $\bar{\mathcal{E}}$  –  $n$ -мерный вектор оскулирующих элементов ( $n$  равно пяти или шести);  $\bar{f}_i(\bar{\mathcal{E}}, u)$ ,  $\varphi_i(\bar{\mathcal{E}}, u)\omega(\bar{\mathcal{E}}, u)$  – известные функции, первая из кото-

рых является  $n$ -мерным вектором;  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – (малые параметры, соответствующие определенным возмущающим воздействиям;  $u$  – аргумент широты.

От системы уравнений (4.2.2) с помощью замены аргумента  $t$  на  $u$  переходят к другой системе

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{du} = \sum_{i=1}^k \epsilon_i \bar{X}_i(\bar{\mathcal{E}}, u) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \epsilon_i \epsilon_j \bar{X}_{ij}(\bar{\mathcal{E}}, u) + \dots; \quad (4.2.3)$$

где  $\bar{X}_i(\bar{\mathcal{E}}, u) = \frac{f_i(\bar{\mathcal{E}}, u)}{\omega(\bar{\mathcal{E}}, u)}$ ;

$$\bar{X}_{ij}(\bar{\mathcal{E}}, u) = - \frac{1}{\omega^2(\bar{\mathcal{E}}, u)} \bar{f}_i(\bar{\mathcal{E}}, u) \varphi_j(\bar{\mathcal{E}}, u).$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений движения КА может быть осуществлено различными методами. Вопрос о применении того или иного метода зависит от конкретного состава учитываемых факторов и имеющегося в наличии математического обеспечения. Следует, однако, учесть, что при достаточно полном учете возмущающих факторов уравнения движения оказываются весьма сложными и только в редких случаях могут быть проинтегрированы в явном виде.

Широкое применение получил метод усреднения [7] при одной быстрой переменной, развитый М.Л. Лидовым [15] и А.И. Назаренко [18] для систем, характеризующихся наличием медленно и быстро меняющихся переменных. Такой случай является наиболее распространенным, так как при учете зональных гармоник гравитационного потенциала возмущенное движение КА описывается уравнениями (4.2.3) с одной быстрой переменной.

Суть метода усреднения для решения системы уравнений (4.2.3) заключается в следующей замене переменных:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}} + \sum_{i=1}^k \epsilon_i \bar{\vartheta}_i(\bar{\mathcal{E}}, u) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \epsilon_i \epsilon_j \bar{\vartheta}_{ij}(\bar{\mathcal{E}}, u) + \dots, \quad (4.2.4)$$

чтобы система (4.2.3) упростилась к виду

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{du} = \sum_{i=1}^k \epsilon_i \bar{A}_i(\bar{\mathcal{E}}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \epsilon_i \epsilon_j \bar{A}_{ij}(\bar{\mathcal{E}}) + \dots \quad (4.2.5)$$

В работах [17, 18] приводится алгоритм построения функций  $\bar{A}(\bar{\mathcal{E}})$ ,  $\bar{\vartheta}(\bar{\mathcal{E}}, u)$  и показывается, что решение системы (4.2.5) имеет погрешность порядка  $(\epsilon^n + 1)\bar{u}$  на интервале  $u \sim 1/\epsilon$ , где  $\epsilon^n$  – порядок слагаемых, удерживаемых в правой части системы (4.2.5),  $\epsilon$  – один из параметров  $\epsilon_i$ .

Функции  $\bar{A}(\bar{\Theta})$  и  $\bar{\vartheta}(\bar{\Theta}, u)$  строятся следующим образом:

$$\bar{A}_i(\bar{\Theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}_i(\bar{\Theta}, u) du; \quad (4.2.6)$$

$$\bar{\vartheta}_i(\bar{\Theta}, u) = \int [\bar{X}_i(\bar{\Theta}, u) - \bar{A}_i(\bar{\Theta})] du + \bar{\vartheta}_{i0}(\bar{\Theta}); \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}(\bar{\Theta}) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}_{ij}(\bar{\Theta}, u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{X}_i(\bar{\Theta}, u)}{\partial \bar{\Theta}} \times \\ & \times \bar{\vartheta}_j(\bar{\Theta}, u) du - \frac{\partial \bar{\vartheta}_{i0}(\bar{\Theta})}{\partial \bar{\Theta}} \bar{A}_j(\bar{\Theta}), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

где  $\bar{\vartheta}_{i0}(\bar{\Theta})$  – произвольные функции.

Иногда при баллистическом проектировании целесообразно использовать метод последовательных приближений решения уравнений движения (4.1.1) с учетом преобразования их к уравнениям разностного вида

$$\bar{\Theta}_{N+1} - \bar{\Theta}_N = \delta \bar{\Theta}_1(\bar{\Theta}_N, 2\pi) = \delta \bar{\Theta}_{(1)}; \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{N+1} - \bar{\Theta}_N = & \delta \bar{\Theta}_{(1)}(\bar{\Theta}_N, 2\pi) + \\ & + \delta \bar{\Theta}_{(2)}(\bar{\Theta}_N, 2\pi) = \delta \bar{\Theta}_{(1)} + \delta \bar{\Theta}_{(2)}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

где  $\bar{\Theta}_N$  элементы в начале  $N$ -го витка,  $\delta \bar{\Theta}_{(1)}$ ,  $\delta \bar{\Theta}_{(2)}$  – соответственно возмущения первого и второго порядков.

#### 4.3. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Влияние отличия поля притяжения Земли от центрального на орбитальное движение оценено многими авторами. Выражения для расчета возмущений орбитальных параметров КА можно получить подстановкой возмущающей функции (4.1.7) в уравнения движения и интегрирования последних на интервале  $(0, 2\pi)$ . Общие положения по расчету возмущений от гeопотенциала даны в приложении П4. Здесь же рассмотрим наиболее важные частные результаты, обладающие общностью для орбит различного типа.

**Влияние зональных гармоник.** Выражение возмущающей функции (4.1.7) в этом случае имеет вид (4.1.9) (при  $k = 0$ ), а функция угловых аргументов  $S_{l_0 p q}(\omega, M, -, -)$  определяется выражением (4.1.10).

Анализ функции (4.1.10) позволяет определить условия появления

вековых и долгопериодических возмущений. Так, при  $l - 2p + q \neq 0$  интеграл функции за один оборот равен нулю, т.е.

$$\int_0^{2\pi} S_{l0pq}(\varphi) dM = 0. \quad (4.3.1)$$

Поэтому вековые и долгопериодические возмущения элементов орбит будут отсутствовать. Они возникают только при условии

$$l - 2p + q = 0. \quad (4.3.2)$$

Функции (4.1.8) для индексов  $l, p, q$ , соответствующих условию (4.3.2), имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{l0} &= \left(\frac{\mu}{r}\right) \left(\frac{r_{\text{эл}}}{r}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{l0p}(i) G_{lp(2-l)} l \times \\ &\times \begin{cases} C_{l0} \cos(l-2p)\omega, & l - \text{четные,} \\ C_{l0} \sin(l-2p)\omega, & l - \text{нечетные.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Если при выполнении условия (4.3.2), кроме того,

$$(l - 2p) = 0, \quad (4.3.4)$$

то функция (4.3.3) независима от  $\omega$  и запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{l0} &= \left(\frac{\mu}{r}\right) \left(\frac{r_3}{r}\right)^l F_{l0p}(i) G_{lp0}(e) \times \\ &\times \begin{cases} C_{l0}, & l - \text{четные,} \\ 0, & l - \text{нечетные.} \end{cases} \end{aligned}$$

Откуда следует, что из всех зональных гармоник вековые возмущения в элементах орбит могут вызывать только четные гармоники (но могут и не вызывать). Четность  $l$  является необходимым, но недостаточным условием для возникновения вековых возмущений [17].

При  $(l - 2p + q = 0)$  и  $(l - 2p \neq 0)$  (т.е.  $q \neq 0$ ) в соответствии с (4.3.3) возникают только долгопериодические возмущения. Подстановка (4.3.3) в уравнения движения и интегрирование на интервале  $[0, 2\pi]$  аргумента  $M$  позволяют получить возмущения элементов за один оборот КА:

$$\delta a(2\pi)_{l0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \delta e(2\pi)_{l0} &= -2\pi \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{l0p}(i) \times \\ &\times G_{lp(2p-l)}(e) (l-2p) \frac{dS_{l0p(2p-l)}(\varphi)}{d\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta i(2\pi)_{I_0} &= 2\pi \frac{\operatorname{ctgi}}{(1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_э}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{I_0 p}(i) \times \\
&\times G_{I_p(2p-1)}(e)(l-2p) \frac{dS_{I_0 p(2p-1)}(\varphi)}{d\varphi}; \\
\delta \Omega(2\pi)_{I_0} &= 2\pi \frac{\operatorname{coseci}}{(1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_э}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \frac{dF_{I_0 p}(i)}{di} \times \\
&\times G_{I_p(2p-1)}(e) S_{I_0 p(2p-1)}(\varphi); \\
\delta \omega(2\pi)_{I_0} &= 2\pi(1-e^2)^{1/2} \left(\frac{r_э}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \left[ \frac{1}{e} F_{I_0 p}(i) \times \right. \\
&\times \frac{dG_{I_p(2p-1)}(e)}{de} - \frac{\operatorname{ctgi}}{1-e^2} \frac{dF_{I_0 p}(i)}{di} \times \\
&\times G_{I_p(2p-1)}(e) \left. \right] S_{I_0 p(2p-1)}(\varphi).
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Из (4.3.5) видно, что при выполнении условий (4.3.2) и (4.3.4) вековые возмущения, линейные относительно зональных гармоник  $C_{I_0}$ , в элементах  $e$ ,  $i$  отсутствуют.

Для получения возмущений средней аномалии воспользуемся известным уравнением для изменения аргументов

$$\frac{dM}{dt} = \bar{n} - \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial R}{\partial a}; \tag{4.3.6}$$

$$S = S_0 + \omega_3(t - t_0).$$

Среднее движение  $\bar{n} = \lambda_{\text{ср}}$  является переменной величиной, связанной с возмущением полуоси соотношением

$$\bar{n} = \bar{n}_0 + \delta \bar{n} = \bar{n}_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a}\right). \tag{4.3.7}$$

Обозначив возмущение  $\delta M$  как разность возмущенного и невозмущенного значений средней аномалии  $\delta M = M - M_{\text{н}}$ , где  $\frac{dM_0}{dt} = \bar{n}_0$ , на основе уравнений (4.3.6), (4.3.7) можно получить

$$\frac{d\delta M}{dt} = -\bar{n}_0 \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a} - \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial R}{\partial a}. \tag{4.3.8}$$

При построении возмущения  $\delta M$ , линейного относительно параметров

$C_{lk}$ ,  $dl_k$  в правой части (4.3.8), все элементы принимаются постоянными и равными начальным. Подстановка в (4.3.8), (4.1.8) и (П4.1) и последующее интегрирование позволяют получить выражение для определения возмущения средней аномалии [17]:

$$\begin{aligned} \delta M(\varphi)_{lk} = & \left(-\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma \Sigma \left\{ 3F_{lkp}(i)G_{lpq}(e) \times \right. \\ & \times \frac{l-2p+q}{\gamma_{lkpq}} [I_{lkpq}^{(2)} - \bar{n}(t-t_0)S_{lkpq}(\varphi_0)] + \\ & + \left[ \frac{1-e^2}{e} F_{lkpq}(i) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - 2(l+1)F_{lkp}(i) \times \right. \\ & \left. \left. \times G_{lpq}(e) \right] I_{lkpq}^{(2)} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Индексы  $p$  и  $q$  здесь и в дальнейшем для упрощения изложения опущены. Первое слагаемое в фигурных скобках показывает влияние возмущения полуоси  $\delta a$  на возмущение средней аномалии. Оно содержит вековую составляющую, пропорциональную времени  $(t - t_0)$ . Остальные составляющие в соответствии с (П4.7) являются периодическими функциями. Выражение вековой составляющей  $\delta M(2\pi)$  за оборот спутника имеет вид

$$\begin{aligned} \delta M(2\pi)_{lk} = & 6\pi \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma F_{lkp}(i) \times \\ & \times \Sigma G_{lpq}(e) \frac{l-2p+q}{\gamma_{lkpq}} S_{lkpq}(\varphi_0). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Следовательно, в общем случае тессеральные гармоники вызывают вековое возмущение только в средней аномалии. Ему соответствует вековой уход вдоль траектории. Вековой уход следует учитывать при проектировании.

Для элементов  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$  характерны вековые возмущения первого порядка. При учете только  $C_{20}$  выражения для вековых возмущений получены многими авторами и имеют вид (пригодный для орбит с любым эксцентриситетом):

$$\Delta\Omega(2\pi) = 2\pi \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{r_3}{p}\right)^2 \cos i; \quad (4.3.11)$$

$$\Delta\omega(2\pi) = -2\pi \frac{3}{4} C_{20} \left(\frac{r_3}{p}\right)^2 (4 - 5\sin^2 i); \quad (4.3.12)$$



для средней аномалии

$$\Delta M(2\pi) = -\frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{r_{\text{э}}}{p}\right)^2 \frac{(1 + e \cos \vartheta_0)^3}{1 - e^2} 2\pi. \quad (4.3.13)$$

Драконический период  $T_{\Omega}$  (время изменения на интервале  $(0 \dots 2\pi)$  аргумента  $u$ ) равен

$$T_{\Omega} = T_{\text{оск0}} \left\{ 1 + \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{r_{\text{э}}}{p}\right)^2 \left[ \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta_0)^2} + \frac{(1 + e \cos \vartheta_0)^3}{1 - e^2} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u_0) \right] \right\}, \quad (4.3.14)$$

где  $T_{\text{оск0}} = 2\pi \frac{a_0^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ .

Следует отметить особенности вековых возмущений первого порядка (4.3.11), (4.3.12). Возмущения долготы восходящего узла (4.3.11) зависят от наклона  $i$  и параметра орбиты  $p$ . Но учитывая, что  $p = r_{\pi}(1 + l)$ , где  $r_{\pi}$  – радиус-вектор орбиты в перигее, очевидно, что

$$\Delta \Omega(2\pi) = f(h_{\pi}, i).$$

Возмущения аргумента перигея (4.3.2) также зависит только от элементов  $i$  и  $p$ . Существует наклонение, при котором аргумент перигея не меняется в первом приближении. Это наклонение определяется условием  $(4 - 5 \sin^2 i) = 0$ , равно  $63^{\circ} 26'$  и  $116^{\circ} 34'$  и называется критическим.

**Влияние тессеральных гармоник на эволюцию краткосинхронных орбит.**

В дальнейшем изложении под краткосинхронными будем понимать орбиты, для которых выполняются условия

$$\frac{\omega_3}{\lambda_{\text{ср}}} = \frac{k}{m}, \quad (4.3.15)$$

где  $k, m$  – целые числа. Такому соотношению соответствуют орбиты КА с периодом обращения 8, 12, 24, 36 ч и т.п.

В настоящее время в практике освоения околоземного космического пространства спутники на краткосинхронных орбитах, в особенности с периодом обращения  $12^h$  и  $24^h$ , нашли широкое применение [4, 17, 29, 30]. Для таких орбит заметное влияние будут оказывать тессеральные гармоники возмущающей функции (4.1.8) от геопотенциала. В этом случае функция угловых аргументов  $S_{lkpq}(\omega, M, \Omega, S)$  запишется в виде

$$S_{lkpq}(\varphi) = \begin{cases} C_{lk} \cos \varphi + d_{lk} \sin \varphi, & \text{при } (l - k) - \text{четном} \\ C_{lk} \sin \varphi - d_{lk} \cos \varphi, & \text{при } (l - k) - \text{нечетном,} \end{cases} \quad (4.3.16)$$

$$\text{где } \varphi = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + k(\Omega - S). \quad (4.3.17)$$

Особенность исследования влияния тессеральных гармоник заключается в том, что в соответствии с (4.3.17) угловая переменная  $\varphi$  оказывается функцией двух быстрых переменных: средней аномалии КА  $M$  и звездного времени  $S$ . Влияние второй быстрой переменной проявляется только при  $k \neq 0$ , т.е. при учете тессеральных гармоник. При этом аргументы  $M$  и  $S$  изменяются в соответствии с уравнениями (4.3.6). При построении выражений для возмущений, линейных относительно параметров  $C_{lk}$ ,  $d_{lk}$  в (4.3.6), можно ограничиться учетом только основного слагаемого  $\bar{n}$ , так как члены, содержащие  $R$ , примерно в  $10^3$  раз меньше. Кроме того, на относительно небольшом интервале (порядка суток) можно принять, что скорости всех аргументов переменной постоянны. Поэтому можно записать

$$\frac{d\varphi}{dt} = (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{\bar{n}} + k(\dot{\Omega} - \omega_3) = \bar{n}\gamma_{lkpq}; \quad (4.3.18)$$

$$\gamma_{lkpq} = [(l - 2p)\frac{\dot{\omega}}{\bar{n}} + (l - 2p + q) + k\frac{\dot{\Omega}}{\bar{n}} - k\frac{\dot{\omega}_3}{\bar{n}}]. \quad (4.3.19)$$

Основными в (4.3.19) являются слагаемые  $(l - 2p + q)$  и  $k\omega_3/\bar{n}$ . Остальные, как правило, намного меньше. Уравнение (4.3.18) позволяет освободиться в разложении (4.1.8) от двух быстрых переменных, так как параметр  $\gamma_{lkpq}$  принимается постоянным. При подстановке возмущающей функции (4.1.8) в уравнения движения необходимо вычислять интегралы вида (П4.6), (П4.7).

В тех случаях, когда  $\gamma_{lkpq} \neq 0$ , интегралы (П4.6), (П4.7) являются периодическими функциями "быстрых" переменных  $M$ ,  $S$ . Это означает, что в этих случаях тессеральные гармоники не вызывают вековых и долгопериодических возмущений элементов орбит, а порождают лишь короткопериодические возмущения с периодами, кратными  $T_\Omega$  и одним суткам.

Если же

$$\gamma_{lkpq} = 0, \quad (4.3.20)$$

то картина резко меняется. Угловая переменная  $\varphi$  оказывается "медленной", короткопериодические возмущения исчезают. Интегралы (П4.6), (П4.7) в этом случае будут равны

$$I_{lkpq}^{(1)} = \bar{n}(t - t_0) \begin{cases} -C_{lk}\sin\varphi + d_{lk}\cos\varphi, (l - k) - \text{четное,} \\ C_{lk}\cos\varphi + d_{lk}\sin\varphi, (l - k) - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (4.3.21)$$

$$I_{lkpq}^{(2)} = \bar{n}(t - t_0) \begin{cases} C_{lk}\cos\varphi + d_{lk}\sin\varphi, (l - k) - \text{четное,} \\ C_{lk}\sin\varphi - d_{lk}\cos\varphi, (l - k) - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Возникает резонансный характер эволюции элементов орбит. Угловая переменная

$$\varphi = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M - k(\Omega - S) \quad (4.3.22)$$

разложения гравитационного потенциала в форме Каулы перестает быть "быстрой" переменной. Это происходит тогда, когда параметр

$$\gamma_{lkpq} = (l - 2p) \frac{\dot{\omega}}{\bar{n}} + (l - 2p + q) + k \frac{\dot{\Omega}}{\bar{n}} - k \frac{\omega_3}{\bar{n}} \quad (4.3.23)$$

становится величиной, близкой к нулю, т.е.

$$\gamma_{lkpq} = 0. \quad (4.3.24)$$

Если же учесть, что величины  $\dot{\omega}/\bar{n}$  и  $\dot{\Omega}/\bar{n}$ , входящие в (4.3.23), малы, то приближенно получаем

$$\frac{\omega_3}{\bar{n}} \approx \frac{l - p + q}{k}. \quad (4.3.25)$$

Условие (4.3.25) означает, что существует временной интервал

$$\tilde{T} = \bar{n}(l - p + q)T_{\Omega}, \quad (4.3.26)$$

в течение которого КА и Земля делают целое число оборотов. Через интервал  $\tilde{T}$  спутник проходит над теми же точками Земли, что и на предыдущем цикле. Возмущения от одних и тех же аномалий гравитационного поля, повторяясь с периодом  $\tilde{T}$ , как бы раскачивает спутник на орбите. Наиболее сильный резонанс проявляется тогда, когда  $(l - 2p + q)$  и  $k$  являются малыми взаимно простыми числами. Этому соответствуют периоды обращения 12, 24, 36 ч и т.д.

Приведенные выше общие выражения для возмущений от тессеральных гармоник считаются справедливыми и в резонансном случае. При этом необходимо вычислять интегралы  $I_{lkpq}^{(1)}$ ,  $I_{lkpq}^{(2)}$  по формулам (П4.6), (П4.7). Введем обозначения

$$f^{(1)}(\varphi_{lkpq}) = \begin{cases} -C_{lk} \sin \varphi_{lkpq} + d_{lk} \cos \varphi_{lkpq} & (l - k) - \text{четное,} \\ C_{lk} \cos \varphi_{lkpq} + d_{lk} \sin \varphi_{lkpq} & (l - k) - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (4.3.27)$$

$$f^{(2)}(\varphi_{lkpq}) = \begin{cases} C_{lk} \cos \varphi_{lkpq} + d_{lk} \sin \varphi_{lkpq} & (l - k) - \text{четное,} \\ C_{lk} \sin \varphi_{lkpq} - d_{lk} \cos \varphi_{lkpq} & (l - k) - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (4.3.28)$$

$$\varphi_{lkpq} = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + k(\Omega - S),$$

а также используя (П4.1) ... (П4.6) и (4.3.21), резонансные возмущения за оборот спутника можно записать в виде

$$\delta a(2\pi)_{lk} = 4\pi a \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma F_{lkp}(i) \Sigma G_{lpq}(e) \frac{k\omega_3}{\bar{n}} f^{(1)}(\varphi_{lkpq}); \quad (4.3.29)$$

$$\begin{aligned} \delta e(2\pi)_{lk} &= 2\pi(1 - e^2)^{1/2} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma F_{lkp}(i) \times \\ &\times \Sigma G_{lpq}(e) \frac{(1 - e^2)^{1/2} (l - 2p + q) - (l - 2p)}{e} f^{(1)}(\varphi_{lkpq}); \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

$$\begin{aligned} \delta i(2\pi)_{lk} &= 2\pi \frac{\operatorname{cosec} i}{(1 - e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma F_{lkp}(i) \times \\ &\times \Sigma G_{lpq}(e) [(l - 2p) \cos i - k] f^{(1)}(\varphi_{lkpq}); \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega(2\pi)_{lk} &= 2\pi \frac{\operatorname{cosec} i}{(1 - e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma \frac{dF_{lkp}(i)}{di} \times \\ &\times \Sigma G_{lpq}(e) f^{(2)}(\varphi_{lkpq}); \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

$$\begin{aligned} \delta \omega(2\pi)_{lk} &= (1 - e^2)^{1/2} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma \Sigma \left[ \frac{1}{2} F_{lkp}(i) \times \right. \\ &\times \left. \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - \frac{\operatorname{ctg} i}{1 - e^2} \frac{dF_{lkp}}{di} G_{lpq}(e) \right] f^{(2)}(\varphi_{lkpq}). \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

В правые части усредненных или разностных уравнений нужно включать те выражения вида (4.3.29) ... (4.3.33), у которых индексы  $l, k, p, q$  удовлетворяют условию (4.3.24) с точностью до некоторой малой величины  $\epsilon$ .

Выражения для возмущений средней аномалии, соответствующие общему решению (4.3.9) в резонансном случае, принимают вид

$$\begin{aligned} \delta M(t)_{lk} &= - \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \Sigma \Sigma \left\{ \frac{3}{2} F_{lkp}(i) G_{lpq}(e) \times \right. \\ &\times (l - 2p + q) f^{(1)}(\varphi_{lkpq}) [\bar{n}(t - t_0)]^2 + \\ &+ \left[ \frac{1 - e^2}{e} F_{lkp}(i) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - 2(l + 1) F_{lkp}(i) \times \right. \\ &\left. \left. \times G_{lpq}(e) \right] f^{(2)}(\varphi_{lkpq}) [\bar{n}(t - t_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

В этом проявилась характерная особенность резонансного режима, сос-

тощая в том, что в возмущении средней аномалии присутствуют члены, пропорциональные квадрату времени.

**Приближенная методика исследования резонансных явлений.** Наличие квадратичного члена в выражении (4.3.34) позволяет считать вековой член основным и пренебречь остальными. Следовательно, вторую производную средней аномалии можем записать в виде

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -3\bar{n}^2 \sum_l \sum_k \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{lkp}(i) \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e)(l-2p+q)f^{(1)}(\varphi_{lkpq}), \quad (4.3.35)$$

где  $f^{(1)}(\varphi_{lkpq})$  в соответствии с (4.3.27) является функцией аргумента  $\varphi_{lkpq}$ .

Аналогично и в выражении для  $\varphi_{lkpq}$  (4.3.28) слагаемое правой части, содержащее  $M$ , можно считать основным:

$$\frac{d^2 \varphi_{lkpq}}{dt^2} = (l-2p+q) \frac{d^2 M}{dt^2}. \quad (4.3.36)$$

Подставляя (4.3.35) в (4.3.36), получаем систему уравнений

$$\frac{d^2 \varphi_{lkpq}}{dt^2} = -(l-2p+q)3\bar{n}^2 \sum_l \sum_k \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \times \\ \times \sum F_{lkp}(i) \sum G_{lpq}(e)(l-2p+q)f^{(1)}(\varphi_{lkpq}). \quad (4.3.37)$$

Число этих уравнений равно числу тех комбинаций индексов, для которых удовлетворяются условия резонанса (4.3.20). По этим же индексам ведется суммирование в правой части выражения (4.3.37).

В частном случае, когда условие резонанса удовлетворяет только одна комбинация индексов, система (4.3.37) превращается в одно уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_{lkpq}}{dt^2} = -3\bar{n}^2 (l-2p+q)^2 \times \\ \times \left(\frac{r_3}{a}\right)^l F_{lpq}(i) G_{lpq}(e) f^{(1)}(\varphi_{lkpq}). \quad (4.3.38)$$

Выражение (4.3.38) можно упростить, перейдя от времени к аргументу  $M$  ( $dM = \bar{n} dt$ ), преобразовав функцию  $f^{(1)}(\varphi_{lkpq})$  к виду

$$f_{lkpq}^{(1)} = -I_{lk} \sin(\varphi_{lkpq} - \psi_{lk}), \quad (4.3.39)$$

где  $I_{lk} = \sqrt{C_{lk}^2 + d_{lk}^2}$ ;

$$\psi_{lk} = \begin{cases} \psi_{lk}^* & (l - k) - \text{четное,} \\ \psi_{lk}^* + \frac{\pi}{2} & (l - k) - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (4.3.40)$$

$$\psi_{lk}^* = \begin{cases} \arcsin \frac{d_{lk}}{I_{lk}} & \text{при } \frac{C_{lk}}{I_{lk}} \geq 0, \\ \arcsin \frac{d_{lk}}{I_{lk}} + \pi & \text{при } \frac{C_{lk}}{I_{lk}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.42)$$

и, введя переменную

$$L_{lkpq} = (\varphi_{lkpq} - \psi_{lk}), \quad (4.3.43)$$

получим

$$\frac{d^2 L_{lkpq}}{dM^2} = D_{lkpq}^2 \sin L_{lkpq}; \quad (4.3.44)$$

$$D_{lkpq}^2 = 3\bar{n}^2 (l - 2p + q)^2 \left(\frac{r_3}{a}\right)^2 F_{lkpq}(i) G_{lpq}(e) I_{lk}, \quad (4.3.45)$$

где величина  $L_{lkpq}$  представляет собой осредненную долготу восходящего узла относительно Гринвича.

Дифференциальное уравнение (4.3.44) имеет интеграл, который получается после умножения правой и левой частей на  $2 \frac{dL_{lkpq}}{dM}$  :

$$\left(\frac{dL}{dM}\right)^2 + 2D^2 \cos L = \text{const} = \left(\frac{dL}{dM}\right)_0^2 + 2D^2 \cos L_0. \quad (4.3.46)$$

В (4.3.46) индекс  $lkpq$  для удобства изложения опущен. Колебания  $L$  имеют место в том случае, если в одной из точек  $L_{\max}$  скорость  $dL/dM$  равна нулю. Это происходит при условии

$$\left(\frac{dL}{dM}\right)_0^2 \leq 2D^2 (-\cos L_0 + \cos L_{\max}) \leq 4D^2. \quad (4.3.47)$$

Следовательно, максимальное значение начальной скорости в точке  $L_0 = 0$ , при которой еще возможны колебания, равно

$$\left(\frac{dL}{dM}\right)_{0\max} = 2D. \quad (4.3.48)$$

Этой скорости соответствует размах колебаний  $\pm\pi$ . При большей началь-

ной скорости не будет происходить остановка в точке  $L_{\max} = \pm\pi$ . Отсутствие начальной скорости  $(\frac{dL}{dM})_0$  в начальной точке  $L_0$  приводит к колебаниям с амплитудой  $L_0$  около положения устойчивого равновесия. Период колебания определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{\sqrt{[(\frac{dL}{dM})_0^2 - 2D^2 \cos L_0] + 2D^2 \cos L}} = dM \quad (4.3.49)$$

и равен

$$T_M = \frac{2\sqrt{2}}{D} F(\sin L_{\max}, \frac{\pi}{2}), \quad (4.3.50)$$

где  $F(\sin L_{\max}, \frac{\pi}{2})$  – эллиптический интеграл первого рода.

#### 4.4. ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КА С УЧЕТОМ АТМОСФЕРНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Задача определения возмущений орбит от тормозящего воздействия атмосферы является сложной и существенным образом зависит от используемых моделей атмосферы. В свою очередь, все существующие модели являются приближенными, и отличие истинного значения плотности от ее значений, определяемых по модели, может составлять десятки процентов. Методы решения задачи определения возмущений нашли отражения к настоящему времени в работах П.Е. Эльясберга [34], А.И. Назаренко [17, 19] и других авторов [11, 22]. В перечисленных работах рассмотрено влияние основной составляющей и воздействие дополнительных факторов: учет в модели атмосферы второй зональной гармоник, сжатия Земли, влияние солнечного ветра атмосферы, влияние вращения атмосферы. Достаточно точный учет тормозящего влияния атмосферы, как правило, целесообразно учитывать только при решении задач баллистического сопровождения. При баллистическом же проектировании зачастую достаточно воспользоваться качественной оценкой эволюции орбитальных параметров.

Для этой цели приемлемо рассматривать движение КА без учета движения слоев атмосферы [в выражении (1.4.5)  $W = 0$ ]. Подстановкой (1.4.5) в (4.1.22), (4.1.25) можно получить уравнения [17]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho k_\delta \sqrt{\frac{\mu}{p}} \bar{f}_\varepsilon(\varepsilon, u), \quad \varepsilon = a, \dots, i, \quad (4.4.1)$$

$$\text{где } f_a(\varepsilon, u) = -2a \frac{(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)^{3/2}}{1 - e^2};$$

$$\begin{aligned}
 f_l(\bar{\Theta}, a) &= -2(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)^{1/2}(\cos u + l); \\
 f_h(\bar{\Theta}, \bar{u}) &= -2(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)^{1/2}(\sin u + h); \\
 f_i(\bar{\Theta}, \bar{u}) &= f_\Omega(\bar{\Theta}, u) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.2}$$

Перейдя в уравнениях (4.4.1) к аргументу  $u$  и учитывая в нем только возмущения первого порядка  $C_{20}$ , выражение (4.4.1) может быть представлено в виде [17]

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\Theta}}{du} &= (k_\delta \rho p_0) \frac{r^2}{p_0 p} \bar{f}_3(\bar{\Theta}, u) - \\
 &- (k_\delta \rho p_0) C_{20} \frac{r^2}{p_0 p} \bar{f}_3(\bar{\Theta}, u) \varphi(\bar{\Theta}, u) + O[C_{20}^2(k_\delta \rho p_0)].
 \end{aligned}
 \tag{4.4.3}$$

Безразмерный малый параметр  $(k_\delta \rho p_0)$  имеет порядок  $(10^{-4} \dots 10^{-6})$ . Лишь для КА с малым временем существования он может превышать это значение. Поэтому в выражении (4.4.3) вторым слагаемым можно пренебречь. По аналогичным соображениям и в первом слагаемом можно пренебречь возмущениями порядка  $C_{20}$ . В итоге уравнения примут вид

$$\frac{d\bar{\Theta}}{du} = (k_\delta \rho p_0) \frac{f_3(\bar{\Theta}_0, u)}{(1 + l_0 \cos u + h_0 \sin u)^2} + O[C_{20}(k_\delta \rho p_0)].
 \tag{4.4.4}$$

Основная трудность в интегрировании этих уравнений связана с функцией  $\rho(\dots)$ , задаваемой моделью вида (1.4.2). Ее можно упростить, считая в ней ряд аргументов постоянными  $(F, k_p, \alpha_\odot, \delta_\odot, t)$ . Тогда модель (1.4.2) можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 f(\hat{h}) [1 + \varphi_{\text{взд}}(\hat{h}, \alpha, \delta)],
 \tag{4.4.5}$$

где  $\hat{h}$  – высота рассматриваемой точки со сферическими координатами  $(r, \alpha, \delta)$  над некоторой поверхностью;  $\varphi_{\text{взд}}(\hat{h}, \alpha, \delta)$  – функция, учитывающая симметрию модели атмосферы (“солнечное вздутие”);  $\rho_0$  – константа, имеющая смысл плотности в некоторой точке с координатами  $(\hat{h}_0, \alpha_0, \delta_0)$ . Функции  $f(\hat{h})$ ,  $\varphi_{\text{взд}}(\hat{h}, \alpha, \delta)$  удовлетворяют условиям

$$f(\hat{h}_0) = 1, \varphi_{\text{взд}}(\hat{h}_0, \alpha_0, \delta_0) = 0.$$

Уравнение поверхности, от которой отсчитывается высота, принимает в виде

$$r(\delta) = R(1 - \epsilon \sin^2 \delta),
 \tag{4.4.6}$$

где  $R$  – номинальный радиус (например, равный высоте перигея орбиты).



Уравнение (4.4.6) представляет собой сфероид со сжатием  $\epsilon$ . Высота  $\hat{h}$  для точки  $(r, \varphi, \lambda)$  по отношению к поверхности (4.4.6), проходящей через точку  $(r_0, \alpha_0, \delta_0)$ , определяется разницей

$$\hat{h} = r - r(\delta) = r(\varphi, \lambda) - r(\delta), \quad (4.4.7)$$

где  $r(\delta)$  – геоцентрическое расстояние точки с координатами  $(\alpha, \delta)$ , лежащей на названной поверхности. Величины  $r, r_0$  находятся из уравнений

$$r(\delta) = R(1 - \epsilon \sin^2 \delta); \quad r_0 = R(1 - \epsilon \sin^2 \delta_0),$$

откуда

$$r(\delta) = r_0 \frac{1 - \epsilon \sin^2 \delta}{1 - \epsilon \sin^2 \delta_0} = r_0 [1 - \epsilon(\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_0) + O(\epsilon^2)]. \quad (4.4.8)$$

Можно найти зависимость между плотностью в произвольной точке орбиты и плотностью в перигее  $\rho_{\Pi}$ , пользуясь выражением (4.4.5), из которого следует

$$\rho = \rho_{\Pi} \frac{f(\hat{h})}{f(\hat{h}_{\Pi})} \frac{1 + \varphi_{\text{ВЗД}}(\hat{h}, \alpha, \delta)}{1 + \varphi_{\text{ВЗД}}(\hat{h}_{\Pi}, \alpha_{\Pi}, \delta_{\Pi})}. \quad (4.4.9)$$

Функцию  $f(\hat{h})/f(\hat{h}_{\Pi})$  в окрестности точки с высотой  $\hat{h}_{\Pi}$  можно аппроксимировать выражением

$$\frac{f(\hat{h})}{f(\hat{h}_{\Pi})} = \exp\left(-\frac{\hat{h} - \hat{h}_{\Pi}}{H}\right), \quad (4.4.10)$$

где  $H$  – высота однородной атмосферы (см. гл. 1).

После подстановки (4.4.10) в (4.4.9), получим

$$\rho = \rho_{\Pi} \exp\left(-\frac{\hat{h} - \hat{h}_{\Pi}}{H}\right) \frac{1 + \varphi_{\text{ВЗД}}(\hat{h}, \alpha, \delta)}{1 + \varphi_{\text{ВЗД}}(\hat{h}_{\Pi}, \alpha_{\Pi}, \delta_{\Pi})}. \quad (4.4.11)$$

Поверхность (4.4.6), от которой отсчитывается высота, можно провести через перигей ( $R = r_{\Pi}$ ). Тогда на основе (4.4.7) и (4.4.8) можно записать

$$\hat{h} - \hat{h}_{\Pi} = r - r_{\Pi} + r_{\Pi} \epsilon (\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_{\Pi}). \quad (4.4.12)$$

Радиус  $r$  определяется с учетом зональной гармоники. Тогда (4.4.12) переписывается в виде [17]

$$\begin{aligned} \hat{h} - \hat{h}_{\Pi} &= r^{(0)} - r_{\Pi}^{(0)} + (\delta r - \delta r_{\Pi}) + \\ &+ r_{\Pi} \epsilon (\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_{\Pi}) = r^{(0)} - r_{\Pi}^{(0)} + \delta \hat{h}, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

где  $r^{(0)} = \frac{p_0}{1 + l_0 \cos u + h_0 \sin u}$  – невозмущенный радиус;

$$\delta \hat{h} = (\delta r - \delta r_{\Pi}) + r_{\Pi} \epsilon (\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_{\Pi}). \quad (4.4.14)$$

В (4.4.14) первое слагаемое учитывает отличие возмущенной траектории от эллипса, второе слагаемое отражает особенность модели атмосферы, заключающуюся в том, что высота в ней отсчитывается от сфероида, имеющего ту же постоянную сжатия  $\epsilon$ , что и у Земли. Оба слагаемых одного порядка и могут достигать величины  $\sim 10$  км. Составляющую  $\delta \hat{h}$  необходимо учитывать при интегрировании уравнений (4.4.4), так как ее вклад в соответствии с (4.4.11) в атмосферном возмущении может достигать  $\sim 0,1 \delta \mathcal{E} \rho$ . При интегрировании уравнений (4.4.4) основной вклад в атмосферные возмущения дает составляющая функции (4.4.11), соответствующая движению по эллиптической орбите (промежуточной) без учета второй зональной гармоники, сжатия Земли и "солнечного вздутия" атмосферы. Рассмотрим эту основную составляющую. Она определяется на основе соотношений (4.4.11), (4.4.13), в которых принимается  $\delta h = 0$ ,  $\varphi_{\text{ВЗД}}(\dots) = 0$ . Результаты интегрирования уравнений (4.4.4) на интервале  $(0, 2\pi)$  получены в работах [34, 35]:

$$\begin{aligned} \delta a_{\rho}^{(0)} = & -4\pi(k_{\delta} \rho_{\Pi} p) \frac{a^2}{p} \exp(-z) \left\{ I_0(z) + \right. \\ & \left. + 2eI_1(z) + \frac{3}{4} e^2 [I_0(z) + I_2(z)] + \dots \right\}; \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

$$\begin{aligned} \delta I_{\rho}^{(0)} = & -4\pi(k_{\delta} \rho_{\Pi} p) \exp(-z) \left\{ I_1(z) + \frac{1}{2} e [I_0(z) + \right. \\ & \left. + I_2(z)] + \frac{1}{8} e^2 [3I_1(z) + I_3(z)] + \dots \right\} \cos \omega; \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{\rho}^{(0)} = & -4\pi(k_{\delta} \rho_{\Pi} p) \exp(-z) \left\{ I_1(z) + \frac{1}{2} e [I_0(z) + \right. \\ & \left. + I_2(z)] + \frac{1}{8} e^2 [3I_1(z) + I_3(z)] + \dots \right\} \sin \omega; \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

$$\delta i_{\rho}^{(0)} = \delta \Omega_{\rho}^{(0)} = 0, \quad (4.4.18)$$

здесь  $z = \frac{ae}{H}$ ; (4.4.19)

$I_n(z)$  – бесселевы функции мнимого аргумента, которые удовлетворяют соотношениям

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos E) \cos n E dE. \quad (4.4.20)$$

Вычисления бесселевых функций для практических задач при значениях аргумента ( $z < 1,5$ ) и  $z > 1,5$  приведены в работе [17].

**Качественный анализ орбитальной эволюции в атмосфере.** Сложность правых частей усредненных уравнений не позволяет, как правило, получить достаточно точное аналитическое решение с учетом атмосферного торможения, пригодное для больших временных интервалов прогнозирования. Аналитическое решение удастся построить лишь для частных случаев при существенных упрощающих предпосылках и допущениях. Вместе с тем эти случаи могут быть полезными в процессе баллистического проектирования. Рассмотрим их.

1. В основной составляющей возмущения полуоси (4.4.15) при достаточно малых значениях  $e$  и  $z$  можно принять

$$I_0(z) = 1; I_1(z) = I_2(z) = I_3(z) = 0; \exp(-z) = 1;$$

$$p = a; \rho_{\Pi} = \rho_{\Pi 0} \exp\left(-\frac{a - a_0}{H}\right).$$

Тогда усредненное уравнение первого приближения для полуоси может быть представлено в виде

$$\frac{da}{dN} = \left(\frac{da}{dN}\right)_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{a - a_0}{H}\right). \quad (4.4.21)$$

Принимая  $(a/a_0)^2 \approx 1$  и интегрируя (4.4.21), можно получить

$$a = a_0 + H \ln\left[1 + \left(\frac{da}{dN}\right)_0 \frac{N}{H}\right]. \quad (4.4.22)$$

Из (4.4.22) следует, что если в начальной точке  $(da/dN)_0 < 0$ , то полуось  $a$  будет неограниченно уменьшаться, пока спутник не сгорит в нижних слоях атмосферы. Время существования в витках можно определить из условия

$$1 + \left(\frac{da}{dN}\right)_0 \frac{N_{\text{сущ}}}{H} = 0,$$

$$\text{откуда } N_{\text{сущ}} = -\frac{H}{(da/dN)_0}. \quad (4.4.23)$$

Принимая

$$\left(\frac{da}{dN}\right) = -4\pi\rho_{00} \left(\exp - \frac{\hat{h}_0 - \hat{h}_{00}}{H}\right) k_{\delta} a_0^2,$$

получим зависимость времени существования от высоты  $\hat{h}_0$ :

$$N_{\text{сущ}} = \beta \left(\exp \frac{\hat{h}_0}{H}\right) H \frac{1}{k_{\delta}}, \quad (4.4.24)$$

здесь  $\beta$  – некоторая постоянная величина.

Из (4.4.24) следует что с ростом высоты  $\hat{h}_0$  время существования резко возрастает.

2. Для орбит с большим эксцентриситетом ( $z \gg 1$ ) имеют место приближенные уравнения

$$\frac{da}{dN} = -4\pi(k_\delta \rho_{\Pi} a) \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}; \quad (4.4.25)$$

$$\frac{de}{dN} = -4\pi(k_\delta \rho_{\Pi} a) \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}; \quad (4.4.26)$$

$$\frac{dz}{dN} = \frac{e}{H} \frac{da}{dN} + \frac{a}{N} \frac{de}{dN} = -4\pi(k_\delta \rho_{\Pi} a) \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left( z + \frac{a}{H} \right). \quad (4.4.27)$$

Из (4.4.27) и (4.4.25) можно получить

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{H} + \frac{z}{a}. \quad (4.4.28)$$

Здесь в правой части  $z/a \ll 1/H$ , поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Интегрирование (4.4.28) дает

$$a = a_0 - H(z_0 - z) = a_0 - (a_0 e - ae). \quad (4.4.29)$$

Полученное решение дает возможность исследовать изменение высоты перигея, для которой, пренебрегая величиной  $\delta \hat{h}$ , на основе (4.4.13) можно записать выражение

$$(\hat{h}_{\Pi} - \hat{h}_{\Pi 0}) = a(1 - e) - a_0(1 - e_0) = 0. \quad (4.4.30)$$

Из (4.4.30) следует, что при больших  $z$  орбита деформируется таким образом, что высота перигея не изменяется (полуось  $a$  и величина  $ae$  уменьшаются так, что их разность остается постоянной), орбита становится "более круглой".

Изменение величины  $z$  во времени получается интегрированием уравнения (4.4.27), используя условие  $z \ll a/H$ :

$$z^{3/2} = z_0^{3/2} - 3\sqrt{2\pi}(k_\delta \rho_{\Pi 0} a_0) \frac{a_0}{H} N. \quad (4.4.31)$$

Решение позволяет приближенно оценить время существования КА с большим эксцентриситетом, если за условие прекращения существования принять  $z = 0$ . Такой подход приводит к решению

$$N_{\text{сущ}} = \frac{Hz_0^{3/2}}{3\sqrt{2\pi}(k_\delta \rho_{\Pi 0} a_0) a_0}. \quad (4.4.32)$$

Воспользовавшись для множителя  $(k_\delta \rho_{п0} a_0)$  выражением (4.4.25), запишем

$$N_{\text{сущ}} = - \frac{2}{3} \frac{Hz_0}{\left(\frac{da}{dN}\right)_0}. \quad (4.4.33)$$

Сравнение (4.4.33) и (4.4.23) показывает, что при  $z_0 \gg 1$  процесс уменьшения  $z$  от  $z_0$  до 0 длится намного дольше уменьшения высоты круговой орбиты до падения на Землю. Это закономерно, так как при фиксированной высоте перигея влияние торможения при движении по круговой орбите намного больше, чем при движении по эллиптической орбите.

#### 4.5. ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ТЕЛ НА ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КА

Для оценки орбитальной эволюции космических аппаратов на длительных временных интервалах с учетом притяжения внешних тел целесообразно применять численно-аналитические методы прогнозирования. Вместе с тем на коротких временных интервалах  $(b - a) < T$  или при прогнозе на несколько витков в задачах баллистического сопровождения иногда используют численные методы интегрирования дифференциальных уравнений движения с учетом в правых частях возмущающих ускорений от притяжения Луны и Солнца [7, 17].

Удобные для практики результаты для определения орбитальной эволюции под влиянием притяжения внешних тел получены М.Л. Лидовым [15]. Изменение орбит в первом приближении определяется как вековой уход, изменяющий форму и расположение орбиты в пространстве к ее первоначальному положению. При выходе точных формул эволюции орбит в качестве исходных использовались уравнения (ПЗ.1), где в качестве независимой переменной принимается истинная аномалия. Для интегрирования уравнений с учетом притяжения Луны и Солнца возмущения  $S$ ,  $T$ ,  $W$  записываются в виде [15]:

в первом приближении

$$\begin{aligned} S_1^{(k)} &= \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} [3\xi^2 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\xi) - 1]; \\ T_1^{(k)} &= -3 \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} \xi^2 \cos(\vartheta - \vartheta_\xi) \sin(\vartheta - \vartheta_\xi); \\ W_1^{(k)} &= 3 \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} \xi_3 \xi \cos(\vartheta - \vartheta_\xi); \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

во втором приближении

$$\begin{aligned}
 S_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} [\xi^3 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\xi) - \frac{3}{5} \xi \cos(\vartheta - \vartheta_\xi)]; \\
 T_2^{(k)} &= -\frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} [\xi^3 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\xi) \times \\
 &\times \sin(\vartheta - \vartheta_\xi) - \frac{1}{5} \xi \sin(\vartheta - \vartheta_\xi)]; \\
 W_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} \xi_3 [\xi^2 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\xi) - \frac{1}{5}],
 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — направляющие косинусы радиуса-вектора  $\vec{r}_k$  в системе координат  $O_0 X_\omega Y_\omega Z_\omega$ ,  $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ . В (4.5.1), (4.5.2)  $\vartheta_\xi$  — истинная аномалия проекции вектора  $\vec{r}_k$  на плоскость орбиты;  $\sin \vartheta_\xi = \xi_2/\xi$ ,  $\cos \vartheta_\xi = \xi_1/\xi$ ; индекс  $k$  здесь и далее для простоты изложения опущен. Если ввести обозначения:

$$\Delta = 1 + e \cos \vartheta, \quad p = r \Delta, \tag{4.5.3}$$

$$\alpha_1 = \xi_1^4 \Delta_k^4, \quad \alpha_2 = \xi_2^4 \Delta_k^4, \quad \alpha_3 = \xi_3^4 \Delta_k^4,$$

$$\beta_1 = \xi_1^2 \Delta_k^3, \quad \beta_2 = \xi_2^2 \Delta_k^3, \quad \beta_3 = \xi_1 \xi_2 \Delta_k^3,$$

$$\beta_4 = \xi_2 \xi_3 \Delta_k^3, \quad \beta_5 = \xi_1 \xi_3 \Delta_k^3, \quad \beta_6 = \Delta_k^3, \tag{4.5.4}$$

$$\gamma_1 = \xi_1^3 \Delta_k^4, \quad \gamma_2 = \xi_2^3 \Delta_k^4, \quad \gamma_3 = \xi_1^2 \xi_2 \Delta_k^4,$$

$$\gamma_4 = \xi_1^2 \xi_3 \Delta_k^4, \quad \gamma_5 = \xi_2^2 \xi_3 \Delta_k^4, \quad \gamma_6 = \xi_2^2 \xi_1 \Delta_k^4,$$

$$\gamma_7 = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \Delta_k^4,$$

то выражения (4.5.1), (4.5.2) можно представить в виде

$$S_1^{(k)} = 3 \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p}{p_k} [\beta_1 \cos^2 \vartheta + 2\beta_3 \cos \vartheta \sin \vartheta - \frac{\beta_6}{3} + \beta_2 \sin^2 \vartheta] \frac{1}{\Delta};$$

$$T_1^{(k)} = -3 \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p}{p_k} [(\beta_1 - \beta_2) \cos \vartheta \sin \vartheta + \beta_3 (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta)] \frac{1}{\Delta}; \tag{4.5.5}$$

$$W_1^{(k)} = 3 \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p}{p_k} [\beta_5 \cos \vartheta + \beta_4 \sin \vartheta] \frac{1}{\Delta};$$

$$\begin{aligned}
 S_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p^2}{p_k^2} [\gamma_1 \cos^3 \vartheta + 3\gamma_3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 3\gamma_6 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \\
 &+ \gamma_2 \sin^3 \vartheta - \frac{3}{5} \alpha_1 \cos \vartheta - \frac{3}{5} \alpha_2 \sin \vartheta] \frac{1}{\Delta^2}; \\
 T_2^{(k)} &= - \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p^2}{p_k^2} [-\gamma_3 \cos^3 \vartheta + (\gamma_1 - 2\gamma_6) \times \\
 &\times \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + (2\gamma_3 - \gamma_2) \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \\
 &+ \gamma_6 \sin^3 \vartheta - \frac{1}{5} \alpha_1 \sin \vartheta + \frac{1}{5} \alpha_2 \cos \vartheta] \frac{1}{\Delta^2}; \\
 W_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{p_k^2} \frac{p^2}{p_k^2} [\gamma_4 \cos^2 \vartheta + 2\gamma_7 \cos \vartheta \sin \vartheta + \\
 &+ \gamma_7 \sin^2 \vartheta - \frac{\alpha_3}{5}] \frac{1}{\Delta^2}.
 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

При интегрировании уравнений используется ряд допущений:

для широкого класса орбит принимается  $\gamma = 1$ ;

значения оскулирующих элементов  $p, e, \dots$  на  $n$ -м витке представляются в виде суммы их постоянной части в некоторой точке орбиты и переменной части  $\delta p, \delta e, \dots$ ;

в течение одного оборота спутника переменность величин  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  определяется движением возмущающих тел в пространстве, их можно представить в виде рядов

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \alpha_j^* + \left(\frac{d\alpha_j}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha_j}{dt^2}\right)^* \Delta t^2 + \dots; \\
 \beta_j &= \beta_j^* + \left(\frac{d\beta_j}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta_j}{dt^2}\right)^* \Delta t^2 + \dots; \\
 \gamma_j &= \gamma_j^* + \left(\frac{d\gamma_j}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\gamma_j}{dt^2}\right)^* \Delta t^2 + \dots,
 \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

где  $t^*$  – некоторый фиксированный момент времени.

Для получения приращения элементов орбит за виток в явном виде выражения для возмущающих ускорений (4.5.5), (4.5.6) подставляются в уравнения движения (ПЗ.1) и интегрируются по истинной аномалии от 0 до  $2\pi$ . Результатом являются формулы для определения изменения

элементов орбиты под влиянием притяжения  $k$ -го внешнего тела за один оборот

$$\Delta_1^{(k)} p, \Delta_1^{(k)} e, \Delta_1^{(k)} \omega; \Delta_1^{(k)} \Omega, \Delta_1^{(k)} i;$$

$$\Delta_2^{(k)} p, \Delta_2^{(k)} e, \Delta_2^{(k)} \omega, \Delta_2^{(k)} \Omega, \Delta_2^{(k)} i,$$

где нижний индекс указывает на использованное приближение в разложении возмущающего ускорения. Каждое из приращений элементов можно записать в виде  $\Delta_j^{(k)} x = \sum_s \Delta_{js} x$ . Например, для эксцентриситета

$$\Delta_1^{(k)} e = \Delta_{11}^{(k)} e + \Delta_{12}^{(k)} e + \Delta_{13}^{(k)} e + \dots;$$

$$\Delta_2^{(k)} e = \Delta_{21}^{(k)} e + \Delta_{22}^{(k)} e + \Delta_{23}^{(k)} e + \dots$$
(4.5.8)

Конечные формулы для приращения элементов орбит, полученных с учетом перечисленных допущений, имеют вид

$$\Delta_{11} a = 0;$$

$$\Delta_{11} e = -15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 e \epsilon_0^{1/2} \beta_3;$$

$$\Delta_{11} i = 15\pi \frac{\mu_k}{p_k} \left(\frac{a}{p_k}\right) \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}} \left[ \left(1 - \frac{4}{5} \epsilon_0 \beta_5\right) \cos \omega - \frac{1}{5} \epsilon_0 \beta_4 \sin \omega \right];$$

$$\Delta_{11} \Omega = 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \sin i} \left[ \left(1 - \frac{4}{5} \epsilon_0\right) \beta_5 \times \right.$$

$$\left. \times \sin \omega + \frac{1}{5} \epsilon_0 \beta_4 \cos \omega \right];$$

$$\Delta_{11} \omega = 3\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \epsilon_0^{1/2} [4\beta_1 - \beta_2 - \beta_6] - \Delta_{11} \Omega \cos i.$$

$$\Delta_{12} a = -\frac{3}{2} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 a T \left[ e(e+4) \left( \frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt} \right) + \right.$$

$$\left. + (2e^2 + 4e - 1) \left( \frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \right];$$
(4.5.9)



$$\Delta_{12}e = -3 \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \epsilon_0 T \left[ \frac{e+4}{4} \left( \frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt} \right) + \left( \frac{1}{8} e - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \right]; \quad (4.5.10)$$

$$\Delta_{12}i = \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 T \left( e^2 + \frac{32}{9} e - \frac{2}{3} \right) \left[ \frac{d\beta_4}{dt} \cos\omega - \frac{d\beta_5}{dt} \sin\omega \right];$$

$$\Delta_{12}\Omega = \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T}{\sin i} \left( e^2 + \frac{32}{9} e - \frac{2}{3} \right) \left[ \frac{d\beta_3}{dt} \cos\omega - \frac{d\beta_4}{dt} \sin\omega \right];$$

$$\Delta_{12}\omega = -3 \frac{\mu_{12}}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T}{e} \left( \frac{9}{8} e^3 + \frac{8}{9} e^2 - e - \frac{4}{3} \right) \frac{d\beta_3}{dt} - \Delta_{12}\Omega \cos i.$$

$$\Delta_{21}a = 0;$$

$$\Delta_{21}e = \frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \epsilon_0^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{6}{7} \epsilon_0\right) \gamma_3 + \frac{\epsilon_0}{7} \gamma_2 - \left(1 - \frac{3}{7} \epsilon_0\right) \frac{\alpha_2}{5} \right];$$

$$\Delta_{21}i = -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\epsilon_0^{1/2}} \left[ \left(1 - \frac{4}{7} \epsilon_0\right) \gamma_4 \cos\omega + \frac{1}{7} \epsilon_0 (\gamma_5 \cos\omega - 2\gamma_7 \sin\omega) - \left(1 - \frac{3}{7} \epsilon_0\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \cos\omega \right]; \quad (4.5.11)$$

$$\Delta_{21}\Omega = -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\epsilon_0^{1/2} \sin i} \left[ \left(1 - \frac{4}{7} \epsilon_0\right) \gamma_4 \sin\omega + \frac{1}{7} \epsilon_0 (\gamma_5 \sin\omega + 2\gamma_7 \cos\omega) - \left(1 - \frac{3}{7} \epsilon_0\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \sin\omega \right];$$

$$\Delta_{21}\omega = -\frac{75}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{\epsilon_0^{1/2}}{e} \left[ \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4}{5} \epsilon_0\right) \gamma_4 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \epsilon_0\right) \gamma_6 - \frac{13}{20} \left(1 - \frac{9}{13} \epsilon_0\right) \alpha_1 \right] - \Delta_{21}\Omega \cos i.$$

В (4.5.9), (4.5.10), (4.5.11) принято  $\epsilon_0 = 1 - e^2$ ,  $a = p/(1 - e^2)$  – большая полуось;  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$  – период обращения, у величин  $\alpha_j^*$ ,  $\beta_j^*$ ,  $\gamma_j^*$

$(\frac{d\beta_j}{dt})^*$  – значок \* опущен.

Для баллистического проектирования на практике при вычислении величин  $\Delta\kappa(\Delta a, \Delta e, \dots)$  целесообразно пользоваться матричной записью. Пусть  $r_k$  – единичный вектор, определяющий направление на возмущающее тело. Проекции  $r_k$  на оси системы координат  $O_0X_\omega Y_\omega Z_\omega$  определяются формулой

$$\xi = \bar{D}_1 \bar{U}_1, \tag{4.5.12}$$

$$\text{где } \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}; \bar{U}_1 = \begin{pmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{pmatrix}. \tag{4.5.13}$$

Матрицу

$$\bar{D}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{33} \end{pmatrix} \tag{4.5.14}$$

можно представить в виде произведения трех матриц

$$\bar{D}_1 = \bar{C}\bar{B}\bar{A}, \tag{4.5.15}$$

где матрица  $\bar{A}$  определяет проекцию вектора  $r_k^p$  на оси геоцентрической системы координат  $O_n X_n Y_n Z_n$ , матрица  $\bar{B}$  определяет переход от системы координат  $O_n X_n Y_n Z_n$  к системе координат  $O_0 X_1 Y_1 Z_1$ , одна из осей которой направлена на восходящий узел орбиты спутника, вторая ось – ортогональна первой и лежит в плоскости орбиты спутника, а третья ось нормальна к плоскости орбиты спутника. Матрица  $\bar{C}$  определяет переход от системы координат  $O_0 X_1 Y_1 Z_1$  к системе  $O_0 X_\omega Y_\omega Z_\omega$ . Перечисленные матрицы имеют вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_k & -\sin \Omega_k \cos i_k \\ \sin \Omega_k & \cos \Omega_k \cos i_k \\ 0 & \sin i_k \end{pmatrix}; \tag{4.5.16}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega \cos i & \cos \Omega \cos i & \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{pmatrix}; \tag{4.5.17}$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.5.18)$$

Представление вектора  $\xi$  в виде (4.5.12) удобно для его дифференцирования и интегрирования по времени или по параметру  $u_k$ . Из интеграла площадей имеем

$$\frac{du_k}{dt} = b_k \Delta_k^2, \quad (4.5.19)$$

$$\text{где } b_k = \frac{2\pi}{T_k \epsilon_k^{3/2}}; \quad \epsilon_k = 1 - e_k^2;$$

$$\Delta_k = 1 + e_k \cos(u_k - \omega_k).$$

Здесь  $T_k$  – период обращения возмущающего тела вокруг центрального. Из (4.5.13) и (4.5.19) следует

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\xi_3}{dt} \end{vmatrix} = \bar{D}_1 \frac{du_1}{dt} = b_k \Delta_k^2 \bar{D}_1 \frac{du_1}{du_k} = b_k \Delta_k^2 \bar{D}_1 \begin{vmatrix} -\sin u_k \\ \cos u_k \end{vmatrix}. \quad (4.5.20)$$

Формулы (4.5.16), (4.5.17), (4.5.18), (4.5.20) дают возможность вычислить величины  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \frac{d\beta_j}{dt}$ , входящие в системы уравнений (4.5.9) ... (4.5.11). Удобно также использовать следующие обозначения векторов:

$$\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}; \quad \bar{\beta} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_5 \end{vmatrix}; \quad \bar{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_7 \end{vmatrix}; \quad (4.5.21)$$

$$\bar{U}_2 = \begin{vmatrix} \cos u_k \\ \cos u_k \sin u_k \\ \sin^2 u_k \end{vmatrix}; \quad \bar{U}_3 = \begin{vmatrix} \cos^3 u_k \\ \cos^2 u_k \sin u_k \\ \cos u_k \sin^2 u_k \\ \sin^3 u_k \end{vmatrix}. \quad (4.5.22)$$

Векторы  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  можно представить теперь в виде

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{D}_1 \bar{U}_1 \Delta_k^4; \quad \bar{\beta} = \bar{D}_2 \bar{U}_2 \Delta_k^3; \\ \bar{\gamma} &= \bar{D}_3 \bar{U}_3 \Delta_k^4; \quad \bar{\beta}_6 = \Delta_k^3, \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

где матрицы  $\bar{D}_2$  и  $\bar{D}_3$  могут быть получены из элементов матрицы  $\bar{D}_1$ :

$$\begin{aligned} \bar{D}_2 &= \begin{vmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21} & d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21} & d_{12}d_{22} \\ d_{31}d_{21} & d_{31}d_{22} + d_{32}d_{21} & d_{32}d_{22} \\ d_{11}d_{31} & d_{12}d_{31} + d_{11}d_{32} & d_{12}d_{32} \end{vmatrix}; & (4.5.24) \\ \bar{D}_3 &= \begin{vmatrix} d_{11}^3 & 3d_{11}^2d_{12} & 3d_{11}d_{12}^2 & d_{12}^3 \\ d_{21}^3 & 3d_{21}^2d_{22} & 3d_{21}d_{22}^2 & d_{22}^3 \\ d_{11}^2d_{21} & d_{22}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{12} & d_{21}d_{12}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{22} & d_{12}^2d_{22} \\ d_{11}d_{31} & d_{32}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{31}d_{12} & d_{31}d_{22}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{33} & d_{12}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{31} & d_{32}d_{21}^2 + 2d_{11}d_{31}d_{22} & d_{31}d_{22}^2 + 2d_{21}d_{22}d_{32} & d_{22}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{11} & d_{12}d_{21}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{22} & d_{11}d_{22}^2 + 2d_{12}d_{21}d_{22} & d_{12}d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21}d_{31} & d_{11}d_{21}d_{32} + d_{11}d_{22}d_{31} + & d_{11}d_{22}d_{32} + d_{12}d_{22}d_{32} + & d_{12}d_{22}d_{32} \\ & + d_{12}d_{21}d_{31} & + d_{12}d_{22}d_{31} & \end{vmatrix} & (4.5.25) \end{aligned}$$

Беличины  $\frac{d\bar{\beta}_1}{dt}$ , входящие в (4.5.10), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}_i}{dt} &= \begin{vmatrix} \frac{d\beta_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\beta_5}{dt} \end{vmatrix} = \bar{D}_2 \frac{d}{dt} (\bar{U}_2 \Delta_k^3) = \bar{D}_2 b_k \Delta_k^2 \frac{d}{du_k} (\bar{U}_2 \Delta_k^3); & (4.5.26) \\ \frac{d\beta_6}{dt} &= -3e_k b_k \Delta_k^4 \sin(u_k - \omega_k); \end{aligned}$$

составляющая вектора  $\frac{d}{du_k} (\bar{U}_2 \Delta_k^3)$  равны

$$\frac{d}{du_K} (\bar{U}_2 \Delta_k^2) = \left\| \begin{array}{l} -2 \Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3 e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos u_k \\ \Delta_k^3 \cos^2 u_k - 3 e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos u_k \sin u_k \\ 2 \Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3 e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \sin^2 u_k \end{array} \right\|. \quad (4.5.27)$$

Для расчета координат Луны и Солнца используются зависимости, приведенные в гл.3.

#### 4.6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Численные методы прогнозирования орбитальных параметров КА, как правило, применяются для точных расчетов на сравнительно коротких временных интервалах (порядка нескольких витков) при решении задач баллистического сопровождения. Они базируются на использовании методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Для численного интегрирования система дифференциальных уравнений типа (1.2.3) приводится к системе уравнений первого порядка введением дополнительных функций. Например, для системы (1.2.3) можно ввести новые функции

$$Y_1 = X_{и}, \quad Y_3 = Y_{и}, \quad Y_5 = Z_{и} \quad (4.6.1)$$

и записать ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= Y_2; & \frac{dY_2}{dt} &= -\mu \frac{Y_1}{r^3}; \\ \frac{dY_3}{dt} &= Y_4; & \frac{dY_4}{dt} &= -\mu \frac{Y_3}{r^3}; \\ \frac{dY_5}{dt} &= Y_6; & \frac{dY_6}{dt} &= -\mu \frac{Y_5}{r^3}, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

где  $r = \sqrt{Y_1^2 + Y_3^2 + Y_5^2}$ .

Системы уравнений (4.6.1), (4.6.2) могут непосредственно использоваться для численного интегрирования без дополнительных преобразований. В дальнейшем изложении систему дифференциальных уравнений движения представим в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{Y}). \quad (4.6.3)$$

Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений можно разделить на две группы.

Методы первой группы основаны на разложении функции, определяющей характер движения, в ряд Тейлора. Производные высших порядков определяются аналитически или численным дифференцированием исходного уравнения. К таким методам относятся методы Адамса, Коуэлла, Штермера.

Методы второй группы также основаны на разложении в ряды, однако при вычислениях не используются производные высших порядков, а на каждом шаге вычисляются правые части уравнений. К таким методам можно отнести метод Рунге-Кутты.

Метод Адамса. Является разностным методом. Применение его приводит только к однократному вычислению правой части на каждом шаге. Приращение вектор-функции  $\Delta \bar{Y}_k$  на  $k$ -м шаге вычисляется по известной экстраполяционной формуле Адамса

$$\Delta \bar{Y}_k = \Delta t_n \left[ \bar{f}_k + \frac{1}{2} \bar{f}_{m-\frac{1}{2}}^1 + \frac{5}{12} \bar{f}_{m-1}^2 + \frac{3}{8} \bar{f}_{m-\frac{3}{2}}^3 + \frac{251}{720} \bar{f}_{m-2}^4 + \dots \right], \quad (4.6.4)$$

где  $\bar{f}_k$  — правые части векторного уравнения на  $k$ -м шаге;  $\bar{f}_{m-\frac{1}{2}}^1, \bar{f}_{m-1}^2, \dots$  — разности первого, второго и последующих порядков;  $\Delta t_n$  — шаг интегрирования. Обычно вводят величину

$$\bar{q}_k = \Delta t_n(t, \bar{Y}_k),$$

которая позволяет формулу (4.6.4) переписать в виде

$$\Delta \bar{Y}_k = \bar{q}_k + \frac{1}{2} \bar{q}_{k-\frac{1}{2}} + \frac{5}{12} \bar{q}_{k-1}^2 + \frac{3}{8} \bar{q}_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{251}{720} \bar{q}_{k-2}^4 + \dots \quad (4.6.5)$$

Для начала процесса вычислений необходимы четыре исходные точки

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{k-3} &= \bar{Y}(t_{k-3}); \quad \bar{Y}_{k-2} = \bar{Y}(t_{k-2}); \\ \bar{Y}_{k-1} &= \bar{Y}(t_{k-1}); \quad \bar{Y}_k = \bar{Y}(t), \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

которые определяются из начальных условий каким-либо численным методом. Схема вычисления  $\Delta Y_k$  по экстраполяционной формуле Адамса с учетом разности третьего порядка представлена в табл. 4.2. В качестве независимого аргумента в рассматриваемом случае используется время. В табл. 4.2 значения  $\Delta Y_{k-3}, \Delta Y_{k-2}, \Delta Y_{k-1}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta Y_{k-3} &= Y_{k-2} - Y_{k-3}; \quad \Delta Y_{k-2} = Y_{k-1} - Y_{k-2}; \\ \Delta Y_{k-1} &= Y_k - Y_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Таблица 4.2

$t$	$Y$	$\Delta Y$	$q = \Delta t f$	$q^1$	$q^2$	$q^3$
$t_{k-3}$	$Y_{k-3}$		$q_{k-3}$			
		$\Delta Y_{k-3}$		$q^1_{k-\frac{5}{2}}$		
$t_{k-2}$	$Y_{k-2}$		$q_{k-2}$		$q^2_{k-2}$	
		$\Delta Y_{k-2}$		$q^1_{k-\frac{3}{2}}$		$q^3_{k-\frac{3}{2}}$
$t_{k-1}$	$Y_{k-1}$		$q_{k-1}$		$q^2_{k-1}$	
		$\Delta Y_{k-1}$		$q^1_{k-\frac{1}{2}}$		
$t_k$	$Y_k$		$q_k$			

Разности соответствующих порядков вычисляются следующим путем:

первого порядка

$$q^1_{k-\frac{5}{2}} = q_{k-2} - q_{k-3}; \quad (4.6.8)$$

$$q^1_{k-\frac{3}{2}} = q_{k-1} - q_{k-2};$$

$$q^1_{k-\frac{1}{2}} = q_k - q_{k-1};$$

второго порядка

$$q^2_{k-2} = q^1_{k-\frac{3}{2}} - q^1_{k-\frac{5}{2}}; \quad (4.6.9)$$

$$q^2_{k-1} = q^1_{k-\frac{1}{2}} - q^1_{k-\frac{3}{2}};$$

третьего порядка

$$q^3_{k-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} q^2_{k-1} - q^2_{k-2}. \quad (4.6.10)$$

Последующие значения функций для таблицы разностей пополняют шаг за шагом вычислениями по формуле Адамса.

**Метод Рунге-Кутты.** В этом случае значения искомой функции  $\bar{Y} = \bar{f}(t, \bar{Y})$  на  $(k+1)$  шаге определяются по формуле

$$\bar{Y}_{k+1} = \bar{Y}_k + \Delta \bar{Y}_k, \quad (4.6.11)$$

$$\text{где } \Delta Y_k = \frac{1}{6} (K_1^{(k)} + 2K_2^{(k)} + 2K_3^{(k)} + K_4^{(k)}). \quad (4.6.12)$$

Коэффициенты  $K_1^{(k)}$ ,  $K_2^{(k)}$ ,  $K_3^{(k)}$ ,  $K_4^{(k)}$  находятся из выражений

$$\begin{aligned} K_1^{(k)} &= \Delta t_{\text{и}} \bar{f}(t_k, \bar{Y}_k); \\ K_2^{(k)} &= \Delta t_{\text{и}} \bar{f}\left(t_k + \frac{\Delta t_{\text{и}}}{2}; \bar{Y}_k + \frac{K_1^{(k)}}{2}\right); \\ K_3^{(k)} &= \Delta t_{\text{и}} \bar{f}\left(t_k + \frac{\Delta t_{\text{и}}}{2}; \bar{Y}_k + \frac{K_2^{(k)}}{2}\right); \\ K_4^{(k)} &= \Delta t_{\text{и}} \bar{f}\left(t_k + \Delta t_{\text{и}}; \bar{Y}_k + K_3^{(k)}\right). \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Далее, приняв  $t_{k+1}$ ,  $Y_{k+1}$  за исходные данные, процесс вычислений приращения вектор-функции повторяется. Формула (4.6.12) нашла наибольшее применение и имеет четвертый порядок точности. Используют формулы Рунге-Кутты с иными порядками точности [4, 27]. Погрешность метода зависит существенно от шага интегрирования  $\Delta t_{\text{и}}$ . На практике для выбора шага используют двойной пересчет, суть которого заключается в следующем. Взяв за исходное значение  $\bar{Y}_k(t_k)$ , вычисляют  $Y(t_k + \Delta t_{\text{и}})$  два раза: один раз с шагом  $\Delta t_{\text{и}}$ , другой – с двойным шагом  $\Delta t_{\text{и}} = 2\Delta t_{\text{и}}$ . Если расхождение полученных значений  $\bar{Y}(t_k + 2\Delta t_{\text{и}})$  удовлетворяет требуемой точности, то шаг  $\Delta t_{\text{и}}$  выбран правильно. В противном случае шаг интегрирования рекомендуется уменьшить в два раза.

Метод Адамса обладает определенными преимуществами в быстродействии, так как не требует на каждом шаге многократного вычисления правых частей дифференциальных уравнений. Вместе с тем ему присущ недостаток, заключающийся в том, что для начала процесса интегрирования в момент  $t_k$  необходимо иметь четыре значения функции  $\bar{Y}(t, Y)$ :

$$\bar{Y}(t_k), \bar{Y}(t_{k-1}), \bar{Y}(t_{k-2}), \bar{Y}(t_{k-3})$$

и после каждого шага интегрирования хранить их, что требует повышенного объема памяти ЭВМ.

Метод Рунге-Кутты обладает следующими преимуществами: для начала интегрирования достаточно иметь значение искомой функции в одной точке, возможно достижение высокой точности интегрирования с помощью изменения шага интегрирования. Недостаток метода – в большом количестве вычислений, связанных с неоднократными подстановками в правые части уравнений в соответствии с формулой (4.6.11).

Следует отметить также, что использование численных методов прогнозирования орбитальных параметров на практике требует тщательного предварительного анализа. Например, выбор шага определяется противоречивыми факторами: требуемой точностью прогноза и возможностью вычислительных средств. Существенное значение при реализации на ЭВМ имеет и система координат и вид уравнений движения КА.



## **ГЛАВА 5. ВЫБОР БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, РЕШАЮЩИХ ЗАДАЧИ ВСТРЕЧИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

### **5.1. ТРАЕКТОРИИ ВСТРЕЧИ**

Баллистическое проектирование космических систем, предназначенных для осуществления задач встречи космических аппаратов, включает решение следующих основных задач:

выбор рабочей орбиты КА, осуществляющего решение целевых задач (исследование окружающей среды, технологические эксперименты и т.д.);

определение схемы выведения стыкуемого КА и схемы его наведения для осуществления встречи аппаратов.

Первая задача решается исходя из характера решаемых задач и расположения средств обеспечения (пунктов связи и сброса исследовательской информации и т.д.), возможностей ракеты-носителя для выведения КА. В общей постановке эта задача описана в гл. 2.

Вторая встреча более сложная. Это объясняется тем, что на решение задач встречи накладываются временные ограничения (в отличие от решений, связанных с осуществлением маневра космических аппаратов, см. гл. 2).

В общем случае траектории сближения активного (маневрирующего) аппарата целесообразно разбивать на этапы дальнего и ближнего наведения.

Задача выбора общей схемы встречи на этапе дальнего наведения очень сложна и к настоящему времени полностью не решена. Поэтому, как правило, для ее решения применяют упрощенные методы и схемы решения.

Одной из возможных при проектировании и последующей реализации является схема с "переменной точкой прицеливания", позволяющая обеспечить встречу с КА, образующимся на произвольной орбите [6, 14].

Схема полета в данном случае выбирается из множества возможных траекторий, включающих активную траекторию подъема при старте с Земли или вывод с опорной орбиты, орбиты перехода, маневра измене-

ния плоскости орбиты, коррекцию траектории и выход на орбиту космического аппарата, с которым осуществляется встреча. Выбор траектории встречи основывается на следующих положениях.

1. В случае старта с Земли космического аппарата, осуществляющего встречу, начальная линия узлов, т.е. линия пересечения плоскости траектории подъема и плоскости орбиты космического аппарата, находящегося на рабочей орбите, устанавливается на угловом расстоянии  $\pi/2$  от точки старта по направлению движения КА. Это достигается соответствующим выбором азимута при формировании восходящего участка траектории.

2. Активный КА входит в плоскость орбиты сотрудничающего аппарата при первом пересечении линии узлов, после чего траектории космических аппаратов остаются компланарными.

3. Импульс тяги, изменяющий плоскость орбиты КА, векторно суммируется и реализуется одновременно с импульсом для маневра в плоскости орбиты.

4. Предварительное управление фазированием осуществляется при помощи орбит малой высоты и, как правило, биэллиптическими переходами. Обычно фазирование ведется на высотах, меньших высоты орбиты КА, с которым осуществляется встреча.

5. Основные импульсы тяги прикладываются в точках, разделенных в направлении движения КА угловыми интервалами  $\pi/2$ ,  $3/2\pi$ ,  $5/2\pi$  и т.д. Встреча происходит в одной из этих точек. Вспомогательные импульсы для коррекции траектории встречи могут прикладываться в точках, соответствующих углам  $\pi$ ,  $2\pi$  и т.д. в направлении движения (в общем случае точки приложения корректирующих импульсов могут и не совпадать с указанными).

При невыполнении временного баланса (при  $\Delta t > \Delta t_{\text{ном}}$ , где  $\Delta t_{\text{ном}}$  – время, отводимое на встречу космических аппаратов) изменяют высоту одной или нескольких точек прицеливания для достижения условия

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{ном}}. \quad (5.1.1)$$

Изменение высоты определяют по формуле

$$\Delta h = k_h (\mu/a_{\text{ц}})^{1/2} \Delta t, \quad a_{\text{ц}} = a_1,$$

где  $k_h$  – постоянный коэффициент.

После указанных изменений цикл повторяется. Во избежание аэродинамического нагрева и перегрузки в программе вычислений предусматривают ограничения на минимальную высоту точки прицеливания.

Метод наведения с переменной точкой прицеливания является итерационным и, как правило, позволяет при баллистическом проектировании определить общую схему встречи и соответствующие энергозатраты.

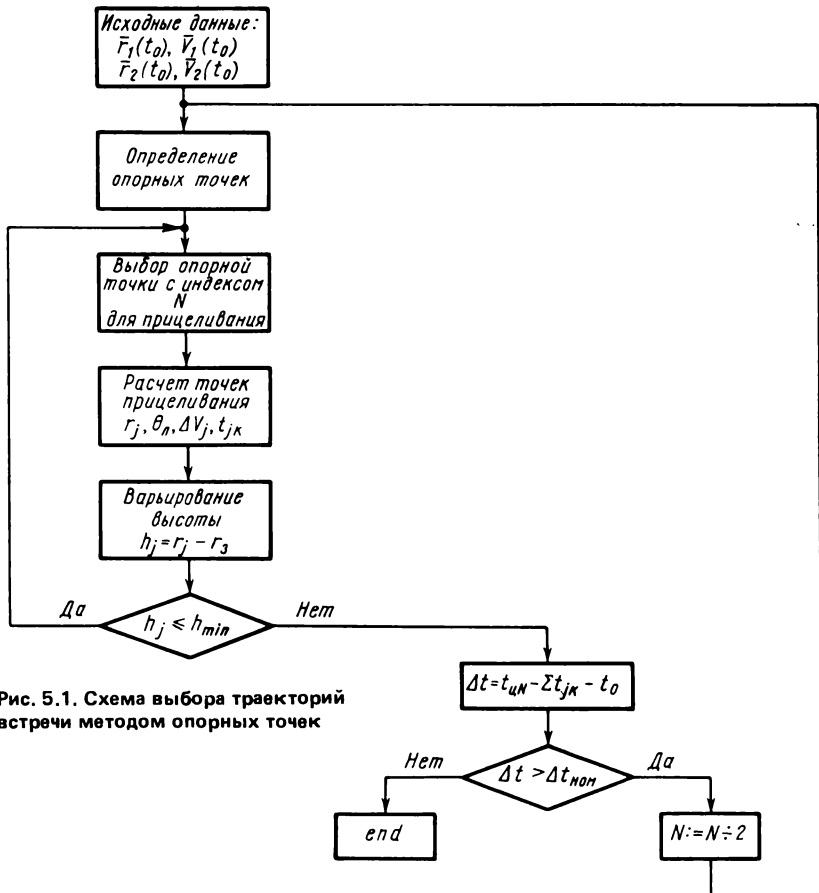


Рис. 5.1. Схема выбора траекторий встречи методом опорных точек

Схема выбора траекторий встречи методом опорных точек приведена на рис. 5.1.

Далее рассмотрим отдельные моменты, входящие в процесс определения общей схемы встречи, основными из которых являются фазирование и решение краевых задач для определения отрезков траектории при жестких временных ограничениях.

## 5.2. ФАЗИРОВАНИЕ ПРИ ВСТРЕЧЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Под фазированием будем понимать промежуток времени, которым располагает активный космический аппарат (совершающий встречу) для сведения к требуемой величине углового расстояния (фазового угла) между радиусами-векторами космических аппаратов, после вывода активного КА на начальную или фазирующую орбиту.

Фазирование необходимо в случаях, когда прямой переход КА в точку встречи на участке дальнего наведения энергетически невыгоден.

В случае вывода активного КА на фазирующую орбиту уменьшение угла между векторами положения космических аппаратов за один оборот можно определить, используя приближенную зависимость

$$\Delta f \cong \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} 360^\circ, \quad (5.2.1)$$

где  $\Delta a$  – разность больших полуосей орбит КА;  $a$  – большая полуось орбиты пассивного КА.

В общем случае фазирующие орбиты могут быть круговыми или эллиптическими. Рассмотрим подход к решению задач фазирования, которые могут иметь место при баллистическом проектировании. Для наглядности рассмотрим случай, когда "пассивный" КА, обозначаемый КА1, находится на круговой орбите, а активный КА, осуществляющий встречу, обозначаемый КА2, выведен на эллиптическую орбиту. Считаем, что в некоторый опорный момент  $t_0$  КА2 находится в апогее, а КА1 в точке с истинной аномалией  $\vartheta_{20}$ , отсчитываемой от перигея орбиты КА2 (рис. 5.2). Последовательные моменты времени, когда КА2 приходит в апогей, определяются по формуле

$$t_{a2} = t_0 + n_2 T_2, \quad (5.2.2)$$

где  $n_2$  – целое число оборотов КА2;  $T_2$  – период обращения КА2.

Соответственно временные моменты, когда пассивный КА1 будет появляться в апогее орбиты КА2,

$$t_{a1} = t_0 + t'_{КА1} + n_1 T_1. \quad (5.2.3)$$

$$\text{где } t'_{КА1} = \frac{T_1}{2\pi} (\pi - \vartheta_{10}), \quad (-\pi \leq \vartheta_{10} \leq \pi); \quad (5.2.4)$$

$n_1$  – целое число оборотов КА1;  $T_1$  – период обращения КА1.

Определим целые числа оборотов КА1 и КА2, соответствующие приходу космических аппаратов в район апогея КА2, ограниченный углом  $2\Delta\vartheta$ .

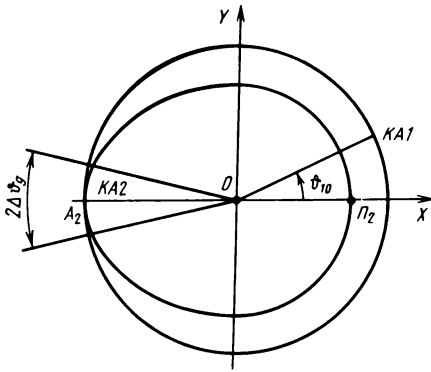


Рис. 5.2. Фазирование космических аппаратов

Приравниваем правые части (5.2.2) и (5.2.3), прибавив к ним соответственно величины  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  – временные интервалы, на которые КА1 и КА2 могут опаздывать или опережать момент прохождения апогея, оставаясь при этом в допуске  $2\Delta\vartheta$ :

$$n_2 T_2 \pm \Delta t_2 = t'_{КА1} + n_1 T_1 \pm \Delta t_1. \quad (5.2.5)$$

Используя известное соотношение для кеплеровских орбит, запишем

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} (1 - e \cos E) \sqrt{1 - e^2} \Delta \vartheta. \quad (5.2.6)$$

Принимая во внимание, что в апогее  $E = \pi$  и что для круговой орбиты КА1  $e = 0$ , подставив (5.2.6) в (5.2.5), получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2 \pm (1 + e) \sqrt{1 + e^2} (\Delta \vartheta_2 / 2\pi)}{(t'_{КА1} / T_1) + n_1 \pm (\Delta \vartheta_1 / 2\pi)} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{или} \quad & \frac{n_2 - (1 + e) \sqrt{1 - e^2} (\Delta \vartheta_2 / 2\pi)}{(t'_{КА1} / T) + n_1 - (\Delta \vartheta_1 / 2\pi)} \leq \frac{T_1}{T_2} \leq \\ & \leq \frac{n_2 + (1 + e) \sqrt{1 - e^2} (\Delta \vartheta_2 / 2\pi)}{(t'_{КА} / T_1) + n_1 + (\Delta \vartheta_1 / 2\pi)}. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Считая известными (заданными) границы  $\Delta \vartheta_1$ ,  $\Delta \vartheta_2$  и орбитальные параметры КА1 и КА2, можно найти целые числа  $n_1$ ,  $n_2$  с использованием итерационного процесса.

Следует отметить в виду, что фазирование в общем случае не ограничивается замкнутыми околосферными и эллиптическими орбитами. Для фазирования можно применить и биэллиптические переходы [14, 27]. Для внутренних биэллиптических переходов при  $(r_2/r_1) \geq 1$  существуют максимальные углы опережения, превышение которых не позволяет осуществить встречу. Путем внешних биэллиптических переходов встречу КА можно осуществить практически для любых углов опережения.

5.3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ДАЛЬНОМ НАВЕДЕНИИ

Временные ограничения на выполнение задачи встречи приводят к решению краевой задачи. Существенно такой задачи сводится к определению перелетной орбиты для граничных условий

$$t_0, r_0(X_{и0}, Y_{и0}, Z_{и0}); t_1, r_1(X_{и1}, Y_{и1}, Z_{и1}). \tag{5.3.1}$$

Для определения орбит перелета необходимо определить угловую дальность полета  $f_y$  (см. рис. 5.3). Предварительно обычно определяют наклонение и долготу восходящего узла ( $i, \Omega$ ) орбиты перелета и с использованием выражений

$$i = \arccos \frac{\pm |C_1|}{C}; \tag{5.3.2}$$

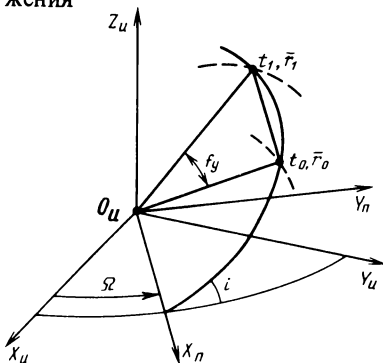
$$\Omega = \arctg \frac{C_2}{C_3}, \quad (0 \leq \Omega \leq 2\pi). \tag{5.3.3}$$

В (5.3.2) знак "+" соответствует прямому движению, знак "-" — обратному. Значения постоянных интеграла площадей  $C_1, C_2, C_3, C$  определяются из зависимостей

$$C_1 = X_{и0} Y_{и1} - Y_{и0} X_{и1}, \quad C_2 = Y_{и0} Z_{и1} - Z_{и0} Y_{и1}, \\ C_3 = X_{и0} Z_{и1} - Z_{и0} X_{и1}, \tag{5.3.4}$$

где  $X_{и0}, \dots, Z_{и1}$  — компоненты радиусов-векторов  $\bar{r}_0, \bar{r}_1$  в инерциальной геоцентрической системе координат.

Для непосредственного определения составляющих  $\bar{r}_0, \bar{r}_1$  целесообразно перейти к плоскостной системе координат  $O_0 X_{п} Y_{п}$ . Матрица связи между системами координат  $O X_{и} Y_{и} Z_{и}$  и  $O_0 X_{п} Y_{п}$  представлена в табл. 5.1. Величина  $f_y (f_y \leq 2\pi)$  находится однозначно с помощью выражения



$$f_y = \arctg \frac{X_{п0} Y_{п1} - X_{п1} Y_{п0}}{X_{п0} Y_{п1} + Y_{п0} Y_{п1}}. \tag{5.3.5}$$

Для определения четверти угла  $f_y$  рекомендуется составить соотношение

$$f_y = \arctg \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \tag{5.3.6}$$

где  $\alpha_1 = X_{п0} Y_{п1} - X_{п1} Y_{п0}$ ;

Рис. 5.3. Определение перелетных орбит

$\beta_1 = X_{\Pi 0} X_{\Pi 1} + Y_{\Pi 0} Y_{\Pi 1}$ , и воспользоваться решающим правилом

$$0 < f_y < \frac{\pi}{2}, \text{ если } \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < f_y < \pi, \text{ если } \alpha_1 > 0, \beta_1 < 0;$$

$$\pi < f_y < \frac{3}{2}\pi, \text{ если } \alpha_1 < 0, \beta_1 < 0;$$

$$\frac{3}{2}\pi < f_y < 2\pi, \text{ если } \alpha_1 < 0, \beta_1 > 0;$$

$$f_y = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0; \quad (5.3.7)$$

$$f_y = \pi/2 \quad \text{при } \alpha_1 > 0, \beta_1 = 0;$$

$$f_y = \pi \quad \text{при } \alpha_1 = 0, \beta_1 < 0;$$

$$f_y = (3/2)\pi \quad \text{при } \alpha_1 < 0, \beta_1 = 0;$$

$$f_y = 2\pi \quad \text{при } \alpha_1 = 0, \beta_1 > 0.$$

Существуют различные методы решения краевых задач. На практике наибольшее распространение получили методы Эйлера-Ламберта, Гаусса и их модификации. Эти методы применяются в предположении, что КА движется в поле центральной силы.

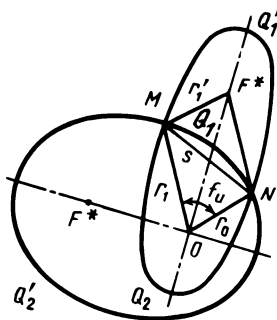
В общем случае переход космического аппарата из точки  $N$  в точку  $M$  может осуществляться по эллиптической, параболической и гиперболической орбитам. Однако при рассмотрении задач встречи в околоземном космосе при ограничениях (5.3.1) обычными будут переходы по эллиптическим орбитам. В этом случае переход из точки  $N$  в точку  $M$  может быть осуществлен в общем случае четырьмя путями соответственно по траекториям  $NQ_1M$ ,  $NQ_2M$ ,  $NQ'_1M$ ,  $NQ'_2M$  (рис. 5.4). Если же задаться направлением обхода притягивающего центра  $O$  или же величиной угловой дальности полета  $f_y \neq \pi$ , то остаются две возможные траекто-

Таблица 5.1

	$X_{\Pi}$	$Y_{\Pi}$	$Z_{\Pi}$
$X_{\Pi}$	$\cos\Omega$	$\sin\Omega$	0
$Y_{\Pi}$	$-\sin\Omega\cos i$	$\cos\Omega\cos i$	$\sin i$

Рис. 5.4. К определению величины  $\eta$

рии, например,  $N_1Q_2'M$ ,  $NQ_1M$ . Из рис. 5.4 видно, что для траектории  $NQ_1M$  второй фокус  $F^*$  лежит вне эллиптического сегмента, ограниченного прямой  $NM$  и рассматриваемой траекторией. Такие траектории называются эллиптическими траекториями (орбитами) первого рода. Если второй фокус  $F^*$  лежит внутри соответствующего эллиптического сегмента (траектория  $NQ_2'M$ ), то такие орбиты называют эллиптическими траекториями (орбитами) второго рода. Если величина большой полуоси определяется из условия



$$a = \frac{r_0 + r_1 + s}{4}, \tag{5.3.8}$$

то траектории первого и второго рода сливаются в граничную. В формуле (5.3.8)  $s$ —хорда, соединяющая точки  $t_0$  и  $t_1$ , определяется выражением

$$s^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1 \cos f_y, \tag{5.3.9}$$

всегда  $s > 0$ .

**Метод Эйлера—Ламберта** базируется на трансцендентном уравнении, которое представляет собой зависимость между временем полета  $\Delta\tau = t_1 - t_0$ , величинами  $r_0, r_1, f_y$  и большой полуосью орбиты  $a$ . Решение уравнения позволяет определить большую полуось орбиты, что дает возможность рассчитать недостающие элементы орбиты перелета.

Для эллиптических орбит первого рода уравнение Эйлера—Ламберта имеет вид (когда  $a > \frac{r_0 + r_1 + s}{1}$ )

$$\Delta\tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [2\pi n + (\epsilon'_0 + \sin\epsilon'_0) \mp (\delta_0 - \sin\delta_0)], \tag{5.3.10}$$

где  $\sin \frac{\epsilon'_0}{2} = \sqrt{\frac{r_0 + r_1 + s}{4a}}$ ;  $\sin \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{\frac{r_0 + r_1 - s}{4a}}$ ;

$$\pi/2 \geq \epsilon'_0/2 \geq 0, \quad \pi/2 \geq \delta_0/2 \geq 0.$$



Для граничных эллиптических орбит ( $a = \frac{r_0 + r_1 + s}{4}$ )

$$\Delta\tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi(2n + 1) \mp (\delta_0 - \sin\delta_0)], \quad (5.3.11)$$

где  $\sin \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{\frac{r_0 + r_1 - s}{r_0 + r_1 + s}}$ ;  $\pi/2 \geq \delta_0/2 \geq 0$ .

Для эллиптических орбит второго рода ( $a > \frac{r_0 + r_1 + s}{4}$ )

$$\Delta\tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [2\pi(n + 1) - (\epsilon'_0 - \sin\epsilon'_0) \mp (\delta_0 - \sin\delta_0)]. \quad (5.3.12)$$

Значения  $\sin \frac{\epsilon'_0}{2}$ ,  $\sin \frac{\delta_0}{2}$  определяются как и для орбит первого рода.

В выражениях (5.3.10), (5.3.11), (5.3.12)  $n$  – число целых значений  $2\pi$  в угле  $f_y$ . Знак “–” соответствует случаю, когда  $f_y - 2\pi n < \pi$ , а знак “+” – случаю, когда  $f_0 - 2\pi n > \pi$ .

Вопросы, связанные с определением вида орбит и решений уравнений Эйлера–Ламберта, достаточно подробно изложены П.Е. Эльясбергом в монографии [34]. Некоторые дополнительные аспекты для случаев, когда векторы  $r_0$  и  $r_1$  коллинеарны, рассмотрены в [4].

**Модифицированный метод Гаусса.** Этот метод базируется на численном способе определения величины  $\eta$ , представляющей собой отношение площади сектора  $O_n t_0 t_1$  к площади треугольника  $O_n t_0 t_1$  при ограничениях (5.3.1) (см. рис. 5.3). Величина  $\eta$  должна удовлетворять системе уравнений

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{2q' - \sin 2q'}{\sin q'} m'; \quad \sin^2 \frac{q'}{2} = \frac{m'}{\eta^2} + \gamma_f, \quad (5.3.13)$$

где  $\gamma_f = \frac{1}{2} - \frac{r_0 + r_1}{4\sqrt{r_0 r_1} \cos \frac{f_y}{2}}$ ;  $m' = \frac{\mu(t_1 - t_0)^2}{(2\sqrt{r_0 r_1} \cos \frac{f_y}{2})^3}$ .

Метод Гаусса применим для определения перелетных траекторий с угловой дальностью  $f_y < 2\pi$ .

Величина  $\eta$  находится методом последовательных приближений из уравнений

$$\eta = \sqrt[3]{q + \sqrt{D_\Gamma}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{D_\Gamma}} + \frac{1}{3}; \quad (5.3.14)$$

$$D_{\Gamma} = A\left(\frac{A}{4} + \frac{1}{27}\right); q = \frac{A}{2} + \frac{1}{27}; A = \frac{2q' - \sin 2q'}{\sin^3 q'} m', \quad (5.3.15)$$

которые решаются относительно параметра  $\eta$ , являющегося корнем уравнения (5.3.13). В случае поиска величины  $\eta$  для значений  $f_y \leq 1,047$  рад ( $60^\circ$ ) в качестве начального приближения можно задавать  $\eta_0^* = 1$ . При значениях  $f_y > 1,047$  рад ( $60^\circ$ ) рекомендуется воспользоваться зависимостью

$$\eta_0^* = \sqrt{\frac{m'}{\sin^2 \frac{f_y}{4} - \gamma_f}}. \quad (5.3.16)$$

Процедуру определения величины  $\eta$  можно построить следующим образом. Определив нулевое приближение  $\eta_0$ , например, с помощью зависимости (5.3.13) вычисляют значение  $\sin^2 \frac{q'}{2} = f(\eta_0)$ , а затем  $\eta_0^*$  с по-

мощью соотношений (5.3.14), (5.3.15). После чего получают разность  $H_0 = \eta_0^* - \tilde{\eta}_0$ . Первое приближение для  $\eta$  находится из соотношения  $\tilde{\eta}_1 = \eta_0 + H'_0$ . Далее по формулам (5.3.13), (5.3.14), (5.3.15) находятся значения  $\eta_1^*$  и разность  $H_1 = \eta_1^* - \tilde{\eta}_1$ . В качестве второго приближения целесообразно взять величину

$$\tilde{\eta}_2 = \frac{H_0(\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_0)}{H_0 - H_1} + \tilde{\eta}_0 \quad (5.3.17)$$

и найти соответствующие ей  $\eta_2^*$  и  $H_2 = \eta_2^* - \tilde{\eta}_2$ . Для последующих итераций рекомендуется пользоваться приближениями, рассчитываемыми по формуле

$$\tilde{\eta}_{k+2} = \frac{H_k(\tilde{\eta}_{k+1} - \tilde{\eta}_k)}{H_k - H_{k+1}} + \tilde{\eta}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \eta. \quad (5.3.18)$$

После определения параметра  $\eta$  с требуемой точностью вычисляют значение параметра орбиты по формуле

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\eta r_0 r_1 \sin f_y}{(t_1 - t_0)}, \quad (5.3.19)$$

где числитель представляет удвоенную площадь перелетного треугольника, а знаменатель — удвоенную площадь соответствующего сектора (см. рис. 5.3). Знание параметра перелетной орбиты позволяет найти составляющие вектора скорости КА в точках  $t_0$  и  $t_1$  перелетной орбиты с плос-

костной системе координат  $O_{и}X_{п}Y_{п}$ . Для точки  $t_0$  имеют место выражения

$$\begin{aligned}\dot{X}_{п0} &= \frac{-\sqrt{\mu p} Y_{п0} + B X_{п0}}{r_0^2}; \\ \dot{Y}_{п0} &= \frac{\sqrt{\mu p} X_{п0} + B Y_{п0}}{r_0^2},\end{aligned}\tag{5.3.20}$$

$$\text{где } B = \sqrt{\frac{\mu}{p}} r_0 \frac{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right) \cos f_y - \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)}{\sin f_y}.$$

Для точки  $t_1$  имеют место выражения

$$\begin{aligned}\dot{X}_{п1} &= \frac{-\sqrt{\mu p} Y_{п1} + B_1 X_{п1}}{r_1^2}; \\ \dot{Y}_{п1} &= \frac{\sqrt{\mu p} X_{п1} + B_1 Y_{п1}}{r_1^2},\end{aligned}\tag{5.3.21}$$

$$\text{где } B_1 = \sqrt{\frac{\mu}{p}} r_1 \frac{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right) - \left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cos f_y}{\sin f_y}.$$

Найденные значения  $\dot{X}_{п0}$ ,  $\dot{Y}_{п0}$ ,  $\dot{Z}_{п0}$  позволяют определить компоненты вектора скорости КА в инерциальной геоцентрической системе координат

$$\begin{aligned}\dot{X}_{иj} &= \dot{X}_{пj} \cos \Omega - \dot{Y}_{пj} \sin \Omega \cos i; \\ \dot{Y}_{иj} &= \dot{X}_{пj} \sin \Omega + \dot{Y}_{пj} \cos \Omega \cos i; \\ \dot{Z}_{иj} &= \dot{Z}_{пj} \sin i; \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{5.3.22}$$

Для определения составляющих вектора приращения скорости для перехода КА из начальной точки  $t_0$ ,  $\bar{r}_0$  в точку  $t_1$ ,  $\bar{r}_1$  космического пространства следует использовать выражения

$$\Delta \dot{X}_{и} = \dot{X}_{и0} - \dot{X}'_{и0}; \quad \Delta \dot{Y}_{и} = \dot{Y}_{и0} - \dot{Y}'_{и0}; \quad \Delta \dot{Z}_{и} = \dot{Z}_{и0} - \dot{Z}'_{и0},\tag{5.3.23}$$

где  $X'_{и0}$ ,  $Y'_{и0}$ ,  $Z'_{и0}$  — компоненты вектора скорости КА в точке  $t_0$ ,  $\bar{r}_0$  до совершения маневра.

Величина характеристической скорости  $(\Delta V)_{t_0, t_1}$  для перелета КА

из точки  $t_0, \bar{r}_0$  в точку  $t_1, r_1$  и ориентация вектора тяги в геоцентрической системе координат  $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$  определится выражениями:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta \dot{X}_{и}^2 + \Delta \dot{Y}_{и}^2 + \Delta \dot{Z}_{и}^2};$$

$$\cos \alpha_x = \frac{\Delta \dot{X}_{и0}}{\Delta V}; \quad \cos \alpha_y = \frac{\Delta \dot{Y}_{и0}}{\Delta V}; \quad \cos \alpha_z = \frac{\Delta \dot{Z}_{и0}}{\Delta V}. \quad (5.3.24)$$

#### 5.4. КОРРЕКЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ДАЛЬНОГО НАВЕДЕНИЯ

При выборе траекторий встречи космических аппаратов, как правило, необходимо определить схему коррекции на участке дальнего наведения с целью предварительной оценки дополнительных энергозатрат и последующего определения относительного положения космических аппаратов. Выбору схемы коррекции должна предшествовать хотя бы приближенная оценка точности характеристик дальнего наведения аналитическими приближенными методами либо более точная оценка моделированием процесса дальнего наведения аналогично изложенному в гл. 2.

При малых отклонениях фактической траектории (имеется в виду ожидаемая траектория) от номинальной можно рекомендовать применение метода малых коррекций, позволяющего определить приращение скорости КА, требуемое для исправления орбиты.

В обобщенной прямоугольной системе координат (нижние индексы для общности опущены) для текущего момента координаты КА могут быть представлены в виде

$$X = f_1(t, C_1, C_2, \dots, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z});$$

$$Y = f_2(t, C_1, C_2, \dots, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}); \quad (5.4.1)$$

$$Z = f_3(t, C_1, C_2, \dots, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}),$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования.

Изменяя величины компонент вектора скорости КА, получим траекторию, обеспечивающую выход аппарата в заданное время в точку  $X_1 Y_1 Z_1$  (рис. 5.5). При малых отклонениях от расчетной орбиты можно считать, что в выбранной начальной точке  $t_0, \bar{r}_0$  справедливо выражение

$$\dot{X}_0^* = \dot{X}_0 + \delta \dot{X}_0,$$

$$\dot{Y}_0^* = \dot{Y}_0 + \delta \dot{Y}_0, \quad (5.4.2)$$

$$\dot{Z}_0^* = \dot{Z}_0 + \delta \dot{Z}_0,$$

где  $\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$  – составляющие вектора скорости КА в точке  $t_0, \bar{r}_0$ ;

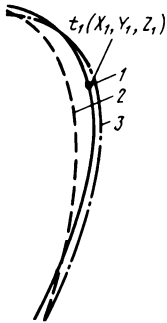


Рис. 5.5. Коррекция траектории КА:

1 — расчетная траектория; 2, 3 — траектории соответственно до и после коррекции

$\delta\dot{X}_0, \delta\dot{Y}_0, \delta\dot{Z}_0$  — требуемые приращения компонент для коррекции орбиты.

Подставив значения составляющих вектора скорости КА в уравнение траектории и вычислив ожидаемые координаты КА в момент  $t_1$ , получим

$$\begin{aligned} X_1^* - X_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial \dot{X}_0} \delta\dot{X}_0 + \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Y}_0} \delta\dot{Y}_0 + \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Z}_0} \delta\dot{Z}_0; \\ Y_1^* - Y_1 &= \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{X}_0} \delta\dot{X}_0 + \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Y}_0} \delta\dot{Y}_0 + \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Z}_0} \delta\dot{Z}_0; \\ Z_1^* - Z_1 &= \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{X}_0} \delta\dot{X}_0 + \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Y}_0} \delta\dot{Y}_0 + \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Z}_0} \delta\dot{Z}_0, \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

где  $X_1, Y_1, Z_1$  — координаты точки, в которую прибыл бы КА в момент  $t_1$  без коррекции;  $X_1^*, Y_1^*, Z_1^*$  — заданные координаты КА для момента времени  $t_1$ .

Решая систему уравнений (5.4.3) относительно потребных приращений скорости в точке  $t_0$ , получим

$$\delta\dot{X}_0 = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad \delta\dot{Y}_0 = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad \delta\dot{Z}_0 = \frac{\Delta z}{\Delta}, \quad (5.4.4)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Z}_0} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \Delta X & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \Delta Y & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \Delta Z & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Z}_0} \end{vmatrix}; \quad (5.4.5)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \dot{X}_0} & \Delta X & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{X}_0} & \Delta Y & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Z}_0} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{X}_0} & \Delta Z & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Z}_0} \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \dot{Y}_0} & \Delta X \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{Y}_0} & \Delta Y \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial Z_1}{\partial \dot{Y}_0} & \Delta Z \end{vmatrix};$$

$$\Delta X = X_1^* - X_1; \Delta Y = Y_1^* - Y_1; \Delta Z = Z_1^* - Z_1.$$

Для вычисления координат  $X_1^*$ ,  $Y_1^*$ ,  $Z_1^*$ , как правило, приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения КА вида (ПЗ.4) или (ПЗ.5).

Вместе с тем для приближенной оценки можно воспользоваться результатами аналитического решения приближенных уравнений относительно движения КА (1.2.25) (за опорную околосферную орбиту условно принимается номинальная траектория). В этом случае составляющие вектора относительной скорости в момент  $t_0$  определяются решением системы однородных уравнений для граничных условий:

$$\text{в момент } t_0 = 0 \quad X_0, Y_0, Z_0; \quad (5.4.6)$$

$$\text{в момент } t_1 \quad X' = Y' = Z' = 0, \quad (5.4.7)$$

нижний индекс  $g$  в обозначениях (1.2.27) для удобства опущен. Для таких условий решения однородных уравнений запишутся в виде

$$X(t) = 2 \frac{\dot{Y}_0^*}{\omega_0} - 3X_0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{X}_0^*}{\omega_0} \sin \omega_0 t + 4X_0 - 2 \frac{Y_0^*}{\omega_0};$$

$$Y(t) = 2 \left( 2 \frac{\dot{Y}_0^*}{\omega_0} - 3X_0 \right) \sin \omega_0 t - 2 \frac{\dot{X}_0^*}{\omega_0} \cos \omega_0 t +$$

$$+ (6X_0 - 3 \frac{Y_0^*}{\omega_0}) \omega_0 t + Y_0 + 2 \frac{\dot{X}_0^*}{\omega_0}; \quad (5.4.8)$$

$$Z(t) = Z_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{Z}_0^*}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

где  $\dot{X}_0^*$ ,  $\dot{Y}_0^*$ ,  $\dot{Z}_0^*$  — компоненты вектора относительной скорости в момент  $t_0$ , удовлетворяющие условиям (5.4.6) и (5.4.7). Значения их определим из системы уравнений (5.4.8):

$$\begin{aligned}\dot{X}_0^* &= \frac{X_0(3\omega_0 t_1 \cos\omega_0 t_1 - 4\sin\omega_0 t_1) - 2Y_0(1 - \cos\omega_0 t_1)}{(8/\omega_0)(1 - \cos\omega_0 t_1) - 3t_1 \sin\omega_0 t_1}; \\ \dot{Y}_0^* &= \frac{14X_0(1 - \cos\omega_0 t_1) - (6\omega_0 t_1 + Y_0)\sin\omega_0 t_1}{(8/\omega_0)(1 - \cos\omega_0 t_1) - 3t_1 \sin\omega_0 t_1}; \\ \dot{Z}_0^* &= -Z_0\omega_0 \operatorname{ctg}\omega_0 t_1.\end{aligned}\quad (5.4.9)$$

Составляющие вектора приращения скорости и их ориентация в относительной системе координат в момент  $t_0$  определяются выражениями

$$\begin{aligned}\delta\dot{X}_0 &= \dot{X}_0^* - \dot{X}_0; \quad \delta\dot{Y}_0 = \dot{Y}_0^* - \dot{Y}_0; \quad \delta\dot{Z}_0 = \dot{Z}_0^* - \dot{Z}_0; \\ \cos\alpha_x &= \frac{\delta\dot{X}_0}{\delta V_0}, \quad \cos\alpha_y = \frac{\delta\dot{Y}_0}{\delta V_0}, \quad \cos\alpha_z = \frac{\delta\dot{Z}_0}{\delta V_0};\end{aligned}\quad (5.4.10)$$

где  $\delta V_0 = \sqrt{\delta\dot{X}_0^2 + \delta\dot{Y}_0^2 + \delta\dot{Z}_0^2}$ ;

$\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$  – составляющие вектора скорости КА в момент  $t$  до проведения коррекции.

Приведенную схему одноимпульсной коррекции применяют для устранения трехмерного вектора отклонения. Можно применить и более сложные схемы с многократным приложением коррекций. В частности, и двух коррекций для устранения шестимерного вектора отклонений в момент  $t_1$  либо множества последовательных коррекций для более точного устранения отклонений КА от расчетной траектории в конце участка дальнего наведения. Например, в случае двухимпульсной коррекции для совпадения шестимерного вектора отклонений в точке  $t_1$  необходимо устранить относительную скорость за счет приближения второго импульса в точке  $t_1$ . С учетом граничных условий  $\bar{r}_0, \bar{V}^*$  в точке  $t_0$  составляющие вектора относительной скорости для момента  $t_1$  запишутся в виде

$$\begin{aligned}\dot{X}(t_1) &= (3\omega_0 X_0 - 2\dot{Y}_0)\sin\omega_0 t_1 + \dot{X}_0^* \cos\omega_0 t_1; \\ \dot{Y}(t_1) &= (6\omega_0 X - 3\dot{Y}_0^*) + 2\dot{X}_0^* \sin\omega_0 t_1 + \\ &+ (4\dot{Y}_0^* - 6\omega_0 X_0)\cos\omega_0 t_1; \\ \dot{Z}(t_1) &= \dot{Z}_0^* \cos\omega_0 t - \omega_0 Z_0 \sin\omega_0 t_1.\end{aligned}\quad (5.4.11)$$

Следовательно, значение характеристической скорости, которое необходимо для выполнения условий  $\bar{r}_1 = \bar{V}_1 = 0$  в момент  $t_1$ , будет равно

$$\Delta V = \delta V_0 + \sqrt{\dot{X}^2(t_1) + \dot{Y}^2(t_1) + \dot{Z}^2(t_1)}.\quad (5.4.12)$$

При проектировании следует иметь в виду, что в целом задача коррекции

траектории движения КА является достаточно сложной, так как имеются факторы, заставляющие выполнять ее как можно раньше (требование сокращения расхода топлива), или факторы, заставляющие выполнять коррекцию как можно позже (необходимость накопления большего количества траекторных данных). Для отдельных же случаев схема коррекции определяется достаточно четко. Частные задачи таких коррекций для КА на стационарных орбитах и для длительно существующих аппаратов будут рассмотрены в гл. 6.

### 5.5. СБЛИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ЭТАПЕ БЛИЖНЕГО НАВЕДЕНИЯ

Параметры относительного движения КА в конце ближнего наведения существенным образом зависят от решаемых задач. Таковыми могут быть: проведение спасательных работ в космосе, организация работ на орбитальных станциях, облет спутников с целью оценки их состояния и определения возможности ремонта и т.д. В случае когда возможен контакт двух КА при значительных скоростях и последующий совместный полет в течение некоторого промежутка времени, конечные условия можно выполнить непосредственно на этапе ближнего наведения. В случае же "мягкой" встречи и стыковки после этапа сближения (в конце его) следует участок причаливания при близких к нулю относительных скоростях.

Существенное значение при выборе схемы ближнего наведения имеет способ создания управляющих ускорений. На практике используют в основном два способа: декартовый и полярный [14, 27].

Известные методы наведения на участке сближения можно разделить на две группы [6, 14, 27]:

методы, использующие уравнения орбитального движения;

методы, основанные на измерениях параметров относительного движения, без учета характеристик орбитального движения.

Для каждой из групп могут применяться различные модификации, зависящие, в первую очередь, от закона управления: с обратной связью или без обратной связи. При управлении с обратной связью на всем интервале сближения производят уточнение параметров относительного движения и формирование управляющих воздействий. При управлении без обратной связи управление осуществляется в начальный и конечный моменты времени.

Рассмотрим типичные схемы выбора процесса ближнего наведения.

**Методы, базирующиеся на применении орбитальных уравнений движения.** Наиболее простым является двухимпульсный метод, предпола-



гающий расчет составляющих скорости в точке  $t_0$ , при которых КА, двигаясь с выключенными двигателями, в заданный момент  $t$  будет находиться в точке встречи. Приращения вектора скорости находятся так же, как и в задаче двухимпульсной коррекции траектории движения КА. При таком методе расход топлива будет минимальным, однако отсутствие управлений между первым и вторым импульсами может привести к большим промахам КА относительно точки встречи вследствие неточности отработки импульсов скорости, методических ошибок, погрешности измерений.

Отклонения можно уменьшить введением промежуточных включений двигательной установки, используя процесс "затухающего сближения" [27], заключающийся в том, что временной интервал между последующими включениями должен быть не меньше промежутка времени, достаточного для накопления информации об относительном движении космических аппаратов (управление с обратной связью). Очевидно, что общий временной интервал времени сближения при этом удлинится. Требуемые значения составляющих приращения скорости находятся из выражений (5.4.10). На решение задачи осуществляется каждый раз не для временного интервала  $\Delta t_j = t_{1j} - t_{0j}$ , а для интервала

$$\Delta t^* = t_{1j} - k_3 t_{0j}, \quad (5.4.13)$$

где  $k_3$  – коэффициент затухания, лежит в интервале  $0 < k_3 < 1$ .

Значение  $k_3$  подбирают эмпирически. Однако можно и упорядочить данный процесс, выбрав схему с минимальными энергозатратами. С этой целью в процессе проектирования зависимость затрат суммарной характеристической скорости  $\Sigma \Delta V_j$  от коэффициента затухания можно аппроксимировать, например, кривой второго порядка по предварительно выбранным значениям

$$\Sigma \Delta V_j = F(k_3), \quad (5.4.14)$$

которая имеет один экстремум в точке  $k_3^* = (k_3)_{\text{экстр}}$ . При этом возможны случаи, когда:

экстремальное значение соответствует минимальному значению  $k_3$ , в этом случае следует брать  $k_3 = k_3^*$  (рис. 5.6,а);

экстремальное значение соответствует максимальному значению  $k_3$ , в этом случае следует брать значение  $k_3 = k_{30}$  (рис. 5.6,б).

**Методы, базирующиеся на измерениях параметров относительного движения.** При измерениях параметров относительного движения для решения задач ближнего наведения, как правило, применяют различные модификации метода параллельного сближения [14, 27]. Метод параллельного сближения основан на использовании измерений угловой скорости линии визирования и поддержании ее значения, близким к нулю.

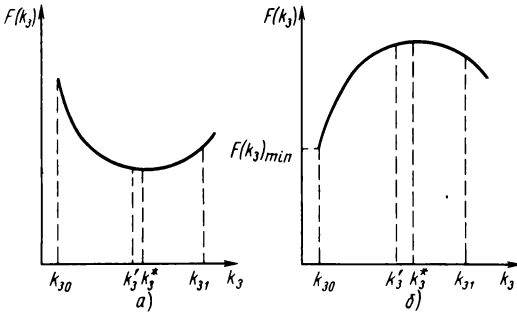


Рис. 5.6. К выбору коэффициента затухания:

$$k_3 = k_3^*; k_3 = k_{30}$$

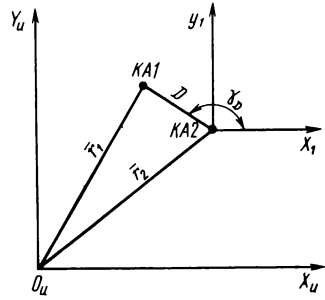


Рис. 5.7. Инерциально-лучевая система координат

Управление скоростью приближения осуществляется реализацией управляющих импульсов скорости по двум каналам: каналу нормальной скорости и каналу продольной скорости. В первом случае команды на включение двигательной установки вырабатываются в момент, когда угловая скорость линии визирования превысит заданное значение. Импульсы скорости в этом случае нормальны к линии визирования. Во втором случае поправки траектории вдоль линии визирования осуществляются при помощи дискретных коррекций. Величины поправок определяются на основании данных об относительной дальности  $D$ , скорости сближения  $\dot{D}$  и угловой скорости линии визирования  $\omega_{л.в}$ . Для описания движения КА в рассматриваемом случае используют инерциально-лучевую систему координат (рис. 5.7). В случае движения базового КА (пассивного) по эллиптической орбите уравнения движения КА, осуществляющего сближение, можно записать в виде

$$\ddot{D} - D\omega_{л.в}^2 = - \frac{\mu}{r_{ц}^2} D[1 - 3\cos^2(\gamma_D - \theta_{ц})] + U_D;$$

$$D\dot{\omega}_{л.в} + 2\dot{D}\omega_{л.в} = - \frac{3\mu}{r_{ц}^3} D \sin(\gamma_D - \theta_{ц}) \cos(\gamma_D - \theta_{ц}) + U_n, \quad (5.4.15)$$

где  $\omega_{л.в}$  – угловая скорость линии визирования;  $U_D$  – составляющая управляющего ускорения в направлении вектора относительной дальности  $D$ ;  $U_n$  – составляющая управляющего ускорения, нормальная к вектору относительной дальности в сторону возрастания угла  $\gamma_D$ ;  $r_{ц}$  – радиус-вектор базового КА.

При движении базового КА по круговой орбите (при  $\mu/r_{ц}^3 = \omega_0^2$ ) уравнения (5.4.15) запишутся в виде

$$\ddot{D} - D\omega_{л.в}^2 = -\omega_0^2 D[1 - 3\cos^2(\gamma_D - \theta_{ц})] + U_D; \quad (5.4.16)$$

$$D\dot{\omega}_{л.в} + 2\dot{D}\omega_{л.в} = -3\omega^2 D \sin(\gamma_D - \theta_{ц}) \cos(\gamma_D - \theta_{ц}) + U_n.$$

Для практических целей в случае приближенного анализа можно перейти к уравнениям с постоянной относительной скоростью между космическими аппаратами. В этом случае можно не учитывать члены, содержащие  $\omega_0^2$ , которые стремятся к нулю по мере увеличения радиуса-вектора  $r_{ц} (\omega_0 \rightarrow 0)$ .

В этом случае движение КА в бессиловом пространстве описываются системой уравнений

$$\ddot{D} - D\omega_{л.в}^2 = U_D; \quad (5.4.17)$$

$$D\omega_{л.в} + 2\dot{D}\omega_{л.в} = U_n.$$

Термин "бессиловое пространство" используют в случаях, когда на космический аппарат не действуют никакие силы, кроме тяги двигателя.

В общем случае закон изменения угловой линии визирования при отсутствии тяги можно записать как

$$\frac{\omega_{л.в}}{\omega_{л.в0}} = \frac{1}{(D/D_0)^2}, \quad (5.4.18)$$

здесь индекс "0" определяет начальные значения.

При управлении нормальной скоростью КА движется приблизительно вдоль линии визирования, так что

$$D \simeq D_0 + \dot{D}t, \quad \dot{D} < 0, \quad (5.4.19)$$

$$\text{откуда } \frac{\omega_{л.в}}{\omega_{л.в0}} \simeq \frac{1}{(1 - \frac{t}{\tau_B})^2} = \frac{1}{(1 - \tau)^2}, \quad (5.4.20)$$

где  $\tau = t/\tau_B$  — безразмерное время.

Полагая  $U_D = 0$  в уравнениях (5.4.17) в период приложения нормальной тяги и учитывая (5.4.19), запишем

$$\dot{\omega}_{л.в} + \left( \frac{2D}{D_1 + \dot{D}t} \right) \omega_{л.в} = \frac{U_n}{D_1 + \dot{D}t}, \quad (5.4.21)$$

где  $D_1$  — дальность, соответствующая началу включения нормальной поправки.

Если  $\dot{D} \approx 0$ , то уравнение (5.4.21) может быть решено относительно  $\omega_{л.в}$  как линейное дифференциальное уравнение

$$\omega_{л.в} = \frac{1}{(D_1 + \dot{D}t)^2} [U_n t (D_1 + \frac{\dot{D}}{2}t) + D_1^2 \omega_{л.в1}], \quad (5.4.22)$$

где  $\omega_{л.в1}$  — угловая скорость линии визирования, соответствующая дальности  $D_1$ .

Время, необходимое для компенсации начальной нормальной скорости,

$$t_n = \frac{D_1 \omega_{л.в1}}{(-U_n)},$$

где  $U_n$  — отрицательно.

Учитывая, что  $|D_1 \omega_{л.в}| \ll |U_n|$ , из уравнения (5.4.22) может быть найдена остаточная угловая скорость линии визирования в конце отработки первого импульса (в силу того, что нормальная поправка реализуется не мгновенно)

$$\omega_{л.в2} \approx \frac{\dot{D}}{2U_n} \omega_{л.в1}^2. \quad (5.4.23)$$

Из уравнений (5.4.20), (5.4.23) следует

$$\frac{\omega_{л.в}}{(\dot{D}/2U_n)\omega_{л.в}^2} = \frac{1}{(1-\tau)^2}. \quad (5.4.24)$$

Откуда, полагая  $\omega_{л.в} = \omega_{л.в1}$  и  $\tau = \tau_n$  (безразмерный период нормальной тяги), найдем

$$\begin{aligned} \tau_n &= 1 - \sqrt{(\dot{D}/2U_n)\omega_{л.в1}^2}; \\ t_n &= \tau_n \tau_n, \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

где  $\tau$  определяется в начальный момент включения нормальной тяги.

Из уравнений (5.4.25) может быть найдено значение  $D$ , необходимое для поддержания заданного промежутка времени между нормальными коррекциями, поскольку  $\tau$  можно считать постоянным.

Поправки траектории вдоль линии визирования. Система управления скоростью сближения представляет собой релейную схему, которая поддерживает значение  $\tau_B$  в определенных

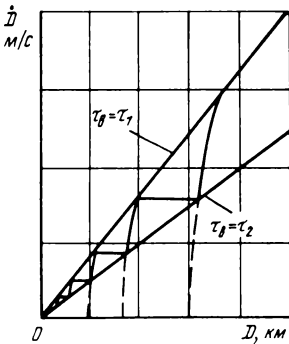


Рис. 5.8. Характер продольной коррекции КА ( $\tau$ -коридор)

пределах. Закон изменения  $\tau_B$  в период действия продольной тяги определяется выражением

$$\tau_B = \frac{D}{-\dot{D}} = \frac{D_0 + D_0 t + (U_D/2)t^2}{-(\dot{D}_0 + U_D t)} \quad (5.4.26)$$

$$\text{и } \frac{d\tau_B}{dt} = U_D \frac{D_0 + \dot{D}_0 t + (U_D/2)t^2}{(\dot{D}_0 + U_D t)^2} - 1. \quad (5.4.27)$$

Если  $D_0 \geq (-\dot{D}_0)^2/U_D$ , то из уравнения (5.4.27) следует, что начальное значение  $d\tau_B/dt$  положительно. Если выбран нижний предел для  $\tau_B$ , равный  $(\tau_B)_{\min}$ , то момент начала продольной коррекции выбирается из условия

$$D \leq (\tau_B)_{\min}(-\dot{D}) \leq \tau_n(-\dot{D}). \quad (5.4.28)$$

Кроме того, требуется определить и начальный момент коррекции, если начальное значение  $d\tau_B/dt$  отрицательно, т.е.  $D < (-\dot{D})^2/U_D$ . Полагая в уравнении (5.4.27)  $d\tau_B/dt = 0$ , определим из полученного уравнения и уравнения (5.4.26) в общем случае минимальное значение  $\tau_B$ . Приравняв это выражение заданному значению  $(\tau_B)_{\min}$ , получим

$$\tau_{\min} = \frac{2D_0 - (\dot{D}_0^2/U_D)}{\sqrt{2U_D D_0 - \dot{D}_0^2}}, \quad (5.4.29)$$

откуда окончательно

$$D_0 = \frac{\dot{D}_0^2}{2U_D} + \frac{U_D}{2} \tau_{\min}^2. \quad (5.4.30)$$

Для принятых выше исходных условий момент окончания продольных коррекций определяется из условия  $\tau \geq \tau^*$ . Процесс управления представлен на рис. 5.8. Откуда нетрудно определить число продольных поправок и общее время наведения при практически любом начальном относительном расстоянии между космическими аппаратами. На практике возможна реализация приведенной схемы сближения. Она достаточно проста для реализации на бортовых ЭВМ и надежна с точки зрения реализуемости для технических средств.

## **ГЛАВА 6. ВЫБОР ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КА ОКОЛОЗЕМНОГО КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ПОДДЕРЖАНИЕ ОРБИТ ДЛИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИХ КА**

### **6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ С ДЛИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИМИ КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ**

В настоящей главе рассматривается процесс баллистического проектирования космических систем, включающих периодически обновляющийся космический аппарат в случае его отказа или полного использования компонент (например, рабочего тела для поддержания орбитальных параметров и управления угловым положением аппарата). Баллистическое проектирование в этом случае заключается в выборе орбитальных характеристик КА и закона управления (величины управляющих импульсов, прикладываемых в КА, и время их приложения) для поддержания орбитальных параметров, позволяющих выполнять целевые задачи. Обобщенная схема процесса баллистического проектирования КС с длительно существующими КА приводится на рис. 6.1.

Следует отметить также, что уже в ходе проектирования, как правило, целесообразно рассмотреть хотя бы в общем плане вопросы баллистического сопровождения КА, планирования экспериментов и исследований, так как их реализация в определенной степени может повлиять на выполнение поставленных перед космической системой задач.

Задачи баллистического проектирования космических систем с длительно существующими аппаратами рассмотрим на конкретных типичных примерах.

1. Система с КА на низкой орбите, предназначенным для изучения нижней части ионосферы (высоты порядка  $\sim 100$  км).

Для этой цели можно использовать периодически входящий в нижние слои атмосферы спутник [37]. На рис. 6.2 показана его компоновочная схема. При выборе баллистических характеристик необходимо определить такие начальные параметры, которые позволили бы обеспечить длительное активное существование КА, а также обеспечить требуемый запас бортовой энергетики для поддержания орбитальных параметров, в основном высоту перигея. Задача баллистического проектирования может быть сведена к определению начальных орбитальных параметров

$$\vec{\mathfrak{E}}^0 = \vec{\mathfrak{E}}^0 (h_{\text{п}}^0, h_{\text{а}}^0), \quad (6.1.1)$$

обеспечивающих поступление информации о слоях атмосферы (непосредственно ионосферы в диапазоне  $100 \text{ км} \leq h \leq 115 \text{ км}$ ) при суммарных затратах характеристической скорости

$$\Delta V_{\Sigma} = \sum_j \Delta V_j \tag{6.1.2}$$

для поддержания орбиты КА на интервале активного существования  $[t_a, t_b]$  при ограничениях  $\Delta t^*$  на интервалы времени поступления информации  $\Delta t_n$  (как правило, целесообразны длительные перерывы в поступлении информации)

$$\Delta t_n \leq \Delta t^*. \tag{6.1.3}$$

2. КА для изучения ресурсов Земли. Для таких аппаратов полосу исследования на поверхности Земли и разрешение на местности желательно иметь одинаковыми для различных географических областей. Помимо этого во время функционирования КА изменение освещенности подспутниковых точек по трассе должно быть минимальным. Для выполнения таких условий орбиты КА целесообразно выбирать круговыми и солнечно-синхронными [29]. В этом случае задача баллистического проектирования сводится к определению начальных значений высоты  $h^0$  и наклона  $i^0$  солнечно-синхронной орбиты и суммарного запаса характеристической скорости  $\Delta V_{\Sigma}$  для поддержания орбитальных параметров на заданном временном интервале  $[t_a, t_b]$  при ограничениях

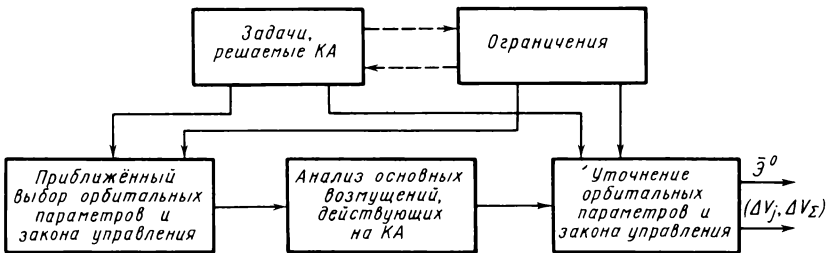


Рис. 6.1. Обобщенная схема баллистического проектирования КС с длительно существующими КА

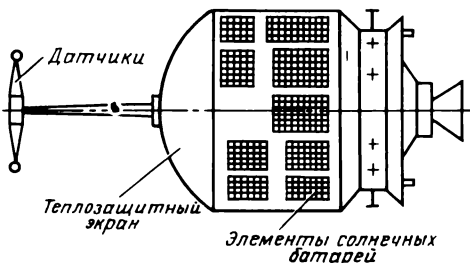
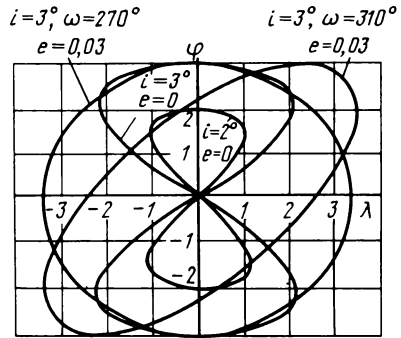


Рис. 6.2. Компоновочная схема периодически входящего в атмосферу спутника

Рис. 6.3. Трассы околоstationарных КА



на высоту (зависящую от разрешающей способности аппаратуры) и наклонения, т.е.

$$h^* \leq h^* \leq h^{**}, i^0 \leq i^* \tag{6.1.4}$$

3. КА для изучения околоземного космического пространства (см. гл. 1). Для решения такой обширной задачи нельзя ограничиться одним классом космических аппаратов, так как перечень решаемых вопросов

в данном случае достаточно широк и разнообразен: изучение метеорных потоков, исследование магнитосферы и определение ее основных характеристик и т.д. В качестве примера рассмотрим выбор орбитальных параметров КА, предназначенного для изучения магнитосферы Земли в ограниченном диапазоне высот  $r_3 \leq h \leq 20R_3$  [12]. Задача баллистического проектирования в этом случае сведется к определению начальных орбитальных параметров  $\bar{\Theta}^0 = \bar{\Theta}^0(a^0, e^0, i^0, \omega^0, \Omega^0)$  и суммарных затрат энергии  $\Delta V_\Sigma$ , обеспечивающих длительное функционирование КА на интервале  $[t_a, t_b]$  при ограничениях на высоты

$$h^* \leq h_n, h_a \leq h^{**} \tag{6.1.5}$$

4. Система с КА на стационарных орбитах. Такие аппараты находят все более широкое применение при решении различных задач, в том числе для обеспечения связи между отдаленными регионами, ретрансляции радио и телевизионных передач, исследования околоземного пространства и т.д.

В подавляющем большинстве случаев на практике выполнение целевых задач стационарными КА определяется их географическими долготами "висения", а также в существенной мере может зависеть от наклонения и эксцентриситета. На рис. 6.3 приведены трассы околоstationарных КА.

Задача баллистического проектирования в рассматриваемом случае может быть сведена к определению орбитальных параметров

$$\bar{\Theta}^0 = \bar{\Theta}^0(\lambda^0, e^0, i^0, \omega^0) \tag{6.1.6}$$

и суммарного запаса энергии  $\Delta V_\Sigma$  для поддержания КА в допустимом диапазоне долгот висения при ограничениях

$$\lambda^* \leq \lambda_j(t) \leq \lambda^{**}, i(t) \leq i \tag{6.1.7}$$



Перечисленные примеры являются типичными в практике исследования, изучения и практического использования космоса, они охватывают выбор орбитальных параметров в достаточно широком диапазоне с учетом различного спектра возмущающих факторов и ограничений.

## 6.2. ВЫБОР ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

Решение задачи определения баллистических характеристик КА проводится в два этапа. На первом определяются приближенные орбитальные характеристики  $\bar{\Xi}^0(h_p, h_a)$ , на втором эти характеристики уточняются и осуществляется выбор схемы поддержания (коррекции) орбитальных параметров, а также определение суммарных энергетических затрат  $\Delta V_{\Sigma}$ .

В первом случае можно воспользоваться упрощенной моделью атмосферы с плотностью, определяемой зависимостью (см. гл. 1.4)

$$\rho(H) = \rho(h_0) \exp\left[-\frac{h - h_0}{H_0}\right]. \quad (6.2.1)$$

Изменения параметров орбиты спутника при  $h_p = 110$  км, периодического входящего в нижние слои атмосферы, приведены в табл. 6.1 [37]. Данные таблицы показывают, что практически для всех рассматриваемых вариантов величина  $(da/dN) < 0$ , что в соответствии с качественным анализом (см. гл. 4) говорит о неустойчивости орбиты и необходимости осуществления периодических коррекций высоты перигея.

Дальнейшим шагом приближенного анализа является определение орбитальных параметров с учетом ограничений по темпам поступления информации (имеется в виду, что на витках коррекции орбиты получение информации об ионосфере затруднено). Нижняя граница опускания спутника для примера может быть принята  $h_p \approx 100$  км, а частота между

Таблица 6.1

Параметр	Высота апогея орбиты, км		
	600	1000	2000
$\delta a$ , км/об	-26,29	-19,20	-17,77
$\delta h_p$ , км/об	-0,2862	-0,1171	-0,0372
$\delta \Omega$ , град/об	-0,1798	-0,1705	-0,1520
$\delta \omega$ , град/об	-0,1090	-0,1031	-0,0908
$\delta i$ , град/об	0,00431	0,00346	0,00284

**Рис. 6.4. Сравнительная оценка плотности атмосферы**

коррекциями  $h_{п} - \Delta h_{п} \approx \approx N$  сут. Для принятого ограничения  $\Delta t_n$  целесообразно выбрать вариант с начальным значением  $h_{п}^0 \approx \approx 110 \dots 115$  км,  $h_a^0 \approx \approx 1000$  км.

Далее осуществляется второй этап проектирования – уточненный анализ возмущений орбитальных параметров, выбор последних и оценка требуемых энергозатрат  $\Delta V_{\Sigma}$  для поддержания орбитальных характеристик на заданном временном

интервале  $\Delta t_{\text{сущ}} = = (t_b - t_a)$  активного функционирования КА. Уточнение орбитальной эволюции может быть проведено в соответствии с материалами гл. 4. При этом существенным фактором будет являться модель плотности атмосферы. Вместе с тем анализ показывает, что зачастую оценки эволюции, полученные с использованием приближенной модели (6.2.1), являются достаточно точными. На рис. 6.4 приведена сравнительная оценка плотности атмосферы по модели (6.2.1) и уточненной стандартной модели ЯКИА [37].

При оценке суммарных энергозатрат в рассматриваемом случае целесообразно принять двухступенчатую схему коррекции орбиты КА:

поддержание высоты перигея осуществляется с помощью корректирующих импульсов ( $\Delta V_a$ ), прикладываемых с апогея орбиты;

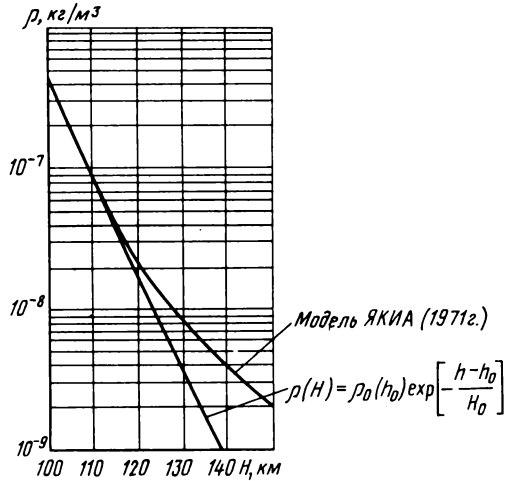
поддержание высоты апогея осуществляется импульсами  $\Delta V_{п}$ , прикладываемыми в перигее орбиты.

Очевидно, что периодичность коррекций  $\Delta V_a$ ,  $\Delta V_{п}$  существенно различна и определяется как эволюцией параметров  $h_{п}$ ,  $h_a$ , так и ограничениями на текущие параметры  $h_{п}(t)$ ,  $R_a(t)$ . Суммарный расход характеристической скорости будет равен

$$\Delta V_{\Sigma} = \sum_{\pi} \Delta V_{п} + \sum_a \Delta V_a,$$

где  $\pi, a$  – количество коррекций соответственно в перигее и апогее.

Значения компонент определяется в соответствии с типовыми схемами коррекции, реализуемыми в аспидальных точках орбиты [4, 21].



### 6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ И ИЗУЧЕНИЯ МАГНИТОСФЕРЫ

Вначале рассмотрим выбор баллистических характеристик КА на солнечно-синхронных орбитах, для которых положение их плоскости и относительное положение Солнца с течением времени мало меняются, испытывая лишь сезонные колебания. Последние связаны с относительным перемещением Солнца из южного полушария в северное и наоборот, а также с эллиптичностью орбиты Земли (вследствие последнего угловая скорость годового вращения Земли вокруг Солнца не является постоянной, а изменяется в небольших пределах)\*.

Из гл. 4 можно сделать вывод о том, что возмущающее воздействие из-за нецентральной поля Земли может привести к существенной регрессии узла орбиты. При этом узел прецессирует с Востока на Запад при наклонении  $i < 90^\circ$  и в обратном направлении при наклонении от  $90$  до  $180^\circ$ . Скорость прецессии существенно зависит от высоты полета КА. Для спутников, исследующих поверхность Земли, наиболее предпочтительными являются круговые орбиты с высотами порядка  $400 \dots 800$  км [12]. В этих случаях выражение, определяющее вековую составляющую прецессии долготы восходящего узла орбиты за оборот, можно записать в виде

$$\Delta\Omega(2\pi) = 2\pi \frac{3}{2} C_{20} \left( \frac{r_z}{r_z + h} \right)^2 \cos i, \quad (6.3.1)$$

где  $r_z$  – экваториальный радиус Земли;  $h$  – высота круговой орбиты;  $C_{20}$  – константа, приведена в приложении 2.

Из (6.3.1) следует, что прецессия восходящего узла орбиты по абсолютной величине возрастает от нуля до максимума при увеличении наклонения от  $90$  до  $180^\circ$  или при уменьшении наклонения от  $90$  до  $0^\circ$ . Для обеспечения синхронности эволюции восходящего узла орбиты с относительным перемещением Солнца по небесной сфере необходимо выбрать такие наклонения и высоту солнечно-синхронной орбиты, при которых прецессия  $\Delta\Omega$  за оборот спутника удовлетворяла бы условию

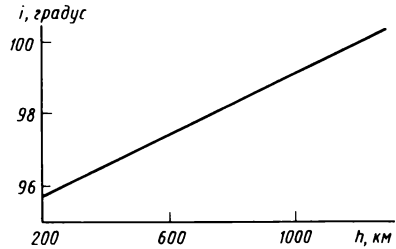
$$\Delta\Omega = -2\pi T_d / T_T, \quad (6.3.2)$$

где  $T_d \cong T_\Omega$  – драконический период обращения КА (промежуток вре-

---

\* Из-за сезонных колебаний и эллиптичности орбиты Земли проекция Солнца относительно восходящих узлов орбиты может отклоняться от среднего значения в направлении вдоль экватора на угол, не превышающий  $5^\circ$ , а в вертикальном направлении – не более  $23,5^\circ$ .

Рис. 6.5. Зависимость между наклоном и высотой солнечно-синхронных орбит



мени между двумя последовательными прохождениями экватора);  $T_T$  — тропический год, равный времени полного оборота Земли вокруг Солнца.

На рис. 6.5 приведена зависимость между наклоном и высотой орбит [29].

Уточненная оценка параметров солнечно-синхронных орбит может быть проведена с использованием материалов гл. 4. Вместе с тем следует отметить, что для орбит с высотами  $\sim 400 \dots 800$  км основное возмущающее воздействие оказывает отличие геопотенциала от центрального. Возмущение от притяжения внешних тел несущественно, атмосферное возмущение может быть значительным до высот  $\sim 600$  км, для более высоких орбит оно также несущественно.

Рассмотрим далее процесс выбора начальных орбитальных параметров КА для изучения околоземного космического пространства. Орбиты таких аппаратов, как правило, выбираются с большими высотами в районе апогея ( $h_a > 10r_3$ ) и сравнительно малыми высотами в районе перигея ( $h_p \cong 6000 \dots 1000$  км). Примерами таких КА могут являться космические аппараты типа "Зонд" [12]. Характерной особенностью орбит КА для изучения околоземного космического пространства является их высокоэллиптичность, а также то обстоятельство, что значительную часть полетного времени они находятся на высотах  $\geq 20\,000$  км. Это может приводить к существенному изменению высоты перигея орбиты под влиянием притяжения Луны и Солнца. В табл. 6.2 приведены значения  $|\Delta h|_{\max}$ , обусловленные притяжением Луны для различных значений высоты перигея и апогея [34]. Возмущения, обусловленные притяжением Солнца, примерно в 2,2 раза меньше. Из таблицы видно, что для рассматриваемого класса орбит изменение  $\Delta h_p$  мало зависит от значения  $h_p^0$ , а определяется значением  $h_a^0$ . Очевидно также, что для спутников с высотами порядка несколько тысяч километров и ниже, величина  $\Delta h_p$  мала (порядка нескольких метров). С увеличением  $h_a^0$  она резко возрастает, достигая при  $h_a^0 = 50\,000 \dots 100\,000$  км нескольких километров или десятков километров за один оборот.

Как правило, для выполнения целевых задач малые изменения угловых координат будут менее существенны, чем эволюция высоты перигея. Изменение высоты перигея получим из соотношения  $r_p = a(1 - e)$ . При  $a = \text{const}$  и изменении эксцентриситета  $\Delta e$  изменение  $\Delta r_p = -a\Delta e$ ,

Таблица 6.2

Высота апогея орбиты, км	Высота перигея орбиты, км				
	200	2000	10 000	20 000	30 000
2000	2,5 м	0	—	—	—
10 000	34 м	37 м	0	—	—
20 000	181 м	206 м	243 м	0	—
50 000	2,4 км	2,8 км	4,1 км	5,1 км	0
100 000	21,5 км	24,6 км	36,2 км	47,7 км	65,5 км

т.е. величина  $\Delta r_{\Pi}$  фактически определяется изменением эксцентриситета. Используя углы  $\alpha$ ,  $\gamma$ , приращение высоты перигея за один оборот запишем в виде [34]

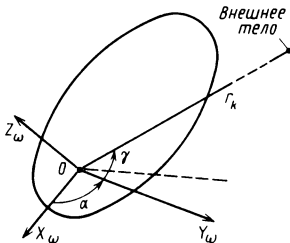
$$\Delta h_{\Pi} = \Delta r_{\Pi} = -a\Delta e = \frac{15}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k}\right)^3 \times \\ \times e\sqrt{1-e^2} \cos^2 \gamma \sin 2\alpha. \quad (6.3.3)$$

Смысл углов  $\alpha$ ,  $\gamma$  можно понять из рис. 6.6, где ось  $OX_{\omega}$  системы координат совпадает с направлением на перигей орбиты, плоскость  $OZ_{\omega}Y_{\omega}$  совпадает с плоскостью орбиты, а ось  $OZ_{\omega}$  направлена по нормали к плоскости орбиты таким образом, что спутник кажется движущимся по ходу часовой стрелки, если смотреть вдоль положительного направления этой оси.

Из (6.3.3) следует, что высота перигея увеличивается в случае, когда проекция вектора  $r_k$  на плоскость  $OX_{\omega}Y_{\omega}$  орбиты лежит в первой или третьей четверти этой плоскости ( $0 < \alpha < \pi/2$  или  $\pi < \alpha < 3/2\pi$ ) и уменьшается, если эта проекция лежит во второй или четвертой четверти

( $\pi/2 < \alpha < \pi$  или  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ ). Максимум модуля приращения  $\Delta h_{\Pi}$  со-

ответствует значениям  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$  ( $n$  — целое число).



Для уточнения орбитальных параметров и определения схемы коррекции орбит целесообразно применять точные методы прогноза (см. гл. 4), например повитковый численно-аналитический прогноз. В этом

Рис. 6.6. Система координат

случае орбитальные параметры на  $n$ -м витке определяются по схеме

$$\Delta \bar{\mathcal{E}}_n = \bar{\mathcal{E}}_{n-1} + \Delta \bar{\mathcal{E}}_{n-1, n}; \quad (6.3.4)$$

$$\Delta \bar{\mathcal{E}}_{n-1, n} = (\Delta \bar{\mathcal{E}}_G + \Delta \bar{\mathcal{E}}_a + \Delta \bar{\mathcal{E}}_{\text{л.с.}} + \Delta \bar{\mathcal{E}}_{\text{св.д.}})_{n-1, n}.$$

где  $\Delta \bar{\mathcal{E}}_G$ ,  $\Delta \bar{\mathcal{E}}_a$ ,  $\Delta \bar{\mathcal{E}}_{\text{л.с.}}$ ,  $\Delta \bar{\mathcal{E}}_{\text{св.д.}}$  – компоненты изменения орбитальных параметров за оборот под влиянием нецентральности геопотенциала, торможения в атмосфере, притяжения внешних тел и светового давления.

Для определения первых трех компонент могут быть использованы формульные выражения, приведенные в гл. 4, либо в работах [11, 15, 16, 17, 34]. На определении составляющей  $\Delta \bar{\mathcal{E}}_{\text{св.д.}}$  в данном случае следует остановиться особо, ввиду того, что КА для изучения магнитосферы и окружающего Землю космического пространства являются длительное существующими и с большой высотой апогея. Поэтому влияние светового давления может оказаться заметным и на длительных временных интервалах привести к значительной эволюции орбитальных параметров.

Рассмотрим подход к оценке такого воздействия.

Сила светового давления направлена по вектору Солнце-КА и создает ускорение

$$F_{\text{св}} = \frac{SE_0 k}{ct} \left( \frac{r_3}{\Delta} \right)^2, \quad (6.3.5)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения КА;  $E_0$  – поток солнечного излучения в районе Земли;  $c$  – скорость света;  $r_3$  – средний радиус орбиты Земли;  $\Delta$  – расстояние рассматриваемого объекта от Солнца;  $k$  – некоторый коэффициент, зависящий от характера отражения света, а также от распределения теплового излучения по поверхности КА:

$$E_0/c \cong 4,65 \cdot 10^{-10} \text{ Н/см}^2$$

$$k = 1 \dots 1,44.$$

Из (6.3.5) видно, что действие светового давления зависит от характеристик КА: чем аппарат больше и легче, тем ускорение сильнее. Этим действие давления солнечного излучения напоминает торможение в атмосфере, которое пропорционально баллистическому коэффициенту (4.1.12). Отличие состоит в том, что сила светового давления практически постоянна по модулю и направлению и для близких КА намного меньше торможения в атмосфере. Отношение рассматриваемых ускорений можно записать в виде

$$\frac{F_{\text{св}}}{F} = \frac{2kE_0}{c \chi \rho V_{\text{отн}}^2} \left( \frac{r_c}{\Delta} \right)^2. \quad (6.3.6)$$

Приведем расчетные значения этого отношения для различных высот [34]:

Высота, км	200	300	400	500	600	700	800
$F_{св}/F_N$	0,0002	0,003	0,018	0,08	0,27	0,80	2,1

Приведенные данные показывают, что для высот менее 500 км учет светового давления нецелесообразен. При высотах, существенно больших 500 км, на длительных временных интервалах влияние светового давления может оказаться существенным и требует специального исследования и по необходимости учета. Не останавливаясь подробно на методах оценки эволюции под влиянием светового давления (точные расчетные формулы см. в работах [17, 34]), отметим особенность при анализе влияния светового давления на эволюцию орбит. Она состоит в том, что сила светового давления может иметь разрывы в моменты входа КА в тень Земли и выхода из тени. Однако такие разрывы имеют место не всегда, а только при соответствующей ориентации орбиты относительно Солнца (см. гл. 3).

#### 6.4. ОСОБЕННОСТИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ С КА НА СТАЦИОНАРНЫХ ОРБИТАХ

При выборе характеристик орбит окологлавионарных КА, в первую очередь, целесообразно определить начальные значения  $\lambda^0, i^0$ , как наиболее существенно влияющие на решение целевых задач, а затем приступить к уточнению других орбитальных параметров и к выбору закона управления для поддержания заданной долготы висения.

При выборе начальных (кинематических) значений  $\lambda^0, i^0$ , как правило, необходимо обращаться к вспомогательным задачам космической баллистики (см. гл. 3). После определения значений  $\lambda^0, i^0$  следует их уточнение с учетом основных закономерностей орбитальной эволюции.

В случае уточнения географической долготы висения для стационарного КА с приемлемой точностью можно ограничиться только второй секториальной гармоникой ( $C_{22}, d_{22}$ ), а для приближенной оценки  $i^0$  — влиянием притяжения внешних тел [17, 29]. Примем также, что КА имеет приближенные элементы  $T \approx 24^h, e = 0, i \approx 0$ .

Рассмотрим, в первую очередь, выбор  $\lambda^0$  с учетом гармоник с индексами  $l = 2, k = 2$ . В этом случае  $\omega_3/\lambda_{ср} \approx 1$  и в соответствии с данными гл. 4 близким к 0 является параметр  $\gamma_{lkpq}$  с индексами  $p = 0, q = 0$ . Параметр  $D_{lkpq}^2$  принимает значение

$$D_{2200}^2 = 36I_{22} \left( \frac{r_3}{a} \right)^2 \approx 1,53 \cdot 10^{-6}, \quad (6.4.1)$$

где  $I_{22} = \sqrt{C_{22}^2 + d_{22}^2} \approx 1,82 \cdot 10^{-6}$ .

Переменная  $L_{lknq}$  [см. (4.3.43)] запишется в виде

$$L = 2(\omega + M + \Omega - S) - \psi_{22}, \quad (6.4.2)$$

где  $\psi_{22} = -30^\circ$ .

Аргумент  $(\omega + M + \Omega - S)$  имеет смысл долготы КА относительно Гринвича

$$\lambda = \omega + M + \Omega - S. \quad (6.4.3)$$

Из (6.4.3) следует, что устойчивой точке резонансных колебаний  $L = \pi$  соответствуют две долготы:

$$\lambda^1 \approx \frac{\psi_{22}}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 75^\circ; \quad (6.4.4)$$

$$\lambda^2 \approx \frac{3\pi + \psi_{22}}{2} \approx 255^\circ.$$

Точки неустойчивого равновесия сдвинуты относительно приведенных на  $\sim 90^\circ$ .

Амплитуда максимальных колебаний по долготе составляет  $90^\circ$  (рис. 6.7). Ей соответствует период в несколько лет. Колебания с малой амплитудой имеют период  $\sim 568$  сут. В работе [17] получены условия, при которых возникают колебания около точек равновесия (6.4.4), они имеют вид

$$\left| \frac{dL}{dM} \right|_0 \leq 2D = 12\sqrt{I_{22}} \left( \frac{r_3}{a} \right) = 2,46 \cdot 10^{-3}. \quad (6.4.5)$$

Величина  $\left| \frac{dL}{dM} \right|_0$  имеет смысл параметра  $\gamma_{lknq}$ . В этом легко убедиться, продифференцировав в ней по времени и числитель и знаменатель. Таким образом, условие (6.4.5) эквивалентно ограничению на параметр

$$|\gamma_{2200}| \leq 2,46 \cdot 10^{-3} \quad (6.4.6)$$

и ограничению на погрешность среднего движения

$$\left| \frac{\delta \bar{n}}{\bar{n}} \right| \leq 6\sqrt{I_{22}} \left( \frac{r_3}{a} \right) = D \approx 1,23 \cdot 10^{-3}. \quad (6.4.7)$$

Если условия (6.4.5), (6.4.6) не выполняются, КА будет иметь вековую составляющую по долготе. В момент выполнения этих условий КА будет совершать колебания по долготе с амплитудой  $\pi/2$ . Условия несколько ужесточаются, если на амплитуду колебаний накладываются требования вида

$$\Delta\lambda = |\lambda_{\max} - \lambda^{(1)}| \leq \epsilon, \quad (6.4.8)$$

где  $\epsilon$  – малое число.



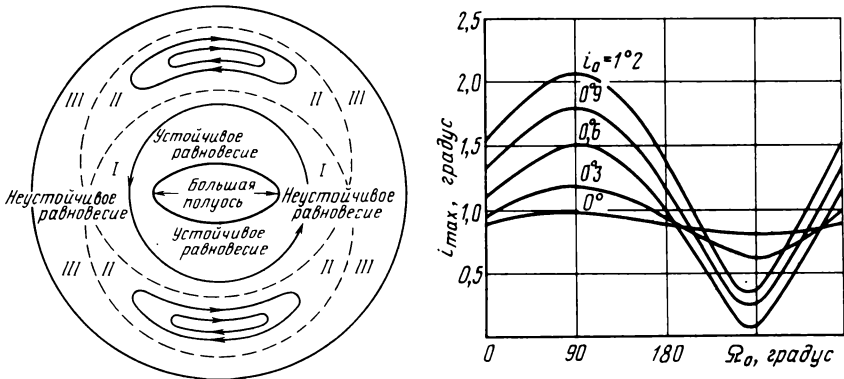


Рис. 6.7. Точки равновесия:

В области I при  $T < T_{зв}$  КА движется относительно Земли в восточном направлении. Область II соответствует  $T \cong T_{зв}$  (движение КА в этой области представляет собой долгопериодические колебания либо движение в окрестности точки устойчивого равновесия). В области III  $T > T_{зв}$  — движение КА происходит в западном направлении;  $T_{зв}$  — звездные сутки

Рис. 6.8. Изменение наклона околостационарных орбит

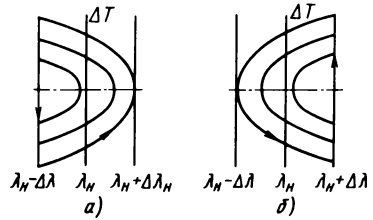
Тогда с учетом (6.4.1), (6.4.2), (4.3.47) получаем ограничение

$$\left| \frac{dI}{dM} \right| \leq \sqrt{2D}(1 - \cos 2\epsilon) \approx 2\sqrt{2}D\epsilon^2. \quad (6.4.9)$$

Определение начального значения  $i^0$  базируется на материалах гл. 4. Эволюция наклона зависит от начальных значений  $i_0$  и  $\Omega^0$ . Зависимость максимального изменения наклона на интервале в один год от начального значения долготы восходящего узла приведена на рис. 6.8. Расчетные данные получены в работе [16] для 1972 г. Однако эти количественные данные носят достаточно общий характер [17, 29]. Анализ характера изменения наклона показывает, что для достижения минимума отклонения орбиты за год целесообразно выводить КА на орбиты с долготой восходящего узла  $\cong 270^\circ$ , а начальное наклонение выбирать равным примерно половине максимальной эволюции за анализируемый срок существования.

Приведенный анализ является достаточно приближенным и носит в основном качественный характер. Уточненные характеристики эволюции долготы висения КА можно получить, пользуясь материалами гл. 4, определив эволюцию  $\delta a(2\pi)$ ,  $\delta M(2\pi)$ ,  $\delta T(2\pi)$ . После чего находится величина периода обращения  $T_n = T_{n-1} + \delta T(2\pi)$ , определяется характер дрейфа КА в соответствии с зависимостью  $\Delta\lambda(2\pi) = \omega_3(T_{зв} - T)$ .

**Рис. 6.9. Управляющие фазовые траектории:**  
 а -  $(\lambda_3 - \Delta\lambda) > \lambda_3^*$ ; б -  $(\lambda_3 + \Delta\lambda) < \lambda_3^*$



Уточненная оценка эволюции элементов  $e, \omega, \Omega$  орбиты КА под влиянием притяжения внешних тел и гeопотенциала может быть получена при помощи формульных выражений (4.3.5), (4.3.30) ... (4.3.32), (4.5.9). Однако их влияние на выполнение целевых задач (в основном определяемых эволюций долготы и наклонения) является не столь существенным.

Рассмотрим далее особенность управления околостационарным КА, которая заключается в необходимости устранения дрейфа КА по долготе, т.е. в поддержании аппарата в диапазоне географических долгот [17, 30]

$$\lambda(t) = \lambda_n \pm \Delta\lambda, \tag{6.4.10}$$

где  $\lambda_n$  – долгота, соответствующая номинальному режиму функционирования КА.

Под влиянием различного рода возмущений (в основном под влиянием аномалий гравитационного потенциала) период будет отличаться от стабильного, а географическая долгота будет смещаться в западном или восточном направлениях. Для заданного диапазона долгот  $(\lambda_n - \Delta\lambda, \lambda_n + \Delta\lambda)$  можно построить множество фазовых траекторий (рис. 6.9), отличающихся значением долготы при значении  $T_{ст}$ , равном стабильному. Любой реализации периода обращения и долготы  $\lambda_n$ , лежащей в диапазоне  $\pm \Delta\lambda$ , будет соответствовать своя фазовая траектория, ведущая на правую границу интервала при  $\lambda_n < \lambda^*$  и на левую границу при  $\lambda_n > \lambda^*$ . Таким образом, обеспечение стабильности трассы сводится к изменению драконического периода обращения на одной из границ диапазона: левой при  $\lambda_n > \lambda^*$  и правой при  $\lambda_n < \lambda^*$ . Очевидно, что следует выбирать такую величину периода обращения, при которой будет обеспечено попадание на самую внешнюю фазовую траекторию. Такой траектории будет соответствовать наибольшее время движения, а следовательно, наименьшее число коррекцией КА за время активного существования.

В свою очередь, величина требуемого изменения периода обращения достаточно просто переводится в потребное приращение скорости. При конкретной реализации в зависимости от характеристик тяговооруженности и требуемой точности управления можно использовать различные программы управления: с постоянной ориентацией вектора тяги либо с переменной ориентацией вектора тяги. В настоящем изложении рассмот-

рим задачу управления в импульсной интерпретации (с постоянной ориентацией вектора тяги).

Влияние эволюции на долготу и период обращения стационарного КА можно представить приближенной зависимостью

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= a + bT; \\ \frac{dT}{dt} &= c \sin 2(\lambda - \varphi^*),\end{aligned}\tag{6.4.11}$$

где  $c$  – константа, зависящая от параметров орбиты и возмущений, обусловленных потенциалом Земли;  $a = \omega_3$  – угловая скорость вращения Земли;  $b = \omega_3/T_3$ ;  $T_{3В}$  – звездные сутки;  $\varphi^* = \text{const}$ .

Для определения закона управления решим систему уравнений (6.4.11). Продифференцировав первое уравнение (6.4.11) во времени, получим

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = b \frac{dT}{dt}, \text{ откуда } \frac{dT}{dt} = \frac{1}{b} \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Подставив значения  $dT/dt$  во второе уравнение (6.4.11), получим

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = cb \sin 2(\lambda - \varphi^*).\tag{6.4.12}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения  $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$  в полных производных (где  $f(x) = cb \sin 2(\lambda - \varphi^*)$ ). С такой правой частью уравнение в явном виде не интегрируется, однако его можно привести к дифференциальному уравнению первой степени и получить качественную картину процесса управления.

Умножив обе части (6.4.12) на  $2 \frac{d\lambda}{dt}$ , получим

$$2d\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = 2cb \sin 2(\lambda - \varphi^*)d\lambda$$

$$\begin{aligned}\text{или } \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 &= \int_{\lambda}^{\lambda_M} 2cb \sin 2(\lambda - \varphi^*)d\lambda = 2cb \left[ \frac{1}{2} \cos 2(\lambda - \varphi^*) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cos 2(\lambda_M - \varphi^*) \right] = cb [\cos 2(\lambda - \varphi^*) - \cos 2(\lambda_M - \varphi^*)].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dt}{d\lambda} = A [\cos 2(\lambda - \varphi^*) - \cos 2(\lambda_M - \varphi^*)]^{-1/2}, \quad (6.4.13)$$

где  $\lambda_M$  – амплитуда колебаний относительно точки устойчивого равновесия,  $A = (cb)^{-1/2}$ .

Перейдем теперь к рассмотрению задачи управления, имея заданный диапазон долгот  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Долготы для упрощения анализа будем отсчитывать относительно ближайшей точки устойчивого равновесия  $\lambda^*$ . При выборе схемы коррекции можно подойти с разных позиций: минимизировать число коррекций, минимизировать энергетические затраты.

Рассмотрим первый случай:

а) пусть диапазон  $(\lambda_1, \lambda_2)$  не содержит точку устойчивого равновесия, т.е.  $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  и имеет место  $\lambda < \lambda_M < \pi/2$ . Тогда, как следует из (6.4.13), время движения КА увеличивается с уменьшением  $\lambda_M$ . Предельный случай соответствует  $\lambda_2 = \lambda_M$ . Пусть теперь  $\lambda_1 < \lambda_M < \lambda_2$ . Тогда время движения КА за границу допустимой области равно удвоенному времени движения от  $\lambda_1$  до  $\lambda_M$ .

Отсюда вытекает что, если диапазон долгот не содержит точку устойчивого равновесия, то КА следует устанавливать в точку  $\lambda_2$ . Время движения аппарата от  $\lambda_2$  до  $\lambda_1$  будет максимально возможным. Число коррекций за время  $\tau$  будет

$$n = E[n^*] + 1,$$

где  $E[n^*]$  – целая часть от  $n^*$ ;

$$n^* = \frac{\tau}{2A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\cos 2\lambda - \cos 2\lambda_2)^{-1/2} d\lambda}; \quad (6.4.14)$$

б) пусть  $(\lambda_1, \lambda_2)$  содержит точку устойчивого равновесия, т.е.

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$$

В этом случае достаточно одной коррекции, переводящей КА на траекторию с  $\lambda_M = \min|\lambda_i|$ ,  $i = 1, 2$ . В результате спутник будет совершать колебания внутри диапазона

$$(-\min|\lambda_i|), (\min|\lambda_i|), i = 1, 2.$$

Случай минимизации энергетических затрат отдельно рассматривать не будем. В работах [17, 29, 30] показано, что при интервалах долгот в несколько градусов энергетические затраты при любом законе управления практически одинаковы, а следовательно, подход с точки зрения ми-

нимизации энергозатрат при любом законе управления не оправдан, так как любая другая схема коррекции по сравнению с выше рассмотренной приведет к увеличению числа коррекций.

### 6.5. БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИХ КА

Целью баллистического сопровождения КА является определение действительных параметров движения аппаратов и выработка рекомендаций для поддержания орбитальных параметров в требуемом диапазоне, позволяющем решать целевые задачи. В общем случае задача баллистического сопровождения является объемной и сложной. Она включает в себя следующие основные вопросы:

- оценивание орбитальных параметров по траекторным измерениям;
- прогнозирование движения КА;
- принятие решения о поддержании (коррекции) орбитальных параметров;
- планирование экспериментов и работ для выполнения целевых задач.

Схема организации баллистического сопровождения длительно существующих КА приведена на рис. 6.10.

В настоящем разделе рассмотрим первый вопрос.

При баллистическом сопровождении КА на участках свободного полета регулярно с интервалом, определяемым потребностью точности решения целевых задач и задач управления КА, осуществляется уточнение орбитальных параметров. В общем виде задачу определения (оценки) орбитальных параметров представим схемой, приведенной на рис. 6.11. На схеме  $\bar{\mathcal{E}}(t)$  – вектор орбитальных параметров;  $\bar{h}_n(t)$  – вектор шумов (ошибок) измерений;  $\bar{E}(t)$  – вектор измерения;  $\bar{\mathcal{E}}(t)$  – оценки орбитальных параметров КА.

Задача определения орбитальных параметров может быть сформулирована в следующем виде.

Имеется  $\xi$ -мерная статистика (выборка) измерений  $\bar{E}(t_k)$  в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Измерения  $\bar{E}_k = \bar{E}(t_k)$  связаны с вектором  $\bar{\mathcal{E}}_k = \bar{\mathcal{E}}(t_k)$  функциональной зависимостью

$$\bar{E}_k = \varphi_c(\bar{\mathcal{E}}_k + \bar{h}_n(t_k)), \quad (6.5.1)$$

т.е. измеряются не сами параметры, а функции от них, на которые в процессе измерений накладываются случайные шумы с известным или неизвестным распределением.

Рассмотрим в общем виде возможные методы обработки выборки

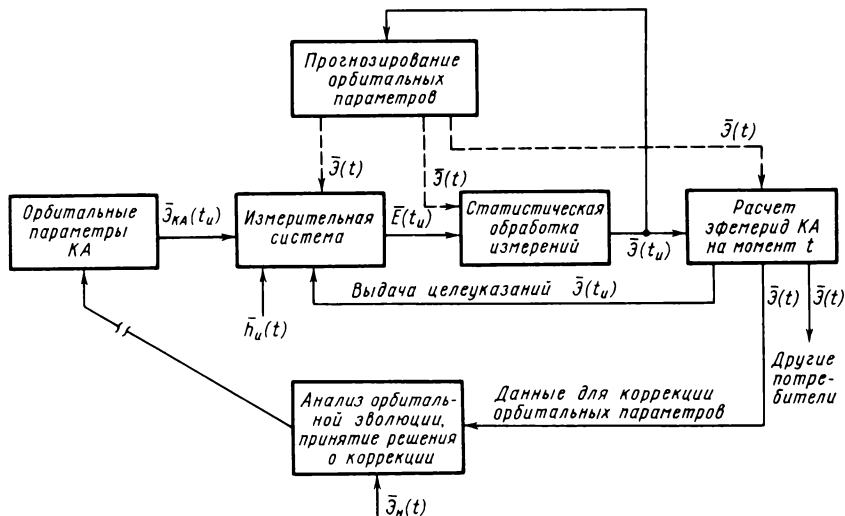


Рис. 6.10. Схема баллистического сопровождения

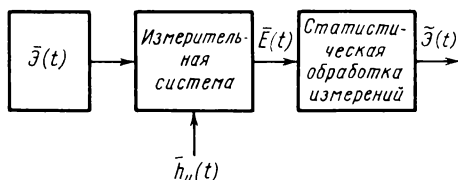


Рис. 6.11. Схема определения орбитальных параметров

измерений. Очевидно, что любая оценка орбитальных параметров, полученная по информации, носящей случайный характер, будет обладать ненулевой вероятностью получения вектора ошибок  $\delta\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_k - \tilde{\mathcal{E}}_k$ . Общим критерием для учета значений этих ошибок в математической статистике является критерий минимального риска, который для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$R = \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} p(\mathcal{E}) \left[ \int_{\Omega_E} l(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) p(E/\tilde{\mathcal{E}}) dE \right] d\tilde{\mathcal{E}}, \quad (6.5.2)$$

где  $p(\mathcal{E})$  – априорная плотность распределения вероятности вектора  $\mathcal{E}$ ;  $p(E/\tilde{\mathcal{E}})$  – функция правдоподобия;  $l(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$  – функция потерь;  $\Omega_{\mathcal{E}}$  – пространство состояний, определяемых всеми возможными векторами  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  в  $\xi$ -мерном пространстве;  $\Omega_E$  – пространство измерений.

Приведенный критерий является достаточно общим и применяется, когда имеется информация о функции правдоподобия, функции потерь и априорном распределении вектора оцениваемых параметров.

На практике применяют приближенные критерии, а непосредственно обработку проводят двумя путями.

Первый из них заключается в применении методов, основанных на накоплении данных, полученных в результате измерений на некоторой дуге траектории, и затем совместную обработку этих данных [4, 9, 27]. Примером такого подхода является метод максимального правдоподобия. Существо его заключается в определении функции правдоподобия или условной плотности вероятности  $p(E/\bar{\mathcal{E}})$ , связывающей вектор оцениваемых параметров с вектором измерений.

Будем считать, что имеются измерения  $E_1, E_2, \dots, E_k$ . Для полного вектора измерений размерности  $k \times 1$  при линейном соотношении между измеряемыми функциями и измеряемыми параметрами имеет место соотношение

$$\bar{E} = \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}}_k + \bar{h}_n, \quad (6.5.3)$$

где  $\bar{\mathcal{E}}_k$  – неизвестный вектор оцениваемых орбитальных параметров размерности  $m \times 1$ ;  $\bar{h}_n$  – вектор шума измерений размерности  $k \times 1$ ;  $\bar{H}_n$  – прямоугольная матрица размерности  $k \times m$ .

Требуется определить значение вектора  $\bar{\mathcal{E}}$ , для которого вектор  $\bar{E}$  может появиться с наибольшей вероятностью, если статистические характеристики шума известны. В случае нормального распределения ошибок измерений функция правдоподобия имеет вид

$$L_3 = (2\pi)^{-k/2} (\det \bar{R}_h)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{E} - \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}})^T \bar{R}_h^{-1} (\bar{E} - \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}}) \right\}, \quad (6.5.4)$$

где  $\bar{\mathcal{E}}$  – оценка вектора  $\bar{\mathcal{E}}$  на основе вектора измерений  $\bar{E}$ ;  $\bar{R}_h$  – ковариационная матрица вектора  $h_n$ .

Максимизация функции  $L_3$  эквивалентна минимизации показателя экспоненты, т.е. минимизируемый функционал равен

$$I = (\bar{E} - \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}})^T \bar{R}_h^{-1} (\bar{E} - \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}}). \quad (6.5.5)$$

Решение (6.5.5) относительно  $\bar{\mathcal{E}}$  должно удовлетворить условиям [27]

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{\mathcal{E}}} = 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \bar{\mathcal{E}}^2} < 0. \quad (6.5.6)$$

Соответствующая система нормальных уравнений имеет вид

$$\bar{H}_n^T \bar{R}_h^{-1} (\bar{E} - \bar{H}_n \bar{\mathcal{E}})^T = \left( \frac{\partial I}{\partial \bar{\mathcal{E}}} \right)^T. \quad (6.5.7)$$

Оценка орбитальных параметров может быть получена в виде

$$\tilde{\Xi} = (\bar{\mathbf{H}}_n^T \mathbf{R}_h^{-1} \bar{\mathbf{H}}_n)^{-1} \bar{\mathbf{H}}_n^T \mathbf{R}_h^{-1} \bar{\mathbf{E}} \quad (6.5.8)$$

и является несмещенной и состоятельной. Ковариационная матрица погрешности оценки  $\mathbf{K}$  определяется выражением

$$\mathbf{K} = (\bar{\mathbf{H}}_n^T \mathbf{R}_h^{-1} \bar{\mathbf{H}}_n)^{-1}. \quad (6.5.9)$$

Следует иметь в виду недостатки методов совместной обработки измерений, основными из которых являются:

повышенные требования к ЭВМ из-за необходимости запоминания большого количества измерений для создания некоторой избыточности информации;

задача оценки орбитальных параметров решается каждый раз заново с учетом старых измерений и вновь поступивших, что приводит к повышенным затратам вычислительного времени.

Другой подход получения орбитальных параметров основан на использовании методов последовательной обработки информации. Наиболее часто на практике применяют обработку, в основу которой положен метод оценки состояния линейной стохастической системы, предложенный Калманом.

Дискретный вариант фильтра Калмана получен следующим образом. Дана линейная стохастическая система

$$\bar{\Xi}_{k+1} = \Phi_{\Xi}(k+1, k) \bar{\Xi}_k + \mathbf{F}_{\Xi}(k+1, k) \bar{\Psi}_k, \quad (6.5.10)$$

где  $\Phi_{\Xi}(k+1, k)$ ;  $\mathbf{F}_{\Xi}(k+1, k)$  – матрицы связи состояния системы и ее шумов;  $\bar{\Psi}_k$  – вектор шумов системы.

Измерения связаны с вектором состояния линейным соотношением

$$\bar{E}_{k+1} = (\mathbf{H}_n)_{k+1, k} \bar{\Xi}_{k+1} + (\bar{h}_n)_{k+1}, \quad (6.5.11)$$

где  $\bar{\Xi}_{k+1}$  – нормальный случайный вектор размерности  $m \times 1$ ;  $\bar{E}_{k+1}$  – вектор измерений размерности  $k \times 1$ ;  $(\mathbf{H}_n)_{k+1, k}$  – матрица частных производных  $\frac{\partial E_{k+1}}{\partial \Xi_{k+1}}$  размерности  $k \times 1$ . В (6.5.10), (6.5.11) шум системы  $\bar{\Psi}_k$  – нормальный случайный вектор с характеристиками

$$M(\bar{\Psi}_k) = 0, \quad M(\bar{\Psi}_k \bar{\Psi}_k^T) = \mathbf{Q} \delta_{kj}; \quad (6.5.12)$$

$(\bar{h}_n)_{k+1}$  – нормальный случайный вектор (измерительный шум) с характеристиками

$$M(\bar{h}_{nk}) = 0, \quad M(\bar{h}_{nk} \bar{h}_{nj}^T) = \mathbf{R}_{nk} \delta_j. \quad (6.5.13)$$



В формулах (6.5.12), (6.5.13)  $\delta$  – символ Кронекера;  $\mathbf{Q}$  – ковариационная матрица вектора шумов системы  $\bar{\mathbf{w}}_k$ ;  $\mathbf{R}_{ik}$  – ковариационная матрица вектора шумов измерений  $\mathbf{h}_{ik}$ .

Шум системы не коррелирован с измерительным шумом

$$M(\bar{\mathbf{w}}_k \mathbf{h}_i^T) = 0. \quad (6.5.14)$$

При таких допущениях Калманом были получены уравнения для последовательной оценки вектора состояния  $\tilde{\mathbf{X}}_{k+1/k+1}$  и ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_{k+1/k+1}$  с учетом измерений в  $t_{k+1}$  момент времени

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = & \Phi_3(k+1, k) \tilde{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{W}_{k+1} [\bar{\mathbf{E}}_{k+1} - \\ & - (\mathbf{H}_i)_{k+1} \Phi_3(k+1, k) \tilde{\mathbf{X}}_{k/k}]; \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

$$\mathbf{K}_{k+1/k+1} = \mathbf{K}_{k+1/k} - \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_i(k+1) \mathbf{K}_{k+1/k}; \quad (6.5.16)$$

$$\mathbf{K}_{k+1/k} = \Phi_3(k+1, k) \mathbf{K}_{k/k} \Phi_3^T(k+1, k) + \mathbf{F}_3(k+1, k); \quad (6.5.17)$$

где  $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1/k} \mathbf{H}_i^T(k+1) [\mathbf{H}_i(k+1) \times$

$$\times \mathbf{K}_{k+1/k} \mathbf{H}_i^T(k+1) + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}.$$

В уравнениях (6.5.15), (6.5.16), (6.5.17)  $\tilde{\mathbf{X}}_{k+1/k+1}$  – оценки состояния, полученные на основе априорной информации по оценке  $\tilde{\mathbf{X}}_{k/k}$  для момента времени  $t_k$  и  $k+1$ -го измерения;  $\mathbf{K}_{k+1/k}$  – экстраполированное значение ковариационной матрицы (от момента времени  $t_k$  до момента времени  $t_{k+1}$ ). Уравнения (6.5.15), (6.5.16), (6.5.17) позволяют последовательно определить по измерениям  $E_1, E_2$ , оптимальные в некотором смысле оценки  $\tilde{\mathbf{X}}_{1/1}, \tilde{\mathbf{X}}_{2/2}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_{N/N}$ , если заданы априорные сведения  $\tilde{\mathbf{X}}_{0/0}$  и  $\mathbf{K}_{0/0}$ . Оценка, полученная из соотношения (6.5.15), является условным математическим ожиданием вектора состояния и, следовательно, минимизирует обширный класс функции потерь [27]. При  $\mathbf{K}_{k/k} = 0$  оценка эквивалентна оценке по критерию максимального правдоподобия.

При баллистическом сопровождении КА существенное значение имеют вопросы прогнозирования орбитальных параметров. При этом (в отличие от задач непосредственно баллистического проектирования) зачастую используют методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения (см. гл. 4) в оскулирующих элементах типа (ПЗ.1), требующих, как правило, больших вычислительных затрат на ЭВМ. Это объясняется тем, что изменения орбитальных параметров на одном витке включают компоненты, имеющие колебательный характер, а следовательно, нельзя применять большой шаг интегрирования. Для

исключения такого явления целесообразно переходить от системы уравнений в оскулирующих элементах по аргументу широты  $u$  к системе уравнений, получающейся в результате интегрирования системы за период, равный  $2\pi$ . В этом случае левые части уравнений представляют собой значения отклонений оскулирующих элементов орбиты за один оборот. В силу малости отклонений их можно приближенно принять равными производным от оскулирующих элементов по числу оборотов  $n$ . Таким путем вместо исходной системы уравнений по аргументу широты  $u$  интегрируется система дифференциальных уравнений по  $n$ . Решение преобразованной системы уравнений сводится к двухцикловому алгоритму: внешнему интегрированию по аргументу  $n$  и внутреннему интегрированию по аргументу широты  $u$  за период (за виток). При этом последнюю операцию необходимо производить каждый раз при вычислении правых частей внешней системы уравнений.

Такой подход к решению уравнений движения при баллистическом сопровождении существенно сокращает вычислительные затраты при незначительной потере точности вычислений. Пути сокращения методических ошибок при двухцикловом методе и конкретные формульные зависимости приводятся в работе Б.Ф. Жданюк [9].

## 6.6. ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В зависимости от программы исследований и технических возможностей ее реализации условия проведения экспериментов могут быть разделены на два класса. К первому классу можно отнести определяющие условия, ко второму – второстепенные.

Выполнение условий первого класса является обязательным, так как их нарушение исключает возможность проведения эксперимента. Нарушение же условий второго класса может несколько ухудшить проведение эксперимента, не скрывая их в целом.

Примем обозначения:  $t_{ст}$  – искомый момент старта КА;  $[t'_a, t'_b]$  – интервал времени возможного старта ("окно" старта), содержащий искомый  $t_{ст}$ ;  $[t_c, t_d]$  – заданный (желаемый) интервал времени проведения экспериментов;  $\bar{P} = (P_1, \dots, P_\nu; \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\nu)$  – вектор параметров, задающих разбиение множества проведения экспериментов на два класса:

$$P_\nu = \begin{cases} 1 & \text{если условия относятся к первому классу,} \\ 0 & \text{если условия относятся ко второму классу;} \end{cases}$$

$F_\Pi(t)$  – суммарные временные потери из-за невыполнения условий первого класса;  $\bar{F}_\Pi(t)$  – суммарные временные потери из-за невыполнения

условий второго класса;  $\bar{I}^\nu = \{I_l^\nu\}$  – упорядоченное множество интервалов, на которых не выполняются  $\nu'$  условия

$$|I_l^\nu| = (t_\eta^\nu - t_\xi^\nu)_l, \quad (6.6.1)$$

где  $t_\xi^\nu, t_\eta^\nu$  – начало и конец интервалов;  $l$  – номер интервала.

Суммарные временные потери на рассматриваемом временном интервале  $[t_c, t_d]$  из-за невыполнения условий первого и второго классов равны:

$$F_\Pi(t) = \sum_l |I_l^\nu|; \quad (6.6.2)$$

$$\bar{F}_\Pi(t) = \sum_l |\bar{I}_l^\nu|. \quad (6.6.3)$$

В качестве примера рассмотрим частную задачу планирования экспериментов, когда требуется выполнение условий

$$F_\Pi(t) \rightarrow \min t \in [t'_a, t'_b].$$

В этом случае имеет место одномерная экстремальная задача, особенность которой состоит в том, что функция  $F_\Pi(t)$  может быть определена алгоритмически. Предположим, что на больших интервалах времени функция  $F_\Pi(t)$  является полиэкстремальной, а на малых интервалах – унимодальной. Тогда интервал  $[t'_a, t'_b]$  можно разбить на совокупность подынтервалов  $\{t_{ap}, t_{bp}\}$ , продолжительность которых  $< n_n$  часов.

В этом случае имеем

$$\min F_\Pi(t) = \min \min_{t \in [t'_a, t'_b], 1 \leq p \leq \bar{p}} F_\Pi(t), \quad (6.6.4)$$

т.е. исходная задача сводится к определению на каждом подынтервале  $\{t_{ap}, t_{bp}\}$  такой точки  $t_p$ , для которой справедливо соотношение

$$F_\Pi(t_p) = \min_{t \in [t'_a, t'_b], 1 \leq p \leq \bar{p}} F_\Pi(t).$$

Для решения задачи можно применить фиббоначив план поиска экстремальной точки.

Планирование экспериментов может существенно повысить эффективность использования космических средств. Вместе с тем очевидно, что решение задачи планирования требует значительных вычислительных затрат, связанных как с оценкой функции  $F_\Pi(t)$ , так и с процессом поиска экстремальной точки. Даже краткий перечень указанных выше условий проведения эксперимента показывает необходимость трудоемких расчетов, связанных с определением элементов орбит, их прогнозиро-

ванием на исследуемом временном интервале, расчетом положения светил, условий освещенности КА, взаимной видимости КА и пункта управления и других не менее важных факторов [4, 5].

### 6.7. КОРРЕКЦИЯ ОРБИТ ДЛИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИХ КА

Наличие значительной эволюции орбит у большинства КА в рассмотренных примерах космических систем и требование поддержания орбитальных параметров в пригодном для выполнения целевых задач диапазоне приводят в процессе баллистического проектирования к необходимости выбора схемы коррекции и определения требуемого запаса рабочего тела на борту КА. Обобщенная схема процесса выбора схемы коррекции орбиты КА приведена на рис. 6.12. Далее рассмотрим непосредственно процесс определения закона коррекции. Остальные операции, схемно приведенные на рис. 6.12, являются либо следствием изложенных ранее материалов (оценка эволюции, интегрирование уравнений движе-

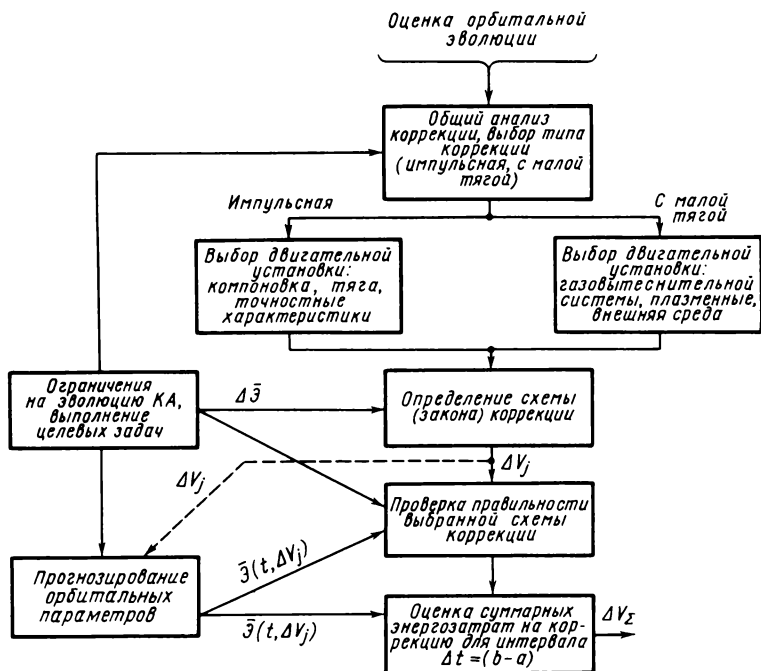


Рис. 6.12. Схема коррекции орбит КА

ния с учетом управляющих воздействий), либо, главным образом, формируют ограничения в зависимости от исходных предпосылок (допустимый диапазон эволюции элементов орбит, наличие корректирующей двигательной установки определенного типа, ее характеристики и т.д.).

Рассмотрим два случая: импульсную коррекцию и коррекцию с двигателями малой тяги.

В первом случае для коррекции орбит используют малые "мгновенно" реализуемые импульсы ( $\Delta V_k \ll V_{КА}$ ). Во втором – двигатели малой тяги, когда требуется, как правило, компенсировать малые постоянно действующие возмущения.

**Импульсные коррекции.** Для коррекции орбиты могут применяться управляющие импульсы в плоскости орбиты: тангенциальные  $\Delta V_\tau$  (направленные по касательной к траектории полета) и нормальные  $\Delta V_n$  (по нормали к вектору скорости), а также импульсы бинормальные  $\Delta V_b$ , позволяющие скорректировать ориентацию плоскости орбиты.

Рассмотрим зависимости между величиной корректирующих импульсов и изменением элементов орбит при условии, что

$$\Delta V_\tau \ll V_{КА}; \Delta V_n \ll V_{КА}; \Delta V_b \ll V_{КА}.$$

**Влияние тангенциального импульса.** Тангенциальный импульс действует в плоскости орбиты (рис. 6.13). В этом случае не происходит изменения ориентации плоскости орбиты, т.е.  $\Delta i = \Delta \Omega = 0$ .

Для определения зависимости  $\Delta a = \Delta a(\Delta V_\tau)$  воспользуемся известным соотношением

$$V = \left[ \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.7.1)$$

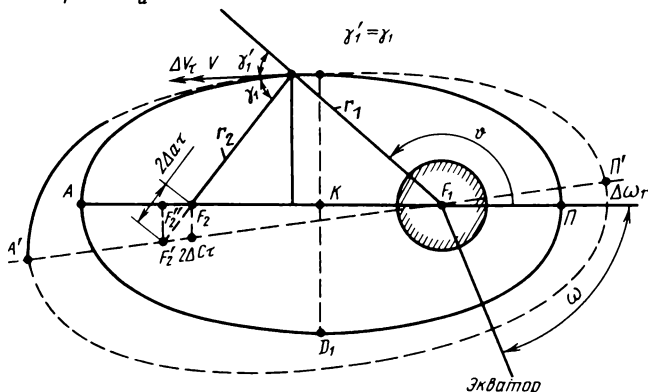


Рис. 6.13. Коррекция тангенциальным импульсом

Связь между вариациями  $\Delta a_\tau$  и  $\Delta V_\tau$  имеет вид

$$\Delta a_\tau = \frac{2a^2 V}{\mu} \Delta V_\tau. \quad (6.7.2)$$

Для определения изменения эксцентриситета  $\Delta e(\Delta V_\tau)$  используем зависимость

$$e = \frac{2c_f}{2a} = \frac{c_f}{a}, \quad (6.7.3)$$

где  $2c_f$  – межфокусное расстояние.

Найдя полный дифференциал для  $de$  и проведя несложные преобразования, получим выражение

$$\Delta e_\tau = e \left( \frac{\Delta c_\tau}{c_f} - \frac{\Delta a_\tau}{a} \right), \quad (6.7.4)$$

где  $\Delta a_\tau$  определяется в соответствии с (6.7.2).

Для определения  $\Delta c_\tau$  воспользуемся рис. 6.13 и свойством эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad (6.7.5)$$

а также условием  $\gamma_1 = \gamma'_1$  (см. рис. 6.13).

Для принятых выше допущений ( $\Delta V_\tau \ll V_{КА}$ ) считаем  $r_1 = \text{const}$ , следовательно, изменяется  $r_2$  – расстояние до второго фокуса. Радиус  $r_2$  переместится из точки  $F_2$  в точку  $F'_2$  на величину

$$\Delta r_2 = 2\Delta a_\tau. \quad (6.7.6)$$

Перемещение фокуса  $F_2$  в точку  $F'_2$  происходит вдоль радиуса  $r_2$ . Из рис. 6.13 имеем

$$2\Delta c_\tau = F_2 F'_2; \quad (6.7.7)$$

$$\text{tg} \Delta \omega_\tau = \frac{F'_2 F''_2}{F_1 F''_2}. \quad (6.7.8)$$

Из подобия треугольников  $F_2 F'_2 F''_2$  и  $F_2 M K$  получаем

$$\frac{F_2 F''_2}{F_2 K} = \frac{F_2 F'_2}{F_2 M} = \frac{F'_2 F''_2}{MK}, \quad (6.7.9)$$

в свою очередь

$$MK = r_1 \sin(\pi - \vartheta) = r_1 \sin \vartheta;$$

$$F_2 M = r_2 = 2a - r_1; \quad F_2 F'_2 = \Delta r_2 = 2\Delta a_\tau;$$

$$F_2 K = 2c_f - r_1 \cos(\pi - \vartheta) = 2c_f = r_1 \cos \vartheta,$$

следовательно,

$$F_2 F_2' = \frac{(F_2 K)(F_2 F_2')}{F_2 M} = \frac{(2c_f + r_1 \cos \vartheta) 2 \Delta a_\tau}{r_2},$$

но  $r_2 = 2a - r_1$ , тогда

$$F_2 F_2' = (2c_f + r_1 \cos \vartheta) \frac{2 \Delta a_\tau}{2a - r_1}. \quad (6.7.10)$$

Учитывая, что  $F_2 F_2' = 2 \Delta c_\tau$ , можно получить

$$\Delta c_\tau (2c_f + r_1 \cos \vartheta) \frac{\Delta a_\tau}{2a - r_1}. \quad (6.7.11)$$

Подстановкой (6.7.11) в (6.7.2) получим изменение  $\Delta e_\tau$ , выраженное через  $\Delta a_\tau$ :

$$\Delta e_\tau = e \left[ \frac{2e + \frac{r_1}{a} \cos \vartheta}{e(2 - \frac{r_1}{a})} - 1 \right] \frac{\Delta a_\tau}{a}. \quad (6.7.12)$$

Принимая во внимание, что

$$F_2' F_2'' = \frac{2 \Delta a_\tau}{2a - r_1} \sin \vartheta; \quad (6.7.13)$$

$$F_1' F_2'' = 2c_f + (2c_f + r_1 \cos \vartheta) \frac{2 \Delta a_\tau}{2a - r_1}, \quad (6.7.14)$$

из (6.7.8), (6.7.13), (6.7.14) находим изменение аргумента перигея

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_\tau = \frac{\frac{r_1}{a} \sin \vartheta}{(2 - \frac{r_1}{a}) [e + (2e + \frac{r_1}{a} \cos \vartheta) \frac{\Delta a_\tau}{2a - r_1}]} \times \frac{\Delta a_\tau}{a}. \quad (6.7.15)$$

Подставив значения  $\Delta a_\tau$  в (6.7.4), (6.7.5), можно получить изменение эксцентриситета и аргумента перигея в зависимости от корректирующего тангенциального импульса, приложенного в точке орбиты с истинной аномалией  $\vartheta$ :

$$\Delta e_\tau = e \left[ \frac{2e + \frac{r_1}{a} \cos \vartheta}{e(2 - \frac{r_1}{a})} - 1 \right] \frac{2a^2 V}{\mu} \Delta V_\tau; \quad (6.7.16)$$

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_{\tau} = \frac{\frac{r_1}{a} \sin \vartheta \frac{2aV}{\mu} \Delta V_{\tau}}{\frac{r_1 V^2}{\mu} \left[ e + \left( 2e + \frac{r_1}{a} \cos \vartheta \right) \frac{2a^2 V \Delta V_{\tau}}{\mu a r_1 V^2} \right]} \quad (6.7.17)$$

Преобразовав выражения (6.7.16), (6.7.17), получим соотношения, показывающие зависимость изменения эксцентриситета и аргумента перигея от тангенциального импульса:

$$\Delta e_{\tau} = \frac{2(e + \cos \vartheta)}{V} \Delta V_{\tau}, \quad (6.7.18)$$

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_{\tau} = \frac{\sin \vartheta \frac{\Delta V_{\tau}}{V}}{e + \left( \frac{2e}{1 - e^2} (1 + e \cos \vartheta) + \cos \vartheta \right) \frac{2 \Delta V_{\tau}}{V^2}} \quad (6.7.19)$$

Влияние нормального импульса. Схема изменения элементов орбиты под влиянием нормального импульса приведена на рис. 6.14. При выполнении условия  $\Delta V_n \ll V_{КА}$  вектор скорости поворачивается на угол  $-\Delta \theta$ , а величина скорости практически не меняется. Нормальный импульс, как и ориентация плоскости орбиты, действует в плоскости орбиты. Следовательно, ориентация плоскости орбиты в пространстве не изменится, т.е.  $\Delta i = \Delta \Omega = 0$ .

Ввиду того, что значение скорости при этом практически не изменится, большая полуось останется неизменной  $\Delta a_n = 0$ . Для оценки изме-

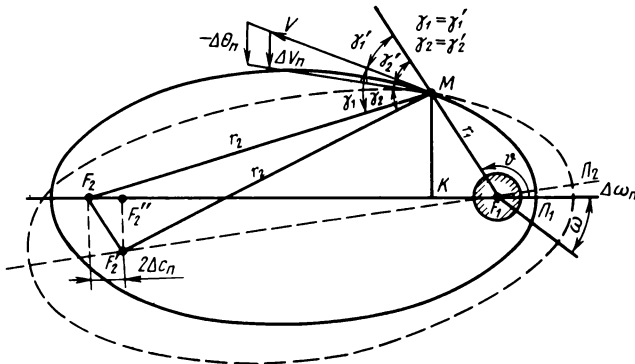


Рис. 6.14. Коррекция нормальным импульсом



нения эксцентриситета и аргумента перигея также воспользуемся свойством эллипса как геометрической фигуры, а именно: касательная к эллипсу является биссектрисой внешнего угла между радиусами-векторами точки касания, проведенными из двух его фокусов (т.е.  $\gamma_1 = \gamma'_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma'_2$ ).

Из-за поворота вектора скорости на угол  $-\theta_n$  КА перейдет на новую орбиту, для которой отмеченное свойство эллипса сохранится (см. рис. 6.14), т.е.  $\gamma_2 = \gamma'_2$ . Следовательно, второй фокус  $F_2$  переместится в точку  $F'_2$  (повернется на угол  $-2\Delta\theta_n$ ) по дуге  $F_2F'_2$ . Ввиду малости дуги  $F_2F'_2$  заменим ее касательной, проведенной в точке  $F_2$ . Из подобия треугольников  $F_2F'_2F''_2$  и  $F_2MK$  справедливо равенство

$$\frac{F_2F''_2}{MK} = \frac{F_2F'_2}{F_2M} = \frac{F'_2F''_2}{F_2K}. \quad (6.7.20)$$

Из рис. 6.14 следует, что

$$MK = r_1 \sin(\pi - \vartheta) = r_1 \sin \vartheta;$$

$$MF_2 = r_2;$$

$$KF_2 = 2c_f - r_1 \cos(\pi - \vartheta) = 2c_f + r_1 \cos \vartheta;$$

$$F_2F'_2 = -r_2 2\Delta\theta_n.$$

Следовательно,

$$F_2F''_2 = \frac{MK \cdot F_2F'_2}{F_2M} = -2r_1 \sin \vartheta \Delta\theta_n.$$

Учитывая, что  $F_2F''_2 = -2\Delta c_n$ , сможем записать

$$\Delta c_n = r_1 \sin \vartheta \Delta\theta_n. \quad (6.7.21)$$

Из рис. 6.14 следует также, что

$$F'_2F''_2 = \frac{F_2F'_2 \cdot F_2M}{MK} = \frac{-2\Delta c_n (2c_f + r_1 \cos \vartheta)}{r_1 \sin \vartheta},$$

учитывая (6.7.21), а также значение  $c_f = ea$ , получим

$$F'_2F''_2 = -2(2ea + r_1 \cos \vartheta) \Delta\theta_n. \quad (6.7.22)$$

Изменение аргумента перигея  $\Delta\omega_n$  находим из выражения

$$\operatorname{tg} \Delta\omega_n = \frac{F'_2F''_2}{F_1F''_2} = - \frac{(2e + \frac{r_1}{a} \cos \vartheta) \Delta\theta_n}{e + \frac{r_1}{a} \sin \vartheta \Delta\theta_n}. \quad (6.7.23)$$

Учитывая, что  $-\Delta\theta = \frac{\Delta V_n}{V}$ , найдем зависимость изменения элементов  $e$  и  $\omega$  от импульса  $\Delta V_n$ . С учетом выражения для полного дифференциала  $de$  запишем

$$\Delta e_n = \frac{r_1}{a} \sin\vartheta \Delta\theta_n, \quad (6.7.24)$$

$$\text{или } \Delta e_n = -\frac{r_1}{a} \sin\vartheta \frac{\Delta V_n}{V}. \quad (6.7.25)$$

Выражение (6.7.23) можно записать в виде

$$\text{tg}\Delta\omega_n = -\frac{(2e + \frac{r_1}{a} \cos\vartheta)(-\frac{\Delta V_n}{V})}{(e + \frac{r_1}{a} \sin\vartheta)(-\frac{\Delta V_n}{V})}; \quad (6.7.26)$$

или после несложных преобразований

$$\text{tg}\Delta\omega_n = \frac{(2ea + r_1 \cos\vartheta)}{(eaV - r_1 \sin\vartheta \Delta V_n)} \Delta V_n. \quad (6.7.27)$$

Влияние бинормального импульса. Рассмотрим рис. 6.15, из которого следует, что под влиянием бинормального импульса  $\Delta V_b$  вектор скорости повернется относительно оси, проходящей через точку приложения боковой силы и центр притяжения, на угол  $\Delta\gamma$ , равный

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta V_b}{V \cos\vartheta}. \quad (6.7.28)$$

Под влиянием бинормального импульса изменяются ориентация плоскости орбиты и угловое расстояние точки приложения импульса от восходящего узла, а следовательно, аргумент перигея. Для определения изменений орбиты рассмотрим рис. 6.16. На рисунке  $\Omega$  и  $\Omega_1$  — положения узлов невозмущенной и возмущенной орбит, а линия  $F_1M$  — ось вращения плоскости орбиты. Из сферического треугольника  $\Omega M \Omega_1$  следуют соотношения

$$\cos(i + \Delta i) = \cos i \cos \gamma - \sin i \sin \Delta\gamma \cos u; \quad (6.7.29)$$

$$\sin \Delta\Omega = \frac{\sin u}{\sin(i + \Delta i)} \sin \Delta\gamma; \quad (6.7.30)$$

$$\cos(u + \Delta u) = \cos u \cos \Delta\Omega + \sin u \sin \Delta\Omega \cos i. \quad (6.7.31)$$

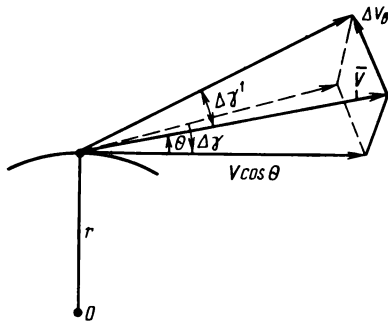


Рис. 6.15. Коррекция боковым импульсом

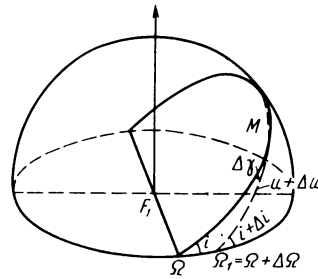


Рис. 6.16. Схема изменения элементов орбит

Линеаризуя эти зависимости (учитывая, что  $\Delta i \cong \Delta \gamma \rightarrow 0$ ,  $\Delta \Omega \rightarrow 0$ ,  $\Delta u \rightarrow 0$ ), сможем записать:

$$\begin{aligned} \cos(i + \Delta i) &= \cos i \cos \Delta i - \sin i \sin \Delta i; \\ \sin(i + \Delta i) &= \sin i \cos \Delta i + \cos i \sin \Delta i; \\ \cos(u + \Delta u) &= \cos u \cos \Delta u - \sin u \sin \Delta u. \end{aligned} \quad (6.7.32)$$

С учетом принятых допущений изменения элементов орбиты под влиянием бинормального импульса определяются из выражений

$$\Delta i_b = \cos u \Delta \gamma = \frac{\cos u}{V \cos \theta} \Delta V_b; \quad (6.7.33)$$

$$\Delta \Omega_b = \frac{\sin u}{\sin i} \Delta \gamma = \frac{1}{V \cos \theta} \frac{\sin u}{\sin i} \Delta V_b; \quad (6.7.34)$$

$$\Delta \omega_b = \Delta u = -\cos i \Delta \Omega = -\frac{1}{V \cos \theta} \frac{\sin u}{\operatorname{tg} i} \Delta V_b. \quad (6.7.35)$$

Используя полученные соотношения, можно рассчитать корректирующие импульсы для требуемого изменения (поддержания) орбит.

При коррекции орбит важно уметь определять точки, в которых корректирующий импульс обеспечит наибольшее изменение корректируемого параметра орбиты, т.е. кроме ориентации вектора тяги следует правильно определить точку приложения импульса.

Рассмотрим вначале выбор точки приложения трансверсального импульса. Из уравнения (6.7.2) видно, что переменной величиной является скорость полета. Максимальное ее значение в точке перигея, минимальное в апогее. Значит, один и тот же по величине и направлению

импульс  $\Delta V_\tau$  в перигее вызовет максимальное изменение большой полуоси, а в апогее – минимальное. Из уравнения (6.7.18) следует, что тангенциальная составляющая не изменит эксцентриситета орбиты при  $\cos\vartheta = -e$ , а это имеет место в точках пересечения орбиты с малой полуосью. Наибольшее изменение эксцентриситета орбиты под воздействием тангенциального импульса произойдет в перигее и апогее орбиты, так как в этих точках имеет место условие

$$(\Delta e_\tau)_{\max} = \frac{2(1+e)}{V_p} \Delta V_\tau = - \frac{2(1-e)}{V_a} \Delta V_\tau, \quad (6.7.36)$$

где  $V_a, V_p$  – скорости движения КА в перигее и апогее орбиты.

Следовательно, под воздействием одинаковой тангенциальной коррекции в перигее и апогее орбиты изменения эксцентриситета будут равны по величине, если в процессе коррекции эксцентриситета увеличивается или уменьшается. Это обусловлено тем, что для эллиптических орбит справедливо равенство

$$\frac{V_p}{1+e} = \frac{V_a}{1-e}. \quad (6.7.37)$$

Однако следует иметь в виду, что для увеличения эксцентриситета тангенциальный импульс должен быть положительным в перигее, а в апогее – отрицательным.

В перигее и апогее орбит  $\sin\vartheta = 0$ . Следовательно, из уравнения (6.7.19) можно получить  $\Delta\omega_\tau = 0$ . Максимальный поворот линии апсид под влиянием тангенциального импульса происходит в точках пересечения орбит с малой полуосью, где

$$\cos\vartheta = -e; \quad \sin\vartheta = \sqrt{1-e^2}.$$

Рассмотрим теперь влияние нормального импульса. Наибольшее изменение эксцентриситета под влиянием нормального импульса произойдет в точках пересечения орбиты в перпендикуляром к большой полуоси, восстановленным из второго фокуса. В этих точках, как это следует из уравнения (6.7.25), истинная аномалия определяется выражением

$$\cos\vartheta = - \frac{2e}{1+e^2}, \quad (6.7.38)$$

и величина

$$(\Delta e_n)_{\max} = \frac{1+e}{V_p} \sqrt{1+e^2} \Delta V_n. \quad (6.7.39)$$

В то же время аргумент перигея под воздействием нормального импульса изменяться не будет. Максимальное изменение аргумента перигея под воздействием нормального импульса произойдет в перигее и апогее орбиты. В этом случае имеет место соотношение

$$(\Delta\omega_n)_{\max} = \frac{1+e}{e} \sqrt{\frac{a(1-e)}{\mu(1+e)}} \Delta V_n. \quad (6.7.40)$$

Эксцентриситет орбиты при этом не изменится. Этот вывод справедлив лишь для малых значений управляющих импульсов. В общем же случае нормальный импульс, вызывая изменение аргумента перигея, изменяет величину истинной аномалии и соответствующее изменение эксцентриситета. Влияние точки приложения бокового импульса на изменение орбитальных параметров можно проследить из уравнений (6.7.33) ... (6.7.35). Из них следует, что изменения долготы восходящего узла, наклона и аргумента перигея зависят от аргумента широты  $u$  в точке коррекции. На рис. 6.17 приведены относительные изменения элементов  $\Omega$  и  $\omega$  в функции истинной аномалии [21]. При построении графиков принято предположение о том, что величина трансверсальной скорости в различных точках орбиты изменяется мало (это справедливо для орбит с малым эксцентриситетом). Из приведенных данных следует, что изменение наклона орбит боковым импульсом целесообразно осуществлять в одном из узлов орбиты, а изменение долготы восходящего узла орбиты – в точках с аргументом широты, равным  $90^\circ$  или  $270^\circ$ . Следует иметь в виду, что при значениях  $i \neq 90^\circ$  реализация бокового импульса в точках с  $u_0 = 90^\circ$  и  $u_0 = 270^\circ$  приведет к изменению аргумента перигея. Поскольку  $u = \omega + \vartheta$ , то изменение аргумента перигея приведет к изменению аргумента широты  $\Delta u$ , который после коррекции уже не будет равен  $90^\circ$  или  $270^\circ$ . Вследствие этого произойдет не только изменение долготы восходящего узла, но и наклона орбиты. На рис. 6.18 показаны точки, соответствующие экстремальным изменениям элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  под воздействием нормального импульса  $\Delta V_n$ .

Проведенный анализ показал, что эксцентриситет орбиты и аргумент перигея изменяются как под воздействием тангенциального импульса, так и под воздействием нормального импульса. Поэтому представляет определенный интерес сравнение эффективности влияния этих импульсов, равных по величине. Составим соотношение

$$\frac{(\Delta e_\tau)_{\max}}{(\Delta e_n)_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{1+e^2}}. \quad (6.7.41)$$

Из которого следует, что под воздействием тангенциального импульса эксцентриситет орбиты изменится в  $2/\sqrt{1+e^2}$  раз больше, чем под влия-

Рис. 6.17. Изменение  $\Omega$ ,  $\omega$

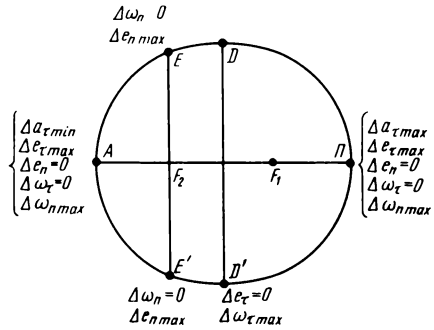
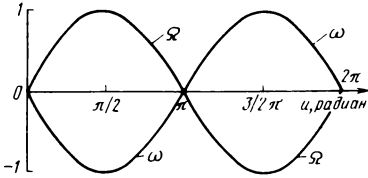


Рис. 6.18. Экстремальные изменения  $a, e, \omega$

нием нормального импульса такой же величины. Кроме того, тангенциальный импульс, реализованный в перигее или апогее орбиты, не изменяет ориентацию линии апсид. Равенство же  $\Delta\omega_n = 0$  под воздействием нормального импульса, приложенного в точке  $E$  (см. рис. 6.18) имеет место лишь при малых значениях импульса скорости.

Сравнение уравнений (6.7.37) и (6.7.39) приводит к соотношению

$$\frac{(\Delta\omega_\tau)_{\max}}{(\Delta\omega_n)_{\max}} = 2.$$

Следовательно, изменение ориентации линии апсид целесообразно осуществлять при помощи тангенциальных импульсов. При этом рекомендуется иметь в виду особенность, состоящую в том, что изменение ориентации линии апсид, а следовательно, и аргумента перигея, может иметь место при коррекции орбит с большим эксцентриситетом. Это можно объяснить тем, что приложение тангенциального импульса в одной из точек пересечения орбиты с малой полуосью изменит величину большой полуоси, а следовательно, и период обращения. Поэтому в тех случаях, когда изменение большой полуоси недопустимо, коррекцию аргумента перигея следует проводить при помощи двух импульсов, прикладываемых в точках  $D, D'$  (см. рис. 6.18). В этом случае величины импульсов должны быть примерно одинаковыми, а их направления противоположными. Конкретная схема может быть следующей. Под воздействием разгонного импульса  $\Delta V_{\tau 2}$ , приложенного в точке  $D'$ , аргумент перигея изменится на величину  $\Delta\omega_{\tau 2}$ , а большая полуось одновременно увеличится на  $\Delta a_{\tau 2}$ . Под воздействием импульса  $\Delta V_{\tau 2}$ , прикладываемого в точке  $D'$  и противоположно направленного импульсу  $\Delta V_{\tau 1}$ , аргумент перигея изменится так же, как и при первом импульсе на величину  $\Delta\omega_{\tau 2} = \Delta\omega_{\tau 1}$ , а большая полуось уменьшится на величину  $\Delta a_{\tau 2}$ . Оче-

видно, что для поддержания постоянным значения большой полуоси необходимо добиваться выполнения условия  $\Delta a_{\tau_2} = -\Delta a_{\tau_1}$ .

Управление с двигателями малой тяги. Такое управление целесообразно использовать в следующих случаях:

при малых регулярно осуществляемых изменениях параметров орбит на длительных временных интервалах (не менее года):

при постоянной компенсации влияния тормозящего воздействия внешних слоев атмосферы и т.п.

Синтез программ управления при действии малых ускорений является сложной задачей. Рассмотрим в общем виде процедуру решения такой задачи.

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  известно начальное фазовое состояние КА в пространстве  $\bar{r}_0 \bar{V}_0$ . Дифференциальные уравнения движения запишем в виде

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_R, t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.7.42)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – фазовые координаты объекта;  $U_1, \dots, U_R$  – управляющие воздействия.

Область управления в пространстве  $U$  определяется конструктивными особенностями управляющих органов. Например, если  $U_1, U_2$  характеризуют векторную величину на плоскости, модуль которой не больше величины  $a_n$ , то для указанных управлений выполняется условие

$$U_1^2 + U_2^2 - a_n^2 \leq 0, \quad (6.7.43)$$

и область управления представляет собой круг.

Для технически важных задач практическое значение имеет случай замкнутого множества  $V$ , когда управляющий вектор  $\bar{U}_R$  может находиться не только внутри множества  $V$ , но и на его границе. Физически это означает, что для управления возможны крайние положения. Каждой совокупности управлений  $(U_1, \dots, U_R)$  соответствует некоторый вектор в пространстве  $R$ . Предполагается также, что управление  $\bar{U}(t)$  кусочно-непрерывное, т.е. каждое из  $\bar{U}_R(t)$  может иметь конечное число разрывов первого рода на конечном временном интервале.

Задачу управления можно формулировать различным образом. Например, в процессе управления орбитой требуется осуществить переход КА из начального состояния  $\bar{x}^0$  в конечное  $\bar{x}^K$  за минимальное время – задача на быстродействие. Время перехода КА из состояния  $\bar{x}^0$  в состояние  $\bar{x}^K$  определяется функционалом

$$\Phi = \int_{t_0}^t f_0 \{ \bar{x}_j(t), \bar{U}_R(t) \} dt, \quad (6.7.44)$$

где  $f_0 \{ x_j(t), \bar{u}_R(t) \} = 1$ .

Наряду с отмеченной в задачах управления движением КА большое распространение получило управление, минимизирующее расход рабочего тела. В работах [4, 6, 27] показано, что в этом случае оптимальным будет управление, обеспечивающее минимум функционала,

$$\Phi = \int_t^{t_K} U^2 dt. \quad (6.7.45)$$

Здесь не будем подробно останавливаться на решении оптимизационных задач с двигателями малой тяги. Они достаточно детально изложены в монографиях [4, 27]. Вместе с тем далее рассмотрим качественно возможные изменения элементов орбит под влиянием постоянно действующих малых ускорений, представляющих наибольший интерес при баллистическом проектировании.

Управляемое движение КА в рассматриваемом случае удобно анализировать в цилиндрической системе координат  $O'STW$ . Обозначим проекции управляющего ускорения на радиус-вектор  $U_s$ , по нормали к нему в плоскости орбиты  $U_t$ , и на ось, нормальную к плоскости орбиты соответственно  $U_w$ . Тогда, пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнения движения КА в принятой системе можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_s - g &= \ddot{r} - r\dot{u}^2; \\ U_t &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 - \dot{u}); \\ U_w &= \ddot{z} + g \frac{z}{r}, \end{aligned} \quad (6.7.46)$$

где  $g = g_0$  – ускорение силы притяжения планеты;  $\ddot{z} = \xi$  – составляющая ускорения по нормали к плоскости орбиты.

Такая система уравнений в явном виде не решается. В работе [34] получено приближенное решение линеаризованных уравнений этой системы, которое позволяет определить изменение элементов орбиты, обусловленные воздействием малых ускорений:

$$\begin{aligned} \Delta r(\varphi_\lambda) &= \left(\frac{1}{\lambda_{cp}}\right)^2 [U_s(1 - \cos\varphi_\lambda) + 2U_t(\varphi_\lambda - \sin\varphi_\lambda)]; \\ \Delta V_r(\varphi_\lambda) &= \left(\frac{1}{\lambda_{cp}}\right) [U_s \sin\varphi_\lambda + 2U_t(1 - \cos\varphi_\lambda)]; \end{aligned}$$



$$\Delta U(\varphi_\lambda) = \frac{-\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2}{r_{\text{ср}}} \left\{ 2U_s(\varphi_\lambda - \sin\varphi_\lambda) + U_t \left[ \frac{3}{2}\varphi_\lambda^2 - 4(1 - \cos\varphi_\lambda) \right] \right\};$$

$$\Delta V_u(\varphi_\lambda) = -\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right) [U_s(1 - \cos\varphi_\lambda) + U_t(\varphi_\lambda - 2\sin\varphi_\lambda)];$$

$$\Delta z(\varphi_\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 U_w(1 - \cos\varphi_\lambda);$$

$$\Delta V_z(\varphi_\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right) U_w \sin\varphi_\lambda,$$

где  $\varphi_\lambda = \lambda_{\text{ср}} t$ ;  $r_{\text{ср}}$  — средний радиус орбиты на  $n$ -м витке.

Рассмотрим возможные изменения элементов орбиты КА под влиянием составляющих управляющего ускорения от двигателей малой тяги.

У п р а в л е н и е в д о л ь о р б и т ы. Постоянное ускорение вдоль орбиты приводит к долгопериодическим и вековым изменениям элементов орбиты КА. Максимальные значения долгопериодических отклонений равны

$$|\Delta r|_{\text{max}} = 2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 |U_T|;$$

$$|\Delta V_r|_{\text{max}} = 4\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right) |U_T|;$$

$$|\Delta l|_{\text{max}} = 8\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 |U_T|;$$

$$|\Delta V_u|_{\text{max}} = 2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right) |U_T|.$$
(6.7.47)

Вековое изменение вдоль орбиты  $\Delta l$  пропорционально квадрату угла  $\varphi_\lambda$  (или, что то же самое, времени полета). Период обращения при этом меняется непрерывно и является линейной функцией числа витков орбиты. Средняя скорость векового смещения  $(\Delta V)_{\text{век}}$ , линейное смещение

$\Delta I(2\pi n)$  за  $n$  витков, изменения периода обращения на  $n$ -м витке  $\Delta T(n)$  могут быть определены из выражений

$$(\Delta V)_{\text{век}} = -3\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)U_t\varphi_\lambda = -3U_t;$$

$$\Delta I(2\pi n) = -6\pi^2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 n^2 U_t = -6\pi^2 n^2 r_{\text{ср}} \frac{U_t}{g_{\text{ср}}}; \quad (6.7.48)$$

$$\Delta T(n) = -\frac{\Delta I(2\pi n) - \Delta I[2\pi(n-1)]}{V_{\text{к}}} = \frac{6\pi^2(2n-1)\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^3}{r_{\text{ср}}} U_t,$$

где  $t = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)\varphi_\lambda$  – время, отсчитываемое от начала воздействия управ-

ляющих ускорений;  $V_{\text{к}} = \frac{2\pi r_{\text{ср}}}{T}$  – средняя круговая скорость КА.

Вековое изменение  $\Delta V(2\pi)$  продольной скорости за один виток можно определить, используя соотношение

$$\Delta V_{\text{н}}(2\pi) = -2\pi\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)U_t = -2\pi V_{\text{к}} \frac{U_t}{g_{\text{ср}}}. \quad (6.7.49)$$

Следует отметить, что величина  $\Delta V_{\text{н}}(2\pi)$  не совпадает с величиной  $[(\Delta V)_{\text{век}}(2\pi)]$ . Первая из них характеризует изменение фактической скорости полета, а вторая – изменение проекции скорости КА на невозмущенную среднюю круговую орбиту, т.е. можно сделать вывод, что аппарат движется по разворачивающейся спирали с некоторыми периодическими колебаниями относительно основного движения. Скорость полета при этом непрерывно уменьшается, а период обращения возрастает. При управляющем ускорении противоположного направления КА движется по сворачивающейся спирали. В этом случае скорость полета возрастает, а период обращения уменьшается.

У п р а в л е н и е п о р а д и у с у о р б и т ы. Постоянное управляющее ускорение  $U_s$  приводит к появлению периодических составляющих в изменении величин  $r$ ,  $V_r$ ,  $U$ ,  $V_u$  и к вековым изменениям  $(\Delta U)_{\text{век}}$  – вдоль орбиты. Максимальные периодические изменения можно определить из выражений

$$|\Delta r|_{\max} = |\Delta l|_{\max} = 2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right)^2 |U_s|;$$

$$|\Delta V_r|_{\max} = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right) |U_s|; \quad (6.7.50)$$

$$|\Delta V_u|_{\max} = 2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right) |U_s|,$$

где  $\Delta l = r_{\text{cp}} \Delta u$  – смещение спутника вдоль орбиты.

Следовательно, управляющее ускорение  $U_s$  лишь искажает форму орбиты, не вызывая вековых отклонений по направлению своего воздействия. Вековое смещение имеет место вдоль орбиты по нормали к управляющему ускорению. Величину векового смещения  $\Delta l(2\pi)$  за один виток, скорость этого смещения можно определить по формулам

$$\Delta l(2\pi) = -4\pi \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right)^2 U_s;$$

$$(\Delta V)_{\text{век}} = \frac{\Delta l(2\pi)}{2\pi \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right)} = -2 \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right) U_s; \quad (6.7.51)$$

$$\Delta T = - \frac{\Delta l(2\pi)}{V_{\text{к}}} = \frac{4\pi \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right)^3}{r_{\text{cp}}} U_s = 2T \frac{U_s}{g_{\text{cp}}}.$$

Управление по нормали к плоскости орбиты. Постоянное управляющее ускорение  $U_w$ , действующее по нормали к орбите, вызывает периодические изменения величин  $z$  и  $V_z$ . Для около-круговых орбит эти воздействия приводят к среднему смещению плоскости орбиты на величину

$$(\delta z)_{\text{cp}} = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{cp}}}\right)^2 U_w = r_{\text{cp}} \frac{U_w}{g_{\text{cp}}} \quad (6.7.52)$$

и повороту ее вокруг оси  $MN$ , составляющий с осью  $Ox$  угол, равный

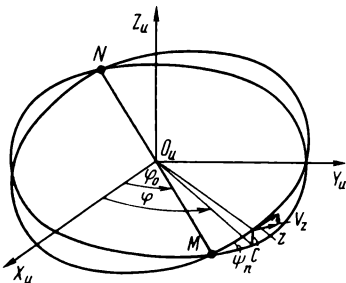


Рис. 6.19. Схема управления с малой тягой по нормали к плоскости орбиты

$\varphi = \pi/2$  (рис. 6.19). Угол поворота плоскости орбиты  $\psi_n$  определится выражением

$$\psi_n = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)U_w}{r_{\text{ср}}} = \frac{U_w}{g_{\text{ср}}} . \quad (6.7.53)$$

Максимальное отклонение КА от плоскости первоначальной орбиты соответствует точке  $\varphi = \pi$  и определяется из выражения

$$(\delta z)_{\text{max}} = 2\left(\frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\right)^2 U_w = 2r_{\text{ср}} \frac{U_w}{g_{\text{ср}}} . \quad (6.7.54)$$

Из сказанного следует, что постоянное ускорение, действующее по нормали к направлению полета, не вызывает вековых изменений по направлению своего воздействия.

## ГЛАВА 7. БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ СЕТЬ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

### 7.1. ОБЩАЯ СХЕМА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

Баллистическое проектирование спутниковых систем включает в себя последовательность решений, связанных в той или иной мере задач: определение динамически устойчивой на заданном временном интервале орбитальной структуры, пригодной для решения целевых задач, выбор схемы (закона) управления орбитальными параметрами КА системы, определение схемы восполнения спутниковой системы. Каждое из перечисленных мероприятий является сложным процессом, требующим специального исследования и рассмотрения. Рассмотрим несколько подробнее перечисленные задачи.

Задачи определения орбитальной структуры СС и выбора схемы (закона) управления КА системы тесно взаимосвязаны и представляют собой процесс синтеза орбитальной структуры.

В дальнейшем изложении под задачей синтеза спутниковой системы будем понимать задачу определения начального орбитального построения  $\bar{\mathcal{E}}_j^0$  и выбора законов управления орбитами системы  $\bar{V}_j$  для всех  $j = 1, 2, \dots, j$  с целью оптимизации некоторых параметров [например, минимизирующих функцию (1.5.1) при ограничении (1.5.5)], характеризующих качество функционирования СС. Такая постановка является достаточно общей и требует для своего решения достаточно трудоемких вычислительных затрат на ЭВМ, связанных с определением функции  $H$  для всех рабочих зон на временном интервале  $[a, b]$ . Вместе с тем тщательный анализ условий функционирования СС и выявление зависимости конечной функции, характеризующей работу системы от эволюции элементов орбит КА или от части элементов, в отдельных случаях позволяют значительно упростить задачу синтеза. Можно попытаться свести задачу синтеза к выбору такой начальной орбитальной структуры, при которой обеспечивается баллистическая устойчивость СС. Часто можно показать, что создание баллистически устойчивой системы на заданном временном интервале адекватно минимизации функции  $H$ . Рассмотрим такую постановку задачи баллистического проектирования. В общем случае качество решения целевых задач спутниковой системой на интервале  $[a, b]$  может быть определено функцией

$$F = \sum_{n=1}^{\bar{n}} F_{\Xi}^n = \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{l=1}^{\bar{l}} f_1(\Xi_l^n - \Xi_l^{n*}) + \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{k=1}^{\bar{k}} f_2(\Xi_k^n - \Xi_k^0), \quad (7.1.1)$$

здесь  $f_1(\Xi_l^n - \Xi_l^{n*})$  – функция, характеризующая отклонение  $l$  элементов от их средних значений с учетом эволюции на  $n$ -м временном цикле;  $f_2(\Xi_k^n - \Xi_k^{n*})$  – отклонения  $k$  элементов от их начальных значений, как правило,  $k + \bar{l} = 6$ . На практике  $f_1, f_2$  – обычно нелинейные функции (квадратичные, модули и т.п.).

При баллистическом проектировании различных по своему назначению космических систем функция (7.1.1) может существенно изменяться. Например, в частном случае может отсутствовать одна из составляющих функции (7.1.1). В отдельных случаях орбитальную структуру можно найти, минимизируя функцию только на конце интервала  $[a, b]$ :

$$F = \sum_{l=1}^{\bar{l}} f_1(\Xi_l^b - \Xi_l^{b*}) + \sum_{k=1}^{\bar{k}} f_2(\Xi_k^b - \Xi_k^0). \quad (7.1.2)$$

Для всех перечисленных случаев показатели, определяющие качество функционирования СС, являются функциями начальных параметров  $\Xi_j^0$  и управления  $\bar{V}_j$  при ограничениях (1.5.5), (1.5.6).

Таким образом, задача синтеза орбитальной структуры СС сводится к определению векторов  $\Xi_j^0$  и  $\bar{V}_j$  для всех  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , минимизирующих функцию (7.1.2) при ограничениях (1.5.5), (1.5.6).

К настоящему времени отсутствуют общие эффективные методы решения приведенных выше задач синтеза. Однако имеются некоторые пути решения таких задач, приведенные в [17]. Для преодоления отмеченных трудностей применяется приближенное решение, включающее частные решения. Вначале предполагается, что схема управления выбрана и закон управления фиксирован. В этих предположениях решается задача выбора начальной орбитальной структуры, обеспечивающей выполнение целевых задач. Затем предполагается, что орбитальное построение фиксировано и определяется закон управления. После чего осуществляется увязка двух частных решений.

В свою очередь, процесс выбора начальной орбитальной структуры, как правило, разбивается на несколько этапов, основными из которых являются:

выбор класса орбит, позволяющих решать задачи, стоящие перед спутниковой системой;

приближенный выбор ОС системы, базирующийся на использовании кинематических соотношений и характеристик;

исследование орбитальной эволюции ОС и оценка динамики СС с приближенной орбитальной структурой;

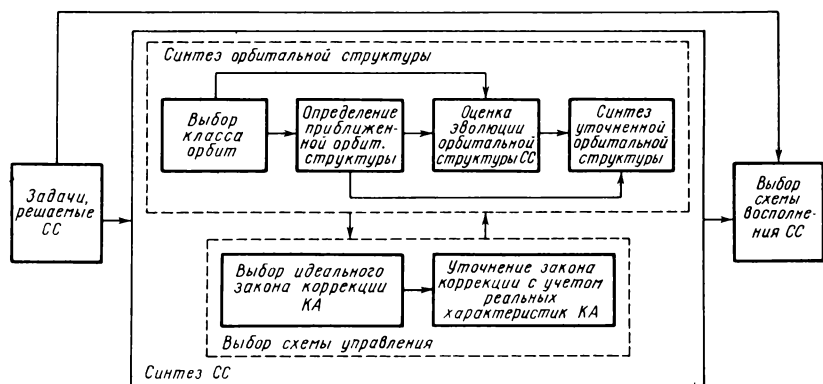


Рис. 7.1. Укрупненная схема процесса баллистического проектирования СС

уточненный синтез орбитальной структуры СС с учетом орбитальной эволюции и ее влияния на динамику системы.

Общая схема процесса баллистического проектирования приведена на рис. 7.1.

## 7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ СТРУКТУР ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ. КИНЕМАТИЧЕСКИ ПРАВИЛЬНЫЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Первым шагом построения орбитальных структур является выбор класса орбит, входящих в СС. Орбитальные параметры КА системы существенным, в зачатку решающим образом зависят от целевых задач, выполняемых системой. Для иллюстрации такой зависимости рассмотрим два характерных примера, связанные с выбором класса орбит для метеорологической и связной систем.

**Выбор класса КА метеорологической системы.** Параметры орбит КА метеорологической системы в зависимости от характеристик бортовой аппаратуры и заданных районов обслуживания, как правило, выбираются с небольшими высотами. Так, например, для КА с круговыми орбитами при  $h = 600 \dots 700$  км период обращения составит  $T \cong 97 \dots \dots 98$  мин. За это время межвитковое смещение составит  $\sim 24^\circ$ . Это обуславливает линейное смещение на экваторе [17] на 2600 км, а на широте Москвы порядка 1700 км. Поэтому при формировании спутниковых систем может быть положено свойство: ширина полосы обзора бортовой аппаратуры на поверхности Земли в среднем должна соответствовать величине межвиткового смещения. Таким образом, очевидно, что

параметры орбит метеосистемы достаточно жестко зависят от возможностей бортовой аппаратуры и требуемого обзора земной поверхности.

**Выбор класса орбит связной системы.** Орбиты КА системы связи должны удовлетворять совокупности специфических требований [29], основными из которых являются:

обеспеченность связью территории заданного размера вне зависимости от ее географического положения;

удовлетворение специфическим требованиям радиосвязи, в том числе минимально допустимому углу места, при котором работают наземные радиостанции, стабильность зон радиовидимости для региональных систем связи и др.

В работе [29] проводится анализ различных классов орбит (полярных, наклонных низких и средневысотных, полусуточных наклонных и экваториальных), которые можно было бы использовать региональной или глобальной систем связи. Показывается, что по целому ряду кинематически параметров и "технологичности" проведения сеансов связи наиболее целесообразно использовать КА на высокоэллиптических ( $e \cong 0,50$ ) и околостационарных экваториальных орбитах.

**Высокоэллиптические КА** обладают рядом преимуществ, в том числе тем, что спутник движется по орбите существенно неравномерно (движется с малой скоростью в районе апогея и быстро пролетает в области перигея). На рис. 7.2 [29] приведена зависимость текущей высоты полета и истинной аномалии от времени полета спутника типа "Молния". Видно, что на высотах  $h \geq 20\ 000$  км КА движется около 9 ч (при периоде обращения  $\sim 12$  ч). КА на каждом витке имеет продолжительную зону радиовидимости, положение которой в основном определяется расположением апогея орбиты. Отсюда сразу же вытекает требование к обеспечению стабильности положения апогея орбиты для обеспечения постоянства зоны радиовидимости. Это можно обеспечить выбором одного из основных параметров (наклонения орбиты), близким к критическому значению  $\sim 63,4^\circ$ . Одновременно, для стабильности зон радиовидимости целесообразно использовать орбиты с повторяющейся трассой на поверхности Земли. Последним требованиям удовлетворяют орбиты с периодом обращения КА, кратным звездным суткам, в том числе с  $T = 8, 12, 24$  ч. В работе [29] показано, что орбита с периодом обращения

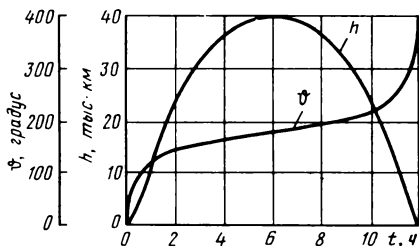


Рис. 7.2. Зависимость  $\vartheta$  и  $h$  от времени полета



8 ч по размеру зон радиовидимости проигрывает орбитам с периодами обращения 12 и 24 ч.

Орбита с периодом обращения 12 ч является наиболее предпочтительной. Ей соответствует значительная зона радиовидимости и высота апогея (порядка 40 000 км), при которой вполне допустимы задержки в распространении радиосигнала. Такая орбита с наклоном, близким к  $63,4^\circ$  и апогеем в северном полушарии, применяется для спутников "Молния" и является составной частью системы "Орбита", а также применяется для прямой связи Москва–Вашингтон.

Последующим шагом является расстановка КА в пространстве с учетом требований по обслуживанию заданных районов и ограничений по количеству КА. При этом каждая система спутников характеризуется присущей ей определенной структурой с соответствующими кинематическими показателями. Имеются структуры с пересекающимися рабочими зонами (см. рис. 1.17), когда имеет место соотношение

$$t_{j-1, \text{к.р.з}} > t_{j, \text{н.р.з}} \quad (7.2.1)$$

Однако часто спутниковая система может обладать структурой, не обеспечивающей по тем или иным показателям непрерывное обслуживание заданного района. Этому случаю будет соответствовать временная диаграмма с временем разрыва  $t_{\text{р.з}}$ . В данном случае не происходит полного перекрытия рабочих участков за временной цикл, т.е. выполняется условие

$$t_{j, \text{н.р.з}} < t_{j-1, \text{к.р.з}} \quad (7.2.2)$$

где  $t_{j-1, \text{к.р.з}}$  – конечная РЗ по упорядоченному положению КА в системе.

Рассмотрим примеры построения кинематически правильных орбитальных структур.

**Метеосистема.** Существующие возможности метеорологической аппаратуры с разрешением в надире от 0,8 до 1,5 км [17] позволяют с высокой надежностью использовать орбиты с высотой до 1000 км. При создании спутниковой системы важно разнесение орбит по долготе восходящего узла  $\Delta\Omega_{j, j-1} = \Omega_j - \Omega_{j-1} = \text{const}$ . Так, например, для системы из трех КА восходящие узлы целесообразно разнести строго на  $60^\circ$ . В противном случае, проекции их зон обзора будут сходиться вместе или расходиться, в результате чего аппараты будут наблюдать одну и ту же местность или оставлять непросмотренными значительные области Земли. Этот случай является примером системы с временным разрывом.

**Связная система.** Спутники системы имеют одинаковые трассы, а следовательно, одинаковые географические долготы восходящих узлов орбит. Для обеспечения требуемого сдвига по времени прохождения ( $\Delta t$ )

плоскости орбит должны быть разнесены в пространстве на величину  $\Delta\Omega = 2\pi/j$ , и должно выполняться условие  $\Delta\Omega_{j, j-1} = \text{const}$ .

В приведенных примерах, а также и в других случаях целесообразно ввести понятие "идеальной кинематической системы". В рассмотренных примерах под такой системой будем понимать орбитальную структуру КА, движущихся по орбитам, долготы восходящих узлов которых разнесены в инерциальном пространстве и прецессируют с постоянной скоростью. Остальные параметры орбит целесообразно выбирать равными. Остановимся на последнем факте более подробно. В работах [17, 29] показано, что системы КА, построенные на орбитах различного наклона и геометрии, имеют тенденцию к неустойчивости во времени.

Поэтому для обеспечения устойчивости СС строят на орбитах, как правило, одинаковой геометрии и одинаковых наклонов. При выборе начального приближения орбитальной структуры, как правило, рассматривается ее поведение под влиянием основного возмущения, обусловливаемого полярным сжатием Земли (учет гармоник  $C_{20}$ ). Выясним возможность выполнения при этом условия

$$f(\Theta_2) - f(\Theta_1) = 0. \tag{7.2.3}$$

Оказывается, что тривиальное решение  $\Theta_2 = \Theta_1$  [17] системы (7.2.3) является единственным. Покажем это, используя зависимости

$$\frac{\cos i^{(1)}}{(p^{(1)})^2} = \frac{\cos i^{(2)}}{(p^{(2)})^2}; \tag{7.2.4}$$

$$\frac{4 - 5 \sin^2 i^{(1)}}{(p^{(1)})^2} = \frac{4 - 5 \sin^2 i^{(2)}}{(p^{(2)})^2}.$$

Исключив из уравнений  $p^{(1)}$  и  $p^{(2)}$ , получим соотношения для наклонов

$$\frac{\cos i^{(1)}}{4 - 5 \sin^2 i^{(1)}} = \frac{\cos i^{(2)}}{4 - 5 \sin^2 i^{(2)}} = c, \tag{7.2.5}$$

откуда следует, что  $\cos i$  обоих КА должен удовлетворять квадратному уравнению

$$5c \cos^2 i - \cos i - c = 0, \tag{7.2.6}$$

которое имеет корни

$$\cos i = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20c}}{10c}. \tag{7.2.7}$$

Выбор для обоих КА одинаковых корней приводит к тривиальному решению

$$i^{(1)} = i^{(2)}; p^{(1)} = p^{(2)}. \quad (7.2.8)$$

Выбор разных корней невозможен потому, что в соответствии с (7.2.7) они имеют разные знаки и не могут удовлетворить первому из уравнений.

Следовательно, равенство вековых возмущений первого порядка обеспечивается только тогда, когда выполняются условия (7.2.8), т.е. при одинаковых наклонениях  $i$  и одинаковых значениях параметров орбит  $p$ . Последнее из условий запишем так:

$$a^{(1)}[1 - (e^{(1)})^2] = a^{(2)}[1 - (e^{(2)})^2]. \quad (7.2.9)$$

### 7.3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ОРБИТАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

В общем случае оценка эволюции СС может базироваться на методах, изложенных в гл. 4. При выборе показателей эволюции СС можно пойти двумя путями. Первый из них заключается в выборе какого-либо обобщенного показателя системы, характеризующего качество ее функционирования, но вместе с тем являющегося функцией элементов орбиты и их эволюции. Второй путь состоит в выборе в качестве показателей совокупности функций, например  $\Delta\mathcal{E}$  (см. гл. 1), характеризующих непосредственно эволюцию орбитальной структуры системы.

Эволюция СС в гравитационном поле Земли. В основу анализа эволюции системы КА можно положить систему усредненных уравнений для элементов  $\mathcal{E}$  и уравнение для времени  $t_N$  [17]

$$\frac{dt_N}{dN} = T_{\Omega N} - \frac{1}{2} \Delta T_{\Omega N} + O(\epsilon^2).$$

В правых частях ограничимся учетом только гравитационных возмущений. Примем вектор элементов орбиты в виде  $\bar{\mathcal{E}} = (a, e, i, \Omega, \omega)$ . Из гл. 4 следует, что вековые возмущения первого порядка ( $\sim C_{20}$ ) имеют только элементы  $\Omega$  и  $\omega$ . Величина возмущений зависит от элементов  $a, e, i$ . Возмущения остальных элементов имеют порядок ( $C_{20}^2$ ), поэтому при дальнейшем анализе вектор элементов  $\bar{\mathcal{E}}$  удобно представить в виде составного вектора  $\bar{\mathcal{E}} = (\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_2)$ , где  $\bar{\mathcal{E}}_1 = (a, e, i)$ ,  $\bar{\mathcal{E}}_2 = (\Omega, \omega)$ .

Тогда усредненные уравнения для вектора состояния 1-го и 2-го КА могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\vartheta}_1^{(1)}}{dN} &= \bar{\varphi}_1(\bar{\vartheta}^{(1)}); \\
 \frac{d\bar{\vartheta}_1^{(2)}}{dN} &= \bar{\varphi}_1(\bar{\vartheta}^{(2)}); \\
 \frac{d\bar{\vartheta}_2^{(1)}}{dN} &= \bar{f}(\bar{\vartheta}_1^{(1)}) + \bar{\varphi}_2(\bar{\vartheta}^{(1)}); \\
 \frac{d\bar{\vartheta}_2^{(2)}}{dN} &= \bar{f}(\bar{\vartheta}_1^{(2)}) + \bar{\varphi}_2(\bar{\vartheta}^{(2)}); \\
 \frac{dt_N^{(1)}}{dN} &= T_{\Omega}^{(1)}; \\
 \frac{dt_N^{(2)}}{dN} &= T_{\Omega}^{(2)}.
 \end{aligned}
 \tag{7.3.1}$$

Здесь

$$f(\vartheta_1) = \left\| \begin{array}{l} \delta\Omega(2\pi) \\ \delta\omega(2\pi) \end{array} \right\|
 \tag{7.3.2}$$

– двумерная вектор-функция возмущений первого порядка;  $\varphi_1(\bar{\vartheta})$  и  $\varphi_2(\bar{\vartheta})$  – вектор-функции правых частей системы уравнений, имеющие порядок  $C_{20}^2$ .

Функции  $\varphi(\bar{\vartheta})$  учитывают возмущения от различных составляющих разложения гравитационного потенциала Земли по полиномам Лежандра, в том числе от тессеральных гармоник.

Относительное положение двух КА определяется разностью их элементов и времени

$$\bar{Y}_1 = \bar{\vartheta}_1^{(2)} - \bar{\vartheta}_1^{(1)}; \bar{Y}_2 = \bar{\vartheta}_2^{(2)} - \bar{\vartheta}_2^{(1)}; \bar{Y}_3 = t_N^{(2)} - t_N^{(1)}.
 \tag{7.3.3}$$

Дифференциальные уравнения для вектора  $\bar{Y}$  относительного положения двух КА выводятся на основе уравнений (ПЗ.1). Получаем

$$\frac{dY_1}{dN} = \bar{\varphi}_1(\bar{\vartheta}^{(2)}) - \bar{\varphi}_1(\bar{\vartheta}^{(1)});
 \tag{7.3.4}$$

$$\frac{d\bar{Y}_2}{dN} = [\bar{f}(\bar{\Theta}_1^{(2)}) - \bar{f}(\bar{\Theta}_1^{(1)})] + [\bar{\varphi}_2(\bar{\Theta}^{(2)}) - \bar{\varphi}_2(\bar{\Theta}^{(1)})]; \quad (7.3.5)$$

$$\frac{dY_3}{dN} = T_{\Omega}^{(2)} - T_{\Omega}^{(1)}. \quad (7.3.6)$$

Для постоянства относительного положения КА необходимо, чтобы правая часть уравнений (7.3.4), (7.3.5), (7.3.6) была равна нулю на рассматриваемом временном интервале. Если элементы орбиты 1-го и 2-го КА отличаются, то это условие не может быть выполнено.

**Эволюция космических аппаратов СС в атмосфере.** Для анализа относительного положения двух КА оставим в правых частях усредненных уравнений второго приближения\* те члены, которые связаны с торможением в атмосфере. Уравнение соответственно для 1-го и 2-го КА запишутся

$$\frac{d\bar{\Theta}^{(1)}}{dN} = \delta\bar{\Theta}_{\rho}(\bar{\Theta}^{(1)}); \quad (7.3.7)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}^{(2)}}{dN} = \delta\bar{\Theta}_{\rho}(\bar{\Theta}^{(2)});$$

$$\frac{dt_N^{(1)}}{dN} = T_{\Omega}^{(1)}; \quad (7.3.8)$$

$$\frac{dt_N^{(2)}}{dN} = T_{\Omega}^{(2)};$$

Два первых уравнения относятся к пятимерному вектору элементов орбиты, например  $\bar{\Theta} = (a, e, i, \Omega, \omega)$ , последние два — к быстрой переменной — времени пересечения экватора. Относительное положение двух КА будем характеризовать разностью их элементов

$$\bar{Y} = \bar{\Theta}^{(2)} - \bar{\Theta}^{(1)} = \Delta\bar{\Theta} \quad (7.3.9)$$

и разностью моментов  $t_N$  на соответствующих витках

$$\Delta t = t_N^{(2)} - t_N^{(1)}. \quad (7.3.10)$$

Изменение величин (7.3.9), (7.3.10) в процессе полета характеризует влияние торможения в атмосфере на относительное положение КА. Диф-

---

\* С выводом усредненных уравнений второго приближения можно ознакомиться в работе [17], гл. 1.

ференциальные уравнения для вектора относительного положения и величины  $\Delta t$  запишутся в виде

$$\frac{dY}{dN} = \delta \bar{\mathcal{E}}_{\rho}(\bar{\mathcal{E}}^{(2)}) - \delta \bar{\mathcal{E}}_{\rho}(\mathcal{E}^{(1)}); \quad (7.3.11)$$

$$\frac{d\Delta t}{dN} = T_{\Omega}^{(2)} - T_{\Omega}^{(1)}. \quad (7.3.12)$$

Процесс приближенного определения возмущений  $\delta \bar{\mathcal{E}}(\dots)$  изложен в гл. 4, мы же остановимся на особенности уравнений (7.3.11), (7.3.12). Система уравнений (7.3.11) может быть положена в основу приближенного анализа. В случае их решения уравнение (7.3.12) интегрируется достаточно просто, так как при близости периодов (имеется в виду случай однотипности орбитальных параметров) его правую часть можно записать

$$\frac{d\Delta t}{dN} = \frac{3}{2} T_{\Omega}^{(1)} \frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{a^{(1)}} = \varphi(N),$$

откуда

$$\Delta t = \Delta t_0 + \int_{N_0}^N \varphi(\xi) d\xi. \quad (7.3.13)$$

Возмущения  $\delta \mathcal{E}_{\rho}(\dots)$  возникают во всех названных элементах орбиты. Однако основная составляющая атмосферных возмущений имеется лишь в элементах  $a$  и  $e$ . В элементах  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  атмосферные возмущения существенно меньше. Особенностью основной составляющей атмосферных возмущений является то, что она является нелинейной функцией элементов  $a$  и  $e$ , плотности атмосферы в перигее  $\rho_{\text{п}}$ , баллистического коэффициента  $k_{\text{б}}$  и не зависит явным образом от других элементов. Высота перигея определяется соотношением

$$h_{\text{п}} = a(1 - e) + \delta r(\omega) - r_3(1 - e \sin^2 i \sin^2 \omega), \quad (7.3.14)$$

где  $\delta r(\omega)$  – возмущения радиуса-вектора  $r$  под действием второй зональной гармоники на интервале движения КА от восходящего узла до перигея.

Наряду с основной в атмосферные возмущения  $\delta \mathcal{E}_{\rho}(\dots)$  входят составляющие, которые отражают влияние второй зональной гармоники и сжатия Земли, солнечного "вздутия" атмосферы и ветров. Все эти составляющие существенно меньше основной и зависят от всех элементов орбиты  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ .

Постоянство относительного положения КА при движении в атмос-

фере будет сохраняться только в случае, когда правая часть уравнений (7.3.11) будет равна нулю на всем рассматриваемом временном интервале. Однако на практике в связи с отличием параметров орбит КА и сложностью функции  $\delta\bar{\rho}(\dots)$  это условие может быть не выполнено. Поэтому имеет смысл говорить о минимизации некоторой нормы правых частей уравнений (7.3.11), например, такой

$$I(\bar{\alpha}^{(1)}, \bar{\alpha}^{(2)}) = \int_{N_0}^N \left\{ \delta\bar{\rho}[\bar{\alpha}^{(2)}(\xi)] - \delta\bar{\rho}[\bar{\alpha}^{(1)}(\xi)] \right\}^T G \left\{ \delta\bar{\rho}[\bar{\alpha}^{(2)}(\xi)] - \delta\bar{\rho}[\bar{\alpha}^{(1)}(\xi)] \right\} d\xi. \quad (7.3.15)$$

Здесь  $\bar{G}$  – весовая матрица.

В случае минимизации нормы (7.3.15) элементы  $a$  и  $e$  обоих КА окажутся близкими, так как именно от них зависит основная составляющая атмосферных возмущений.

Изложенный подход к оценке относительного положения КА при движении в атмосфере является достаточно общим. Более детальное изложение данного вопроса можно найти в работах [17, 35].

Эволюция орбитальных структур под влиянием притяжения внешних тел. Взаимное положение  $k$ -го и  $m$ -го спутников системы на заданный момент времени  $t$  может быть получено в зависимости от требуемой точности численно-аналитическим методом, основанном на применении усредненных или разностных уравнений, и приближенными аналитическими методами прогнозирования.

Первый путь связан со значительными вычислительными затратами на ЭВМ и затрудняет проведение качественного анализа в процессе баллистического проектирования. Поэтому целесообразно применять приближенные методы оценки эволюции орбитальных структур спутниковых систем, а затем при необходимости проводить трудоемкие, но более точные расчеты относительной орбитальной эволюции под влиянием притяжения внешних тел.

Рассмотрим вначале подход к проведению приближенного анализа. Из выражений (4.5.9) следует, что орбитальная эволюция от притяжения внешних тел существенным образом зависит от взаимной ориентации орбит КА в орбитальной структуре и от расположения внешних тел. Ориентацию плоскости орбиты  $j$ -го КА системы относительно плоскости орбиты притягивающего тела определим углом  $\Delta\kappa_{jk}$ . Тогда косинус угла  $\Delta\kappa_{jk}$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \cos\Delta\kappa_{jk} &= \sin\Omega_j \sin i_j \sin\Omega_k \sin i_k + \cos\Omega_j \sin i_j \cos\Omega_k \cos i_k + \cos i_j \cos i_k = \\ &= \sin i_j \sin i_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) + \cos i_j \cos i_k, \end{aligned}$$

где  $\Omega_k, i_k$  – элементы орбиты  $k$ -го возмущающего тела в геоцентрической систем координат.

Последнее соотношение позволяет получить формулы для частных случаев. Например, косинус угла между плоскостями орбит спутника и Луны определится из выражения

$$\cos(\Delta\kappa_{к.л.})_j = \sin i_j \sin i_{л.э} \cos(\Omega_j - \Omega_{л.э}) + \cos i_j \cos i_{л.э},$$

где  $i_{л.э}$  – наклонение орбиты Луны относительно экватора Земли;  $\Omega_{л.э}$  – долгота восходящего узла орбиты Луны в плоскости экватора Земли.

Значение  $i_{л.э}$ , в свою очередь, можно определить из выражения

$$\cos i_{л.э} = \cos i_{л} \cos \varepsilon - \sin i_{л} \sin \varepsilon \cos \Omega_{л},$$

а значение  $\Omega_{л.э}$  из уравнений

$$\sin i_{л.э} \sin \Omega_{л.э} = \sin i_{л} \sin \Omega_{л};$$

$$\sin i_{л.э} \cos \Omega_{л.э} = \cos i_{л} \sin \varepsilon + \sin i_{л} \cos \varepsilon \cos \Omega_{л}.$$

Косинус угла между плоскостью орбиты  $j$ -го КА и "плоскостью орбиты" Солнца (плоскостью эклиптики) определится выражением

$$\cos(\Delta\kappa_{кс}) = \sin i_j \sin \varepsilon \cos \Omega_j + \cos i_j \cos \varepsilon.$$

Известно, что наклон лунной орбиты к плоскости эклиптики изменяется от  $4^{\circ} 57'$  до  $5^{\circ} 20'$ , кроме того, вращательное движение линии узлов орбиты Луны на плоскости эклиптики совершается один раз за 18,6 года. Вследствие этого и наличия постоянного наклона экваториальной плоскости Земли к эклиптике восходящий узел орбиты Луны относительно плоскости экватора Земли за 18,6 лет совершает немногим более  $12^{\circ}$  относительно направления на точку весеннего равноденствия.

Такая особенность определенным образом влияет и на эволюцию орбит КА в орбитальной структуре.

Приближенные оценки относительной эволюции КА в орбитальной структуре можно получить с использованием предпосылок, приведенных в работах [17, 29]. При расчете эволюции на длительных временных интервалах выражения (4.5.9) можно представить в виде (имея в виду, что  $\mu_k$  и  $p_k$  – известные константы)

$$\Delta x = \Sigma \beta_n f_n(a, e, i, \Omega, \omega), \tag{7.3.16}$$

где  $x = a, e, \dots, \omega$ ;  $f(a, \dots, \omega)$  – некоторые функции элементов  $a, \dots, \omega$ .

Пренебрегая переменностью  $x$  за время, равное периоду обращения возмущающего тела, и учитывая только существенную переменность коэффициентов  $\beta_k$ , обусловленную сравнительно малым изменением



относительного положения Земли и возмущающего тела, изменение элементов орбиты перепишем в виде

$$\Delta_{11}x = \sum_n f_n \sum_{l=1}^{N_k} \beta_{nl}, \quad (7.3.17)$$

где  $l$  – номер текущего витка КА;  $\beta_{nl}$  – значение коэффициентов  $\beta_n$  на  $l$ -м витке;  $N_k = \frac{T_k}{T}$  – число оборотов КА за период обращения возмущающего тела  $T_k$ .

Воспользовавшись плавностью изменения коэффициентов  $\beta_n$ , вторая сумма выражения (7.3.17) может быть заменена интегралом

$$\sum_{l=1}^{N_k} \beta_{nl} \cong \frac{1}{T} \int_0^{T_k} \beta_n dt. \quad (7.3.18)$$

Тогда изменение элементов орбиты за время  $T_k$  можно записать в виде

$$\Delta_{11}x = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^6 f_n \int_0^{T_k} \beta_n dt = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^6 f_n [\beta_n].$$

Величины  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$  аналогичны коэффициентам  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ , приведенным в гл. 4, и определяются из соотношения

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{pmatrix} = D_2 V_2; \quad (7.3.19)$$

$$\beta_6 = \frac{1}{Tb} \int_{u_0}^{u_k} \Delta_k \bar{d}u_k = \frac{1}{Tb} [u_k + e_k \sin(u_k - \omega_k)] \Big|_{u_0}^{u_k};$$

$$\text{где } V_2 = \frac{1}{T_k} \int_{u_0}^{u_k} \bar{U}_2 \Delta_k du_k; \quad (7.3.20)$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 u_k \\ \cos u_k \sin u_k \\ \sin u_k \end{pmatrix}$$

– матрица, зависящая от ориентации возмущающего тела в плоскости его орбиты;  $D_2$  – определяется аналогично  $D_2$  в гл. 4, а  $b$  определяется из выражения [15]

$$\frac{\pi}{bT} = \frac{1}{2} \frac{T_k}{T} \epsilon_k^{3/2}. \quad (7.3.21)$$

В соответствии с (7.3.19), (7.3.20) и (7.3.21) запишем

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21} & (d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21}) & d_{12}d_{22} \\ d_{31}d_{21} & (d_{31}d_{22} + d_{32}d_{21}) & d_{32}d_{22} \\ d_{11}d_{31} & (d_{12}d_{31} + d_{11}d_{32}) & d_{12}d_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\pi}{bT} \\ 0 \\ \frac{\pi}{bT} \end{pmatrix} \quad (7.3.22)$$

Проведя несложные преобразования (7.3.22), получим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} N_k \epsilon_k^{3/2} (d_{11}^2 + d_{12}^2); \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} N_k \epsilon_k^{3/2} (d_{21}^2 + d_{22}^2); \\ \beta_3 &= \frac{1}{2} N_k \epsilon_k^{3/2} (d_{11}d_{21} + d_{12}d_{22}); \\ \beta_4 &= \frac{1}{2} N_k \epsilon_k^{3/2} (d_{31}d_{21} + d_{32}d_{22}); \\ \beta_5 &= \frac{1}{2} N_k \epsilon_k^{3/2} (d_{11}d_{31} + d_{12}d_{32}); \\ \beta_6 &= N_k \epsilon_k^{3/2}, \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Здесь  $N_k = T_k/T$ ;

$$\begin{aligned} d_{11} &= \cos(\Omega - \Omega_k) \cos \omega - \sin(\Omega - \Omega_k) \sin \omega \cos i; \\ d_{12} &= \sin(\Omega - \Omega_k) \cos \omega \cos i_k + [\cos(\Omega - \Omega_k) \cos i \cos i_k + \sin i \sin i_k] \sin \omega; \\ d_{21} &= \cos(\Omega - \Omega_k) \sin \omega - \sin(\Omega - \Omega_k) \cos \omega \cos i; \\ d_{22} &= -\sin(\Omega - \Omega_k) \sin \omega \cos i_k + [\cos(\Omega - \Omega_k) \cos i \cos i_k + \sin i \sin i_k] \cos \omega; \\ d_{31} &= \sin(\Omega - \Omega_k) \sin i; \\ d_{32} &= -\cos(\Omega - \Omega_k) \sin i \cos i_k + \cos i \sin i_k. \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

Вековые изменения орбитальных параметров, определенные на интервале времени, равном периоду обращения возмущающего тела, в первом

приближении получим подстановкой (7.3.24) и (7.3.23) в формулы (4.5.9)

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{\delta N_k} &= 0; \\ \frac{\delta e}{\delta N_k} &= -\frac{15}{2} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 e \epsilon_0^{1/2} (d_{11} d_{12} + d_{12} d_{22}); \\ \frac{\delta i}{\delta N_k} &= \frac{15}{4} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}} \left[ \left(1 - \frac{4}{5} \epsilon\right) (d_{11} d_{31} + \right. \\ &+ d_{12} d_{32}) \cos \omega - \frac{1}{5} \epsilon_0 (d_{31} d_{21} + d_{32} d_{22}) \sin \omega \left. \right]; \\ \frac{\delta \Omega}{\delta N_k} &= \frac{15}{2} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \sin i} \left[ \left(1 - \right. \right. & (7.3.25) \\ &- \left. \frac{4}{5} \epsilon_0\right) (d_{11} d_{31} + d_{12} d_{32}) \sin \omega + \frac{1}{5} \epsilon_0 (d_{31} d_{21} + d_{32} d_{22}) \cos \omega \left. \right]; \\ \frac{\delta \omega}{\delta N_k} &= \frac{3}{2} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \epsilon_0^{1/2} \left[ 4(d_{11}^2 + \right. \\ &+ d_{12}^2) - (d_{21}^2 + d_{22}^2) - 2 \left. \right] - \frac{\delta \Omega}{\delta N_k} \cos i; \\ \epsilon_0 &= 1 - e^2. \end{aligned}$$

Из соотношений (7.3.23), (7.3.24), (7.3.25) можно сделать вывод о том, что эволюция элементов орбит за период обращения возмущающего тела зависит от взаимной ориентации плоскости орбиты КА и  $k$ -го возмущающего тела.

Воспользовавшись выражением (7.3.25), рассмотрим особенности эволюции некоторого класса орбит.

**С т а ц и о н а р н ы е о р б и т ы.** Известно, что для орбит этого класса наибольший интерес представляет определение эволюции наклонения и эксцентриситета. Представим выражения для  $e$  и  $i$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{\delta e}{\delta N_k} = -\frac{15}{4} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right) e \epsilon_0^{1/2} d_e; \\ \Delta i &= \frac{\delta i}{\delta N_k} = \frac{15}{2} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}} d_i, \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

где  $de = d_{11}d_{21} + d_{12}d_{22}$ ;  $d_i = (1 - \frac{4}{5}\epsilon_0)(d_{11}d_{31} + d_{12}d_{32})\cos\omega -$   
 $-\frac{1}{5}\epsilon_0(d_{31}d_{21} + d_{32}d_{22})\sin\omega$ .

Приняв для анализа  $e^2 \approx 0$ ;  $1 - e^2 \approx 1$ ;  $\cos i \approx 1$ ;  $\sin i \approx 0$ , преобразуем (7.3.26) к виду

$$\Delta e = - \frac{15}{4} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 e d'_e; \tag{7.3.27}$$

$$\Delta i = \frac{15}{2} \pi \epsilon_k^{3/2} N_k \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 d'_i,$$

где  $d'e = [-\sin 2(\Omega - \Omega_k + \omega)\sin^2 i_k +$   
 $+ i\sin 2i_k \sin(\Omega - \Omega_k + 2\omega)];$  (7.3.28)

$$d'i = \frac{1}{5} \left\{ [i\cos(\Omega - \Omega_k + \omega)\sin(\Omega - \Omega_k) - \right.$$

$$- i\sin(\Omega - \Omega_k + \omega)\cos^2 i_k \cos(\Omega - \Omega_k) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin(\Omega - \Omega_k + \omega)\sin 2i_k + i\sin^2 i_k \sin\omega] \times$$

$$\times \cos\omega + [-i(\sin(\Omega - \Omega_k)\sin(\Omega - \Omega_k + \omega) +$$

$$+ \cos(\Omega - \Omega_k)\cos^2 i_k \cos(\Omega - \Omega_k + \omega)) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sin 2i_k (\cos(\Omega - \Omega_k + \omega)\sin^2 i_k \sin\omega) \sin\omega \right\}. \tag{7.3.29}$$

Вид коэффициентов  $d'e$ ,  $d'i$  при расчете эволюции  $\Delta e$ ,  $\Delta i$ , обусловленной притяжением космического аппарата Солнцем, упростится, так как  $\Omega_k = \Omega_c = 0$ :

$$d'e = [-\sin 2(\Omega + \omega)\sin^2 \epsilon + i\sin 2\epsilon \sin(\Omega + 2\omega)]; \tag{7.3.30}$$

$$d'i = \frac{1}{5} \left\{ [i\cos(\Omega + \omega)\sin\Omega - i\sin(\Omega + \right.$$

$$+ \omega \cos^2 \epsilon \cos\Omega + \frac{1}{2} \sin(\Omega + \omega)\sin 2\epsilon +$$

$$\left. + i\sin^2 \epsilon \sin\omega] \cos\omega + [-i\sin i \sin(\Omega + \omega) +$$

$$+ \cos\Omega\cos^2\epsilon\cos(\Omega + \omega) + \frac{1}{2}\sin 2\epsilon(\cos(\Omega + \omega)) + i\sin^2\epsilon\sin\omega] \sin\omega \quad (7.3.31)$$

Около полярных круговые орбиты. В этом случае можно принять  $e^2 \approx 0$ ,  $\epsilon_0 \approx 1 - e^2 \approx 1$ ,  $\cos i \approx 0$ , а уравнение (7.3.25) представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{\delta N_k} &= 0; \\ \frac{\delta e}{\delta N_k} &= -\frac{15}{4}\pi\epsilon_k^{3/2}N_k\frac{\mu_k}{\mu}\left(\frac{a}{p_k}\right)^3e(d_{11}d_{21} + d_{12}d_{22}); \\ \frac{\delta i}{\delta N_k} &= \frac{15}{2}\pi\epsilon_k^{3/2}N_k\frac{\mu_k}{\mu}\left(\frac{a}{p_k}\right)^3\left[1 - \frac{4}{5}\epsilon_0\right](d_{11}d_{31} + \\ &+ d_{12}d_{32})\cos\omega - \frac{1}{5}(d_{31}d_{21} + d_{32}d_{22})\sin\omega; \end{aligned} \quad (7.3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega}{\delta N_k} &= \frac{15}{2}\pi\epsilon_k^{3/2}N_k\frac{\mu_k}{\mu}\left(\frac{a}{p_k}\right)^3\left[1 - \frac{4}{5}\epsilon_0\right](d_{11}d_{31} + \\ &+ d_{12}d_{32})\sin\omega + \frac{1}{5}\epsilon_0(d_{31}d_{21} + d_{32}d_{22})\cos\omega; \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \omega}{\delta N_k} = \frac{3}{2}\pi\epsilon_k^{3/2}N_k\frac{\mu_k}{\mu}\left(\frac{a}{p_k}\right)^3[4(d_{11}^2 + d_{12}^2) - (d_{21}^2 + d_{22}^2) - 2],$$

где  $d_{11} = \cos(\Omega - \Omega_k)\cos\omega$ ;

$$d_{12} = \sin(\Omega - \Omega_k)\cos\omega\cos i_k + \sin i_k\cos\omega;$$

$$d_{21} = -\cos(\Omega - \Omega_k)\sin\omega;$$

$$d_{22} = -\sin(\Omega - \Omega_k)\sin\omega\cos i_k + \sin i_k\cos\omega;$$

$$d_{31} = \sin(\Omega - \Omega_k);$$

$$d_{32} = -\cos(\Omega - \Omega_k)\cos i_k.$$

Применение зависимостей (7.3.25) ... (7.3.33) позволит существенно упростить баллистическое проектирование на начальном этапе.

Оценка эволюции спутниковых систем под влиянием притяжения

Луны и Солнца на временных интервалах, существенно меньших периода обращения  $k$ -го притягивающего тела, может быть осуществлена с использованием формул (4.5.9) ... (4.5.11). Так, в первом приближении за один оборот получим

$$\delta a_{m, n} = 0;$$

$$\delta e_{m, n} = \pi_{\mu} [a_m^3 e_m \epsilon_m^{1/2} \beta_{3m} - a_n^3 e_n \epsilon_n^{1/2} \beta_{3n}];$$

$$\delta i_{m, n} = \pi_{\mu} \left\{ \frac{a_m^3}{\epsilon_m^{1/2}} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_m \right) \beta_{5m} \cos \omega_m - \frac{1}{5} \epsilon_m \beta_{4m} \sin \omega_m \right] - \frac{a_n^3}{\epsilon_n^{1/2}} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_n \right) \beta_{5n} \cos \omega_n - \frac{1}{5} \epsilon_n \beta_{4n} \sin \omega_n \right] \right\};$$

$$\delta \Omega_{m, n} = \pi_{\mu} \left\{ \frac{a_m^3}{\epsilon_m^{1/2} \sin i_m} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_m \right) \times \right. \right. \tag{7.3.34}$$

$$\left. \times \beta_{5m} \sin \omega_m + \frac{1}{5} \epsilon_m \epsilon_{4m} \cos \omega_m \right] - \frac{a_n^3}{\epsilon_n^{1/2} \sin i_n} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_n \right) \beta_{5n} \sin \omega_n + \frac{1}{5} \epsilon_n \beta_{4n} \cos \omega_n \right] \right\};$$

$$\delta \omega_{m, n} = \frac{1}{5} \pi_{\mu} \left\{ a_m^3 \epsilon_m^{1/2} [4\beta_{1m} - \beta_{2m} - \beta_{6m}] - a_n^3 \epsilon_n^{1/2} [4\beta_{1n} - \beta_{2n} - \beta_{6n}] \right\} - (\Delta \Omega_m \cos i_m - \Delta \Omega_n \cos i_n);$$

где  $\pi_{\mu} = 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \frac{1}{p_k^3}$ ;  $\epsilon_m = 1 - e_m^2$ ;  $\epsilon_n = 1 - e_n^2$ .

В частном случае для орбит системы с одинаковой геометрией и одинаковым наклоном, но различными  $\Omega_j$ , выражение (7.3.34) перепишем в виде

$$\delta a_{m, n} = 0;$$

$$\delta e_{m, n} = \pi'_{\mu} e e_0^{1/2} (\beta_{3m} - \beta_{3n});$$

$$\tag{7.3.35}$$

$$\delta i_{m, n} = \pi'_\mu \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_0 \right) \cos \omega (\beta_{5m} - \beta_{5n}) - \frac{1}{5} \epsilon_0 \sin \omega (\beta_{4m} - \beta_{4n}) \right]; \quad (7.3.35)$$

$$\delta \Omega_{m, n} = \pi'_\mu \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \sin i} \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \epsilon_0 \right) \sin \omega (\beta_{5m} - \beta_{5n}) + \frac{1}{5} \epsilon_0 \cos \omega (\beta_{4m} - \beta_{4n}) \right];$$

$$\delta \omega_{m, n} = \frac{1}{5} \pi'_\mu \epsilon_0^{1/2} [4(\beta_{1m} - \beta_{1n}) - (\beta_{2m} - \beta_{2n}) - (\beta_{6m} - \beta_{6n})] - \delta \Omega_{m, n} \cos i,$$

где  $\pi'_\mu = \pi_\mu a^3$ ;  $\epsilon_0 = \epsilon_l = \epsilon_m$ .

Мы рассмотрели задачи, связанные с оценкой орбитальной эволюции СС на длительных временных интервалах. На практике при баллистическом проектировании зачастую возникают потребности оценки относительного положения космических аппаратов орбитальной структуры на временных интервалах, меньших периода обращения КА  $|b - a| \ll T_j$ . Наиболее естественный путь в рассматриваемом случае заключается в определении эволюции орбитальных параметров КА на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Однако такой путь достаточно трудоемкий, поэтому иногда целесообразно воспользоваться приближенной оценкой эволюции относительного положения КА, движущихся на околокруговых орбитах. Для этого воспользуемся результатом интегрирования уравнений (4.3.5) ... (4.3.12), которые в случае  $e = 0$ , т.е.  $l = h = 0$  для элементов  $i, \Omega, r$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta i(u) &= -\frac{3}{8} C_{20} \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 \sin 2i \cos 2u + c_i; \\ \delta \Omega(u) &= \frac{3}{2} C_{20} \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 \cos i \left[ u - \frac{1}{2} \sin u \right] + c_\Omega; \\ \delta r(u) &= -\frac{3}{2} C_{20} \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 a \left[ \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 i \right) \cos u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \sin^2 i \cos 2u \right] + c_r. \end{aligned} \quad (7.3.36)$$

Выражения для определения относительного положения пары  $m$ ,  $n$ -х КА запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta i_{m, n} &= -\frac{3}{8} C_{20} r_3^2 \left( \frac{\sin 2i_m \cos 2u_m}{r_m^2} - \frac{\sin 2i_n \cos 2u_n}{r_n^2} \right); \\ \delta \Omega_{m, n} &= \frac{3}{2} C_{20} r_3^2 \left[ \frac{\cos i_m}{r_m^2} \left( u_m - \frac{1}{2} \sin u_m \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos i_n}{r_n^2} \left( u_n - \frac{1}{2} \sin u_n \right) \right]; \\ \delta r_{m, n} &= -\frac{3}{2} C_{20} r_3^2 \left\{ \frac{1}{r_m} \left[ \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 i_m \right) \cos u_m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \sin^2 i_m \cos 2u_m \right] - \frac{1}{r_n} \left[ \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 i_n \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \cos u_n + \frac{1}{6} \sin^2 i_n \cos 2u_n \right] \right\}. \end{aligned} \tag{7.3.37}$$

В случае с одинаковыми параметрами

$$e_m = e_n, i_m = i_n, r_m = r_n \tag{7.3.38}$$

характеристики относительного положения могут быть представлены в виде.

1. Для наклонения

$$\delta i_{m, n} = -\frac{3}{8} C_{20} r_3^2 \frac{\sin 2i}{r^2} (\cos 2u_m - \cos 2u_n). \tag{7.3.39}$$

Если принять, что  $u_n = u_m + \delta u_{m, n}$ , т.е. КА разнесены по аргументу широты, то (7.3.39) можно переписать в виде

$$\delta i_{m, n} = -\frac{3}{8} C_{20} r_3^2 \frac{\sin 2i}{r^2} (\cos 2u_m - \cos 2(u_m + \delta u_{m, n})). \tag{7.3.40}$$

Из (7.3.40) очевидно, что относительное изменение наклонения знакопеременно. Максимальное значение имеет место при  $\delta u_{m, n} = \pi/2$  и  $\delta u_{m, n} = 3\pi/2$ . Функция  $[\cos 2u_m + \cos 2(u_m + \pi/2)]$  на интервале изменения  $u = [0, 2\pi]$  меняется от 2 до -2. Для пары КА, разнесенной на  $u_{m, n} = \pi$ ,

$$\cos 2u_m - \cos 2(u_m + \pi) = 0,$$

т.е. относительное изменение наклонения отсутствует.



Для долготы восходящего узла уравнение (7.3.37) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{m,n} &= \frac{3}{2} C_{20} r_3^2 \frac{\cos i}{r^2} [u_m - (u_m + \\ &+ \delta u_{m,n}) - \frac{1}{2} \sin u_m + \frac{1}{2} \sin(u_m + \delta u_{m,n})] = \\ &= - \frac{3}{2} C_{20} r_3^2 \frac{\cos i}{r^2} [\delta u_{m,n} + \frac{1}{2} (\sin u_m - \\ &- \sin(u_m + \delta u_{m,n}))]. \end{aligned} \quad (7.3.41)$$

Можно рассмотреть частные случаи. Из выражения (7.3.41) следует, что любая пара КА совершает колебания, определяемые составляющей  $\sin u_m - \sin(u_m + \delta u_{m,n})$ . Рассмотрим случай, когда аппараты расположены с  $\delta u = \pi$ , тогда выражение  $\sin u - \sin(u + \frac{\pi}{2}) = 2\sin u$ . Если  $\delta u_{m,n} = \pi/2$  или  $\delta u_{m,n} = 3/2\pi$ ,  $\sin u - \sin(u + \frac{\pi}{2}) = 2\sin u$ , то относительное расположение КА по долготе колеблется с частотой обращения КА по орбите.

Относительное изменение по радиусу может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \delta r_{m,n} &= - \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{r_3}{r}\right)^2 r \left\{ \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 i\right) \times \right. \\ &\times [\cos u_m - \cos(u_m + \delta u_{m,n})] + \frac{1}{6} \sin^2 i \times \\ &\left. \times [\cos 2u_m - \cos 2(u_m + \delta u_{m,n})] \right\}, \end{aligned} \quad (7.3.42)$$

т.е. относительное положение по радиусу-вектору колеблется по сложному закону.

#### 7.4. БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

Изложенные в разд. 7.1, 7.2, 7.3 методы оценки орбитальной эволюции дают возможность поставить и решить задачу синтеза динамически устойчивых СС различного назначения с учетом особенности эволюции орбитальной структуры. Необходимость учета орбитальной эволюции

может быть рассмотрена на примере спутниковой системы связи с КА на высокоэллиптических орбитах. Лунно-солнечное притяжение приводит к существенно неравномерной эволюции аргумента перигея и долготы восходящего узла орбит в зависимости от начальных значений параметров  $\Omega_j^0$ . На рис. 7.3 приведены в качестве примера уходы восходящего узла за пять лет существования [29]. Очевидна существенно неравномерная эволюция по  $\Omega_j$ . Существенно неравномерной и достаточно заметной является также эволюция аргумента перигея вследствие ухода наклонения орбит  $i$  от критического значения ( $i_{кр} = 63,4^\circ$  (в результате происходит вращение линии аспид под влиянием полярного сжатия)).

✦ Эволюция орбитальных параметров приводит к неблагоприятным явлениям в штатном функционировании СС, в том числе в случае рассматриваемого примера к ухудшению условий связи КА с пунктом управления и нарушению стыковки рабочих зон вследствие неравномерной эволюции долгот восходящих узлов. Для текущего момента времени  $t$  "расползание" РЗ при наличии начальной стыковки  $j + 1, j$ -х КА может достигать величины, определяемой из выражения

$$\delta t_{j+1, j} = \frac{1}{\omega_3} [\Delta\Omega_{j+1} - \Delta\Omega_j], \tag{7.4.1}$$

где  $\Delta\Omega_j, \Delta\Omega_{j+1}$  — эволюция долготы восходящего узла  $j, j + 1$  КА за промежуток времени  $(t - t_0)$ .

Из примера очевидна необходимость рационального подхода к выбору начального орбитального построения, а также к определению начальных параметров орбит для КА, восполняющих СС.

Рассмотрим процесс проектирования орбитальных структур СС с учетом эволюции орбитальных параметров КА. Рассмотрим вначале общий случай, когда выбран обобщенный показатель, определяющий качество решения целевых задач спутниковой системы. Будем считать, что орбитальное построение СС полностью определяется параметрами орбит

$a_j^0, e_j^0, i_j^0, \omega_j^0, \lambda_j^0, \Omega_j^0$  каждого КА. Считаем также, что располагаем тем или иным алгоритмом интегрирования дифференциальных уравнений движения, т.е. в произвольный момент времени можем определить значения

$$a_j(\bar{\Omega}_j^0, t), \dots, \Omega_j^0(\bar{\Omega}_j^0, t).$$

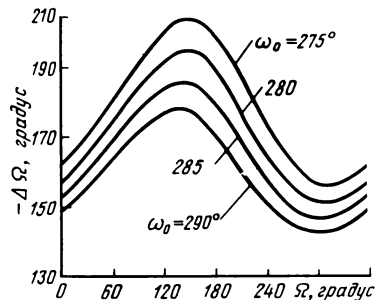


Рис. 7.3. Эволюция долготы восходящего узла орбиты

Преобразуем (1.5.2) для функции цели, обозначив

$$F_{j,j+1} = \sum_{n=1}^{\bar{n}} \max(0, t_{н,j+1}^n - t_{кj}^n), \quad j = 1, 2, \dots, j-1; \quad (7.4.2)$$

$$F_{j,1} = \sum_{n=1}^{\bar{n}} \max(0, t_{н1}^{n+1} - t_{кj}^n). \quad (7.4.3)$$

Функцию  $H$  представим в виде

$$H = \sum_{j=1}^{\bar{j}-1} (F_{j,j+1} + F_{j,1}^-)$$

или, введя для удобства дальнейшего рассмотрения  $(j+1)$ -й фиктивный КА с орбитальными параметрами

$$a_{\bar{j}+1}^0 = a_1^0, \quad e_{\bar{j}+1}^0 = e_1^0, \dots, \lambda_{\bar{j}}^0 + 1 = \lambda_1^0, \quad \Omega_{\bar{j}+1}^0 = \Omega_1^0 + 2\pi, \quad (7.4.4)$$

запишем окончательно

$$H = \sum_{j+1}^{\bar{j}} F_{j,j+1}. \quad (7.4.5)$$

Очевидно, что функции  $F_{j,j+1}$  зависят только от параметров  $j$ -го  $(j+1)$ -го КА, т.е.

$$F_{j,j+1} = F_{j,j+1}(a_j^0, e_j^0, \dots, \Omega_j^0, a_{j+1}^0, e_{j+1}^0, \dots, \Omega_{j+1}^0).$$

Определение значений этих функций основывается на вычислении выражений (7.4.2), (7.4.3), (7.4.4), а также знании функций

$$a_j(\bar{\Theta}_j^0, t), \quad e_j(\bar{\Theta}_j^0, t), \dots, \Omega_j(\bar{\Theta}_j^0, t), \quad t_{нj}(\bar{\Theta}_j) \text{ и } t_{кj}(\bar{\Theta}_j).$$

В общем виде задачу определения орбитального построения можно сформулировать в следующем виде:

$$\text{минимизировать } H = \sum_{j=1}^{\bar{j}} F_{j,j+1} \text{ при ограничениях}$$

$$a_j^{0*} \leq a_j^0 \leq a_j^{0**}, \quad a_{\bar{j}+1}^0 = a_1^0; \quad (7.4.6)$$

.....

$$\lambda_j^{0*} \leq \lambda_j^0 \leq \lambda_j^{0**}, \quad \lambda_{\bar{j}+1}^0 = \lambda_1^0; \quad (7.4.7)$$

$$\Omega_j^{0*} \leq \Omega_j^0 \leq \Omega_j^{0**}, \quad \Omega_{\bar{j}+1}^0 = \Omega_1^0 + 2\pi. \quad (7.4.8)$$

При этом предполагается, что остальные виды ограничений, вошедшие в множество  $A_3$  (см. гл. 1), учитываются при определении рабочей зоны КА.

В работах [4, 17, 29] отмечалось, что к настоящему времени не имеется общих методов решения сформулированной задачи определения орбитального построения СС. Однако можно предложить вычислительные методы, позволяющие приближенно решать задачи такого типа. Рассмотрим эти методы, обладающие некоторой общностью как в подходе к решению задач орбитального построения, так и в определении вычислительной процедуры. Вначале рассмотрим подход, предложенный в работах [4, 17]. Для решения задачи предлагается воспользоваться комбинацией двух методов: частичного улучшения по группам переменных и динамического программирования. Первый из них представляет собой итерационную процедуру, на каждом шаге которой последовательно минимизируется (например, методом динамического программирования) целевая функция  $H$ , после чего процесс снова повторяется. Известно, что если функция является дифференцируемой [4], то процесс сходится к минимуму (локальному или глобальному, в зависимости от свойств выпуклости функции  $H$ ). Учитывая однотипность ограничений (7.4.6) ... (7.4.8) для пояснения процесса, изложим метод динамического программирования для минимизации (7.4.5) при ограничениях (7.4.6) ... (7.4.8).

Вначале будем варьировать переменными  $\Omega_j^0, j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , при этом остальные переменные зафиксируем. Тогда имеем задачу

$$H(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \dots, \Omega_{\bar{j}}^0) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} F_{j, j+1}(\Omega_j^0, \Omega_{j+1}^0) \rightarrow \min;$$

$$\Omega_1^0 < \Omega_2^0 < \dots < \Omega_{\bar{j}+1}^0; \tag{7.4.9}$$

$$\Omega_{j+2}^0 = \Omega_1^0 + 2\pi.$$

Пусть  $P_N(\Omega_1^0, \Omega_N^0) = \min \sum_{j=1}^{N-1} F_{j, j+1}(\Omega_j^0, \Omega_{j+1}^0)$  (при  $N \geq 2$ ) является значением функции цели, соответствующим оптимальной расстановке  $N$  КА по долготе  $\Omega_j$  при условии, что положение первого и  $N$ -го КА фиксированы. Тогда, учитывая принцип оптимальности Беллмана, имеют место рекуррентные соотношения

$$P_2(\Omega_1^0, \Omega_2^0) = F_{1, 2}(\Omega_1^0, \Omega_2^0), \quad 0 \leq \Omega_1^0 \leq \Omega_2^0 < 2\pi;$$

$$P_N(\Omega_1^0, \Omega_N^0) = \min [P_{N-1}(\Omega_1^0, \Omega_{N-1}^0) + F_{N-1, N}(\Omega_{N-1}^0, \Omega_N^0)], \quad N = 3, 4, \dots, \bar{j} + 1, \tag{7.4.10}$$

$$0 \leq \Omega_1^0 < \Omega_{N-1}^0 < \Omega_N^0,$$

$$\text{где } \Omega_N^0 \begin{cases} < \Omega_1^0 + 2\pi \text{ при } N = \bar{j}, \\ = \Omega_1^0 + 2\pi \text{ при } N = \bar{j} + 1. \end{cases}$$

Из (7.4.10) следует, что решение задачи (7.4.9) в конечном итоге сводится к построению и минимизации функции одной переменной

$$P_{\bar{j}+1}^-(\Omega_1^0, \Omega_1^0 + 2\pi) \text{ по } \Omega_1^0 \in [0, 2\pi].$$

Метод минимизации (7.4.5) при ограничениях (7.4.7) мало отличается от изложенного. Соответствующие рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} P_2(\lambda_1^0, \lambda_2^0) &= F_{1,2}(\lambda_1^0, \lambda_2^0), \lambda_1^{0*} \leq \lambda_1^0 \leq \lambda_1^{0**}; \\ \lambda_2^{0*} &\leq \lambda_2^0 \leq \lambda_2^{0**}; \\ P_N(\lambda_1^0, \lambda_N^0) &= \min[P_{N-1}(\lambda_1^0, \lambda_{N-1}^0) + \\ &+ F_{N+1,N}(\lambda_{N-1}^0, \lambda_N^0)], \quad N = 3, 4, \dots, \bar{j} + 1, \\ \lambda_{N-1}^{0*} &< \lambda_{N-1}^0 < \lambda_{N-1}^{0**}. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Решение завершается минимизацией функции

$$P_{\bar{j}+1}^-(\lambda_1^0, \lambda_N^0) \text{ по } \lambda_1^0 \in [\lambda_1^{0*}, \lambda_1^{0**}].$$

Укрупненная схема комбинированного метода решения задачи орбитального построения приведена на рис. 7.4.

Изложенная схема обладает определенной универсальностью в том смысле, что с ее помощью можно решать достаточно широкий круг задач орбитального построения, позволяющих учитывать влияние орбитальной эволюции, стратегии управления КА, схемы восполнения и т.д. В качестве примера рассмотрим частную задачу определения орбитального построения СС связи [4]. Для орбит этого типа длительность РЗ КА может составлять немногим более 8 ч. По меньшей мере три КА необходимы для обеспечения заданных районов круглосуточной непрерывной связью.

Решение задачи приведем в следующих предположениях [4]:

1) СС состоит из трех однотипных КА; 2) эволюция долготы восходящего узла  $\Omega$  на годовом интервале для каждого КА является функцией начального значения  $\Omega_0$  и изменяется по закону  $\Omega^n = \Omega^0 + \Delta\Omega_n$ , где  $\Delta\Omega$  – приращение за одни сутки,  $\Delta\Omega = \Delta\Omega(\Omega^0)$ ;  $n$  – текущие сутки; 3) параметры КА системы ( $a_j$ ,  $e_j$ ,  $i_j$ ,  $\omega_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) постоянны; 4) продолжительность рабочей зоны каждого КА для всех суток составляет  $\sim 8$  ч.

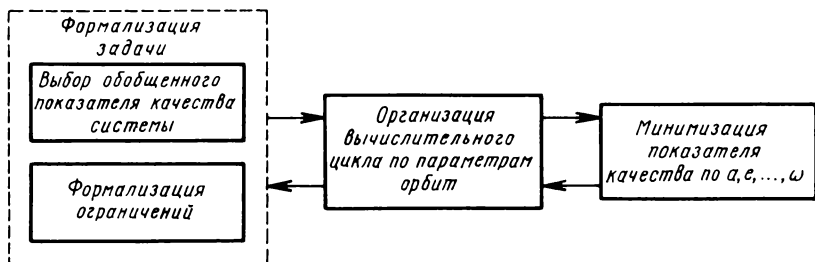


Рис. 7.4. Схема решения задачи орбитального построения

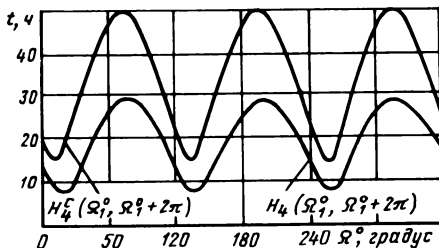


Рис. 7.5. Зависимость временных потерь от долготы восходящего узла первого КА

На рис. 7.5 приведена зависимость минимальной суммарной продолжительности временных потерь  $H(\Omega_1^0, \Omega_1 + 2\pi)$  от  $\Omega_1^0$  — начальной долготы восходящего узла первого КА. Анализ показывает, что  $H(\Omega_1^0, \Omega_1 + 2\pi)$  существенно зависит от значения  $\Omega_1^0$ : Глобальный минимум достигается в районе  $\Omega_1^0 = 15^\circ$ . При этом суммарные потери во времени обслуживания составляют  $\sim 6,5$  ч, что почти в 4 раза меньше потерь, соответствующих  $\Omega_1^0 = 70^\circ$ . Здесь же приведена функция потерь при строго симметричном начальном построении сети КА  $H^c(\Omega_1^0, \Omega_1^0 + 2\pi)$ .

Рассмотрим далее другой подход к решению задачи синтеза с использованием методов нелинейного программирования, известных под названием "методов штрафных функций". Суть подхода заключается в том, что функция, подлежащая минимизации при наличии ограничений (равенств или неравенств), заменяется семейством функций без ограничений, обладающих свойствами:

каждая из функций достаточно быстро возрастает либо при приближении к границе допустимой области, либо при выходе за ее пределы;

в большей части допустимой области, определяемой ограничениями, семейство функций, полученных в результате замены, близко к минимизируемой функции.

Рассмотрим в общем случае схему выбора орбитальной структуры СС (при заранее фиксированном законе управления КА системы). В

этом случае показатель качества системы (7.1.2) является нелинейной функцией орбитальных параметров

$$F = F(\bar{\mathfrak{E}}_j^0, \bar{\mathfrak{E}}_j^B). \quad (7.4.12)$$

Задача синтеза заключается в минимизации этой функции при ограничениях

$$\bar{\mathfrak{E}}_j^0 \in A_0. \quad (7.4.13)$$

Ограничения (7.4.13) могут быть типа неравенств  $A_q$  и равенств  $A_h$ . Изложим кратко схему метода:

минимизировать функцию  $f(x)$  при ограничениях

$$q(\bar{x}) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \bar{x} \in \bar{X}^0.$$

Безусловную функцию без ограничений запишем в виде

$$\Phi[\bar{x}, \alpha(t)] = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) G[q_i(\bar{x})], \quad (7.4.14)$$

где  $t$  – параметр;  $\alpha_i(t)$  – весовые коэффициенты;  $G$  – монотонная функция по  $y (y \equiv q_i(\bar{x}))$ , которая выбирается обычно так, чтобы  $G(y) > 0$  при  $y < 0$  и  $G(y) = 0$  при  $y \geq 0$  или чтобы  $G(y) \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow \infty$ .

Схема строится следующим образом. Выбирается последовательность  $t_k$  таким образом, чтобы  $t_k \geq 0$  и  $t_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Вычисляется минимум  $x_k$  функции  $\Phi[\bar{x}, \alpha(t_k)]$  для  $k = 1, 2, \dots$ . При соответствующих условиях такая точка  $x_k$  существует и является безусловным минимумом функции  $\Phi[\bar{x}, \alpha(t_k)]$ . Как правило, желательно получить  $\lim \bar{x}_k = x^*$ , где  $x^*$  – решение задачи. Обычно получается, что  $f(\bar{x}_k) \rightarrow f^*$ , где  $f^*$  – минимальное значение целевой функции. Отсюда вытекает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_k) G[q_i(\bar{x}_k)] = 0,$$

откуда  $\lim \Phi[\bar{x}_k, \alpha(t_k)] - f(\bar{x}^*) = 0$ , т.е. модифицированная целевая функция сходится к тому же минимуму, что и исходная целевая функция. Преимущество метода состоит в том, что не нужно отдельно рассматривать ограничения, а для вычисления можно применять современные вычислительные методы.

В процессе вычислений, как правило, строится итерационный процесс

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \alpha_k \bar{p}_k, \quad (7.4.15)$$

где  $\bar{p}_k$  – вектор, определяющий направление движения из точки  $\bar{x}_k$ ;

$\alpha_k$  – числовой множитель, величина которого определяет длину шага в направлении  $p_k$ . Процесс (7.4.15) будет построен, если найдутся пути определения вектора  $p_k$  и вычисления  $\alpha_k$  на каждой  $k$ -й итерации.

В градиентных методах направление  $p_k$  выбирают из условия  $\bar{p}_k = -\nabla \Phi(\bar{x})$ , где  $\nabla \Phi(\bar{x})$  – матрица частных производных. Итерационный процесс в этом случае имеет вид

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha \nabla \Phi(\bar{x}). \quad (7.4.16)$$

В работе [17] показано, что для решения задач безусловной минимизации более приемлемым является метод Ньютона. В этом случае движение точки к своему минимуму осуществляется в направлении

$$p_k = -(\nabla^2 \Phi(\bar{x}))^{-1} \nabla \Phi(\bar{x}), \quad (7.4.17)$$

а итерационный процесс для построения последовательности приближений к решению сводится к виду

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k (\nabla^2 \Phi(\bar{x}))^{-1} \nabla \Phi(\bar{x}), \quad (7.4.18)$$

где  $\nabla^2 \Phi(x)$  – матрица вторых частных производных.

Рассмотрим пример применения метода безусловной минимизации к решению задачи орбитального построения для случая, когда требуется минимизировать функцию вида (7.4.12) при ограничениях

$$\bar{\mathfrak{J}}_{\min}^0 \leq (\bar{\mathfrak{J}}_j^0) \leq \bar{\mathfrak{J}}_{\max}^0, \quad (7.4.19)$$

которые целесообразно привести к виду

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \bar{\mathfrak{J}}_j^0 - \bar{\mathfrak{J}}_{\min}^0 \geq 0; \\ q_2 &= \bar{\mathfrak{J}}_{\max}^0 - \bar{\mathfrak{J}}_j^0 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

Составим вспомогательную функцию ( $b$  – конец интервала  $[a, b]$ )

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\mathfrak{E}}, \alpha(t)) &= F(\bar{\mathfrak{J}}_j^0, \bar{\mathfrak{J}}_j^b) - r_s \sum_{m=1}^m f_1(q_1, q_2) - \\ &- h_s \sum_{\alpha=1}^{\alpha} f_2(q_1, q_2), \quad \bar{m} + \bar{\alpha} = \bar{l}. \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

Целесообразно принять

$$f(q_1, q_2) = \ln q_1; \quad f_2(q_1, q_2) = \ln q_2,$$

где  $r_s, h_s$  – весовые коэффициенты. Такое разбиение целесообразно ввиду того, что различная совокупность аргументов по-разному влияет на целевую функцию.



После составления вспомогательной функции можно приступить к вычислению значений элементов орбит  $\bar{\Xi}_j^0$ , минимизирующих функцию  $F(\bar{\Xi}_j^0, \bar{\Xi}_j^0)$ . Схему вычислений можно порекомендовать в следующем виде.

1. Задаются значения  $x_j^0$  ( $x_j^0 \equiv \bar{\Xi}_j^0$ ) при выбранных начальных величинах  $r_s, h_s$ .

2. Определяется безусловный минимум функции  $\Phi$  при выбранном значении  $r_s^0, h_s^0$ .

3. Изменяются значения  $r_s^0, h_s^0$ :

$$r_s = \frac{r_s^0}{k_1}; \quad h_s = \frac{h_s^0}{k_2}; \quad k_1 > 1; \quad k_2 > 1,$$

и для них выбирается безусловный минимум  $\Phi$ . Процесс выбора  $r_s, h_s$  и соответствующих величин  $x_j^0$  продолжается до выполнения условий

$$\Phi_{k+1} - \Phi_k \leq \epsilon_\Phi.$$

Основной объем вычислительных работ при решении задачи состоит в определении  $x_j^0$  при выбранных  $r_s, h_s$ . В основе вычислений лежит соотношение (7.4.18), где  $\alpha_k$  — выбирается так, чтобы минимизировать  $\Phi$  по направлению  $(\nabla^2 \Phi(x))^{-1} \nabla \Phi(x)$ , начиная с точки,  $x_k$ . При  $\alpha_k = 1$  приходим к вычислительной схеме "чистого метода Ньютона".

## 7.5. УПРАВЛЕНИЕ КА ОРБИТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

При рассмотрении процесса управления КА спутниковых систем возникают две задачи: выбор процесса управления аппаратами системы как целостностной структуры и управление отдельными КА.

Первая задача вытекает из общего подхода к синтезу орбитальных структур спутниковых систем. Имеет смысл решать эту задачу, когда имеется достаточно широкий диапазон изменения хотя бы одного из элементов, подлежащих управлению.

Вторая задача имеет место, когда диапазон возможного изменения управляющих элементов орбит достаточно узок и его положение внутри диапазона практически не влияет на показатель качества функционирования системы. Примером такого случая является процесс поддержания трассы стационарного КА в узком диапазоне географических долгот, т.е. задачи второго типа вырождаются в автономное управление каждого КА системы. Эти вопросы рассмотрены в гл. 6. Далее рассмотрим более детально один из возможных подходов к решению задач управления первого типа.

Определение закона управления аппаратами спутниковой системы

осуществляется последовательно. Вначале решается задача выбора идеального процесса управления в предположении отсутствия ограничений на расходы рабочего тела и число включений двигательной установки. Затем закон управления уточняется с учетом имеющих место на практике ограничений.

Рассмотрим вначале определение схемы идеального закона управления. Сведем задачу идеального управления к минимизации функции

$$H(\bar{\mathcal{E}}_1^1, \dots, \bar{\mathcal{E}}_{\bar{j}}^1, \dots, \bar{\mathcal{E}}_1^{\bar{n}}, \dots, \bar{\mathcal{E}}_{\bar{j}}^{\bar{n}}) \quad (7.5.1)$$

при ограничениях

$$\bar{\mathcal{E}}_j^n \in A_{\bar{\mathcal{E}}_j^n}^n, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{j}, \quad n = 1, 2, \dots, \bar{n},$$

где  $\bar{\mathcal{E}}_j^n$  – вектор элементов орбиты  $j$ -го КА системы на  $n$ -м временном цикле после коррекции.

Учитывая, что начальное орбитальное построение в первом приближении уже выбрано (имеется в виду кинематическая структура), можно спрогнозировать эволюцию системы на интервал времени, соответствующий первому временному циклу, и получить вектор  $\bar{\mathcal{E}}_j^1 = 1, 2, \dots, \bar{j}$ . По этим значениям построить области  $A'_{\bar{\mathcal{E}}_j^1}$  и путем решения задачи (7.5.1) для  $n = 1$  найти вектор  $\bar{\mathcal{E}}_j^2, j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ . Рассматривая полученные элементы как начальные, можно аналогично определить вектор  $\bar{\mathcal{E}}_j^3, j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , прогнозируя орбитальные характеристики структуры на второй цикл (принимаясь здесь временные циклы в общем случае отличны от ранее принятых циклов функционирования СС), построить также области  $A''_{\bar{\mathcal{E}}_j^2}$  и, решив задачу прогноза для  $n = 2$ , получить вектор  $\bar{\mathcal{E}}_j^4$ . Процесс можно продолжить для  $n = 3, 4, \dots, \bar{n}$ . Фактически задача (7.5.1) таким образом сводится к последовательности задач орбитального построения, рассматриваемых на отдельных временных циклах (периодах). Полученная последовательность  $\bar{\mathcal{E}}_j^1 - \bar{\mathcal{E}}_j^2, \bar{\mathcal{E}}_j^2 - \bar{\mathcal{E}}_j^3, \dots, \bar{\mathcal{E}}_j^{\bar{n}-1} - \bar{\mathcal{E}}_j^{\bar{n}}$  и определяет искомым закон управления орбитальным движением КА системы. Реализация такого подхода влечет большие вычислительные затраты на ЭВМ. Поэтому целесообразно рассмотреть другой, более рациональный с вычислительной точки зрения подход [4]. Введем некоторые предположения:

продолжительность рабочих зон

$$t_{kj}^n(\bar{\mathcal{E}}_j^n) - t_{nj}^n(\bar{\mathcal{E}}_j^n) \equiv d_j^n \quad (7.5.2)$$

остаётся постоянной после проведения коррекции на  $n$ -м витке;

для каждой пары  $n$  и  $j$  КА известен допустимый диапазон начала рабочих зон  $[t_{nj}^{n*}, t_{nj}^{n**}]$  и изменения величины  $t_{nj}$ , т.е. известны функции

$$t_n^*(\mathcal{E}) \text{ и } t_n^{**}(\mathcal{E}).$$

При таких предположениях задачу выбора идеального процесса управления можно привести к выбору величин  $t_{nj}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$ ;  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , минимизирующих функцию

$$\begin{aligned} H = & [f(t_{n1}^1, t_{n2}^1) + f(t_{n2}^1, t_{n3}^1) + \dots + \\ & + f(t_{nj}^1, t_{n1}^2) + f(t_{n1}^2, t_{n2}^2)] + \\ & + [f(t_{n2}^2, t_{n3}^2) + \dots + f(t_{nj}^2, t_{n1}^3) + \\ & + f(t_{n1}^3, t_{n2}^3) + f(t_{n2}^3, t_{n3}^3)] + \dots + \\ & + [\dots + f(t_{nj}^{\bar{n}}, t_{n1}^{\bar{n}+1})] \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

при ограничениях

$$t_{nj}^{\bar{n}*} \leq t_{nj}^{\bar{n}} \leq t_{nj}^{\bar{n}**}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{j}, \quad (7.5.4)$$

где  $t_{n1}^1 \equiv a$ ,  $t_{n1}^{\bar{n}+1} \equiv b$ ,  $f(t_{nj}^n, t_{nj+1}^n) = \max(0, t_{nj+1}^n - t_{nj}^n - d_j^n)$ .

Процедура решения задачи (7.5.3) во многом аналогична решению задачи (7.5.1). Она также включает последовательность этапов, на каждом из которых решается задача (7.5.3). На первом этапе имеем

$$\begin{aligned} & f(t_{n1}^1, t_{n2}^1) + f(t_{n2}^1, t_{n3}^1) + \dots + \\ & + f(t_{nj}^1, t_{n1}^2) + f(t_{n1}^2, t_{n2}^2) \rightarrow \min; \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

$$t_{nj}^{1*} \leq t_{nj}^1 \leq t_{nj}^{1**}, \quad t_{n2}^2 = t_{n2}^1 + \Delta^1, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{j},$$

здесь  $\Delta^1$  – константа, определяемая прогнозом.

В результате решения можно получить некоторые значения  $\bar{t}_{nj}^1$ ,  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , которым соответствуют значения элементов орбиты, определяемые соотношениями

$$t_{n1}^{2*} \leq t_{n1}^2 \leq t_{n1}^{2**}; \quad (7.5.6)$$

$$t_{nj}^1(\bar{a}_j^1, \bar{e}_j^1, \dots, \bar{\Omega}_j^1) = \bar{t}_{nj}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{j}.$$

Если коррекция однопараметрическая, то скорректированное значение соответствующего элемента определяется однозначно. В противном случае имеет место одно уравнение с  $k$  неизвестными, где  $k > 1$ . Для выбора неизвестных следует ввести дополнительные условия, уточняющие схему коррекции. Полученные значения элементов  $\bar{a}_j^1$ ,  $\bar{e}_j^1$ , ...,  $\bar{\Omega}_j^1$  позволяют осуществить прогноз на второй этап, определить  $t_{nj}^2$ ,  $t_{nj}^{2**}$  и решить задачу идеального управления для второго этапа.

Следовательно, задача выбора идеального закона управления КА

орбитальной структуры может быть сформулирована в следующем общем виде:

минимизировать

$$\bar{J} \sum_{j=0} f(x_j, x_{j+1}). \quad (7.5.7)$$

при ограничениях

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad x_{j+1} = x_j + \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{J},$$

где  $x_0$  – фиксировано,

$$f(x_j, x_{j+1}) = \max(0, x_{j+1} - x_j - d_j).$$

Смысл обозначений очевиден из предыдущего рассмотрения.

Для решения задачи можно воспользоваться рекуррентными соотношениями динамического программирования.

**Построение реального закона коррекции.** В результате решения задачи идеального управления для каждого КА получены вектор-функции  $\hat{\mathcal{E}}_j(\mathcal{E}_{0j}, t)$  в предположении неограниченного запаса топлива на борту каждого КА системы, а следовательно, практически неограниченных управляющих импульсов. Построение реального закона управления предполагает для каждого КА системы учесть ограничения по запасам топлива на борту и по величине управляющих импульсов.

Обозначим элементы орбиты  $j$ -го КА, соответствующие реальному закону коррекции  $\Delta V_j(t)$  через  $\mathcal{E}_j(\mathcal{E}_{0j}, \Delta V_j(t), t)$ . Тогда рассматриваемая задача в дискретной постановке сводится к определению набора  $\Delta V^n$ , удовлетворяющего условиям\*

$$\Delta V^n \in U, \quad n = 0, 1, \dots, \bar{n} - 1; \quad (7.5.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\bar{n}-1} |\Delta V^n| \leq V \quad (7.5.9)$$

и реализующего минимум квадрата расстояния между законами движения

$$\rho_{a,b}^2(\mathcal{E}(\mathcal{E}_0, n), \mathcal{E}(\mathcal{E}_0, \Delta V^n, n))$$

или рабочими зонами

$$\sum_{n=0}^{\bar{n}} \rho([\hat{r}_H^n, \hat{r}_K^n], [t_H^n, t_K^n]). \quad (7.5.10)$$

\* Здесь и далее индекс  $j$  опущен.

Здесь  $U$  – допустимое множество значений корректирующих импульсов;  $V$  – запас бортовой “энергетики”:

Функции  $t_n^n(\Theta)$ ,  $t_k^n(\Theta)$  будем по-прежнему считать известными. Модель движения КА запишем в виде

$$\Theta^{n+1} = f(\Theta^n, \Delta V^n, n), \quad n = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Theta^0 - \text{задано}, \quad (7.5.11)$$

где функция  $f$  характеризует прогноз движения КА на один оборот. Введем в рассмотрение новую переменную

$$V^n \equiv \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta V^k| \quad (7.5.12)$$

и преобразуем ограничение (7.5.9). Получим

$$V^{n+1} = V^n + |\Delta V^n|, \quad (7.5.13)$$

здесь  $V^n \leq V$ . Соотношения (7.5.11), (7.5.13) можно записать в единой форме, если вектор  $\Theta^{n+1}$  дополнить еще одной компонентой  $V^{n+1}$  и обозначить  $\|\Theta^{n+1}, V^{n+1}\| \equiv \bar{\Theta}^{n+1}$ . В общем случае вектор  $\bar{\Theta}^{n+1}$  – семи-мерный:  $\bar{\Theta}^{n+1} \equiv \|\Theta_1^{n+1}, \Theta_2^{n+1}, \dots, \Theta_7^{n+1}\|$ . Полагая

$$\bar{f}_i(\Theta^n, n) = \begin{cases} f_i(\Theta^n, V^n, n), & i = 1, 2, \dots, 6, \\ \Theta_7^n + |V^n| & \text{при } i = 7. \end{cases}$$

вместо (7.5.11) получим

$$\bar{\Theta}^{n+1} = \bar{f}(\bar{\Theta}^n, n), \quad \bar{\Theta}_7^n \leq V, \quad (7.5.14)$$

где  $f = \|f_1, f_2, \dots, f_7\|$ . Обозначим  $\rho^2([\hat{t}_n^n, \hat{t}_k^n][t_n^n, t_k^n]) \equiv f_0(\hat{\Theta}^n, \bar{\Theta}^n, n)$ , задачу выбора реального закона управления КА можно в итоге записать в виде

$$\min_n \sum f_0(\hat{\Theta}^n, \bar{\Theta}^n, n) \rightarrow \min \quad (7.5.15)$$

при ограничениях (7.5.14).

Метод динамического программирования, который рекомендуется для решения сформулированной задачи [4], сводится к следующим уравнениям Беллмана:

$$\begin{aligned} B(m, \bar{\Theta}) &= \min [f_0(\hat{\Theta}^m, \bar{\Theta}, m) + \\ &+ B(m+1, \bar{f}(\bar{\Theta}, m)], \quad \Delta V \in U; \\ \bar{f}(\bar{\Theta}, \Delta V, m) &\in F(m+1), \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

где  $B(m, \bar{\Theta}) = \min \sum_{n=m}^n f_0(\hat{\Theta}^n, \bar{\Theta}^n, n)$ ;

$$\Delta V^n \in U; \bar{\mathfrak{E}}^m = \bar{\mathfrak{E}}, \mathfrak{E}_i^n \leq V; n = m, m + 1, \dots, \bar{n};$$

$F(m)$  – множество точек  $\bar{\mathfrak{E}}$ , из которых допустимые траектории  $\bar{\mathfrak{E}}^n$ ,  $\mathfrak{E}^m = \bar{\mathfrak{E}}$  попадают в область  $\mathfrak{E}_i^n \leq V$ . Реализация соотношений (7.5.16) для семимерного вектора  $\bar{\mathfrak{E}}$  практически невозможна. Поэтому необходимо использовать те или иные меры понижения размерности пространства состояний, ограничиваясь получением приближенного решения. Ниже рассмотрим процедуру решения рассматриваемой задачи, для которой размерность пространства состояний практически безразлична, но существенно количество точек  $\Delta V$ , аппроксимирующих допустимое множество  $U$  и число этапов  $\bar{n}$ . Эта процедура известна в теории расписаний под названием метода последовательного анализа вариантов. Процесс реализации можно наглядно представить в виде дерева вариантов, состоящих из  $\bar{n} + 1$  ярусов (рис. 7.6). Нулевой ярус содержит одну вершину, называемую корнем дерева. Вершина соответствует исходному состоянию системы:  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0$ . Первый ярус состоит из вершин, соответствующих состояниям  $\mathfrak{E}_{i_1}^1 = f(\mathfrak{E}^0, \Delta V_{i_1}, 0)$ , где  $\{\Delta V_{i_1}\}$  – набор точек, аппроксимирующих множество  $U$ . Вершина  $\mathfrak{E}_i^1$ ,  $i_1 = 1, 2, \dots, \bar{i}$ , в свою очередь, порождает группу вершин второго яруса  $n = 2$ , соответствующих состояниям

$$\mathfrak{E}_{i_1 i_2}^2 = f(\mathfrak{E}_i^1, \Delta V_{i_2}, 1),$$

где  $\{\Delta V_{i_2}\} = \{\Delta V_{i_1}\}$  и т.д. (см. рис. 7.6).

Каждой вершине ставится в соответствие (кроме вектора элементов  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ ) значение функции цели  $f_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ , соответствующее стратегии коррекции  $\Delta V_{i_1}^1, \Delta V_{i_2}^2, \dots, \Delta V_{i_n}^n$ , и остающийся запас "энергетики"

$$V_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n = V - \sum_{k=1}^n |\Delta V_{i_k}^k|.$$

Следует учесть, что далее две вершины будем считать различными, если не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\mathfrak{E}_{i'_1, i'_2, \dots, i'_n}^n = \mathfrak{E}_{i''_1, i''_2, \dots, i''_n}^n; \quad (7.5.17)$$

$$V_{i'_1, i'_2, \dots, i'_n}^n = V_{i''_1, i''_2, \dots, i''_n}^n; \quad (7.5.18)$$

$$f_{i'_1, i'_2, \dots, i'_n}^n = f_{i''_1, i''_2, \dots, i''_n}^n. \quad (7.5.19)$$

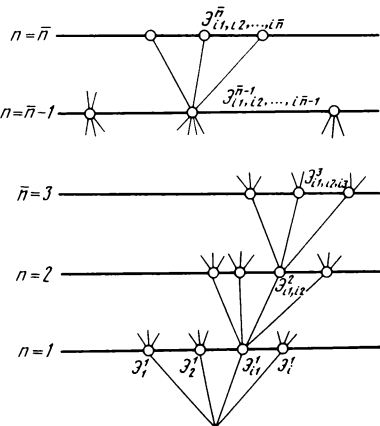


Рис. 7.6. Дерево вариантов решения

Случай, когда все равенства выполняются, рассмотрен ниже. В силу этого условия каждая вершина соединяется с корнем дерева только одним путем. Если  $V_{i_1 i_2 \dots i_n}^n = 0$ , то дальнейшее определение варианта осуществляется тривиально:

$$\Delta V_{i_n+1}^n = \dots = \Delta V_{i_n}^n = 0.$$

Таким образом, каждому пути, соединяющему корень дерева с вершиной  $n$ -го яруса, соответствует допустимое решение. Количество вершин яруса зависит от его номера. Если  $i_n \in \{1, 2, \dots, i\}$  при всех  $n$ , то в общем случае количество вершин  $n$ -го яруса составляет  $i^n$ . Это означает, что построение и хранение в памяти ЭВМ всего дерева вариантов становится невозможным уже при небольших значениях  $n$  и  $i$ . Однако процедура решения, которую изложим ниже, требует одновременного хранения в каждом ярусе не более  $i$  вершин, т.е. всего не более  $n \cdot i$  вершин.

Метод последовательного анализа вариантов включает три составные части. Первая из них определяет способ поэтапного конструирования вариантов и изложена выше. Вторая определяет множество сравнимых "состояний", в которые приводят конструируемые варианты. Третья формулирует правила доминирования для оценки частных вариантов, построенных к рассматриваемому этапу.

Третью часть рассмотрим наиболее подробно. Что же касается второй, то будем считать два состояния сравнимыми, если им соответствуют вершины одного яруса. Первое правило доминирования (утверждающее, что частичный вариант, порождающий вершину  $\mathcal{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ , доминирует над вариантом  $\mathcal{E}_{i_1', i_2', \dots, i_n'}$ ), если выполняются условия

$$\mathcal{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n \in [\mathcal{E}_{i_1', i_2', \dots, i_n'}^n, \hat{\mathcal{E}}^n]$$

$$\text{или } \mathcal{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n \in [\hat{\mathcal{E}}^n, \mathcal{E}_{i_1', i_2', \dots, i_n'}^n]; \quad (7.5.20)$$

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n \leq f_{i_1', i_2', \dots, i_n'}^n; \quad (7.5.21)$$

$$V_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n \geq V_{i_1', i_2', \dots, i_n'}^n. \quad (7.5.22)$$

Второе правило связано с построением допустимого решения рассматриваемой задачи. Из множества вершин первого яруса выберем вершину  $\mathcal{E}_{i_1}^1$ , обладающую наименьшим значением  $f_{i_1}^1$ . Этой вершине соответствует некоторое множество вершин второго яруса, из которого выберем также вершину, обладающую наименьшим значением функции цели. Пусть этой вершиной оказалась  $\mathcal{E}_{i_1 i_2}^2$ . Продолжая этот процесс,

построим подмножество вершин  $n$ -го яруса. Наилучшая из их числа определит некоторое допустимое решение, которое может и не быть строго оптимальным. Далее возвращаемся вновь к  $(\bar{n} - 1)$ -му ярусу, исключаем вершину  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_{\bar{n}-1}}^{\bar{n}-1}$  и исследуем остальные аналогично вышеизложенному. Далее возвращаемся к подмножеству вершин  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_{\bar{n}-3}}^{\bar{n}-2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, i \neq i_{\bar{n}-2}$ , выбираем наилучшую вершину из оставшихся и переходим к  $(\bar{n} - 1)$ -му и  $\bar{n}$ -му ярусам и т.д. Каждый раз в памяти сохраняется лучшая из полученных стратегий, а множество вершин дерева монотонно сокращается.

Итак, пусть значение функции цели наилучшей из полученных стратегий есть  $f_0^*$ . Рассмотрим произвольную вершину дерева  $\mathfrak{E}_{i_1 i_2 \dots i_n}^n$ . Ей соответствует класс возможных стратегий коррекций, характеризующихся на первых  $n$  этапах значениями импульсов  $\Delta V_{i_1}^1, \Delta V_{i_2}^2, \dots, \Delta V_{i_n}^n$  и значениями функции цели  $\sum_{k=0}^n f(\hat{\mathfrak{E}}^k, \bar{\mathfrak{E}}^k, k)$ . Построим для этого класса оценку снизу оптимального значения функции цели  $f_{0i_1, i_2, \dots, i_n}$ . Очевидно,

$$f_{0i_1, i_2, \dots, i_n}^* = \sum_{k=0}^n f_0(\hat{\mathfrak{E}}^k, \bar{\mathfrak{E}}^k, k) + \Delta f_{0i_1, i_2, \dots, i_n}^*,$$

а в качестве  $\Delta f_{0, i_1, i_2, \dots, i_n}^*$  можно принять значение, соответствующее  $n + 1, n + 2, \dots, n$ -му этапам и получающееся в результате поэтапной минимизации функций  $f_0(\mathfrak{E}^l, \bar{\mathfrak{E}}^l, l)$ ,  $l \geq n + 1$ , при ограничениях

$$\mathfrak{E}^{l+1} = f(\mathfrak{E}^l, \Delta V^l, l), \Delta V \in U,$$

где в качестве исходного значения вектора  $\mathfrak{E}$  принимается вектор  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ .

Второе правило доминирования (точнее, правило оценки бесперспективности частичного решения, соответствующего вершине  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ ) состоит в проверке неравенства

$$f_{0i_1, i_2, \dots, i_n}^* \geq f_0^*.$$

Если оно выполняется, то вершина  $\mathfrak{E}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$  из дальнейшего рассмотрения исключается.

Изложенная процедура последовательного анализа вариантов дает первое допустимое решение ценою сравнительно небольших затрат машинного времени. В дальнейшем решение может быть прекращено в любой момент времени. При этом имеет место, по крайней мере, при-



ближенное решение, в том числе оно может быть и оптимальным. Следует вместе с тем иметь в виду, что доказательство оптимальности, как правило, требует значительных затрат времени.

#### 7.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СХЕМЫ ВОСПОЛНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В процессе активного функционирования СС на практике возникает необходимость решения задачи восполнения орбитальной структуры СС вследствие выхода из строя (отказа) одного или нескольких КА системы либо вследствие значительной эволюции орбит отдельных КА, превышающей допустимые пределы и нарушающей (не позволяющей) выполнение КА целевых задач. В этом случае нарушаются ограничения вида (1.5.5). В перечисленных случаях необходимо осуществлять восполнение орбитальной структуры СС. Целесообразно рассмотреть два возможных случая.

1. Отказ КА произошел в момент времени  $t_{от}$ , существенно меньший заданного времени активного функционирования СС  $t_{сущ}$ , и за интервал  $(t_{от} - t_0)$  для отказавшего КА и других КА системы элементы орбит несущественно ушли от элементов "средней кинематической системы". В этом случае восполняющий КА можно выводить с орбитальными параметрами  $\bar{\mathfrak{E}}_B^0(t_{вос})$  отказавшего КА  $\bar{\mathfrak{E}}_{от}^0(t_{вос})$ , т.е. имеет место

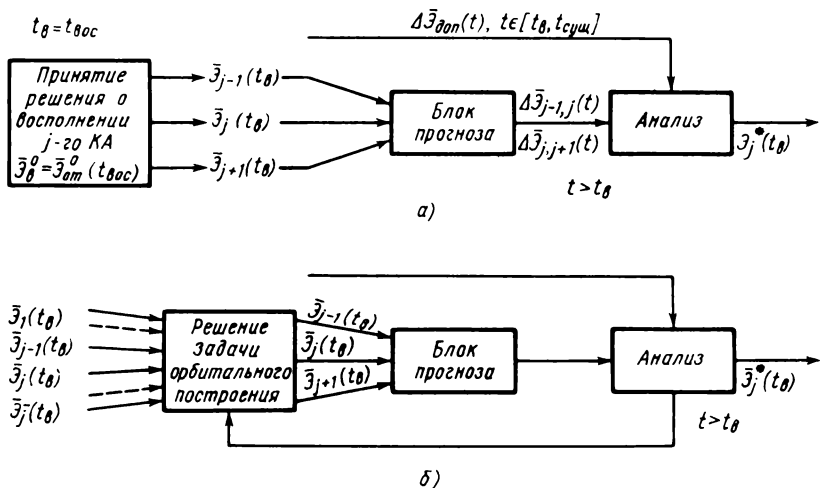


Рис. 7.7. Схемы восполнения

поддержание соотношения  $\bar{\mathfrak{E}}_B^0(t_{\text{вос}}) = \bar{\mathfrak{E}}_{\text{от}}(t_{\text{вос}})$ . На практике целесообразно проверить динамику орбитальных параметров всех КА системы от момента  $t_{\text{вос}}$  до  $t_{\text{суш}} = b$  и оценить относительное положение восполняемого и соседних по РЗ КА во времени. Схема принятия решения для первого случая приведена на рис. 7.7,а.

2. Отказ КА произошел за интервал времени  $(t_{\text{от}} - t_0)$ , соизмеримый с интервалом  $(b - a)$ , что может привести к существенной эволюции орбитальных параметров всех КА, в том числе и отказавшего аппарата. В этом случае задачу выбора начальных элементов одного или нескольких  $m$  орбит КА ( $m < \bar{j}$ ) нельзя решить в отрыве от орбитальных характеристик  $\bar{\mathfrak{E}}_{k'}(k' = j - m)k'$ , активно функционирующих КА системы. Фактически задача восполнения сводится к решению задачи определения орбитального построения, и в общем виде она может быть записана

$$\text{минимизировать } H' = \sum_{n'=1}^{\bar{n}'} H^{\bar{n}'}(\bar{\mathfrak{E}}_{k'}^{t_{\text{от}}}, \bar{\mathfrak{E}}_m^{t_{\text{от}}}, \bar{V}_{k'}, \bar{V}_m) \quad (7.6.1)$$

при ограничениях  $\bar{\mathfrak{E}}_m^{t_{\text{от}}} \in A_3$ , где  $\bar{\mathfrak{E}}_{k'}$ ,  $\bar{\mathfrak{E}}_m$  — соответственно элементы орбит  $k'$  неотказавших и  $m$  отказавших КА;  $\bar{n}'$  — количество временных циклов на интервале  $[t_{\text{от}}, b]$ .

В случае применения частных критериев вида (7.1.2) подстановка задачи существенно упрощается и может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \text{минимизировать } F = & \sum_{l=1}^{\bar{l}} f_1'(\bar{\mathfrak{E}}_{lm}^b - \bar{\mathfrak{E}}_l^b) + \\ & + \sum_{k=1}^{\bar{k}} f_2(\bar{\mathfrak{E}}_{km}^b - \bar{\mathfrak{E}}_{km}^{t_{\text{от}}}) \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

при ограничениях вида (1.5), где  $l, k$  — обозначения, аналогичные приведенным в разд. 7.1. В (7.6.2)  $\bar{\mathfrak{E}}_l^b$  — среднее значение элементов орбит для моментов времени  $t_B$ ;  $\bar{\mathfrak{E}}_{km}^{t_{\text{от}}}$  — номинальное значение элементов  $m$  орбит для момента  $t_B$ . Как правило,  $\bar{\mathfrak{E}}_m^{t_{\text{от}}} = \bar{\mathfrak{E}}^0$ . Решение задач (7.6.1) и (7.6.2) целесообразно проводить методами, рекомендованными в разд. 7.4. Схема определения параметров, восполняемых КА в рассматриваемом случае, приведена на рис. 7.7,б.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица П1.1

Коэффициенты солнечных членов, входящих в долготу  $\lambda_{\Pi}$

№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$		№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$		
		$l'FD$				$l'FD$		
2	+13,90	0	0	0	+4	65	+0,56	-1
3	+2369,91				+2	69	+1,06	+3
5	+1,98	+1	0	0	+4	70	+36,12	0
6	+191,95				+2	71	-13,19	-2
7	+22639,50				0	72	-1,19	-4
8	-4586,46				-2	73	-0,29	-6
9	-38,43	+1	0	0	-4	76	-0,29	+2
10	-0,39				-6	77	-7,65	0
13	-0,29	0	+1	0	+4	78	-8,63	-2
14	-24,42				+2	79	-2,74	-4
15	-668,15				0	83	+1,18	+2
16	-165,14				-2	84	+9,70	0
17	-1,88	0	+1	0	-4	85	-2,49	-2
20	+0,40	0	0	0	+3	86	+0,36	-4
21	-125,15				+1	89	-11,17	+1
23	+0,21	+2	0	0	+4	90	-7,41	-2
24	+14,39				+2	91	-0,31	-4
25	+769,02				0	94	+0,75	+1
26	-211,66				-2	96	+2,53	+1
27	-30,77				-4	99	+0,34	0
28	-0,57				-6	102	-0,99	+1
31	-2,92	+1	+1	0	+2	103	-45,10	0
32	-109,67				0	104	-0,18	-2
33	-205,96				-2	105	-0,30	-4
34	-4,39				-4	108	-6,38	+1
38	+0,28	+1	-1	0	+4	109	+39,53	0
39	+14,58	+1	-1	0	+2	110	+9,37	-2
40	+147,69				0	111	+0,20	-4
41	+28,48				-2	115	+0,42	0
42	+0,64				-4	116	-2,15	+2
45	-0,19	0	+2	0	+2	118	-1,44	0
46	-7,49				0	120	+0,38	-2
47	-8,10				-2	123	-0,59	+2
48	-0,15				-4	124	+1,75	0
52	-5,74	0	0	+2	+2	125	+1,22	-1
53	-411,61				0	129	+1,27	-3
54	-55,17				-2	130	+0,14	+1
58	-8,47	+1	0	0	+1	131	+0,23	-4
59	+18,61				-1	135	-1,09	-3
60	+3,22				-3	136	-0,28	+1
63	+0,15	0	+1	0	+3	143	+0,26	-3
64	+18,02				+1	144	+0,58	+1

Таблица П1.2

Значения солнечных членов, входящих только в широту  $\beta$

№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$		№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$	
		$l' F D$				$l' F D$	
391	+1,19	0	0 +1 +4	445	+2,41	-2	0 +1 +4
392	+117,26		+2	446	-1,62		+2
393	+18461,48		0	447	-31,76		0
394	-623,66		-2	448	-2,15		-2
395	-3,68		-4	452	-0,24	+1	+1 +1 +2
399	+15,12	+1	0 +1 +2	453	-5,33		0
400	+1010,18		0	454	-7,46		-2
401	-166,58		-2	455	-0,60		-4
402	-6758		-4	458	+0,34	-1	-1 +1 +4
406	+3,00	-1	0 +1 +4	459	+8,90		+2
407	+199,48		+2	460	+5,10		0
408	-999,70		0	461	+0,83		-2
409	-33,36		-2	464	+1,14	+1	-1 +1 +2
410	-0,48		-4	465	+6,76		0
413	-1727	0	+1 +1 +2	466	+0,80		-2
414	-6,49		0	471	-1,32	-1	+1 +1 +2
415	-29,69		-2	472	-5,66		0
416	-0,42		-4	473	-1,77		-2
420	+8,00	0	-1 +1 +1	478	-1,10	0	+2 +1 -2
421	4,86		0	481	+0,39	+1	0 +1 +1
422	+12,14		-2	486	-0,67	+1	0 +1 +1
426	-5,36	0	0 +1 +1	487	+0,43		-1
427	+4,80		-1	488	+0,31		-3
428	+0,35		-3	493	+0,59	-1	0 +1 -1
432	-6,30	0	0 +3 0	496	+0,80	0	+1 +1 +1
433	-2,18		-2	500	-0,81	0	-1 +1 -1
437	+1,52	+2	0 +1 +2	503	-1,02	+1	0 +3 0
438	+61,91		0	504	0,33		-2
439	15,56	+2	0 +1 -2	508	-0,24	-1	0 +3 +2
440	-0,64		-4	509	-2,81		0

Таблица П1.3

Значения солнечных членов, входящих в  $\sin P$

№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$		№ пор. пор.	Коэффициент $a_n, \dots$	$ijk m$	
		$l' F D$				$l' F D$	
737	+0,261	0	0 0 +4	742	+3,086		+2
738	+28,233		+2	743	+186,540		0
739	+3422,700		0	744	+34,312		-2
741	+0,043	+1	0 0 +4	745	+0,601		-4

Продолжение табл. П1.3

№ пор. пор.	Коэффициент $a_n \dots$	$ijk m$		№ пор. пор.	Коэффициент $a_n \dots$	$ijk m$		
		$l' F D$				$l' F D$		
749	-0,300	0	+1	0	+2	772	-0,226	-2
750	-0,400					777	+0,092	0
751	+1,918					781	-0,105	0
752	+0,034					784	-0,109	+1
755	-0,978	0	0	0	+1	786	-0,039	-3
757	+0,238	+2	0	0	+2	789	+0,149	0
758	+10,166					794	+0,622	+3
759	-0,304					795	-0,119	-2
760	+0,372					800	-0,104	0
764	-0,048	+1	+1	0	+2	806	+0,127	+2
765	-0,949					811	+0,048	+1
766	+1,444	+1	+1	0	-2	823	-0,83	+1
767	+0,067					827	-0,048	+1
770	+0,230	+1	-1	0	+2	828	-0,714	0
771	+1,153					849	+0,040	+4

Таблица П1.4

Значения планетных членов, входящих в долготу

№ по пор.	Коэффициент $k_i \dots$	$a_i$	$b_i$
917	0,82	0,32480	-0,0017125594
918	0,31	0,14905	-0,0034251187
932	0,35	0,68266	-0,0006873156
933	0,18	0,00413	-0,0023998750
953	0,15	0,14732	+0,0345790863
1028	0,66	0,65162	+0,0365724168
1030	0,14	0,47642	+0,0348598574
1033	0,16	0,27453	+0,0280096200
1103	0,64	0,88098	-0,0025069941
1104	0,19	0,76752	-0,0050139882
1109	0,16	0,71446	-0,0022761852
1118	0,14	0,44098	+0,0387986398
1119	0,16	0,70405	+0,0337846516
1120	0,19	0,09114	+0,0312776574
1139	0,17	0,82869	+0,0652193903
1156	1,14	0,85823	+0,0364487270
1158	0,21	0,0059	+0,0289277446
1167	0,44	0,71892	+0,0362179180
1200	0,24	0,96484	-0,0001570813
1201	0,28	0,60359	+0,0000737277
1210	0,20	0,57862	-0,0025643121
1214	0,33	0,97639	+0,0001734910

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Параметры гравитационного поля Земли [17].

Средний экваториальный радиус Земли

$$r_3 = 6378,140 \text{ км.}$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 = 0,7292115085 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с.}$$

Коэффициент полярного сжатия Земли

$$\epsilon = 1/298,256.$$

Параметр, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли

$$\mu = 398601,3 \text{ км}^3/\text{см}^2.$$

Зональные коэффициенты гравитационного поля Земли

$$\bar{C}_{l0} = \frac{C_{l0}}{\sqrt{2l+1}}$$

l	$\bar{C}_{l0}$		l	$\bar{C}_{l0}$	
	Значение	Порядок		Значение	Порядок
2	-4,84170	-04	14	-1,94980	-08
3	9,60408	-07	15	-1,88586	-08
4	5,39333	-07	16	-5,91864	-08
5	6,87446	-08	17	3,71868	-08
6	-1,53097	-07	18	1,67687	-08
7	9,08860	-08	19	-1,58527	-08
8	4,97198	-08	20	1,85847	-08
9	3,53300	-08	21	1,26574	-08
10	5,17176	-08	22	-1,37146	-08
11	-6,50565	-08	23	-2,11504	-08
12	3,84000	-08	24	1,59029	-08
13	6,52406	-08	36	-2,32912	-08

Тессеральные коэффициенты гравитационного поля Земли [17]

$$\left\| \begin{matrix} \bar{C}_{lk} \\ d_{lk} \end{matrix} \right\| = \sqrt{\frac{\delta_k (l+k)!}{2(2l+1)(l-k)!}} \left\| \begin{matrix} C_{lk} \\ d_{lk} \end{matrix} \right\|, \delta_k = \begin{cases} 2, & \text{при } k=0 \\ 1, & \text{при } k>0 \end{cases}$$

$l$	$k$	$\bar{C}_{lk}$		$d_{lk}$	
		значения	порядок	значения	порядок
2	2	2,3799	-06	-1,3656	-06
3	1	1,9977	-06	2,2337	-07
	2	7,7830	-07	-7,5519	-07
4	3	4,9011	-07	1,5283	-06
	1	-5,1748	-07	-4,8140	-07
	2	3,4296	-07	6,7174	-07
5	3	1,0390	-06	-1,1923	-07
	4	-1,0512	-07	3,5661	-07
	1	-5,3667	-08	-7,9973	-08
	2	5,9869	-07	-3,9910	-07
6	3	-5,8429	-07	-1,6338	-07
	4	-1,1583	-07	-4,5393	-08
	5	1,3956	-07	-8,6841	-07
	1	-7,2166	-08	1,7756	-08
	2	2,4670	-08	-4,0654	-07
7	3	4,4139	-09	2,9055	-08
	4	-1,0003	-07	-3,0297	-07
	5	-1,3504	-07	-6,0964	-07
	6	-2,9136	-08	-2,6327	-07
	1	2,3532	-07	5,5634	-08
	2	2,0425	-07	1,7321	-07
8	3	2,1994	-07	-3,4644	-07
	4	-2,8617	-07	-2,7738	-07
	5	3,4727	-08	8,7014	-08
	6	-2,7496	-07	8,5865	-08
	7	-2,4856	-08	-8,8968	-09
	1	1,0946	-08	4,8429	-08
	2	1,1084	-07	1,0359	-07
8	3	-8,8578	-08	-5,0715	-08
	4	-2,2315	-07	2,6511	-07
	5	1,5318	-07	8,1158	-08
	6	-9,7542	-08	2,8082	-07
	7	2,7542	-07	2,4592	-07
	8	1,6967	-07	9,3261	-08

Уравнения движения космических аппаратов

1. Уравнения движения с истинной аномалией, где в качестве независимой переменной используется параметр  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\vartheta} &= \frac{2r^3\gamma}{\mu} \tilde{T}; \\ \frac{de}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\mu} \left[ \tilde{S}\sin\vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\tilde{T}\cos\vartheta + e\frac{r}{p}\tilde{T} \right]; \\ \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\mu e} \left[ -\tilde{S}\cos\vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin\vartheta - e\frac{r}{p}\tilde{W}\operatorname{ctg}i\sin u \right]; \\ \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= \frac{r^3\gamma}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}; \\ \frac{di}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\mu p} \cos u \tilde{W}; \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\sqrt{\rho\mu}}; \end{aligned} \tag{П.3.1}$$

где  $\gamma = \left[1 + \frac{r^2}{\mu e}\tilde{S}\cos\vartheta - \frac{r^2}{\mu e}\left(1 - \frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin\vartheta\right]^{-1}$ ;

$\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$  – проекции возмущающего ускорения.

2. Уравнения для описания КА на стационарных орбитах в сферических координатах

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\ddot{\varphi} - r(\omega_3 + \dot{\lambda})^2 \cos^2\varphi &= \frac{\partial U}{\partial r}; \\ \frac{t}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r^2(\omega_3 + \dot{\lambda})^2 \sin\varphi\cos\varphi &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \\ \frac{d}{dt}[r^2(\omega_3 + \dot{\lambda})\cos^2\varphi] &= \frac{\partial U}{\partial \lambda}. \end{aligned} \tag{П.3.2}$$

Здесь  $r, \varphi, \lambda$  – соответственно радиус, широта и долгота КА;  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли.



Прямоугольные координаты КА в гринвичской подвижной системе координат связаны со сферическими соотношениями

$$\begin{aligned} X_0 &= r \cos \varphi \cos \lambda; \\ Y_0 &= r \cos \varphi \sin \lambda; \\ Z_0 &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П3.3})$$

3. Для оценки эволюции орбит на сравнительно коротких временных интервалах (не свыше месяца) применяют уравнения движения КА в геоцентрической системе координат  $OX_0 Y_0 Z_0$ . Эти уравнения получены различными авторами с помощью обобщенной функции Лагранжа [22] и для потенциала Земли, задаваемого, например, с учетом гармоник с коэффициентами  $C_{20}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{40}$ ,  $C_{22}$ ,  $d_{22}$ , и имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{X}_G &= 2\omega_3 \dot{Y} + \omega_3 X + \frac{\mu}{r^3} X \left\{ -1 + \frac{3}{2} \frac{r_3}{r^2} \times \right. \\ &\times [C_{20}(1 - 5 \frac{Z^2}{r^2}) + \frac{5}{3} \frac{r_3 C_{30}}{r^2} Z(3 - 7(\frac{Z}{r})^2) + \\ &+ \frac{5}{4} \frac{r_3^2 C_{40}}{r^2} (14 \frac{Z^2}{r^2} - 21 \frac{Z^4}{r^4} - 1)] + \frac{6r_3^2}{r^4} \times \\ &\times [C_{22}(r^2 - \frac{5}{2} X^2 + \frac{3}{4} Y^2) + d_{22} \frac{Y}{X} (r^2 - 5X^2)] \left. \right\}, \\ \ddot{Y}_G &= -2\omega_3 \dot{X} + \omega_3^2 Y + \frac{\mu}{r^3} Y \left\{ -1 + \frac{r_3^2}{r^2} \times \right. \\ &\times [ \frac{3}{2} C_{20}(1 - 5 \frac{Z^2}{r^2}) + \frac{5}{2} \frac{r_3 C_{30}}{r^2} Z(3 - 7 \frac{Z^2}{r^2}) + \\ &+ \frac{15}{8} \frac{r_3^2 C_{40}}{r^2} (14 \frac{Z^2}{r^2} - 21 \frac{Z^4}{r^4} - 1)] + \frac{6r_3^2}{r^4} [C_{22}(-r^2 - \\ &- \frac{5}{2} X^2 + \frac{5}{2} Y^2) + d_{22} \frac{X}{Y} (r^2 - 5Y^2)] \left. \right\}; \\ \ddot{Z}_G &= \frac{\mu}{r^3} Z \left\{ -1 + \frac{3}{2} \frac{r_3^2 C_{20}}{r^2} (3 - 5 \frac{Z^2}{r^2}) \frac{1}{2} \times \right. \\ &\times C_{30} \frac{r_3^3}{r^2} (30 \frac{Z}{r^2} - 35 \frac{Z^3}{r^4} - \frac{3}{Z}) + \frac{5}{8} C_{40} \frac{r_0}{r_4} \times \\ &\times (70 \frac{Z^2}{r^2} - 15 - 63 \frac{Z^4}{r^4} - 15 \frac{r_3^2}{r_3} [C_{22} \times (X^2 - Y^2) + 2d_{22} XY]) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П3.4})$$

Эти уравнения могут быть дополнены возмущающими ускорениями от притяжения внешних тел и торможения в атмосфере

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \ddot{X}_G + \sum_{k=1}^2 \left( \frac{X_k - X}{r_k^3 k_{KA}} - \frac{X_k}{r_k^3} \right) - k_6 \rho V \dot{X}; \\ \ddot{Y} &= \ddot{Y}_G + \sum_{k=1}^2 \left( \frac{Y_k + Y}{r_k^3 k_{KA}} - \frac{Y_k}{r_k^3} \right) - k_6 \rho V \dot{Y}; \\ \ddot{Z} &= \ddot{Z}_G + \sum_{k=1}^2 \left( \frac{Z_k - Z}{r_k^3 k_{KA}} - \frac{Z_k}{r_k^3} \right) - k_6 \rho V \dot{Z}, \end{aligned} \tag{П3.5}$$

где  $k$  – индекс возмущающего тела (1 – Луна, 2 – Солнце);

$$r_{kKA} = \sqrt{(X_k - X)^2 + (Y_k - Y)^2 + (Z_k - Z)^2};$$

$r_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}$  – радиус  $k$ -го возмущающего тела;  $k_6$  – баллистический коэффициент КА;  $\rho$  – плотность атмосферы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 4

*Возмущения для элементов орбит, обусловленные отклонениями гравитационного поля Земли от центрального*

Выражения для возмущений орбитальных элементов на интервале  $[\varphi_0, \varphi]$  можно получить, подставив выражение возмущающей функции (4.1.9) в уравнения движения [17]

$$\begin{aligned} \delta a(\varphi)_{lk} &= 2a \left( \frac{r_\ominus}{a} \right)^l \sum_{p=0}^l F_{lkp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \times \\ &\times (l - 2p + q) J_{lkpq}^{(1)}; \end{aligned} \tag{П4.1}$$

$$\begin{aligned} \delta e(\varphi)_{lk} &= \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e} \left( \frac{r_\ominus}{a} \right)^l \sum_{p=0}^l F_{lkp}(i) \times \\ &\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) [(1 - e^2)^{1/2} (l - 2p + q) - (l - 2p)] J_{lkpq}^{(1)}; \end{aligned} \tag{П4.2}$$

$$\delta i(\varphi)_{lk} = \frac{\operatorname{cosec} i}{(1 - e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{lkp}(i) \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) [(e - 2p)\cos i - k] I_{lkpq}^{(1)}; \quad (\text{П4.3})$$

$$\delta \Omega(\varphi)_{lk} = \frac{\operatorname{cosec} i}{(1 + e^2)^{1/2}} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \frac{dF_{lkp}(i)}{di} \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) I_{lkpq}^2; \quad (\text{П4.4})$$

$$\delta \omega(\varphi)_{lk} = (1 - e^2)^{1/2} \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{e} F_{lkp}(i) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ctg} i}{1 - e^2} \frac{dF_{lkp}(i)}{di} G_{lpq}(e) \right] I_{lkpq}^{(2)}. \quad (\text{П4.5})$$

Интегралы  $I_{lkpq}^{(1)}$  и  $I_{lkpq}^{(2)}$  определяются следующим образом:

$$I_{lkpq}^{(1)} = \frac{1}{n} \int_{t_0}^t \frac{dS_{lkpq}(\varphi)}{d\varphi} dt = \\ = \frac{1}{\gamma_{lkpq}} [S_{lkpq}(\varphi) - S_{lkpq}(\varphi_0)]; \quad (\text{П4.6})$$

$$I_{lkpq}^{(2)} = n \int_{t_0}^t S_{lkpq}(\varphi) dt = \begin{cases} C_{lk}(\sin\varphi - \sin\varphi_0) - d_{lk}(\cos\varphi\cos\varphi_0), \\ \quad (l - k) - \text{четное;} \\ -C_{lk}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) - d_{lk}(\sin\varphi - \sin\varphi_0), \\ \quad (l - k) - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (\text{П4.7})$$

Аргумент  $\varphi$  определяется выражением (4.1.1).

Все возмущения (П4.1) ... (П4.5) являются периодическими функциями и имеют порядок параметров  $C_{lk}$ ,  $d_{lk}$ , т.е.  $10^{-6}$ . Возмущения  $\delta\omega(\varphi)_{lk}$  имеют особенность при малых эксцентриситетах ( $e$  в знаменателе). В этом случае можно воспользоваться формулами для элементов  $l$  и  $h$ :

$$\delta l(\varphi)_{lk} = (1 - e^2) \left(\frac{r_3}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left\{ F_{lkp}(i) \times \right. \\ \left. \times G_{lpq}(e) \frac{(1 - e^2)^{1/2} (l - 2p + q) - (l - 2p)}{e} \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \cos \omega I_{lkpq}^{(1)} - [F_{lkp}(i) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - \\
 & - e \frac{\operatorname{ctg} i}{1 - e^2} \frac{dF_{lkp}(i)}{di} G_{lpq}(e)] \sin \omega I_{lkpq}^2 \} ; \\
 \delta h(\varphi)_{lk} &= (1 - e^2) \left( \frac{r_3}{a} \right)^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left\{ F_{lkp}(i) \times \right. \\
 & \times G_{lpq}(e) \frac{(1 - e^2)^{1/2} (l - 2p + q) - (l - 2p)}{e} \times \\
 & \times \sin \omega I_{lkpq}^{(1)} + [F_{lkp}(i) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} - \\
 & - e \frac{\operatorname{ctg} i}{1 - e^2} \frac{dF_{lkp}(i)}{di} G_{lpq}(e)] \cos \omega I_{lkpq}^2 \}
 \end{aligned}$$

1. Альвен Х. Космическая плазма. М.: Мир, 1983. 216 с.
2. Бажинов И.К., Алешин В.И., Почукаев В.Н., Поляков В.С. Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 270 с.
3. Бакулин П.И., Блинов Н.С. Служба точного времени. М.: Наука, 1977. 345 с.
4. Бебенин Г.Г., Скребушевский Г.А., Соколов Г.А. Системы управления полетом космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 271 с.
5. Беляев М.Б. Научные эксперименты на космических кораблях и орбитальных станциях. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
6. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 328 с.
7. Евтушенко Ю.Г. и др. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1967. 300 с.
8. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука, 1965. 224 с.
9. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки измерений. М.: Советское радио, 1978. 384 с.
10. Каула У. Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970. 172 с.
11. Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. М.: Мир, 1966. 189 с.
12. Космические исследования земных ресурсов. М.: Наука, 1976. 384 с.
13. Куликов К.А., Гуревич В.Б. Основы лунной астрометрии. М.: Наука, 1972. 391 с.
14. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 366 с.
15. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. – Искусственные спутники Земли, 1961, вып. 8, С. 5–45.
16. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. О приближенном описании эволюции стационарного ИСЗ // Космические исследования. 1973. Т. XI. вып. 3. С. 347–359.
17. Назаренко А.И., Скребушевский Б.С. Эволюция и устойчивость спутниковых систем. М.: Машиностроение, 1981. 288 с.
18. Назаренко А.И. О составлении усредненных уравнений движения искусственных спутников Земли // Современные проблемы небесной механики и астродинамики. М.: Наука, 1973. С. 148–154.
19. Назаренко А.И., Маркова Л.Г. Методы определения и прогнозирования орбит ИСЗ при наличии погрешностей в математическом описании движения // Прикладные задачи космической баллистики. М.: Наука, 1973. С. 36–68.
20. Научные чтения по авиации и космонавтике. М.: Наука, 1980. 235 с.
21. Одинцов В.А., Анучин В.М. Маневрирование в космосе. М.: Воениздат, 1974. 152 с.

22. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М.: Машиностроение, 1974. 331 с.
23. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. XXIII. Вып. 1А. С. 5–32.
24. Роббинс. Аналитическое исследование импульсной аппроксимации // Ракетная техника и космонавтика. 1966. 391 с.
25. Скребушевский Б.С., Юрасов В.С. Особенности эволюции орбит под влиянием лунно-солнечных возмущений // Космические исследования. 1979. Т. XVII. Вып. 4. С. 629–630.
26. Тарасов Е.В. Космонавтика. М.: Машиностроение, 1977. 216 с.
27. Шаталов В.А., Селетков С.Н., Скребушевский Б.С. Применение ЭВМ в системе управления космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1974. 208 с.
28. Черный М.А. Авиационная астрономия. М.: Транспорт, 1978. 208 с.
29. Чернявский Г.М., Бартенев В.А. Орбиты спутников связи. М.: Связь, 1978. 240 с.
30. Чернявский Г.М., Бартенев В.А., Малышев В.А. Управление орбитой стационарного спутника. М.: Машиностроение, 1984. 143 с.
31. Феодосьев В.И. Основы ракетного полета. М.: Наука, 1981. 494 с.
32. Физика космоса. М.: Советская энциклопедия, 1976. 655 с.
33. Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат, 1972. 352 с.
34. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 494 с.
35. Эльясберг П.Е. Зависимость вековых изменений элементов орбит от сопротивления воздуха // Искусственные спутники Земли. 1958. Вып. 1. С. 21.
36. Drenning Charles K., Stechman D. Carl. Determination of tailoff impulse and tailoff repeatability for small rocket engines. AIAA Paper, 1970, N674, pp. 1–6.
37. Hidehiko Mori. An Onboard Navigator for the Extremely Low-Altitude Satellite Utilizing Accelerometers. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1983, vol.6, N3, pp. 200–206.
38. I. Katz and D.E. Parks. Space Shuttle Orbiter Charging. Journal of Spacecraft and Rockets, 1978, vol.20, N1, pp. 22–25.

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Основные положения баллистического проектирования космических систем . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Состав и классификация космических систем . . . . .	5
1.2. Баллистические характеристики космических систем . . . . .	9
1.3. Влияние технических характеристик ракет-носителей и КА на баллистические характеристики космических систем . . . . .	19
1.4. Физические условия окружающего космоса и их влияние на выбор баллистических характеристик КА . . . . .	25
1.5. Основные направления баллистического проектирования космических систем . . . . .	29
<b>Глава 2. Траектории выведения КА на рабочие орбиты. . . . .</b>	<b>36</b>
2.1. Постановка задачи выведения КА . . . . .	36
2.2. Выведение КА с доразгоном на рабочие орбиты. . . . .	38
2.3. Выведение и управление КА с подъемной силой в атмосфере планет . . . . .	48
2.4. К оценке точности построения рабочих орбит КА. . . . .	56
<b>Глава 3. Вспомогательные задачи космической баллистики . . . . .</b>	<b>64</b>
3.1. Общая характеристика вспомогательных задач космической баллистики . . . . .	64
3.2. Временные привязки в баллистическом проектировании . . . . .	67
3.3. Трассы космических аппаратов . . . . .	72
3.4. Расчет эфемерид Луны и Солнца . . . . .	75
3.5. Астрономо-баллистические условия функционирования КА . . . . .	80
3.6. Определение условий взаимной видимости КА и наземного пункта. Условия радиовидимости КА . . . . .	85
<b>Глава 4. Прогнозирование орбитальных параметров при баллистическом проектировании . . . . .</b>	<b>90</b>
4.1. Общие сведения. Возмущенное орбитальное движение космических аппаратов . . . . .	90
4.2. Прогнозирование орбитального движения КА на длительных временных интервалах . . . . .	98
4.3. Эволюция орбит под влиянием возмущений от геопотенциала. . . . .	100
4.4. Орбитальное движение КА с учетом атмосферного торможения. . . . .	110
4.5. Гравитационное влияние внешних тел на орбитальное движение КА. . . . .	116
4.6. Численные методы прогнозирования . . . . .	124
<b>Глава 5. Выбор баллистических характеристик космических систем, решающих задачи встречи космических аппаратов . . . . .</b>	<b>128</b>
5.1. Траектории встречи . . . . .	128

5.2. Фазирование при встрече космических аппаратов . . . . .	131
5.3. Краевые задачи в дальнем наведении . . . . .	133
5.4. Коррекция траектории дальнего наведения . . . . .	139
5.5. Сближение космических аппаратов на этапе ближнего наведения . . . . .	143
<b>Глава 6. Выбор орбитальных параметров КА околоземного космического пространства. Поддержание орбит длительно существующих КА . . . . .</b>	<b>149</b>
6.1. Постановка задачи баллистического проектирования систем с длительно существующими космическими аппаратами . . . . .	149
6.2. Выбор орбитальных параметров КА для изучения атмосферы . . . . .	152
6.3. Определение орбитальных параметров космических аппаратов для исследования поверхности Земли и изучения магнитосферы . . . . .	154
6.4. Особенности баллистического проектирования систем с КА на стационарных орбитах . . . . .	158
6.5. Баллистическое сопровождение длительно существующих КА . . . . .	164
6.6. Задача планирования экспериментов . . . . .	169
6.7. Коррекция орбит длительно существующих КА . . . . .	171
<b>Глава 7. Баллистическое проектирование космических систем, содержащих сеть космических аппаратов . . . . .</b>	<b>188</b>
7.1. Общая схема проектирования спутниковых систем . . . . .	188
7.2. Определение орбитальных структур первого приближения. Кинематически правильные орбитальные структуры . . . . .	190
7.3. Методы оценки орбитальной эволюции спутниковых систем . . . . .	194
7.4. Баллистическое проектирование динамически устойчивых спутниковых систем . . . . .	208
7.5. Управление КА орбитальных структур . . . . .	216
7.6. Определение схемы восполнения орбитальной структуры . . . . .	224
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>226</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>236</b>



*Производственное издание*

**Павел Романович Попович, Борис Сергеевич Скребушевский**

**БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор *Г.П. Филипповская*  
Художественный редактор *В.В. Лебедев*  
Обложка художника *Е.Н. Волкова*  
Технический редактор *О.В. Чеботарева*  
Корректор *Л.В. Тарасова*

ИБ № 5043

---

Сдано в набор 29.05.86.	Подписано в печать 1.10.87.	Т-14991.	
Формат 60×88 1/16.	Бумага офсетная № 2.	Гарнитура Пресс Роман.	
Печать офсетная.	Усл.печл. 14,7.	Усл.кр.-отт. 14,7.	Уч.-изд.л.13,73.
Тираж 1850 экз.	Заказ № 1664.	Цена 1 р. 10 к.	

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

---

Отпечатано в Московской типографии № 8 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли 101898, Москва, Хохловский пер., 7, с оригинала-макета,  
изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах