СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС В ЭДИНБУРГЕ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС В ЭДИНБУРГЕ 1958 г.

(ОБЗОРНЫЕ ДОКЛАДЫ)

Перевод
с английского, французского и немецкого
под редакцией Е. Ф. МИЩЕНКО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

517
М 43

АННОТАЦИЯ

В книге собраны в основном все крупные доклады, сделанные на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге (1958 г.). Эти доклады носят характер обзоров состояния тех или иных направлений в математике и ее приложениях. В совокупности они дают представление о важнейших достижениях и проблемах современной математики.

Книга представляет интерес для научных сотрудников, работающих в различных областях математики и ее приложений, а также для аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Международный математический конгресс
в Эдинбурге 1958 г

М, Физматгиз, 1962 г, 276 стр. (Серия: «Современные проблемы математики»).

Редактор *М. Л. Смолянский*

Техн редактор *И. Ш. Аксельрод.* Корректор *С. Н. Емельянова.*

Сдано в набор 19/I 1962 г. Подписано к печати 9/V 1962 г Бумага $84 \times 108^1/_{32}$
Физ. печ. л. 8,625. Условн. печ л. 14,15. Уч.-изд л. 14,42. Тираж 5500 экз.
Цена книги 92 коп Заказ № 1165

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства Управление полиграфической промышленности Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М Горького
Ленинград, Гатчинская, 26.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В работе Международного математического конгресса в Эдинбурге, проходившего летом 1958 года, приняло участие около двух тысяч математиков почти из всех стран мира.

Большинство участников конгресса выступили с докладами, в основном носившими характер пятнадцатиминутных секционных сообщений, посвященных различным конкретным проблемам математики. Эти доклады до сих пор нигде не опубликованы отдельным изданием. Наряду с секционными, были также прочитаны обзорные часовые и получасовые доклады. Сборник часовых и получасовых докладов был издан в 1960 году в Англии («Proceedings of the International congress of mathematicians 14—21 August 1958», Cambridge, 1960).

Настоящий сборник содержит переводы лишь часовых докладов, представляющих собой обзор важнейших достижений в некоторых основных областях математики: алгебраической топологии, геометрии поверхностей, математической логике, теории вероятностей, теории групп, теории функции, теории дифференциальных уравнений. В книгу не включены доклады Л. С. Понтрягина «Оптимальные процессы регулирования», L. Gårding'a «Trends and problems in partial differential equations», опубликованные ранее в журнале «Успехи математических наук» (т. 14, вып. 1, 1959 и т. 15, вып. 1, 1960), а также доклад C. Lanczos'a «Extended boundary value problems».

(Е. Ф. Мищенко)

СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Д. Александров

(СССР)

В своем докладе я попытаюсь дать очерк общей теории поверхностей в том виде, в каком она была развита в течение последнего десятилетия группой советских геометров: Ю. Ф. Борисовым, В. А. Залгаллером, А. В. Погореловым, Ю. Г. Решетняком, И. Я. Бакельманом, В. В. Стрельцовым и мною. Эта теория возникла как обобщение теории выпуклых поверхностей, систематическое изложение которой было дано в моей книге «*Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*», опубликованной как раз десять лет тому назад. Теперь эта общая теория выросла в обширную область геометрии с ее собственными понятиями, проблемами, методами и многочисленными результатами. Было бы совершенно безнадежно дать здесь больше, чем общее понятие об этой теории, ввиду этого пришлось поневоле опустить не только все детали, но и многие результаты, даже фундаментального характера.

В процессе построения основ этой теории моей целью было дать определение и провести исследование наиболее общих поверхностей, к которым применимы понятия и результаты, аналогичные понятиям и результатам классической гауссовой теории поверхности. Здесь имеются в виду, прежде всего, два основных понятия гауссовой теории понятия о внутренней метрике поверхности и о ее кривизне. Мы принимаем *интегральную* точку зрения, согласно которой метрика определяется без помощи линейного элемента, непосредственно расстоянием между точками на поверхности, а кривизна рассматривается как функция множества, так что мы имеем в виду интегральную кривизну точечного множества на поверхности, а не кривизну в точке.

Пусть поверхность S обладает тем свойством, что любые две ее точки x, y могут быть соединены кривой $\widehat{xy}$, которая лежит на поверхности и имеет конечную длину $s(\widehat{xy})$. Определим внутреннее расстояние на поверхности как

$$\rho_S(x, y) = \inf_{\widehat{xy} \subset S} s(\widehat{xy}).$$

Очевидно, что это определение удовлетворяет обычным условиям, налагаемым на общее понятие метрики:

(1) $\rho(x, y) = 0$ равносильно $x = y$,

(2) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(z, x)$.

Таким образом, поверхность становится метрическим пространством с метрикой ρ_S.

Здесь возможны две точки зрения: можно рассматривать поверхность как фигуру в пространстве и при этом интересоваться ее пространственной формой или можно поверхность рассматривать как метрическое пространство с внутренней метрикой ρ. В последнем случае мы говорим о внутренней геометрии поверхности, в то время как в первом случае мы говорим о ее внешней геометрии. Соответственно этим двум точкам зрения имеются два понятия кривизны поверхности: *внешняя кривизна* измеряется посредством площади сферического изображения, а *внутренняя кривизна* измеряется избытками геодезических треугольников, причем избыток треугольника T с углами α, β, γ по определению есть

$$\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Так как мы рассматриваем поверхности с определенной, т. е. конечной, кривизной, мы говорим о поверхности ограниченной кривизны. Таким образом, объектами чисто внутренней теории являются двумерные метрические многообразия ограниченной внутренней кривизны (М. О. К.), а объектами внешней теории являются поверхности с ограниченной внешней кривизной (П. О. К.).

Внутренняя и внешняя теории не независимы, существует тесная связь между ними. Известна теорема Гаусса, которая утверждает равенство внутренней и внешней кривизны, по крайней мере для достаточно регулярных поверхностей. Таким образом, мы наметили определенную программу:

дать строгое определение многообразий ограниченной кривизны, поверхностей ограниченной внешней кривизны, изучить их свойства и установить связь между внутренними и внешними свойствами этих поверхностей.

Несколько отличный и в некоторых случаях даже более общий подход к теории поверхностей может быть основан на понятии параллельного переноса, которое тесно связано с понятием кривизны вследствие известной теоремы Гаусса — Бонне. Параллельный перенос вектора вдоль кривой на поверхности может быть определен как внутренним, так и внешним образом посредством построения Леви-Чивита. Если мы следуем этому направлению идей, то объектами теории оказываются метрические многообразия и поверхности, на которых для достаточно обширного множества кривых определен параллельный перенос вектора. Такие поверхности были недавно изучены Ю. Ф. Борисовым. Я приведу его результаты в последней части доклада.

1. Определение М. О. К.

1.1. Внутренняя метрика. Длина кривой определяется в любом метрическом пространстве обычным путем, как точная верхняя граница сумм расстояний между последовательными точками кривой. Если любые две точки некоторого множества S в метрическом пространстве могут быть соединены кривой, лежащей в S и имеющей конечную длину, мы называем это множество *метрически связным*. Далее, мы говорим, что метрика пространства внутренняя в себе или просто внутренняя, если пространство метрически связно и расстояние между любыми двумя его точками равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих эти точки.

Введение этого понятия оправдывается следующей теоремой:

Пусть S — метрически связное множество в метрическом пространстве R, тогда если определить расстояние:

$$\rho_S(x, y) = \inf_{\widehat{xy} \subset S} s(\widehat{xy}),$$

то введенная таким образом в S метрика оказывается внутренней в указанном выше смысле.

Соответственно мы говорим о внутренней метрике, индуцированной на S метрикой окружающего пространства R. Определение метрики поверхности, данное выше, есть частный случай этого общего определения; поэтому, применяя теорему, мы видим, что это метрика — внутренняя.

Многообразие ограниченной кривизны должно быть поверхностью, рассматриваемой с внутренней точки зрения. Поэтому естественно, что наш первый постулат в определении М. О. К. должен быть следующим: М. О. К. есть двумерное метрическое многообразие с внутренней метрикой.

1.2. Угол. Чтобы сформулировать условие ограниченности кривизны через избытки треугольников, мы должны определить треугольники и углы. (Это определение будет иметь силу для любого метрического пространства.) Мы определяем прежде всего кратчайшую линию, или отрезок xy, как кривую, соединяющую точки x, y и имеющую длину, равную расстоянию $\rho(x, y)$ между ними. Тогда очевидно, что понимается под треугольником или многоугольником. Отметим, что в любом многообразии и даже в любом локально компактном пространстве с внутренней метрикой каждая точка имеет окрестность, любые две точки которой могут быть соединены отрезком. Определение угла дается следующим образом.

Пусть L, M — две кривые с общей начальной точкой O. Возьмем переменные точки X, Y на L и M, отличные от O, и построим плоский треугольник $O'X'Y'$ со сторонами, равными расстояниям OX, OY, XY. Пусть $\gamma(X, Y)$ — угол этого треугольника при вершине O. Определим верхний угол между кривыми L и M как

$$\bar{\alpha}(L, M) = \overline{\lim_{X, Y \to O}}\, \gamma(X, Y).$$

Этот угол всегда существует.

Далее, мы говорим, что существует определенный угол между кривыми L, M, если существует предел угла $\gamma(X, Y)$; в этом случае мы определяем угол как

$$\alpha(L, M) = \lim_{X, Y \to O} \gamma(X, Y).$$

Пользуясь верхним углом, который всегда существует, определим избыток треугольника T как

$$\delta(T) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi,$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ — верхние углы между сторонами треугольника T.

1.3. Условие ограниченности кривизны. Теперь мы можем сформулировать второй и последний постулат, который определяет понятие М. О. К. Каждая точка имеет такую окрестность U, что сумма избытков попарно не перекрывающихся треугольников, лежащих в окрестности U, равномерно ограничена сверху:

$$\sum \delta(T) < N,$$

где N не зависит от выбора треугольников, а зависит только от окрестности U.

Таким образом, кратко говоря, М. О. К. есть двумерное многообразие с внутренней метрикой и с равномерным ограничением сверху для сумм избытков неперекрывающихся треугольников, по крайней мере в некоторых окрестностях, которые покрывают многообразие.

Иногда мы говорим о *метрике ограниченной кривизны*, что предпочтительнее в случае, когда мы должны рассматривать не только одну, но много метрик, заданных на одном многообразии, иными словами, в случае, когда метрические многообразия топологически отображаются на одно и то же многообразие.

1.4. Кривизна. Определение кривизны совершенно естественно и дается следующим образом. Определим положительные и отрицательные части кривизны открытого множества G как точные верхнюю и нижнюю границы сумм избытков попарно неперекрывающихся треугольников, лежащих в G:

$$\omega^+(G) = \sup \sum \delta(T), \qquad \omega^-(G) = \inf \sum \delta(T).$$

Сама кривизна определяется как

$$\omega(G) = \omega^+(G) + \omega^-(G)$$

и абсолютная кривизна как

$$\Omega(G) = \omega^+(G) - \omega^-(G).$$

Затем эти функции множества могут быть распространены на кольцо борелевских множеств обычными приемами теории меры. Имеет место фундаментальная теорема о том, что эти функции множества оказываются вполне аддитивными.

Наши условия относительно избытков треугольников содержат в известном смысле минимум того, что нужно предположить, чтобы иметь возможность определить кривизну как вполне аддитивную функцию множества. В. А. Залгаллер дал абстрактное построение меры, которое покрывает определение лебеговой меры, вышеуказанное определение кривизны и определения многих других функций множеств, встречающихся в геометрии, при условии, что определение исходит из некоторых величин, приписываемых элементарным множествам (из площади прямоугольников в случае лебеговой меры или избытков треугольников в случае кривизны).

1.5. Некоторые другие понятия. Мы определяем, далее, такие понятия, как *площадь*, *направление кривой в точке*, *интегральную геодезическую кривизну* (*поворот*) *кривой*. Например, мы говорим, что две кривые имеют одно и то же определенное направление в их начальной точке, если верхний угол между ними равен нулю. Угол между кривыми зависит только от их направлений, т. е. он один и тот же для всех пар кривых с теми же направлениями. В М. О. К. множество направлений из любой данной точки изометрично в смысле метрики углов множеству образующих конуса.

2. Исследование М. О. К. посредством приближений

2.1. За исключением прямых методов, основным и наиболее плодотворным методом в теории М. О. К. оказывается метод приближения произвольного М. О. К. многогранниками.

Прежде всего, мы имеем следующую основную теорему:

Пусть внутренняя метрика ρ, *заданная в многообразии* M, *является пределом равномерно сходящейся последовательности метрик* ρ_n *с равномерно ограниченными положительными частями кривизны. Тогда* ρ *также есть метрика ограниченной кривизны, и кривизны* ω_n *метрик* ρ_n *слабо сходятся к кривизне* ω *метрики* ρ *в том смысле, что для любой непрерывной функции* $f(x)$, *отличной от нуля только на компактном множестве,*

$$\int f(x)\,\omega_n(dM) \to \int f(x)\,\omega(dM).$$

В частности, предел римановых метрик с равномерно ограниченными положительными частями кривизны есть метрика ограниченной кривизны.

2.2. Простейшими М. О. К. являются многообразия с многогранной метрикой, или кратко — многогранники. *Многогранник* — это такое многообразие с внутренней метрикой, каждая точка которого имеет окрестность, изометричную конусу. Это дескриптивное определение эквивалентно следующему конструктивному. Многогранник есть многообразие с внутренней метрикой, составленное из плоских треугольников, или, другими словами, такое, которое допускает подразделение на треугольники, изометричные плоским. Кривизна многогранника сконцентрирована в его вершинах, т. е. в точках, окрестности которых не сводятся к кускам плоскости. Полный угол θ вокруг такой точки отличен от 2π и связан с кривизной ω в этой точке равенством

$$\omega = 2\pi - \theta.$$

Кривизна многогранника есть сумма кривизн его вершин, и ее положительная часть есть та же сумма, распространенная на вершины с полными углами $\theta < 2\pi$.

Из сформулированной выше теоремы сходимости следует, что предел многогранных метрик с равномерно ограниченными положительными частями кривизн есть метрика ограниченной кривизны. Обратная теорема имеет место в следующей форме:

Любая метрика ограниченной кривизны есть предел последовательности многогранных метрик с равномерно ограниченной абсолютной кривизной. Или более точно: *пусть P — компактный многоугольник в некотором М. О. К. R, и пусть ρ есть внутренняя метрика, индуцированная в P метрикой всего R. Существует последовательность многогранников P_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами и их отображений на P такая, что метрики, определенные в P этими отображениями, равномерно сходятся к ρ и при этом положительные и отрицательные части их кривизн слабо сходятся к соответствующим частям кривизны метрики ρ.*

Имея в виду это последнее свойство, мы говорим, что сходимость правильная.

2.3. Объединяя этот результат с предыдущей теоремой сходимости, мы получим новое определение М. О. К. как многообразия, которое по крайней мере локально является пределом многогранников с равномерно ограниченными положительными частями кривизны. Так как многогранники, очевидно, являются пределом римановых многообразий, то М. О. К. оказывается пределом римановых многообразий с равномерно ограниченными положительными частями их интегральных кривизн. Другими словами, класс многообразий ограниченной кривизны есть замыкание класса римановых и многогранных многообразий в смысле равномерной сходимости метрик при условии равномерной ограниченности положительных частей кривизн или, что оказывается эквивалентным, ограниченности абсолютных интегральных кривизн.

2.4. Указанная теорема составляет основной метод исследования М. О. К. посредством приближений. Этот метод применяется к исследованию некоторых основных свойств М. О. К. Например, мы определяем площадь многоугольника P в М. О. К. как предел площадей многогранников, правильно сходящихся к P.

Чтобы обеспечить стандартное применение этого метода, мы должны снабдить его некоторыми общими теоремами относительно сходимости разных величин, связанных с М. О. К. и фигурами в них, например, таких, как углы, площади, поворот кривой и т. д. Фактически мы располагаем такими теоремами.

Предположим теперь, что мы имеем некоторую проблему, касающуюся М.О.К. Тогда мы формулируем ее для многогранников и пытаемся решить ее для них. Так как многогранники являются по существу объектами элементарной геометрии, проблема для них оказывается достаточно наглядной. А если мы смогли решить проблему для многогранников, нам остается только применить подходящую теорему сходимости для того, чтобы получить общий результат. Большинство конкретных результатов в теории М. О. К. было получено именно этим путем.

3. Аналитическая характеристика М.О.К.

3.1. Вероятно, самым важным результатом, полученным указанным только что методом, является теорема Ю. Г. Решетняка (1953 г.):

Метрика каждого М. О. К. может быть определена с помощью линейного элемента в форме

$$ds^2 = \lambda (dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

где $\ln \lambda$ *есть разность двух субгармонических функций. И обратно, любая метрика, определенная таким линейным элементом с тем же условием для* λ, *есть метрика ограниченной кривизны.*

Более точно первую часть теоремы можно выразить следующим образом. Пусть P есть многоугольник в М. О. К. R, гомеоморфный кругу. Тогда при помощи отображения P на область D плоскости xy можно ввести в P координаты x, y так, что длина любой кривой в P, являющейся образом ломаной L из D, равна

$$s = \int\limits_L \sqrt{\lambda (dx^2 + dy^2)}. \tag{2}$$

Если положить $z = x + iy$, то функция $\lambda(x, y) = \lambda(z)$ представима следующей формулой:

$$\ln \lambda(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_D \ln |z - \zeta| \, \omega(dE_\zeta) + h(z), \tag{3}$$

где $\omega(E_\zeta)$ есть кривизна множества в P, соответствующего $E_\zeta \subset D$; интеграл понимается в смысле Лебега — Радона; $h(z)$ есть подходящим образом выбранная гармоническая функция в D. Так как $\omega = \omega^+ + \omega^-$, $\omega^+ \geqslant 0$, $\omega^- \leqslant 0$, известное интегральное представление для субгармонической функции означает, что $\ln \lambda$ есть разность двух таких функций.

Эта теорема обобщает тот хорошо известный факт, что линейный элемент регулярной поверхности всегда можно представить в форме (1), причем λ связано с гауссовой кривизной K формулой

$$\Delta \ln \lambda = -2K\lambda. \tag{4}$$

Если рассматривать эту формулу как уравнение Пуассона для $\ln \lambda$, мы как раз получим решение в форме (3) с $\omega(dE_\zeta) = K\lambda \, d\xi \, d\eta$.

3.2. Теорема Ю. Г. Решетняка добавляет к двум вышеприведенным определениям М. О. К. (т. е. к начальному аксиоматическому и к конструктивному) третье — аналитическое определение. Оно позволяет применять аналитические методы для изучения М. О. К. Но этим не занимались пока в достаточной степени *). Результаты этой теории до сих пор получались геометрическими методами.

*) Позже появились некоторые работы Ю. Г. Решетняка и др. в этом направлении. Указание литературы можно найти в издаваемой монографии А. Д. Александрова и В. А. Залгаллера «Двумерные многообразия ограниченной кривизны» (Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 63).

4. Геометрические методы и некоторые результаты теории М.О.К.

4.1. Имеется два геометрических метода в теории М. О. К.: метод приближения многогранниками и метод, который я называю методом «разрезывания и склеивания». Он основывается на «теореме о склеивании». Подобно тому как многогранник строится, или склеивается, из треугольников, так в общем случае можно строить М. О. К. из кусков других М. О. К. (например, из многоугольников, вырезанных из какого-либо М. О. К.), склеивая такие куски друг с другом по отрезкам их границ. Возможность такого построения при определенных условиях, налагаемых на границы склеиваемых кусков, обеспечивается теоремой, которую я называю «теоремой о склеивании».

В простейшем случае, когда склеиваемые куски — многоугольники, теорема сводится к следующему утверждению:

Предположим, нам дан набор многоугольников, вырезанных из некоторого М. О. К., и этот набор превращен склеиванием (отождествлением) границ в многообразие R с границей (или без границы), причем отождествляемые при склеивании отрезки сторон многоугольников имеют равные длины. Тогда если определить для любых двух точек $x, y \in R$ расстояние как точную нижнюю границу длин кривых, соединяющих x и y (длины определяются метриками, уже данными в каждом многоугольнике), то R оказывается М. О. К.

В случае более общих областей, чем многоугольники, необходимо еще дополнительное условие. Оно касается интегральных геодезических кривизн (поворотов) границ: эти повороты как функции сегмента должны быть функциями ограниченной вариации. Например, условие выполняется, если мы имеем куски регулярных поверхностей, ограниченные кривыми с кусочно-непрерывной геодезической кривизной.

4.2. Метод разрезывания и склеивания так же стар, как сама геометрия. Древние доказательства теоремы Пифагора, как и многие другие доказательства в элементарной геометрии, состоят просто в разрезывании определенных фигур на соответствующие куски и таком перераспределении, или, можно сказать, склеивании, этих кусков, которое делает очевидным доказываемое утверждение. Мы применяем ту же идею к нашим более общим и абстрактным фигурам.

4.3. Чтобы показать, что мы имеем не только общие определения, разрешите мне упомянуть некоторые полученные при помощи этих методов результаты, которые являются новыми и для регулярных поверхностей. Я сформулирую эти результаты в обычных терминах дифференциальной геометрии во избежание дальнейших определений некоторых понятий общей теории.

1. Рассмотрим всевозможные поверхности S в пространстве постоянной кривизны K_0. Пусть они гомеоморфны кругу и имеют наперед заданные периметр p и положительную часть относительной кривизны, т. е.

$$\int\limits_{K > K_0} K\,dS,$$

где S — площадь, а K — гауссова кривизна. Рассмотрим, какова будет верхняя граница площадей таких поверхностей. Ответ: это есть площадь кругового конуса с теми же данными (при условии, что такой конус действительно существует; последнее обеспечивается некоторым простым условием).

2. Рассмотрим те же поверхности в том же пространстве и предположим, что они имеют неположительную относительную кривизну, т. е. $K \leqslant K_0$, так что для каждой области $\omega \leqslant K_0 S$. Снова ищется максимум площади. Ответ таков: максимум достигается на поверхностях, изометричных кругу с тем же периметром. Следует упомянуть, что Ю. Г. Решетняку удалось доказать, что такое изопериметрическое неравенство для любого малого круга на поверхности не только необходимо, но также и достаточно для того, чтобы гауссова кривизна поверхности была $\leqslant K_0$.

3. Рассмотрим теперь кривую L на поверхности S, гомеоморфной кругу. Пусть ω^+ — положительная часть кривизны S, а s и τ — длина и интеграл от абсолютного значения геодезической кривизны линии L. Справедливы следующие результаты.

3a. Пусть $\omega^+ + \tau < \pi$ и расстояние между концами L есть r. Тогда

$$s \leqslant \frac{r}{\cos \frac{1}{2}(\omega^+ + \tau)},$$

причем оценка точная; равенство достигается в случае равнобедренного треугольника, в котором r — основание, а s — сумма двух боковых сторон.

3b. При условии $\omega^{+}+\tau<2\pi$ кривая L или не имеет кратных точек — и это обязательно так, если $\omega^{+}+\tau<\pi$, — или кривая L может быть разделена на две ветви без таких точек. В последнем случае она состоит из петли (т. е. кривой без кратных точек, но с совпадающими концами) и из одной или двух ветвей, каждая из которых не имеет ни кратных точек, ни общих точек с областью, ограниченной петлей.

3c. При том же условии $\omega^{+}+\tau<2\pi$ длина кривой не превышает определенной постоянной, зависящей от $\omega^{+}+\tau$ и от размера (диаметра или периметра) куска поверхности. В частности, когда p есть периметр поверхности,

$$s \leqslant \frac{p}{1+\cos\frac{1}{2}(\omega^{+}+\tau)}, \quad \text{если } \omega^{+}+\tau \leqslant \pi,$$

и

$$s \leqslant \frac{p}{\sin\frac{1}{2}(\omega^{+}+\tau)}, \qquad \text{если } \pi<\omega^{+}+\tau<2\pi.$$

Эти оценки также точные.

Все эти теоремы приведены здесь как примеры многочисленных конкретных результатов, полученных при помощи общей теории. Из-за недостатка времени я не привожу много других примеров, как аналогичных вышеуказанным, так и совершенно другого типа.

5. Поверхности, являющиеся М. О. К.

5.1. Возникает вопрос относительно того, каковы поверхности в обычном евклидовом пространстве E^3, которые с внутренней точки зрения являются М. О. К., и можно ли погрузить любое М. О. К., хотя бы локально, в E^3. Согласно изящной теореме Неша — Кёйпера, любое риманово многообразие допускает такое погружение даже в целом, если оно ориентируемо и компактно. Любое М. О. К. может быть аппроксимировано римановыми многообразиями, и это, очевидно, дает возможность распространить результат Неша — Кёйпера на М. О. К. Но погружение Неша — Кёйпера слишком произвольно и не обеспечивает той глубокой связи между внешними и внутренними свойствами поверхности, которая характерна для более регулярных погружений римановых многообразий. Так как основной из этих связей является теорема Гаусса, мы назовем гауссовым такое погружение, при котором остается справедливым утверждение типа теоремы Гаусса, по крайней мере в некоторой обобщенной форме. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти гауссово погружение многообразия в E^3.

5.2. Для того чтобы приступить к решению этой проблемы, необходимо прежде всего определить и изучить классы поверхностей, среди которых следует искать реализацию данного М. О. К. Следовательно, нашей первой задачей является определение и изучение достаточно общих поверхностей, которые являются М. О. К. с точки зрения их внутренней метрики и которые допускают обобщение теоремы Гаусса. После этого задача состоит в том, чтобы доказать, если возможно, что М. О. К., быть может при некоторых добавочных условиях, допускает погружение в E^3 в виде поверхности данного класса. Третья задача состоит в более глубоком изучении зависимости внешних свойств поверхности от внутренних свойств, в частности зависимости степени регулярности поверхности от степени регулярности ее внутренней метрики. Особое значение для общей теории последний вопрос приобретает в той связи, что его положительное решение показывает, что решения проблем погружения и изгибания поверхностей, полученные в общей теории, дают решение соответствующих проблем в терминах дифференциальной геометрии, если поверхности имеют достаточно регулярную внутреннюю метрику.

5.3. Поверхности П. Р. В. (представимые разностью выпуклых функций). Что касается нашей первой задачи, то были получены следующие результаты. Мы изучали поверхности, которые по крайней мере локально допускают явное задание уравнением вида $z=f(x, y)$, где x, y, z — декартовы координаты и f — разность двух выпуклых функций. Короче, это поверхности П. Р. В. Любой многогранник, допускающий локальное представление уравнением $z=f(x, y)$, любая выпуклая поверхность и любая поверхность, у которой первые производные удовлетворяют условию Липшица, суть поверхности П. Р. В. Нетрудно проверить, что поверхность П. Р. В. можно аппроксимировать регулярными поверхностями с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами. Поэтому, применив теорему сходимости для М. О. К., мы увидим, что эти поверхности суть М. О. К.

Для этих поверхностей удается установить обобщенную теорему Гаусса, причем точные определения сферического изображения и внешней кривизны требуют некоторого дополнительного исследования из-за отсутствия касательной или опорной плоскости в произвольной точке. Я не буду здесь детально разбирать этот вопрос.

Связь между внутренней и внешней геометриями не исчерпывается теоремой Гаусса. Например, возьмем внутренние понятия угла и направления кривой. Для поверхностей П. Р. В. они оказываются эквивалентными соответствующим внешним понятиям. Существование внутреннего направления кривой в ее начальной точке O оказывается эквивалентным существованию обычной касательной, и угол между двумя кривыми оказывается равным углу между их касательными, измеренному на касательном конусе поверхности в точке O.

5.4. Поверхности с обобщенными вторыми производными. И. Я. Бакельман изучил поверхности, допускающие параметрическое представление $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ с непрерывными первыми производными и обобщенными вторыми производными, суммируемыми с квадратами. Ему удалось распространить на такие поверхности все основные результаты обычной дифференциальной геометрии, если вторые производные, встречающиеся в формулах, понимать как обобщенные.

5.5. Гладкие П. О. К. Поверхности, изученные И. Я. Бакельманом, в общем случае не являются поверхностями П. Р. В. Все же они включаются в другой класс поверхностей, изученных А. В. Погореловым. Это — гладкие поверхности с ограниченной внешней кривизной. Точное определение следующее:

Предполагается, что поверхность S имеет в каждой точке касательную плоскость, которая непрерывно зависит от точки. Следовательно, сферическое изображение определено. Пусть теперь $F_1, \ldots, F_n$ — замкнутые, попарно не пересекающиеся множества на S, и пусть $\sigma(F_i)$ — площади их сферических изображений. Условие ограниченности внешней кривизны состоит в том, чтобы $\sum \sigma(F_i)$ была равномерно ограниченной для всех указанных систем замкнутых множеств F_i.

Сначала А. В. Погорелов доказывает, что эти поверхности суть М. О. К. Теперь, поскольку это касается теоремы Гаусса, нетрудно определить абсолютную внешнюю кривизну как $\sup \sum \sigma (F_i)$. Однако оказалось гораздо труднее определить кривизну с соответствующим знаком и доказать для нее теорему Гаусса. Соображения А. В. Погорелова довольно тонкие. Сначала он разделяет точки поверхности на два класса: регулярные точки и особые точки, причем первые характеризуются следующим свойством. Регулярная точка A имеет такую окрестность U, что ни одна точка $X \in U$ не имеет того же сферического изображения, что и A. Доказывается, что особыми точками в некотором смысле можно пренебречь.

Регулярные точки классифицируются по их индексам, т. е. по числу и направлению обходов сферического изображения точки образом замкнутой простой кривой, окружающей точку. Знак индекса приписывается точке, и положительная часть кривизны определяется как площадь сферического изображения множества всех положительных точек, причем учитывается кратность покрытия сферического изображения. Аналогично определяется отрицательная часть кривизны. Затем А. В. Погорелов доказывает, что, по крайней мере для замкнутых поверхностей, эти функции множества равны соответствующим внутренним величинам.

Для незамкнутых поверхностей положительные части внешней и внутренней кривизн равны. Что же касается отрицательных частей, то установлено лишь, что внешняя по абсолютной величине не больше внутренней. По-видимому, эта неполнота результата связана с методом доказательства и не лежит в существе дела, так как остается неопределенным значение внутренней кривизны множества особых точек.

Следует упомянуть и некоторые другие результаты. Поверхности этого класса со всюду положительной кривизной — выпуклые, и поверхности, положительная и отрицательная кривизны которых сводятся к нулю, — развертывающиеся. Если поверхность имеет локально однозначное сферическое изображение, то она выпуклая, если сферическое изображение сохраняет ориентацию; в противном случае она имеет отрицательную кривизну.

5.6. Недавно И. Я. Бакельман отметил, что А. В. Погорелов при доказательстве того факта, что исследуемые им поверхности суть М. О. К., не использует гладкости поверхностей и поэтому возможно непосредственное обобщение его доказательства на поверхности со следующим свойством.

Рассмотрим поверхность S и разделим ее на малые части S_i. Рассмотрим, далее, сферическое отображение тех точек S_i, в которых S_i имеет опорную плоскость, за исключением точек, лежащих на границе S_i. Пусть $\sigma^+(S_i)$ — площадь этого сферического отображения. На поверхность налагается требование, чтобы суммы $\sum \sigma^+(S_i)$ были равномерно ограничены для всех подразделений S на части S_i. Ясно, что при таком построении мы ограничиваем именно положительную часть внешней кривизны поверхности. Следовательно, поверхности, подчиняющиеся вышеуказанному условию, можно охарактеризовать как поверхности ограниченной положительной внешней кривизны, совершенно аналогично нашему определению М. О. К., где условие ограниченности налагается как раз на положительную часть кривизны.

Простое повторение доказательства А. В. Погорелова для гладких поверхностей — ибо А. В. Погорелов как раз использует вышеуказанное построение — приводит к такому результату: поверхность с ограниченной положительной частью внешней кривизны есть М. О. К. Однако пока по существу это все, что известно о таких поверхностях. В частности, у нас нет ни доказательства теоремы типа Гаусса, ни даже определения кривизны для таких поверхностей. Их изучение — наша следующая задача. Я полагаю, что эти поверхности образуют тот общий класс поверхностей, среди которых следует ожидать локальную реализацию абстрактного М. О. К. Они включают все описанные выше классы поверхностей такие, как, например, поверхности П. Р. В.

6. Проблемы погружения

6.1. Что касается проблем погружения, то мы не имеем общих результатов, кроме результатов для выпуклых поверхностей. Существует ранее доказанная мною теорема о погружении многообразий в пространство $R^3_{K_0}$ постоянной кривизны K_0. В случае компактного многообразия она утверждает следующее:

Пусть M — М. О. К., гомеоморфное сфере, и пусть его кривизна ω для любой области G подчинена условию

$\omega(G) \geqslant K_0 S(G)$, где S — площадь. Тогда существует в $R^3_{K_0}$ выпуклая поверхность, изометричная M.

По теореме А. В. Погорелова, эта поверхность единственная с точностью до движения и зеркального отражения.

6.2. Проблема регулярности погружения, если метрика многообразия M представима посредством линейного элемента ds^2, была разрешена следующим образом. Предположим, что коэффициенты линейного элемента имеют производные, удовлетворяющие условию Липшица. Тогда поверхность S — гладкая и реализует не только метрику, но и сам линейный элемент ds^2, т. е. в случае евклидова пространства существует параметризация u, v многообразия M такая, что вектор-функция $X(u, v)$, изображающая поверхности S, удовлетворяет уравнению $d\overline{X}^2 = ds^2$. Другими словами, погружение разрешает не только обобщенную задачу, но также и классическую задачу. То же свойство регулярности имеет место в малом, т. е. для выпуклой поверхности, реализующей любую область в М. О. К., если кривизна подчинена неравенствам

$$C > \frac{\omega(G)}{S(G)} > K_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon = \mathrm{const} > 0).$$

6.3. А. В. Погорелов установил более сильную регулярность выпуклой поверхности с наперед заданным линейным элементом, если последний по крайней мере 5 раз дифференцируем. Теорема А. В. Погорелова гласит:

Если линейный элемент выпуклой поверхности в $R^3_{K_0}$ имеет $k+1$ раз ($k \geqslant 4$) непрерывно дифференцируемые (аналитические) коэффициенты и имеет всюду кривизну $K > K_0$, то поверхность S дифференцируема k раз (аналитическая).

6.4. Несмотря на силу этих результатов, они недостаточны. Если линейный элемент $k+1$ раз дифференцируем, поверхность оказывается k раз дифференцируемой (или при выполнении условия Липшица мы имеем несколько более сильные утверждения). Но в указанной выше моей теореме $k = 1$, а в теореме А. В. Погорелова $k \geqslant 4$. Между тем обычные формулы дифференциальной геометрии содержат вторые или третьи производные, если писать уравнения Петерсона — Кодацци не в интегральной, а в их обычной форме. Поэтому наиболее интересная и важная задача состоит в том, чтобы найти минимальные условия, обеспечивающие дву- или трехкратную дифференцируемость поверхности. (Эта задача решена А. В. Погореловым уже после данного сообщения. Общий результат следующий: если коэффициенты линейного элемента dS^2 принадлежат классу C^{k+1}, $k \geqslant 1$, то поверхность принадлежит классу $C^{k+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.)

6.5. Мне бы хотелось упомянуть, что А. В. Погорелову недавно удалось доказать теоремы о погружении многообразия в трехмерное риманово пространство (причем предполагается, что кривизна многообразия достаточно велика). Теоремы регулярности и единственности погружения также установлены. (Уже после данного сообщения А. В. Погорелов получил теорему о погружении в риманово пространство в следующей окончательной форме: *Если R — полное трехмерное риманово пространство с кривизной, всюду меньшей некоторой постоянной K, то всякое гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей K, погружено в R в виде регулярной поверхности.*)

7. Поверхности с параллельным переносом векторов

7.1. Как я уже упоминал в начале своего доклада, существует иной подход к теории общих поверхностей, основанный на понятии параллельного переноса вектора. Эта идея недавно реализована Ю. Ф. Борисовым.

Определение параллельного переноса было дано Леви-Чивита. Рассмотрим гладкую поверхность S и линию $L \subset S$, соединяющую точки A, B. Возьмем вектор $\boldsymbol{a}$, касательный к S в точке A. Возьмем, далее, последовательность точек $A = X_0, X_1, \ldots, X_n = B \in L$. Проектируя вектор $\boldsymbol{a}$ на касательную плоскость P_1 в точке X_1, мы получаем вектор $\boldsymbol{a}_1$ в X_1; затем проектируем этот вектор на касательную плоскость P_2 в точке X_2 и так далее. Наконец, получаем вектор $\boldsymbol{a}_n$ в точке B. Предположим, что вектор $\boldsymbol{a}_n$ стремится к определенному пределу $\boldsymbol{b}$, когда точки X_i берутся все более и более плотно на линии L. Тогда мы говорим, что $\boldsymbol{b}$ есть результат параллельного переноса $\boldsymbol{a}$ по кривой L.

Таково внешнее определение параллельного переноса при помощи проекций. Можно дать несколько другое определение, если вместо проектирования вектора с одной касательной плоскости P_i на другую плоскость P_{i+1} мы вращаем первую плоскость P_i вокруг линии пересечения P_i и P_{i+1} и переносим таким образом вектор, данный в P_i, в плоскость P_{i+1}. В этом случае мы получаем параллельный перенос при развертывании касательных плоскостей.

Оба определения эквивалентны для регулярных кривых на регулярных поверхностях, но в общем случае они не эквивалентны. Ю. Ф. Борисов доказал следующую простую теорему *):

Длины векторов a_n сходятся к определенному пределу (при использовании проекций) тогда и только тогда, когда кривая обладает следующим свойством: сумма квадратов углов между нормалями к поверхности в последовательных точках $X_1, \ldots, X_n$ стремится к нулю, когда точки располагаются все более и более плотно на кривой.

Если кривая обладает таким свойством и, кроме того, ее сферическое изображение, проходимое дважды в противоположных направлениях, охватывает нулевую «ориентированную площадь», то параллельный перенос по ней однозначно определен для любого вектора, т. е. не только длины векторов a_n, но и сами векторы с их направлениями имеют определенный предел. При том же условии, наложенном на кривую, параллельный перенос при развертывании касательных плоскостей также однозначно определен и дает тот же результат. Но обратное утверждение неверно, и это показывает, в частности, что такие два определения параллельного переноса не эквивалентны.

В дальнейшем мы понимаем под параллельным переносом операцию, определенную посредством проекций.

7.2. Ю. Ф. Борисов доказывает далее, что равномерная сходимость параллельного переноса на компактном множестве спрямляемых кривых (на данной поверхности) эквивалентна следующим двум условиям: 1) $\frac{\theta^2}{\rho} \to 0$ равномерно при $\rho \to 0$, где ρ есть расстояние между любыми двумя точками, а θ — угол между нормалями в них; 2) «ориентированная площадь» сегмента сферического изображения кривой равномерно мала по сравнению с длиной дуги.

Ю. Ф. Борисов доказал, что параллельный перенос имеет внутренний смысл. Его внутреннее определение может быть

*) Результаты приводятся в формулировках, уточненных по более поздним публикациям Ю. Ф. Борисова.

дано для этих поверхностей следующим образом: ***вектор а переносится по геодезической, т. е. локально кратчайшей линии, если угол между вектором и линией остается неизменным.*** Перенос вдоль кривой определяется при помощи параллельного переноса вдоль вписанных геодезических ломаных с естественным переходом к пределу. Затем Ю. Ф. Борисов доказал, что этот внутренний параллельный перенос определен для любой спрямляемой кривой и эквивалентен внешнему параллельному переносу, определенному выше.

Результаты, полученные Ю. Ф. Борисовым, являются далеко не простыми, ибо вначале нужно дать внутреннее, не зависящее от системы координат, чисто метрическое определение вектора на поверхности и угла между вектором и кратчайшей. Эти определения основаны на понятии угла, несколько более широком, чем понятие, используемое в теории М. О. К. Говорят, что ***две кривые имеют одинаковое направление в точке О, если угол между ними равен нулю.*** Введя таким образом понятие направления, мы сразу же имеем понятие вектора.

Мы не будем упоминать другие результаты Ю. Ф. Борисова, за исключением теоремы Гаусса — Бонне. Ю. Ф. Борисов доказывает, что на рассматриваемых им поверхностях для любой области G со спрямляемой границей L, геоморфной кругу и имеющей сферическое изображение внутри полусферы, справедлива формула Гаусса — Бонне. Поворот вектора при параллельном переносе вдоль L равен площади сферического изображения области G, определенной как некоторый криволинейный интеграл по сферическому изображению L. Этот результат кажется мне тем более интересным, что поверхности, изученные Борисовым, не являются, вообще говоря, многообразиями ограниченной кривизны, так что их кривизна не является вполне аддитивной функцией множества.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров

(СССР)

В этом докладе, который был приготовлен Владимировым и мною, я коснусь некоторых математических вопросов, возникших в квантовой теории поля.

По нашему мнению, современная квантовая теория поля представляет большой интерес для математики как источник новых математических проблем. Заметим, что уже обычная, нерелятивистская, квантовая механика оказала существенное влияние на развитие нового раздела математики — теории обобщенных функций. В связи с этим достаточно упомянуть, что именно в своих квантовомеханических исследованиях Дирак впервые ввел в рассмотрение известные дельта-функции и, по существу, пользовался понятием несобственного (слабого) перехода к пределу как средством для определения обобщенных функций.

Оперируя с обобщенными функциями, физики не уделяли надлежащего внимания вопросам строгого математического обоснования своей аргументации. Из-за отсутствия математически обоснованных «правил обращения» математики долгое время скептически относились к возможности введения в математику понятий дельта-функции и других необычных функций.

Однако теперь, после трудов Соболева [1] и Шварца [2], теория обобщенных функций превратилась в строгую математическую дисциплину. Ее область приложений к другим ветвям математики в настоящее время все больше расширяется. Квантовая теория поля имеет дело с так называемыми обобщенными функциями медленного роста (tempered distributions в терминологии Шварца).

Дадим здесь краткое объяснение того, что же представляют собой обобщенные функции. Физик-теоретик сказал бы примерно так: *сингулярные, или обобщенные, функции определяются просто заданием правил «интегрирования» их с достаточно регулярными функциями. В отличие от обычных функций, они не определяются заданием их значений при различных значениях аргументов.*

Попробуем теперь формализовать этот интуитивный подход и сформулируем одно из возможных строгих определений.

Рассмотрим пространство Шварца S бесконечно дифференцируемых функций $F(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, таких, что $F(x)$ и любая ее частная производная убывают на бесконечности быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|x|}$. Рассмотрим линейные непрерывные функционалы $L(F)$ в этом пространстве и условимся представлять их в форме

$$L(F)=\int K(x)\,F(x)\,dx.$$

Тогда $K(x)$ называется обобщенными функциями. Введенные таким путем обобщенные функции обладают рядом очень удобных свойств. Так, например, их можно неограниченно дифференцировать, переходить к преобразованиям Фурье и т. д. Но все эти хорошие свойства исчезают, как только мы попытаемся совершать нелинейные операции над ними.

Даже такая, казалось бы, элементарная операция, как умножение двух обобщенных функций, вообще говоря, уже не имеет смысла. Отметим, что этот факт весьма тесно связан с появлением так называемых «расходимостей» в квантовой теории поля. Скажем по этому поводу несколько слов. Основной задачей теории является определение матрицы рассеяния S, через элементы которой выражаются, например, вероятности различных процессов, происходящих при соударениях частиц. Для определения S-матрицы ее элементы обычно разлагаются в ряды теории возмущений по малому параметру, характеризующему интенсивность взаимодействия.

В случае электродинамики этот параметр действительно может считаться малым (он равен $1/137$), и потому теория возмущения и была применена впервые именно к вопросам квантовой электродинамики. Как известно, в квантовой теории поля n-й член разложения матрицы S представляется интегралом от так называемого хронологического произведения

$$T\{\mathscr{L}(x_1)\ldots\mathscr{L}(x_n)\},$$

где $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$, x^0 — время, $\mathscr{L}(x)$ — оператор, представляющий лагранжиан взаимодействия.

Чисто формальное «определение» хронологического произведения следующее: *это есть произведение операторов L, расположенных в порядке возрастания времени справа налево.*

Явный вид любого матричного элемента такого выражения приводит к произведениям типа

$$\Pi\mathscr{D}^{(c)}(x_i-x_j), \tag{1}$$

где $\mathscr{D}^{(c)}(x)$ — обобщенные функции, определяемые интегральными представлениями вида

$$\mathscr{D}^{(c)}(x)=\mathscr{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\int\frac{e^{ipx}}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,dp. \tag{2}$$

Здесь $\mathscr{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — некоторый полином; интегралы в (2) берутся по всему четырехмерному пространству импульсных переменных $p=(p^0, p^1, p^2, p^3)$, и

$$p^2=(p^0)^2-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant3}(p^\alpha)^2,\qquad px=p^0x^0-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant3}p^\alpha x^\alpha.$$

Формально вычисляя выражения, содержащие произведения (1), с помощью преобразования Фурье, мы и приходим к известным расходимостям из-за недостаточно быстрого убывания подынтегральных функций при возрастании p.

К квантовой теории поля был разработан специальный вычислительный формализм, с помощью которого удалось устранить расходимости из каждого члена разложения S-матрицы. В важных работах Дайсона [4] и Салама [5] этому приему была придана весьма общая форма, но характер его все же остался чисто рецептурным, так как в соответствующих рассуждениях приходилось оперировать с бессмысленными расходящимися выражениями. Интересное свойство произведений вида (1) было замечено Парасюком [6].

Чтобы попытаться придать им смысл, Парасюк рассмотрел аппроксимирующие последовательности регулярных функций $\mathscr{D}_M^{(c)}(x)$, которые в несобственном смысле стремятся к $\mathscr{D}^{(c)}(x)$ при $M \to \infty$. Оказалось, что произведения

$$\Pi \mathscr{D}_M^{(c)}(x_i, -x_j),$$

вообще говоря, не имеют даже несобственного предела; однако такой предел существует в более ограниченном смысле. Именно, если ввести более узкое понятие локального несобственного предела в пространстве точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с выключенными возможностями совпадения любой пары аргументов x_i, x_j, тогда такой предел будет существовать. Более точно, этот предел существует на подпространстве основных функций, которые вместе со всеми своими частными производными обращаются в нуль при совпадающих аргументах. Таким образом, проблема доопределения произведения (1) сводится к задаче расширения линейного непрерывного функционала, заданного на упомянутом пространстве, на пространство всех основных функций.

Эта задача, однако, не имеет такой степени произвола, как можно было бы ожидать на первый взгляд. Дело в том, что это расширение нужно производить таким образом, чтобы не нарушить основных физических требований, предъявляемых к матрице S. Мы имеем в виду самые общие условия, а именно ковариантность, унитарность и причинность. Эти физические условия были сформулированы чисто математически в работе [3] в виде ряда соотношений, наложенных на члены разложения матрицы S.

Эта задача расширения, с учетом указанных условий, и была решена в совместной с Парасюком работе [7], причем получившийся алгоритм оказался по существу эквивалентным вычислительной процедуре Дайсона — Салама. Следует подчеркнуть, что вопрос об устранении расходимостей был решен только в рамках теории возмущений. Сходимость же самих рядов теории возмущений не доказана. Более того, выдвинуты довольно убедительные соображения об их расходимости.

Оставляя в стороне такие более тонкие вопросы, обратим наше внимание на гораздо более грубые факты. Хорошо было говорить о малом параметре в квантовой электродинамике при изучении взаимодействия электронов с фотонами. При изучении же сильных взаимодействий, например нуклон-мезонных, соответствующий параметр, характеризующий интенсивность взаимодействия, равен примерно 15. И потому надеяться получить с помощью нескольких членов ряда теории возмущений какое-либо, хотя бы асимптотическое, приближение совершенно безнадежно. Вопрос же о регуляризации точных уравнений квантовой теории поля до сих пор весьма далек от своего решения. Для этого, в частности, необходимо определить умножения обобщенных функций более общего типа, чем (2). Изложенное обстоятельство обусловливает большой интерес к любым попыткам кардинального выхода за рамки теории возмущений.

За последние годы появилось новое направление исследований с очень интересным и глубоким подходом. Не связываясь с каким-либо специальным вариантом мезонной теории, эти исследования исходят лишь из самых основных положений современной квантовой теории поля, таких, как ковариантность, унитарность, причинность матрицы рассеяния и свойства энергетического спектра. В результате этих исследований удалось получить ряд так называемых дисперсионных соотношений *) между величинами, которые можно определить из опытов по рассеянию частиц.

Дисперсионные соотношения, следовательно, могут быть доступны экспериментальной проверке. Пока еще нет указаний на то, что они противоречат опыту. Но экспериментальные исследования становятся все более точными. Представим себе положение, которое возникнет, если будет показано, что некоторые дисперсионные соотношения не выполняются. Тогда это будет означать, что самые основные положения современной теории нуждаются в радикальном пересмотре, так как только они и учитываются при выводе дисперсионных соотношений. В данной связи понятно то большое внимание, которое уделяется вопросам строгого доказательства дисперсионных соотношений. Надо действительно иметь уверенность, что невыполнение дисперсионных соотношений фактически означает неверность основных аксиом современной теории.

*) См. работу [8], где приведена соответствующая библиография.

Кроме того, за последнее время выяснилось, что дисперсионные соотношения представляют весьма эффективное средство для получения информации о взаимодействиях элементарных частиц. Их можно также использовать для получения приближенных уравнений для определения вероятностей различных процессов соударений, происходящих при не слишком высоких энергиях.

Дисперсионные соотношения представляют собой точные интегральные соотношения между действительной и мнимой частями матричных элементов матрицы рассеяния. Основным средством получения дисперсионных соотношений является теорема Коши, для применения которой необходимо знать свойства аналитичности матричных элементов в комплексной области. Так как матричные элементы являются, вообще говоря, обобщенными функциями, то тем самым возникает задача аналитического продолжения обобщенных функций.

Чтобы пояснить сказанное, предположим, несколько упростив реальное положение вещей, что нам заданы две обобщенные функции $f_r(t)$ и $f_a(t)$ одного переменного t, причем в силу условий причинности $f_r(t)$ обращается в нуль при $t < 0$ (запаздывающая функция) и $f_a(t)$ обращается в нуль при $t > 0$ (опережающая функция). Тогда ясно, что их преобразования Фурье $\tilde{f}_r(E)$ и $\tilde{f}_a(E)$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. Теперь воспользуемся условием спектральности, математическое выражение которого состоит в том, что в интервале энергий $|E| < \mu$ функции $\tilde{f}_j(E)$ $(j = r, a)$ совпадают. Из этого условия вытекает существование единой аналитической функции $\tilde{f}(z)$, голоморфной во всей плоскости комплексного переменного z, за исключением линий разреза

$$-\infty < \operatorname{Re} z \leqslant \mu, \quad \mu \leqslant \operatorname{Re} z < \infty, \quad \operatorname{Im} z = 0.$$

Так как $f_j(t)$ — обобщенные функции медленного роста, то построенная функция $\tilde{f}(z)$ полиномиально ограничена (см. [9]) в области, где

$$|\operatorname{Im} z| \geqslant \delta > 0.$$

Обозначая через n степень мажорирующего полинома и применяя теорему Коши с использованием соответствующего контура, получим интегральное представление для функции $\tilde{f}(z)$:

$$\tilde{f}(z) = \frac{(z-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\mu} + \int\limits_{\mu}^{\infty}\right)\frac{\tilde{f}_r(E') - \tilde{f}_a(E')}{(E'-z)(E'-E_0)^{n+1}}\,dE' + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\tilde{f}^{(k)}(E_0)(z-E_0)^k,$$

где $|E_0| < \mu$. Переходя на вещественную ось, из этого представления легко получим искомое дисперсионное соотношение.

Разумеется, в действительности положение вещей значительно более сложно, хотя бы потому, что матричные элементы зависят от многих переменных. Так, например, уже в случае функций $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, зависящих от одного четырех-вектора $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и обращающихся в нуль вне опережающего $(x \lesssim 0)$ и запаздывающего $(x \gtrsim 0)$ световых конусов соответственно, мы сталкиваемся со следующей трудностью. Для того чтобы сделать применимой к этому случаю приведенную выше схему получения дисперсионных соотношений, необходимо установить свойства аналитичности в комплексной плоскости энергетической переменной E функций

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(E, e) = \int e^{i\left(Ex^0 - \sqrt{E^2-\mu^2}\,ex\right)}\mathcal{F}_j(x)\,dx, \quad |e| = 1 \quad (j = r,\ a). \tag{3}$$

Однако из приведенной формулы видно, что эти функции могут быть аналитически продолжены в соответствующие полуплоскости лишь при нефизическом условии $\mu^2 < 0$ *). Более того, сами выражения (3) определены только на двух отрезках действительной оси:

$$-\infty < E < -\mu, \quad \mu < E < \infty.$$

Поэтому для аналитического продолжения этих функций приходится прибегать к сложным искусственным приемам. Благоприятным обстоятельством здесь является спектральное

---

*) В связи с этим отметим исследования Шварца [10] и Лионса [11], где изучалась связь между носителями обобщенной функции и свойствами аналитичности ее преобразования Лапласа.

условие, согласно которому функции $\tilde{\mathscr{F}}_j(p)$ совпадают в некоторой области импульсных переменных p.

Возникающая при этом общая чисто математическая проблема принадлежит к следующему типу. Пусть в пространстве n 4-векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ заданы обобщенные функции $\mathscr{F}_j(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$, обращающиеся в нуль вне соответствующих комбинаций запаздывающих и опережающих световых конусов. Пусть, далее, их фурье-образы $\tilde{\mathscr{F}}_j(p_1, \ldots, p_n)$ совпадают в некоторой области $\mathscr{G}_0$ импульсных переменных $(p_1, \ldots, p_n)$. Спрашивается: существует ли в пространстве $4n$ комплексных переменных

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = (p_1 + iq_1, \ldots, p_n + iq_n)$$

функция $\tilde{\mathscr{F}}(z)$, голоморфная в некоторой области $\mathscr{G}$ и совпадающая при вещественных z с функциями $\tilde{\mathscr{F}}_j(p_1, \ldots, p_n)$? Так как конкретный вид функций $\tilde{\mathscr{F}}_j$ нам не известен, то, естественно, представляет интерес пересечение всех таких областей (если, конечно, оно не пусто).

Под аналитическим продолжением обобщенной функции $\tilde{f}(p)$ из вещественной области $\mathscr{G}_1$ в комплексную область $\mathscr{G}$ мы будем понимать такую голоморфную в области $\mathscr{G}$ функцию $\tilde{f}(p + iq)$, которая обладает свойствами *):

1) при каждом фиксированном q функция $\tilde{f}(p+iq)$ — обобщенная относительно p для тех p, для которых $p + iq \in \mathscr{G}$;

2) $\tilde{f}(p+iq)$ сходится в несобственном смысле в области $\mathscr{G}_1$ к $\tilde{f}(p)$ при $q \to 0$. Это значит, что для любой основной функции $\varphi(p)$, носитель которой заключен в $\mathscr{G}$, имеет место

---

*) В наиболее важном и интересном частном случае, когда $\mathscr{G}_1$ совпадает со всем вещественным пространством, а $\mathscr{G}$ — трубовая область, примыкающая к вещественному пространству, например:

$$\mathscr{G} = [p + iq;\ q \in \Gamma,\ p \text{ — любые}],$$

где Γ — конус с вершиной в нуле, условия 1) и 2) примут вид: 1) при каждом $q \in \Gamma$ функция $\tilde{f}(p + iq)$ ограничена полиномом относительно p и степень этого полинома не зависит от q; 2) для любой $\varphi(p) \in S$ справедливо предельное соотношение

$$\int \tilde{f}(p + iq)\, \varphi(p)\, dp \to \int \tilde{f}(p)\, \varphi(p)\, dp, \quad q \to 0, \quad q \in \Gamma.$$

предельное соотношение

$$\int \tilde{f}(p+iq)\,\varphi(p)\,dp \to \int f(p)\,\varphi(p)\,dp \quad \text{при} \quad q \to 0.$$

Таким образом, мы видим, что рассматриваемый круг вопросов концентрируется вокруг двух интенсивно развивающихся областей математики — теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных.

Приведем некоторые конкретные результаты, которые имеют не только самостоятельный интерес, но и могут играть роль лемм при рассмотрении более сложных случаев. Сначала отметим важный результат, так называемую теорему «edge of the wedge».

Теорема I. *Пусть две обобщенные функции* $\mathcal{F}_r(x)$ *и* $\mathcal{F}_a(x)$ *обращаются в нуль вне опережающего и запаздывающего световых конусов соответственно. Пусть их преобразования Фурье* $\tilde{\mathcal{F}}_j(p)$ $(j=r,\ a)$ *совпадают в области* $\mathcal{G}_0$. *Тогда существует функция* $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ *четырех комплексных переменных* $z=(z^0,\ z^1,\ z^2,\ z^3)$, *голоморфная в некоторой области* $\mathcal{G}$, *вещественное сечение которой есть* $\mathcal{G}_0$, *и такая, что при всех вещественных* $z=p$ *из* $\mathcal{G}_0$

$$\tilde{\mathcal{F}}(p)=\tilde{\mathcal{F}}_r(p)=\tilde{\mathcal{F}}_a(p).$$

Сформулированная теорема непосредственно вытекает из теоремы, доказанной в 1956 г. одним из авторов доклада ([8], Математическое дополнение). Эта теорема гласит:

Пусть функции $\mathcal{F}_j(x)$ $(j=r,\ a)$ *обладают свойствами запаздывания и опережения соответственно, и пусть их преобразования Фурье совпадают в сфере радиуса* η *с центром в начале координат. Тогда существует одновременное аналитическое продолжение* $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ *функций* $\tilde{\mathcal{F}}_j(p)$ *в область*

$$|z^0| < 0{,}18\eta, \quad |\mathbf{z}| < 0{,}18\eta. \tag{4}$$

При этом для достаточно больших показателей r и s можно построить «универсальные» функции $H_j(z,\ p')$ $(j=r,\ a)$ со свойствами:

а) $H_j(z,\ p')$ как функции p' принадлежат к классу $C(r,\ s,\ 4)$ (см. [3]), а как функции z являются голоморфными в области (4);

б) в области (4) $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ имеет интегральное представление

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{j=r,\,a} \int \tilde{\mathcal{F}}_j(p') H_j(z, p')\, dp'. \tag{5}$$

Наметим коротко схему доказательства последней теоремы. Вводя режущий фактор $-\varepsilon(x^0)^2 - \varepsilon\boldsymbol{x}^2$ в экспоненту, определяем «сглаженные» преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_j(z, \varepsilon)$, являющиеся целыми аналитическими функциями z, и строим функцию

$$\mathcal{F}(z, \varepsilon) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}_r(z, \varepsilon) - T(z, \varepsilon) & (\operatorname{Im} z^0 > 0), \\ \tilde{\mathcal{F}}_a(z, \varepsilon) - T(z, \varepsilon) & (\operatorname{Im} z^0 < 0), \end{cases}$$

где

$$T(z, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{\tilde{\mathcal{F}}_r(t, \boldsymbol{z}, \varepsilon) - \tilde{\mathcal{F}}_a(t, \boldsymbol{z}, \varepsilon)}{t - z^0}\, dt.$$

Функция $\mathcal{F}(z, \varepsilon)$ голоморфна внутри круга радиуса R.

Далее определяется множество тех z, для которых $T(z, \varepsilon)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Используя полученные факты и применяя теорему Коши, устанавливаем область равномерной сходимости функции $\mathcal{F}(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ к аналитической функции $\tilde{\mathcal{F}}(z)$. Одновременно получаем и формулу (5).

Теорема I впоследствии была заново доказана другими методами Бремерманом, Эме и Тейлором в [12], где она была названа теоремой «edge of the wedge». Третье доказательство было дано Йостом и Леманом в [13].

Следует отметить, что выявляются по крайней мере три метода доказательства теорем типа теоремы I и ее различных обобщений и модификаций:

1) Метод теории обобщенных функций с использованием различных способов параметризации. Идейная сторона этого метода в его простейшей форме была проиллюстрирована на приведенной выше схеме доказательства теоремы I. Дальнейшее развитие и усовершенствование эта методика получила в наших работах [14, 15, 16].

2) Метод Бремермана, Эме и Тейлора [12], в котором основой доказательств является теория функций многих комплексных переменных: разложения в ряды и построения обо-

лочек голоморфности областей. Под оболочкой голоморфности области $\mathscr{G}$ (см., например, Бохнер и Мартин [17], гл. IV) мы понимаем пересечение областей голоморфности всех функций, которые голоморфны в $\mathscr{G}$. Если оболочка голоморфности области совпадает с самой областью, то такую область мы будем называть областью голоморфности.

3) Метод Иоста и Лемана [10], развитый и усовершенствованный впоследствии Дайсоном в работе [18], в котором основой является построение интегрального представления для обобщенных функций, преобразования Фурье которых обращаются в нуль вне светового конуса, а сами функции равны нулю в области вида

$$a - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + b^2} < p^0 < -a + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + c^2}. \qquad (6)$$

Изложим вкратце схему рассуждения Дайсона. Пусть функция $f(x)$ равна нулю вне светового конуса. Тогда функция $\tilde{f}(p)$ представима в виде

$$\tilde{f}(p) = \tilde{\mathscr{F}}(p^0, p^1, p^2, p^3, 0, 0) = \tilde{\mathscr{F}}(p), \qquad (7)$$

где $\tilde{\mathscr{F}}(p)$ есть функция шести переменных $p = (p^0, p^1, \ldots, p^5)$, удовлетворяющая шестимерному волновому уравнению

$$\Box_6 \tilde{\mathscr{F}}(p) = 0.$$

Используя представление решения волнового уравнения и учитывая (7), получаем представление для функции $\tilde{f}(p)$:

$$\tilde{f}(p) = \int d\Sigma_\alpha [\tilde{\mathscr{F}}(r), \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \mathscr{D}(r - \hat{p})], \qquad (8)$$

где интегрирование производится по любой пространственно подобной поверхности в шестимерном пространстве и $\mathscr{D}(p)$ есть нечетная инвариантная функция в шестимерном пространстве:

$$\mathscr{D}(p) = \frac{1}{2\pi^2} \mathscr{E}(p^0)\, \delta'(p^2).$$

Для того чтобы удовлетворить условию $\tilde{f}(p) = 0$ в области (6), в представлении (8) выбирается соответствующая пространственно подобная поверхность. Это приводит к окончательному представлению:

$$\tilde{f}(p) = \int d_4 u \int dk^2 \mathscr{E}(p^0 - u^0)\, \delta[(p - u)^2 - k^2]\, \overline{\varphi}(u, k^2), \qquad (9)$$

где функция $\overline{\psi}(u, k^2)$ исчезает всюду, за исключением тех (u, k), которые лежат в определенной области, однозначно определяемой параметрами a, b и c. Мы не будем выписывать конкретный вид этой области. Детали можно найти в оригинальной работе Дайсона [18].

Представление (9) не единственно. Справедливо также и обратное утверждение: *всякая функция, представимая в виде* (9), *исчезает в области* (6), *а ее преобразование Фурье исчезает вне светового конуса.*

Приведем несколько примеров конкретного вычисления областей $\mathcal{G}$ для различных областей $\mathcal{G}_0$.

1. Пусть $\mathcal{G}_0$ есть полоса $|p^0| < m$. Тогда $\mathcal{G}$ есть совокупность точек $z = p + iq$, удовлетворяющих неравенству (см. [8])

$$|\boldsymbol{q}| < |\operatorname{Im} \sqrt{(p^0 + iq^0)^2 - m^2}|. \tag{10}$$

Этот результат получен также в работе [12], где доказано, что область (10) не допускает дальнейшего аналитического расширения, т. е. является областью голоморфности. Доказательство основано на построении оболочки голоморфности для областей специального шага

$$[p + iq: \; p^0 + iq^0 \in \mathcal{B}, \quad |\boldsymbol{q}| < \mathcal{V}^{\rho}(p^0, q^0), \quad |\boldsymbol{p}| < \infty], \tag{11}$$

называемых полутрубовыми. В работе Бремермана [19] доказано, что оболочкой голоморфности полутрубы (11) является область такого же вида, где функцию $\mathcal{V}^{\rho}$ необходимо заменить на ее наименьшую супергармоническую мажоранту (в области $\mathcal{B}$).

2. Пусть $\mathcal{G}_0$ есть внешность гиперболоида

$$(p^0)^2 < \boldsymbol{p}^2 + m, \quad m \gtrless 0.$$

Тогда область $\mathcal{G}$ ограничена аналитической гиперповерхностью

$$(z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 = \rho, \qquad \max[0, m] \leqslant \rho < \infty.$$

Следовательно, дальнейшее аналитическое расширение полученной области невозможно (см. Бенке и Туллен [20]). Более того, функция $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ представима в виде

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \sum \mathcal{P}_k(z)\, \Phi_k((z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2) \tag{12}$$

с конечным числом членов в сумме. В представлении (12) $\mathcal{P}_k(z)$ — полиномы, а функции $\Phi_k(w)$ полиномиально ограничены [15]. Этот результат при $m>0$ можно получить также и методом Иоста—Лемана— Дайсона, если положить в (6) $a=0$, $b^2=c^2=m$.

3. Если $\mathscr{G}_0$ есть область

$$c_1-\sqrt{\gamma_1 \boldsymbol{p}^2+\sigma^2}<p^0<c_2+\sqrt{\gamma_2 \boldsymbol{p}^2+\delta^2} \qquad (\gamma_i \geqslant 0),$$

то область $\mathscr{G}$ есть совокупность точек $p+iq$, удовлетворяющих условиям: либо $q^2>0$, либо при $q^2\leqslant 0$

$$c_1-\sqrt{\gamma_1 e_2(|\boldsymbol{p}|-|q|)+\sigma^2}+|q|<p^0<c_2+$$
$$+\sqrt{\gamma_2 e_2(|\boldsymbol{p}|-|q|)+\delta^2}-|q|,$$

где $e_2(\xi)=\xi^2$ при $\xi>0$ и $e_2(\xi)=0$ при $\xi<0$; $|q|=\sqrt{-q^2}$. В этом примере область $\mathscr{G}$ фактически шире указанной, но определяется более сложными условиями (см., например, [14] и [16]).

Приведенные результаты позволяют доказать следующую теорему, являющуюся основной при обосновании дисперсионных соотношений для упругого рассеяния частиц.

Теорема II. *Пусть даны четыре обобщенные функции четырех 4-векторов*

$$\mathscr{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i, j=r, a),$$

инвариантные относительно преобразований из неоднородной ортохронной группы Лоренца. Предположим, что эти обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{F}_{rr}=0, & \text{если } x_1\lesssim x_3 & \text{или } x_2\lesssim x_4; \\
\mathscr{F}_{ra}=0, & \text{если } x_1\lesssim x_3 & \text{или } x_2\gtrsim x_4; \\
\mathscr{F}_{ar}=0, & \text{если } x_1\gtrsim x_3 & \text{или } x_2\lesssim x_4; \\
\mathscr{F}_{aa}=0, & \text{если } x_1\gtrsim x_3 & \text{или } x_2\gtrsim x_4.
\end{array}$$

Предположим, далее, что их преобразования Фурье

$$\tilde{\mathscr{F}}_{ij}(p_1, p_2, p_3, p_4),$$

определенные, очевидно, на многообразии

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0, \tag{13}$$

удовлетворяют условиям:

$$\tilde{\mathscr{F}}_{rj}=\tilde{\mathscr{F}}_{aj}, \text{ если } p_1^2<(\mathscr{M}+\mu)^2 \text{ и } p_3^2<\gamma^2\mu^2 \; (j=r,\ a);$$

$$\tilde{\mathscr{F}}_{ir}=\tilde{\mathscr{F}}_{ia}, \text{ если } p_2^2<(\mathscr{M}+\mu)^2 \text{ и } p_4^2<\gamma^2\mu^2 \; (i=r,\ a);$$

$$\tilde{\mathscr{F}}_{ij}=0, \quad \text{ если } (p_1+p_3)^2<(\mathscr{M}+\mu)^2$$

$$\text{или } p_1^0+p_3^0<0 \qquad (i,\ j=r,\ a).$$

Считаем, что $\gamma>1$, $\mathscr{M}+\mu\geqslant\gamma\mu$, *и пусть* V *и* τ_0 — *любые фиксированные числа, подчиненные неравенствам*

$$V<\tau_0\leqslant\mu^2, \qquad \tau_0\geqslant-\mu(2\mathscr{M}+\mu).$$

Тогда можно указать достаточно малое положительное число ρ *и построить обобщенную функцию*

$$\Phi(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_5;\ \xi)$$

вещественной переменной ξ *со свойствами:*

1) $\Phi(z_1,\ \ldots,\ z_5;\ \xi)$ *есть голоморфная функция относительно* $(z_1,\ \ldots,\ z_5)$ *в области*

$$\left.\begin{array}{l} |z_1-\mathscr{M}^2|<\rho, \quad |z_2-\mathscr{M}^2|<\rho, \quad |z_3-\tau|<\rho, \\ |z_4-\tau|<\rho, \quad |z_5+4\Delta^2|<\dfrac{\rho}{\xi}, \end{array}\right\} \tag{14}$$

где вещественные параметры τ *и* Δ^2 *независимо пробегают промежутки*

$$V\leqslant\tau\leqslant\tau_0, \qquad 0\leqslant\Delta^2\leqslant\gamma\mu^2\left(1-\frac{\mu^2-\tau_0}{2\mu(\mathscr{M}+\mu)}\right)-\tau_0. \tag{15}$$

2) $\Phi(z_1,\ldots,z_5;\ \xi)=0$, *если* $\xi<(\mathscr{M}+\mu)^2$.

3) *Для вещественных* $(p_1,\ldots,p_4)$ *из многообразия* (13), *для которых величины*

$$z_i=p_i^2 \; (i=1,\ldots,4), \qquad z_5=(p_1+p_2)^2$$

лежат в области (14) *и* $\xi=(p_1+p_3)^2$, $p_1^0+p_3^0>0$, *имеет место представление*

$$\tilde{\mathscr{F}}_{ij}(p_1,\ldots,p_4)=\Phi\left[p_1^2,\ p_2^2,\ p_3^2,\ p_4^2,\ (p_1+p_2)^2;\ (p_1+p_3)^2\right].$$

Верхнюю границу для Δ^2 в (15) можно увеличить. Для этого приходится обращаться к численному решению системы трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными числами (подробности см. в работе [16]). Так, например, для рассеяния мезонов на нуклонах ($\gamma = 3$, $\tau_0 = \mu^2$, $\mathcal{M} = 7\mu$) формула (15) дает

$$\Delta^2 \leqslant 2\mu^2, \tag{16}$$

в то время как в результате численного счета получаем

$$\Delta^2 \leqslant 2{,}56\ \mu^2.$$

Оценка (16) получена также в работе Бремермана и др. [12] при помощи упомянутого выше метода полутруб. В этой работе обращается также внимание на тот факт, что интервал (16) может быть раздвинут с помощью дальнейшего аналитического расширения.

Недавно Леман получил результат [21]

$$\Delta^2 < \frac{8}{3}\,\frac{2\mathcal{M} + \mu}{2\mathcal{M} - \mu}\,\mu^2 \approx 3\mu^2,$$

используя метод интегральных представлений Иоста— Лемана— Дайсона. Этот результат был также приведен в примечании в [12].

Примеры, приведенные в работе Бремермана и др. [12], показывают, что безграничное увеличение верхней грани для Δ^2 в теореме II невозможно. Так, например, теорема типа теоремы II для рассеяния нуклонов на нуклонах может быть установлена только для нефизического соотношения масс

$$\mu > (\sqrt{2} - 1)\,\mathcal{M}, \tag{17}$$

если принимать во внимание только условия причинности и спектральности. Однако существуют еще условия симметрии функций Грина. Дадут ли эти условия возможность дальнейшего продолжения, вопрос остается открытым. Во всяком случае, для мезон-нуклонной вершинной функции пример Иоста [22] показывает, что даже включение условий симметрии не обеспечивает дисперсионных соотношений, если

$$\mu < \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\mathcal{M},$$

которое как раз удовлетворяется для реального отношения масс.

В заключение доклада остановимся на работах, посвященных изучению свойств аналитичности вакуумных средних значений скалярных полей. В работе Челлена и Уайтмана [23] были установлены свойства аналитичности вакуумных средних значений трех скалярных полей

$$\mathcal{F}^{\mathcal{ABC}}(x-x',\ x'-x'')=\langle o\,|\,\mathcal{A}(x)\,\mathcal{B}(x')\,\mathcal{C}(x'')\,|\,o\rangle,$$

обусловливаемые локальной коммутативностью, спектральными свойствами и лоренцевской инвариантностью. Найдено, что все шесть различных вакуумных средних значений, которые могут быть получены перестановками их трех операторов $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x')$ и $\mathcal{C}(x'')$, являются граничными значениями одной и той же аналитической функции трех комплексных переменных, область голоморфности которой оказывается ограниченной семью аналитическими гиперповерхностями. Доказано, что дальнейшее аналитическое расширение полученной области с использованием только перечисленных свойств невозможно. При доказательствах в этой работе широко используются методы теории функций многих комплексных переменных, в частности аналитические расширения. Кроме того, существенно используется теорема Баргмана, Холла и Уайтмана [24], которая гласит:

Пусть f, функция n комплексных 4-векторов $z_1, \ldots, z_n$, аналитична в трубовой области

$$-\infty<\operatorname{Re} z_j<\infty,\quad \operatorname{Im} z_j^0>|\operatorname{Im} z_j| \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{18}$$

и инвариантна относительно ортохронной однородной группы Лоренца. Тогда f есть функция только скалярных произведений $z_jz_k (j,\ k=1,\ \ldots,\ n)$, аналитическая на комплексном многообразии, которое пробегают скалярные произведения, когда $(z_1,\ldots,\ z_n)$ пробегают область (18).

Интересно отметить, что, хотя область (18) и не содержит ни одной вещественной точки, лоренцевская инвариантность влечет за собой аналитичность в некоторой области вещественных точек. Именно, как показал Иост [25], эта область состоит из точек $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, обладающих тем свойством, что выпуклое тело

$$\xi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \qquad \left(\lambda_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\right)$$

целиком состоит из пространственно подобных векторов. Пример, построенный Иостом в [25], показывает, что без дополнительных предположений эту область увеличить нельзя.

Приведенные результаты играют существенную роль при установлении связи между свойствами аналитичности вакуумных средних значений и основными положениями теории (см. Уайтман [26], Дайсон [27], а также упомянутые работы Челлена и Уайтмана [23], Холла и Уайтмана [24] и Иоста [25]).

Добавление авторов

После написания этого доклада прошло более двух лет. В течение этого периода появилось большое количество работ, посвященных затронутым в докладе вопросам. Чтобы познакомить читателя с изменениями, происшедшими за это время, мы даем здесь дополнительный список литературы [28—50] и краткую аннотацию к нему.

В работах Эме и Тейлора [34], Владимирова и Логунова [28], Тодорова [33], Монана [46] и др. получила дальнейшее развитие техника доказательств дисперсионных соотношений. Эта техника опирается, с одной стороны, на развитие и обобщение первоначальных методов доказательств [8, 12, 21], а с другой стороны — на использование интегрального представления Иоста—Лемана—Дайсона [13, 18]. Это дало возможность доказать дисперсионные соотношения для больших интервалов передачи импульса Δ^2 и охватить более широкий круг физических процессов. Развитые в связи с этим методы [29, 50] находят также применение при изучении областей единственности решений одного класса дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [49]. В работах Штайнмана [38, 39] и Рюэлля [47] установлены необходимые и достаточные условия существования функции Уайтмана (вакуумного среднего n скалярных полей) в терминах преобразований Фурье запаздывающей функции или T-произведения. Выводятся некоторые свойства аналитического продолжения этих функций. В частности, установлено, что преобразования Фурье запаздывающей функции и T-произведения являются граничными значениями одной и той же аналитической функции. Эти работы развивают и обобщают результаты Иоста [22], полученные им для $n=3$.

Работа Тейлора [41] представляет собой своего рода математическое дополнение к работе Бремермана и др. [12].

В работе Епштейна [40] дано одно обобщение теоремы «edge of the wedge».

Работа Гроссмана [44] посвящена описанию структуры комплексных точек расширенной трубовой области (extended tube, [24]), подобно тому как это было сделано Иостом [25] для вещественных точек.

В работе Рюэлля [43] доказывается, что вещественные вполне пространственно подобные точки содержатся в оболочке голоморфности объединения всех переставленных расширенных трубовых областей (permuted extended tubes).

В работе Челлена и Толла [45] построено общее интегральное представление всех функций, голоморфных в области, найденной Челленом и Уайтманом [23] для вакуумных средних трех скалярных полей.

В работах Стритера [36, 37, 48] строится общее интегральное представление для двойного коммутатора (без удовлетворения тождества Якоби). Указаны связи интегральных представлений с аналитическими расширениями.

В работах Парасюка [32] и Степанова [31] дано более подробное и уточненное изложение теории вычитательного формализма, построенного в [6, 7].

Другие подходы к регуляризации членов ряда теории возмущений намечены в работах Степанова [30], Бремермана [35] и Тейлора [41]. Определение произведения одного класса обобщенных функций дано в работе [50].

Здесь, как и в докладе, мы не касаемся интенсивно развивающегося направления по изучению аналитических свойств отдельных членов ряда теории возмущений и, в частности, по доказательствам двойных спектральных представлений Мандельстама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Матем. сб. **1** (43), 39—72 (1936).
[2] Schwartz L., Théorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951.
[3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля. I, II, Успехи физ. наук **55**, 149—214 (1955); **57**, 1—92 (1955).

[4] Dyson F. J., S-matrix in quantum electrodynamics, Phys. Rev. **75**, 1736—1745 (1949).

[5] Salam A., Divergent integrals in renormalizable field theories, Phys. Rev. **84**, 426—431 (1951).

[6] Парасюк О. С., Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах, Изв. АН СССР, сер. матем. **20**, № 6 (1956).

[7] Bogoliubow N. N. und Parasiuk O. S., Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, Acta mathematica **97**, 227—266 (1957).

[8] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., Гостехиздат, 1958.

[9] Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, ДАН **109**, 717—719 (1956).

[10] Schwartz L., Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., Supplementband, 196—206 (1952).

[11] Lions J. L., Supports dans la transformation de Laplace, J. Analyse Math., **2**, 369—380 (1952—53).

[12] Bremermann H. J., Oehme R. and Taylor J. G., A proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys. Rev. **109**, 2178—2190 (1958).

[13] Jost R. und Lehmann H., Integral — Darstellung kausaler Kommutatoren, Nuovo cimento **5**, 1598—1610 (1957).

[14] Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. **22**, 15—48 (1958).

[15] Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С., Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций, Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, № 3, 26—35 (1958); № 2, 179 (1959).

[16] Владимиров В. С., Об определении области аналитичности, Изв. АН СССР, сер. матем. **23**, 275—294 (1959).

[17] Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, Москва, 1951.

[18] Dyson F. J., Integral represantations of causal commutators, Phys. Rev. **110**, 1460—1464 (1958).

[19] Bremermann H. J., Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete, Math. Annalen **127**, 406—423 (1954).

[20] Behnke H. und Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Berlin, 1934.

[21] Lehmann H., Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer, Nuovo cimento **10**, 579—589 (1958).

[22] Jost R., Ein Beispiel zum Nucleon-Vertex, Helv. phys. acta **31**, 263—272 (1958).

[23] Källén G. and Wightman A. S., The analytic properties of the vacuum expectation value of a product of three scalar local fields, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., I, № 6 (1958).

[24] Hall D. and Wightman A. S., A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, Kong. Danske Vid. Selsk. (Mat.-fys. Medd.) **31**, № 5 (1957).
[25] Jost R., Eine Bemerkung zum CTP — Theorem, Helv. phys. acta **30**, 409—416 (1957).
[26] Wightman A. S., Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev. **101**, 860—866 (1956).
[27] Dyson F. J., Connection between local commutativity and regularity of Wightman functions, Phys. Rev. **110**, 579—581 (1958).
[28] Владимиров В. С. и Логунов А. А., Об аналитических свойствах обобщенных функций квантовой теории поля, Изв. АН СССР, сер. матем. **23**, 661—676 (1959).
[29] Владимиров В. С., О построении оболочек голоморфности для областей специального вида, ДАН **134**, 251—254 (1960).
[30] Степанов Б. М., Структура нерелятивистских контрчленов, ДАН **133**, 547—549 (1960).
[31] Степанов Б. М., Формальное определение R-операции, ДАН **137**, 818—821 (1961).
[32] Парасюк О. С., К теории R-операции Боголюбова, Укр. матем. журнал **12**, 287—307 (1960).
[33] Todorov I. T., Analytical properties of the scattering amplitude for inelastic processes involving strange particles, Nuclear Physics **18**, 521—528 (1960).
[34] Oehme R. and Taylor J. G., Proof of dispersion relations for the productions of pions by real and virtual photons and for related processes, Phys. Rev. **113**, 371—380 (1959).
[35] Bremermann H. J., On finite renormalization constants and the multiplication of causal functions in perturbation theory, Technical Report № 8, 1959.
[36] Streater R. F., Special methods of analytic completion in field theory, Proc. Roy. Soc., Ser. A **256**, 39—52 (1960). .
[37] Streater R. F., Some integral representations in field theory, Nuovo cimento **15**, 936—948 (1960).
[38] Steinmann O., Über den Zusammenhang zwischen den Wightman-Funktionen und den retardierten Kommutatoren, Helv. phys. acta **33**, 257—298 (1960).
[39] Steinmann O., Wightman-Funktionen und retardierte Kommutatoren, II, Helv. phys. acta **33**, 347—362 (1960).
[40] Epstein H., Generalization of the «edge of the wedge» theorem, J. Math. Phys. **1**, 524—531 (1960).
[41] Taylor J. G., The renormalization constants in perturbation theory, Nuovo cimento **17**, 695—702 (1960).
[42] Taylor J. G., Dispersion relations and Schwartz's distributions, Ann. of Phys. **5**, 391—398 (1958).
[43] Ruelle D., Analyticity of Wightman functions at completely space-like points, Helv. phys. acta **32**, 135—137 (1959).
[44] Grossmann A., Description of the extended tube, J. Math. Phys. **1**, 85—86 (1960).

[45] Källén G. and Toll J., Integral representations for the vacuum expectation value of three scalar local fields, Helv. phys. acta **33**, 753—772 (1961).
[46] Monan G., Dispersion relation and analjticity of a production amplitude, Nuovo cimento **19**, 331—343 (1961).
[47] Ruelle D., Connection between Wightman functions and Green functions in p-space, Nuovo cimento **19**, 356—376 (1961).
[48] Streater R. F., The double commutator in quantum field theory, J. Math. Phys. **1**, 231—233 (1960).
[49] Владимиров В. С., О применении свойств областей голоморфности к изучению решений дифференциальных уравнений, ДАН **134**, 511—513 (1960).
[50] Владимиров В. С., О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения, Труды МИАН **60**, 101—144 (1961).

О ФУНКЦИЯХ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА *)

А. Картан

(Франция)

Я хочу дать здесь обзор некоторых результатов, полученных за последние три-четыре года в теории аналитических пространств.

1. Предварительные понятия

В течение долгого времени аналитические функции многих комплексных переменных изучались только в открытых множествах арифметических пространств C^n (через C^n обозначается пространство, точки которого имеют в качестве координат n комплексных чисел). В сравнительно недавнее время началось систематическое изучение *аналитических* (комплексных) *многообразий*. Понятие аналитического многообразия сейчас хорошо знакомо всем математикам. Грубо говоря, аналитическое многообразие размерности (комплексной) n есть хаусдорфово топологическое пространство, в окрестности каждой точки которого заданы одна или несколько систем «локальных координат» (комплексных), причем число координат равно n и переход от одной системы локальных координат к другой осуществляется при помощи голоморфных преобразований. Для всякого открытого множества U в аналитическом многообразии X вводится понятие *голоморфной функции* в U (функция f голоморфна в U, если в окрестности каждой точки из U она является голоморфной функцией локальных координат). Голоморфные функции в U образуют кольцо $\mathcal{H}(U)$.

*) H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. Les espaces analytiques.

Заметим, что понятие голоморфной функции носит локальный характер: для того чтобы функция f, непрерывная в U, была голоморфна в U, необходимо и достаточно, чтобы ограничение f_i функции f на каждое из множеств U_i некоторого открытого покрытия множества U было голоморфно в U_i. Это приводит к рассмотрению в каждой точке $x \in X$ кольца $\mathscr{H}_x$ «ростков» голоморфных функций в точке x (это кольцо является индуктивным пределом колец $\mathscr{H}(U)$, связанных с открытыми множествами U, содержащими x). Знание кольца $\mathscr{H}_x$ для каждой точки $x \in X$ полностью определяет структуру аналитического многообразия на X. Точнее говоря, предположим, что в каждой точке x хаусдорфова топологического пространства X задано подкольцо $\mathscr{H}_x$ кольца ростков непрерывных функций (с комплексными значениями) в точке x (мы говорим тогда, что X — *кольцованное* пространство). Для того чтобы на X существовала структура аналитического многообразия размерности n такая, что $\mathscr{H}_x$ для каждой точки x в точности совпадает с кольцом ростков голоморфных функций в точке x, необходимо и достаточно, чтобы X можно было покрыть открытыми множествами U_i, обладающими следующим свойством: существует гомеоморфизм φ_i множества U_i на открытое множество $A_i \subset \boldsymbol{C}^n$ такой, что кольцо $\mathscr{H}_x$ при гомеоморфизме φ_i переходит в кольцо ростков голоморфных функций в точке $\varphi_i(x)$ пространства $\boldsymbol{C}^n$. Это условие можно выразить иначе, сказав, что φ_i определяет *изоморфизм* множества U_i как кольцованного пространства на открытое множество A_i, снабженное его естественной структурой кольцованного пространства. Таким образом, открытые множества в $\boldsymbol{C}^n$, снабженные своей естественной структурой кольцованного пространства, образуют *локальные модели* для аналитических многообразий размерности n.

Но понятие аналитического многообразия не является достаточно общим. Рассмотрим пример. Алгебраическое многообразие, вложенное без особенностей в комплексное проективное пространство, можно рассматривать как аналитическое многообразие. Однако алгебраическое многообразие, вложенное с особенностями в проективное пространство, не охватывается слишком узким понятием аналитического многообразия. Этот пример говорит о необходимости расширить понятие аналитического многообразия и объясняет, почему в математике недавно появилось более общее понятие «аналитического пространства». Аналитические пространства — это в каком-то смысле аналитические многообразия, допускающие некоторые внутренние особенности. Учитывая значение, которое приобрело за последнее время понятие аналитического пространства, мы рассмотрим теперь это понятие более подробно.

2. Аналитические подмножества

Мы будем пользоваться некоторой категорией «моделей», более широкой, чем категория открытых множеств в $\boldsymbol{C}^n$. Прежде чем точно определить ее, нужно напомнить одно определение и некоторые классические результаты. Пусть A — открытое множество в $\boldsymbol{C}^n$. Говорят, что подмножество $M \subset A$ есть *аналитическое подмножество* в A, если M *замкнуто* в A и если для всякой точки $x \in M$ существуют открытое множество U, содержащее x и содержащееся в A, и конечная система функций f_i, голоморфных в U, такие, что $M \cap U$ — это в точности множество тех точек из U, где функции f_i одновременно обращаются в нуль. Коротко говоря, аналитическое подмножество в A — это замкнутое подмножество, которое в окрестности каждой из своих точек определяется голоморфными уравнениями. Локальное строение аналитических множеств хорошо известно со времен Вейерштрасса*). Если x — точка аналитического множества M, то в окрестности точки x множество M является объединением конечного числа аналитических множеств M_i, каждое из которых «неприводимо» в точке x, причем M_i с локальной точки зрения однозначно определены: если имеются два разложения множества M на неприводимые компоненты в точке x, то эти два разложения совпадают, с точностью до порядка, в достаточно малой окрестности точки x. Далее, можно дать локальное описание аналитического множества M, *неприводимого* в точке x. В окрестности точки x можно выбрать локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в объемлющем пространстве, равные нулю в точке x, и целое число $p \leqslant n$ так, что будут выполнены следующие условия. Отображение f множества M в $\boldsymbol{C}^p$, определенное формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (x_1, \ldots, x_p),$$

*) См., например, [27], а также [7], сообщение 14.

является так называемым «разветвленным накрытием» степени k в окрестности точки x. Это означает, что f отображает всякую достаточно малую окрестность точки x в M *на* некоторую окрестность точки 0 в C^p и что полный прообраз точки из C^p, достаточно близкой к 0, состоит, «вообще говоря», из k различных точек множества M (близких к x) и во всяком случае содержит не более чем k точек. Целое число p называется размерностью (комплексной) множества M в точке x (топологическая размерность множества M в окрестности точки x равна $2p$). Точнее говоря, можно выкинуть из C^p в окрестности точки 0 аналитическое подмножество R, все неприводимые компоненты которого в точке 0 имеют размерности $<p$, так, что ограничение отображения f на $M-f^{-1}(R)$ превратит $M-f^{-1}(R)$ в k-листное накрытие (настоящее) многообразия C^p-R, по крайней мере в достаточно малых окрестностях точек $x\in M$ и $0\in C^p$. Координаты каждой из k точек множества $M-f^{-1}(R)$, переходящих при отображении f в заданную точку $(x_1, \ldots, x_p)$, являются *голоморфными* функциями от $x_1, \ldots, x_p$. Проверяется, что $M-f^{-1}(R)$ в окрестности каждой из своих точек является аналитическим подмногообразием (без особенностей) размерности p в объемлющем пространстве C^n. Кроме того, это многообразие *связно*; точнее говоря, существует фундаментальная система открытых окрестностей точки x в объемлющем пространстве, пересекающих $M-f^{-1}(R)$ по связному множеству.

Пусть M — аналитическое подмножество в окрестности точки $x\in C^n$. Мы говорили, что в окрестности точки x множество M является объединением своих неприводимых компонент в точке x. Говорят, что M имеет размерность $\leqslant p$ в точке x, если все неприводимые компоненты множества M в точке x имеют размерности $\leqslant p$. Говорят, что M является чисто p-мерным в точке x, если все компоненты множества M в точке x имеют размерность p.

Пусть снова M — аналитическое подмножество открытого множества $A\subset C^n$. Говорят, что M имеет размерность $\leqslant p$, если M имеет размерность $\leqslant p$ в каждой из своих точек, и что M является чисто p-мерным, если M является чисто p-мерным в каждой из своих точек. Точка $x\in M$ называется *регулярной*, если M в окрестности этой точки является подмногообразием объемлющего пространства. Множество регулярных точек множества M открыто и плотно в M, а множество нерегулярных, или *особых*, точек множества M является аналитическим подмножеством *). Если M является чисто p-мерным, то множество регулярных точек множества M является подмногообразием размерности p в каждой из своих точек, а множество особых точек множества M есть аналитическое подмножество размерности $\leqslant p-1$.

Все эти факты являются классическими. Но недавно Лелон [22] получил результат (другое доказательство его дал де Рам [33]), касающийся интегрирования дифференциальных форм по аналитическим подмножествам, который дает ценную информацию о природе особенностей такого множества. Пусть M — чисто p-мерное аналитическое подмножество открытого множества $A \subset \mathbf{C}^n$. Пусть M' — открытое множество в M, состоящее из регулярных точек множества M. Хорошо известно, что M' в окрестности каждой точки из $M-M'$ имеет конечный $2p$-мерный объем. Следовательно, всякая дифференциальная форма ω степени $2p$, определенная в A и имеющая компактный носитель, обладает интегралом $\int\omega$ по M'. Таким образом, M определяет *поток* размерности $2p$ в открытом множестве A. Лелон и де Рам показали, что *этот поток замкнут*. Это означает, что для любой дифференциальной формы $\bar{\omega}$ степени $2p-1$ с компактным носителем интеграл $\int d\bar{\omega}$ по M' равен нулю (результат верен, если $\bar{\omega}$ — форма класса C^1). Короче говоря, эта теорема показывает, что множеством $M-M'$ особых точек множества M, рассматриваемым как поток размерности (вещественной) $2p-1$, можно пренебречь. До сих пор было известно только, что размерность этого множества как топологического пространства не превосходит $2p-2$.

3. Аналитические пространства

Теперь мы немного познакомились с аналитическими подмножествами и можем перейти к общему определению *аналитического пространства* **). Пусть M — аналитическое

---

*) См. [8], сообщение 9.

**) Имеются два существенно различных определения аналитического пространства: определение Бенке — Штейна (см. [4]) и определение Картана — Серра (см. [7], сообщение 13, [8], подмножество открытого множества $A \subset \boldsymbol{C}^n$. Тогда M обладает естественной структурой кольцованного пространства: с каждой точкой $x \in M$ можно связать кольцо $\mathscr{H}_x$ ростков функций, индуцированных на M ростками голоморфных функций объемлющего пространства $\boldsymbol{C}^n$. Кольцованные пространства, связанные таким способом с различными аналитическими подмножествами (для всех открытых $A \subset \boldsymbol{C}^n$ и для всех значений n), являются нашими «моделями». По определению «аналитическим пространством» называется кольцованное пространство X, топология которого хаусдорфова и которое удовлетворяет следующему условию: каждая точка из X обладает окрестностью U, которая *изоморфна* (как кольцованное пространство) одной из моделей, определенных выше. Если даны два аналитических пространства X и X', то отображение φ: $X \to X'$ называется аналитическим (или голоморфным), если оно является «морфизмом кольцованных пространств». Это означает следующее: φ есть такое непрерывное отображение, что для всякой точки $x \in X$ и всякого ростка $f \in \mathscr{H}_{\varphi(x)}$ росток $f \circ \varphi$ (композиция отображений) принадлежит к $\mathscr{H}_x$. В частности, голоморфные (числовые) функции на X суть не что иное, как непрерывные функции, которые в каждой точке $x \in X$ принадлежат кольцу $\mathscr{H}_x$. Кольцо $\mathscr{H}_x$ является, таким образом, кольцом ростков голоморфных функций в точке x.

Проверяется, что аналитические пространства образуют «категорию» с морфизмами, в техническом смысле этого слова. Аналитические многообразия образуют подкатегорию категории аналитических пространств (заметим, что это, говоря языком специалистов, «полная» подкатегория; иначе говоря, аналитические отображения одного аналитического многообразия X в другое X' будут теми же самыми, рассматривать ли X и X' как аналитические многообразия или как аналитические пространства).

Имеем очевидное понятие *аналитического подпространства* *) аналитического пространства X. Это такое замкнутое

сообщение 6 и [35]). Эквивалентность этих двух определений была доказана лишь недавно Грауэртом и Реммертом (C. R. Acad. Sci., Paris, **245**, 918—921 (1957)). Мы даем здесь определение Картана—Серра.

*) В дальнейшем автор иногда называет аналитические подпространства аналитическими подмножествами. (*Прим. перев.*)

подмножество Y в X, что Y можно определить в окрестности каждой из его точек y приравниванием нулю конечного числа функций из кольца $\mathcal{H}_y$ объемлющего пространства X. Если связать с каждой точкой $y \in Y$ кольцо ростков, индуцированных на Y элементами из $\mathcal{H}_y$, то на Y получится структура кольцованного пространства. Легко видеть, что это кольцованное пространство Y является аналитическим пространством.

Все понятия, которые были определены для моделей и которые имеют локальный и инвариантный относительно изоморфизма характер, переносятся на аналитические пространства. Например, аналитическое пространство X может быть или не быть *неприводимым* в каждой своей точке x. Точка x всегда обладает окрестностью, в которой X является объединением конечного числа неприводимых в точке x аналитических подпространств. Имеем понятие чисто n-мерного пространства и пространства размерности $\leqslant n$. Аналитическое пространство X, чисто n-мерное, имеет топологическую размерность $2n$. Если X имеет размерность $\leqslant n$, то его топологическая размерность $\leqslant 2n$. Точка $x \in X$ называется *униформизируемой*, если она обладает открытой окрестностью, изоморфной аналитическому многообразию. Множество униформизируемых точек является всюду плотным открытым множеством, а его дополнение есть аналитическое подпространство. Если X чисто одномерное, то все точки в X униформизируемы. Все эти факты хорошо известны.

Имеется также понятие неприводимости *в целом*: X неприводимо в целом, если X не является объединением двух аналитических подпространств X' и X'', каждое из которых отлично от X. Если X не неприводимо, то *неприводимой компонентой* пространства X (в глобальном смысле) называется всякое непрерывное аналитическое подпространство Y, обладающее тем свойством, что X является объединением множества Y и некоторого аналитического подпространства $Y' \neq X$. Доказывается, что X является объединением своих неприводимых компонент и что последние образуют *локально конечное* семейство (т. е. каждая точка пространства X обладает окрестностью, пересекающейся только с конечным числом неприводимых компонент). Неприводимые компоненты пространства X — это не что иное, как замыкания связных компонент множества униформизируемых точек пространства X.

Всякое неприводимое пространство имеет чистую размерность.

Существует категория, промежуточная между категориями аналитических многообразий и аналитических пространств, — категория *нормальных* аналитических пространств. Это кольцованные пространства, моделями для которых являются нормальные аналитические подмножества открытых множеств пространства $\boldsymbol{C}^n$. Для того чтобы аналитическое пространство X было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in X$ кольцо $\mathscr{H}_x$ являлось целозамкнутой областью целостности. В частности, нормальное пространство X неприводимо в каждой точке x (так как неприводимость равносильна тому, что кольцо $\mathscr{H}_x$ является областью целостности). Всякое аналитическое многообразие является нормальным пространством. Если X — произвольное аналитическое пространство, то множество таких точек $x \in X$, что $\mathscr{H}_x$ является целозамкнутой областью целостности, открыто и всюду плотно, а его дополнение является аналитическим подпространством (Ока) *). Далее, с пространством X можно каноническим образом связать нормальное аналитическое пространство $\tilde{X}$ (называемое «нормализацией» пространства X), точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами пространства X во всех его точках, причем естественное отображение $\tilde{X} \to X$ голоморфно и «собственно» (т. е. полный прообраз всякого компакта в X компактен в $\tilde{X}$). Нормализация $\tilde{X}$ обладает следующим свойством универсальности: всякое голоморфное отображение нормального аналитического пространства Y на X однозначно представляется в виде композиции отображений $Y \to \tilde{X} \to X$, где $Y \to \tilde{X}$ — голоморфное отображение.

Укажем два важных свойства нормальных аналитических пространств: неприводимые компоненты (в целом) нормального пространства — это не что иное, как его связные компоненты; неуниформизируемые точки нормального пространства размерности n образуют аналитическое подпространство размерности $\leqslant n-2$ **).

*) См. [25] и [8], сообщение 10.

**) См. [8], сообщение 11, теорема 2.

4. Геометрическое изучение аналитического отображения $X \to Y$

Пусть f — аналитическое отображение аналитического пространства X в аналитическое пространство Y. Очевидно, что полный прообраз $f^{-1}(Y')$ аналитического подпространства Y' в Y есть аналитическое подпространство в X. С другой стороны, хорошо известно, что образ аналитического подпространства в X, вообще говоря, не является аналитическим подпространством в Y. Уже множество $f(X)$ не обязано быть замкнутым в Y. Вообще говоря, неверно даже, что каждая точка множества $f(X)$ обладает в Y такой открытой окрестностью U, что $f(X) \cap U$ — аналитическое подмножество в U. Приведем классический противоречащий пример: X — пространство C^2 (с координатами x_1, x_2), Y — пространство C^2 (с координатами y_1, y_2), f — отображение

$$(x_1, x_2) \to (x_1, x_1x_2).$$

Образ $f(X)$ состоит из точек пространства Y, не удовлетворяющих условиям $y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$. Для всякого открытого множества U, содержащего начало координат, $U \cap f(X)$ не замкнуто в U.

Тонкий анализ строения голоморфного отображения f: $X \to Y$ привел Штейна и Реммерта к важным результатам *), некоторые из которых я хочу упомянуть. Для всякой точки $x \in X$ рассмотрим «слой» $f^{-1}(f(x))$, который является аналитическим подпространством, содержащим x. Пусть $d(x)$ — наибольшая из размерностей его неприводимых компонент в точке x. Для каждого целого k обозначим через X_k множество точек пространства X, в которых $d(x) \geqslant k$. Мы имеем $X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots$, причем оказывается, что X_k — *аналитические подпространства.* Далее, каждый слой отображения $X_k \to Y$, индуцированного отображением f, имеет размерность $\geqslant k$ в каждой своей точке. Если X имеет конечную размерность, то можно определить последовательность аналитических подмножеств

$$\varphi = X(-1) \subset X(0) \subset \ldots \subset X(r) \subset \ldots,$$

где $X(r) = X$ для больших r. Пространства $X(r)$ опреде-

*) См. [29], [32], [38].

ляются при помощи убывающей индукции по r: с каждой неприводимой компонентой A пространства $X(r+1)$ связывается подпространство A_k (где $k = \dim A - r$), и $X(r)$ определяется как объединение множеств A_k. Доказывается, что всякая точка $x \in X(r) - X(r-1)$ обладает в $X(r)$ окрестностью, образ которой при отображении f есть аналитическое подмножество, чисто r-мерное в точке $f(x)$. При помощи этого утверждения устанавливается основной результат Реммерта: *если аналитическое отображение f: $X \to Y$ является собственным* (т. е. если полный прообраз всякого компакта в Y компактен в X), *то образ $f(X)$ есть аналитическое подпространство в Y и размерность пространства $f(X)$ равна наименьшему из чисел r, для которых $X(r) = X$*; далее, если X неприводимо (в целом), то тем же свойством обладает $f(X)$.

При доказательстве этих результатов существенно используется теорема Реммерта и Штейна *), которая бывает полезна во многих случаях и формулируется следующим образом: *пусть Z — аналитическое подмножество размерности $< n$ аналитического пространства Y, и пусть A — чисто n-мерное аналитическое подмножество открытого множества $Y - Z$; тогда замыкание множества A в Y является чисто n-мерным аналитическим подмножеством в Y.*

Теорема Реммерта применима, в частности, в случае, когда X — компактное аналитическое пространство, так как f тогда автоматически является собственным. Значит, образ $f(X)$ в этом случае обязательно является аналитическим подмножеством в Y. В частности, предположим, что Y — проективное (комплексное) пространство P_n. Образ $f(X)$ для любого аналитического отображения f: $X \to P_n$ является *алгебраическим* подмножеством в P_n согласно известной теореме Чжоу (которая, впрочем, немедленно следует из теоремы Реммерта — Штейна, как я уже указывал в моем докладе на Гарвардском конгрессе в 1950 г.). В качестве приложения **) рассмотрим k мероморфных функций f_i на *компактном* аналитическом пространстве X. Они определяют аналитическое

---

*) См. [28], а также [8], сообщения 13 и 14, принадлежащие Штейну.

**) См. [30].

отображение $f\colon X \to (P_1)^k$. По правде говоря, это не совсем верно, поскольку функции f_i могут иметь точки неопределенности. Но легко видеть, что можно так «модифицировать» пространство X, чтобы отображение f стало всюду определенным. Говоря точно, существует компактное аналитическое пространство X' и аналитическое отображение $\pi\colon X' \to X$, определяющее изоморфизм полей мероморфных функций $K(X)$ и $K(X')$ и обладающее тем свойством, что функции $f_i \circ \pi = g_i$ на X' не имеют точек неопределенности. Значит, функции g_i определяют аналитическое отображение $g\colon X' \to (P_1)^k$, образ которого есть алгебраическое подпространство. Если f_i аналитически зависимы (т. е. если дифференциалы df_i линейно зависимы), то тем же свойством обладают g_i, так что ранг отображения g меньше k и образ $g(X')$ отличен от $(P_1)^k$. Следовательно, существует тождественно не равный нулю многочлен, обращающийся в нуль на образе g. Иначе говоря, функции f_i *алгебраически зависимы* (теорема Тимма, следующая, таким образом, из результатов Реммерта). Таким же способом можно доказать, что если n — размерность компактного аналитического пространства X, то поле $K(X)$ мероморфных функций является простым алгебраическим расширением поля рациональных функций от k переменных, где $k \leqslant n$ (эта теорема была впервые опубликована Чжоу).

5. Фактор-пространства аналитических пространств

Изложенные выше вопросы находятся в тесной связи с задачей о фактор-пространствах аналитических пространств, которая изучалась Штейном [39]. Пусть X — аналитическое пространство, которое мы будем предполагать *нормальным*. Пусть R — *собственное* отношение эквивалентности в X. Это значит, что R удовлетворяет одному из следующих эквивалентных между собой условий:

1) R-насыщение всякого компакта в X компактно;

2) фактор-пространство X/R локально компактно, и отображение $p\colon X \to X/R$ является собственным;

3) если R — график отношения эквивалентности, то отображение проектирования $R \to X$ является собственным.

В фактор-пространстве X/R имеется очевидная структура кольцованного пространства: с каждым открытым множеством $U \subset X/R$ нужно связать кольцо $\mathcal{H}(U)$ таких непрерывных функций f на U, чтобы $p\circ f$ была голоморфна в $p^{-1}(U)$. Это кольцо отождествляется с кольцом функций, голоморфных в $p^{-1}(U)$ и постоянных на классах эквивалентности. Возникает задача, которая состоит в том, чтобы выяснить, является ли X/R, снабженное этой структурой кольцованного пространства, нормальным аналитическим пространством. Разумеется, нужно наложить некоторые условия на отношение эквивалентности R. Сделаем следующее предположение:

(H) Каждая точка $z \in X/R$ обладает такой открытой окрестностью U, что для любых двух различных слоев в $p^{-1}(U)$ существует голоморфное отображение пространства $p^{-1}(U)$ в некоторое аналитическое пространство, постоянное на слоях и принимающее различные значения на указанных двух слоях. (Например, это условие выполнено, если функции из кольца $\mathcal{H}(U)$ разделяют точки множества U.)

Если выполнено предположение (H), то еще нельзя быть уверенным, что X/R — нормальное аналитическое пространство, но это почти верно. Точнее говоря, собственное отображение p: $X \to X/R$ допускает разложение $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X/R$, где Y — нормальное аналитическое пространство, f — голоморфное (и собственное) отображение на и g — морфизм кольцованных пространств, обладающий следующим свойством: слои отображения g являются конечными множествами, и существует такое «тонкое» замкнутое подмножество A в X/R, что $g^{-1}(z)$ сводится к одной точке, когда $z \notin A$ (говорят, что замкнутое подмножество A из X/R является «тонким», если каждая точка в A обладает такой окрестностью U, что существует функция из $\mathcal{H}(U)$, обращающаяся в нуль на $A \cap U$ и тождественно не равная нулю). Далее, такое разложение *единственно* «с точностью до изоморфизма», и g индуцирует изоморфизм кольцованных пространств $Y - g^{-1}(A)$ и $X/R - A$.

Таким образом, пространство Y определено с точностью до изоморфизма отношением эквивалентности R (которое предполагается удовлетворяющим условию (H)). Его можно назвать *аналитическим фактор-пространством* пространства X относительно R.

Указанная выше теорема, следующая из результатов Штейна, обладает интересными приложениями, в чем мы вскоре убедимся.

6. Классификация аналитических пространств

Посмотрим сначала, как ведет себя аналитическое пространство по отношению к голоморфным функциям. Пусть $\mathscr{H}(X)$ — кольцо функций, голоморфных на X. Это кольцо может сводиться к константам, например, если X *компактно* и связно. Рассмотрим для аналитического пространства X следующие свойства:

(a) Элементы кольца $\mathscr{H}(X)$ разделяют точки пространства X (иначе говоря, для любых двух различных точек x, x' существует такая голоморфная в X функция f, что $f(x) \neq f(x')$.

(b) Для всякой точки $x \in X$ существует конечная система функций $f_i \in \mathscr{H}(X)$, которая является «отделяющей» в точке x (под этим мы подразумеваем, что для отображения f: $X \to \mathbf{C}^n$, определяемого функциями f_i, точка x является изолированной точкой слоя $f^{-1}(f(x))$).

(c) Всякое компактное аналитическое подмножество пространства X конечно.

Легко видеть, что из (a) следует (b). С другой стороны, из (b) почти непосредственно следует (c).

Грауэрт [14] получил следующий удивительный результат: если X неприводимо, то из условия (b) следует, что X является *объединением счетного числа компактов* (как известно, Калаби и Розенлихт [6] дали пример связного аналитического многообразия, не являющегося объединением счетного числа компактов). Грауэрт показал также, что если неприводимое пространство X размерности n удовлетворяет условию (b), то существует система n функций $f_i \in \mathscr{H}(X)$, которая является «отделяющей» во всякой точке $x \in X$. Наряду со свойствами (a), (b), (c), рассматривается свойство другой природы. Говорят, что X *голоморфно выпукло*, если для всякого компакта $K \subset X$ множество $\hat{K}$ тех точек $x \in X$, для которых

$$|f(x)| \leqslant \sup_K |f| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{H}(X),$$

компактно. Это условие равносильно тому, что для всякого бесконечного дискретного подмножества в X существует функция $f \in \mathscr{H}(X)$, не ограниченная на этом множестве. Всякое компактное аналитическое пространство по тривиальной причине является голоморфно выпуклым. Однако компактное пространство удовлетворяет условиям (a), (b) или (c) только тогда, когда оно конечно.

Напомним следующую известную теорему: *для того чтобы неветвящаяся область наложения над* $\mathbf{C}^n$ *была областью голоморфности, необходимо и достаточно, чтобы она была голоморфно выпуклой* (см. Ока [26], где рассмотрен общий случай областей с бесконечным числом листов).

Легко видеть, что для голоморфно выпуклого пространства X условия (b) и (c) эквивалентны. Более того, Грауэрт доказал [14], что для голоморфно выпуклого пространства X условия (b) и (a) эквивалентны (этот результат значительно труднее). *Аналитическое многообразие* X, которое голоморфно выпукло и удовлетворяет одному из эквивалентных условий (a), (b), (c), является *многообразием Штейна,* и обратно. В общем случае аналитическое пространство X, которое голоморфно выпукло и удовлетворяет условиям (a), (b), (c), Грауэрт называет *голоморфно полным* пространством. Легко видеть, что всякое аналитическое подпространство голоморфно полного пространства голоморфно полно. Для голоморфно полных пространств справедливы основные теоремы теории когерентных аналитических пучков, установленные вначале для многообразий Штейна, но это другой вопрос, который завел бы нас слишком далеко.

Пусть X — голоморфно выпуклое пространство, которое мы будем предполагать нормальным. Мы не накладываем на X ни одного из предположений (a), (b), (c). Рассмотрим в X следующее отношение эквивалентности R: x и x' являются R-эквивалентными, если $g(x) = g(x')$ для всех $g \in \mathcal{H}(X)$. Ясно, что выполнено условие (H) из п. 5. Значит, здесь можно применить теорему, сформулированную в этом пункте. Пусть Y — «аналитическое фактор-пространство» пространства X относительно R. Сразу видно, что голоморфное отображение f: $X \to Y$ определяет изоморфизм колец голоморфных функций $\mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}(Y)$. Поскольку отображение f является собственным, пространство Y, как и X, голоморфно выпукло. Далее, очевидно, что Y удовлетворяет условию (b). Значит, Y голоморфно полно и, в частности, удовлетворяет условию (a). Отсюда следует, что отображение $Y \to X/R$ является изоморфизмом кольцованных пространств. Таким образом, *фактор-пространство* X/R, *снабженное своей структурой кольцованного пространства, является голоморфно полным* *нормальным пространством.* Обозначим его через X^*; оно естественным образом связано с X (Реммерт [31] называет это пространство «ядром» пространства X). Отсюда, в частности, выводится, что всякое неприводимое и голоморфно выпуклое аналитическое пространство является объединением счетного числа компактов (см. [31]). Если X нормально, то это видно из того, что, согласно Грауэрту, X^* есть объединение счетного числа компактов и что отображение $X \to X^*$ является собственным. Если X не нормально, то нужно рассмотреть его нормализацию $\tilde{X}$.

Можно рассматривать и другие классы аналитических пространств. Мы говорим, что X *проективно полно* («аналитически полно» в терминологии Грауэрта и Реммерта), если X голоморфно выпукло и если для всякой точки $x \in X$ существует голоморфное отображение пространства X в проективное пространство P_k, которое является «отделяющим» в точке x. Можно доказать, что всякое голоморфно выпуклое нормальное аналитическое пространство X обладает максимальным проективно полным фактор-пространством. Это — нормальное проективно полное пространство Y, снабженное голоморфным и собственным отображением f пространства X на Y, которое обладает следующим свойством универсальности: всякое голоморфное отображение пространства X в проективно полное пространство Z разлагается (обязательно единственным способом) в композицию $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, где g голоморфно.

Мы говорим, что аналитическое пространство X *алгебраически полно,* если оно голоморфно выпукло и если для всякой $x \in X$ существует голоморфное отображение пространства X в некоторое алгебраическое пространство (не обязательно проективное), которое является «отделяющим» в точке x. Всякое голоморфно выпуклое нормальное аналитическое пространство X обладает максимальным алгебраически полным фактор-пространством, которое удовлетворяет условию универсальности по отношению к голоморфным отображениям пространства X в алгебраически полные пространства.

Отсюда, в частности, вытекают следующие утверждения: всякое компактное нормальное аналитическое пространство X обладает максимальным фактор-пространством, являющимся проективным (нормальным) алгебраическим многообразием;

всякое компактное нормальное аналитическое пространство обладает максимальным фактор-пространством, являющимся алгебраическим многообразием (не обязательно проективным).

Перечисленные результаты, доказательство которых будет опубликовано в другом месте, представляют собой обобщение следующего хорошо известного факта: всякий комплексный тор обладает максимальным фактор-пространством, являющимся абелевым многообразием (т. е. комплексным тором, удовлетворяющим условиям Римана).

7. Проблемы погружения

Речь идет о «реализации» некоторых аналитических пространств в качестве подпространств относительно простых пространств, таких, как арифметические пространства C^n и проективные пространства P_n. Смысл слова «реализация» в каждом случае нуждается в уточнении.

Если мы хотим реализовать аналитическое пространство X в пространство C^n, то минимальное требование состоит в том, чтобы существовало голоморфное и взаимно однозначное отображение $f: X \to C^n$. Но это возможно только в том случае, когда голоморфные функции на X разделяют точки пространства X (условие (а) из п. 6). Реммерт [31] показал, что это необходимое условие (а) является также и достаточным, по крайней мере если предположить, что X есть объединение счетного числа компактов (что автоматически верно в случае, когда X неприводимо). Говоря точно, если X является чисто k-мерным, удовлетворяет условию (а) и есть объединение счетного числа компактов, то существует голоморфное и взаимно однозначное отображение пространства X в C^{2k+1}.

Можно усилить требования, желая иметь отображение f: $X \to C^n$, которое было бы не только голоморфным и взаимно однозначным, но и *собственным*. В этом случае X обязано удовлетворять условию (а) и быть голоморфно выпуклым; иначе говоря, X должно быть голоморфно полным. Реммерт [31] показал, что, обратно, всякое голоморфно полное пространство X, являющееся объединением счетного числа компактов, можно погрузить в C^n при помощи голоморфного, взаимно однозначного и собственного отображения f. Тогда образ $f(X)$ является аналитическим подпространством Y в C^n. Но следует иметь в виду, что эта «реализация» Y пространства X не обязана сохранять структуры кольцованных пространств. Однако в случае, когда X есть настоящее аналитическое многообразие (многообразие Штейна), можно реализовать X в качестве аналитического подмногообразия пространства C^n (с n, зависящим только от размерности многообразия X).

Я хочу теперь сказать несколько слов о погружениях в. проективное пространство (в этом случае образ является алгебраическим подмножеством). За последние годы получен ряд теорем, гарантирующих существование таких погружений. Не входя в детали (для чего потребовался бы целый доклад), напомним только основную теорему Кодайра [20]: *компактное аналитическое многообразие, на котором существует келерова форма с рациональными периодами, изоморфно алгебраическому многообразию, погруженному без особенностей в проективное пространство.*

Пусть X — аналитическое многообразие, на котором *действует собственным образом* дискретная группа автоморфизмов G (это означает, что для всякого компакта $K \subset X$ существует лишь конечное число элементов $s \in G$, для которых sK пересекается с K). Рассмотрим фактор-пространство X/G, снабженное его структурой кольцованного пространства (см. п. 5). Доказывается [10], что оно является нормальным аналитическим пространством (это не есть, вообще говоря, аналитическое многообразие, так как преобразования из группы G могут иметь неподвижные точки). В более общем случае, если X — нормальное аналитическое пространство и если G — дискретная группа, действующая на X собственным образом, то X/G является нормальным аналитическим пространством. Далее, если X/G *компактно*, то естественно спросить, можно ли реализовать X/G в качестве аналитического (и, значит, алгебраического) подпространства проективного пространства. В действительности так всегда обстоит дело, если X — *ограниченная область* арифметического пространства C^n. В этом случае проективное погружение пространства X/G можно получить при помощи конечной системы автоморфных форм (рядов Пуанкаре) одного и того же веса *). Образ при этом погружении есть «проективно нормальное» алгебраическое многообразие.

*) См. [10] и [12].

Но наиболее интересными в теории автоморфных функций являются случаи, когда пространство X/G *не компактно*. Тогда не встает вопрос о реализации пространства X/G в качестве алгебраического многообразия в проективном пространстве. Тем не менее можно задаться целью найти аналитическое отображение f: $X/G \to P_n$, которое было бы взаимно однозначным и определяло бы изоморфизм аналитического пространства X/G на «открытое множество в смысле Зариского» некоторого проективного алгебраического многообразия V (т. е. на дополнение к некоторому алгебраическому подмножеству W в V). Ныне известно, что это возможно в теории модулярных функций Зигеля [36, 37]. Точнее говоря, пусть X — пространство Зигеля, состоящее из таких симметрических комплексных матриц $z = x + iy$ порядка n, что y положительно определена. Вещественная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(n, R)$, состоящая из таких вещественных матриц порядка $2n$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — матрицы порядка n, что ${}^tMJM = J$, причем

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

действует на X по формуле $z \to (az + b)(cz + d)^{-1}$. В этой группе преобразований пространства X рассматривается дискретная подгруппа G, состоящая из матриц с целыми коэффициентами. Фактор-пространство $X/G = V_n$ есть некомпактное нормальное аналитическое пространство. Сатакэ [34] показал, что пространство V_n можно компактифицировать, определив подходящую топологию в объединении пространств V_n, V_{n-1}, ..., V_1, V_0. Кроме того, он определил на этой компактификации V_n^* структуру кольцованного пространства, которая индуцирует на подпространствах V_n (открытое множество в V_n^*), V_{n-1} и т. д. их структуры аналитических пространств. Затем Бэйли [3] доказал, что, как и предполагал Сатакэ, кольцованное пространство V_n^* в действительности является нормальным аналитическим пространством. Далее, он показал, что V_n^* можно реализовать в качестве алгебраического многообразия в проективном пространстве, причем

$$V_{n-1}^* = V_n^* - V_n$$

отождествляется с некоторым алгебраическим подмногообразием в V_n^*. Проективное погружение может быть получено при помощи автоморфных форм одного и того же надлежащим образом выбранного веса (речь идет об автоморфных формах для степеней фактора автоморфности $\det(cz+d)^2$). Существование такого погружения позволяет доказать, что всякая функция, мероморфная в X и инвариантная относительно G, выражается в виде отношения двух автоморфных форм одного и того же веса (по крайней мере для $n \geqslant 2$). Эти результаты можно дополнить и показать, что градуированная алгебра автоморфных форм различных весов порождена конечным числом элементов (как алгебра над полем комплексных чисел) *). С другой стороны, все результаты распространяются на случай любой подгруппы симплектической группы, «соизмеримой» с модулярной группой. Проективные алгебраические многообразия, которые связаны с этими группами, являются «разветвленными накрытиями» друг друга.

8. Приложение к теории вещественных аналитических многообразий

Определение вещественного аналитического многообразия (абстрактного) напоминать излишне. Моделями здесь являются открытые множества вещественного арифметического пространства R^n, а замены локальных координат являются вещественно-аналитическими. Мы будем рассматривать только вещественные аналитические многообразия, которые могут быть покрыты счетным семейством компактов, что равносильно существованию счетной базы открытых множеств.

Пусть V — вещественное аналитическое многообразие размерности n. Результаты Уитни [41] позволяют утверждать, что существует взаимно однозначное и собственное отображение f: $V \to R^{2n+1}$, бесконечно дифференцируемое и имеющее ранг n в каждой точке, образ которого есть некоторое подмногообразие в R^{2n+1}, причем можно даже считать, что это подмногообразие аналитично. Но при этом остается открытым вопрос, можно ли добиться того, чтобы погружение f было *аналитическим*. Иными словами, всякое ли вещественное аналитическое (абстрактное) многообразие можно реализовать,

*) См. [12], сообщение 17.

в смысле его аналитической структуры, в качестве аналитического подмногообразия вещественного арифметического пространства? Всего год назад Морри [24] дал утвердительный ответ на этот вопрос в случае, когда V компактно. Еще раньше Мальгранж [23] дал утвердительный ответ для любого аналитического многообразия V независимо от компактности, но в предположении, что на V существует аналитическая риманова метрика ds^2 (метод Мальгранжа основан на теории эллиптических уравнений). Наконец, Грауэрт [18] доказал совсем недавно, что всякое вещественное аналитическое многообразие (при единственном предположении о существовании счетной базы открытых множеств) можно реализовать в качестве аналитического подмногообразия арифметического пространства. Этот результат получен комплексно-аналитическими методами и поэтому упоминается в настоящем докладе. Остановимся более подробно на этой важной теореме.

Известно, что всякое вещественное аналитическое многообразие V можно погрузить в качестве замкнутого подпространства в некоторое комплексное аналитическое многообразие X, причем так, что X будет являться «комплексной оболочкой» многообразия V. Это означает, что каждая точка $x \in V$ обладает открытой окрестностью U (в X), в которой имеется такая система комплексных локальных координат, что $V \cap U$ совпадает с множеством точек, координаты которых вещественны, причем эти координаты служат локальными координатами для V. Если n — вещественная размерность многообразия V, то n также является комплексной размерностью многообразия X. Грауэрт показал, что V, будучи погружено таким способом в X, обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, которые являются многообразиями Штейна. Здесь невозможно указать идею этого доказательства, весьма изящного и использующего теорию когерентных аналитических пучков и теорию плюрисубгармонических функций (введенных в рассмотрение Лелоном более десяти лет назад). В связи с этим заметим только, что связное и голоморфно выпуклое комплексное аналитическое многообразие X является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда на X существует «строго плюрисубгармоническая» функция.

Вернемся к вещественному аналитическому многообразию V, погруженному в многообразие Штейна X, являющееся его комплексной оболочкой. Применим к X теорему погружения Реммерта (п. 7); при этом получается вещественно-аналитическое погружение многообразия V в вещественное арифметическое пространство. Можно также рассуждать следующим образом, не используя теоремы Реммерта. Из того, что V обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, являющихся многообразиями Штейна, следует, что к вещественному аналитическому многообразию V применимы основные теоремы теории когерентных аналитических пучков [11]. Известно, что в этом случае кольцо вещественно-аналитических функций на V достаточно богато для того, чтобы существовало аналитическое отображение многообразия V в пространство R^k, ранг которого в любой точке из V равен размерности многообразия V. Отсюда видно, что на V существует аналитическая метрика ds^2, и можно применить теорему Мальгранжа.

Существование собственного аналитического погружения многообразия V в $\boldsymbol{R}^k$ позволяет применить к V аппроксимационную теорему Уитни [40]: *всякую p раз непрерывно дифференцируемую функцию на V можно с любой точностью приблизить аналитическими функциями на V, причем приближение понимается в смысле равномерной сходимости функции и каждой из ее производных порядков $\leqslant p$.* Можно даже потребовать, чтобы сходимость убыстрялась с удалением в бесконечность. Отсюда, очевидно, следует, что если какое-нибудь вещественное аналитическое многообразие реализуется в дифференцируемом смысле в пространстве $\boldsymbol{R}^k$, то его можно реализовать в аналитическом смысле в том же $\boldsymbol{R}^k$. Значит, всякое вещественное аналитическое многообразие V размерности n можно аналитически реализовать в $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.

С другой стороны, тот факт, что теория когерентных аналитических пучков применима ко всякому вещественному аналитическому многообразию V, приводит к ряду приятных следствий. Например, всякое аналитическое подмногообразие W в V можно задать в целом конечным числом аналитических уравнений $f_i = 0$ (где f_i аналитичны на всем V); всякая аналитическая функция на W индуцируется некоторой аналитической функцией на V; вещественные когомологии многообразия V можно вычислять при помощи аналитических дифференциальных форм и т. д. [11].

Заметим, что все эти результаты получены при помощи комплексно-аналитических методов, которые, по-видимому, должны играть ведущую роль во всяком глубоком изучении вещественно-аналитического случая. Это подтверждается тем фактом, что единственным определением *вещественно-аналитического подмножества* (в вещественном аналитическом многообразии V), не приводящим к патологическим свойствам, является определение, которое использует объемлющее комплексное пространство; нужно рассмотреть замкнутые подмножества E в V, для которых существуют такая комплексная оболочка X многообразия V и такое комплексно-аналитическое подмножество E' в X, что $E = E' \cap V$. Доказывается, что эти подмножества можно также определить как подмножества в V, которые задаются в целом конечным числом аналитических уравнений. Таким образом, понятие вещественно-аналитического подмножества имеет существенно *глобальный* характер, в противоположность комплексно-аналитическим подмножествам.

Брюа и Уитни [5] изучали вещественно-аналитические подмножества вещественного аналитического многообразия V. Они доказали, в частности, что если E — аналитическое подмножество в V, то существует такое локально конечное семейство неприводимых (в целом) аналитических подмножеств E_i, что $E_i \not\subset E_j$ для $i \neq j$ и что E есть объединение всех E_i; это семейство определено однозначно с точностью до порядка. Далее, если E неприводимо и имеет размерность p, то все неприводимые компоненты любого аналитического подмножества в E, отличного от E, имеют размерности $\leqslant p - 1$ (этот результат кажется естественным; однако он не был бы верен, если бы мы приняли за определение аналитического подмножества определение локального характера, которое сразу приходит в голову).

9. Аналитические расслоенные пространства *)

Чтобы упростить изложение, мы ограничимся случаем *главных расслоений*. Рассмотрим сначала комплексно-аналитический случай. Мы имеем аналитическое пространство X, комплексную группу Ли G и рассматриваем главные аналитические расслоения (локально тривиальные в комплексно-ана-

*) См. работы Грауэрта [15, 16, 17], а также их изложение, сделанное в [9].

литическом смысле), имеющие X в качестве базы и G в качестве структурной группы. Два таких расслоения P и P' изоморфны, если существует изоморфизм аналитического пространства P на аналитическое пространство P', который совместим с действием группы G и индуцирует тождественное отображение базы X. Известно, что классы изоморфных расслоений находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством когомологий $H^1(X, \mathbf{G}^a)$, где $\mathbf{G}^a$ — пучок ростков *голоморфных* отображений пространства X в G. Можно также рассматривать классы *топологических* главных расслоений, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $H^1(X, \mathbf{G}^c)$, где $\mathbf{G}^c$ — пучок ростков *непрерывных* отображений пространства X в G. Имеется естественное отображение

$$(*) \qquad H^1(X, \mathbf{G}^a) \to H^1(X, \mathbf{G}^c),$$

определенное вложением $\mathbf{G}^a \to \mathbf{G}^c$. Оно, вообще говоря, не является ни взаимно однозначным, ни отображением на. В то же время Грауэрт доказал, что если X — *голоморфно полное* пространство (см. п. 6), то $(*)$ является *взаимно однозначным соответствием*. Иначе говоря, если два главных аналитических расслоения с базой X и структурной группой G топологически изоморфны, то они аналитически изоморфны, и всякое главное топологическое расслоение с базой X и группой G можно снабдить структурой главного аналитического расслоения, совместимой с его структурой топологического расслоения. Этот важный результат установлен очень трудными методами, которые, по-видимому, нельзя существенно упростить при современном состоянии математики. Заметим, что доказательство одновременно вскрывает ряд других проблем. Приведем некоторые из них, формулируя их только в частном случае, чтобы не усложнять изложения. Всякое ли непрерывное отображение $X \to G$ гомотопно голоморфному отображению? Пусть два голоморфных отображения $X \to G$ гомотопны в пространстве непрерывных отображений; гомотопны ли они в пространстве голоморфных отображений? Пусть голоморфное отображение $Y \to G$ (где Y — аналитическое подпространство в X) продолжается в непрерывное отображение $X \to G$; продолжается ли оно в голоморфное отображение $X \to G$? Ответ на все эти вопросы будет утвердительным, если пространство X голоморфно полно. Если не делать этого предположения, то частичные ответы известны в случае, когда группа G разрешима (Френкель [13]).

Вообще, в случае, когда X не является голоморфно полным, классификация аналитических расслоений с базой X представляет собой очень интересную проблему, о которой известно еще очень мало. Классификация векторных расслоений была проделана Гротендиком [19] в случае, когда X — комплексная проективная прямая, и Атия [1] в случае, когда X — алгебраическая кривая рода 1.

Я хочу сказать также несколько слов о вещественно-аналитических расслоениях. Можно проверить, что методы Грауэрта после надлежащих изменений могут быть применены к вещественно-аналитическим расслоениям. Дело в том, что теория когерентных аналитических пучков применима к вещественным аналитическим многообразиям без всяких ограничений (благодаря теореме погружения Грауэрта). Далее, можно показать, что все результаты, сформулированные выше для случая, когда X — голоморфно полное аналитическое пространство и G — комплексная группа Ли, справедливы и тогда, когда X — вещественное аналитическое многообразие, а G — вещественная группа Ли. В частности, *аналитическая классификация главных расслоений совпадает с их топологической классификацией.*

10. Заключение

Этот обзор недавних результатов в теории аналитических пространств по необходимости является неполным. Я сожалею в особенности, что даже не упомянул о целой новой теории «деформаций комплексных структур», но эта теория кажется уже достаточно обширной для того, чтобы стать предметом отдельного доклада *). Мне пришлось также оставить в стороне задачу продолжения аналитических (комплексных) подмножеств, в решение которой столь интересный вклад внес Ротштейн, а также аналогичную задачу продолжения когерентных аналитических пучков. В заключение укажу еще одну проблему, заслуживающую внимания: на общих аналитических пространствах до сих пор не существует удовлетворительной теории дифференциальных форм. Если рассматривать неуни-

*) См. главным образом [21], где имеется библиография вопроса.

формизируемую точку и реализовать окрестность этой точки в качестве аналитического подмножества открытого множества в пространстве C^n, то есть определенные основания для рассмотрения «дифференциальных форм», отличных от тех, которые индуцируются дифференциальными формами объемлющего пространства C^n.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **7**, 414—452 (1957).

[2] Baily W. L., On the quotient of an analytic manifold by a group of analytic homeomorphismes, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **40**, 804—808 (1954).

[3] Baily W. L., Satake's compactification of V_n, Amer. J. Math. **80**, 348—364 (1958).

[4] Behnke H. und Stein K., Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. **124**, 1—16 (1951).

[5] Bruhat F. et Whitney H., Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels, Comment. Math. Helv. **33**, 132—160 (1959).

[6] Calabi E. and Rosenlicht M., Complex analytic manifolds without countable base, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 335—340 (1953).

[7] Cartan H., Séminaire 1951/52, École Normale Supérieure, Paris.

[8] Cartan H., Séminaire 1953/54, École Normale Supérieure, Paris.

[9] Cartan H., Espaces fibrés analytiques. Symposium de Topologie, Mexico, 1956, 97—121.

[10] Cartan H., Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, Algebraic Geometry and Albebraic Topology. A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton, 1957, 90—102.

[11] Cartan H., Variétés analytiques réeles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. Math. Fr. **85**, 77—99 (1957).

[12] Cartan H., Séminaire 1957/58, École Normale Supérieure, Paris.

[13] Frenkel J., Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. Fr. **85**, 135—220 (1957).

[14] Grauert H., Charakterisierung der holomorph-vollständiger komplexen Räume, Math. Ann. **129**, 233—259 (1955).

[15] Grauert H., Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen, Math. Ann. **133**, 139—159 (1957).

[16] Grauert H., Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen, Math. Ann. **133**, 450—472 (1957).

[17] Grauert H., Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. **135**, 263—273 (1958).

[18] Grauert H., On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. Math. (2), **68**, 460—472 (1958). (Имеется русский перевод: Грауэрт Г., О проблеме Леви и вложении вещественно-аналитических многообразий, Математика **4**, № 3.)

[19] Grothendieck A., Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphére de Riemann, Amer. J. Math. **79**, 121—138 (1957).

[20] Kodaira K., On Kähler varieties of restricted type, Ann. Math. (2), **60,** 28—48 (1954).

[21] Kodaira K. and Spencer D. C., On deformations of complex analytic structures, Ann. Math. (2), **67,** 328—466 (1958).

[22] Lelong P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. Fr. **85,** 239—261 (1957).

[23] Malgrange B., Plongement des variétés analytiques-réelles, Bull. Soc. Math. Fr. **85,** 101—112 (1957).

[24] Morrey Ch. B., The analytic imbedding of abstract real-analytic manifolds, Ann. Math. (2), **68,** 159—201 (1958).

[25] Oka K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. J. Math. Soc. Japan **3,** 204—214, 259—278 (1951).

[26] Oka K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point intérieur, Jap. J. Math. **23,** 97—155 (1953).

[27] Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig, 1928—1932.

[28] Remmert R. und Stein K., Über die wesentlicher Singularitäten analytischer Mengen, Math. Ann. **126,** 263—306 (1953).

[29] Remmert R., Projektionen analytischer Mengen, Math. Ann. **130,** 410—441 (1956).

[30] Remmert R., Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen, Math. Ann. **132,** 277—288 (1956).

[31] Remmert R., Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, C. R. Acad. Sci., Paris, **243,** 118—121 (1956).

[32] Remmert R., Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math. Ann. **133,** 328—370 (1957).

[33] De Rham G., Seminar on several complex variables, Inst. Adv. Study, mimeographed Notes, 1957/58.

[34] Satake I., On the compactification of the Siegel space, J. Indian Math. Soc. **20,** 259—281 (1956).

[35] Serre J. P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier **6,** 1—42 (1955—56).

[36] Siegel C. L., Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116,** 617—657 (1939).

[37] Siegel C. L., Symplectic geometry, Amer. J. Math. **65,** 1—86 (1943).

[38] Stein K., Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume, Colloque de Topologie, Strasbourg, Avril 1954.

[39] Stein K., Analytische Zerlegungen komplexer Räume, Math. Ann. **132,** 63—93 (1956).

[40] Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc. **36,** 63—89 (1934).

[41] Whitney H., The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. Math. (2), **44,** 220—246 (1945).

ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП *)

К. Шевалле

(Франция)

1. Понятие алгебраической группы

Понятие алгебраической группы относится к понятию алгебраического многообразия так же, как понятие топологической группы относится к понятию топологического пространства. Не собираясь излагать здесь точное определение алгебраического многообразия, мы укажем все же характерные черты этого класса математических объектов. Алгебраическое многообразие определяется заданием множества U его точек и некоторого множества функций — поля рациональных функций на этом многообразии. Каждая функция представляет собой отображение некоторого подмножества точек в фиксированное алгебраически замкнутое поле K, называемое полем констант. Эти функции образуют поле относительно операций сложения и умножения, обладающих следующими свойствами: если рациональные функции u и v определены в некоторой точке x, то функции $u+v$ и uv также определены в этой точке и принимают в ней значения $u(x)+v(x)$ и $u(x)v(x)$ соответственно; если функция u определена в точке x и $u(x)\neq 0$, то функция u^{-1} также определена в этой точке. Постоянные отображения множества U в поле K являются рациональными функциями и образуют подполе, изоморфное полю K. Алгебраическое многообразие снабжено топологией, семейство открытых множеств которой порождено множествами определения рациональных функций. Эта топология принадлежит к весьма

*) C. Chevalley, La théorie des groupes algébriques.

специальному типу, ибо любое открытое множество оказывается всюду плотным в пространстве U. Для любой точки x алгебраического многообразия существует такая окрестность $A(x)$ этой точки и такая конечная система рациональных функций $u_1, \ldots, u_n$, определенных над $A(x)$, что отображение

$$x' \to (u_1(x'), \ldots, u_n(x'))$$

индуцирует взаимно однозначное соответствие множества $A(x)$ с некоторым *алгебраическим подмножеством* аффинного пространства K^n. (Подмножество пространства K^n называется алгебраическим, если оно состоит из всех точек, координаты которых удовлетворяют некоторой системе алгебраических уравнений.) Кроме того, любая рациональная функция u на многообразии U представляется в виде рационального выражения от функций $u_1, \ldots, u_n$ и даже в виде многочлена, если только эта функция определена в каждой точке множества U. Систему $u_1, \ldots, u_n$ мы называем системой координат в некоторой окрестности точки x многообразия U. Отображение f многообразия V в многообразие U называется рациональным (или морфизмом), если оно непрерывно и обладает следующим свойством: для любой точки $y \in V$ и любой системы координат $u_1, \ldots, u_n$ в окрестности точки $f(y)$ на многообразии U существует такая система координат $(v_1, \ldots, v_m)$ в окрестности точки y на многообразии V, что функции $u_i(f(y))$ представляются в виде многочленов от функций $v_j(y)$ в этой окрестности.

Прямое произведение $U \times U'$ двух многообразий U и U' можно снабдить структурой многообразия, которая обладает следующим свойством: если функции $u_1, \ldots, u_m$ (соответственно $u'_1, \ldots, u'_m$) образуют систему координат в окрестности точки x_0 (соответственно x'_0) на многообразии U (соответственно U'), то функции $(x, x') \to u_i(x)$, $(x, x') \to u'_j(x')$ образуют систему координат в окрестности точки (x, x'_0) на многообразии $U \times U'$.

Алгебраической группой называется группа G, снабженная структурой алгебраического многообразия, при условии, что отображение $(s, t) \to st^{-1}$ является морфизмом прямого произведения $G \times G$ в многообразие G.

В качестве примера алгебраической группы укажем группу $GL(n)$ обратимых матриц порядка n с элементами в поле K

(рациональные функции на этой группе — это те функции, которые рационально выражаются через элементы матрицы).

Другой пример можно построить так. Пусть $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел, а n — целое положительное число. Обозначим символом P дискретную подгруппу пространства $\boldsymbol{C}^n$, порожденную $2n$ линейно независимыми над вещественным полем $\boldsymbol{R}$ векторами. Тогда фактор-группа $\boldsymbol{C}^n/P = Z$ является компактной коммутативной группой, которая снабжена структурой комплексной группы Ли размерности n. Обозначим теперь символом L поле мероморфных функций над пространством $\boldsymbol{C}^n$, для которых все элементы группы P являются периодами. Каждому элементу поля L соответствует некоторая функция на подмножестве группы Z (это подмножество является образом множества точек голоморфности заданной функции при отображении $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n/P$). Вообще говоря, поле L содержит только константы. Если, однако, группа P удовлетворяет некоторым условиям (они записываются в терминах матриц Римана), то поле L содержит «достаточно много» функций в том смысле, что для любой пары точек многообразия Z существует функция из поля L, определенная в этих точках и принимающая в них разные значения. Тогда оказывается возможным снабдить группу Z структурой алгебраической группы, полем рациональных функций на которой служит множество функций, индуцированных элементами поля L. Алгебраические группы такого типа называются *абелевыми многообразиями*; несомненно, лучше было бы называть их абелевыми группами, если бы не возникала досадная возможность смешения этого значения слова «абелев» с его обычным употреблением в смысле «коммутативный». Важно заметить, что различные алгебраические группы, получающиеся описанным способом исходя из разных удовлетворяющих требуемым условиям решеток P, не все изоморфны между собой, хотя соответствующие им группы Ли все изоморфны.

Пусть G — какая-нибудь алгебраическая группа, а H — ее подгруппа, замкнутая относительно описанной выше топологии многообразия G. Можно показать тогда, что связная компонента H_0 единицы группы H является нормальным делителем конечного индекса группы H и замкнутой подгруппой группы G. Кроме того, группу H_0 можно снабдить такой структурой алгебраической группы, относительно которой любая функция, рациональная на H_0, совпадает локально (т. е. в окрестности каждой точки своего множества определения) с ограничением на H_0 некоторой функции, рациональной на многообразии G.

Например, алгебраической подгруппой группы $GL(n)$ является подгруппа матриц с определителем единица. То же относится к подгруппе ортогональных матриц с определителем единица и к группе симплектических матриц (при четных n). Наконец, к числу алгебраических подгрупп принадлежат: группа треугольных матриц (a_{ij}) ($a_{ij}=0$, если $i<j$), группа унипотентных треугольных матриц ($a_{ij}=0$, если $i<j$, $a_{ii}=1$), группа диагональных матриц.

Все алгебраические подгруппы абелевых многообразий сами представляют собой абелевы многообразия.

2. Описание двух типов алгебраических групп

Алгебраические группы, изоморфные замкнутым подгруппам групп $GL(n)$, называются линейными группами. Их свойства сильно отличаются от свойств описанных выше абелевых многообразий. Замечательно, что установить, является ли данная алгебраическая группа линейной или принадлежит к классу абелевых многообразий, можно, рассматривая только многообразие этой группы и отвлекшись от ее закона композиции.

Начнем с линейных групп. Алгебраическое многообразие U называется *аффинным*, если существует единая система координат на всем многообразии U, т. е. если это многообразие изоморфно некоторому замкнутому подмногообразию аффинного пространства K^n. Можно показать, что алгебраическая группа линейна в том и только в том случае, если ее многообразие аффинно. Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства его достаточности мы строим конечномерные векторные подпространства алгебры рациональных функций, всюду определенных на многообразии U (такие функции являются многочленами от координатных функций единой системы координат), инвариантные относительно оператора сдвига на точки группы. Каждое такое подпространство, естественно, определяет линейное представление группы, и совокупность этих представлений позволяет построить изоморфизм группы с линейной группой.

Перейдем теперь к группам абелева типа. До недавнего времени такие группы определялись только в случае комплексного поля констант. Обобщение этого понятия на случай основного поля любой характеристики дал Андре Вейль. Его определение абелева многообразия основано на понятии полного многообразия, которое соответствует в алгебраической геометрии понятию компактного топологического пространства. (Заметим, что описанные выше абелевы многообразия являются компактными группами Ли.) Рассмотрим многообразие U и морфизм f некоторого открытого подмногообразия V' многообразия V в многообразие U. График отображения f представляет собой некоторое подмножество Γ прямого произведения $U \times V$; обозначим его замыкание символом $\bar{\Gamma}$. Хотя отображение f не определено в точках дополнения $V - V'$, может случиться, что для точки $y \in V - V'$ существует одна или несколько таких точек $x \in U$, что $(x, y) \in \bar{\Gamma}$. Мы говорим в таком случае, что точка x является предельным значением отображения f в точке y. Пусть многообразие U обладает тем свойством, что для любого выбора многообразий V, V', отображения f и точки y существует хотя бы одно предельное значение морфизма f в точке y. В этом случае многообразие U называется *полным*. Приняв это определение, можно в случае комплексного поля констант показать, что класс описанных выше абелевых многообразий совпадает с классом алгебраических групп, многообразия которых полны. Тем самым в случае произвольного поля констант естественно называть абелевыми многообразиями алгебраические группы, многообразия которых полны. Оказывается, что все такие группы коммутативны и их изучение во многих отношениях труднее, чем исследование линейных групп. Так, уже сам факт их коммутативности требует отыскания гораздо более глубоких структурных свойств, с помощью которых эти группы можно было бы охарактеризовать. При всем том в работах Вейля и его последователей изучение абелевых многообразий было продвинуто весьма далеко; мы еще вернемся к этому вопросу впоследствии.

В то время как линейные группы обладают точным линейным представлением, группы абелева типа не имеют вообще никаких нетривиальных линейных представлений.

Отсюда следует, что алгебраическая группа может одновременно быть линейной и абелева типа только в том случае, если она состоит из единичной точки.

Оказывается возможным показать, что алгебраические группы самого общего вида можно построить из линейных групп и групп абелева типа. Укажем прежде всего, что для любой алгебраической группы G и любой ее алгебраической подгруппы H множество смежных классов (левых или правых) G/H можно снабдить естественной структурой многообразия. При этом естественное отображение f: $G \to G/H$ является морфизмом и любой морфизм группы G, постоянный на каждом смежном классе, разлагается в произведение отображения f и некоторого морфизма многообразия G/H. Если, кроме того, подгруппа H является нормальным делителем, то множество G/H представляет собой группу и эта группа, снабженная описанной структурой, становится алгебраической группой. Можно показать, что *у любой алгебраической группы G существует однозначно определенный нормальный делитель H, являющийся линейной группой и такой, что фактор-группа G/H полна, т. е. принадлежит к абелеву типу.*

Существуют различные доказательства этой теоремы; одно из них опубликовано Барзотти, другое — Розенлихтом. Пока мало что известно относительно обратной задачи — определения всех алгебраических групп, содержащих данную линейную группу в качестве нормального делителя, фактор-группа по которому изоморфна данному абелеву многообразию. Ряд важных частных случаев этой задачи был тем не менее разобран Розенлихтом, Серром и Ленгом. Поставленный вопрос весьма важен и связан с обобщениями теории полей классов на случай алгебраических многообразий.

3. Абелевы многообразия

3.1. Разложение на простые многообразия. Изогении. Абелево многообразие A называется простым, если оно не сводится к своей нулевой точке и не имеет никаких нетривиальных замкнутых связных подгрупп. Естественно попытаться отыскать разложение любого абелева многообразия в прямое произведение простых многообразий. Оказывается, однако, что здесь имеет место явление, подобное тому, которое встречается в теории полупростых групп Ли: всякая такая группа распадается в прямое произведение простых групп локально, но, вообще говоря, не в целом. Для формулировки точного утверждения нужно ввести понятие изогении абелевых многообразий. Гомоморфизмом абелева многообразия A в абелево многообразие B называется всякое отображение A в B, которое одновременно является гомоморфизмом групп и морфизмом многообразий. Мы говорим, что многообразие A изогенно многообразию B, если существует эпиморфизм A на B с конечным ядром. Это соотношение, которое, очевидно, рефлексивно и транзитивно, оказывается также симметричным. Всякое абелево многообразие A изогенно прямому произведению простых абелевых многообразий, и число прямых сомножителей во всех таких произведениях зависит только от A.

3.2. Кольцо эндоморфизмов. Пусть A — абелево многообразие. Весьма важные структурные свойства его описывает его кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{A}(A)$, которое состоит из всех гомоморфизмов многообразия A в себя с законами композиции $(\alpha+\beta)(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, $(\alpha\beta)(x)=\alpha(\beta(x))$. Эндоморфизмами, в частности, являются умножения на обычные целые числа, т. е. отображения вида $x\to nx$. Изучение таких отображений доставляет сведения относительно точек конечного порядка многообразия A, и, наоборот, тот факт, что множества точек конечного порядка переходят в себя при всех эндоморфизмах, позволяет получить важную информацию о кольце $\mathfrak{A}(A)$.

Прежде чем формулировать общие результаты, рассмотрим случай одномерного абелева многообразия A над полем комплексных чисел. Такое многообразие является *эллиптической кривой*; оно изоморфно тору $\boldsymbol{C}/P$, где P — дискретная подгруппа ранга два аддитивной группы комплексного поля $\boldsymbol{C}$. Рациональные функции на многообразии A индуцированы эллиптическими функциями, для которых точки группы P являются периодами. Всякий эндоморфизм многообразия A индуцирован линейным отображением $z\to\alpha z$ поля $\boldsymbol{C}$, где α — комплексное число, удовлетворяющее соотношению $\alpha P\subset P$ (такие отображения принято называть комплексными умножениями на эллиптической кривой A). Известно, далее, что все числа α, для которых $\alpha P\subset P$, образуют кольцо, которое либо сводится к кольцу целых рациональных чисел, либо представляет собой подкольцо кольца целых чисел некоторого мнимого квадратичного поля L. В этом последнем случае теория комплексного умножения очень тесно связана с теорией полей классов над полем L. Это обстоятельство указывает, что если получить общие результаты относительно кольца эндоморфизмов $\mathfrak{A}(A)$ произвольного абелева многообразия A, то можно надеяться, что эти результаты позволят обобщить теорию комплексного умножения на числовые поля более общего вида. Работы Симура и Танияма дают блестящее осуществление этой надежды.

Пусть A — произвольное абелево многообразие. Любому его эндоморфизму α можно поставить в соответствие целое число $\nu(\alpha)$, полагая $\nu(\alpha)=0$, если α не является эпиморфизмом; в противном случае α определяет некоторый изоморфизм поля $F(A)$ рациональных функций на многообразии A с некоторым его подполем $F'(A)$, и тогда число $\nu(\alpha)$ по определению равно степени расширения $F(A)/F'(A)$. Если это расширение сепарабельно (а оно всегда сепарабельно, когда α представляет собой умножение на целое число, взаимно простое с характеристикой поля K), то число $\nu(\alpha)$ совпадает с порядком ядра гомоморфизма α. Первый фундаментальный результат теории заключается в том, что для умножения α на целое число $k>0$ имеет место равенство $\nu(\alpha)=k^{2\dim A}$. Отсюда легко следует, что если число k взаимно просто с характеристикой, то все точки, порядки которых делят k, образуют конечную группу, изоморфную прямому произведению $2\dim A$ циклических групп порядка k. Далее, пусть l — простое число, отличное от характеристики; тогда все точки, порядки которых являются степенями l, образуют группу, изоморфную прямому произведению $2\dim A$ экземпляров фактор-группы аддитивной группы l-адических чисел по подгруппе целых l-адических чисел. Обозначим группу таких точек символом $\mathcal{M}_l$; ясно, что эндоморфизмы многообразия A действуют на этой группе так, что определяется некоторое представление кольца $\mathfrak{A}(A)$ в кольцо эндоморфизмов группы $\mathcal{M}_l$. Но, как нетрудно показать, это последнее кольцо изоморфно кольцу $\mathcal{M}_l$ квадратных матриц порядка $2\dim A$ над кольцом целых l-адических чисел. С помощью описанного представления кольца $\mathfrak{A}(A)$ в кольце $\mathcal{M}_l$ Вейль получил следующие результаты. Аддитивная группа кольца $\mathfrak{A}(A)$ порождена конечным числом образующих и не имеет кручения, так что кольцо $\mathfrak{A}(A)$ можно вложить в конечномерную алгебру $\mathfrak{A}_Q(A)$ над полем Q рациональных чисел. Эта алгебра полупроста. Более точно, для простого абелева многообразия A в кольце $\mathfrak{A}(A)$ нет делителей нуля, так что алгебра $\mathfrak{A}_Q(A)$ является в этом случае телом. Это тело не может быть, однако, каким угодно: в нем существует инволютивный антиавтоморфизм $\alpha \to \alpha'$, для которого $\sigma(\alpha\alpha') > 0$, где σ — оператор следа, а α — любой элемент, отличный от нуля. В общем случае существует такая совокупность простых абелевых многообразий $B_1, \ldots, B_m$, попарно не изогенных между собой, что многообразие A изогенно прямому произведению n_1 экземпляров многообразия $B_1, \ldots, n_m$ экземпляров многообразия B_m. Тогда алгебра $\mathfrak{A}_Q(A)$ распадается в прямую сумму m простых алгебр, причем алгебра с индексом i представляет собой алгебру матриц n_i-го порядка над телом $\mathfrak{A}_Q(A_i)$.

Мы уже упомянули о возможности приложения теории абелевых многообразий к обобщению комплексного умножения. Другое приложение этой теории (ради которого она и была создана) относится к полям алгебраических функций от одной переменной над конечным полем из q элементов. Пусть C — алгебраическая кривая; изоморфизм между кольцом соответствий этой кривой с ней самой и кольцом эндоморфизмов якобиева многообразия J этой кривой можно установить следующим образом. Пусть Γ — некоторое соответствие между двумя экземплярами кривой C (мы будем предполагать, что оно лишено компонент вида $x \times C$, так что нет точек, которым соответствовала бы вся кривая C). Тогда точки, соответствующие данной точке $x \in C$, взятые с их кратностями, образуют дивизор $\delta(x)$ на кривой C. Отображение $x \to \delta(x)$, продолженное по линейности, определяет некоторый гомоморфизм группы дивизоров $\mathfrak{a}$ кривой C в себя: $\mathfrak{a} \to \delta(\mathfrak{a})$ (если $\mathfrak{a} = \sum a_i x_i$, то $\delta(\mathfrak{a}) = \sum a_i \delta(x_i)$). Можно показать, что этот гомоморфизм переводит главные дивизоры в главные и, следовательно, индуцирует эндоморфизм группы классов дивизоров кривой C, т. е. группы точек якобиева многообразия этой кривой J. Далее, это отображение является также морфизмом многообразия J и, следовательно, эндоморфизмом алгебраической группы J. Этот эндоморфизм зависит лишь от класса соответствия Γ, и определенное таким образом отображение кольца классов соответствий в кольцо $\mathfrak{A}(J)$ является изоморфизмом этих колец. Предположим теперь, что кривая C задана уравнением $F(x, y)=0$ с коэффициентами в конечном поле k из q элементов. Существует замечательное соответствие кривой C с ней самой, сопоставляющее точке (x, y) точку (x^q, y^q). n-я степень этого соответствия сопоставляет точке (x, y) точку (x^{q^n}, y^{q^n}), и неподвижными точками этого соответствия являются те точки, координаты которых принадлежат единственному расширению k_n поля k степени n. Изучая эндоморфизм α' многообразия J, порожденный этим соответствием, и пользуясь общими свойствами кольца эндоморфизмов, Вейль сумел получить информацию о возрастании числа неподвижных точек соответствия Γ с ростом n, т. е. числа точек кривой C с координатами в поле k_n. Этот метод и позволил ему доказать гипотезу Римана относительно дзета-функции кривой C.

3.3. Абелевы многообразия и многообразия Пикара. Дальнейшие приложения теории абелевых многообразий относятся к теории дивизоров произвольного полного алгебраического многообразия U. Здесь оказывается возможным обобщить связь, существующую между кривой и ее многообразием Якоби. Дивизорами на многообразии U называются формальные линейные комбинации с целыми коэффициентами подмногообразий U на единицу меньшей размерности. Группа дивизоров обозначается символом $\mathfrak{D}(U)$. Алгебраическим семейством дивизоров на многообразии U называется закон, сопоставляющий каждой точке t некоторого неособого многообразия T (параметрического многообразия) дивизор $D(t)$ многообразия U; этот закон должен обладать определенными свойствами, которые выражают «алгебраичность» отображения $t \to D(t)$. Дивизор называется алгебраически эквивалентным нулю, если он принадлежит некоторому алгебраическому семейству дивизоров, которое содержит также нулевой дивизор. Алгебраически эквивалентные нулю дивизоры образуют подгруппу $\mathfrak{D}_0$ группы $\mathfrak{D}$. На кривой группа $\mathfrak{D}_0$ совпадает с группой дивизоров нулевой степени, т. е. таких формальных линейных комбинаций точек, сумма коэффициентов которых равна нулю. К алгебраически эквивалентным нулю дивизорам относятся главные дивизоры, т. е. дивизоры функций на рассматриваемом многообразии; они образуют подгруппу $\mathfrak{D}_p$ группы $\mathfrak{D}_0$. В случае кривой фактор-группа $\mathfrak{D}_0/\mathfrak{D}_p$ представляет собой как раз якобиево многообразие этой кривой. В общем случае удается установить, что фактор-группу $\mathfrak{D}_0/\mathfrak{D}_p$ также можно снабдить структурой алгебраического многообразия P (в действительности оно оказывается даже абелевым), которая удовлетворяет следующему условию: пусть $t \to D(t)$ — произвольное алгебраическое семейство дивизоров группы $\mathfrak{D}_0$, а $ClD(t)$ — класс дивизора $D(t)$ по модулю подгруппы $\mathfrak{D}_p$; тогда отображение $t \to ClD(t)$ является морфизмом многообразия T в многообразие P. Описанное многообразие P называется многообразием Пикара многообразия U. Построение многообразия Пикара послужило предметом ряда современных работ, важнейшие из которых принадлежат Мацусака, Самюэлю, Нерону и Вейлю.

Согласно теореме Нерона—Севери, фактор-группа $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_0$ (в прежних обозначениях) порождена конечным числом образующих. Ленг получил недавно изящное доказательство этой теоремы, основанное на изучении точек конечного порядка на многообразии Пикара.

Далее, известные результаты о многообразии Пикара позволяют изучить неразветвленные абелевы расширения поля $F(U)$ функций на многообразии U, пользуясь классической теорией куммеровых расширений. Любое циклическое расширение, степень которого делит взаимно простое с характеристикой целое число n, получается присоединением корня n-й степени из некоторой функции u на многообразии U. Как и в теории алгебраических чисел, для неразветвленности этого расширения необходимо и достаточно, чтобы дивизор функции u имел вид nD, где D — некоторый дивизор; если дивизор D главный, то расширение оказывается тривиальным. Дело сводится тем самым к изучению элементов фактор-группы $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_p$, порядки которых делят n. Но группа элементов фактор-группы $\mathfrak{D}_0/\mathfrak{D}_p$, порядки которых делят n, известна из теории многообразия Пикара, а группа смежных классов группы $\mathfrak{D}$ по подгруппе $\mathfrak{D}_0$, порядки которых делят n, конечна, и ее порядок можно ограничить в зависимости от n. Таким образом, удается получить довольно точные сведения о неразветвленных абелевых расширениях поля $F(U)$, так что Ленг смог перенести на случай абелевых расширений поля алгебраических функций значительную часть теории полей классов для полей алгебраических чисел.

Теорию многообразия Пикара можно применить к случаю, когда многообразие U само является абелевым многообразием A. Многообразие Пикара P изогенно многообразию A, но не обязательно изоморфно ему. Совсем недавно Картье удалось показать, что установленное таким образом соотношение между абелевым многообразием A и его многообразием Пикара P симметрично; иначе говоря, многообразие Пикара многообразия P изоморфно A. Установленное отношение двойственности абелевых многообразий формальными свойствами напоминает двойственность между конечными коммутативными группами и их группами характеров.

4. Линейные группы

Исторически развитие теории линейных групп довольно резко делится на две фазы, отличающиеся друг от друга как природой изучаемых проблем, так и характером используемых методов.

В первой фазе исследования вдохновлялись общей теорией групп Ли. Для абелевых многообразий она доставляет лишь тривиальный инвариант, поскольку алгебра Ли коммутативной аналитической группы зависит лишь от размерности этой группы. Для линейных групп это уже не так, потому что аналитическая подгруппа полной линейной группы $GL(n, \boldsymbol{C})$ вполне определяется своей алгеброй Ли. Поэтому сначала пытались извлечь максимум информации об алгебраической группе, изучая ее алгебру Ли; именно этим путем шел основатель теории Маурер, работы которого были продолжены и дополнены исследованиями Шевалле.

Нетрудно получить некоторый метод построения алгебраических подгрупп группы $GL(n, \boldsymbol{C})$. В самом деле, она естественно действует на пространствах тензоров различного вида над векторным пространством $\boldsymbol{C}^n$, и компоненты образа $s(T)$ тензора T относительно оператора $s \in GL(n, \boldsymbol{C})$ рационально зависят от элементов матрицы s. Тензор T называется *инвариантом* некоторой подгруппы $G \subset GL(n, \boldsymbol{C})$, если $s(T) = T$ для всех $s \in G$, и *полуинвариантом*, если $s(T) = a(s)\, T$ для всех $s \in G$, где $a(s)$ — некоторые скаляры. Пусть теперь задано некоторое множество тензоров $T_1, \ldots, T_h$ любых видов; тогда совокупность тех элементов s группы $GL(n, \boldsymbol{C})$, для которых любой тензор T_i является полуинвариантом, очевидно, представляет собой алгебраическую группу. Можно показать, что этот способ позволяет описать любую алгебраическую подгруппу G группы $GL(n, \boldsymbol{C})$. Идея доказательства состоит в следующем. Полиномиальные функции на группе $GL(n, \boldsymbol{C})$ (т. е. функции, которые можно представить в виде многочленов от элементов матрицы) образуют некоторую алгебру P; среди них однородные функции фиксированной степени d являются тензорами. Группа $GL(n, \boldsymbol{C})$ действует на алгебре P. Кроме того, алгебраическая подгруппа G группы $GL(n, \boldsymbol{C})$ определяется некоторым идеалом $\mathfrak{a}$ алгебры; этот идеал состоит из всех функций, обращающихся в нуль на G. Очевидно, что для принадлежности матрицы s к группе G необходимо и достаточно, чтобы оператор s переводил идеал $\mathfrak{a}$ в себя; достаточно даже, чтобы этот оператор переводил в себя пространство однородных элементов идеала $\mathfrak{a}$, степень которых не превосходит некоторого достаточно большого числа d. Тем самым условие принадлежности $s \in G$ равносильно тому, что оператор s переводит в себя некоторые векторные подпространства пространства тензоров. Нетрудно проверить равносильность этого последнего свойства тому, что некоторое конечное множество тензоров состоит из полуинвариантов оператора s. С помощью этой теоремы можно доказать, что если G — алгебраическая подгруппа группы $GL(n, \boldsymbol{C})$, а H — ее алгебраический нормальный делитель, то алгебраическая группа G/H изоморфна линейной группе. Стоит отметить также, что описанный результат вместе с его доказательством без каких бы то ни было изменений распространяется на случай любого поля констант.

Пусть G — произвольная подгруппа группы $GL(n, \boldsymbol{C})$. Существует наименьшая алгебраическая подгруппа G^* группы $GL(n, \boldsymbol{C})$, содержащая G; она состоит из всех матриц, полуинвариантами которых являются все полуинварианты группы G, и называется алгебраической оболочкой группы G. Можно показать, что если группа G аналитична, то она является нормальным делителем своей алгебраической оболочки G^*, а коммутанты групп G и G^* совпадают, так что фактор-группа G^*/G коммутативна. Точнее говоря, $G^* = G$ всякий раз, когда группа G совпадает с коммутантом аналитической группы. Кроме того, можно показать, что группа G^* порождена алгебраическими оболочками всех однопараметрических подгрупп аналитической группы G (т. е. подгрупп $\{\exp tX\}$, где X — фиксированная матрица). Но описанные выше результаты об определении группы с помощью ее полуинвариантов позволяют найти алгебраическую оболочку G^* однопараметрической подгруппы G в явном виде. Пусть группа G состоит из матриц вида $\exp tX$. Матрицу X можно однозначно представить в виде суммы нильпотентной матрицы N и полупростой (т. е. приводимой к диагональному виду) матрицы D, которая коммутирует с N. Оказывается, что для принадлежности матрицы X' к алгебре Ли группы G^* необходимо и достаточно, чтобы эту матрицу можно было представить в виде $cN+D'$, где c — скаляр, а D' — матрица, которую можно представить в виде многочлена $P(D)$ от матрицы D. При этом многочлен P должен обладать следующим свойством: из любого линейного соотношения $\sum z_i d_i = 0$ между характеристическими корнями $d_1, \ldots, d_n$ матрицы D следует соотношение $\sum z_i P(d_i) = 0$; коэффициенты z_i здесь являются целыми числами. Матрицы X' описанного вида называются репликами матрицы X. Для того чтобы некоторая подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры Ли группы $GL(n, \boldsymbol{C})$ была алгеброй Ли алгебраической подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы подалгебре $\mathfrak{g}$ принадлежали все реплики всех ее элементов.

Из этих результатов можно извлечь некоторые сведения о точках неприводимой линейной алгебраической группы G, рациональных над заданным подполем K поля $\boldsymbol{C}$. Мы примем, что сама группа G определена над полем K, т. е. что идеал полиномиальных функций, обращающихся в нуль на группе G, порожден многочленами с коэффициентами в поле K; это означает также, что алгебра Ли группы G порождена матрицами с элементами из поля K. Можно показать, что в этом случае группа G содержит «много» точек над полем K в том смысле, что любая полиномиальная функция на группе $GL(n, \boldsymbol{C})$, обращающаяся в нуль на всех таких точках, тождественно обращается в нуль на группе G. Принцип доказательства состоит в следующем. Сначала, с помощью описанных выше результатов, задача сводится к случаю, когда группа G коммутативна. После этого мы строим точки группы G над полем K, выбирая точки s над алгебраическим нормальным расширением этого поля и перемножая все сопряженные к таким точкам. В силу коммутативности элементы матрицы, соответствующей произведению сопряженных точек, принадлежат полю K. Отметим, что можно поставить точно такой же вопрос о множестве точек линейной группы над заданным полем K и в случае, когда вместо поля C фигурирует алгебраически замкнутое поле любой характеристики. Розенлихт, однако, показал, что теорема о существовании достаточно полного множества таких точек в этом случае может оказаться ложной, хотя она верна, если предположить, что поле K совершенно.

К сожалению, результаты о связи между алгебраическими группами и их алгебрами Ли теряют свое значение при ненулевой характеристике основного поля. Можно, правда, сопоставить с любой n-мерной алгебраической группой алгебру Ли, размерность которой также равна n; притом эта алгебра Ли является p-алгеброй в смысле Джекобсона, т. е. на ней определена операция возвышения в степень p, связанная известными тождествами с операцией коммутирования (происхождение этой операции объясняется тем, что в поле характеристики p любое дифференцирование, итерированное p раз, снова является дифференцированием). Но в то время как результаты классической теории, позволяющие извлекать из свойств группы сведения о свойствах алгебры Ли, остаются в общем справедливыми для характеристики p, совсем иначе обстоит дело с теоремами, развивающими эту связь в обратном направлении. Укажем, например, что различным неприводимым подгруппам некоторой алгебраической группы G может соответствовать одна и та же алгебра Ли, а неразрешимым алгебраическим группам (скажем, линейной унимодулярной группе матриц второго порядка над полем характеристики два) вполне могут соответствовать разрешимые алгебры Ли. Отсюда следует, что методы типа используемых в теории групп Ли становятся совершенно неэффективны в применении как к линейным группам над полями конечной характеристики, так и к абелевым многообразиям над полями нулевой характеристики. Поэтому приходится заменить их прямыми методами, которые и здесь в значительной степени основываются на технике алгебраической геометрии.

К первым результатам теории линейных групп над полями характеристики p относятся результаты Колчина о разрешимых группах. Именно Колчин доказал, что теорема Ли, согласно которой все матрицы комплексной аналитической разрешимой линейной группы можно одновременно привести к треугольному виду, остается справедливой и для неприводимых разрешимых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем любой характеристики. Этот результат был тем более поразителен, что ложность соответствующего утверждения для алгебр Ли к тому времени уже была известна.

Но свой теперешний вид стройной и связной дисциплины теория линейных алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики приобрела в основоположном мемуаре Бореля. Пусть G — неприводимая алгебраическая линейная группа над полем K. Ясно, что эта группа, если только она не состоит из единственной точки, не может быть полной. Тем не менее она может обладать полными однородными пространствами, т. е. такими замкнутыми подгруппами H, многообразие классов смежности по которым G/H полно. Так, $(n-1)$-мерное проективное пространство, которое как многообразие полно, является однородным пространством полной линейной группы матриц порядка n. Можно, однако, показать, что у линейной разрешимой группы нет полных однородных пространств. Точнее говоря, можно показать, что если линейная разрешимая группа действует рационально на каком-нибудь полном многообразии U, то на этом многообразии существует точка, инвариантная относительно операций группы. Доказательство сводится сначала к случаю коммутативной группы, а затем к случаю одномерной группы. Любая одномерная группа (алгебраическая, линейная, неприводимая) изоморфна либо аддитивной группе основного поля, либо мультипликативной группе отличных от нуля элементов основного поля, и в любом из этих случаев отсутствие нетривиальных полных однородных пространств легко проверить непосредственно. Отсюда следует, что если неприводимая линейная группа G действует на полном многообразии U, то любая неприводимая разрешимая подгруппа группы G содержится в подгруппе, оставляющей на месте какую-нибудь точку многообразия U. Кроме того, у группы G всегда существует такое полное однородное пространство, что все подгруппы, оставляющие на месте точку этого пространства, разрешимы. Для доказательства этого достаточно погрузить G в группу $GL(n, K)$ и проверить теорему для этой последней группы. Но фактор-пространство группы $GL(n, K)$ по подгруппе треугольных матриц совпадает с многообразием флагов векторного пространства K^n над полем K, т. е. с многообразием последовательностей вида $(L_1, \ldots, L_n)$, где L_i есть i-мерное линейное подпространство пространства K^n, причем $L_i \subset L_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Многообразие же флагов полно. Этот метод одновременно показывает, что любая неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, K)$ сопряжена с некоторой подгруппой треугольной группы, что дает новое доказательство теоремы Ли — Колчина. Назовем теперь *подгруппами Бореля* произвольной неприводимой алгебраической линейной группы G максимальные неприводимые разрешимые подгруппы ее. Они совпадают с минимальными элементами множества таких замкнутых подгрупп H, фактор-пространство G/H по которым полно. Наконец, оказывается, что все максимальные разрешимые подгруппы группы G неприводимы. Все подгруппы Бореля группы G сопряжены между собой в этой группе.

Назовем *тором* линейную группу, изоморфную произведению некоторого числа мультипликативных групп основного поля на себя. Основание для применения этого термина заключается в том, что в теории алгебраических групп эти группы играют роль, весьма схожую с ролью тороидальных групп в теории компактных групп Ли. В общей линейной группе подгруппа диагональных матриц является максимальным тором, и ему сопряжен любой другой тор, содержащийся в этой группе. В произвольной линейной алгебраической группе G все максимальные торы также сопряжены между собой; их общая размерность является важным инвариантом группы G, который называется ее рангом. Наконец, *подгруппами Картана* группы G назовем централизаторы максимальных торов этой группы. Всякая подгруппа Картана представляет собой прямое произведение максимального тора и подгруппы, состоящей из унипотентных матриц (матрица называется унипотентной, если она равна сумме единичной и нильпотентной матриц).

Эти результаты можно еще более уточнить в случае, когда группа G полупроста, т. е. не содержит разрешимых нормальных делителей ненулевой размерности. В этом случае максимальные торы совпадают со своими централизаторами, так что подгруппы Картана тороидальны. Любой максимальный тор T содержится лишь в конечном числе подгрупп Бореля $B_1, \ldots, B_N$; нормализатор N группы T просто транзитивно переставляет эти группы между собой, а фактор-группа N/T конечна. Важность этой группы для теории полупростых групп была выяснена Германом Вейлем, поэтому мы назовем ее *группой Вейля* группы G. Пусть B — одна из групп B_i; она распадается в полупрямое произведение группы T и некоторой группы B^u, состоящей из унипотентных матриц. Кроме того, хотя общие унипотентные группы в характеристике $p > 0$ могут быть устроены, по-видимому, весьма сложно, строение групп B^u, связанных с полупростыми группами, оказывается сравнительно простым. Именно группа B^u представляет собой полупрямое произведение некоторого числа одномерных групп H_i, изоморфных аддитивной группе поля K, нормализаторы которых содержат тор T. Фиксируем параметризацию одной из групп H_i элементами поля K. Тогда образ некоторой точки этой группы, соответствующей параметру θ, относительно элемента t тора T является точкой, соответствующей параметру $\alpha_i(t)\theta$, где $\alpha_i(T)$ — некоторый гомоморфизм группы T в мультипликативную группу поля. Получающиеся таким способом гомоморфизмы тора T называются *корнями группы* G (относительно этого тора), и группа Вейля переставляет корни между собой. Таким образом, получаются все структурные элементы, позволившие Киллингу и Картану произвести в классическом случае полную классификацию полупростых групп Ли. Поэтому процесс классификации удается провести и для полупростых групп над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики. В результате оказывается, что возможные типы полупростых групп совпадают с теми, которые получались в классической теории, так что их классификация совершенно не зависит от характеристики основного поля. Следует отметить, однако, что существование групп всех возможных типов мы пока умеем устанавливать, только пользуясь существованием этих групп в классическом случае. Для перехода от классического случая к случаю характеристики p служит процесс, с помощью которого любой полупростой комплексной группе G, которая совпадает со своей присоединенной группой, и любому полю K (не обязательно алгебраически замкнутому) можно поставить в соответствие некоторую группу матриц с элементами в поле K. В применении к конечным полям K этот процесс позволяет получить некоторые конечные группы, приводящие к конечным простым группам. Среди построенных таким образом конечных простых групп те группы, которые соответствуют классическим простым группам и исключительной группе G_2, были известны со времени работ Диксона.

Пусть G — неприводимая линейная группа, а B — ее подгруппа Бореля. Полное однородное пространство G/B зависит лишь от фактор-группы G по ее радикалу, и получающиеся таким образом полные многообразия обладают рядом интересных свойств. Группа B как подгруппа группы G действует на пространство G/B. Согласно теореме Брюа, пространство G/B распадается относительно этой группы на конечное число орбит. Каждая из этих орбит представляет собой некоторое (вообще говоря, незамкнутое) подмногообразие многообразия G/B, изоморфное пространству K^r. В классическом случае это дает некоторое клеточное разбиение компактного пространства G/B на клетки четных размерностей, откуда немедленно следует, что в любой размерности m группа целочисленных гомологий пространства G/B является свободной группой, ранг которой равен количеству m-мерных клеток. Но число таких клеток в принципе можно подсчитать, зная, как действует группа Вейля на множестве корней. Таким путем получаются результаты о гомологиях пространств G/B, установленные Боттом с помощью трансцендентных средств. Известно, что задача обобщения на многообразия над полем характеристики $p>0$ понятий, доставляемых топологией в случае комплексных алгебраических многообразий, остается пока нерешенной. Гипотезы Вейля показывают тесную связь этой задачи с вопросами диофантова анализа. Можно показать, что для пространств типа G/B решением поставленной задачи служит принадлежащее Чжоу понятие кольца классов рациональной эквивалентности. В самом деле, для произвольной характеристики кольцо Чжоу многообразия G/B изоморфно кольцу когомологий такого комплексного многообразия, которое является однородным пространством соответствующей комплексной группы G.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КЛАССИЧЕСКИМ АНАЛИЗОМ*)

В. Феллер

(США)

Исследования последнего времени обнаружили тесную связь между теорией потенциала и марковскими процессами и дали новые примеры плодотворности вероятностного подхода к задачам классического анализа. Работа Шоке о емкостях, теория Бейрлинга — Дени общих потенциалов, вероятностный подход Дуба к задаче Дирихле и основные результаты Ханта, касающиеся потенциалов и марковских процессов, несмотря на различия формального внешнего вида и методов исследования, тесно связаны между собой. Я надеялся в этом выступлении обсудить взаимные связи между этими теориями, но эта задача оказалась слишком непреодолимой как ввиду ограниченного времени, так и ввиду моих собственных ограниченных возможностей. Поэтому я принужден ограничить этот разговор некоторыми аспектами, родственными моей собственной работе. Я предполагаю описать две границы и топологии, индуцированные аннигиляторами некоторых операторов; обсудить оправданность их введения, их употребление в абстрактной теории так называемых граничных задач и их связь с инвариантной теорией операторов локального характера (которые обобщают плохо определенное понятие дифференциальных операторов).

Я не буду стараться развить теорию или хотя бы формулировать полученные результаты в точной форме. Я лишь

---

*) W. Feller, Some new connections between probability and classical analysis.

пытаюсь объяснить интуитивные основания и цели теории посредством нескольких простых примеров, предпочтительно пользуясь классическими гармоническими функциями. При этом главное ударение делается на чисто аналитической стороне вопроса.

В дальнейшем D будет всегда обозначать топологическое пространство, а $\boldsymbol{C}$ — обычное банахово пространство непрерывных функций в D с

$$\|f\| = \sup_{p \in D} |f(p)|.$$

Все операторы, если не будет оговорено противное, будут действовать на непрерывных функциях.

1. Границы, индуцированные положительными операторами

1.1. Гармонические функции. Удобно начать с вероятностной интерпретации гармонических функций посредством *специальным образом* построенного случайного блуждания. В 2.2 мы подойдем к лапласиану более прямым и естественным путем.

Пусть D — открытый единичный круг в плоскости, и для каждой точки $p \in D$ пусть $D_p \subset D$ — наибольший открытый круг с центром в p, содержащийся в D. Мы будем изучать оператор T из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$, для которого $Tf(p)$ *равняется среднему арифметическому* f по D_p. Таким образом,

$$Tf = \int_D K(\cdot,\ q) f(q)\, dq, \tag{1}$$

где $K(p,\ q)$ равняется $|D_p|^{-1}$ или 0 в зависимости от того, $q \in D_p$ или $q \overline{\in} D_p$. Аналогично T^n индуцируется ядром $K^{(n)}$. Этот оператор T определяет дискретное *случайное блуждание* с произвольным начальным положением $p \in D$, в котором $K^{(n)}(p,\ \cdot)$ — плотность вероятностей случайного положения $Q_n \in D$ после n шагов. Мы получаем определенную меру на пространстве всех последовательностей $\{Q_n\}$ $(Q_0 = p,$ $Q_n \in D)$, и может быть показано, что почти все последовательности сходятся к точке граничной окружности. Для наших целей будет достаточно менее тонкое, чисто аналитическое утверждение. Для любого множества $A \subset D$ вероятность того, что $Q_n \in A$, равняется $T^n\chi(p)$, где χ — характеристическая функция A. Легко проверить, что $T^n f \to 0$ для любой $f \in \boldsymbol{C}$, обращающейся в нуль на границе. Поэтому $T^n\chi \to 0$ для каждого компактного A, а это эквивалентно утверждению, что Q_n приближается к границе по вероятности.

Этот результат может быть уточнен следующим образом. Пусть $\Gamma \subset B$ — множество на граничной окружности B, u_Γ — гармоническая функция, определяемая, в классическом смысле, граничными значениями 1 на Γ и 0 на $B - \Gamma$. Тогда $u_\Gamma(p)$ — *вероятность того, что Q_n приближается к* Γ, когда $n \to \infty$.

Гармонические функции появляются в этом контексте потому, что они являются собственными функциями, удовлетворяющими $\varphi = T\varphi$. Множество $\mathfrak{P}$ всех решений этого уравнения, таких, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, — выпуклое множество, и гармонические функции u_Γ совпадают с его *крайними элементами*. Множества

$$\Gamma_\varepsilon = \{ q \in D : u_\Gamma(q) > 1 - \varepsilon \} \tag{2}$$

являются системой окрестностей Γ в D. Если χ — характеристическая функция Γ_ε, то $T^n\chi \to u_\Gamma$ и отсюда

$$u_\Gamma(p) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{prob} \{ Q_n \in \Gamma_\varepsilon \}. \tag{3}$$

Из этого легко вывести, что $u_\Gamma(p)$ является вероятностью действительного асимптотического приближения к Γ, но для наших целей вполне достаточно более слабого утверждения (3). (Другое доказательство дается в следующем пункте.)

Нужно отметить, что это утверждение — не аналитической природы, но может быть выведено абстрактно для широкого класса операторов в произвольном топологическом пространстве D. *A priori* не должна быть задана никакая граница, и естественно *определить* границу таким образом, чтобы множества Γ_ε становились окрестностями соответствующих граничных множеств. К тому же D может обладать границей, которая не допускает интерпретации Γ_ε как окрестностей, и может быть необходимо ввести новую границу, приспособленную для изучения преобразования T. Простейший пример получается, если отобразить единичный круг D конформно на область $\tilde{D}$, граница которой $\tilde{B}$ имеет сложную структуру с простыми концами, и т. д. При этом конформном отображении T и соответствующее случайное блуждание переносятся на $\tilde{D}$, новые собственные функции снова являются гармоническими, но очевидным образом свойства сходимости случайного блуждания остаются верны, только если мы заменим «естественную» границу $\tilde{D}$ границей и топологией индуцированными конформным отображением. Это, конечно, вероятностная версия хорошо известного сейчас наблюдения, принадлежащего Мартину [17], что изучение гармонических функций в сложных областях требует введения приспособленной для этого границы.

Мы переходим к более интересному примеру другого рода.

1.2. Релятивизация и изоморфизмы. Для произвольной (не обязательно ограниченной) функции $\psi > 0$, гармонической в круге D, мы определяем новое преобразование формулой

$$T_\psi f = \psi^{-1} T(l\psi). \tag{4}$$

Его ядро задается формулой

$$K_\psi(p, q) = \psi^{-1}(p) K(p, q) \psi(q). \tag{5}$$

Функция $v > 0$ удовлетворяет уравнению $v = T_\psi v$ тогда и только тогда, когда $\varphi = v\psi$ удовлетворяет уравнению $\varphi = T\varphi$ (является гармонической). Мы имеем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между положительными собственными функциями T и T_ψ, причем 1 и ψ соответствуют ψ^{-1} и 1.

Операторы такого вида будут называться *подобными* T. Ясно, что подобие обладает свойствами транзитивности, симметричности и рефлексивности. Преобразование, тесно связанное с этим, использовалось Брело [1] для гармонических функций. В дальнейшем будет ясно, что понятие подобия исключительно важно и имеет соответствие себе в подобных полугруппах и дифференциальных уравнениях. Здесь мы используем его, чтобы иллюстрировать понятие границы, индуцируемой T_ψ, и чтобы вывести новое доказательство для нашей интерпретации гармонической функции u_Γ.

Обозначим соответственно через $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_\psi$ множества положительных собственных функций T и T_ψ, ограниченных 1. Для простоты изложения рассмотрим случай $\psi = u_\Gamma$, где ψ — крайний элемент $\mathfrak{P}$. Отображение $u\psi \longleftrightarrow \varphi$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{P}_\psi$ и подмножеством $\mathfrak{P}$, состоящим из элементов таких, что $\varphi \leqslant u_\Gamma$; это соответствие сохраняет крайние элементы. Теперь структура множества $\mathfrak{P}$ гармонических функций лучше всего описывается в терминах «естественной» границы D. Так как связи между T, $\mathfrak{P}$ и $D \bigcup B$ с естественной топологией переносятся на T_ψ, $\mathfrak{P}_\psi$ и $D \bigcup \Gamma$, то множество Γ играет для T_ψ ту же роль, что B для T, и может быть рассмотрено как *граница, индуцируемая* T_ψ.

Этот же результат можно подтвердить вероятностным путем. Из $\psi^{-1} = T_\psi \psi^{-1}$ следует, что $T_\psi^n f \to 0$ для любой $f \in \boldsymbol{C}$, обращающейся в нуль вдоль Γ. Отсюда, если χ — характеристическая функция окрестности U множества Γ, мы имеем $T_\psi^n \chi \to 1$; таким образом, в случайном блуждании, связанном с T_ψ, траектории сходятся по вероятности к граничному множеству Γ.

Это замечание приводит к новому доказательству интерпретации u_Γ, данной в предыдущем пункте. Из формулы (5) видно, что соотношение $T_\psi^n \chi \to 1$ может быть переписано в виде

$$\int_U K^{(n)}(p, q)\,\psi(q)\,dq \to \psi(p). \tag{6}$$

Теперь окрестность U множества Γ может быть выбрана такой маленькой, что в ней $\psi = u_\Gamma$ произвольно близко к 1, и мы заключаем, что в T-случайном блуждании $\boldsymbol{P}\{Q_n \in U\} \to \to u_\Gamma(p)$ для любой окрестности Γ. Это — слегка ослабленный вариант интерпретации $u_\Gamma(p)$ как ***вероятности асимптотического приближения к*** Γ.

При этой интерпретации u_Γ мы видим, что в T-случайном блуждании K_ψ представляет *условную* плотность переходных вероятностей, если дано, что траектории сходятся к Γ. Тогда с точки зрения теории вероятностей *T_ψ-случайное блуждание получается из T-случайного блуждания наложением условия, или релятивизаций:* в T-блуждании мы обращаем внимание только на траектории, сходящиеся к Γ. Более точно, пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех последовательностей $\{Q_n\}$ ($Q_0 = p$, $Q_n \in D$) с мерой $\boldsymbol{P}$, индуцированной T, и пусть $\mathfrak{H}_\Gamma$ — подмножество последовательностей, сходящихся к Γ. Тогда T_ψ-блуждание приписывает нулевую вероятность $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_\Gamma$ и вероятность $\boldsymbol{P}(\mathfrak{A})$: $\boldsymbol{P}(\mathfrak{H}_\Gamma) = \boldsymbol{P}(\mathfrak{A})\,\psi^{-1}(p)$ подмножествам $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}_\Gamma$.

1.3. Абстрактная конструкция; урезанные и полные границы. Мы переходим к крайнему случаю, когда D — множество целых чисел 1, 2, ..., с дискретной топологией. Это имеет то преимущество, что никакое предвзятое интуитивное понятие границы не затемняет поля зрения. Границы могут быть сложной топологической структуры, и настоящий случай ясно обнаружит особенности задачи в самом общем случае.

$\boldsymbol{C}$ теперь — пространство ограниченных функций, и мы записываем $f \in \boldsymbol{C}$ как матрицу-столбец с элементами $f(i)$. Мы рассматриваем оператор T, определенный матрицей Π с элементами $\Pi(i, j)$, так что в матричном обозначении $Tf = \Pi f$. Матрица Π предполагается субстохастической, т. е. ее элементы $\geqslant 0$ и суммы по строкам $\leqslant 1$. Мы обозначаем через $\mathfrak{P}$ множество всех собственных векторов $\boldsymbol{\varphi}$ таких, что $\boldsymbol{\varphi} = \Pi\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\varphi} \leqslant \mathbf{1}$, а через $\mathfrak{P}^\infty$ — множество всех (может быть, неограниченных) решений $\boldsymbol{\varphi} > \mathbf{0}$ уравнения $\boldsymbol{\varphi} = \Pi\boldsymbol{\varphi}$. Чтобы избежать изложения тривиальных вещей, будем предполагать, что (I) каждое $\boldsymbol{\varphi}$ строго положительно, (II) $\mathfrak{P}$ содержит по крайней мере два независимых вектора. (Условие (I) исключает неприятный случай матриц, распадающихся на части, требующий больше слов, чем мыслей; (II) исключает границу пустую и состоящую из одной точки.)

Так же, как и раньше, Π может быть интерпретирована как матрица переходных вероятностей в *случайном блуждании* (цепи Маркова), причем недостатки в строках $1 - \sum \Pi(\cdot, j)$ отвечают возможности окончания процесса. Для произвольного начального положения $i \in D$ мы имеем вероятностную меру на множестве $\mathfrak{H}$ всех кончающихся или бесконечных последовательностей целых чисел $\{Q_n\}$. Подмножество $\mathfrak{H}^{(n)}$ последовательностей длины $\geqslant n$ имеет вероятность $\sum_j \Pi^n(i, j)$, и отсюда вероятность множества $\mathfrak{H}^{(\infty)}$ бесконечных последовательностей задается i-м элементом $\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \lim \Pi^n \mathbf{1}$. Заметим, что $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ — *максимальный* элемент $\mathfrak{P}$.

Мы приступаем к тому, чтобы ввести *урезанную*, или *$\mathfrak{P}$-границу* B и *полную*, или *$\mathfrak{P}^\infty$-границу* $B^\infty \supset B$. Мы начнем с самого простого частного случая, когда уравнение $\boldsymbol{\varphi} = \Pi\boldsymbol{\varphi}$ имеет лишь *конечное* число независимых решений.

(а) *$\mathfrak{P}$-граница.* Пусть $\mathfrak{P}$ порождается N ненулевыми векторами $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(N)}$. Они могут быть выбраны крайними элементами $\mathfrak{P}$, что равнозначно тому, что $\|\boldsymbol{\varphi}^{(k)}\| = 1$ и $\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{\varphi}^{(N)}$. Для фиксированного k и $\varepsilon > 0$ положим $\Gamma_\varepsilon^{(k)} = \{i\colon \varphi^{(k)}(i) > 1 - \varepsilon\}$. При $\varepsilon \to 0$ мы получаем последовательность вложенных друг в друга непустых множеств с пустым пересечением; из $\overline{\boldsymbol{\varphi}} \leqslant 1$ заключаем, что для фиксированного $\varepsilon > {}^1/_2$ множества $\Gamma_\varepsilon^{(j)}$ и $\Gamma_\varepsilon^{(k)}$ не перекрываются $(j \neq k)$.

Урезанная граница B состоит из N точек $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(N)}$ таких, что $\Gamma_\varepsilon^{(k)}$ является окрестностью $\beta^{(k)}$ в D. Мы можем распространить определение каждого $\varphi \in \mathfrak{P}$ на $D \cup B$, полагая $\varphi^{(j)}(\beta^{(k)}) = 1$ или 0 в зависимости от того, $j = k$ или $j \neq k$. Тогда каждая функция φ непрерывна в $D \cup B$, и «задача Дирихле» разрешима: заданным граничным значениям соответствует в точности одна функция $\varphi \in \mathfrak{P}$.

Наконец, в очевидных обозначениях $\Pi^{(n)}(i, \Gamma_\varepsilon^{(k)}) \to \varphi^{(k)}(i)$, когда $n \to \infty$, для каждого фиксированного ε. Из этого выводится, что в случайном блуждании, начинающемся в i, выборочные последовательности $\{Q_n\}$ сходятся с вероятностью $\varphi^{(k)}(i)$ к $\beta^{(k)}$, с вероятностью $1 - \bar{\varphi}(i)$ они кончаются; а вероятность отсутствия сходимости равна 0.

(б) $\mathfrak{P}^\infty$-*граница* может быть введена непосредственно, но более удобно использовать преобразование подобия, введенное в 1.2. Матрица Π_ψ *подобна* Π, если $\Pi_\psi = \Pi$ или

$$\Pi_\psi(i, j) = \psi^{-1}(i)\, \Pi(i, j)\, \psi(j), \tag{7}$$

где $\psi \in \mathfrak{P}^\infty$. Напоминаем, что подобие транзитивно, рефлексивно и симметрично и что отображение $\varphi \longleftrightarrow v$, где $v(i) = \varphi(i)\,\psi^{-1}(i)$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{P}^\infty$ и $\mathfrak{P}_\psi^\infty$.

Чтобы увидеть связь между B и соответствующей урезанной границей B_ψ, индуцированной Π_ψ, рассмотрим типичный случай $\psi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$. Векторам $\varphi^{(3)}, \ldots, \varphi^{(N)}$ и каждому неограниченному $\varphi \in \mathfrak{P}^\infty$ соответствуют неограниченные векторы в $\mathfrak{P}_\psi^\infty$, и граница B_ψ сводится к двум точкам, окрестности которых совпадают с окрестностями $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$. Относительно интерпретации матрицы Π_ψ в терминах *условных вероятностей* см. 1.2.

В общем случае, если B_ψ — урезанная граница, индуцированная Π_ψ, мы будем отождествлять точки B и B_ψ с совпадающими системами окрестностей. Отождествляя таким образом точки, мы определим *полную границу* B^∞, *индуцированную* Π, *как объединение границ* B_ψ, когда ψ пробегает $\mathfrak{P}^\infty$. Все *подобные матрицы индуцируют одну и ту же полную границу,* и если $\mathfrak{P}^\infty$ порождается M независимыми векторами, то B^∞ содержит ровно M точек.

Заметим, что $D \cup B^{\infty}$ не обязано быть компактным. (Никакая компактификация не кажется естественной или желательной для наших целей.)

(в) *Границы максимальных идеалов.* Если $\mathfrak{P}$ не порождается счетным числом элементов, крайние элементы $\mathfrak{P}$ соответствуют не точкам будущей границы, а скорее множествам положительной емкости. Не известно никакого удовлетворительного определения точек и окрестностей. Теперь и $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^{\infty}$ устроены как структуры, аналогичные структуре гармонических функций, и соответствие между $\mathfrak{P}^{\infty}$ и $\mathfrak{P}_{\psi}^{\infty}$ является структурным изоморфизмом. Это дает возможность определить точки B и B^{∞} максимальными идеалами соответственно в $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^{\infty}$ (см. [5]). К несчастью, эти границы абсурдно велики. Например, выборочные последовательности сходятся скорее к множествам, чем к точкам; каждая функция $\varphi \in \mathfrak{P}$ имеет непрерывные граничные значения, что находится в противоречии с желательной моделью гармонических функций в круге D с естественной топологией. То, что структуры $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^{\infty}$ изоморфны структурам непрерывных функций на некоторых хаусдорфовых пространствах, конечно, хорошо известно (см., например, Кэдисон [15]). Для нас главное — то, что это хаусдорфово пространство появляется как *граница* D; хотя введенные нами границы максимальных идеалов хорошо служат и в качестве средства для ориентации, и как направляющий принцип, однако введение менее громоздкой и более подходящей границы является на сегодня открытой и обещающей проблемой.

(*Постскриптум.* Частичное решение получено Дж. Л. Дубом [19], который использует при этом оригинальную конструкцию Мартина. Мартиновская граница достаточно мала для того, чтобы выборочные последовательности сходились к точкам. Однако в конечном случае эта граница может быть больше, чем наша, и это может привести к трудностям в связи с граничными задачами и неминимальными полугруппами.)

2. Полугруппы и дифференциальные уравнения

2.1. Ориентация. Мы обращаемся к изучению семейства положительных операторов $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$, из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$ с $\|T(t)\| \leqslant 1$ и с полугрупповым свойством $T(t+s) = T(t)\,T(s)$. Вероятностное соответствие фиксированному $T(t)$ — это (может быть, кончающееся) случайное блуждание со скачками, происходящими в моменты t, $2t$, ... Всей полугруппе соответствует случайное движение (марковский процесс) в D с непрерывным временем; выборочное пространство $\mathfrak{H}$ — это пространство функций Q, определенных в интервале $0 \leqslant t < \tau \leqslant \infty$, таких, что $Q(t) \in D$, а $Q(0) = p \in D$ — заданная точка. Полугруппа индуцирует $\boldsymbol{P}$-меру в $\mathfrak{H}$ такую, что для любого борелевского множества $A \subset D$ мы имеем $\boldsymbol{P}\{Q(t) \in A\} = T(t)\chi(p)$, где χ — характеристическая функция A. Излишне говорить, что почти все траектории обладают разумными свойствами регулярности относительно $\boldsymbol{P}$-меры. В частности, они непрерывны, если полугруппа порождается дифференциальным оператором («диффузионные процессы»).

Если траектория Q определена только в пределах интервала $0 \leqslant t < \tau$ (т. е. если процесс кончается в момент τ), то, за исключением множества траекторий, имеющего меру нуль, при $t \uparrow \tau$ либо $Q(t) \to q \in D$, либо $Q(t)$ не имеет точек накопления в D. В первом случае мы говорим, что процесс кончается в q, во втором — что он *кончается «на границе»*. Однако остается еще оправдать это выражение.

Для этой цели нам придется ввести границу B, индуцированную *производящим оператором* Ω полугруппы. Мы увидим, что все операторы $T(t)$, $t > 0$, *индуцируют одну и ту же границу* $\pi \subset B$ и что *процесс или кончается на* $B - \pi$, *или приближается к* π *асимптотически, не достигая ее.*

Мы говорим, что полугруппа *порождается* Ω, если для плотного множества «гладких» $f \in \boldsymbol{C}$

$$\lim_{t \to 0} t^{-1}\{T(t)f - f\} = \Omega f \in \boldsymbol{C} \tag{8}$$

в смысле поточечной сходимости. Согласно этому определению, введенному в [11], Ω может порождать много полугрупп; инфинитезимальный оператор в смысле Хилла [13] является сужением $\Omega \mid \Sigma$ оператора Ω, получаемого наложением *дополнительных условий* (см. 4.3).

Если положить $T(t)f = u(t, \cdot)$, функция u будет удовлетворять функциональному уравнению $u_t = \Omega u$ с «начальным условием» $u(0, \cdot) = f$. (Это буквально верно для гладких f и в некотором операционном смысле для всех f.) В классических терминах мы занимаемся «решением» этого уравнения.

Мы рассмотрим сначала семейство «подобных» производящих операторов, а затем связь между производящими операторами с одинаковыми аннигиляторами.

2.2. Лапласиан. Изоморфизмы. Мы возвращаемся к гармоническим функциям и берем в качестве примера обычное *уравнение теплопроводности* $u_t = \Delta u$ в единичном круге D. Среди положительных полугрупп, порождаемых Δ, существует *минимальная полугруппа.* В классических терминах $u(t, \cdot) = T(t) f$ есть решение уравнения $u_t = \Delta u$ с начальным условием $u(0, \cdot) = f$ и *граничным условием*, состоящим в том, что u обращается в нуль на окружности B. С этой полугруппой связан *винеровский процесс* в D, кончающийся на B. Физически процесс представляет собой однородную диффузию в D с «поглощающими границами» или передачу тепла с нулевой температурой на границе.

Для этой минимальной полугруппы $\|T(t)\| < 1$, и поэтому граница π, индуцированная $T(t)$, пуста, но мы занимаемся границей, индуцируемой гармоническими функциями, т. е. *аннигиляторами* производящего оператора Δ. В этой связи, конечно, мы придерживаемся естественной топологии замкнутого круга. Так же, как в 1.1, пусть u_Γ — гармоническая функция в D, определенная граничными значениями 1 на множестве $\Gamma \subset B$ и 0 на $B - \Gamma$. Для процесса, начинающегося в точке $p \in D$, мы имеем следующий аналог результатам 1.1.

$u_\Gamma(p)$ *является вероятностью того, что процесс кончится на граничном множестве* Γ. Вероятность того, что это произойдет до момента t, есть $v(t, p)$, где v — решение уравнения $v_t = \Delta v$ с нулевыми начальными значениями и граничными значениями 1 на Γ и 0 на $B - \Gamma$. Это утверждение становится правдоподобным, если заметить, что для ограниченной гармонической ψ очевидным образом

$$T(t)\psi = \psi - v(t, \cdot), \tag{9}$$

где $v_t = \Delta v$ и v имеет нулевые начальные значения и граничные значения, совпадающие (почти всюду) с граничными значениями ψ. Теперь $T(t)1(p) = \boldsymbol{P}\{Q(t) \in D\}$ есть вероятность того, что процесс не кончится раньше t. Из этого и формулы (9) вытекает наше утверждение по крайней мере для частного случая $u_\Gamma = 1$ или $\Gamma = B$, если мы примем как факт, что процесс не кончается внутри D. Мы только покажем, как общее утверждение можно свести к частному случаю обобщением метода *преобразований подобия*, или изоморфизмов, введенного в 1.2.

Для положительной гармонической ψ мы определяем новую полугруппу положительных операторов из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$ формулой

$$T_\psi(t)f = \psi^{-1} T(t)(f\psi). \tag{10}$$

Если $0 \leqslant f \leqslant 1$, то $0 \leqslant T_\psi(t)f \leqslant \psi^{-1} T(t)\psi \leqslant 1$ и отсюда $\| T_\psi(t) \| \leqslant 1$. Достаточно взглянуть на формулу (8), чтобы увидеть, что полугруппа $\{T_\psi\}$ порождается оператором Δ_ψ, определяемым формулой

$$\Delta_\psi f = \psi^{-1} \Delta(f\psi). \tag{11}$$

Для простоты изложения мы теперь ограничим рассмотрение случаем $\psi = u_\Gamma$. Заметим сначала, что ψ^{-1} не ограничена вблизи $B - \Gamma$ и близка к 1 вблизи Γ и что $T_\psi(t)\psi^{-1} \leqslant \psi^{-1}$. Из этого легко заключить, что *случайный процесс, соответствующий* $\{T_\psi\}$, *кончается на* Γ. Наша интерпретация u_Γ получается отсюда переделкой рассуждения, следующего за формулой (6). Так же, как в конце 1.2, мы замечаем, что ядро T_ψ-полугруппы представляет собой плотности условных переходных вероятностей T-процесса, если дано, что траектория кончается на Γ. В смысле, объясненном выше, T_ψ*-процесс, таким образом, является просто ограничением T-процесса к траекториям, которые кончаются на* Γ.

Возвращаясь к аналитической связи между T- и T_ψ-полугруппой, заметим, что $\Delta_\psi \varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi\psi$ — гармоническая. Положительные (может быть, неограниченные) аннигиляторы Δ и Δ_ψ находятся во взаимно однозначном соответствии (которое является структурным изоморфизмом). Ограниченные аннигиляторы Δ_ψ соответствуют гармоническим функциям, мажорируемым $\psi = u_\Gamma$, и таким образом, множество Γ является подходящей границей для $\{T_\psi\}$, так же как окружность B для $\{T\}$. Короче говоря, мы находимся в таком же положении, как в 1.3.

Окружность B, индуцируемая гармоническими функциями, представляет собой «полную» границу для семейства всех подобных полугрупп $\{T_\psi(t)\}$ (или всех дифференциальных уравнений $u_t = \Delta_\psi u$). Граница, индуцированная ограниченными аннигиляторами Δ_ψ, соответствует подмножеству $\Gamma \subset B$.

То, что Γ — подходящая граница для T_ψ-полугруппы, отражает тот факт, что общая *область значений преобразований $T_\psi(t)$ характеризуется граничным условием, состоящим в том, что $T_\psi(t)f$ обращается в нуль вдоль* Γ, *точно так же как $T(t)f$ обращается в нуль вдоль B.*

Мы имеем здесь простейший пример «граничного условия» и видим, что оно связано скорее с нашей границей, чем с «естественной». В терминологии классических дифференциальных уравнений Δ_ψ — дифференциальный оператор с коэффициентами, имеющими особенность вдоль $B - \Gamma$, и граничные условия могут быть наложены только вдоль Γ. Какими неопределенными могут быть такие описания, известно из простой одномерной теории Штурма — Лиувилля.

2.3. Активная граница. Операторы с особенностями. В связи с оператором $\Omega = \omega\Delta$ в круге D, где функция $\omega > 0$ непрерывна в D, но может стремиться к нулю или бесконечности вблизи окружности B, может быть описано новое явление. Этот оператор имеет те же аннигиляторы, что и лапласиан Δ, и интересно сравнить полугруппы, порождаемые $\omega\Delta$, с полугруппами, порождаемыми Δ. В классических терминах мы занимаемся интегрированием параболического уравнения $u_t = \omega\Delta u$, которое может иметь особенность из-за поведения ω вблизи B. Мы опишем здесь основные черты теории, развитой в [6] для счетных пространств (колмогоровские дифференциальные уравнения) методами, имеющими гораздо более широкую применимость.

Существует определенная единственным образом *минимальная* положительная полугруппа $\{T(t)\}$, порождаемая $\omega\Delta$, и для нее $\|T(t)\| \leqslant 1$. Однако при подходящем выборе ω может случиться, что $T(t)1 = 1$: в этом случае минимальная полугруппа — *единственная*; в противоположность уравнению теплопроводности, в этом случае не должно и не может быть наложено никакое граничное условие и индуцируемый случайный процесс (диффузия) не кончается в конечное время.

При произвольном $\omega > 0$ пусть $\{T(t)\}$ — минимальная полугруппа, порождаемая $\omega\Delta$ в единичном круге D. Тогда верно следующее.

а) *Пассивная граница* π. Существует множество $\pi \subset B$ на единичной окружности (определенное с точностью до множества меры нуль) такое, что для каждого $t > 0$ собственные функции φ уравнения $\varphi = T(t)\varphi$, такие, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, совпадают с положительными гармоническими функциями (аннигиляторами $\omega\Delta$), мажорируемыми u_π, гармонической функцией с граничными значениями 1 на π и 0 на $B-\pi$. В этом смысле *граница, индуцируемая каждым* $T(t)$, *совпадает с* π. В случае $\omega=1$ (уравнение теплопроводности) π пусто. Для любого множества $\Gamma\subset\pi$ величина $u_\Gamma(p)$ есть вероятность в $T(t)$-процессе, начинающемся в точке $p\in D$, того, что к Γ происходит *асимптотическое приближение при* $t\to\infty$; вероятность достижения Γ за конечное время равна нулю.

б) *Активная граница* $A=B-\pi$. Для каждого множества $\Gamma\subset A$ величина $u_\Gamma(p)$ *есть вероятность того, что процесс кончится на* Γ. Вероятность того, что это случится до момента t, равняется $v(t, p)$, где v — решение $v_t=\omega\Delta v$ с нулевыми начальными значениями и граничными значениями 1 на Γ и 0 на $A-\Gamma$.

Вдоль пассивной границы нельзя наложить никаких граничных условий. Это краткое изложение объясняет связи между минимальными *полугруппами, порождаемыми операторами с одними и теми же аннигиляторами.*

В аналитических терминах мы можем характеризовать активную и пассивную границы следующим образом. Для $\lambda\geqslant 0$ ограниченные положительные решения уравнения

$$\lambda\varphi-\omega\Delta\varphi=0 \tag{12}$$

образуют выпуклое множество $\mathfrak{P}_\lambda$, являющееся структурой, аналогичной структуре гармонических функций. Далее, существует взаимно однозначное соответствие (структурный изоморфизм) между $\mathfrak{P}_\lambda$ при $\lambda>0$, с одной стороны, и гармоническими функциями, мажорируемыми u_A, с другой стороны. Таким образом, *активная граница индуцируется каждым* $\mathfrak{P}_\lambda$ *при* $\lambda>0$. Другую интерпретацию можно дать в терминах резольвенты $(\lambda-\omega\Delta)^{-1}$ и дискретного случайного блуждания, связанного с ней.

3. Сопряженная граница

3.1. Двойственность. До сих пор мы ограничивали рассмотрение операторами, действующими на функции. В настоящее время изучение оператора T из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$ не может быть отделено от изучения сопряженного оператора T^*, который переводит *меры* в меры. В теории вероятностей T^* является первичным понятием, хотя мы вынуждены принять T главным инструментом теории марковских процессов. Основания для этого обсуждаются в [7]; см. также Дынкин [3].

Чтобы избежать новых обозначений, пусть D — открытая область плоскости и предположим, что оператор T — вида (1) с произвольным *положительным* ядром. Сопряженное преобразование действует на все меры, но удобно рассматривать только абсолютно непрерывные меры и трактовать T^* как оператор на плотностях. Пусть $\boldsymbol{L}$ — банахово пространство интегрируемых функций в D с обычной нормой

$$N(u)=\int_D |u|\,dq. \tag{13}$$

Тогда T^* как оператор из $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{L}$ переводит $u \in \boldsymbol{L}$ в

$$T^*(u)=\int_D u(p)\,K(p,\ \cdot)\,dp. \tag{14}$$

Этот оператор положителен, и $N(T^*)\leqslant 1$. Преобразование (14) сохраняет смысл для всех $u>0$, хотя интеграл может расходиться.

В принципе построение границы, индуцируемой T^*, должно было бы следовать методу, использованному для T, но, к счастью, *предельно простой искусственный прием избавит нас от повторения конструкции.*

Мы начинаем с множества $\mathfrak{P}^*$ всех конечных собственных функций $u>0$ уравнения $u=T^*u$. Они не обязаны быть интегрируемы, но для простоты мы будем предполагать, что каждое $u \in \mathfrak{P}^*$ строго положительно и непрерывно в D.

Для произвольного $u \in \mathfrak{P}^*$ определим ядро $\tilde{K}$ формулой

$$\tilde{K}(p,\ q)=u(q)\,K(q,\ p)\,u^{-1}(p), \tag{15}$$

где $p \in D$, $q \in D$. Ясно, что

$$\int_D \tilde{K}(p,\ q)\,dq=1 \tag{16}$$

для каждого p, и, таким образом, $\tilde{K}$ представляет собой ядро нового преобразования $\tilde{T}$ из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$.

Если $v \in \mathfrak{P}^*$, то $\varphi = vu^{-1}$ — непрерывная собственная функция $\tilde{T}\varphi = \varphi$, не обязательно ограниченная. Обратно, каждой положительной собственной функции $\tilde{T}\varphi = \varphi$ соответствует элемент $v = \varphi u \in \mathfrak{P}^*$. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{P}^*$ и множеством $\tilde{\mathfrak{P}}^\infty$ положительных собственных функций $\tilde{T}$. (Эти множества — структуры, а соответствие — структурный изоморфизм, но мы опускаем эти детали.) В 1.3 мы видели, что $\tilde{T}$ индуцирует *полную границу*, связанную с множеством $\tilde{\mathfrak{P}}^\infty$ всех положительных собственных функций $\tilde{T}\varphi = \varphi$. Если в (15) мы заменим u другим элементом, $\mathfrak{P}^*$, то $\tilde{T}$ заменяется *подобным* оператором (в смысле определения 1.3) и полная граница остается неизменной. Это оправдывает

Определение. *Сопряженная граница B^*, индуцируемая T, есть полная граница, индуцируемая оператором $\tilde{T}$, действующим из* **C** *в* **C**. *Она не зависит от выбора $u \in \mathfrak{P}^*$.*

Вероятностная интерпретация. Рассмотрим сначала случай, когда $N(u) = 1$, и интерпретируем u как стационарную плотность вероятностей для положения (в любое время) в цепи Маркова с плотностями вероятностей перехода K. Этот процесс определен для всех целочисленных значений временного параметра от $-\infty$ до ∞. В [16] Колмогоров указал, что в этом процессе $\tilde{K}(p, q)$ представляет собой условную плотность вероятности положения q в момент n, если дано, что в момент $n+1$ положение есть p. Более того, то же соотношение существует между плотностями вероятностей перехода высшего порядка K-цепи и $\tilde{K}$-цепи. Другими словами, для K-цепи $\tilde{K}$ представляет собой плотности переходных вероятностей в отрицательном направлении времени: $\tilde{K}$-цепь получается из K-цепи *обращением направления времени.*

Грубо говоря, граница, индуцируемая T, представляет собой направления, к которым могут сходиться выборочные последовательности, а сопряженная граница — направления, от которых процесс может брать начало. Это описание применяется к процессам с непрерывным временным параметром и становится более конкретным в связи с ними; оно приводит к некоторой интерпретации граничных условий для дифференциальных уравнений.

Аналитически ничто не изменяется в случае, когда интеграл (13) расходится, и поэтому досадно, что колмогоровская интуитивная интерпретация K разрушается. Однако, как указал Дерман [2], она может быть спасена для неинтегрируемого u, если рассматривать целое семейство цепей.

3.2. Связи между двумя топологиями. Естественно спросить, связана ли и как связана топология $D \bigcup B$, индуцированная T, с топологией $D \bigcup B^*$, индуцированной T^*. Первый ответ состоит в том, что возможна любая вообразимая ситуация. Для обычных симметричных операторов анализа эти два пространства идентичны. Еще проще другой крайний случай, когда B и B^* не пересекаются и имеют непересекающиеся окрестности. Больше всего беспокойства вызывают промежуточные случаи. Среди примеров, приводимых в [5], появляется следующая конфигурация.

Граница B состоит из m точек $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)}$, а B^* состоит из n точек $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$. Каждая окрестность B в D является окрестностью B^* в D, и наоборот. Однако каждая окрестность $\gamma^{(1)}$ содержит окрестность $\beta^{(1)} \bigcup \beta^{(2)}$, и каждая окрестность $\beta^{(1)}$ или $\beta^{(2)}$ содержится в окрестности $\gamma^{(1)}$. Грубо говоря, точка $\gamma^{(1)}$ — то же, что множество $\beta^{(1)} \bigcup \beta^{(2)}$. Аналогично две точки B могут быть эквивалентны объединению трех точек B^*, и т. д.

Эти факты приводят к многим новым проблемам, связанным с топологическими и аналитическими вопросами, и интересны в связи с граничными условиями (см. конец 4.3).

4. Интуитивные основания и программа

4.1. Проблемы. Если дано топологическое пространство D, важная проблема теории вероятностей состоит в том, чтобы найти наиболее общий марковский процесс на D. (Красивые результаты Ханта в [14] позволяют нам переформулировать это в терминах *потенциалов*.) Недостаток места не позволяет нам здесь анализировать, почему и как эта проблема сводится к проблеме нахождения полугрупп операторов из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$. Во всяком случае, следующая немного более общая проблема, очевидно, интересна сама по себе.

Найти все операторы Ω, *порождающие* (*в смысле* (8)) *положительные полугруппы* $\{T(t)\}$ *из* $\boldsymbol{C}$ *в* $\boldsymbol{C}$. Мы опустили ограничение $\| T(t) \| \leqslant 1$, которое становится все более несостоятельным даже для теории вероятностей и исключает полугруппы, представляющие интерес в теории потенциала, в диффузии (с созданием масс) и в теплопроводности. (Заметим мимоходом, что наш метод изоморфизмов нельзя полностью использовать, если продолжать придерживаться традиционных банаховых норм. Было бы интересно и в высшей степени желательно переформулировать всю теорию так, чтобы она стала свободной от ограничения нормированных пространств, используя понятие Кэте — Маккея (Köthe — Mackey) дуальных пространств.)

Если дан производящий оператор Ω, мы сталкиваемся с такой проблемой: *найти все положительные полугруппы, порожденные им, и обнаружить аналитические и вероятностные связи между ними.* Первая часть приводит к строгой формулировке расплывчатого и неудовлетворительного понятия «граничных условий» для дифференциальных уравнений. Задача состоит в том, чтобы построить все возможные дополнительные условия; в этой форме она аналогична построению самосопряженных сужений в гильбертовом пространстве, но приводит к новым углам зрения.

Наконец, важно *найти производящий оператор сопряженной полугруппы.* (В специальных случаях это равнозначно нахождению уравнения Фоккера — Планка, или уравнения непрерывности.)

Эта точка зрения связывает вместе операторы, которые с классической точки зрения казались совершенно обособленными мирами. Например, когда D — множество целых чисел, мы приходим к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно трактовать точно так же, как дифференциальные уравнения в частных производных. Действительно, мы получаем граничные условия с аналогом «*нормальной производной*» на границе в форме, которая применима также, скажем, к гармоническим функциям в области с недифференцируемой границей. Далее, когда D — действительная прямая, то полугруппа, для которой $u(t, \cdot) = T(t)f$ — гармоническая в полуплоскости $t > 0$, порождается потенциалом Рисса; Эллиотт [4] показала, что ее сужения к конечным интервалам тесно связаны с некоторым дифференциальным оператором второго порядка.

Теперь можно видеть, в грубых чертах, путь к довольно общему решению поставленных проблем. Недостаток места не позволяет нам входить в детали, и мы перейдем к тому, чтобы показать, как первая проблема связана с внутренней теорией дифференциальных операторов (или их аналога) в произвольных пространствах.

4.2. Операторы локального характера. Понятие дифференциального оператора определено только в специальных пространствах и зависит от системы координат. Мы заменяем его имеющим большее значение и общность понятием оператора локального характера. Положительные полугруппы, порождаемые оператором локального характера, представляют очевидный аналитический интерес. (Соответствующие марковские процессы являются единственными процессами, выборочные функции которых непрерывны с вероятностью единица (см. Рэй [18]).) Они являются естественным обобщением эллиптических операторов второго порядка в евклидовых пространствах; с одной стороны, такие операторы сохраняют главные свойства лапласиана и порождают положительные полугруппы; с другой стороны, вывод диффузионного уравнения, основанный на условии локального характера (которое я, к сожалению, указал в [12] под вводящим в заблуждение именем условия Линдеберга), показывает, что никакой дифференциальный оператор высшего порядка не сохраняет это свойство.

Для того чтобы оператор Ω локального характера порождал положительную полугруппу, такую, что $\|T(t)\| \leqslant 1$, необходимо, и весьма вероятно, также и достаточно, чтобы он имел следующее *свойство положительного максимума*: для каждого f в (локальной) области определения Ω, такого, что f достигает положительного локального максимума в точке p, имеем $\Omega f(p) \leqslant 0$. Если опустить условие на норму $\|T(t)\| \leqslant 1$, это приведет к *слабому условию максимума*, которое требует $\Omega f(p) \leqslant 0$ только в точках p таких, что $f(p) = 0$ и $f \leqslant 0$ в окрестности p.

Операторы локального характера со свойством максимума обещают быть плодотворным аналогом в топологических пространствах лапласиана и общих эллиптических операторов. Проблема, бросающая вызов (теперь в пределах достижимости), — это найти каноническое выражение для операторов этого класса. Полный ответ существует только в одномерном случае [9], но неопубликованные результаты Маккина направлены к решению в евклидовых пространствах.

Понятие *индуцированных границ* играет важную роль в этой связи. Чтобы объяснить это, рассмотрим оператор Ω локального характера со свойством максимума в одномерном интервале I. Легко видеть, что Ω может иметь не более чем два независимых аннигилятора. Мы можем предположить, если необходимо, что область определения Ω была расширена, так что Ω обладает максимальным числом аннигиляторов, совместимым с его определением. Мы говорим тогда, что точка $p \in I$ регулярна, если в ее окрестности N существуют два независимых аннигилятора, т. е. если локальная топология, индуцированная Ω, совпадает с данной топологией. В точке p, вблизи которой существует только один аннигилятор, Ω индуцирует топологию, в которой каждый интервал имеет только одну граничную точку (является полуоткрытым). Это отражается и в аналитических, и в вероятностных свойствах соответствующих процессов. Например, все траектории, начинающиеся в недостаточной точке, идут в одном направлении (см. Дынкин [3]). Аналогично в произвольном топологическом пространстве D будет желательно избегать особенностей и патологий, требуя, чтобы внутри D *локальная топология*, индуцированная Ω, совпадала с данной топологией.

Указание на общий характер наших операторов получается из *канонической формы* оператора Ω локального характера со свойством положительного максимума в открытом интервале I без особых точек. Эта каноническая форма дается следующей теоремой [9]. Интервал I может быть параметризован «канонической шкалой» x таким образом, что каждая f в области определения Ω имеет односторонние производные по x и они непрерывны, за исключением скачков. (Мы обозначаем их, не различая, через f'.) Кроме того, существуют две борелевские меры m и γ в I, причем m-мера каждого интервала положительна, такие, что для каждой f в области определения Ω

$$\Omega f \cdot dm = df' - f d\gamma \tag{17}$$

в том смысле, что интегралы от этих выражений равны.

Конечно, если m и γ абсолютно непрерывны, то каноническая форма сводится к $\Omega f = af'' - cf$. Однако традиционная форма требует наложения искусственных ограничений на коэффициенты, тогда как уравнение (17) — внутренней природы, и теория здесь проще и более гибкая. Так, в уравнении колеблющейся струны наше m представляет собой массу, а γ — притягивающую эластичную силу [10]. Форма (17) теперь покрывает случаи, когда масса или сила концентрируется в отдельных точках, которые обычно рассматриваются при помощи искусственных переходов к пределу, тогда как обобщенная форма Ω делает пригодной раз и навсегда основную теорему существования и распространения.

4.3. Дополнительные условия. *Налагающее условия множество* $\sum$ для Ω — это множество такое, что для $f \in \boldsymbol{C}$ и каждого $\lambda > \lambda_0$ существует в точности одно решение $F \in \sum$ уравнения

$$\lambda F - \Omega F = f. \tag{18}$$

Используя теорию Хилла — Иосида, можно показать, что каждая полугруппа, порождаемая Ω, соответствует налагающему условия множеству. Например, минимальные полугруппы, порождаемые $\Omega = \omega\Delta$ (см. 2.3), соответствуют ограничению области определения Ω к функциям, обращающимся в нуль на активной границе. Задача «найти полугруппу, порожденную дифференциальным оператором Ω, ограниченным налагающим условия множеством $\sum$» является строгой формулировкой расплывчатой и не всегда разрешимой задачи «интегрирования дифференциального уравнения $u_t = \Omega u$ с граничным условием $u \in \sum$».

Для простоты рассмотрим оператор Ω такой, что для $\lambda > 0$ уравнение $\lambda\xi - \Omega\xi = 0$ допускает ровно m независимых решений $\xi \in \boldsymbol{C}$. Тогда *активная граница* A, индуцируемая Ω, состоит из m точек $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)}$. Например, если Ω — одномерный дифференциальный оператор второго порядка, скажем, вида (17), $m \leqslant 2$. Все F в области определения Ω будут непрерывны в $D \bigcup A$. Решение $F^{\min}$ уравнения (18), соответствующее *минимальной* полугруппе, порожденной Ω, удовлетворяет граничному условию $F^{\min}(\beta^{(j)}) = 0$. Каждое другое решение имеет вид

$$F = F^{\min} + \sum_{j=1}^{m} \Phi^{(j)} \xi^{(j)}, \tag{19}$$

где $\xi^{(j)}$ — решение $\lambda\xi - \mathfrak{Q}\xi = 0$ такое, что $\xi^{(j)}(\beta^{(k)}) = 0$ или 1 в зависимости от того, $j \neq k$ или $j = k$, и где $\Phi^{(j)}$ — некоторый функционал от f.

Наша задача теперь состоит в определении этих произвольных функционалов в зависимости от λ таким образом, чтобы *область значений* $\sum$ *преобразования* $f \to F$ *была независима от* λ, и в описании всех возможных таких областей значений (множеств, налагающих условия). В [6] и [8] эта задача решается методом, имеющим широкую применимость. Интересно, что даже в случае дифференциальных уравнений дополнительное условие $F \in \sum$ не обязано быть локального характера; поэтому классическое понятие граничного условия слишком ограничительно.

Сопряженная полугруппа порождается оператором $\mathfrak{Q}^*$, действующим на меры. Стоит заметить, что даже для дифференциального оператора $\mathfrak{Q}$ сопряженный $\mathfrak{Q}^*$ не обязан быть локального характера. Оказывается, однако, что для минимальной полугруппы $\mathfrak{Q}^*$ сохраняет локальный характер $\mathfrak{Q}$.

Обычно рассматривают (в евклидовых пространствах) только дифференциальные операторы $\mathfrak{Q}$, являющиеся симметричными или настолько близкие к симметричным, что $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}^*$ индуцируют одну и ту же границу. Новые и интересные явления возникают для подлинно несимметричных операторов. Абстрактная формулировка многих классических задач состоит в том, чтобы найти полугруппы, порожденные $\mathfrak{Q}$, для которых сопряженная полугруппа порождается данным формально сопряженным $\mathfrak{Q}$ оператором $\mathfrak{Q}^*$.

Предположим, что минимальная полугруппа, порожденная $\mathfrak{Q}$, имеет сопряженную, порожденную $\mathfrak{Q}^*$. Пусть *сопряженная граница* состоит из n точек $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$, соответствующих n независимым решениям $\eta^{(k)}$ уравнения $\lambda\eta - \mathfrak{Q}^*\eta = 0$. Для того чтобы полугруппа, соответствующая (19), порождалась $\mathfrak{Q}^*$, необходимо и достаточно, чтобы каждый функционал $\Phi^{(j)}$ был линейной комбинацией $\eta^{(k)}$, так что общее решение нашей задачи включает mn свободных параметров, которые следует определить таким образом, чтобы множество значений преобразования (19) не зависело от λ.

Решение этой задачи, данное в [6], показывает ясно абстрактное обобщение *нормальных производных*, появляющихся в смешанной краевой задаче для гармонических функций. (Одно из преимуществ абстрактного подхода состоит в том, что граничные условия выводятся в форме, которая всегда имеет смысл, тогда как классические нормальные производные налагают условие регулярности на границу.)

Общее решение, по-видимому, также указывает, что топологический вопрос, имеют ли $\beta^{(j)}$ и $\gamma^{(k)}$ непересекающиеся окрестности, связан с поведением скалярного произведения $\xi^{(j)}$ на $\eta^{(k)}$ при $\lambda \to \infty$ (см. 3.2). Однако как именно в точности связи двух топологий, индуцируемых Ω, отражаются в аналитических свойствах Ω — открытая и обещающая проблема.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Brelot M., Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, J. math. pures appl. (9), **35**, 297—335 (1956).

[2] Derman C., A solution to a set of fundamental equations in Markov chains, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 332—334 (1954).

[3] Дынкин Е. Б., Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятностей и ее применения **1**: 1, 38—60 (1956).

[4] Elliott J., The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 300—331 (1954).

[5] Feller W., Boundaries induced by non-negative matrices, Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 19—54 (1956).

[6] Feller W., On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. Math. (2), **65**, 527—570 (1957).

[7] Feller W., The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Ann. Math. (2), **60**, 417—436 (1954).

[8] Feller W., Generalised second order differential operators and their lateral conditions, Ill. J. Math. **1**, 459—504 (1957).

[9] Feller W., On the intrinsic form for second order differential operators, Ill., J. Math. **2**, 1—18, (1958).

[10] Feller W., On the equation of the vibrating string, J. Math. Mech. **8**, 339—348 (1959).

[11] Feller W., The parabolic differential equation and the associated semi-groups of transformations, Ann. Math. (2), **55**, 468—519 (1952).

[12] Feller W., Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann. **113**, 113—160 (1936).

[13] Hille E. and Phillips R. S., Functional Analysis and semigroups, Revised edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. № 31 (1957).

[14] Hunt G. A., Markoff processes and potentials. I—III. Ill. J. Math. **1**, 44—93 (1957); **2**, 151—213 (1958).

[15] Kadison R. V., A representation theory for commutative topological algebra, Mem. Amer. Math. Soc. **7** (1951).
[16] Kolmogoroff A., Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Ann. **112**, 155—160 (1935).
[17] Martin R. S., Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 137—172 (1941).
[18] Ray D., Stationary Markov processes with continuous parths, Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 452—493 (1956).
[19] Doob J. L., Discrete potential theory and boundaries. (Должно появиться в J. Math. Mech.) (Прибавлено при корректуре.)

ТЕОРИЯ КОГОМОЛОГИЙ АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ *)

А. Гротендик

(Франция)

Прошло менее четырех лет с того времени, как когомологические методы (т. е. методы гомологической алгебры) были введены в алгебраическую геометрию в основоположной статье Серра [11], но уже сейчас представляется несомненным, что в ближайшие годы эти методы глубоко проникнут во все разделы алгебраической геометрии, от ее оснований до самых глубоких результатов. Здесь мы сможем лишь кратко описать некоторые идеи и выводы. Все они еще ни разу не были опубликованы в своем окончательном виде, но большая часть их зародилась в статье Серра или была ею подсказана.

Опишем сначала основные направления когомологических исследований в алгебраической геометрии в том виде, в каком они представляются сейчас. Андре Вейль впервые подчеркнул необходимость некоторой теории когомологий «абстрактных» алгебраических многообразий для придания точного смысла его знаменитой гипотезе в диофантовой геометрии [20]. Поэтому первоначальная цель состояла в построении *«когомологий Вейля» алгебраического многообразия,* коэффициентами которых было бы нечто «по крайней мере столь же хорошее», как поле *нулевой характеристики,* и которые обладали бы всеми формальными свойствами (двойственность, формулы Кюннета и пр.), необходимыми для доказательства аналога формулы Лефшеца для числа

*) A. Grothendieck, The cohomology theory of abstract algebraic varieties.

неподвижных точек соответствия. Общая мысль Серра состояла в том, что обычная «топология Зариского» алгебраического многообразия (в которой замкнутыми множествами служат все алгебраические подмножества) вполне пригодна для применения методов алгебраической топологии. Существовала надежда, что первоначальный подход Серра даст по крайней мере правильные *числа Бетти* многообразия, хотя с самого начала было ясно, что построенные им когомологии не могут рассматриваться как когомологии Вейля в собственном смысле слова, ибо полем коэффициентов для них служило основное поле, характеристика которого, вообще говоря, отлична от нуля. В действительности, однако, не оправдалась даже надежда получить «истинные» *числа Бетти*. Не удались и другие попытки Серра [12] получить когомологии Вейля, вычисляя когомологии многообразия с коэффициентами не в самом пучке локальных колец, а в пучке векторов Витта, построенном над пучком локальных колец. Этот способ дает модули над кольцом $W(k)$ бесконечных векторов Витта с координатами в основном поле k; характеристика же этого кольца равна нулю, даже если характеристика поля k отлична от нуля. К сожалению, построенные таким образом модули когомологий над кольцом $W(k)$ могут не быть порождены конечным числом образующих даже в том случае, когда рассматриваемое многообразие V абелево [13]. Хотя между этими группами когомологий и «истинными», несомненно, должны существовать интересные связи, сейчас можно уже с уверенностью сказать, что когомологии Вейля следует определять с помощью совершенно иного подхода. Идея такого подхода недавно появилась у меня, подсказанная *связями, которые существуют между когомологиями с коэффициентами в пучках и когомологиями групп Галуа, с одной стороны, и классификацией неразветвленных накрытий многообразия — с другой* (очень несистематическое изложение этих связей имеется в пробной статье Серра [12]), а также идеей Серра о том, что «разумное» алгебраическое главное расслоенное пространство над многообразием V со структурной группой G, даже если оно и не является локально тривиальным, должно стать локально тривиальным над некоторым накрытием многообразия V, *не разветвленным* над данной точкой этого многообразия. Эта идея и явилась отправной точкой определения когомологий Вейля (включая когомологии пространств и групп Галуа), которое, по-видимому, является правильным и дает ясное представление о том, как приступить к штурму гипотез Вейля с помощью техники гомологической алгебры. Но так как я до сих пор не начал серьезных исследований в этом направлении, и, кроме того, эта теория по духу сильно отличается от теории когерентных алгебраических пучков, которой мы займемся, о когомологиях Вейля мы больше говорить не станем. Отметим только, что упомянутое выше определение уже явилось отправной точкой теории когомологической размерности полей, которая была недавно развита Тэйтом [18].

Вторым основным объектом применения когомологических методов является *теория когомологий когерентных алгебраических пучков,* начало которой положил Серр. Хотя эта теория и оказалась бесполезной для предположений Вейля, она уже привела к появлению целого ряда новых методов и понятий и оказалась ключом даже к результатам, о связях которых с пучками, а тем более с когомологиями раньше не подозревали. К таким результатам относится теорема Зариского о «голоморфных функциях» и его «основная теорема»; мы увидим ниже, что им можно придать теперь более удовлетворительную формулировку и доказать с помощью одних и тех же элементарных методов. Список основных разделов теории сейчас выглядит следующим образом:

а) общие теоремы о конечности и об асимптотическом поведении;

б) теоремы двойственности, включающие когомологическую теорию вычетов (и совпадающие с ней);

в) теорема Римана — Роха, включая теорию классов Чженя когерентных алгебраических пучков;

г) некоторые специальные результаты, относящиеся в основном к теории абелевых многообразий.

Третий основной круг вопросов связан с *приложениями когомологических методов к локальной алгебре.* Впервые они были применены Кошулем и Картаном-Эйленбергом к «теореме о сизигиях» Гильберта, но их систематическим использованием мы снова обязаны Серру. К важнейшим результатам относятся: *характеризация* регулярных локальных колец как колец конечной глобальной когомологической размерности; прояснение смысла *теоремы о несме-*

шанности Коэна — Маколея с помощью понятия когомологической коразмерности [23] и, особенно, возможность построить (по-видимому, впервые) *теорию пересечений,* алгебраическая простота и общность которой удовлетворяли бы всем требованиям. Только что упомянутый результат Серра, согласно которому только регулярные локальные кольца имеют конечную глобальную когомологическую размерность, объясняет причину, по которой удовлетворительная теория пересечений существует только для таких колец. Я не могу входить в подробности ни этих вопросов, ни различных результатов, которые мне удалось получить с помощью *локальной теории двойственности.* Эта теория, по-видимому, может служить инструментом, способным заменить дифференциальные формы в случае неравных характеристик; она дает в общем контексте коммутативной алгебры некоторое прояснение понятия вычета, смысл которого до сих пор оставался довольно темным. Поводом к проведению этой последней работы послужила попытка построить глобальную теорию когомологической двойственности для алгебраических многообразий с произвольными особенностями, с тем чтобы иметь возможность получить формулы пересечения циклов с произвольными особенностями на неособом алгебраическом многообразии; эти формулы должны были бы содержать также «формулу Лефшеца по модулю p» (см. [8]). В самом деле, глобальные утверждения становятся почти тривиальными, как только построен отвечающий существу дела локальный формализм. В общем, положение дел таково, что локальные результаты в значительной степени содержат глобальные. Точнее говоря, глобальные результаты на многообразиях размерности n часто оказывается возможным вывести из соответствующих локальных результатов для колец, размерность Крулля которых равна $n+1$.

Теперь мы обратимся к описанию некоторых основных идей, относящихся ко второму направлению когомологических исследований в алгебраической геометрии — теории когерентных алгебраических пучков. Прежде всего, однако, мне хотелось бы подчеркнуть одну особенность, общую для *всех* рассмотренных вопросов (кроме, *возможно,* пункта г) списка), а в действительности даже для всей стандартной техники алгебраической геометрии. Эта особенность заключается в том, что естественный круг понятий и методов, с которыми приходится работать, связан на самом деле вовсе не с алгебраическими многообразиями. Так, известно, что *аффинное* алгебраическое многообразие над основным полем k определяется своим координатным кольцом, которое может быть любой конечно порожденной k-алгеброй без нильпотентных элементов. Поэтому любое утверждение относительно аффинных алгебраических многообразий можно рассматривать также как утверждение о кольцах A описанного вида. И вот оказывается, что большая часть таких утверждений сохраняет смысл и остается справедливой, если предполагать лишь, что A — любое коммутативное кольцо с единицей, иногда подчиненное какому-нибудь слабому ограничению типа нетеровости. Точно так же большинство результатов, доказанных для локальных колец алгебраической геометрии, сохраняют смысл и остаются справедливыми для произвольных нетеровых локальных колец. Порой встречаются утверждения, которые на первый взгляд кажутся существенно связанными с основным полем k, например вопросы, в которых рассматриваются дифференциальные формы. В этих случаях более углубленное изучение предмета зачастую показывает, что первое впечатление было ошибочным и что лучшего понимания существа дела можно достигнуть, заменяя поле k таким кольцом B, относительно которого A представляет собой конечно порожденную алгебру. Геометрически это означает, что вместо одного аффинного алгебраического многообразия V (определенного кольцом A) мы рассматриваем некоторое «регулярное отображение», или «морфизм», этого многообразия в другое аффинное многообразие W, а вместо свойств многообразия V рассматриваются более общие свойства морфизма $V \to W$ (при этом «абсолютное» понятие многообразия V получается из более общего «относительного» понятия, если в качестве W взять точку). С другой стороны, не следует отказываться от изучения колец с нильпотентными элементами и ни в коем случае нельзя исключать эти элементы без серьезных на то оснований. Теперь в точности так же, как произвольные коммутативные кольца оказываются подходящим обобщением аффинных алгебраических многообразий, можно найти объекты, являющиеся соответствующим обобщением произвольных алгебраических многообразий над произвольным полем определения. В одном частном случае это обобщение было найдено Нагата [9], но, следуя определению схем по Шевалле [4], он был вынужден ограничиться неприводимым случаем и без нильпотентных элементов. Идею правильного определения снова можно найти в статье Серра [11], и она заключается в следующем. Пусть A — произвольное коммутативное кольцо. Тогда множество Spec (A) всех его простых идеалов можно классическим способом превратить в топологическое пространство, замкнутые подмножества которого состоят из всех простых идеалов, содержащих какое-нибудь фиксированное подмножество элементов кольца A. С другой стороны, на пространстве Spec (A) естественно определяется некоторый пучок колец, слоем которого над точкой p является локальное кольцо A_p. Более общо, любой модуль M над кольцом A определяет некоторый пучок модулей над пространством Spec(A), слоем которого над точкой p служит локализованный A_p — модуль M_p. Теперь мы назовем *предсхемой* любое топологическое пространство X, снабженное пучком колец $\mathcal{O}_X$ (его *структурным пучком*), если любая точка этого пространства обладает открытой окрестностью, изоморфной пространству вида Spec(A). Пусть X и Y — предсхемы. *Морфизмом* f предсхемы X в предсхему Y называется любое непрерывное отображение f: $X \to Y$ вместе с соответствующим гомоморфизмом структурных пучков f^*: $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, подчиненное единственному требованию: при $x \in X$ и $y = f(x)$ прообраз максимального идеала кольца $\mathcal{O}_{X,\,x}$ относительно отображения f^*: $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ совпадает с максимальным идеалом кольца $\mathcal{O}_{Y,\,x}$. Если X и Y — простые спектры колец A и B соответственно, то можно показать, что морфизмы предсхемы X в предсхему Y соответствуют в точности гомоморфизмам кольца B в кольцо A, как это и должно быть.

Мы уже выяснили, что при рассмотрении совокупности морфизмов f: $X \to S$ в фиксированную предсхему S эта предсхема играет роль основного поля. Кроме того, если $S = $ Spec(A), то предсхема X является предсхемой *над* S в том и только в том случае, если пучок колец $\mathcal{O}_X$ является пучком A-алгебр. В категории всех предсхем над данной предсхемой S можно определить прямое произведение (которое соответствует тензорному произведению алгебр над некоторым коммутативным кольцом A). Пользуясь этим, можно определить предсхемы групп над фиксированной предсхемой S и т. п. С помощью произведений можно ввести также некоторое слабое условие отделимости на предсхеме, подсказанное обычным условием, входящим в определение алгебраических многообразий. Так определяются объекты, называемые *схемами*. Схема называется *нетеровой*, если она является объединением конечного числа открытых множеств, изоморфных простым спектрам *нетеровых* колец. Схема X над схемой S называется схемой *конечного типа над* S (или: морфизм f: $X \to S$ называется морфизмом конечного типа), если прообраз любого открытого аффинного множества U схемы S является объединением конечного числа аффинных открытых множеств, соответствующих *конечно порожденным* алгебрам над кольцом множества U. Оказывается, что большая часть понятий и результатов обычной алгебраической геометрии переформулируется и доказывается в этом новом контексте при одном существенном дополнении: в некоторых вопросах следует ограничиться рассмотрением нетеровых схем и морфизмов конечного типа. Здесь мы заметим лишь, что понятию *полного* многообразия соответствует понятие *свойственного морфизма* (в случае алгебраической геометрии над полем комплексных чисел такие морфизмы являются свойственными в обычном топологическом смысле). Именно морфизм f: $X \to S$ называется свойственным, если он конечного типа и если для любой нетеровой схемы Y над схемой S проекция $X \times_S Y \to Y$ является замкнутым отображением. Можно определить также проективные и квазипроективные морфизмы, соответствующие понятиям проективного и квазипроективного многообразий. Многие свойства общих морфизмов удается свести к случаю проективных или квазипроективных морфизмов с помощью подходящего обобщения хорошо известной леммы Чжоу.

Пучок модулей F над схемой X называется *квазикогерентным*, если на каждом аффинном открытом множестве $U \subset X$ его можно задать некоторым модулем M над кольцом A множества U. Если схема X нетерова, то пучок F когерентен (в смысле работы [11]) в том и только том случае, когда он квазикогерентен, а все модули M конечно порождены. Квазикогерентные и когерентные алгебраические пучки ведут себя относительно обычных операций теории пучков (тензорные произведения, пучки гомоморфизмов, прямые и обратные образы, а также производные функторы этих функторов) самым наилучшим образом, оправдывая все ожидания.

Теперь мы в состоянии сформулировать результаты теории в свойственном ей контексте. Мы ограничимся, однако, пунктами а) и б) приведенного списка. Теорема Римана — Роха, доказанная в абстрактной алгебраической геометрии независимо Уошнитцером [19] и мной [2], будет изложена на этом конгрессе в докладе Хирцебруха. Заметим лишь, что новая формулировка этой теоремы, хотя и подсказана формулой Хирцебруха, в действительности существенно сильнее ее, ибо, как обычно, утверждение о *полном многообразии* заменяется утверждением о *свойственном морфизме*. Что до «специальных результатов», упомянутых в пункте г) и принадлежащих Барзотти, Картье, Розенлихту и Серру, ограничимся утверждением, что относительно когомологий абелевых многообразий известно почти все, что можно желать и чего следует ожидать. Известны в значительной степени и соотношения между когомологиями произвольного многообразия и его многообразия Альбанезе. В частности, когомологическими средствами удается установить отсутствие «кручения» на абелевом многообразии [1, 3a, 13] и теорему двойственности [3]. До сих пор вопрос о переформулировке этих результатов для общей ситуации схемы над схемой не был поставлен, хотя он, несомненно, заслуживает внимания.

Основные результаты когомологической теории морфизмов схем таковы (теоремы 1 и 2 являются довольно непосредственными переложениями результатов Серра [11]):

Теорема 1. *Пусть F — произвольный квазикогерентный пучок над аффинной схемой X, определенный модулем M над координатным кольцом A этой схемы. Тогда $H^i(X, F)=0$ для всех $i>0$, а $H^0(X, F)=M$.*

Разумеется, группы когомологий строятся общими средствами когомологической алгебры абелевых категорий. По техническим причинам существенно не вводить когомологии Чеха в качестве *определения* когомологий, как это было сделано в работе [11]. В силу принадлежащей Лерэ спектральной последовательности для покрытий из теоремы 1 следует, что группы когомологий квазикогерентного пучка над схемой X можно вычислять методом Чеха, но это явление следует считать случайным. Справедливо и обратное к теореме 1 утверждение [17]: если для любого когерентного подпучка F пучка $\mathcal{O}_X$ нетеровой схемы X имеет место соотношение

$H^1(X, F)=0$, то схема X аффинна. В общем случае это можно доказать, приспосабливая соответствующим образом доказательство Серра.

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в другое пространство Y. Напомним, что прямой образ $f_*(F)$ любого абелева пучка F над пространством X относительно отображения f определяется как пучок над пространством Y, сечениями которого над открытым множеством $U \subset Y$ служат сечения пучка F над множеством $f^{-1}(U)$. Правые производные функторы функтора f_* называются «прямыми образами высших порядков» $R^q f_*(F)$ пучка F относительно отображения f. Пучок $R^q f_*(F)$ представляет собой пучок, ассоциированный с предпучком

$$U \to H^q(f^{-1}(U), F).$$

Этот пучок хорошо известен, ибо он входит в первый член спектральной последовательности Лерэ для непрерывного отображения f и пучка F. Если f — морфизм схем, а пучок F алгебраичен, то его прямые образы всех порядков также являются алгебраическими пучками, которые квазикогерентны, если пучок F квазикогерентен, а морфизм f конечного типа. В этом случае группа сечений пучка $R^q f_*(F)$ над *аффинным* открытым множеством $U \subset Y$ *совпадает* с группой когомологий $H^q(f^{-1}(U), F)$; это немедленно следует, например, из спектральной последовательности Лерэ. Теорему 1 нетрудно обобщить так, чтобы она выражала некоторое свойство аффинных морфизмов $f: X \to Y$, т. е. таких морфизмов, относительно которых прообраз аффинного множества является аффинным (это свойство в действительности есть локальное свойство относительно схемы Y). Именно, если f — аффинный морфизм, то для любого квазиксгерентного пучка F над схемой X имеет место соотношение $R^q f_*(F)=0$ при всех $q>0$; если схема X нетерова, то справедливо и обратное утверждение.

Следующая теорема относится к *проективным морфизмам*.

Пусть Y — некоторая предсхема, а $\mathcal{S}$ — квазикогерентный пучок градуированных алгебр над Y. Для простоты предположим, что пучок $\mathcal{S}$ нетривиален лишь в положительных степенях и что он порожден подпучком $\mathcal{S}^1$ (как пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр). Обобщая хорошо известные конструкции, можно определить некоторую предсхему X над Y (на самом деле X

будет даже схемой, если Y — схема) и алгебраический пучок $\mathcal{O}_X(1)$ над X, локально изоморфный пучку $\mathcal{O}_X$. *Более общо, для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{M}$ градуированных $\mathcal{S}$-модулей можно определить некоторый квазикогерентный пучок $F(\mathcal{M})$ над X, причем функтор $\mathcal{M} \to F(\mathcal{M})$ точен и совместим с обычными операциями: тензорным произведением, $\mathcal{T}or_i$, $\mathcal{H}om$ пучков и $\mathcal{E}xt^i$*. При $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ получается пучок $\mathcal{O}_X$, а сдвиг градуировки пучка $\mathcal{S}$ на n единиц дает пучок $\mathcal{O}_X(n)$, который (согласно сказанному) можно получить также, тензорно умножая на себя n раз пучок $\mathcal{O}_X(1)$. Определения таковы, что для любой проекции f: $X \to Y$ существует совместимый с f естественный гомоморфизм пучка $\mathcal{M}^0$ в пучок $F(\mathcal{M})$ и, значит, также пучка $\mathcal{M}^n$ в пучок $F(\mathcal{M}(n)) = F(\mathcal{M})(n)$; здесь для любого алгебраического пучка G над X символом $G(n)$ мы обозначаем тензорное произведение $G \otimes_{O_X} \mathcal{O}_X(n)$. Формализм, набросок которого мы только что привели, в частности, построение некоторой предсхемы над предсхемой Y исходя из градуированного квазикогерентного пучка $\mathcal{S}$ алгебр над Y, следует рассматривать как естественное общее описание процесса «раздутия», конструкция которого связана с выбором некоторого когерентного подпучка $\mathcal{J}$ пучка $\mathcal{O}_Y$, после чего пучок алгебр $\mathcal{S}$ определяется как прямая сумма пучков $\mathcal{J}^n$ с очевидной градуировкой. Предсхема X над предсхемой Y называется *проективной* (или: морфизм f: $X \to Y$ называется *проективным морфизмом*), если с помощью описанного выше процесса можно получить предсхему X, исходя из такого пучка $\mathcal{S}$, для которого пучок $\mathcal{S}^1$ конечно порожден (и, значит, когерентен, если предсхема Y нетерова). Таким образом, в случае аффинной нетеровой схемы Y, определенной областью целостности (такая схема неприводима, а ее структурный пучок не содержит нильпотентных элементов), все проективные над Y схемы, для которых проекция f: $X \to Y$ является бирациональной эквивалентностью, получаются из Y раздутием некоторого когерентного пучка идеалов над Y (таким образом, «практически все» свойственные бирациональные морфизмы можно получить с помощью стандартного процесса раздутия). Отметим также, что если в качестве $\mathcal{S}$ взять симметрическую алгебру локально свободного пучка модулей $\mathcal{V}$ над Y, то соответствующую схему X над Y можно интерпретировать как расслоение с проективными слоями, связанное с векторным расслоением, определенным двойственным к $\mathcal{V}$ пучком $\mathcal{V}'$. (В действительности все «геометрические» построения в алгебраической геометрии можно провести на языке схем.) Основные результаты когомологической теории проективных морфизмов сведены в следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм, определенный градуированным пучком алгебр $\mathcal{S}$ над схемой Y. Предположим, что схема Y нетерова, а пучок модулей $\mathcal{S}^1$ локально порожден r образующими. Тогда для любого когерентного пучка F над схемой X справедливы следующие утверждения:*

(I) *Для достаточно больших значений n пучок $F(n)$ «порожден своими сечениями» во всех точках схемы X, лежащих над некоторым открытым аффинным подмножеством схемы X.*

(II) $R^q f_*(F(n)) = 0$ *при* $q > 0$ *и достаточно больших n.*

(III) $R^q f_*(F) = 0$ *при* $q > r$.

(IV) *Пучки* $R^q f_*(F)$ *когерентны.*

Первое утверждение показывает также, что *любой* когерентный пучок F над схемой X можно получить, исходя из некоторого квазикогерентного пучка градуированных модулей над пучком алгебр $\mathcal{S}$.

Две следующие теоремы доказываются сначала для проективных морфизмов (отметим, что проективные морфизмы свойственны). В этом случае их утверждения сводятся к утверждениям о градуированных модулях над кольцом многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ с нетеровым кольцом коэффициентов A и доказываются несложной *индукцией вниз по размерности i* групп когомологий. Этим объясняется тот факт, что полная формулировка и простое доказательство этих результатов даже только в размерности $i = 0$ (когда они не связаны с настоящими когомологиями) не могли быть получены не когомологическими методами. После этого случай общего морфизма сводится к проективному случаю с помощью леммы Чжоу, как это делается в работе [7].

Теорема 3. *Пусть $f\colon X \to Y$* — свойственный морфизм, *а схема Y нетерова. Тогда для любого когерентного пучка F над схемой X пучки $R^q f_*(F)$ когерентны.*

Теорема 4. *В тех же предположениях обозначим буквой y какую-нибудь точку схемы Y. Тогда слой $R^q f_*(F)_y$ является конечно порожденным модулем над локальным* *кольцом $\mathcal{O}_y$, а m_y-адическое пополнение этого модуля естественно изоморфно проективному пределу*

$$\varprojlim_k H^q(f^{-1}(y),\ F\otimes_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_y/m_y^k)),$$

где m_y — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_y$.

Эту теорему следует рассматривать как полную форму основного результата Зариского о «голоморфных функциях» [21]. Здесь предельную группу нужно интерпретировать как группу «голоморфных когомологий» схемы X вдоль слоя $f^{-1}(y)$ с коэффициентами в пучке F. Из теоремы 4 можно вывести результат глобального характера относительно Y: для любого замкнутого подмножества $Y'\subset Y$ и его прообраза $X'=f^{-1}(Y')$ группы голоморфных когомологий схемы X вдоль X' (с коэффициентами в пучке F) являются последним членом спектральной последовательности когомологического типа, второй член которой имеет вид $E_2^{p,q}=H^p(Y/Y', R^qf_*(F))$ справа стоит группа голоморфных когомологий схемы Y вдоль Y').

Из теоремы 4 немедленно вытекает теорема З а р и с к о г о о связности в следующей общей форме. Пусть $f\colon X\to Y$ — свойственный морфизм, где Y — нетерова схема. Тогда в силу теоремы 3 прямой образ $f_*(\mathcal{O}_X)$ является *когерентным* пучком $\mathcal{O}_Y$-алгебр $\mathcal{B}$ над Y. Для любой точки $y\in Y$ слой $\mathcal{B}_y$ представляет собой $\mathcal{O}_y$-алгебру, которая как модуль конечно порождена. Из теоремы 4 (при $q=0$) немедленно следует, что множество связных компонент слоя $f^{-1}(y)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством максимальных идеалов алгебры $\mathcal{B}_y$, число которых, разумеется, конечно. Пусть, например, схемы X и Y являются схемами областей целостности, а f — эпиморфизм. Тогда поле K схемы Y является подполем поля L схемы X, а $\mathcal{B}_y$ представляет собой подкольцо поля L, целое над подкольцом $\mathcal{O}_y$ поля K. Если целое замыкание кольца $\mathcal{O}_y$ в поле K обладает лишь одним максимальным идеалом (мы говорим тогда, что точка y схемы Y является точкой с «однократным ветвлением»), а алгебраическое замыкание поля K в поле L чисто несепарабельно над K, из вышесказанного немедленно следует, что кольцо $\mathcal{B}_y$ обладает лишь одним максимальным идеалом. Таким образом, f-прообраз точки y связен. (Отметим, что мы обошлись без обращения к аналитической неприводимости кольца $\mathcal{O}_y$.)

Положение дел можно описать более геометричным языком, если воспользоваться тем, что когерентный пучок $\mathcal{O}_y$-алгебр $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}$ естественно определяет некоторую предсхему Y' над схемой Y (она характеризуется тем, что она аффинна над Y, а пучок $\mathcal{B}$ является прямым образом пучка $O_{Y'}$). Из теорем Коэна — Зейденберга вытекает, что предсхема Y' также свойственна над Y, а все слои проекции $Y' \to Y$ конечны. (Наоборот, из теорем 3 и 4 следует, что любая предсхема Y' над схемой Y, обладающая этими свойствами, определяется некоторым когерентным пучком алгебр над Y. Такую предсхему Y' мы назовем *целой над* Y.) Пользуясь теперь тем фактом, что отображение $B \to f^*(\mathcal{O}_X)$ является изоморфизмом пучков, мы убеждаемся, что отображение $f\colon X \to Y$ можно естественно представить в виде $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, где морфизм f' удовлетворяет соотношению $f'_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{Y'}$. Теорему о связности Зариского можно теперь сформулировать в следующем виде: связные компоненты слоя $f^{-1}(y)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами слоя $g^{-1}(y)$, или, что то же: слои морфизма f' связны. (Такое каноническое разложение морфизма f подсказано работами Штейна по теории аналитических пространств.)

С помощью теорем 3 и 4 и теоремы связности глобальными и когомологическими методами удается также получить наиболее общую формулировку «основной теоремы» Зариского в коммутативной алгебре, которую мы приведем, пользуясь геометрической терминологией.

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторый квазипроективный морфизм схемы X в нетерову схему Y. Тогда те точки схемы X, которые изолированы в своем слое $f^{-1}(f(x))$, образуют некоторое открытое множество U. Существует такая целая над Y схема Y' и такой изоморфизм множества U на некоторое открытое подмножество U' схемы Y', что ограничение морфизма f на U совпадает со сквозным отображением $U \to Y' \to Y$.*

Это утверждение носит несколько более общий характер, чем обычная чисто локальная формулировка. Следует заметить, что локальные кольца схем X и Y могут содержать нильпотентные элементы. Для доказательства теоремы 5 мы сначала сводим ее к случаю, когда схема X свойственна над Y. Тогда схема Y', существование которой утверждается в теореме, совпадает со схемой, которую определяет, как это было описано, пучок $f_*(\mathcal{O}_X)$. Тот факт, что каноническое разложение морфизма f индуцирует изоморфизм множества U с некоторым открытым подмножеством схемы Y', легко выводится из теоремы о связности. Предположение о том, что теорему о связности Зариского и его «основную теорему» можно доказать когомологическими методами, впервые высказал Серр. Справедливость этих результатов также для схем общего типа, а не только алгебраических многообразий позволяет установить, например, следующий факт (насколько мне известно, он принадлежит Чжоу): пусть A — нетерова локальная область целостности, обладающая свойством нормальности (или, более общо, свойством «однократности ветвления»), тогда алгебраическое проективное пространство над полем вычетов k кольца A, определенное градуированной k-алгеброй $G(A) = \sum m^n/m^{n+1}$ (где m — максимальный идеал кольца A), связно.

Остается сказать несколько слов о теоремах двойственности; недостаток времени не позволит нам сформулировать точные утверждения. Напомним сначала первоначальную теорему Серра [22]: *пусть X^n — неособое проективное многообразие, определенное над алгебраически замкнутым полем k, а E — векторное расслоение над X; тогда существует естественная двойственность между группами когомологий $H^i(X, \mathcal{O}_X(E))$ и $H^{n-i}(X, \Omega^n_X(E'))$, где $\mathcal{O}_X(E)$ — пучок ростков регулярных сечений расслоения E, а $\Omega^n_X(E')$ — пучок ростков регулярных n-мерных дифференциальных форм на пространстве X со значениями в двойственном векторном расслоении E'.* Эта двойственность определяется с помощью внешнего умножения, поскольку группа $H^n(X, \Omega^n_X)$ оказывается естественно изоморфной основному полю k. В докладе [8] приведены различные обобщения этого результата, а также его применение к теории двойственности Пуанкаре (включая доказательство формулы Лефшеца). При этом, однако, случай многообразий с особенностями не рассматривался, так что формулировка закона двойственности Пуанкаре по необходимости была ограничена случаем неособых циклов и неособых пересечений таких циклов. Кроме того, оставались неясными истинные алгебраические корни проявляющихся в двойственности Пуанкаре *ковариантных* свойств когомологий неособых алгебраических многообразий. Теперь, после того как развита общая теория вычетов, положение дел поддается полному выяснению. Для простоты рассмотрим схемы конечного типа над произвольным основным полем k, т. е. алгебраические пространства над полем k, допуская, однако, существование нильпотентных элементов в локальных кольцах схем (это допущение весьма важно по техническим причинам). На таких схемах X можно канонически задать некоторый комплекс алгебраических квазикогерентных пучков $\mathcal{K}^{\cdot}_X$ с положительной градуировкой и дифференциальным оператором степени — 1. В размерности i комплекс $\mathcal{K}^{\cdot}_X$ представляет собой прямую сумму пучков вида $\mathcal{D}(X/Y)$, где Y пробегает множество всех замкнутых неприводимых подмножеств пространства X размерности i; при этом пучок $\mathcal{D}(X/Y)$ является продолжением на все пространство X *постоянного* пучка на подмножестве Y, соответствующего некоторому модулю над локальным кольцом $\mathcal{O}_{X/Y}$ подмножества Y; этот модуль в определенном смысле *двойствен* локальному кольцу $\mathcal{O}_{X/Y}$. Вообще, пусть A — некоторая локальность над основным полем k, т. е. локальное кольцо конечно порожденной k-алгебры. Тогда можно следующим образом определить A — модуль $D(A)$, двойственный кольцу A (относительно поля k). Выберем подполе L кольца A, сепарабельное над полем k и такое, что поле вычетов кольца A алгебраично над L, после чего положим

$$D(A) = \mathrm{Hom}_L(A, \Omega^p(L)).$$

Здесь символ Hom означает множество *непрерывных* гомоморфизмов, а $\Omega^p(L)$ — одномерное векторное пространство над полем L, состоящее из дифференциальных форм наибольшей размерности поля L над k. (Тот факт, что правый член этого равенства не зависит от выбора поля L, нетривиален. Он оказывается следствием другого определения модуля $D(A)$, как прямого предела некоторых модулей Ext.) Пучок $\mathcal{K}^{\cdot}_X$ является *инъективным* пучком $\mathcal{O}_X$-модулей. Определение его дифференциального гомоморфизма представляет собой довольно тонкую задачу. Получающийся комплекс пучков $\mathcal{K}^{\cdot}_X$ следует называть *комплексом вычетов* схемы X (или комплексом «*обобщенных локальных элементов Кузена*»). Оказывается, что в случае, когда многообразие X неособо и сепарабельно над полем k, пучок $\mathscr{K}^{\cdot}_X$ является инъективной *резольвентой* пучка Ω^n_X ростков дифференциальных форм высшей размерности на X. В общем случае при $\dim X = n$ пучок циклов степени n в комплексе $\mathscr{K}^{\cdot}_X$, обозначаемый символом ω_X, играет роль пучка дифференциальных форм размерности n на X. В самом деле, хорошо известный процесс Келера позволяет определить естественный гомоморфизм $\Omega^n_X \to \omega_X$. Если многообразие X нормально и сепарабельно над полем k, пучок ω_X представляет собой не что иное, как пучок ростков дифференциальных форм на многообразии X, регулярных в простых точках. С другой стороны, если локальные кольца схемы X являются кольцами Коэна — Маколея, то комплекс $\mathscr{K}^{\cdot}_X$ представляет собой резольвенту пучка ω_X (и наоборот). Это показывает, что в общем случае пучки $H_i(\mathscr{K}^{\cdot}_X)$ отличны от нуля даже при $i \neq n$ (отметим, что при $i = n$ такой пучок никогда не может быть нулевым), однако эти пучки всегда когерентны (хотя сам пучок $\mathscr{K}^{\cdot}_X$ слишком велик, чтобы быть когерентным).

Теперь для любого когерентного пучка F над схемой X положим

$$H_i(X, F) = H_i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X;\ F,\ \mathscr{K}^{\cdot}_X)).$$

Тем самым группы *гомологий* схемы X с коэффициентами в пучке F определяются как контравариантный функтор от F. Кроме того, это «гомологический функтор», потому что комплекс $\mathscr{K}^{\cdot}_X$ инъективен, т. е. функтор $F \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X; F, \mathscr{K}^{\cdot}_X)$ точен. Так определенные группы гомологий обладают всеми свойствами, которых следует ожидать от групп гомологий. В частности, они ковариантны относительно *свойственных* морфизмов схемы X (ибо сам пучок $\mathscr{K}^{\cdot}_X$ ковариантен); когомологии схемы X действуют на гомологиях с помощью *внешнего умножения*. Можно также определить различные относительные группы гомологий и когомологий. Если X — схема типа Коэна — Маколея, то из определения следует, что

$$H_i(X, F) \simeq \mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathcal{O}X}(X;\ F,\ \omega_X). \qquad (1)$$

В общем случае это соотношение заменяется некоторой спектральной последовательностью. Если X — схема типа Коэна — Маколея, а пучок F локально свободен, то из формулы (1) вытекает, что

$$H_i(X, F) \simeq H^{n-i}(X; F' \otimes \omega_X), \tag{2}$$

так что в этом случае гомологии можно представить как когомологии. В общем случае это соотношение заменяется некоторой спектральной последовательностью, подобной связывающей гомологии и когомологии спектральной последовательности Картана, которая имеет место для произвольного топологического пространства (и дает закон двойственности Пуанкаре, если это пространство является многообразием).

Определения групп H_n и пучка ω_X показывают, что при $\dim X = n$ в группе $H_n(X, \omega_X)$ задан некоторый канонический элемент, называемый *каноническим классом гомологий* схемы X. Поскольку гомологический функтор контравариантен по второму аргументу, отсюда следует, что канонический класс гомологий определен также в группе $H_n(X, \Omega_X^n)$, а ковариантность по первому аргументу позволяет для каждого p-цикла Z в схеме X определить класс гомологий $\gamma_X(Z) \in H_p(X, \Omega_X^p)$. Это сопоставление совместимо с операциями взятия прямого образа циклов и классов гомологий. Кроме того, если схема X неособа и сепарабельна над полем k, класс $\gamma(Z)$ в силу равенства (2) можно рассматривать как элемент группы $H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p})$. С помощью некоторых простых результатов локального характера, связывающих пересечения и обратные образы циклов с некоторой частичной мультипликативной структурой в комплексе $\mathcal{K}'_X$ (для неособых схем X), удается показать, что конструкция характеристических классов совместима с операциями прямого произведения и обратного образа (этим снимаются трудности, встретившиеся в изложении [8]).

Теперь оказывается возможным установить следующее обобщение теоремы двойственности Серра. Пусть F — когерентный пучок над схемой X с полным носителем. Тогда внешнее умножение определяет естественное спаривание

$$H_i(X, F) \times H^i(X, F) \to H_0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}), \tag{3}$$

где $\mathcal{J}$ — любой когерентный пучок идеалов, обладающий тем свойством, что $\mathcal{J} \cdot F = 0$. Этот пучок можно выбрать таким образом, чтобы фактор-пучок $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ имел полный носитель, т. е. был бы пучком локальных колец некоторого алгебраического подпространства Y пространства X. Тогда правая часть диаграммы (3) представляет собой не что иное, как $H_0(Y, \mathcal{O}_Y)$, а взятие суммы вычетов определяет естественный k-гомоморфизм

$$H_0(X, \mathcal{O}_X/J) = H_0(Y, \mathcal{O}_Y) \to k. \tag{3a}$$

Тем самым формулы (3) и (3a) создают спаривание

$$H_i(X, F) \times H^i(X, F) \to k. \tag{4}$$

Это спаривание индуцирует двойственность: гомологии и когомологии с полными носителями двойственны друг другу. Кроме того, относительно этой двойственности прямой образ гомологий сопряжен обратному образу когомологий (что и требуется для развития формализма двойственности Пуанкаре).

Мы кратко сформулировали полученные результаты для схем конечного типа над полем k. В действительности имеют место более общие результаты, и теорему двойственности оказывается возможным установить для любого когерентного пучка F над нетеровой схемой X, носитель которого полон, т. е. свойствен над некоторым артиновым кольцом A, не обязательно являющимся полем. Объединяя этот результат с теоремой 4, мы получим равносильное утверждение о гомологических свойствах произвольного свойственного морфизма (при условии, что базисная схема Y нетерова).

В заключение мне следовало бы сформулировать некоторые нерешенные задачи. В действительности, быть может, слишком рано заниматься этим, поскольку до сих пор имеющаяся новая техника не подвергалась достаточно серьезному испытанию с целью выяснить, можно ли с ее помощью решить эти задачи. Следующие два вопроса (вероятно, связанные между собой), должно быть, потребуют некоторых усилий. Для краткости мы сформулируем их в терминах алгебраической геометрии.

Проблема A (теорема Кодайры о нулевых когомологиях). *Пусть V — неособое проективное многообразие, L — отрицательное линейное расслоение над V (это означает, что некоторое отрицательное кратное расслоения L определяет проективное вложение многообразия V). Верно ли, что $H^i(X, \mathcal{O}_X(L)) = 0$ при $0 \leqslant i < n$, где n — размерность многообразия V?*

С помощью двойственности нетрудно показать, что этот вопрос равносилен следующему, в формулировке которого когомологии уже не участвуют. Пусть V и L определены, как выше, а W — неособое гиперплоское сечение многообразия V (в некотором его проективном вложении). Верно ли тогда, что любая регулярная $(n-1)$-форма на многообразии W с коэффициентами в расслоении L является вычетом некоторой рациональной дифференциальной n-формы на многообразии V с коэффициентами в расслоении L, дивизор которой не меньше $-W$?

Проблема Б. *Пусть f — бирациональный свойственный морфизм неособого многообразия X в неособое многообразие Y. Верно ли, что $R^q f_*(\mathcal{O}_X)=0$ при $q>0$?*

С помощью спектральной последовательности Лерэ можно показать, что этот вопрос равносилен следующему. Пусть морфизм $f\colon X \to Y$ определен, как выше, верно ли тогда, что $H^p(X, \mathcal{O}_X) \xleftarrow{\sim} H^p(Y, \mathcal{O}_Y)$ для всех p? Более общо, отсюда следовало бы, что для любого векторного расслоения E над Y и его обратного образа F над X имеет место изоморфизм $H^p(X, \mathcal{O}_X(F)) \xleftarrow{\sim} H^p(Y, \mathcal{O}_Y(E))$ («бирациональная инвариантность когомологий»). В свою очередь отсюда вытекало бы, что арифметический род полного неособого многообразия является бирациональным инвариантом (этот факт известен лишь в классическом случае, когда k — поле комплексных чисел, а X — проективное многообразие; требуемый результат получается из соотношений симметрии $h^{0,p}=$ $=h^{p,0}$) или, более общо, классы Тодда многообразия Y являются прямыми образами относительно отображения f классов Тодда многообразия X (это можно установить, применяя формулу Римана — Роха [2]). Ответ на вопрос Б неизвестен даже для неособых проективных многообразий над полем комплексных чисел. Следует отметить, что для справедливости утверждения существенно, чтобы оба многообразия X и Y были неособыми.

Существуют и некоторые другие вопросы, для решения которых могут оказаться полезными когомологические методы, а также интуиция, выработанная последовательным проведением точки зрения теории схем. Среди этих вопросов важнейшими сейчас представляются следующие.

Проблема В. *Пусть X — нетерова схема, Y — ее полная подсхема. Установить, при каких условиях воз-*

можно «стянуть» Y в точку, т. е. найти свойственный морфизм схемы X в схему X', переводящий Y в одну точку y и индуцирующий изоморфизм пространств $X - Y$ и $X' - (y)$.

Согласно Грауэрту, эта задача тесно связана с задачей А. Кроме того, она связана с теорией голоморфных функций Зариского, ибо необходимое (но не достаточное) условие возможности стягивания, как показывает теорема 4, заключается в следующем: кольцо голоморфных функций на схеме X вдоль схемы Y должно быть нетеровым, а его размерность по Круллю должна быть равной $\dim X$.

Проблема Г. *Пусть G — схема групп над схемой Y (конечного типа над Y), а H — замкнутая подсхема групп схемы G. Доказать существование фактор-схемы G/H над X* (определенной с помощью обычного свойства универсальности отображения).

Проблема Д. *Пусть X — схема, свойственная над нетеровой схемой Y. Доказать существование схемы абелевых групп над Y, которая играла бы роль относительного многообразия Пикара по отношению к локально свободным пучкам ранга единица на произведениях вида $X \times Z$* (где Z — переменная «параметрическая схема» над схемой Y).

Мы не станем приводить здесь точное определение «относительной схемы Пикара»; заметим лишь, что эта схема, если она существует, ведет себя простейшим мыслимым образом относительно изменения базисного пространства Y (которое следует рассматривать как аналог изменения основного поля). Кроме того, тот факт, что мы допускаем возможность существования нильпотентных элементов в локальных кольцах схем Z, открывает возможность получить много дополнительной информации о многообразии Пикара (особенно о его инфинитезимальном строении), которая, по-видимому, до сих пор не была получена даже в классическом случае. Эти замечания останутся справедливыми, если мы рассмотрим следующую более общую ситуацию. Пусть дана схема групп G над схемой X (конечного типа над X). Для любой схемы Z над Y рассмотрим над произведением $X \times_Y Z$ обратный образ G^Z схемы G относительно проекции $X \times_Y Z \to X$, а также классы изоморфных схем над $X \times_Y Z$, которые являются главными однородными пространствами над G^Z. Эта ситуация приводит к определению обобщенного относительного многообразия Пикара многообразия X по отношению к Y. Это многообразие должно быть схемой над Y и даже схемой абелевых групп над Y, если схема G абелева. Можно надеяться, что общая теорема существования для таких обобщенных относительных схем Пикара имеет место и будет доказана в дальнейшем.

В качестве совершенно общего утверждения можно сказать, что попытки переформулировать все известные факты и вопросы на языке схем должны привести к лучшему пониманию любых разделов даже самой классической алгебраической геометрии. Эта работа уже начата и будет проведена в систематическом курсе алгебраической геометрии, который я в сотрудничестве с Ж. Дьедонне надеюсь написать в ближайшие годы и в котором должно содержаться последовательное изложение всех вопросов, затронутых в этом докладе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Barsotti J., Abelian varieties over fields of positive characteristic, R. C. Circ. mat. Palermo (2), **5**, 1—25 (1956).
[2] Borel A. and Serre J. P., Le théoréme de Riemann — Roch, Bull. Soc. Math. Fr. **86**, 97—136 (1958).
[3] Cartier P., These, Paris, 1959 (to appear).
[3a] Cartier P., Séminaire Bourbaki (May, 1958).
[4] Chevalley C. and Cartan H., Séminaire École Normal Supérieure (1955/56).
[5] Godement R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Act. Sci. Ind. № 1952. Hermann, Paris, 1958.
[6] Grothendieck A., Sur quelques points d'algebre homologique, Tôhoku Math. J. **9**, nos. 2—3, 119—221 (August, 1957).
[7] Grothendieck A., Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. In Séminaire Cartan, 1956/57 (exposé № 2).
[8] Grothendieck A., Théorémes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki (Mai, 1957).
[9] Nagata M., A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, Amer. J. Math. **78**, 78—116 (1956).
[10] Rosenlicht M., Extensions of vector groups by abelian varieties, Amer. J. Math. **80**, 685—714 (1958).
[11] Серр Ж. П., Когерентные алгебраические пучки, «Расслоенные пространства», Москва, ИЛ, 1957.
[12] Serre J. P., Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique *p*. Symposium de Topologie Algébrique, Mexico (August, 1956).
[13] Serre J. P., Quelques propriétés des variétes abéliennes en caractéristique *p*, Amer. J. Math. **80** (1958).

[14] Serre J. P., Sur la dimension homologique des anneaux et modules noethériens, Proc. Int. Symp. Algebraic Number Theory, Tokyo — Nikko, pp. 175 — 189 (1955).
[15] Serre J. P., Théories des intersections. Cours poffessé an Collége de France 1957/58, rédigé par P. Gabriel (to appear in mimeographed notes).
[16] Serre J. P., Groupes algébriques et corps de classes.
[17] Serre J. P., Sur la cohomoloqie des variétés algébriques, J. math. pures appl. **36**, 1 — 16 (1957).
[18] Tate J., Groups of Galois type and cohomological dimension of fields (в печати).
[19] Washnitzer A., Geometric syzygies, Amer. J. Math. **81**, 171 — 248 (1959).
[20] Weil A., Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 497 — 508 (1949).
[20a] Вейль А., Абстрактная алгебраическая геометрия в сравнении с классической, Математика, 2:4, 59 — 67 (1958).
[21] Zariski O., Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields, Mem. Amer. Math. Soc. **5** (1951).
[22] Зарискиий О., Теория алгебраических пучков, Математика.
[23] Auslander M. and Buchsbaum R. A., Codimension and multiplicity, Ann. Math. (2), **68**, 625 — 657 (1958).

КОМПЛЕКСНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ*)

Ф. Хирцебрух

(ФРГ)

1. Введение. Около десяти лет тому назад появились работы Хопфа и Эресмана [6, 14], в которых исследовался вопрос: допускает ли данное дифференцируемое многообразие комплексное строение. Как обобщение комплексного многообразия они ввели понятие почти комплексного многообразия. Примеры комплексных многообразий дают алгебраические многообразия. В этом докладе будут рассматриваться компактные комплексные многообразия, которые голоморфно и без особенностей могут быть вложены в комплексные проективные пространства.

Сами комплексные многообразия рассматриваться почти не будут. В основном будут рассмотрены, с одной стороны, результаты Милнора [16] о почти комплексных многообразиях и, с другой стороны, новая формулировка теоремы Римана — Роха для алгебраических многообразий любой размерности по Гротендику [2]. Исследования Милнора находятся в тесной связи с томовской теорией внутренних гомологий. Гротендик обобщил доказанную в [13] теорему Римана — Роха. Его общая формулировка допускает чисто алгебраическое доказательство для основного поля любой характеристики. Связующим звеном между исследованиями Милнора и Гротендика является в этом докладе теория классов Черна (Чженя). Я начну с напоминания определения почти комплексных многообразий и их классов Черна. Без дальнейших оговорок эти многообразия будут предполагаться

*) F. Hirzebruch, Komplexe Mannigfaltigkeiten.

всегда компактными. Отметим (это будет важно в дальнейшем), что будут рассматриваться не обязательно связные многообразия.

2. Почти комплексные многообразия [1, 20]. Пусть X — некоторое $2n$-мерное гладкое многообразие. Пространство T_x касательных векторов к X в точке $x \in X$ является $2n$-мерным линейным пространством над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел. Почти комплексной структурой на X называется непрерывное поле I, которое ставит в соответствие каждой точке $x \in X$ эндоморфизм I_x пространства T_x такой, что $I_x^2 = -1$. Эндоморфизм I_x позволяет ввести в T_x структуру n-мерного пространства над полем $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел, полагая для $a + bi \in \boldsymbol{C}$ и $v \in T_x$

$$(a + bi) v = av + b (I_x v).$$

Почти комплексное многообразие — это гладкое многообразие с почти комплексной структурой. Для почти комплексного многообразия имеет смысл выражение «векторы $v_1, \ldots, v_n \in T_x$ линейно независимы над полем $\boldsymbol{C}$».

3. Классы Черна [1, 13, 20]. На ориентируемом (компактном) гладком многообразии существует всегда векторное поле с конечным числом особенностей (нулей). Каждой особенности ставится в соответствие целое число (кратность). Старая теорема Хопфа утверждает, что число особенностей векторного поля, вычисленное с кратностями, не зависит от векторного поля: это число всегда равно эйлеровой характеристике $e(X)$. Под p-полем понимают систему p векторных полей на X. Пусть теперь X рассматривается с почти комплексной структурой. Точка $x \in X$ называется особенностью заданного p-поля, если векторы p-поля в точке x как векторы T_x линейно зависимы над $\boldsymbol{C}$.

Пусть n — комплексная размерность X и $1 \leqslant p \leqslant n$. Множество особенностей p-поля есть, вообще говоря, $2(p-1)$-мерный цикл. Целочисленный класс гомологий этого цикла не зависит от выбора p-поля. Он называется классом гомологий Черна p-полей. Класс гомологий Черна 1-полей нульмерен. Для его определения почти комплексная структура не требуется.

Почти комплексное многообразие X естественным образом ориентировано, так как каждое касательное пространство T_x ориентировано, как линейное пространство над $\boldsymbol{C}$. В силу двойственности Пуанкаре, устанавливающей канонический изоморфизм между целочисленной r-мерной группой гомологий и целочисленной группой когомологий $H^{2n-r}(X, \boldsymbol{Z})$, классам гомологий Черна соответствуют классы когомологий $c_{n-p+1} \in H^{2(n-p+1)}(X, \boldsymbol{Z})$. Таким образом определяются классы когомологий Черна.

Мы дали определение классов Черна через препятствия и говорили на гомологическом языке. Но язык когомологий лучше соответствует теории препятствий: триангулируем X; всегда существует p-поле без особенностей на $(2n-2p+1)$-мерном остове, и препятствие к его неособому продолжению на $(2n-2p+2)$-мерный остов представляет собой класс когомологий размерности $2n-2p+2$ с коэффициентами в $(2n-2p+1)$-мерной гомотопической группе штифелевого многообразия всех невырожденных p-реперов в пространстве $\boldsymbol{C}^n$, которое является деформационным ретрактом компактного однородного пространства $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-p)$. Группа

$$\pi_{2n-2p+1}(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-p))$$

есть его первая неисчезающая гомотопическая группа. Она бесконечно циклическая. Можно теперь определить $c_i \in H^{2i}(X, \boldsymbol{Z})$ как первое препятствие к редукции структурной группы комплексного касательного пучка к группе $\boldsymbol{U}(i-1)$.

4. Числа Черна. Пусть X — почти комплексное многообразие комплексной размерности n. Кольцо когомологий $H^*(X, \boldsymbol{Z})$ представляет собой градуированное кольцо с группами когомологий $H^i(X, \boldsymbol{Z})$ как прямыми слагаемыми, которое изоморфно на основании двойственности Пуанкаре кольцу гомологических пересечений многообразия X. Единичный элемент 1 кольца $H^*(X, Z)$ принадлежит группе $H^0(X, Z)$ и соответствует при изоморфизме Пуанкаре фундаментальному циклу $[X]$ в заданной ориентации. Группы $H^{2i}(X, Z)$ принадлежат центру кольца когомологий. Таким образом, классы Черна перемножаются между собой коммутативно.

Пусть $\omega = (r_1, \ldots, r_j)$ — произвольное неупорядоченное разбиение числа n на целые положительные слагаемые r_s. Класс когомологий $c_{r_1} \cdot c_{r_2} \cdot \ldots \cdot c_{r_j}$ имеет размерность $2n$ и обозначается через c_ω. Число $c_\omega[X]$ представляет собой тогда значение класса c_ω на фундаментальном цикле ориентированного многообразия X. Каждому разбиению ω числа n соответствует целое число $c_\omega[X]$. Это и есть числа Черна многообразия X. Согласно упомянутой в п. 3 теореме Хопфа число $c_n[X]$ равно эйлеровой характеристике. Как показывают примеры ([1], 13,9), числа Черна зависят не только от дифференцируемой структуры, а от почти комплексной структуры; они обобщают эйлерову характеристику, которая, конечно, не связана с почти комплексной структурой. Числа Черна могут интерпретироваться так же, как числа пересечений классов гомологий Черна. Это больше соответствует подходу с точки зрения алгебраической геометрии, где классы Черна вводятся через некоторые классы эквивалентности алгебраических циклов (канонические классы). Для определения чисел Черна чисто алгебраическим образом требуется теория колец пересечения классов эквивалентности алгебраических циклов (работы Чжоу).

5. Числа Черна и арифметический род [13]. Предположим теперь, что X есть n-мерное алгебраическое многообразие (под «размерностью» алгебраического или почти комплексного многообразия всегда понимается комплексная размерность), g_i — комплексные размерности пространств гомоморфных дифференциальных форм на X степени i. Под арифметическим родом $\chi(X)$ понимают следующую сумму:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_i.$$

По определению g_0 есть комплексная размерность пространства гомоморфных функций. Так как многообразие X компактно, g_0 есть число компонент связанности. Можно выразить $\chi(X)$ через линейную комбинацию чисел Черна с рациональными коэффициентами. Для каждой размерности n существует полином T_n веса n от переменных c_i, который дает эту линейную комбинацию. Он выглядит следующим образом:

$$n=1:\ \chi(X) = \frac{1}{2} c_1 [X],$$

$$n=2:\ \chi(X) = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) [X],$$

$$n=3:\ \chi(X) = \frac{1}{24} (c_2 c_1) [X],$$

$$n=4:\ \chi(X) = \frac{1}{720} (-c_4 + c_1 c_3 + 3c_1^2 c_2 - c_1^4) [X].$$

Это и есть теорема о тоддовском роде, которая доказана в [13] и представляет частный случай теоремы Римана — Роха.

Многократно проективные пространства суть произведения комплексных проективных пространств. Всего существует $\pi(n)$ многократно проективных пространств размерности n, где $\pi(n)$ — число разбиений ω числа n. Все $\pi(n)$ коэффициентов тоддовского полинома $T_n(c_1, \ldots, c_n)$ определяются однозначно, например, тем обстоятельством, что полином $T_n(c_1, \ldots, c_n)$ на всех многократно проективных пространствах должен принимать значение 1 (числа Черна многократно проективных пространств хорошо известны). Тоддовский род $T(x)$ может быть определен для любого почти комплексного многообразия X как рациональное число, являющееся линейной комбинацией T_n чисел Черна этого многообразия. Если многообразие X алгебраично, то тоддовский род целочислен, так как имеет место равенство

$$\chi(X) = T(X).$$

6. Числа Черна и теорема Милнора [16]. Система $\pi(n)$ целых чисел, или, точнее, отображение множества разбиений числа n в целые числа, должна удовлетворять некоторым условиям для того, чтобы она могла быть представлена как система чисел Черна n-мерного алгебраического многообразия. Необходимым условием является целочисленность тоддовского рода, из которой следует при $n=1$, что эйлерова характеристика должна быть четной, и, например, при $n=3$, что число $c_2c_1[X]$ должно делиться на 24. При $n=1$ делимость числа $c_1[X]$ на 2 является также достаточным условием: положительные четные числа реализуются непересекающимися объединениями римановых сфер (проективных прямых), четные числа $\leqslant 0$ реализуются связными римановыми поверхностями рода $\geqslant 1$. Милнор поставил следующий вопрос:

Какая система $\pi(n)$ целых чисел реализуется как система чисел Черна почти комплексного многообразия размерности n?

Он показал, что для каждого n можно наложить систему соотношений на числа Черна, выполнимость которой является необходимым и достаточным условием того, чтобы система $\pi(n)$ целых чисел представлялась как система чисел Черна

n-мерного почти комплексного многообразия. Им доказана следующая

Теорема. *Система $\pi(n)$ целых чисел тогда и только тогда представляется как система чисел Черна n-мерного почти комплексного многообразия X, когда она представляется как система чисел Черна n-мерного алгебраического многообразия Y, принадлежащего вполне определенной совокупности $\mathfrak{M}$ алгебраических многообразий.*

К множеству $\mathfrak{M}$ принадлежат комплексные проективные пространства гиперплоскости $H_{(r,t)}$ двукратно проективных пространств $P^r(c) \times P^t(c)$ двойной степени (1,1) при $r > 1$, $t > 1$. С помощью простого разложения Милнор показал, что каждому алгебраическому, соответственно почти комплексному, многообразию X можно поставить в соответствие «отрицательное» алгебраическое, соответственно почти комплексное, многообразие X' той же размерности, числа Черна которого равны числам Черна многообразия X с обратным знаком. Мы присоединим к множеству $\mathfrak{M}$ также многообразия, отрицательные по отношению к упомянутым выше. Множество $\mathfrak{M}$ мы теперь уже можем задать полностью, считая его содержащим упомянутые выше многообразия и замкнутым относительно операций суммирования (непересекающегося объединения) и прямого произведения многообразий.

Так как числа Черна многообразий, порождающих $\mathfrak{M}$, можно вычислить, а поведение чисел Черна при суммировании и прямом перемножении известно, можно с помощью решения конечной системы линейных уравнений ответить на вопрос, представляется ли заданная система $\pi(n)$ целых чисел как система чисел Черна многообразия $X \in \mathfrak{M}$. Эта система соотношений может быть выведена для дальнейших целей. Ее не представляет труда полностью выписать для данного n. Известное соотношение дается в алгебраической геометрии (теорема Римана — Роха). Так как оно выполнено для алгебраических многообразий, то оно выполнено и для почти комплексного многообразия X в силу теоремы Милнора; например, имеем

Следствие. *Тоддовский род почти комплексного многообразия целочислен.*

Ранее было известно, что тоддовский род почти комплексного многообразия, умноженный на число 2^{n-1}, целочислен [11], [13]. Для алгебраических многообразий число

$$\chi^p(X) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q}$$

может быть выражено через числа Черна. Это дает дальнейшие соотношения для почти комплексного многообразия X:

$$4\chi(X) - \chi^1(X) = \frac{1}{12}(2c_4 + c_1c_3)[X].$$

Таким образом, для четырехмерного почти комплексного многообразия X число

$$(2c_4 + c_1c_3)[X]$$

делится на 12.

Следствие. *Эйлерова характеристика четырехмерного почти комплексного многообразия X, у которого второе число Бетти исчезает, делится на* 6. *В частности, кватернионная проективная плоскость не допускает почти комплексной структуры.*

Для доказательства приведенной выше теоремы Милнор [16] развил для почти комплексных многообразий аналог теории внутренних гомологий (кобордизмов) Тома [21]. Милнор называет два почти комплексных многообразия одинаковой размерности C-эквивалентными, если их числа Черна совпадают. Класс C-эквивалентности образует относительно непересекающегося объединения и указанной выше операции отрицания группу Γ^n в каждой размерности n. Милнор ставит в соответствие унитарной группе $U(k)$ пространство Тома $M(U(k))$ [21]. Он показывает, что группы $\pi_{i+2k}(M(U(k)))$ зависят лишь от i для больших k и что эти стабильные группы исчезают для нечетных значений i и изоморфны группам Γ^n при $i = 2n$. Эти результаты дает спектральная последовательность Адамса (Comm. Math. Helvet. **32**, 180—214 (1958)). Милнор показывает, далее, что $\Gamma^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$ образует градуированное кольцо относительно операции прямого перемножения многообразий, которое изоморфно кольцу полиномов над Z от переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$, где x_n соответствует некоторому элементу из Γ^n. Изоморфизм между кольцами $Z[x_1, x_2, \ldots]$ и Γ^* можно осуществить, поставив в соответствие переменной x_n произвольное n-мерное почти комплексное многообразие X_n, числа Черна которого удовлетворяют некоторому условию. Для описания этого условия введем полином $s_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, который является симметрической функцией $t_1^n + \ldots + t_n^n$ элементарных симметрических функций σ_i от переменных t_j. Определяем $s(X)$ для n-мерного почти комплексного многообразия X как следующую линейную комбинацию чисел Черна:

$$s(X) = s_n(c_1, \ldots, c_n)[X],$$

где c_i — классы Черна многообразия X.

Многообразие X_n должно удовлетворять следующему условию: если число $n+1$ не является степенью простого числа, то $s(X_n) = \pm 1$; если $n+1 = q^r$, где q — простое число, то $s(X_n) = \pm q$. Последовательность многообразий X_n может быть сконструирована из заданных ранее образующих множества M, так как

$$s(P^n(C)) = n + 1,$$

$$s(H_{(r,t)}) = -\binom{r+t}{r} \quad (r > 1,\ t > 1).$$

В той же работе [16] Милнор получил тем же методом новую информацию о кольце ориентируемых внутренних гомологий («кобордизмов») Ω^*. Он показал, что Ω^* содержит лишь 2-кручение и что фактор-кольцо кольца Ω^* по идеалу, состоящему из элементов конечного порядка, имеет структуру кольца полиномов.

7. Замечания к теореме Милнора. (1) Мы приводим здесь полную систему соотношений на числа Черна n-мерного почти комплексного многообразия:

$$n = 1:\ c_1 \equiv 0 \pmod 2,$$

$$n = 2:\ c_1^2 + c_2 \equiv 0 \pmod{12},$$

$$n = 3:\ c_1c_2 \equiv 0 \pmod{24},\ c_3 \equiv c_1^3 \equiv 0 \pmod 2,$$

$$n = 4:\ -c_4 + c_3c_1 + 3c_2^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^4 \equiv 0 \pmod{720},$$

$$c_2c_1^2 + 2c_1^4 \equiv 0 \pmod{12},\ c_1c_3 - 2c_4 \equiv 0 \pmod 4.$$

(2) Из исследований Милнора вытекает, что существует наименьшее целое число γ_n такое, что всякая система $\pi(n)$

целых чисел, умноженная на это число, представляется как система чисел Черна n-мерного почти комплексного многообразия, и что это число γ_n равно знаменателю n-го полинома Тодда (см. [13]): $\gamma_n = \prod_q q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}$ (q пробегает все простые числа). Аналогичное утверждение имеет место для чисел Понтрягина и гладких многообразий. Число $\overline{N}_k$, о котором поставлен вопрос в [13], равно знаменателю полинома L_k: $\overline{N}_k = \prod_q q^{\left[\frac{2k}{q-1}\right]}$ (q пробегает нечетные простые числа).

(3) Вопрос о том, когда система $\pi(n)$ целых чисел является системой чисел Черна связного почти комплексного многообразия (соответственно алгебраического), остается нерешенным. Не исключено, что в этом случае числа Черна должны удовлетворять также некоторым неравенствам.

(4) Милнором и докладчиком было введено в устной беседе понятие обобщенной почти комплексной структуры на гладком многообразии X: такая структура представляет собой комплексную структуру на тривиальном расширении действительного касательного пучка многообразия X, являющемся уитнеевской суммой этого пучка с тривиальным действительным векторным пучком. Для обобщенного комплексного многообразия X также возникают классы Черна и в случае, если размерность многообразия X четна, числа Черна. С точки зрения рассмотренных в предыдущем параграфе исследований Милнора понятия обобщенного почти комплексного многообразия и почти комплексного многообразия адекватны: группа Γ^n также изоморфна группе классов C-эквивалентных обобщенных почти комплексных многообразий комплексной размерности n, так что, например, теорема о целочисленности тоддовского рода остается верной для обобщенных почти комплексных многообразий. Для обобщенных почти комплексных многообразий X, вообще говоря, число $c_n[X]$ отличается от эйлеровой характеристики. Например, для четномерных сфер S^{2n} существует обобщенная почти комплексная структура, в которой $c_n(S^{2n}) = 0$. Но второе следствие из п. 6 остается верным, если заменить слова «почти комплексное» на «обобщенное почти комплексное» и «эйлерова характе-

ристика» на $c_n[X]$. Из структуры классов Понтрягина кватернионной проективной плоскости $P_2(K)$ можно вывести, что число $c_4[P_2(K)]$ для обобщенной комплексной структуры может быть равно лишь ± 3 [12], так что $P_2(K)$ не допускает никакой обобщенной почти комплексной структуры. Используя известное вложение $P_{n-1}(K) \subset P_n(K)$, можно доказать аналогичное утверждение для кватернионных проективных пространств высших размерностей. Так как каждому комплексному векторному пучку ξ соответствует «обратный» комплексный векторный пучок с таким же базисом, уитнеевская сумма которого с ξ тривиальна, и нормальный пучок к $P_{n-1}(K)$ в $P_n(K)$ допускает комплексную структуру, из существования обобщенной почти комплексной структуры на $P_n(K)$ следует ее существование на $P_{n-1}(K)$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема. *Кватернионные проективные пространства $P_n(K)$, рассматриваемые в обычной гладкой структуре, не допускают при $n \geqslant 2$ никакой обобщенной почти комплексной структуры.*

Это обобщает доказанную в [12] теорему.

(5) Вопрос о существовании почти комплексных, соответственно обобщенных почти комплексных, структур на гладком многообразии X может быть также исследован на основе теории высших препятствий, которые являются некоторыми классами когомологий с коэффициентами в гомотопических группах

$$\pi_i(SO(2n)/U(n)), \qquad i \leqslant 2n - 1,$$

т. е. в стабильных гомотопических группах $\pi_i(SO(2m)/U(m))$ при m большом. Так как в работах Ботта [3 — 5] все эти гомотопические группы полностью найдены, можно надеяться, что теория препятствий может быть здесь проведена вполне систематически (в почти комплексном случае нестабильна лишь группа $\pi_{2n-1}(SO(2n)/U(n))$, но и она извлекается из работ Ботта).

8. Комплексные векторные пучки [1, 13]. Комплексный векторный пучок ξ со слоем C^q имеет пространство пучка E_ξ, базу B_ξ и непрерывную проекцию π_ξ: $E_\xi \to B_\xi$. Каждый слой рассматривается с фиксированной структурой q-мерного векторного пространства над C. Заданы открытое покрытие $\{U_j\}$ базы B_ξ и q отображений $s_i^{(j)}$: $U_j \to E_\xi$, $i = 1, \ldots, q$, для каждого j, являющихся сечениями, т. е. $\pi_\xi \bigcirc S_i^{(j)} = 1$; тогда возникает локальное представление ξ в виде прямого произведения, т. е. для каждого j отображения, даваемые формулой

$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) \to \sum_{i=1}^{q} \lambda_i s_i^{(j)}(x), \qquad \lambda_i \in C,$$

являются гомеоморфизмами: $U_j \times C^q \to \pi_\xi^{-1}(U_j)$.

Структурной группой пучка является группа $U(q)$. Для пучка ξ определяются классы Черна $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi, \boldsymbol{Z})$ $(1 \leqslant \leqslant i \leqslant q)$ по аналогии со специальным случаем комплексного касательного пучка почти комплексного многообразия (см. п. 3). В формулировке теоремы Римана — Роха фигурирует некоторый класс когомологий смешанных размерностей базисного пространства B_ξ, так называемый характер Черна пучка ξ, обозначаемый через $\mathrm{ch}(\xi)$ и являющийся элементом алгебры $H^*(B_\xi, \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Q}$ в случае, если база B_ξ конечномерна ($\boldsymbol{Q}$ обозначает обычно поле рациональных чисел). Для определения $\mathrm{ch}(\xi)$ требуются введенные в п. 6 полиномы s_k:

$$\mathrm{ch}(\xi) = q + \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1} s_k(c_1(\xi), \ldots, c_k(\xi)).$$

В этой формуле нужно положить

$$c_k(\xi) = 0, \qquad k > q,$$

где q — размерность слоя $\boldsymbol{C}^q$.

Сумма конечна, если база B_ξ конечномерна. Напомним, наконец, определение голоморфных векторных пучков. Оно дается в точности так же, как и выше. E_ξ и B_ξ здесь уже будут комплексными многообразиями или комплексными пространствами π_ξ и $s_i^{(j)}$ голоморфными отображениями.

9. Теорема Римана — Роха [13]. Пусть X — некоторая алгебраическая кривая (компактная риманова поверхность). Дивизором D называется конечная формальная линейная комбинация точек X с целыми коэффициентами:

$$D = m_1 P_1 + \ldots + m_k P_k, \qquad P_i \in X.$$

Проблема Римана — Роха состоит в отыскании размерности векторного пространства над $\boldsymbol{C}$ *всех тех меро-*

морфных на X функций f, дивизор которых плюс заданный дивизор являются неотрицательным дивизором, т. е. дивизором с лишь неотрицательными кратностями. Это векторное пространство обозначается через $\mathfrak{L}(D)$. Его размерность всегда конечна. Каждому дивизору D ставится в соответствие голоморфный пучок прямых $\{D\}$ (векторный пучок со слоем $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^1$ и базой X) таким образом, что $\mathfrak{L}(D)$ канонически изоморфно векторному пространству над $\boldsymbol{C}$ всех голоморфных сечений пучка $\{D\}$ над всей базой X. Это приводит к следующему обобщению проблемы Римана — Роха: пусть X — некоторое алгебраическое многообразие и ξ — голоморфный векторный пучок над X; определить размерность над $\boldsymbol{C}$ пространства всех голоморфных сечений пучка ξ над всей базой X. На этот вопрос нет никакого общего ответа. Напомним понятие аналитического пучка над комплексным многообразием X. Простейшим примером является пучок $\mathcal{O}_X$, который записывается через покрытия таким образом, что каждому открытому на X множеству U ставится в соответствие кольцо голоморфных на U функций. После того как пучок $\mathcal{O}_X$ введен, можно упомянутое кольцо отождествить с кольцом $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ — кольцом сечений пучка $\mathcal{O}_X$ над множеством U. Аналитический пучок может быть задан посредством покрытий так, что открытому множеству $U\subset X$ ставится в соответствие модуль над $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Каждый голоморфный векторный пучок ξ над X определяет аналитический пучок $\mathcal{O}(\xi)$ посредством покрытий так, что каждому открытому множеству $U\subset X$ соответствует $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ — модуль голоморфных сечений пучка ξ над U. В случае, если ξ представляет собой тривиальный пучок прямых, $\mathcal{O}(\xi)=\mathcal{O}_X$. Аналитические пучки называются также пучками $\mathcal{O}_X$-модулей [18]. Гомоморфизмы таких пучков являются всегда по определению $\mathcal{O}_X$-гомоморфизмами.

Пусть теперь X — опять алгебраическое многообразие и ξ — голоморфный векторный пучок над X. Обозначим через $\chi(X, \xi)$ альтернированную сумму размерностей групп когомологий X с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}(\xi)$. Эти группы когомологий являются конечномерными векторными пространствами над $\boldsymbol{C}$:

$$\chi(X, \xi)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\boldsymbol{C}} H^i(X, \mathcal{O}(\xi));$$

$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}(\xi))$ есть как раз число, о котором идет речь в проблеме Римана — Роха. Группы $H^i(X, \mathcal{O}(\xi))$ исчезают, если i велико (больше, чем размерность многообразия X). Если ξ — тривиальный пучок прямых, то $\chi(X, \xi)$ является рассмотренным в п. 5 арифметическим родом $\chi(X)$. Теорема Римана — Роха утверждает, что $\chi(X, \xi)$ может быть выражено через классы Черна многообразия X и пучка ξ. Классы Черна многообразия X являются по определению классами Черна касательного пучка к многообразию X.

Обозначим через c_i классы Черна многообразия и введем полный класс Тодда, полагая

$$\mathcal{T}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j), \qquad T_0 = 1 \in H^0(X, \boldsymbol{Z});$$

T_j представляют собой рассмотренные в п. 5 тоддовские полиномы. Умножим характер Черна $\mathrm{ch}(\xi)$ (см. п. 8) на $\mathcal{T}(X)$ и рассмотрим элемент кольца когомологий $H^*(X, \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Q}$:

$$\mathrm{ch}(\xi)\,\mathcal{T}(X) \in H^*(X, \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Q}.$$

Если α — произвольный элемент из $H^*(X, \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Q}$ и X имеет комплексную размерность n, то под $\alpha[X]$ мы будем понимать значение $2n$-мерной компоненты элемента α на фундаментальном цикле ориентированного многообразия X. *Теорема Римана — Роха* [13] *утверждает, что*

$$\chi(X, \xi) = (\mathrm{ch}(\xi)\,\mathcal{T}(X))[X].$$

Написанное равенство есть обобщение рассмотренного в п. 5 соотношения между тоддовским родом и арифметическим родом. Если ξ — тривиальный пучок прямых, то $\mathrm{ch}(\xi) = 1$. По определению $\mathcal{T}(X)[X]$ есть тоддовский род $T(X)$.

Рациональное число $(\mathrm{ch}(\xi)\,\mathcal{T}(X))[X]$ вполне определено для почти комплексного многообразия X и непрерывного комплексного векторного пучка ξ. Мы обозначим его через $T(X, \xi)$. Неясно, является ли это число целым. *Теорема Римана — Роха утверждает его целочисленность для алгебраического многообразия X и голоморфного пучка ξ. Следуя ходу мысли работы* [1], *где показано, что число $T(X, \xi)$, умноженное на подходящую степень двойки, является целым, может быть, можно доказать целочисленность $T(X, \xi)$ для почти комплексного многообразия X*

и непрерывного пучка ξ. Для этого можно привлечь результаты Милнора (п. 6 вместе с обобщениями п. 7).

Целочисленность $T(X, \xi)$ можно было бы, как показано в [1], применить для доказательства теорем о компактных ориентируемых гладких многообразиях, которые доказаны в [1] лишь «по модулю степеней двойки», — например, следующего утверждения:

Теорема. *Пусть* X — *компактное ориентированное гладкое многообразие,* $p_i \in H^{4i}(X, \mathbf{Z})$ — *его классы Понтрягина и* $\{\hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ — *мультипликативная последовательность полиномов, принадлежащая степенному ряду*

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\sin h \frac{1}{2}\sqrt{z}}.$$

Пусть, далее, d — *элемент группы* $H^2(X, \mathbf{Z})$, *который, будучи приведен по модулю 2, равен классу Штифеля — Уитнея многообразия* X — $w_2 \in H^2(X, \mathbf{Z})$, *и* ξ — *комплексный векторный пучок над* X. *Тогда следующее число является целым*:

$$(\operatorname{ch}(\xi) e^{\frac{1}{2}d} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j))[X].$$

Эти кратко прореферированные здесь вещи должны появиться в нашей совместной с А. Борелем работе, следующей за [1] ([1], часть III). Приведенная теорема имеет некоторые следствия. Например, получается теорема Ботта [4] о том, что класс Черна C_n комплексного векторного пучка над сферой S^{2n} делится на $(n-1)!$. Далее, Милнор [15, 17] с помощью этой теоремы получил результаты о стабильных гомотопических группах сфер.

10. Когерентные аналитические пучки. Пусть X — некоторое комплексное многообразие. Понятие когерентного аналитического пучка имеет локальную природу. К этим пучкам относятся, во-первых, пучки $\mathcal{O}(\xi)$, где ξ — голоморфный векторный пучок, и более общие аналитические пучки, которые представляются локально как коядра локальных гомоморфизмов $\mathcal{O}(\xi) \to \mathcal{O}(\xi')$ [18], где ξ и ξ' — тривиальные векторные пучки. Это и есть все когерентные аналитические пучки. Пусть многообразие X алгебраично, связно, n-мерно.

Тогда можно считать, что когерентные аналитические пучки — это те аналитические пучки, для которых существует последовательность голоморфных векторных пучков $\xi_0, \ldots, \xi_n$ над X и гомоморфизмов в целом таких, что последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(\xi_n) \to \mathcal{O}(\xi_{n-1}) \to \ldots \to \mathcal{O}(\xi_0) \to G \to 0 \tag{1}$$

точна [2]. Такая последовательность называется резольвентой пучка G через векторные пучки. Эта резольвента связана с теоремой Гильберта о цепях сизигий. Пусть теперь рассматриваемые пространства X и Y будут связными.

В дальнейшем многообразие X будет предполагаться алгебраическим и пучок G — когерентным аналитическим пучком над X.

Гротендик [2] определил характер Черна пучка G с помощью резольвенты пучка G через векторные пучки, положив

$$\operatorname{ch}(G) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{ch}(\xi_i) \in H^*(X, \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Q}.$$

Он показал, что это определение корректно, т. е. $\operatorname{ch}(G)$ не зависит от выбора резольвенты. Для этого существенна линейность характера Черна: если $0 \to \xi' \to \xi \to \xi'' \to 0$ — точная последовательность векторных пучков, то $\operatorname{ch}(\xi) = \operatorname{ch}(\xi') + \operatorname{ch}(\xi'')$. Как и в случае векторных пучков, для когерентного аналитического пучка G можно определить число $\chi(X, G)$, полагая

$$\chi(X, G) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_{C} H^i(X, G). \tag{2}$$

Эта сумма опять содержит лишь конечное число членов, размерности групп когомологий конечны. Рассмотрим для пучка G резольвенту (1). Тогда из элементарных свойств эйлеровой характеристики вытекает, что

$$\chi(X, G) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \chi(X, \xi_j). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получается следующее распространение теоремы Римана — Роха на когерентные аналитические пучки над алгебраическим многообразием X:

$$\chi(X, G) = (\operatorname{ch}(G)\, \mathcal{T}(X))[X]. \tag{4}$$

11. Прямой образ аналитического пучка [2, 9]. В теореме Римана — Роха фигурирует класс когомологий смешанных размерностей $\mathrm{ch}(G)\mathcal{T}(X)$. Собственно говоря, в формуле (4) играет роль лишь та компонента этого класса, размерность которой равна $2\dim_{\mathbf{C}}X$. Гротендик придал теореме Римана — Роха более общую формулировку, в которой играет роль весь класс когомологий $\mathrm{ch}(G)\mathcal{T}(X)$: Гротендик рассмотрел два алгебраических многообразия X и Y, когерентный аналитический пучок G над X и голоморфное отображение $f\colon X\to Y$. Тогда возникает аддитивный (но не мультипликативный) гомоморфизм

$$f_*\colon H^*(X,\mathbf{Z})\to H^*(Y,\mathbf{Z})$$

и гомоморфизм f_* этих же групп, умноженных тензорно на поле $\mathbf{Q}$. Гомоморфизм f_* строится следующим образом: возьмем класс когомологий $\alpha\in H^*(X,\mathbf{Z})$, отобразим обычным образом в Y двойственный к нему по Пуанкаре класс гомологий и рассмотрим элемент, двойственный последнему классу гомологий многообразия Y; полученный класс когомологий мы и обозначим через $f_*\alpha\in H^*(Y,\mathbf{Z})$. Очевидно, имеет место равенство $\dim f_*\alpha=\dim\alpha+2(\dim_{\mathbf{C}}Y-\dim_{\mathbf{C}}X)$. Гротендик пытался выразить класс $f_*(\mathrm{ch}(G)\mathcal{T}(X))$ в виде $\mathrm{ch}(?)\mathcal{T}(Y)$. Для этого используется прямой образ аналитического пучка.

Пусть X и Y — комплексные многообразия (не обязательно компактные), G — аналитический пучок над X и $f\colon X\to Y$ — голоморфное отображение. Прямой образ номер q пучка G представляет собой аналитический пучок над Y, обозначаемый через $f^q_*(G)$. Для его определения привлечем покрытия: для любого открытого множества $U\subset Y$ рассмотрим группы когомологий $H^q(f^{-1}(U),G)$. Они являются модулями над кольцом голоморфных на $f^{-1}(U)$ функций. Так как каждой голоморфной на U функции можно поставить в соответствие голоморфную на $f^{-1}(U)$ функцию, группы $H^q(f^{-1}(U),G)$ являются также модулями над $\Gamma(U,\mathcal{O}_Y)$, кольцом голоморфных на U функций. $\Gamma(U,\mathcal{O}_Y)$-модули $H^q(f^{-1}(U),G)$ определяют обычным образом аналитический пучок $f^q_*(G)$ над многообразием Y. Этот прямой образ по существу фигурировал уже в фундаментальных работах Лерэ. Пучок $f^q_*(G)$ нулевой, если $q>2\dim_{\mathbf{C}}X$.

Теорема. *Если X и Y — алгебраические многообразия* (см. введение), *отображение $f\colon X \to Y$ голоморфно и G — когерентный аналитический пучок над X, то прямые образы $f^q_*(G)$ являются когерентными аналитическими пучками над Y.*

Эта теорема, о которой мы еще сделаем некоторые замечания, дает возможность ввести следующее определение:

$$f_! \operatorname{ch}(G) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \operatorname{ch}(f^q_*(G)).$$

Так как пучки f^q_* когерентны, их характеры Черна вполне определены в п. 10 (характер Черна нулевого пучка равен нулю).

12. Теорема Римана — Роха — Гротендика [2].

Теорема. *Пусть X и Y — алгебраические многообразия* (см. введение), *f — голоморфное отображение X в Y и G — аналитический когерентный пучок над X. Тогда имеет место следующее равенство в алгебре $H^*(Y, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$:*

$$f_*(\operatorname{ch}(G)\mathscr{T}(X)) = (f_! \operatorname{ch}(G))\mathscr{T}(Y).$$

(1) Эта теорема утверждает очень сильное ковариантное свойство полиномов Тодда. Если, например, X получено из Y раздуванием некоторого подмногообразия (моноидальное преобразование), f — естественное бирациональное отображение $f\colon X \to Y$ и $G = \mathscr{O}_X$, то $f^0_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ и $f^q_*(\mathscr{O}_X) = 0$ для $q > 0$. В этом случае формула Гротендика дает

$$f_*\mathscr{T}(X) = \mathscr{T}(Y).$$

Возникает вопрос, выполнено ли последнее равенство для любых голоморфных бирациональных отображений алгебраического многообразия X на алгебраическое многообразие Y.

(2) Обычная теорема Римана — Роха [13] (см. формулу (4) из п. 10) получается в том случае, когда Y представляет собой точку и f — постоянное отображение. Тогда, очевидно,

$$\mathscr{T}(Y) = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}(f^q_*(G)) = \dim_C H^q(X, G)\cdot 1.$$

Когерентность пучка-образа утверждает здесь, что размерности групп $H^q(X, G)$ над C конечны. Далее, обратим внимание на тот факт, что отображение f_* на всех компонентах элемента $\operatorname{ch}(G)\mathscr{T}(X)$ размерности менее чем $2\dim_C X$

нулевое, поэтому
$$f_*(\operatorname{ch}(G)\mathscr{T}'(X))=(\operatorname{ch}(G)\mathscr{T}(X))[X]\cdot 1.$$

(3) Важнейшим применением теоремы Гротендика является, вероятно, доказательство обычной теоремы Римана — Роха, так как ранее для нее не было известно алгебраического доказательства. Общая формулировка делает возможным алгебраическое доказательство, которое проходит прежде всего для проекции $f\colon X\times P\to Y$ и затем для вложения $f\colon X\to Y$. Во втором случае решающую роль играют моноидальные преобразования. Как уже было сказано, доказательство Гротендика чисто алгебраично, оно проходит для поля любой характеристики. Нужно заменить в формулировке и доказательстве аналитические понятия через соответствующие алгебраические («голоморфное» на «регулярное», «когерентный аналитический» на «когерентный алгебраический» и т. д.), применить топологию Зариского и (вместо кольца когомологий) кольцо пересечений (кольцо Чжоу) классов эквивалентных алгебраических циклов. Теорема п. 11 станет чисто алгебраической теоремой. В этом докладе мы употребляли аналитический язык, и поэтому сформулированная здесь теорема имеет другое содержание даже при ограничении на характеристику поля — считая ее равной нулю, — чем доказанная в [2] теорема Римана — Роха — Гротендика. Однако, согласно теореме соответствия Серра [19] между аналитической и алгебраической геометриями, мы вправе говорить на аналитическом языке.

13. Возможные обобщения. Насколько теорема Римана — Роха проходит для комплексных многообразий? Обычная формулировка п. 9 вполне осмысленна для комплексных многообразий и голоморфных векторных пучков ξ. Предположение, что равенство $\chi(X,\ \xi)=(\operatorname{ch}(\xi)\mathscr{T}(X))[X]$ верно в этом случае, подкрепляется тем обстоятельством, что в силу новых результатов [9] правая часть есть целое число.

Для того чтобы прийти к обобщению в смысле Гротендика, необходимо прежде всего исследовать, в каком случае прямой образ когерентного аналитического пучка когерентен. Важные результаты в этом направлении получены Грауэртом и Реммертом [7] — [10] (даже в случае комплексных пространств). Имеется следующая общая гипотеза (Гротендик—Грауэрт — Реммерт).

При собственном отображении f комплексного пространства X в комплексное пространство Y прямой образ когерентного аналитического пучка над X является когерентным аналитическим пучком над Y.

Здесь не предполагается, что X и Y компактны. Термин «собственное» означает, что для компактного подмножества K множества Y множество $f^{-1}(K)$ также компактно.

Грауэрт и Реммерт [8] показали, что эта гипотеза верна, если X аналитически полно и Y голоморфно полно. К аналитически полным многообразиям [8] относятся как голоморфно полные многообразия (Штейна), так и алгебраические многообразия. Класс аналитически полных многообразий замкнут относительно операций прямого произведения и взятия подмногообразия.

Выполнимость же гипотезы для аналитически полного многообразия X и голоморфно полного многообразия Y дает легко ее верность для аналитически полного X и любого Y. Это влечет теорему п. 11, которая, однако, легче получается в алгебраическом случае.

Далее, нужно иметь возможность определить характер Черна когерентного аналитического пучка над X (соответственно над Y). Для этого нужны резольвенты такого пучка, построенные из конечного числа голоморфных векторных пучков над связными компактными подмножествами многообразия X (соответственно Y). Согласно устному сообщению Реммерта, это возможно, если X (соответственно Y) аналитически полно.

Теорема Римана — Роха — Гротендика кажется верной для аналитически полных X, Y, голоморфных собственных отображений $f\colon X \to Y$ и когерентных аналитических пучков над X.

Докладчик не знает, известно ли к данному моменту Грауэрту, Гротендику или Реммерту точное доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Borel A. a. Hirzebruch F., Characteristic classes and homogeneous spaces. I. Amer. J. Math. **80**, 458—538 (1958) и II (в печати).

[2] Borel A. a. Serre I. P., Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France **86**, 97—136 (1958).

[3] Bott R., The stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. **43**, 933—935 (1957).

[4] Bott R. a. Milnor I. W., On the parallelizabillity of the spheres, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 87—89 (1958).

[5] Bott R., Applications of Morse theory to the homotopy of Lie groups, Proc. Int. Congr. Math. Edinburg, 423—426 (1960).
[6] Ehresman Ch., Sur la théorie des espaces fibres, Colloque Int. de Topologie Algebrique, Paris, 3—15 (1949).
[7] Grauert H. a. Remmert R., Espaces analytiquement coherents sur la produit d'un espace analytique et un espace projectif, C. R. Acad. Sci. Paris **245**, 819—822 (1957).
[8] Grauert H. a. Remmert R., Espaces analytiquement complets, C. R. Acad. Sci. Paris **245**, 882—885 (1957).
[9] Grauert H. a. Remmert R., Bilder und Urbilder analytischer Garben, Ann. Math. (2), **68**, 393—443 (1958).
[10] Grauert H. a. Remmert R., Komplexe Räume, Ann. Math. **136**, 245—318 (1958).
[11] Hirzebruch F., On Steenrod reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. **39**, 951—956 (1953).
[12] Hirzebruch F., Über die quaternionale projektiven Räume, S. B. bayer Acad. Wiss., 301—312 (1953).
[13] Hirzebruch F., Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1956.
[14] Hopf H., Zur topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays presented to R. Courant, New York, pp, 167—185, 1948.
[15] Milnor I. W., On the Whitehead homomorphism *J*, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 79—82 (1958).
[16] Milnor I. W., On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue (в печати).
[17] Milnor I. W. a. Kervaire M. A., On Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rochlin, Proc. Int. Congr. Math. Edinburg, 454—458 (1960).
[18] Serre I. P., Faisceaux algebriques coherents, Ann. Math. (2), **61**, 197—278 (1955).
[19] Serre I. P., Geometrie algebrique et geometrie analytique, Ann. Inst. Fourier **6**, 1—42 (1956).
[20] Steenrod N., The topology of fibre bundles, Prinston University Press, Princeton, New Jercey, 1951.
[21] Thom R., Quelques propriets globales des varietés differentiables, Comment. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954).

Добавление докладчика при корректуре. (1) Гипотеза из п. 13 о прямых образах уже доказана Грауэртом. (2) Найден для гладких многообразий аналог теоремы Римана — Роха — Гротендика (М. Ф. Атия и Ф. Хирцебрух, в печати).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. КОНСТРУКТИВНЫЕ И НЕКОНСТРУКТИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ *)

С. Клини

(США)

1. Математическая логика

В начале нашего столетия в связи с предпринятым Гильбертом пересмотром геометрии (1899) считалось, что теоремы аксиоматической теории выражают утверждения, истинные для любой системы объектов S, удовлетворяющей аксиомам этой теории.

В простейшем случае система S состоит из непустого множества D (*область*), в котором выделены некоторые *индивидуалы* и над которым определены некоторые n-местные функции (или операции), принимающие значения из D, и некоторые n-местные *предикаты* (или свойства и отношения), т. е. функции, значениями которых являются суждения.

Элементарное (или *первой ступени*) исчисление предикатов обеспечивает язык для описания таких систем. К заданному списку (нелогических) *констант* для выделенных индивидуалов, функций и предикатов мы добавляем *пропозициональные связки*: $\rightarrow$ («следует» или «если ..., то ...»), & («и»), V («или»), $\neg$ («не»), квантор общности (a) («для всех a (из D)») и квантор существования $(\exists a)$ («существует a (в D такое, что)»).

Если S — арифметика натуральных чисел 0, 1, 2, ... с символами $0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ =,\ >$ в их обычном смысле, то

---

*) S. Kleene, Mathematical logic. Constructive and non-constructive operations.

следующие выражения:

$$(\alpha)\ a=b+1, \qquad (\beta)\ (\exists b)(a=b+1),$$

$$(\gamma)\ a>0, \qquad (\delta)\ a>0\rightarrow(\exists b)(a=b+1),$$

$$(\varepsilon)\ (a)[a>0\rightarrow(\exists b)(a=b+1)]$$

являются *формулами*. Формула (α) (содержащая a, b *свободно*) выражает 2-местный предикат (отношение), формулы (β) — (δ) (содержащие свободно a) выражают 1-местные предикаты (свойства), и формула (ε) (не содержащая свободных переменных, т. е. *предложение*) выражает некоторое суждение.

Если (a, b) есть (3, 2), то формула (α) истинна. Отсюда если a есть 3, то (β) и (γ) истинны; а следовательно, по таблице истинности для $\rightarrow$

$$A\rightarrow B$$

A \ B	истинно	ложно
истинно	истинно	ложно
ложно	истинно	истинно

и формула (δ) истинна. Аналогичным образом (δ) истинна при любом другом a. Следовательно, истинна формула (ε). Таблицы истинности, которые, в принципе, восходят к Пирсу (1885) и Фреге (1891), были впервые разработаны в полном виде Лукасевичем (1921) и Постом (1921), а определения истинности главным образом Тарским (1933).

Нам нужен один элементарный результат из логики. В любой формуле все кванторы можно выдвинуть (шаг за шагом) в начало, сохраняя при этом истинность или ложность суждения или любое значение предиката, выражаемого этой формулой. (Например, формула

$$[(a)\ A(a)]\rightarrow(a)\ B(a)$$

эквивалентна формуле

$$(\exists a)(b)[(A(a)\rightarrow B(b)].)$$

Полученную при этом формулу мы называем *предваренной формой* первоначальной формулы.

I. $\left\{\begin{array}{ll}\text{Левенгейм} & (1915)\\ \text{Сколем} & (1920)\end{array}\right\}$.

Если $\left\{\begin{array}{l}\textit{предложение } A \textit{ истинно}\\ \textit{предложения } A_0, A_1, A_2, \ldots \textit{ истинны}\end{array}\right\}$ *в данной системе* S, *то* $\left\{\begin{array}{l}\textit{оно истинно}\\ \textit{все они истинны}\end{array}\right\}$ *в некоторой системе* S_1 *со счетной областью* D_1.

Доказательство. Пусть формула A имеет предваренную форму

$$(\exists b)(c)(\exists d)(e)(f)(\exists g)\, A(b, c, d, e, f, g), \tag{1}$$

где явно выписаны все кванторы. Если она истинна в системе S с областью D, то существует индивидуал β и (по аксиоме выбора) функции $\delta(c)$ и $\gamma(c, e, f)$ такие, что формула

$$(c)(e)(f)\, A(\beta, c, \delta(c), e, f, \gamma(c, e, f)) \tag{2}$$

истинна. Формула (2), а следовательно и (1), останется истинной, если мы сузим область D (не изменяя функции и предикаты) до ее минимального подмножества D_1, содержащего β (и выделенные индивидуалы системы S) и замкнутого относительно δ, γ (и функций системы S). Новая область D_1 счетна, так как все ее элементы имеют обозначения посредством элементов множества $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ всех индивидуальных термов, образованных с помощью β, δ, γ и символов выделенных индивидуалов и функций системы S. (Мы можем всегда условиться, что система S имеет хотя бы один символ индивидуала и хотя бы один символ функции.) В случае многих формул A_0, A_1, A_2, ... нужно использовать различные символы в роли β, δ, γ для каждой предваренной формы.

Формула (1), например, будет истинна в системе S_1 с областью D_1, элементы которой обозначены через $t_0, t_1, t_2 \ldots$, если каждое выражение

$$A(\beta, t_c, \delta(t_c), t_e, t_f, \gamma(t_c, t_e, t_f)) \quad (c, e, f = 0, 1, 2, \ldots)$$

истинно; занумеруем все эти выражения (а в случае A_0, A_1, A_2, ... все выражения, получаемые аналогичным образом из различных предваренных форм) в виде последовательности

$$A^0,\ A^1,\ A^2, \ldots$$

Для следующей теоремы мы просто попытаемся всеми возможными путями сделать все выражения A^0, A^1, A^2, ... одновременно истинными. Наибольшую свободу для таких попыток мы получим, интерпретируя каждый терм t_i как изображение нового индивидуала, скажем i. Тогда мы можем выбирать в качестве значения каждого выражения $P(t_{c_1}, \ldots, t_{c_n})$ (где P — символ n-местного предиката) истину или ложь независимо от значений других выражений. Перенумеруем все такие выражения (без повторений) в виде Q_0, Q_1, Q_2, ... Каждая последовательность выборов их значений может быть соотнесена некоторому пути (указанному стрелками) в дереве

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & V_{11} & \\
 & V_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & V_{10} & \\
V \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \cdots \\
 & & V_{01} & \\
 & V_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & V_{00} &
\end{tikzcd}$$

Например, если мы выбираем Q_0 истинно, Q_1 ложно, Q_2 истинно, ..., то следуем по пути $VV_0V_{01}V_{011}\ldots$. Как только при выбранных уже значениях одно из выражений

$$A^0,\ A^1,\ A^2, \ldots$$

окажется ложно, то мы обрываем эту последовательность выборов и завершаем путь.

По лемме Кенига (1926) о бесконечности (= классическому варианту теоремы Брауэра о веере, 1924), если (*случай* 1) существуют сколь угодно длинные пути, то найдется и бесконечный путь. Такой путь соответствует выбору каждый раз стрелки, принадлежащей сколь угодно длинным конечным путям. Таким образом, мы получаем первую альтернативу следующего утверждения:

II. *Либо* (1) *все выражения* A^0, A^1, $A^2, \ldots$

$$\left(\textit{и следовательно} \begin{cases} \textit{формула } A \\ \textit{все формулы } A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots \end{cases}\right)$$

истинны в некоторой системе S с областью

$$D_1 = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

либо (2) *некоторая «конъюнкция Эрбрана»*

$$A^{j_1} \& \ldots \& A^{j_m}$$

$$\left(\textit{и следовательно} \begin{cases} \textit{формула } A \\ \textit{некоторая формула } A_{k_1} \& \ldots \& A_{k_n} \end{cases} \right)$$

ложна в любой системе S.

Если (*случай* 2) имеется конечная верхняя граница $b+2$ длин путей, то при каждом из 2^{b+1} способов выбора значений для $Q_0, \ldots, Q_b$ некоторое A^j должно быть ложно. Конъюнкция $A^{j_1} \& \ldots \& A^{j_m}$ $(m \leqslant 2^{b+1})$ этих A^j должна быть ложна при всех 2^{b+1} способах выбора, а значит, и во всякой системе S. Также во всякой системе S будет ложно и само A (или конъюнкция $A_{k_1} \& \ldots \& A_{kn}$ тех $A_0, A_1, A_2, \ldots$, из которых появились $A^{j_1}, \ldots, A^{j_m}$), ибо если бы A было истинно в некоторой системе S, то мы должны были бы как и при рассмотрении I получить значения для $Q_0, \ldots, Q_b$, при которых все $A^{j_1}, \ldots, A^{j_m}$ истинны. (Здесь нам нужны значения δ и γ только при конечном числе значений аргументов, обозначенных термами, входящими в $A^{j_1} \& \ldots \& A^{j_m}$, так что утверждение I передоказано без использования аксиомы выбора.)

Утверждение II содержит в себе теорему Геделя о полноте (1930) и теорему Эрбрана в той степени, в какой они могут быть сформулированы в рамках *теории моделей*. Теория моделей занимается «соотношением между предложениями формализованных теорий и математическими системами (*моделями*), в которых эти предложения выполнены» (Тарский, 1954—1955).

Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов (II_G) получается из II заменой утверждения (2) на:

$$(2_G) \quad \begin{rcases} \begin{cases} \textit{формула } \neg A \\ \textit{некоторая формула } \neg (A_{k_1} \& \ldots \& A_{k_n}) \end{cases} \end{rcases} \textit{доказуема}$$

в исчислении предикатов, а теорема Эрбрана (II_H) дает эквивалентность утверждений (2_G) и (2).

Однако, если мы условимся, что «доказательство» всякого утверждения должно представлять собой конечную лингвистическую конструкцию, по которой видно, что она составлена в соответствии с заданными правилами, и существование которой обеспечивает истинность (в данном смысле) этого утверждения, то мы уже имеем утверждение (II_G), так как проверка утверждения (2) для данной конъюкции $A^{j_1} \& \ldots \& A^{j_m}$ является такой конструкцией.

Обычные доказательства теоремы Геделя о полноте отличаются от намеченного нами доказательства тем, что *доказательство* формулы $\neg A$ (или $\neg (A_{k_1} \& \ldots \& A_{k_n})$) для ($2_G$) проводится в обычной формальной системе аксиом и правил вывода для исчисления предикатов в соответствии с требованиями теории доказательств.

Теория доказательств — это современный вариант аксиоматического метода, восходящего к Пифагору (предположительно), Аристотелю и Евклиду. Начиная с Фреге (1879) стали обращать внимание на то, что для исключения неявных предположений аксиомы и правила вывода должны быть точно определены в форме лингвистических выражений (т. е. без ссылок на интерпретации или модели); отсюда термин «формальная система».

В 1904 году Гильбертом была предложена идея доказательства теорем о формальных системах в *метатеории,* или *метаматематике* (ср. Гильберт—Бернайс, 1934, 1939; Клини, 1952). Так, например, можно сказать метаматематически, что в утверждении (2_G) имеется в виду (формальное) доказательство формулы $\neg A$.

В метаматематике Гильберта подразумевалось, что могут быть использованы только надежные («конструктивные» или «финитные») методы. Парадоксы теории множеств Кантора, кульминировавшей в 1895 году, вынудили математиков признать, что некоторые методы переходят границы интуиции и даже могут привести к противоречию. Гильберт надеялся спасти «классическую математику» (включая обычную арифметику и анализ и подходящим образом ограниченную аксиоматизированную теорию множеств), которую он признавал переходящей пределы интуиции, путем представления ее в виде формальной системы и доказательства непротиворечивости этой системы (т. е. установления того, что никакая «противоречивая» пара предложений C и $\neg C$ недоказуема в ней) с помощью финитной метаматематики. Кронекер (в 1880 годах), а затем и другие предлагали переизложение математики на более или менее широкой конструктивной базе, например интуиционистской (Брауэр, 1908; Хейтинг, 1956) или оперативной (Лоренцен, 1950, 1955).

В модели S_1, построенной выше для II, символ «$=$» может не выражать равенство (тождество). (В модели, построенной для I, это будет иметь место, если оно имело место в S.) Но если множество $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ содержит обычные аксиомы равенства, то отношение $\{x=y$ истинно в *вышеупомянутой* системе $S_1\}$ будет отношением эквивалентности, классы эквивалентности которого образуют область (счетную *или конечную*) *новой* модели S_1, в которой символ «$=$» выражает эквивалентность (Гедель, 1930). Для наших целей мы можем предполагать, что утверждение II усилено таким образом.

Применяя (II_G) с $\begin{Bmatrix} \neg C \\ \neg C, B_0, B_1, B_2, \ldots \end{Bmatrix}$ в качестве $\begin{Bmatrix} A \\ A_0, A_1, A_2, \ldots \end{Bmatrix}$, получаем:

(II'_G). *Всякое предложение C, которое истинно* $\begin{Bmatrix} \textit{в любой системе } S \\ \textit{в любой системе } S\textit{, в которой истинны } B_0, B_1, B_2, \ldots \end{Bmatrix}$, *доказуемо в* $\begin{Bmatrix} \textit{исчислении предикатов} \\ \textit{теории, формализованной посредством исчисления предикатов с аксиомами } B_0, B_1, B_2, \ldots \end{Bmatrix}$.

Это подтверждает, что исчисление предикатов вполне отвечает (для «элементарных теорий») тем требованиям, из которых мы исходили, рассматривая его в роли логики. Но теорема Геделя о полноте (включая теорему Левенгейма) дает нечто большее: в такой же мере, в какой она является теоремой о полноте логики, ее можно считать теоремой о неполноте систем аксиом.

Так теорема I Левенгейма—Сколема показывает, что аксиомы аксиоматической теории множеств имеют счетную модель (если они вообще имеют какую-нибудь модель), вопреки теореме Кантора, имеющей место в этой теории («пародокс» Сколема, 1922, 1923).

Более того, из II следует (II″): *Если для каждого конечного подмножества* A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_n} *множества предложений* A_0, A_1, A_2, ... *можно указать такую систему* S, *в которой истинны все предложения* A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_n}, *то найдется такая система* S_1 *со счетной областью, в которой истинны все* A_0, A_1, A_2, ... Это дает следующую теорему, найденную Сколемом (1933, 1934) другим путем (и частично предсказанную Тарским, 1927, 1928).

III. *Пусть множество констант, входящих в формулы* B_0, B_1, B_2, ..., *содержит* $0, +1, =$ *и все эти формулы истинны в системе натуральных чисел* S_0. *Тогда найдется система* S_1 *со счетной областью, не изоморфная* S_0, *в которой* B_0, B_1, B_2, ... *также истинны.*

Доказательство. Пусть A_0, A_1, A_2, ... есть B_0, B_1, B_2, ..., $\neg 0 = \pi$, $\neg 1 = \pi$, $\neg 2 = \pi$, ..., где π — новый индивидуальный символ. Каждая формула из данного множества A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_m} истинна в системе S, которая получается из S_0, если рассматривать π как натуральное число, отличное от всех n, для которых $\neg n = \pi$ встречается среди B_{k_1}, B_{k_2}, ..., B_{k_n}.

Приложения теоремы Геделя о полноте к алгебре были замечены в 1946—1947 годах Тарским, Хенкином и Робинсоном и разрабатывались после. Мы предполагали, что число символов не более чем счетно, как это имеет место в случае любого используемого в действительности языка. Однако Мальцев (1936) распространил теорему о полноте на языки с произвольным (возможно, несчетным) числом констант, а Хенкин (1947) использовал такие языки для представления полных таблиц сложения и умножения и т. д. алгебраических систем множествами формул для того, чтобы применить к ним обобщения утверждений I и II.

Возвращаясь к счетным языкам, заметим, что можно рассматривать языки такого рода с более чем одним типом переменных, например, исчисление предикатов второй ступени с переменными, пробегающими область D индивидуалов, и переменными, пробегающими множество M подмножеств D.

Стандартная модель множества предложений A_0, A_1, $A_2, \ldots$ есть именно такой язык, где M есть множество 2^D всех подмножеств D. Ввиду категоричности аксиом Пеано для натуральных чисел (использование переменной над множеством 2^D выражает индукцию) вышеуказанные результаты не распространяются на случай, когда используются только стандартные модели. Однако Хенкин (1947, 1950) ввел понятие *общей* модели, в которой M может быть подходящим подмножеством множества 2^D и с помощью которой он получил обобщение теоремы Геделя о полноте. Таким образом, мы пока не в состоянии характеризовать натуральные числа, если не считать вариант введения в аксиомы понятия всех возможных подмножеств, которое вряд ли проще.

Мы привели упомянутую выше теорию моделей как часть обычной математики и для классической «двузначной» формы исчисления предикатов. Отрицательные результаты тем более приемлемы с конструктивной точки зрения. Аксиоматический метод не может обеспечить нам автономного обоснования математики. Правила языка аксиом должны (на некотором уровне) быть понимаемы, а не только описаны добавочными аксиомами; это же равносильно интуитивному предположению натуральных чисел.

2. Конструктивные и неконструктивные операции

Знание того, что некоторые математические операции «конструктивны», а другие нет (по крайней мере в прямом смысле), появилось уже давно в истории математики; свидетельство тому — слово «алгоритм». Вычислитель не может проверять истинность или ложность утверждения $(\exists x)R(a, x)$, где переменные пробегают натуральные числа, если он не располагает для данного R некоторой теорией, которая дает ему эквивалентное «конструктивное» определение $(\exists x)R(a, x)$. Пусть, например, тройки натуральных чисел b_0, b_1, b_2 отображаются конструктивно в числа b так, что обратные отображения $(b)_0$, $(b)_1$, $(b)_2$ также конструктивны. Указанная теория известна для $R(a, x) \equiv [(a)_0(x)_0 + (a)_1(x)_1 = (a)_2]$, она состоит в использовании алгоритма Евклида, но в настоящее время неизвестна соответствующая теория для $R(a, x) \equiv [((x)_0+1)^{(x)_3} + ((x)_1 + 1)^{(x)_3} = ((x)_2 + 1)^{(x)_3} \,\&\, (x)_3 > a]$, где уже ответ при $a = 2$ дал бы «решение» «последней теоремы» Ферма.

В 1936 году было сделано заявление сначала Черчем, а затем независимо от него Тьюрингом и Постом, что некоторый класс функций, определяемый математически (одним из нескольких эквивалентных путей), включает в себя все функции, которые «вычислимы», или «эффективно вычислимы», или «конструктивно» определимы (*тезис Черча*), и обратно, что все функции этого класса «вычислимы» (*обращение тезиса Черча*).

Определение этого класса функций само не конструктивно. Оно состоит в конструктивном описании некоторого типа вычислительной процедуры. Но заданная процедура может заканчиваться не для всех значений аргумента, и тогда она будет вычислять не всюду определенную функцию. (В противном случае с помощью диагонального метода Кантора можно было бы выйти за пределы рассматриваемого класса, и тогда тезис Черча не выполнялся бы.)

Конструктивно интерпретированное обращение тезиса Черча означает, что если имеется конструктивное доказательство того, что процедура вычисления всегда заканчивается, то соответствующая функция вычислима. Вряд ли это спорно. Возможность для скептицизма здесь остается лишь у того, кто желает включить в понятие вычислимости конструктивное доказательство того, что процедура вычисления всегда закончится, в то время как предполагаемое условие о том, что она всегда закончится, понимается классически; он может считать, что возможны случаи, когда процедура всегда заканчивается, но нет конструктивного доказательства этого факта.

Имеется много работ, в частности работы Петер с 1932 года, о специальных классах вычислимых функций, для которых известны доказательства того, что соответствующая процедура вычисления всегда заканчивается.

Что касается самого тезиса Черча, то опровергающий пример должен был бы включать «процедуры вычисления», в которых вычислитель выполняет шаги, зависящие от некоторых не предсказуемых будущих состояний его ума, или в которой «процедура» как-то меняется в зависимости от аргумента функции. Однако в тезисе под «вычислением» подразумевается вычисление некоторой предопределенной функции, независимой от вычислителя, которое совершается только с помощью наперед заданных правил, не зависящих от аргумента.

Мы теперь приведем (по существу) определение класса «вычисляемых» функций по Тьюрингу. (Среди эквивалентов, появившихся в литературе, можно указать λ-определимые функции Черча—Клини, 1933—1935; общерекурсивные функции Эрбрана—Геделя, 1934, и определения, использующие нормальные системы Поста, 1943, и алгорифмы Маркова, 1951.)

Вместо человека-вычислителя, подчиненного наперед заданным инструкциям, мы можем говорить о *машине*. Теория Тьюринга есть теория *идеальных* (цифровых) вычислительных машин, с неограниченным объемом памяти и абсолютной надежностью работы. Позднее фон Нейманом (1951) было введено понятие *автомата*; автомат не обязательно должен быть конечным, как в работе Клини (1956), он может быть потенциально бесконечным (Черч, 1957). Для организации *процедуры* вычисления функции $\varphi(a)$ нужно только фиксированное конечное количество информации, тогда как для размещения аргумента a и вычисления должно быть достижимо неограниченное количество места и времени.

Машина или автомат должны поэтому состоять из N_0 *ячеек*, каждая из которых смежна не более чем с данным конечным числом других ячеек. Внутрь ячеек будут помещаться объекты лишь из некоторого заданного конечного множества, так что в бесконечном числе ячеек будут их идентичные повторения. Здесь мы используем идею из теории информации о том, что сигнал несет информацию только в том случае, когда этот сигнал нельзя предсказать. Для упрощения нашего описания можно ограничиться случаем, когда все ячейки c_0, c_1, c_2, ... занумерованы натуральными числами и каждое c_i (за исключением c_0) смежно точно с двумя ячейками c_{i-1} и c_{i+1}. Для оправдания тезиса Черча—Тьюринга требуется тогда обосновать, что никакое другое устройство ячеек (с использованием только конечного числа различных устройств) не может сделать вычислимой функцию, которая невычислима в этом смысле.

Дискретные *моменты* времени будем обозначать через 0, 1, 2, ... Даны *состояния* s_0, ..., s_l, причем каждая ячейка в каждый момент будет находиться в одном из этих состояний. В момент 0 все ячейки, за исключением конечного числа, будут находиться в *пассивном* состоянии s_0. Дана *таблица*, которая определяет состояние любой ячейки c_i

в момент $t+1$, исходя из ее состояния и состояний соседних ячеек (при $i=0$ под состоянием c_{i-1} предполагается s_0) в момент t; выход этой таблицы должен отличаться от s_0 лишь тогда, когда отличен от s_0 хотя бы один из входов.

Например, для вычисления $\varphi(a)$ при аргументе a мы можем в момент $t=0$ взять ячейки $c_0, c_1, c_2, \ldots$ в состояниях

$$s_0 \underbrace{s_1\ s_1 \ldots s_1}_{a \text{ раз}} s_2\ s_0\ s_0\ s_0 \ldots$$

Ответ будет получаться посредством состояний

$$s_0 \underbrace{s_1\ s_1 \ldots s_1}_{a \text{ раз}} s_2\ s_0 \underbrace{s_1\ s_1 \ldots s_1}_{\varphi(a) \text{ раз}} s_3\ s_0\ s_0\ s_0 \ldots$$

в которых будут находиться ячейки в момент, когда впервые появится состояние s_3. (Представление натурального числа b посредством следующих друг за другом знаков не является существенным ограничением, поэтому можно считать, что проблема вычисления разрешима только тогда, когда имеется решение в таком представлении.)

Можно, например, считать, что ячейки $c_0, c_1, c_2, \ldots$ представляют собой листы бумаги, каждый из которых допускает один из конечного числа символов в каждом из конечного числа своих клеток, и одна из этих клеток носит как часть своего состояния человека-вычислителя в одном из конечного числа состояний его ума (ср. Клини, 1952).

Аналогичным образом машины могут быть использованы для вычисления n-местных функций $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; они могут быть использованы в качестве «разрешающей процедуры» для предикатов $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, при этом вычисленное машиной значение 0 соответствует, например, истине, а 1 — лжи.

Поведение машины полностью описывается ее таблицей, которая может быть записана в форме кода натуральным числом, ее индексом.

Пусть $T(i, a, x) \equiv \{i$ есть индекс машины Тьюринга M_i, которая, начиная вычисление с аргумента a, в момент x вычисляет значение $\varphi_i(a)\}$.

Здесь $\varphi_i(a)$ — не всюду определенная функция от i и a; условием того, чтобы она была определена, является $(\exists x)\, T(i, a, x)$.

Мы можем конструктивно проверять, является ли данное i индексом машины M_i, и если это так, то a и x определяют поведение машины M_i при аргументе a и в последовательные моменты $0, \ldots, x$. Таким образом, если даны i, a, x, то мы можем проверить, истинно или ложно $T(i, a, x)$. (Отсюда по тезису Черча следует, что существует машина, осуществляющая разрешающую процедуру предиката $T(i, a, x)$, и при детальном рассмотрении вопроса мы могли бы действительно построить эту машину.)

IV. *Функция*

$$\psi(a) = \begin{cases} \varphi(a) + 1, & \textit{если } (\exists x)\, T(a, a, x), \\ 0 & \textit{в противном случае,} \end{cases} \tag{A}$$

невычислима.

Доказательство. Если бы функция $\psi(a)$ была вычислима, то она должна была бы вычисляться некоторой машиной M_q, тогда для каждого a имели бы место утверждения (B) $\psi(a) = \varphi_q(a)$ и (C) $T(q, a, x)$. Подставляя в (C) q вместо a и используя (A), получим $\psi(q) = \varphi_q(q) + 1$, что противоречит (B) при $a = q$.

V. *Предикат* $(\exists x)\, T(a, a, x)$ *неразрешим.*

Доказательство. Если бы $(\exists x)\, T(a, a, x)$ был разрешим, то мы могли бы вычислить $\psi(a)$. Действительно, проверив сначала $(\exists x)\, T(a, a, x)$, мы соответственно ответу либо подражая работе машины M_a при аргументе a вычислили бы $\varphi_a(a)$ и прибавили бы к нему 1 либо записали бы сразу 0. Это теорема Черча (1936), но с другим примером абсолютно неразрешимого предиката.

Каждый разрешимый предикат типа $T(i, a, x)$ может быть выражен в стандартной формальной системе N арифметики (или «теории чисел»); следовательно, и предикат $(\exists x)\, T(a, a, x)$ выразим в этой системе с помощью предложения C_a (конструктивно получаемого по a). Если для фиксированного a утверждение $(\exists x)\, T(a, a, x)$ истинно, то оно может быть доказано при помощи вычисления, показывающего, что $T(a, a, x)$ истинно при подходящем x. Это интуитивное доказательство формально осуществимо в стандартном N. Таким образом,

$$(\exists x)\, T(a, a, x) \rightarrow \{C_a \text{ доказуемо}\}. \tag{a}$$

Мы предполагаем также, что в N доказуемы только истинные формулы, так что

$$\{C_a \text{ доказуемо}\} \rightarrow (\exists x)\, T(a, a, x). \tag{b}$$

Теперь из утверждения V следует:

VI. *Невозможен алгоритм, проверяющий, доказуемо данное предложение в формальной системе N арифметики или нет; короче говоря, система N «неразрешима»* (Черч, 1936 г.).

Далее, если бы при любом заданном a ложность высказывания $(\exists x)\, T(a, a, x)$ была не только необходимым, но также и достаточным условием доказуемости в N формулы $\neg C_a$, так что

$$\{\neg C_a \text{ доказуемо}\} \rightarrow \neg (\exists x)\, T(a, a, x), \qquad \text{(c)}$$

то можно было бы указать разрешающую процедуру для предиката $(\exists x)\, T(a, a, x)$, основанную на нахождении C_a или $\neg C_a$ среди доказуемых формул. Так мы получаем из V:

VII. *В формальной системе N арифметики существует такое предложение C_q, что C_q и $\neg C_q$ оба недоказуемы в N, хотя $\neg C_q$ истинно (т. е. $\neg (\exists x)\, T(a, a, x)$).*

Эта знаменитая теорема Геделя о неполноте (1931), обобщенная применительно к формальным системам N, удовлетворяющим довольно общим условиям, и с «формально неразрешимым» предложением C_q, выражающим значение наперед заданного предиката $(\exists x)\, T(a, a, x)$ при аргументе q, зависящем от системы N. Приведенное доказательство является косвенным, так как существование q устанавливается путем приведения к противоречию предположения о том, что формула $\neg C_a$ доказуема для всех a, для которых она истинна. Но мы можем сделать его прямым, беря в качестве q индекс машины M_q, которая, когда дано a, перебирает в N все доказательства в поисках доказательства для $\neg C_a$ и если находит таковое, то записывает 0 (а в противном случае не вычисляет никакое значение), так что

$$(\exists x)\, T(q, a, x) \equiv \{\neg C_a \text{ доказуемо}\}. \qquad \text{(d)}$$

Подставляя q вместо a в (b) — (d), получим все три заключения теоремы VII.

Здесь мы использовали ту особенность формальных систем (существенную для цели, для которой они предназначены), что имеется алгоритм нахождения доказательства любого предложения, для которого существует доказательство (а также то, что есть алгоритм нахождения C_a по a). Если не считаться с этой особенностью формальных систем, то можно было бы построить тривиальный контрпример к утверждению VII, беря в качестве аксиом системы N все истинные в ней предложения. Эта же самая особенность используется при заключении по тезису Черча о существовании M_q для любой такой системы. Здесь понятие вычислимости либо может быть применено прямо к лингвистическому символизму, либо соответствующие выражения могут быть обращены предварительно в натуральные числа, как мы уже делали это с таблицами машин (посредством «геделевой нумерации»).

При выводе VII для всех систем N мы использовали тезис Черча. При рассмотрении конкретной системы можно не пользоваться тезисом Черча, а непосредственно построить M_q для этой системы. Это фактически и сделал Гедель еще до появления тезиса Черча при доказательстве своей теоремы для частной системы.

Теорема III Сколема о существовании модели S_1 для системы предложений B_0, B_1, B_2, ..., описывающей натуральные числа, напоминает теорему VII Геделя. (Сравните пример с пятым постулатом Евклида.) В самом деле, для системы N, основанной на элементарном исчислении предикатов, утверждение (II'_G) показывает, что в некоторой такой модели S_1 предложение C_q ложно. Однако III в отличие от VII относится также и к случаю, когда B_0, B_1, B_2, ... — множество всех истинных предложений системы.

Я не полагаю, что VII означает, что мы должны отказаться от формальных систем. Основания, которые делают формальные системы единственным правильным путем точного описания того, как те или иные предположения используются в доказательстве, все же бесспорны. Скорее VII указывает, что, вопреки программе Гильберта, путь математических исследований (даже внутри уже фиксированной области арифметики) не будет состоять исключительно в обнаружении новых следствий из данных аксиом с помощью данных правил вывода, а потребует также нахождения новых аксиом или правил. Вопрос в том, смогут ли математики согласовать между собой обоснование новых методов.

Как только мы знаем, что предложение $\neg C_q$ недоказуемо в N, и знаем также, что $\neg C_q$ истинно (как имело место в теореме VII), мы можем расширить систему N, добавив $\neg C_q$ к ней в качестве новой аксиомы. Этот процесс может быть повторен любое конечное число раз. На самом деле он может быть повторен даже бесконечное число раз по конструктивным трансфинитам.

Полезно выяснить, в чем интуитивное доказательство $\neg C_q$ выходит за пределы системы N. Истинность $\neg C_q$ мы вывели, исходя из предположения (с). В силу (а), (с) сводится к непротиворечивости N, которая выразима в N посредством геделевой нумерации некоторым предложением «Consis». Остальные рассуждения для заключения того, что $\neg C_q$ истинно, элементарны, хотя утомительны, если проводить их во всех деталях, так что мы можем считать (как подтверждено Гильбертом и Бернайсом (1939) для обычных систем в роли N), что это может быть формализовано в N. Тогда предложение «Consis» не может быть доказано в N, ибо иначе в N было бы доказано и $\neg C_q$; что противоречит утверждению VII. Таким образом, имеем:

VIII. *В обычной формальной системе N арифметики предложение* «Consis,» *выражающее непротиворечивость N, недоказуемо.* (Вторая теорема Геделя о неполноте, 1931.)

Таким образом, непротиворечивость системы N, формализующей классическую математику, невозможно доказать, как надеялся Гильберт, посредством некоторого «подмножества» методов, формализуемых в N.

Генцен (1936, 1938) дал доказательство непротиворечивости системы N арифметики методом, выход которого за пределы N заключается в использовании трансфинитной индукции по порядковым числам, меньшим, чем первое канторово ε-число ε_0; позже появились и другие доказательства такого рода. Вопрос о том, увеличивают ли такие доказательства для нас надежность системы N по сравнению с тем, что мы уже имеем на основе истинности ее аксиом и сохранения истинности ее правилами вывода при некоторой интерпретации («определении истинности»), которую мы, как математики-классики, по-видимому, допускаем, является субъективным. С помощью редукций классической логики к интуиционистской, предложенных Колмогоровым (1925), Геделем (1932, 1933), Генценом (1936) и Беркайсом, доказательство непротиворечивости посредством определений истинности может быть даже сделано интуиционистским.

Крейсел (1951, 1952, 1958) исследовал значение доказательств непротиворечивости, использующих ε-индукцию.

Если предложение $(a)(\exists b) R(a, b)$ (где предикат R разрешим) доказуемо, то $(a) R(a, \beta(a))$ должно быть истинно при некоторых функциях β, включая функцию $\beta(a) = \{$минимальное b такое, что $R(a, b)$ истинно$\}$, которая вычислима. Ясно, что множество вычислимых функций $\beta(a)$, соответствующих, таким образом, предложениям $(a)(\exists b) R(a, b)$, доказуемым в данной системе N, не совпадает с множеством всех вычислимых функций; действительно, Клини (1936) привел доказательство теоремы Геделя о неполноте, основанное на этой идее. Крейсел, однако, извлек из доказательства непротиворечивости Аккермана (1940) иную характеристику этого подкласса вычислимых функций (не связанную непосредственно с N). Таким образом появляется возможность установить недоказуемость в N некоторой истинной формулы $(a)(\exists b) R(a, b)$ на основе того, что в указанном подклассе нет подходящего β для этой формулы.

Из теоремы Черча следуют другие результаты о неразрешимости. Теория предиката $(\exists x) T(a, a, x)$ может быть формализована в системе N_1, состоящей из конечного множества аксиом $B_1, B_2, \ldots, B_k$, присоединенных к (элементарному) исчислению предикатов. Так, $(\exists x) T(a, a, x) \equiv \{C_a$ доказуемо в $N_1\} \equiv \{B_1 \& \ldots \& B_k \rightarrow C_a$ доказуемо в исчислении предикатов$\}$. Отсюда и из V следует:

IX. *Элементарное исчисление предикатов неразрешимо* (Черч, 1936; Тьюринг, 1936, 1937).

Тарский и другие авторы, используя метод Тарского (1949) (ср. Тарский и др., 1953), показали неразрешимость различных формальных систем, полученных добавлением аксиом алгебраических систем к исчислению предикатов.

Отрицательные результаты о существовании различных алгебраических алгоритмов были получены Постом (1947), Марковым (1947) и другими, в частности, Новиков (1952, 1955) доказал неразрешимость проблемы тождества в теории групп.

Тьюринг (1939) ввел понятие функции $\varphi(a)$, *вычислимой относительно* другой функции $\psi(a)$ (или предиката $Q(a)$). Простой способ получения такой вычислимости на основе описанной выше заключается в том, чтобы записывать на ленте значение функции ψ (требование о том, чтобы для организации процедуры вычисления использовалось только конечное количество информации, будет нарушено только в этом пункте), выделяя последовательности из $\psi(0)+1$,

$\psi(1)+1$, $\psi(2)+1$, ... ячеек, разделенных единичными невыделенными ячейками. В действительности, мы удваиваем число состояний от $s_0, \ldots, s_l$ до $s_0, \ldots, s_l, s_0', \ldots, s_l'$.

Если теория, таким образом, соотнесена к данному предикату $Q(a)$, то вместо разрешимого предиката $T(i, a, x)$ мы имеем предикат $T^Q(i, a, x)$, разрешимый относительно Q, а утверждения IV и V переходят в их относительные варианты IV*, V*.

X. *Если предикат* $R^Q(a, x)$ *разрешим относительно* Q, *то найдется такая вычислимая функция* $\theta(a)$, *что* $(\exists x) R^Q(a, x) \equiv (\exists x)\, T^Q(\theta(a), \theta(a), x)$.

Доказательство. В качестве $\theta(a)$ для данного a можно взять геделев номер машины $M_{\theta(a)}$, которая пробует вычислить относительно Q постоянную функцию, значением которой является минимальное x такое, что $R^Q(a, x)$, испытывая последовательно $x=0$, $x=1$, $x=2$, ...

Таким образом, предикат $(\exists x) R^Q(a, x)$ разрешим относительно $(\exists x)\, T^Q(a, a, x)$ путем предварительного вычисления $\theta(a)$. В частности (если положить $R^Q(a, x) \equiv Q(a) \& x = x$), $Q(a)$ разрешим относительно $(x\exists)\, T^Q(a, a, x)$; но в силу V* обратное неверно. Это обстоятельство Пост (1948) выразил словами: $(\exists x)\, T^Q(a, a, x)$ имеет «бóльшую степень (неразрешимости)», чем $Q(a)$. Два предиката (две функции) имеют «одну и ту же степень», если каждый из них разрешим относительно другого (каждая из них вычислима относительно другой).

Всякий разрешимый предикат имеет минимальную степень («разрешимости»). Исходя, скажем, из $H_{(0)}(a) \equiv a = a$ и определяя для каждого n $H_{(n+1)}(a) \equiv (\exists x)\, T^{H_{(n)}}(a, a, x)$, мы получим предикаты $H_{(n)}(a)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ возрастающих степеней. Эти предикаты вместе с теми, которые разрешимы относительно них, образуют класс, совпадающий в точности с классом предикатов (названных Геделем арифметическими, 1931), которые выразимы в обычной системе арифметики. Таким образом, арифметические предикаты попадают под категорию иерархий, описанных впервые Клини (1943) и Мостовским (1946) в терминах числа кванторов, необходимых для определения их в предваренной форме исходя из разрешимых предикатов.

Иерархии могут быть продолжены по трансфинитам (Дэвис, Клини, Мостовский, Пост, около 1950; ср.

Мостовский, 1951; Клини, 1955). Один из методов такого продолжения состоит в том, чтобы рассматривать $H_{(n)}(a)$ как предикат $H(n, a)$ от обоих переменных; этот предикат имеет бо́льшую степень, чем каждый предикат $H_{(n)}(a)$, и потому является неарифметическим. «Сжав» $H(n, a)$ в одноместный предикат $H((a)_1, (a)_0)$, который мы запишем в виде $H_{(\omega)}(a)$, можно аналогичным образом действовать дальше и получить $H_{(\omega+1)}(a)$, $H_{(\omega+2)}(a)$, ... Вообще, для предельного порядкового числа ξ второго числового класса Кантора, к которому сходится возрастающая последовательность $\{\xi_n\}$, мы рассматриваем предикат $H_{(\xi_n)}(a)$ как предикат от двух переменных n, a и «сжимаем» его в одноместный.

Однако мы не имеем единого метода или оправдания для выбора частной возрастающей последовательности $\{\xi_n\}$ для ξ. Так, для всякого трансфинита ξ в зависимости от выбора сходящейся последовательности $\{\xi_n\}$ получаются различные предикаты $H_{(\xi)}$. Более того, уже для $\xi = \omega$ использование произвольной возрастающей последовательности $\{\xi_n\}$ при $\lim_n \xi_n = \xi$ (выше мы использовали $\xi_n = n$) будет давать предикаты сколь угодно высокой степени. Это наводит на мысль о том, чтобы ограничиться вычислимыми последовательностями $\{\xi_n\}$, записав сначала порядковые числа, попадающие под вышеуказанное понятие вычислимости, посредством некоторой подходящей системы обозначений, роль которой могут играть натуральные числа (Черч—Клини, 1936; Клини, 1938). После того как это сделано, различие предикатов одного и того же трансфинитного уровня ξ, обусловленное возможностью использования различных вычислимых возрастающих последовательностей, как показал Спектор (1955), не выходит за пределы одной и той же степени неразрешимости. Определимые таким образом предикаты, соответствующие конструктивным порядковым числам, вместе со всеми предикатами, разрешимыми (и функциями вычислимыми) относительно них, мы называем *гиперарифметическими* (Клини, 1955).

Около 1957 года Аддисоном, Бюхи, Гжегорчиком, Клини, Кузнецовым и Михайллом (ср. Гжегорчик и др., 1958) было замечено, что гиперарифметические предикаты — это в точности те предикаты, которые однозначно выразимы формулами элементарного исчисления предикатов, когда свободные переменные пробегают множество натуральных чисел.

Клини (1957) ввел понятие вычислимости относительно объектов более высокого типа, например относительно квантора существования $\exists$, рассматриваемого как функционал $\exists$, который в применении к предикату дает истинностное значение (или переводит функцию ψ в число 0, если $(\exists x)(\psi(x)=0)$, и в 1 — в противном случае). Гиперарифметические функции $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — это в точности те функции, которые вычислимы относительно функционала $\exists$. Таким образом, оперируя все время конструктивно, если не считать использования кванторов по числовым переменным, мы получаем не только обычные предикаты арифметики, но и гиперарифметические предикаты.

ЛИТЕРАТУРА

Ackerman N.

1940. Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Ann. **117**, 162—194.

Brower L. E. J.

1908. De onbetrouwbaarheid der Logische principes, Tijdschrift voor wijsbegeerte **2**, 152—158.

1924. Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stätig ist, Proc. Akad. Wet. Amst. **27**, 189—193.

Church A.

1933. A set of postulates for the foundation of logic (second paper), Ann. Math. (2), **34**, 839—864.

1936. An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. **58**, 345—363.

1936a. A note on the entscheidungsproblem, J. Symb. Logic **1**, 40—41, Correction, ibid., 101—102.

1941. The Calculi of lambda-conversion, Ann. of Math. Studies, № 6, Princeton University Press, Princeton, N. J.

1957. Application of recursive arithmetic to the problem of circuit synthesis, Summaries of Talks Presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University (mimeographed) **1**, 3—50; **3**, 429.

Church A. and Kleene S. C.

1933—1935. См. Church (1933), Kleene (1935), Church (1941).

1936. Formal definitions in the theory of ordinal numbers, Fundam. Math. **28**, 11—21.

Frege G.

1879. Begriffssrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Nebert, Halle.

1891. Funktion und Begriff, Jena.

Gentzen G.

1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112**, 493—565.

1938. Neue Fassuns des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, N. S., № 4, 19—44, Hirzel, Leipzig.
Gödel K.
1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. Math. Phys., **37**, 349—360.
1931. Über formal uneintscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. Monatsh. Math. Phys., **38**, 173—198.
1932, 1933. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebn. math. Kolloq., Heft 4, 34—38 (for 1931, 1932, publ. 1933).
1934. On undecidable propositions of formal mathematical Systems (mimeographed), Princeton, N. J.
Grzegorczyk A., Mostowsky A. and Ryll-Nardzewski C.
1958. The classical and the ω-complete arithmetic, J. Symb. Logic **23**, 188—206.
Henkin L.
1947. The completeness of formal systems, Princeton University Ph. D. Thesis, Princeton, N. J.
1950. Completeness in the theory of types, J. Symb. Logic **15**, 81—91.
Herbrand J.
1930. Recherches sur la théorie de la démonstration, Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, sciences mathématiques et physiques, № 33.
Herbrand J. and Gödel K.
1934. См. Gödel (1934), Kleene (1936, 1952).
Heyting A.
1956. Intuitionism, An Introduction, North. Holland Publ. Co., Amsterdam.
Гильберт Д.
1899. Основания геометрии, перев. с нем., 1948, Гостехиздат, Москва.
1904. Об основаниях логики и арифметики. (Из трудов III Международного математического конгресса в Гейдельберге в 1904 г.) Русский перевод, 1948, там же, 322—337.
Hilbert D. and Bernays P.
1934. Grundlagen der Mathematik, Bd. 1, Springer, Berlin.
1939. Grundlagen der Mathematik, Bd. 2, Springer, Berlin.
Kleene S. C.
1935. A theory of positive integers in formal logic, Amer. J. Math. **57**, 153—173, 219—244.
1936. General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. **112**, 727—742.
1938. On notation for ordinal numbers, J. Symb. Logic **3**, 150—155.
1943. Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 41—73.
1952. Введение в метаматематику, перев. с англ., 1957, ИЛ, Москва.
1955. Arithmetical predicates and function quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. **79**, 312—340.
1955a. Hierarchies of number-theoretic predicates, Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 193—213.

1956. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, Автоматы (сборник статей, пер. с англ.), ИЛ, Москва.

1957. Recursive functionals of higher finite types, Summaries of Talks Presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University (mimeographed) **1**, 148—154, Errata **3**, 429.

Колмогоров А. Н.

1925. О принципе «tertium non datur», Матем. сб. **32**, 646—667.

König D.

1926. Sur les correspondences multivoques des ensembles, Fundam. Math. **8**, 114—134.

Kreisel G.

1951, 1952. On the interpretation of non-finitist proofs, J. Symb. Logic **16**, 241—267; **17**, 43—58.

1958. Mathematical significance of consistency proofs, J. Symb. Logic **23**, 155—182.

Lorenzen P.

1950. Konstruktive Begründung der Mathematik, Math. Z. **53**, 162—202.

1955. Einführung in die operative Logik und Mathematik, Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg.

Löwenheim L.

1915. Über Möglichkeit im Relativkalkül, Math. Ann. **76**, 447—470.

Łukasiewicz Jan.

1921. Logika dwuwartościowa. Przeglad Filozoficzny **23**, 189—205.

Мальцев А. И.

1936. Исследования из области математической логики, Матем. сб. **1** (43), 323—336.

Марков А. А.

1947. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, Докл. АН СССР, нов. сер., **55**, 587—590.

1951. Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **38**, 176—189.

Mostowski A.

1946. On definable sets of positive integers, Fundam. Math. **34**, 1—112.

1951. A classification of logical systems, Studia Philosophica **4**, 8237—274.

Новиков П. С.

1952. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества, Докл. АН СССР **85**, 709—712.

1955. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **44**.

Peirce C. S.

1885. On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation, Amer. J. Math. **7**, 180—202.

Петер Р.

1951. Рекурсивные функции, русское изд., 1954, ИЛ, Москва.

Post E.

1921. Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. J. Math. **43**, 163—185.

1936. Finite combinatory processes-formulation, I. J. Symb. Logic **1**, 103—105.
1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem, Amer. J. Math. **65**, 197—215.
1947. Recursive unsolvability of a problem of Thue, J. Symb. Logic **12**, 1—11.
1948. Degrees of recursive unsolvability (abstract), Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 641—642.
Robinson A.
1951. On the Metamathematics of algebra, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
Skolem T.
1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Mathematisk-natur-videnskabelig klasse, № 4.
1922, 1923. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922 (Publ. Helsingfors, 1923), 217—232.
1933. Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems, Norsk. mat. Foren. Skr., ser. 2, **10**, 73—82.
1934. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fundam. Math. **23**. 150—161.
Spector C.
1955. Recursive well-orderings, J. Symb. Logic **20**, 151—163.
Tarski A.
1927, 1928. См. Bemerkung der Redaktion в работе Сколема 1934, стр. 161.
1933. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia philosophica **1** (1936, tr. grom Polish original, 1933), Engl. tr. in A. Tarski, Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford University Press, Oxford, 1956.
1954, 1955. Contributions to the theory of models, Proc. Akad. Wet. Amst., ser. A, **57**, 572—578; **58**, 56—64.
Tarski A., Mostowski A. and Robinson A. M.
1953. Undecidable Theories, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
Turing A. M.
1936, 1937. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem, Procc. Lond. Math. Soc. (2), **42**, 230—265, A correction, ibid., **43**, 544—546.
1939. Systems of logic based on ordinals, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **45**, 161—228.
Von Neumann J.
1951. The general and logical theory of automata, Cerebral Mechanisms in Behavior, The Hixon Symposium, p. 1—31 (editor, Jeffress, Lloyd A.), Wiley, N. Y.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ЧИСЛАМ *)

К. Рот

(Англия)

1. Пусть α — любое алгебраическое иррациональное число. Предположим, что существует бесконечно много рациональных чисел h/q, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q^k}. \tag{1}$$

В 1955 году я доказал, что в этом случае $k \leqslant 2$. Ниже я постараюсь дать набросок доказательства этого факта и скажу несколько слов о возможных обобщениях, а также об ограниченности применяемого метода.

Легко видеть, что, не уменьшая общности, α можно считать целым алгебраическим числом. Тем самым, мы будем предполагать, что число α является корнем многочлена

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{2}$$

с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом единица.

2. В ранних работах, посвященных описанной задаче, использовались многочлены от двух переменных. Уже давно стало ясно, что дальнейшее продвижение требует использования многочленов от большего числа переменных, а для достижения окончательного результата количество переменных должно быть весьма большим. Нетрудно сформулиро-

---

*) K. Roth, Rational approximations to algebraic numbers.

вать свойства, которыми должен обладать многочлен, способный служить поставленной цели.

Пусть $h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m$ — совокупность рациональных приближений к числу α, удовлетворяющих неравенству (1). Обозначим символом $Q(x_1, \ldots, x_m)$ некоторый многочлен с целыми коэффициентами, степень которого относительно переменной x_j не превосходит числа r_j (для всех индексов j). Тогда имеет место неравенство

$$\left| Q\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right) \right| \geqslant \frac{1}{P}, \tag{3}$$

где $P = q_1^{r_1} \ldots q_m^{r_m}$, конечно, при условии, что

$$Q\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right) \neq 0.$$

Пусть разложение значения $Q(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$ в ряд Тейлора по степеням разностей $h_1/q_1 - \alpha, \ldots, h_m/q_m - \alpha$ имеет вид

$$\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} Q_{i_1 \ldots i_m} \left(\frac{h_1}{q_1} - \alpha\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{h_m}{q_m} - \alpha\right)^{i_m}.$$

Предположим теперь, что многочлен Q обладает следующими свойствами:

A: $$\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} |Q_{i_1 \ldots i_m}| < P^{\Delta},$$

где Δ — некоторое малое число;

B: $Q_{i_1 \ldots i_m} = 0$ при всех $i_1, \ldots, i_m$, удовлетворяющих неравенствам

$$q_1^{i_1} \ldots q_m^{i_m} \leqslant P^{\varphi} \quad (\varphi > 0).$$

Тогда любой член, входящий в разложение Тейлора с ненулевым коэффициентом, оценивается величиной

$$\left| \frac{h_1}{q_1} - \alpha \right|^{i_1} \cdots \left| \frac{h_m}{q_m} - \alpha \right|^{i_m} < \frac{1}{\left(q_1^{i_1} \ldots q_m^{i_m}\right)^k} < \frac{1}{P^{k\varphi}},$$

так что

$$\left| Q\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right) \right| < \frac{1}{P^{k\varphi - \Delta}}. \tag{4}$$

Из сравнения неравенств (3) и (4) следует тогда, что

$$k < \frac{1+\Delta}{\varphi}. \tag{5}$$

Не нужно забывать, что для доказательства оценки (5), кроме условий **А** и **В**, нам пришлось использовать условие

С: $$Q\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right) \neq 0.$$

Мы докажем теорему, установив существование многочлена Q, который удовлетворяет условиям **А**, **В** и **С** и константа φ для которого близка к $^1/_2$. Для этой цели нам придется считать, что число m велико, и соответствующим образом подобрать приближения $h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m$. Только после этого мы выберем многочлен Q, который будет зависеть от выбранной системы приближений.

(При $m=2$ удается добиться неравенств В только с константой φ порядка $n^{-\frac{1}{2}}$, где n — степень числа α, что приводит к оценке вида $k < cn^{\frac{1}{2}}$.)

3. Логическая схема доказательства такова. Предположим, что $k > 2$; число m выберем достаточно большим и фиксируем его. Малое положительное число $\delta < 1/m$ будет также фиксировано вплоть до конца доказательства, когда мы устремим это число к нулю. Буквой Δ обозначим любую функцию от δ и m, стремящуюся к нулю, когда $\delta \to 0$ при фиксированном значении m.

Начнем с того, что из бесконечной последовательности приближений, удовлетворяющих неравенствам (1) (существование такой последовательности предполагается), выберем систему чисел $h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m$. Первое приближение выберем так, чтобы знаменатель q_1 был достаточно велик (точное неравенство выписывается в зависимости от m, δ, α), второе приближение — так, чтобы знаменатель q_2 был достаточно велик относительно q_1, и т. д. На самом деле нас устроят неравенства

$$\frac{\log q_j}{\log q_{j-1}} > \delta^{-1} \qquad (j=2, \ldots, m).$$

После этого выберем целые числа $r_1, \ldots, r_m$, достаточно большие в сравнении с числами $q_1, \ldots, q_m$ и удовлетворяющие неравенствам

$$q_1^{r_1} \leqslant q_j^{r_j} < q_1^{r_1\left(1+\frac{1}{10}\delta\right)}. \tag{6}$$

Произвести такой выбор нетрудно. Отметим следствие неравенств (6):

$$q_1^{mr_1} \leqslant P < q^{mr_1(1+\Delta)}. \tag{7}$$

Условие B принимает теперь такой вид: коэффициенты Тейлора $Q_{i_1 \ldots i_m}$ обращаются в нуль для всех систем индексов $i_1, \ldots, i_m$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{i_1}{r_1}+\ldots+\frac{i_1}{r_m} < m\varphi+\Delta. \tag{8}$$

4. Рассмотрим сначала доказательство существования многочлена Q^*, удовлетворяющего только условиям A и B (с константой φ, близкой к $^1/_2$). Это доказательство, в существенном принадлежащее Зигелю, основано на применении принципа Дирихле. Представляющий основную трудность вопрос о том, как удовлетворить также требованию C, мы пока оставим в стороне.

Положим $B_1=q_1^{\delta r_1}$ и рассмотрим совокупность всех многочленов $W(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми положительными коэффициентами, не превосходящими B_1, и таких, что степень по переменной x_j не превосходит числа r_j. Мы попытаемся отыскать в этой совокупности два таких многочлена W' и W'', что их производные порядка $i_1, \ldots, i_m$ совпадают в точке $x_1=\ldots=x_m=\alpha$ при всех $i_1, \ldots, i_m$, удовлетворяющих неравенству (8). Поскольку каждая такая производная имеет вид

$$A_0+A_1\alpha+\ldots+A_{n-1}\alpha^{n-1},$$

где $A_0, \ldots, A_{n-1}$ — целые числа, мы можем оценить количество возможных значений производной данного порядка $i_1, \ldots, i_m$. Оказывается, что это количество не превосходит числа $B_1^{n(1+3\delta)}$. Количество же многочленов W в рассматриваемой совокупности близко к B_1^r, где $r=(r_1+1)\ldots(r_m+1)$. Поэтому количество этих многочленов будет больше числа различных возможных систем значений производных, если количество систем индексов, удовлетворяющих неравенству (8) (при дополнительном условии, что каждый индекс i не превосходит числа r с тем же номером), окажется меньше числа, близкого к $r/\{n(1+3\delta)\}$. Можно показать, что число целых точек в ограниченной указанными неравенствами области не превосходит $\frac{2}{3} r/n$, если константа φ выбрана так, что выполняется условие

$$m\varphi + \Delta = \frac{1}{2} m - 3nm^{1/2}. \tag{9}$$

Многочлен $Q^* = W' - W''$ тогда в силу своего определения удовлетворяет условию B, а несложные оценки показывают, что условие A для него также выполнено. Кроме того, полагая $\delta \to 0$, мы получаем в пределе

$$\varphi = \frac{1}{2} - 3nm^{-1/2},$$

так что число φ мы можем считать сколь угодно близким к $1/2$, если количество переменных m велико. (Именно для того, чтобы иметь возможность выбрать φ близким к половине, нам и приходится работать с многочленами от многих переменных.)

5. Для отыскания многочлена Q, который удовлетворяет одновременно условиям A, B, C, мы испытаем производные только что построенного многочлена

$$Q = \frac{1}{j_1!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \cdots \frac{1}{j_m!}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{j_m} Q^*$$

не слишком высокого порядка. Мы хотим, чтобы многочлен Q не обращался в нуль в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$. «Порядок» производной мы будем измерять числом $j_1/r_1 + \ldots + j_m/r_m$. Замена многочлена Q^* его производной Q приведет к ослаблению условия B, но, поскольку порядок этой производной будет функцией типа Δ, это ослабление окажется несущественным при $\delta \to 0$. Некоторое изменение претерпит также условие A, но и оно будет незначительным. Существенным требованием теперь будет лишь выполнение условия C.

Существование такой производной порядка Δ установить нелегко. Впрочем, трудностей здесь и следовало ожидать, поскольку сам многочлен Q^* выбирался таким образом, чтобы его значение в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$ было возможно более мало.

На этом этапе доказательства удобно ввести понятие индекса данного многочлена в данной точке. Мы определяем индекс многочлена в точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ относительно положительных параметров $r_1, \ldots, r_m$ как наименьший порядок (в определенном выше смысле) производной этого многочлена, не обращающейся в нуль в рассматриваемой точке. Тем самым нам следует доказать, что индекс многочлена Q^* в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$ является функцией типа Δ.

Для того чтобы оценить сверху индекс многочлена Q^* от двух переменных в рациональной точке, известны два совершенно разных способа. Первый из них, принадлежащий Зигелю, является по своей природе алгебраическим. Он основан на том принципе, что при выполнении некоторых условий сумма индексов многочлена в конечном числе точек (не обязательно рациональных) оказывается ограниченной в функции степеней многочлена по входящим в него переменным. Поскольку многочлен Q^* удовлетворяет условию B (с соответствующей константой φ), его индекс в точке $(\alpha, \ldots, \alpha)$ и в сопряженных ей точках является в определенном смысле почти максимальным. Отсюда можно заключить, что в любой другой точке индекс многочлена Q^* мал. Мне, однако, не удалось обобщить этот метод на случай многочленов от более чем двух переменных.

Второй метод, принадлежащий Шнейдеру, является арифметическим по своей природе. Он основан на том принципе, что при некоторых условиях индекс многочлена в рациональной точке можно ограничить в функции величины коэффициентов этого многочлена. Поскольку коэффициенты многочлена Q^* не слишком велики, этот метод и приводит к желаемому результату.

В моем доказательстве используется подход Шнейдера для установления следующего факта.

Основная лемма. *Пусть* $0<\delta<m^{-1}$, *и пусть целые положительные числа* $r_1, \ldots, r_m$ *удовлетворяют неравенствам*

$$r_m>10\,\delta^{-1}, \quad \frac{r_{j-1}}{r_j}>\delta^{-1} \qquad (j=2, \ldots, m).$$

Пусть еще $q_1, \ldots, q_m$ — *целые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$q_1>c=c(m, \delta), \quad q_j^{r_j}\geqslant q_1^{r_1}.$$

Рассмотрим любой многочлен R, *не равный нулю тождественно, степень которого по переменной* x_j *не превосходит* r_j, *а все коэффициенты целы и по абсолютной величине не превосходят* $q_1^{\delta r_1}$. *Тогда индекс этого много-*

члена в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$ (h_i *взаимно просты с* q_i) *относительно совокупности* $r_1 \ldots, r_m$ *оценивается неравенством*

$$\text{индекс } R < 10^m \delta^{\left(\frac{1}{2}\right)^m}.$$

Этого утверждения достаточно для отыскания многочлена Q. Многочлен $R = Q^*$ удовлетворяет условиям леммы, из которой следует, что индекс Q^* в точке $\left(\frac{h_1}{q}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right)$ растет как Δ, что и требуется.

6. Доказательство этой леммы не зависит от предыдущих рассуждений, как это и должно быть, поскольку оно проводится индукцией по числу переменных, тогда как в остальной части доказательства теоремы число m остается фиксированным. Кроме того, лемму следует обобщить, чтобы иметь возможность провести индукцию.

Мы рассмотрим класс всех многочленов $R(x_1, \ldots, x_m)$, степень которых по переменной x_j не превосходит r_j, а все коэффициенты целы и не превосходят по модулю некоторого числа B. Нам удастся получить при некоторых условиях оценку сверху для индексов многочленов из этого класса в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_m/q_m)$ относительно системы чисел $r_1, \ldots$ $\ldots, r_m$. В ходе доказательства, которое проводится индукцией по m, нам придется рассматривать классы многочленов, определенные с помощью различных значений систем параметров. Последняя оценка и позволит установить требуемую лемму.

Случай $m = 1$ разбирается без труда. Предположим, что коэффициенты многочлена $R(x_1)$ по модулю не превосходят числа B. Если индекс этого многочлена в точке h_1/q_1 относительно числа r_1 равен θ_1, то многочлен $R(x_1)$ делится на

$$\left(x_1 - \frac{h_1}{q_1}\right)^{\theta_1 r_1}.$$

Из теоремы Гаусса о разложении многочленов с целыми коэффициентами в произведение многочленов с рациональными коэффициентами следует, что

$$R(x_1) = (q_1 x_1 - h_1)^{\theta_1 r_1} R^*(x_1),$$

где $R^*(x_1)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Следовательно, старший коэффициент многочлена R^*

делится на $q_1^{\theta_1 r_1}$, так что

$$q_1^{\theta_1 r_1} \leqslant B, \quad \theta_1 \leqslant \frac{\log B}{r_1 \log q_1}.$$

Это неравенство и дает верхнюю оценку нужного нам вида в случае $m=1$.

Предположим теперь, что оценки такого вида уже получены для всех значений $m=1, \ldots, p-1$, где $p \geqslant 2$. Мы хотим вывести отсюда верхнюю оценку индексов многочленов от p переменных, принадлежащих классам описанного вида.

Рассмотрим все представления заданного многочлена $R(x_1, \ldots, x_p)$ в виде

$$R = \varphi_0(x_p)\psi_0(x_1, \ldots, x_{p-1}) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{l-1}(x_p)\psi_{l-1}(x_1, \ldots, x_{p-1}), \quad (10)$$

где φ_ν и ψ_ν — многочлены с рациональными коэффициентами, степени которых относительно переменных x_j не превосходят r_j. Такие представления существуют, например: $l-1=r_p$ и $\varphi_\nu(x_p)=x_p^\nu$. Из множества всех таких представлений выберем одно, для которого число l принимает наименьшее возможное значение.

В этом представлении многочлены φ_ν образуют линейно независимую систему; то же относится и к многочленам ψ_ν. Отсюда следует, что вронскиан $W(x_p)$ многочленов φ и некоторый обобщенный вронскиан $G(x_1, \ldots, x_{p-1})$ многочленов ψ отличны от нуля. Из равенства (10) и правила умножения определителей следует, что произведение

$$G(x_1, \ldots, x_{p-1})\,W(x_p) = F(x_1, \ldots, x_p) \quad (11)$$

представляет собой некоторый определитель, все элементы которого имеют вид

$$R_{j_1 \ldots j_p}(x_1, \ldots, x_p).$$

Поскольку коэффициенты многочленов G и W рациональны, существует равносильное разложение многочлена F:

$$F(x_1, \ldots, x_p) = U(x_1, \ldots, x_{p-1})\,V(x_p) \quad (12)$$

на многочлены с целыми коэффициентами U и V.

Если предположить, что коэффициенты многочлена R по модулю не превосходят числа B, можно получить верхнюю оценку для коэффициентов многочлена F, из которой в свою очередь будут следовать некоторые оценки сверху для коэффициентов многочленов U и V. Индуктивное предположение позволит найти оценки сверху для индексов многочлена U в точке $(h_1/q_1, \ldots, h_{p-1}/q_{p-1})$ и многочлена V в точке h_p/q_p. Наконец, с помощью мультипликативного свойства индексов из равенства (12) окажется возможным получить некоторую верхнюю оценку индекса многочлена F в точке $h_1/q_1, \ldots, h_p/q_p$.

С другой стороны, многочлен F получился из многочлена R с помощью операций дифференцирования, сложения и умножения. Используя простые свойства индекса, показывающие его поведение при применении к многочлену этих операций, можно получить нижнюю оценку для индекса многочлена F в функции от индекса многочлена R. С ее помощью из оценки сверху индекса многочлена F можно получить оценку сверху индекса многочлена R.

Этот метод позволяет провести индукцию по m. В приведенном изложении подробности его слегка упрощены.

На этом мы закончим описание доказательства нашей теоремы. Отметим, что доказательство существования многочлена Q, удовлетворяющего условиям A, B, C, является чрезвычайно непрямым. Было бы весьма интересно построить такой многочлен непосредственно.

7. Формулировку доказанной теоремы можно обобщить и расширить в различных направлениях. Например, вместо рассмотрения рациональных приближений к алгебраическому числу α мы могли бы рассматривать приближения алгебраического числа α алгебраическими же числами β, которые либо (а) принадлежат фиксированному полю алгебраических чисел, либо (б) имеют фиксированную степень. В каждом из этих случаев точность приближения измеряется в функции числа $H(\beta)$ — максимума абсолютных значений целых рациональных коэффициентов примитивного многочлена, корнем которого является число β.

Полученные Зигелем результаты можно улучшить в обоих случаях. В случае (а) установлен наилучший возможный результат *). В случае (б) оценка Зигеля нетривиальна, лишь если степень числа β не слишком велика в сравнении со

---

*) См. W. J. L. Veque, Topics in number theory, Addison, Wesley, 1956.

степенью числа α. Я не знаю, как можно получить улучшение этого результата, которое не было бы подвержено подобному же ограничению.

Можно также распространить нашу теорему на p-адические и g-адические числовые поля*); это было сделано Риду и Малером соответственно.

Из этой теоремы можно вывести различные следствия. Например, при данных α и $k > 2$ можно оценить число решений неравенств (1). Это было сделано Давенпортом и мной. В результате получаются оценки количества решений некоторых диофантовых уравнений.

Описанный метод, однако, подвержен одному весьма жесткому ограничению, связанному с тем, что существенную роль в доказательстве играет выбор приближений $h_1/q_1, \ldots$ $\ldots, h_m/q_m$. По этой причине оказывается невозможным ответить на вопросы следующего типа:

(I) Можно ли выразить в функции чисел α и k верхнюю границу знаменателей q, соответствующих конечному множеству решений h/q неравенств (1) (при $k > 2$)?

(II) Можно ли доказать, что неравенство

$$\left| \alpha - \frac{h}{q} \right| < q^{-(2+f(q))},$$

где $f(q)$ — какая-нибудь конкретная функция от q, стремящаяся к нулю при $q \to \infty$, имеет лишь конечное число решений?

Наравенство Лиувилля

$$\left| \alpha - \frac{h}{q} \right| > c(\alpha)\, q^{-n}$$

остается единственным известным результатом этого типа для которого можно указать явное значение константы.

Наш метод может пролить свет на эти вопросы лишь при дополнительных предположениях о величине интервалов между последовательными знаменателями решений. Возможно, что для получения новой информации об этих задачах потребуется введение совершенно новых идей.

---

*) Точнее говоря, на случай p-адитической метрики поля алгебраических чисел и на случай произведения конечного числа таких метрик. (*Прим. перев.*)

Важная и нерешенная задача состоит в получении теоремы, подобной нашей, но для случая одновременного приближения двух или большего количества алгебраических чисел рациональными числами с общим знаменателем. Для двух алгебраических чисел (в определенном смысле независимых) следует ожидать, что неравенства

$$\left|\alpha_1 - \frac{h}{q}\right| < q^{-k}, \quad \left|\alpha_2 - \frac{h}{q}\right| < q^{-k}$$

при любом $k > \frac{3}{2}$ могут иметь только конечное число решений. В этом направлении, однако, практически ничего неизвестно.

Полное решение задачи об одновременном приближении повлекло бы за собой полное решение ряда других задач, например случая (б) самой первой задачи, рассматривавшейся в этом пункте.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ *)

М. Шиффер

(США)

1. Введение. Одной из основных проблем в классической теории конформного отображения является изучение различных типов канонических областей, на которые любая произвольно заданная в комплексной плоскости область может быть отображена конформно. Следовательно, первым вопросом, который здесь возникает, является вопрос о существовании канонических отображающих функций различных типов. Сначала для установления необходимых теорем существования были применены методы вариационного исчисления. Хорошо известна роль принципа Дирихле в первоначально предпринятом доказательстве римановой теоремы об отображении для односвязных областей, равно как и влияние имевшихся вначале в этом подходе недостатков на критический период развития вариационного исчисления и на развитие мощных современных прямых методов в этой важной области анализа. Доказательства существования для канонических конформных отображений, опирающиеся на экстремальные принципы, такие, как принцип Дирихле, потому так трудны, что они характеризуют искомую отображающую функцию, которая является аналитической и однолистной, как экстремальную функцию в некотором гораздо более широком классе допустимых функций сравнения. Последний класс настолько широк, что основная затрата

*) M. Schiffer, Extremum problems and variational methods in conformal mapping.

труда при доказательстве идет на установление существования экстремальной функции рассматриваемой проблемы.

Теория конформного отображения получила значительное развитие в связи с тем, что было начато систематическое изучение однолистных аналитических функций в заданной области, т. е. тех функций, которые реализуют различные конформные отображения заданной области. Основной результат этой теории состоит в том, что все однолистные функции в заданной области образуют нормальное семейство. Из этого факта легко получается следствие, что для каждой разумно поставленной экстремальной проблемы в семействе однолистных функций существует по крайней мере один элемент этого семейства, который реализует рассматриваемый экстремум [20]. На основе этой теории возможно получить весьма изящные доказательства для римановой теоремы об отображении и для существования многих других канонических отображений. Характерная трудность этого нового подхода, т. е. изучения экстремальных проблем в семействе однолистных функций, состоит в том, что однолистные функции не образуют никакого линейного пространства; следовательно, совсем не просто характеризовать экстремальную функцию посредством сравнения ее с соседними функциями при помощи бесконечно малой вариации. В каждом частном доказательстве существования приходилось изобретать специальный метод сравнения, и существенный шаг всего доказательства состоял в характеризации экстремальной функции при помощи этой специально выбранной вариации.

В семействе однолистных функций возможно построить систематическое исчисление бесконечно малых. В 1923 году Лёвнер дал ставшее теперь классическим дифференциальное уравнение в частных производных, которое имеет в качестве решений однопараметрические семейства однолистных функций, допускающие очень простую геометрическую интерпретацию [18]. Я показал в 1938 году, что однолистные экстремальные функции во многих случаях должны удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению первого порядка, и указал стандартный вариационный процесс для установления этих дифференциальных уравнений [26]. В последующие годы Шеффер и Спенсер применили этот вариационный процесс систематически к проблеме коэффициентов однолистных в единичном круге функций и развили обширную теорию этого вопроса [22, 23, 24]. Голузин применил те же вариационные методы к многочисленным вопросам геометрической теории функций [7, 8]. Значение экстремальных проблем для общей теории конформного отображения очевидно. Большое количество возможных конформных отображений заданной области затрудняет изучение всех этих отображений; однако отдельные важные отображения могут быть выделены как решения некоторых экстремальных задач и могут быть описаны геометрически и аналитически именно в силу их экстремального свойства. Остающаяся аморфная масса конформных отображений должна подчиняться всем неравенствам, которые вытекают из решений различных экстремальных проблем, и, таким образом, может быть, хотя бы частично, охарактеризована.

В настоящей статье мы попытаемся дать краткий обзор основных вариационных методов применительно к семейству однолистных функций. Гибкость этих методов мы покажем на немногих важных экстремальных проблемах. Оказывается, что вариационный метод очень часто дает изящное и полезное преобразование экстремальной проблемы, но приводит иногда к функциональным уравнениям, решение которых снова представляет собой большую проблему. Ясно, что эта область исследования ни в какой мере не является полностью обследованной и исчерпанной; поскольку она представляет интерес как с точки зрения чистой, так и с точки зрения прикладной математики, она заслуживает непрерывного внимания математиков.

2. Вариация функции Грина. Простейший, по-видимому, путь к вариационному исчислению для однолистных функций проходит через теорию функции Грина области и ее вариационную формулу. Пусть D — область в комплексной плоскости z, граница которой C состоит из n замкнутых аналитических кривых, и пусть $g(z, \zeta)$ — функция Грина этой области с точкой источника ζ. Рассмотрим конформное преобразование

$$z^*(z) = z + \frac{e^{i\alpha}\rho^2}{z - z_0} \qquad (z_0 \in D,\ \rho > 0). \tag{1}$$

Это отображение однолистно в области $|z - z_0| > \rho$; следовательно, для достаточно малых ρ оно однолистно на C

и преобразует C в новое множество C^*, состоящее из n замкнутых аналитических кривых, ограничивающих новую область D^*. Обозначим функцию Грина области D^* через $g^*(z, \zeta)$ и попытаемся выразить ее через $g(z, \zeta)$. Заметим, что $\gamma(z, \zeta) = g^*(z^*(z), \zeta^*(\zeta))$ есть гармоническая функция в области D_ρ, которая получается из D удалением круга $|z - z_0| < \rho$. Функция $\gamma(z, \zeta)$ имеет полюс при $z = \zeta$ и обращается в нуль на граничных кривых C области D_ρ. Выберем в D_ρ две фиксированные точки ζ и η и применим тождество Грина в форме

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C+c} \left[\frac{\partial}{\partial n} g(z, \eta)\gamma(z, \zeta) - g(z, \eta)\frac{\partial}{\partial n}\gamma(z, \zeta)\right] ds =$$
$$= \gamma(\zeta, \eta) - g(\zeta, \eta). \quad (2)$$

Здесь c обозначает малую окружность $|z - z_0| = \rho$. Так как g и γ обращаются в нуль на C, интегрирование следует производить только по окружности c.

Чтобы упростить выражение (2), введем аналитические функции переменного z, $p(z, \eta)$ и $p^*(z, \zeta)$, действительными частями которых являются соответственно $g(z, \eta)$ и $g^*(z, \zeta)$. Эти функции имеют логарифмические полюсы в точках η и ζ и имеют также чисто мнимые периоды, когда z пробегает какой-либо граничный континуум. Легко представить теперь выражение (2) в виде

$$g^*(\zeta^*, \eta^*) - g(\zeta, \eta) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c p^*(z^*, \zeta)\, dp(z, \eta)\right\}. \quad (3)$$

Это интегральное уравнение относительно $g^*(\zeta^*, \eta^*)$ с известной функцией $g(\zeta, \eta)$ должно выполняться и для областей D сколь угодно сложного вида, обладающих функцией Грина. В самом деле, всякая такая область D может быть сколь угодно точно приближена областями D_ν с аналитическими границами C_ν, для которых тождество (3) справедливо. Если D и D_ν переходят при вариации (1) в области D^* и D_ν^*, то D_ν^* будут также приближать D^*. Так как тождество (3) имеет место для всех приближающих областей и так как в точках ζ, η и на c функции Грина областей D_ν и D_ν^* сходятся равномерно к функциям Грина областей D и D^* соответственно, формула (3) остается справедливой и в пределе, и она, таким образом, доказана в общем случае [31].

Применим формулу Тейлора в форме

$$p^*(z^*, \zeta^*) = p^*(z, \zeta^*) + p^{*\prime}(z, \zeta^*)\frac{e^{i\alpha}\rho^2}{z - z_0} + O(\rho^4), \quad (4)$$

где остаточный член $O(\rho^4)$ может быть равномерно оценен для всех областей D, содержащих фиксированную подобласть Δ, которая в свою очередь содержит точку ζ и окружность c. Подставляя (4) в (3) и используя теорему о вычетах, после простого преобразования получим

$$g^*(\zeta^*, \eta^*) = g(\zeta, \eta) + \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}\rho^2 p'(z_0, \zeta)\, p'(z_0, \eta)\} + O(\rho^4), \quad (5)$$

где $O(\rho^4)$ может быть оценен, как и выше. Наконец, используя опять теорему Тейлора, можно преобразовать (5) к виду [27, 28]

$$g^*(\zeta, \eta) = g(\zeta, \eta) +$$
$$+ \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\rho^2\left[p'(z_0, \zeta)\, p'(z_0, \eta) - \frac{p'(\zeta, \eta)}{\zeta - z_0} - \frac{p'(\eta, \zeta)}{\eta - z_0}\right]\right\} + O(\rho^4). \quad (6)$$

В предыдущем изложении мы ограничились вариацией специального вида (1) только ради простоты изложения. Ясно, что соответствующую формулу можно установить для всякой вариации вида $z^* = z + \rho^2 v(z)$, где $v(z)$ — аналитическая функция на границе варьируемой области. С другой стороны, такая вариация общего вида может быть приближена сколь угодно точно суперпозициями элементарных вариаций типа (1). На самом деле для большинства приложений формул (1) и (6) вполне достаточно.

Выражение (6) можно замечательным образом преобразовать, если граница C области D представляет собой множество гладких кривых. В самом деле, (6) можно представить в виде

$$g^*(\zeta, \eta) - g(\zeta, \eta) =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\rho^2 \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{p'(z, \zeta)\, p'(z, \eta)}{z - z_0}\, dz\right\} + O(\rho^4). \quad (7)$$

Мы замечаем, что действительная часть $p(z, \zeta)$ есть функция Грина $g(z, \zeta)$, и она, следовательно, обращается в нуль на C. Пусть $z' = dz/ds$ — касательный вектор к C в точке $z(s)$; легко видеть, что

$$p'(z, \zeta)\, z' = -i\,\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n},$$

и следовательно, (7) можно представить в действительной форме

$$g(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \frac{\partial g(z, \eta)}{\partial n_z} \delta n \, ds, \tag{8}$$

где

$$\delta n = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{iz'} \frac{e^{i\alpha}\rho^2}{z - z_0}\right\}. \tag{9}$$

Очевидно, что δn представляет собой сдвиг вдоль внутренней нормали граничной точки $z \in C$ при вариации (1).

При помощи линейных суперпозиций элементарных вариаций (1) можно доказать формулу (8) для весьма общих δn-вариаций граничных кривых C. Эта формула была указана Адамаром в 1908 году [11]; она весьма часто используется в прикладной математике по причине большой интуитивной и геометрической значимости нормального смещения граничных точек. Мы можем указать, в частности, на систематическое использование деформаций границы Лаврентьевым во многих проблемах гидродинамики и конформного отображения [16, 17].

Если D — односвязная область, то существует тесная связь между функцией Грина области D и однолистной функцией $\varphi(z)$, отображающей D на внешность единичного круга. В самом деле, мы имеем

$$g(z, \zeta) = \log\left|\frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}{\varphi(z) - \varphi(\zeta)}\right|. \tag{10}$$

Жюлиа использовал эту взаимосвязь для того, чтобы вывести из формулы Адамара (8) вариационную формулу для однолистных функций [15]. Эта весьма наглядная и изящная формула не может быть, однако, применена непосредственно при изучении экстремальных проблем в теории конформного отображения. В самом деле, a priori нельзя предполагать, что экстремальная область D будет обладать достаточно гладкой границей C, допускающей вариацию типа Адамара—Жюлиа.

3. Бесконечно малые вариации и экстремальные проблемы. Теперь мы в состоянии построить при помощи основной формулы (6) в любой заданной области D однолистные отображения, сколь угодно близкие к тождественному. Следует только предположить, что граница C области D

содержит невырождающийся континуум Г. Пусть $D(\Gamma)$ — область плоскости z, содержащая область D и бесконечно удаленную точку, границу которой составляет континуум Г; пусть $g(z, \zeta)$ — функция Грина области $D(\Gamma)$. Выберем произвольную, но фиксированную точку $z_0 \in D$ и подвергнем $D(\Gamma)$ вариации (1), которая преобразует $D(\Gamma)$ в варьированную область $D(\Gamma^*)$ с функцией Грина $g^*(z, \zeta)$. Связь между $g^*(z, \zeta)$ и $g(z, \zeta)$ дается вариационной формулой (6).

Пусть функция $w = \varphi(z)$ однолистна в $D(\Gamma)$, нормирована при $z = \infty$ условием $\varphi'(\infty) = 1$, и пусть она отображает $D(\Gamma)$ на область $|w| > 1$. Аналогичным образом мы определяем функцию $w = \varphi^*(z)$ относительно области $D(\Gamma^*)$. Из выражения (10), очевидно, получаем

$$g(z, \infty) = \log|\varphi(z)|, \quad g^*(z, \infty) = \log|\varphi^*(z)|; \tag{11}$$

эти выражения позволяют связать $\varphi^*(z)$ с $\varphi(z)$ при помощи формулы (6).

Функция

$$v(z) = \varphi^{*-1}[\varphi(z)] \tag{12}$$

аналитическая и однолистная в $D(\Gamma)$, а следовательно, и в D. Простое вычисление, использующее формулы (6) и (11), показывает, что

$$v(z) = z + e^{i\alpha}\rho^2\left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{[\varphi'(z_0)]^2\varphi(z)}{\varphi'(z)\varphi(z_0)[\varphi(z) - \varphi(z_0)]}\right] + \\ + e^{-i\alpha}\rho^2\frac{\overline{[\varphi'(z_0)]^2}[\varphi(z)]^2}{\varphi'(z)\overline{\varphi(z_0)}[1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)]} + O(\rho^4). \tag{13}$$

Так как ρ может быть взято сколь угодно малым, (13) дает представление широкого класса однолистных вариаций рассматриваемой области D. Мы покажем теперь, что этого множества вариаций достаточно, вообще говоря, чтобы охарактеризовать экстремальные области для широкого класса экстремальных проблем, относящихся к семейству однолистных функций.

Мы будем рассматривать экстремальные проблемы следующего типа. Пусть T — область комплексной плоскости t, содержащая бесконечно удаленную точку и ограниченная аналитическими кривыми. Обозначим через F семейство всех аналитических однолистных в T функций $f(t)$, имеющих простой полюс при $t = \infty$ и нормированных условием $f'(\infty) = 1$.

Пусть $\varphi[f]$ — действительный функционал, определенный на всех аналитических функциях $f(t)$ в T. Предположим, что $\varphi[f]$ дифференцируем в том смысле, что для произвольной аналитической функции $g(t)$, определенной в T, выполняется соотношение

$$\varphi[f+\varepsilon g]=\varphi[f]+\operatorname{Re}\{\varepsilon\psi[f, g]\}+O(\varepsilon^2), \tag{14}$$

где ψ — комплексный функционал от f и g, линейный по g. Мы предполагаем, что остаточный член $O(\varepsilon^2)$ можно равномерно оценить для всех аналитических функций $g(t)$, которые равномерно ограничены в некоторой специальной подобласти T. Таким образом, мы требуем, чтобы для $\varphi[f]$ существовал дифференциал Гато и выполнялись вышеуказанные дополнительные условия.

Предположим также, что $\varphi[f]$ имеет верхнюю грань на семействе F. Тогда вследствие нормальности этого семейства легко показать, что должны существовать функции $f(t)\in F$, для которых $\varphi[f]$ достигает своего наибольшего значения на F. Каждую экстремальную функцию можно характеризовать, подвергая ее бесконечно малым вариациям и сравнивая $\varphi[f]$ со значениями функционала для варьированных однолистных элементов семейства. В самом деле, при помощи функций (13) можно построить функции сравнения в F:

$$f^*(t)=v[f(t)]\,[v'(\infty)]^{-1}, \tag{15}$$

где функция $z=f(t)$ отображает область T на экстремальную область D в плоскости z. Простое вычисление дает

$$\varphi[f^*]=\varphi[f]+\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}\rho^2A+e^{-i\alpha}\rho^2B\}+O(\rho^4), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} A&=\psi\left[z, \frac{1}{z-z_0}-\frac{[\varphi'(z_0)]^2\varphi(z)}{\varphi'(z)\varphi(z_0)[\varphi(z)-\varphi(z_0)]}\right],\\ B&=\psi\left[z, \frac{\overline{[\varphi'(z_0)]^2}[\varphi(z)]^2}{\varphi'(z)\overline{\varphi(z_0)}[1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)]}+\frac{\overline{[\varphi'(z_0)]^2}}{[\varphi(z_0)]^2}z\right] \end{aligned} \tag{17}$$

$$(z=f(t)).$$

Так как экстремальное свойство f требует, чтобы выполнялось неравенство $\varphi[f^*]\leqslant\varphi[f]$, и так как числа ρ и $e^{i\alpha}$ находятся в нашем распоряжении, нетрудно заключить, что будет $A+\overline{B}=0$, т. е.

$$\psi\left[f(t), \frac{1}{f(t)-z_0}\right]\frac{[\varphi(z_0)]^2}{[\varphi'(z_0)]^2}=\overline{\psi\left[z, \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}-z\right]}+$$

$$+\psi\left[z, \frac{\varphi(z)\varphi(z_0)}{\varphi'(z)[\varphi(z)-\varphi(z_0)]}\right]+\psi\left[z, \frac{\varphi(z)\overline{[\varphi(z_0)]}^{-1}}{\varphi'(z)[\varphi(z)-\overline{[\varphi(z_0)]}^{-1}]}\right]. \quad (18)$$

Прежде чем обсуждать следствия, вытекающие из соотношения (18), мы введем еще некоторые элементарные вариации в F, которые позволят нам упростить соотношение (18). Отобразим $D(\Gamma)$ на область $|w|>1$ при помощи функции $w=\varphi(z)$; совершим затем поворот $w_1=e^{i\alpha}w$ и вернемся в плоскость z при помощи функции $\varphi^{-1}(w_1)$. Таким образом, функция

$$v_1(z)=e^{-i\varepsilon}\varphi^{-1}[e^{i\varepsilon}\varphi(z)] \quad (19)$$

будет однолистной в $D(\Gamma)$, а следовательно, и в D. Для малых ε справедливо разложение в ряд по степеням ε:

$$v_1(z)=z+i\varepsilon\left[\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}-z\right]+O(\varepsilon^2). \quad (20)$$

Так как $f^*(t)=v_1[f(t)]$ есть допустимая функция сравнения в F, из экстремального свойства $f(t)$ и из произвольности выбора действительного параметра ε легко выводим, что

$$\operatorname{Im}\left\{\psi\left[z, \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}-z\right]\right\}=0. \quad (21)$$

Другую возможную бесконечно малую вариацию получим, полагая

$$v_2(z)=(1+\varepsilon)^{-1}\varphi^{-1}[(1+\varepsilon)\varphi(z)] \quad (\varepsilon>0). \quad (22)$$

В самом деле, можно отобразить $D(\Gamma)$ на область $|w|>1$, увеличить радиус единичного круга в отношении $1+\varepsilon$ и вернуться в плоскость z при помощи функции $\varphi^{-1}(w)$. Функция $f^*(t)=v_2[f(t)]$ также принадлежит F, и из экстремального свойства $f(t)$ при помощи (21) получаем неравенство

$$\psi\left[z, \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}-z\right]\leqslant 0. \quad (23)$$

Вернемся теперь к формуле (18) и заметим, что в силу (21)

$$\operatorname{Im}\left\{\lim_{z_0\to\Gamma}\psi\left[f(t), \frac{1}{f(t)-z_0}\right]\frac{[\varphi(z_0)]^2}{[\psi'(z_0)]^2}\right\}=0. \quad (24)$$

Для упрощения рассуждений предположим, что выражение

$$\psi\left[z, \frac{1}{z-z_0}\right] = W(z_0)$$

есть мероморфная функция от z_0; именно так обстоит дело во многих приложениях. Положим $z = \chi(w)$, где χ — обратная функция для $w = \varphi(z)$. Для функции $\chi(w)$, аналитической в области $|w| > 1$ и отображающей эту область на $D(\Gamma)$, из (24) получаем граничное соотношение

$$\operatorname{Im}\{\lim_{|w|\to 1} W[\chi(w)]\, w^2 [\chi'(w)]^2\} = 0. \tag{25}$$

В силу принципа симметрии Шварца функцию $W[\chi(w)]\, w^2 \times \times [\chi'(w)]^2$ можно аналитически продолжить в область $|w| \leqslant 1$. Таким образом, функция $\chi(w)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка с аналитическими коэффициентами во всей плоскости w. Отсюда следует, что Γ состоит из аналитических дуг и то же самое заключение верно для границы C экстремальной области D: *C состоит из аналитических дуг.*

Чтобы закончить доказательство, нам необходима последняя элементарная вариация. Отобразим опять $D(\Gamma)$ на область $|w| > 1$ при помощи функции $\varphi(z)$. Функция

$$\omega = p(w) = w + \frac{w_0^2}{w} \qquad (|w_0| = 1) \tag{26}$$

отображает область $|w| > 1$ на плоскость ω с разрезом вдоль отрезка от $-2w_0$ до $+2w_0$. Далее, легко видеть, что при $\varepsilon > 0$ функция

$$w_1 = p^{-1}[(1+\varepsilon)\, p(w) + 2\varepsilon w_0] = \\ = w + \varepsilon \frac{w(w+w_0)}{w-w_0} + O(\varepsilon^2) \tag{27}$$

отображает область $|w| > 1$ на такую же область, но с выкинутым малым радиальным отрезком, идущим от граничной точки w_0. Функция

$$v_3(z) = (1+\varepsilon)^{-1} \varphi^{-1}\left[\varphi(z) + \varepsilon \frac{\varphi(z)[\varphi(z)+\varphi(z_0)]}{\varphi(z)-\varphi(z_0)} + O(\varepsilon^2)\right] = \\ = z + \varepsilon\left[\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} \frac{\varphi(z)+\varphi(z_0)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)} - z\right] + O(\varepsilon^2) \tag{28}$$

$$(z_0 \in \Gamma)$$

нормирована в бесконечности и однолистна в D. Следовательно, $f^*(t)=v_3[f(t)]$ снова является функцией сравнения в нашей экстремальной проблеме, а значит,

$$\operatorname{Re}\left\{\psi\left[z,\ \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}\frac{\varphi(z)+\varphi(z_0)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}-z\right]\right\}\leqslant 0. \tag{29}$$

Заметим, однако, что левая часть неравенства (29) совпадает с крайним членом правой части (18), так как $z_0\in\Gamma$. Следовательно, мы доказали неравенство

$$\psi\left[f(t),\ \frac{1}{f(t)-z_0}\right]\frac{[\varphi(z_0)]^2}{[\varphi'(z_0)]^2}\leqslant 0 \qquad (z_0\in\Gamma). \tag{30}$$

Поскольку $|\varphi(z)|=1$ при $z\in\Gamma$, мы имеем $\operatorname{Re}\{\log\varphi(z)\}=0$ на Γ и, следовательно, на каждой аналитической дуге Γ справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}\left\{z'\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right\}=0, \qquad z'=\frac{dz}{ds}. \tag{31}$$

Таким образом, (30) можно выразить также в такой форме:

$$\psi\left[f(t),\ \frac{1}{f(t)-z}\right]\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\geqslant 0 \quad \text{на } C. \tag{32}$$

В этой окончательной форме характеристика экстремальной области не зависит от выбора подконтинуума Γ. Граничные дуги C определяются из дифференциального уравнения первого порядка, в которое входит определенная выше мероморфная функция $W(z)$.

При наших предположениях относительно функционала $\psi[z,\ 1/(z-z_0)]$ легко доказать, что граница экстремальной области не может содержать изолированных точек. В самом деле, пусть z_0 — изолированная точка границы экстремальной области D. В этом случае само отображение (1) при достаточно малом ρ будет допустимой однолистной вариацией и экстремальное свойство $f(t)$ влечет неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\rho^2\psi\left[z,\ \frac{1}{z-z_0}\right]\right\}+O(\rho^4)\leqslant 0, \tag{33}$$

откуда легко получаем, что

$$\psi\left[z,\ \frac{1}{z-z_0}\right]=0. \tag{34}$$

Но если как у нас и предполагается, ψ есть специальная мероморфная функция $W(z_0)$, не тождественно равная нулю, то этот результат невозможен, так как из (34) вытекало бы в силу аналитического продолжения, что $W(z_0) \equiv 0$ [19]. Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема. *Экстремальной областью экстремальной проблемы* $\varphi[f] = \max$ *в семействе* F *является область, ограниченная разрезами вдоль аналитических дуг. Каждая из этих дуг удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\psi\left[f(t), \frac{1}{f(t) - z(\tau)}\right]\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = 1, \tag{35}$$

где τ — *надлежащим образом выбранный действительный параметр на кривой.*

Эта теорема первоначально была доказана [26] при помощи довольно глубоких теорем из теории меры. Как показано здесь, ее можно вывести элементарно при помощи вариационной формулы для функции Грина. Она позволяет дать систематическую и единую трактовку многочисленным экстремальным проблемам конформного отображения. Экстремальная область может быть определена либо посредством интегрирования дифференциального уравнения (35) для граничных разрезов, либо решением дифференциального уравнения, получаемого из (25), для функций $\chi(w)$, отображающих область $|w| > 1$ на области $D(\Gamma)$. Последний процесс особенно удобен, когда исходная область T односвязна.

4. Проблема коэффициентов. Несомненно, что наиболее изученной экстремальной проблемой в теории конформного отображения является проблема коэффициентов для функций, однолистных в единичном круге. Мы рассматриваем все степенные ряды

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{36}$$

которые сходятся при $|z| < 1$ и представляют однолистные функции. Бибербах выдвинул предположение

$$|a_n| \leq n. \tag{37}$$

Так как «функция Кёбе»

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots \tag{38}$$

в самом деле является таким однолистным степенным рядом, она представляется решением бесконечного множества экстремальных проблем. Вследствие своей простой формулировки предположение (37) привлекло внимание многих аналитиков. Бибербах сам доказал неравенство (37) в 1916 году для $n=2$ [2]; Лёвнер доказал его для $n=3$ в 1923 году [18], а Гарабедиан и Шиффер доказали для $n=4$ в 1955 году [5]. Эти доказательства следует рассматривать как пробные камни для наших методов оперирования с экстремальными проблемами конформного отображения, и основное значение проблемы коэффициентов в действительности состоит в том, что она бросает вызов различным нашим методам в этой области. Мы дадим краткий обзор вариационных методов, применяемых в этой проблеме.

Определим последовательность полиномов $P_n(x)$ степеней $n-1$ посредством образующей функции

$$\frac{f(z)}{1-xf(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+P_n(x)]\,z^n \qquad (P_1(x)=0). \tag{39}$$

Выпишем несколько первых полиномов:

$$P_2(x)=x, \qquad P_3(x)=2a_2x+x^2,$$
$$P_4(x)=(2a_3+a_2^2)\,x+3a_2x^2+x^3. \tag{39'}$$

Простое применение рассуждений предыдущего пункта приводит к следующему результату. Пусть $f(z)$ — однолистная функция, максимизирующая $|a_n|$; можно сделать допустимое предположение $a_n>0$. Тогда $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [27]

$$\frac{z^2[f'(z)]^2}{[f(z)]^2}P_n\left[\frac{1}{f(z)}\right]=\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{2a_2}{z^{n-2}}+\ldots+\frac{(n-1)\,a_{n-1}}{z}+$$
$$+(n-1)\,a_n+(n-1)\,\bar{a}_{n-1}z+\ldots+2\bar{a}_2z^{n-2}+z^{n-1}. \tag{40}$$

Правая часть (40), а также и полином $P_n(x)$ зависят от коэффициентов неизвестной функции $f(z)$; следовательно, (40) представляет собой довольно сложное функциональное уравнение для искомой экстремальной функции, которое до сих пор удалось решить только для случаев $n\leqslant 4$.

К решению функционального уравнения (40) можно подойти следующим образом. Во всех случаях $n\leqslant 4$ легко показать, что экстремальная функция $w=f(z)$ отображает область $|z|<1$ на плоскость w, разрезанную вдоль единственной аналитической дуги Г, уходящей в бесконечность. Мы рассмотрим теперь аналитические функции

$$w=f(z, t)=e^t[z+a_2(t)z^2+\ldots+a_n(t)z^n+\ldots], \tag{41}$$

отображающие область $|z|<1$ на плоскость w, разрезанную вдоль бесконечных поддуг Γ_t дуги Г. Из (40) можно вывести, что Г удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{[w'(\tau)]^2}{[w(\tau)]^2}P_n\left[\frac{1}{w(\tau)}\right]+1=0, \tag{42}$$

где τ — действительный параметр, и очевидно, что поддуги Γ_t удовлетворяют тому же уравнению. Используя затем принцип симметрии Шварца, можно показать, что функции $f(z, t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям, весьма похожим на уравнение (40), именно

$$\frac{z^2[f'(z, t)]^2}{[f(z, t)]^2}P_n\left[\frac{1}{f(z, t)}\right]=\sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1}A_\nu(t)z^\nu=q(z, t), \tag{43}$$

$$A_{-\nu}(t)=\overline{A_\nu(t)}.$$

Уравнение (43) можно преобразовать к виду

$$\int\limits_{f(z_0, t)}^{f(z, t)}\sqrt{P_n\left(\frac{1}{w}\right)}\frac{dw}{w}=\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{q(z, t)}\frac{dz}{z}. \tag{44}$$

Лёвнер показал [18], что функции $f(z, t)$, отображающие единичный круг на семейство областей, границами которых служат удлиняющиеся разрезы Γ_t вышеописанного типа, удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}=z\frac{1+\varkappa(t)z}{1-\varkappa(t)z}\frac{\partial f(z, t)}{\partial z}, \tag{45}$$

в котором функция $\varkappa(t)$ непрерывна, $|\varkappa|=1$. Таким образом, дифференцируя (44) по t и используя (43) и (44), находим

$$\sqrt{q(z, t)}\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}-\sqrt{q(z_0, t)}\frac{1+\varkappa z_0}{1-\varkappa z_0}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial q(z, t)}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{q(z, t)}}\frac{dz}{z}. \tag{46}$$

Дифференцируя (46) снова по z, после простого преобразования находим

$$\frac{\partial q(z, t)}{\partial t} = z\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\frac{\partial q(z, t)}{\partial z} + \frac{4\varkappa z}{(1-\varkappa z)^2}q(z, t). \tag{47}$$

С другой стороны, $q(z, t)$ есть простая рациональная функция от z, как это вытекает из ее определения (43). Внося это выражение в (47) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях уравнения, получаем

$$\frac{dA_\nu(t)}{dt} = \nu A_\nu(t) + 2\sum_{\mu=-(n-1)}^{\nu-1}(2\nu-\mu)A_\mu \varkappa^{\nu-\mu}. \tag{48}$$

Для того чтобы $A_\nu(t) \equiv 0$ для всех $\nu \geqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы тождественно по t выполнялись равенства

$$\sum_{\mu=-(n-1)}^{n-1} A_\mu \varkappa^{-\mu} \equiv 0, \quad \sum_{\mu=-(n-1)}^{n-1} \mu A_\mu \varkappa^{-\mu} \equiv 0. \tag{49}$$

Эти условия обеспечивают также тождественное по t выполнение равенств $A_{-\nu} \equiv \overline{A}_\nu$.

Заметим, что уравнения (48) при $\nu = -1, -2, \ldots, -(n-1)$ дают $n-1$ дифференциальных уравнений для соответствующих функций $A_\nu(t)$; коэффициенты этих уравнений весьма просто выражаются через $\varkappa(t)$. Функция $\varkappa(t)$ в свою очередь может быть определена по $A_\nu(t)$ при помощи второго уравнения (49), которое можно переписать в виде

$$\operatorname{Im}\left\{\sum_{\mu=-(n-1)}^{-1} \mu A_\mu \varkappa^{-\mu}\right\} = 0. \tag{50}$$

Таким образом, $A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-(n-1)}$ и $\varkappa$ удовлетворяют вполне определенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начнем со случая $n=3$. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{dA_{-2}(t)}{dt} = -2A_{-2}(t), \quad \frac{dA_{-1}(t)}{dt} = -A_{-1}(t), \\ \operatorname{Im}\{2A_{-2}\varkappa^2 + A_{-1}\varkappa\} = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Интегрируем непосредственно и находим

$$A_{-2}(t) = \alpha_2 e^{-2t}, \qquad A_{-1}(t) = \alpha_1 e^{-t}. \tag{52}$$

Так как при $t=0$ функция $q(z, 0)$ совпадает с правой частью (40) для $n=3$, постоянные интегрирования определяются следующим образом: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2a_2$. Таким образом, $\varkappa(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{Im}\{e^{-2t}\varkappa^2 + a_2 e^{-t}\varkappa\} = 0. \tag{53}$$

Из общей теории Лёвнера хорошо известно, что

$$a_2 = -2\int_0^\infty \varkappa e^{-t}\,dt. \tag{54}$$

Мы должны использовать теперь неравенство $|a_3 - a_2^2| \leqslant 1$, вытекающее из элементарной теоремы площадей. Так как мы предполагаем $a_3 \geqslant 3$, можно утверждать, что $\operatorname{Re}\{a_2^2\} \geqslant 2$; следовательно, левая часть (53) не может обращаться в нуль при $0 \leqslant t < \infty$.

Мы желаем теперь показать, что в силу (53) и (54) $\operatorname{Im}\{a_2^2\} = 0$. В самом деле, если бы $\operatorname{Im}\{a_2^2\} \neq 0$, уравнение (53) исключало бы возможность $\varkappa = \pm\operatorname{sgn} a_2$ и выражение $\operatorname{Im}\{\overline{\varkappa(t)}a_2\}$ не могло бы никогда изменить знак. Следовательно, выражение

$$\int_0^\infty \operatorname{Im}\overline{\{2\varkappa(t)}\,a_2\}\,e^{-t}\,dt = -\operatorname{Im}\{|a_2|^2\} \tag{55}$$

не было бы равно нулю, что является противоречием. Итак, $\operatorname{Im}\{a_2^2\} = 0$, а вследствие теоремы площадей имеет место даже неравенство $a_2^2 > 2$; следовательно, мы получаем $\operatorname{Im}\{a_2\} = 0$. Из (53) теперь легко получаем, что $\varkappa$ должна быть повсюду действительной, и можно показать, что $a_3 = 3$.

При $|a_3| \leqslant 3$ вышеприведенное доказательство более сложно, чем первоначальное доказательство Лёвнера, опирающееся только на формулу (45). Однако оно может быть обобщено на случай проблемы оценки a_4, хотя в этом случае оно становится еще более сложным. Система дифференциальных уравнений принимает теперь вид

$$\frac{dA_{-3}}{dt}=-3A_{-3},\quad \frac{dA_{-2}}{dt}=-2A_{-2}-2A_{-3}\varkappa,$$
$$\frac{dA_{-1}}{dt}=-A_{-1}+2A_{-3}\varkappa^2, \tag{56}$$
$$\operatorname{Im}\{3A_{-3}\varkappa^3+2A_{-2}\varkappa^2+A_{-1}\varkappa\}=0.$$

Мы находим $A_{-3}=\alpha_3 e^{-3t}$ и, поскольку $A_{-3}(0)=1$, получаем $A_{-3}=e^{-3t}$. Полагаем

$$A_{-2}(t)=\alpha_2(e^{-t})\,e^{-2t},\quad A_{-1}(t)=\alpha_1(e^{-t})\,e^{-t}. \tag{57}$$

Подставляя эти выражения в (56) и принимая $\sigma=e^{-t}$, приходим к системе

$$\frac{d\alpha_2(\sigma)}{d\sigma}=2\varkappa,\quad \frac{d\alpha_1(\sigma)}{d\sigma}=-2\varkappa^2\sigma\quad (0\leqslant\sigma\leqslant 1),$$
$$\operatorname{Im}\{3\varkappa^3\sigma^3+2\alpha_2(\sigma)\,\varkappa^2\sigma^2+\alpha_1(\sigma)\,\varkappa\sigma\}=0. \tag{58}$$

Простые вычисления приводят к следующим краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2(0)=3a_2,\quad \alpha_1(0)=2a_3+a_2^2,\\ &\alpha_2(1)=2a_2,\quad \alpha_1(1)=3a_3.\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Условия для $\sigma=1$, $t=0$ очевидны; условия для $\sigma=0$, $t=\infty$ получаются сравнением коэффициентов при степенях e^{-t} в (43) и переходом к пределу при $t\to\infty$.

Система дифференциальных уравнений (58) вместе с граничными условиями (59) представляет собой типичную краевую задачу Штурма—Лиувилля. Нам нужно начать интегрирование системы (58) с такими начальными значениями $\alpha_1(0)$ и $\alpha_2(0)$, чтобы в конце рассматриваемого интервала мы получили значения

$$\alpha_1(1)=\frac{3}{2}\left[\alpha_1(0)-\frac{1}{9}[\alpha_2(0)]^2\right],\quad \alpha_2(1)=\frac{2}{3}\alpha_2(0). \tag{60}$$

Трудность проблемы заключается в нелинейном характере уравнений и краевых условий. Каждое возможное множество $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$ определяет множество возможных значений a_2, a_3. Ясно, что $a_2=2$, $a_3=3$ и $\varkappa(\sigma)=-1$ является допустимым решением, которое приводит к функции Кёбе (38) предполагаемой экстремальной функции.

Теперь возникает вопрос, нельзя ли соответствующие специальные значения $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$, связанные с предполагаемой экстремальной функцией, вложить в однопараметрическое семейство начальных значений, таких, что все они приводят к краевым соотношениям (60). Для этой цели мы должны изучить уравнения в вариациях системы (58) с краевыми условиями (60). Обозначив производные функций α_1, α_2 и $\varkappa$ по параметру через β_1, β_2 и $i\lambda$, легко получаем

$$\begin{gathered}
\frac{d\beta_1}{d\sigma}=4i\lambda\sigma, \quad \frac{d\beta_2}{d\sigma}=2i\lambda, \\
\lambda=\frac{1}{2p(\sigma)}\operatorname{Im}\{\beta_1-2\beta_2\sigma\}, \\
\beta_1(1)=\frac{3}{2}\left[\beta_1(0)-\frac{4}{3}\beta_2(0)\right], \quad \beta_2(1)=\frac{2}{3}\beta_2(0), \\
p(\sigma)=8\sigma^2-12\sigma+5.
\end{gathered} \tag{61}$$

Таким образом, мы пришли к системе линейных дифференциальных уравнений с линейными краевыми условиями, которую можно исследовать стандартными методами Штурма—Лиувилля.

Из (61) непосредственно видно, что функция λ действительная и что $\beta_1(\sigma)$ и $\beta_2(\sigma)$ должны быть чисто мнимыми. Введя новые неизвестные:

$$u(\sigma)=\operatorname{Im}\{\beta_1-2\sigma\beta_2\}, \qquad v(\sigma)=\operatorname{Im}\{\beta_2\},$$

приводим систему (61) к более простому виду:

$$\frac{du}{d\sigma}=-2v, \qquad \frac{dv}{d\sigma}=\frac{1}{p(\sigma)}u \tag{62}$$

с краевыми условиями

$$u(1)=\frac{3}{2}u(0)-\frac{10}{3}v(0), \qquad v(1)=\frac{2}{3}v(0). \tag{63}$$

Из системы (62) посредством интегрирования по частям выводим равенство

$$2\int_0^1 v^2 d\sigma=\int_0^1 p(v')^2\,d\sigma+\frac{20}{9}[v(0)]^2, \quad v(1)=\frac{2}{3}v(0). \tag{64}$$

Теперь мы можем применить вариационное исчисление, чтобы оценить отношение

$$\left[\int_0^1 p(v')^2\,d\sigma + \frac{20}{9}[v(0)]^2\right] : \left[\int_0^1 v^2 d\sigma\right] = R[v] \qquad (65)$$

при заданных краевых условиях на $v(\sigma)$. Даже если мы заменим в (65) полином $p(\sigma)$ кусочно-постоянной функцией, которая нигде не больше, чем $p(\sigma)$, то минимальное значение нового отношения, которое теперь может быть вычислено в явном виде, оказывается большим, чем 2. Следовательно, и подавно мы можем утверждать, что $R[v] > 2$ для всех допустимых $v(\sigma)$ и что равенство (64) невозможно. Итак, мы показали, что решение $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\varkappa(\sigma) \equiv -1$ не может быть вложено ни в какое однопараметрическое семейство решений, непрерывно дифференцируемых по этому параметру.

При более тщательном анализе вместо дифференциалов можно было бы изучить теперь разности решений системы $\alpha_1(\sigma)$, $\alpha_2(\sigma)$, $\varkappa(\sigma)$. Затем возможно ограничить полную окрестность точки $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\varkappa = -1$, в которой не имеется никаких других решений. С другой стороны, комбинируя теорему площадей с различными соотношениями между коэффициентами экстремальной функции, выводимыми из дифференциального уравнения (40), можно оценить величины $|a_2 - 2|$ и $|a_3 - 3|$ в экстремальном случае. Посредством элементарных, хотя и весьма утомительных вычислений можно убедиться в том, что точка a_2, a_3, $\varkappa(1)$ должна лежать именно в той окрестности, в которой 2, 3, -1 является единственной точкой решения. Тем самым доказано, что функция Кёбе (38) действительно является экстремальной функцией и установлено неравенство $|a_4| \leqslant 4$ для всех однолистных функций (36).

Действительная трудность намеченного здесь доказательства заключается в весьма обширных элементарных оценках, и она, вероятно, может быть в значительной мере преодолена расширением описанной выше окрестности единственности решения посредством более глубокого проникновения в теорию системы дифференциальных уравнений (58), (59).

Наконец, следует заметить, что функция Кёбе (38) удовлетворяет функциональному уравнению (40), которое характеризует экстремальную функцию для каждого $n \geqslant 2$. Конечно, этот факт усиливает правдоподобность предположения Бибербаха. Однако следует упомянуть и о другом факте, чтобы предостеречь против слишком большого доверия к этой правдоподобности. Рассматривается семейство функций

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots + \frac{b_n}{z^n} + \ldots, \tag{66}$$

однолистных в области $|z| > 1$, являющейся внешностью единичного круга, и ставится проблема отыскания наибольшего значения $|b_n|$. Такие же вариационные методы, что и описанные выше, позволяют получить для экстремальных функций $f_n(z)$ этой «внешней» проблемы дифференциально-функциональное уравнение, аналогичное уравнению (40). Легко показать, что функции

$$F_n(z) = \left[z^{n+1} + 2 + \frac{1}{z^{n+1}}\right]^{1/(n+1)} = z + \frac{2}{n+1}\frac{1}{z^n} + \ldots \tag{67}$$

принадлежат рассматриваемому семейству и удовлетворяют экстремальному условию для соответствующих $f_n(z)$. При $n=1$ и $n=2$ эти функции на самом деле являются экстремальными функциями внешней проблемы коэффициентов. Оценка $|b_1| \leqslant 1$ была открыта вместе с теоремой площадей [2], а оценка $|b_2| \leqslant \frac{2}{3}$ была установлена в 1938 году Голузиным [6] и мною [25]. Предполагалось, что неравенство $|b_n| \leqslant 2/(n+1)$ дает наилучшую возможную оценку для n-го коэффициента при всех значениях n. Однако в 1955 году Гарабедиан и я [4] показали, что точное значение максимума $|b_3|$ есть не $1/2$, как предполагалось, а $1/2 + e^{-6}$. Итак, несмотря на то, что функция $F_3(z)$, определенная формулой (67), удовлетворяет довольно ограничительному экстремальному условию, она не совпадает с экстремальной функцией $f_3(z)$. Хотя e^{-6} и малое число, этот пример показывает, как мало можно доверять эмпирической численной правдоподобности в проблемах такого рода. Недавно Вааделанд [36] показал, что вообще

$$\max|b_{2k-1}| \geqslant \frac{1}{k}\left(1 + 2e^{-2[(k+1)/(k-1)]}\right), \tag{67'}$$

в то время как для $n=2k$ никакого контрпримера к предположению $|b_n| \leqslant 2/(n+1)$ неизвестно.

Имеются, конечно, многочисленные взаимосвязи между проблемой коэффициентов для однолистных функций и общей теорией конформного отображения. Два примера могут послужить в качестве иллюстраций. Существует хорошо известная проблема в теории конформного отображения: даны n точек в комплексной плоскости, и требуется найти континуум, содержащий эти точки и имеющий наименьшую емкость [10]. Из топологии экстремального континуума можно вывести посредством элементарной вариации неравенство для коэффициента $|b_2| \leqslant \frac{2}{3}$ [25]. Здесь общая теория конформного отображения помогла решить одну из проблем коэффициентов. Наоборот, де Поссель [21] сформулировал одну простую экстремальную проблему для коэффициентов однолистных функций в многосвязной области и показал, что экстремальные функции отображают эту область на область, ограниченную параллельными разрезами. Таким образом, как только существование экстремальной функции было установлено, получилось изящное доказательство существования для важного канонического отображения.

5. Фредгольмовские собственные значения. Проблема конформного отображения заданной плоской области D часто может быть сведена к некоторой краевой задаче для функций, гармонических в D. Если граница C области D достаточно гладкая, то решение последней проблемы может быть получено при помощи интегрального уравнения Пуанкаре — Фредгольма

$$m(z) = \mu(z) + \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left(\log \frac{1}{|z-\zeta|} \right) \mu(\zeta)\, ds_\zeta \quad (z \in C). \tag{68}$$

Для того чтобы решить это основное интегральное уравнение двумерной теории потенциала, следует рассмотреть соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi_\nu(z) = \frac{\lambda_\nu}{\pi} \int\limits_C \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left(\log \frac{1}{|z-\zeta|} \right) \varphi_\nu(\zeta)\, ds, \quad (z \in C), \tag{69}$$

его собственные функции $\varphi_\nu(z)$ и его собственные значения λ_ν. Собственное значение $\lambda = 1$ присутствует всегда и имеет в качестве собственных функций множество просто описываемых функций на C; мы будем называть это собственное значение тривиальным собственным значением области. Нетривиальные собственные значения λ_ν удовлетворяют неравенству $|\lambda_\nu| > 1$. Легко видеть, что вместе с каждым нетривиальным собственным значением λ_ν также и число $-\lambda_\nu$ будет собственным значением уравнения (69), причем с той же кратностью. Вследствие этого мы ограничимся положительными нетривиальными собственными значениями λ_ν и будем предполагать, что они расположены в порядке возрастания абсолютной величины. Эти значения λ_ν называются фредгольмовскими собственными значениями области D и играют важную роль в теории потенциала и в теории функций в рассматриваемой области.

Например, представляет большой интерес проблема определения нижней грани для первого собственного значения λ_1 произвольно заданной области. Такая информация позволила бы нам оценить порядок сходимости ряда Неймана—Лиувилля, дающего решение основного уравнения (68). Чем бо́льшим можно предполагать λ_1, тем проще вычислительная работа при решении краевых задач в теории потенциала для области D. Таким образом, множество чисел λ_ν представляет множество таких функционалов области D, которые заслуживают тщательного изучения.

Числа λ_ν тесно связаны с теорией преобразования Гильберта

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}\,d\tau_\zeta, \tag{70}$$

которое переводит каждую аналитическую функцию в области D в некоторую новую аналитическую функцию в той же области. Существует множество собственных функций $w_\nu(z)$, аналитических в D и удовлетворяющих уравнению

$$w_\nu(z)=\frac{\lambda_\nu}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{w_\nu(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}\,d\tau_\zeta \quad (\lambda_\nu>1). \tag{71}$$

Соответствующие собственные значения в точности совпадают с фредгольмовскими собственными значениями, определенными выше. Мы будем предполагать, что функции $w_\nu(z)$ нормированы обычным условием

$$\iint\limits_D |w_\nu(z)|^2\,d\tau=1. \tag{72}$$

Собственные функции $w_\nu(z)$ образуют ортонормированное множество аналитических функций в области D и играют важную роль в теории вариационного ядра области D [33].

Для того чтобы построить единую теорию экстремальных проблем для функционалов λ_ν области D, необходимо определить вариацию каждого λ_ν в зависимости от вариации определяющей области D. Предполагая, что вариация области имеет специальный вид (1) с $z_0 \in D$ и что λ_ν — невырожденное значение, имеем

$$\lambda_\nu^* = \lambda_\nu + (1 - \lambda_\nu^2)\,\pi\,\mathrm{Re}\,\{e^{i\alpha}\rho^2\,[w_\nu(z_0)]^2\} + O(\rho)^4. \tag{73}$$

Аналогичная, хотя и несколько более сложная формула может быть дана для вариации вырожденных собственных значений.

Желая применить вариационную формулу (73) для решения экстремальных проблем, мы сразу же встречаемся с серьезным затруднением. Вся теория фредгольмовских собственных значений была установлена при некоторых условиях гладкости, наложенных на границу области, и необходимо убедиться, что экстремальная область будет иметь границу этого типа. Следует ввести компактный класс областей, имеющих допустимые границы; в таком классе вариационное исчисление, основанное на формуле (73), и теория экстремальных проблем будут возможны.

Для этой цели мы введем понятие *равностепенно аналитических кривых*. Кривая называется аналитической, если она может быть представлена как образ единичной окружности $|z| = 1$ при посредстве отображающей функции $t(z)$, аналитической и однолистной на кривой $|z| = 1$. Множество кривых называется равностепенно аналитическим с модулем равностепенности (r, R), где $r < 1 < R$, если все они получаются посредством отображающих функций $f(z)$, которые аналитичны и однолистны в фиксированном кольце $r \leqslant |z| \leqslant R$. Это понятие равностепенной аналитичности представляется весьма полезным в вариационной теории функционалов областей.

Теперь мы можем сформулировать:

Теорема. *Если односвязная область ограничена кривой, аналитической с модулем (r, R), то ее наименьшее фредгольмовское собственное значение λ_1 удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{r^2 + R^2}{1 + r^2R^2}. \tag{74}$$

Эта оценка является наилучшей возможной для каждого модуля (r, R).

Часто граничная кривая C области задается в параметрическом представлении, из которого модуль (r, R) может быть легко найден. Таким образом, оценка (74) часто оказывается удобной для того, чтобы исследовать сходимость ряда Неймана—Лиувилля, решающего различные краевые задачи в области.

С заданной областью D можно также связать определитель Фредгольма

$$D(\lambda)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right) \tag{75}$$

интегрального уравнения (68); при фиксированном λ определитель $D(\lambda)$ можно рассматривать как функционал области D. Возникает следующая экстремальная проблема: пусть D_0 — заданная многосвязная область; рассмотреть все области D с гладкой границей, конформно эквивалентные области D_0, и определить среди них те области, для которых функционал $D(\lambda)$ достигает наибольшего значения.

Эта проблема решена в случае $\lambda=1$. Основная трудность при исследовании опять-таки состоит в некомпактности класса рассматриваемых областей. Эту трудность можно преодолеть, рассматривая максимизирующие последовательности областей и их предельную область; все области последовательности подвергаются одной и той же вариации (1), и из того факта, что они образуют максимизирующую последовательность, можно вывести, что их предельная область аналитически ограничена. Теперь легко установить существование экстремальной области, и можно показать, что она ограничена окружностями. Таким образом, мы получаем новое доказательство знаменитой теоремы Шоттки об отображении на область, ограниченную окружностями, а также характеристику этого канонического отображения посредством экстремального свойства. Методологически это доказательство представляет интерес в том отношении, что метод вариаций применяется не к экстремальной области, существование которой еще не установлено, а к экстремальной последовательности. Этот процесс представляется имеющим очень большую будущность.

Решение проблемы максимума для общего определителя $D(\lambda)$ еще неизвестно и заслуживает дальнейшего изучения.

Фредгольмовские собственные значения представляют поучительный пример гибкости вариационного метода применительно к экстремальным проблемам для довольно сложных типов функционалов областей. Существенное формальное изящество вариационной формулы (73) позволило нам преодолеть весьма серьезные трудности, возникающие из того факта, что эти функционалы определены только на ограниченном и некомпактном классе областей.

6. Дальнейшие применения. Чтобы дать ясное представление об основных идеях вариационного метода, мы ограничились немногими фундаментальными проблемами. Однако этот метод может быть применен к гораздо более общим функционально-теоретическим задачам. Он может быть использован в проблемах отображения областей на римановых поверхностях [29, 33] и приводит здесь к теоремам существования для различных канонических реализаций римановых областей. Он может быть применен к теории многолистных функций в заданной области [27], проблеме коэффициентов для них и к теоремам искажения. Некоторое внимание было уделено проблеме построения вариационного исчисления в важных подклассах семейства однолистных функций в единичном круге. Голузин [9] описал метод вариаций для подкласса звездообразных однолистных отображений, и Гуммель [12, 13] дал даже более простой метод этого рода. Сингх [34] построил вариационную теорию для действительных однолистных функций, для ограниченных однолистных функций и для других интересных подклассов. Наконец, следует упомянуть о той роли, которую метод вариаций мог бы сыграть как полезное средство в квазиконформных отображениях и в экстремальных метриках [14].

Конечно, вариационный метод является только одним из многих мощных методов в теории конформного отображения и теории функций комплексного переменного. Существует много проблем, где другие методы дают ответ более просто и более непосредственно. Однако мне кажется, что метод вариаций является одним из наиболее систематических и широко применяемых методов, которыми мы обладаем в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernardi S. D., A survey of the development of the theory of schlicht functions, Duke Math. J., **19**, 263—287 (1952).
[2] Bieberbach L., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Berliner Ber., 940—955 (1916).
[3] Courant R., Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, New York, 1950, Appendix by M. Schiffer. (Русский перевод: Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., ИЛ, 1953.)
[4] Garabedian P. R. and Schiffer M., A coefficient inequality for schlicht functions, Ann. Math. (2), **61**, 116—136 (1955).
[5] Garabedian P. R. and Schiffer M., A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Rat. Mech. Anal., **4**, 427—465 (1955).
[6] Голузин Г. М., Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций, Матем. сб., **3** [**45**], 321—330 (1938).
[7] Голузин Г. М., Метод вариаций в конформном отображении, Матем. сб., **19** [**61**], 203—236 (1946); **21** [**63**], 83—117, 119—132 (1947); **29** [**71**], 455—468 (1951).
[8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. — Л., Гостехиздат, 1952.
[9] Голузин Г. М., Об одном методе вариаций в теории аналитических функций, Уч. зап. Ленингр. ун-та, 144; сер. матем., **23**, 85—101 (1952).
[10] Grötzsch H., Über ein Variationsproblem der Konformen Abbildung, Leipziger, Ber., **82**, 251—263 (1930).
[11] Hadamard J., Mémoire sur le probléme relatif á l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Acad. Sci. Paris, Mém. Sav. étrangers, 33 (1908).
[12] Hummel J. A., The coefficient regions of starlike functions, Pacific J. Math., **7**, 1381—1389 (1957).
[13] Hummel J. A., A variational method for starlike functions, Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 82—87 (1958).
[14] Jenkins J. A., Oh the existence of certain general extremal metrics, Ann. Math. (2), **66**, 440—453 (1957).
[15] Julia G., Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme, Ann. Ec. Norm. (3), **39**, 1—28 (1922).
[16] Лаврентьев М. А., Sur deux questions extrémales, Матем. сб., **41**, 157—165 (1934).
[17] Лаврентьев М. А., Об одной экстремальной задаче из теории крыла, Труды ЦАГИ, **155**, 1—40 (1934).
[18] Löwner K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann., **89**, 103—121 (1923).
[19] Marty F., Sur le module des coefficients de Maclaurin d'une fonction univalente, C. R. Acad. Sci. Paris, **198**, 1569—1571 (1934).
[20] Montel P., Lecons sur les fonctions univalentes on multivalentes, Paris, 1933.
[21] Possel R. de, Zum Parallelschlitztheorem unendlich vielfach zusammenhängender Gebiete, Göttinger Nachr., 199—202 (1931).

[22] Schaeffer A. C. and Spencer D. C., The coefficients of schlicht functions, I. Duke Math. J., **10**, 611—635 (1943); II, **12**, 107—125 (1945); III., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **32**, 111—116 (1946).
[23] Schaeffer A.C. and Spencer D. C., A variational method in conformal mapping, Duke Math. J., **14**, 949—966 (1947).
[24] Schaeffer A. C. and Spencer D. C., Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **35** (1950).
[25] Schiffer M., Sur un probléme d'extrémum de la représentation conforme, Bull. Soc. Math. France, **66**, 48—55 (1938).
[26] Schiffer M., A method of variation within the family of simple functions, Proc. London Math. Soc. (2), **44**, 432—449 (1938).
[27] Schiffer M., Variation of the Green function and theory of the p-valued functions, Amer. J. Math., **65**, 341—360 (1943).
[28] Schiffer M., Hadamard's formula and variation of domain functions, Amer. J. Math., **68**, 417—448 (1946).
[29] Schiffer M., Variational methods in the theory of Riemann surfaces, Contr. to the Theory of Riemann Surfaces, p. 15—30, Princeton, 1953.
[30] Schiffer M., Variation of domain functionals, Bull. Amer. Math. Soc., **60**, 303—328 (1954).
[31] Schiffer M., Application of variational methods in the theory of conformal mappings, Proc. Symp. Appl. Math. **8**, 93—113 (1958).
[32] Schiffer M., The Fredholm eigenvalues of plane domains, Pacific J. Math., **7**, 1187—1225 (1957).
[33] Schiffer M. and Spencer D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton, 1954. (Русский перевод: Шиффер М. и Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, М., ИЛ, 1957.)
[34] Singh V., Interior variations and some extremal problems for certain classes of univalent functions, Pacific J. Math., **7**, 1485—1504 (1957).
[35] Spencer D. C., Some problems in conformal mappings, Bull. Amer. Math. Soc., **53**, 417—439 (1947).
[36] Waadeland H., Über ein Koeffizientenproblem für schlichte Abbildungen des $|\xi|>1$, Norske Viedensk. Selsk. Forh. **30**, 168—170 (1957).

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ДЕЛИНЕАРИЗАЦИЯ *)

Дж. Темпль **)

(Англия)

1. Введение. Цель моего доклада, как уже сообщил наш президент, состоит в обозрении задач прикладной математики, которые все еще ожидают внимания со стороны чистых математиков. Это приятное задание, ибо оно позволяет мне охватить широкое поле вопросов, выбирая их по своей прихоти и фантазии, а кроме того, позволяет избежать строгости точных доказательств и подробных определений.

Группа задач, которую я намерен описать, — это Золушка в области чистой математики, называемая учением о дифференциальных уравнениях. Тщательно оберегаемая тайна этого существа состоит в том, что оно еще не достигло положения и звания науки, но продолжает наслаждаться свободой и свежестью такого же преднаучного состояния, как естественная история по сравнению с ботаникой. Изучающий дифференциальные уравнения — показательно, что он не имеет даже имени или титула, которые поставили бы его в один ряд с геометром или аналитиком, — находится на такой ступени, когда его основная задача сводится к коллекционированию образцов, их любовному, заботливому описанию и выращиванию для изучения в лабораторных условиях. Работа по классификации и систематизации лишь едва начата.

Это справедливо даже в отношении тех дифференциальных уравнений, которые принадлежат к роду «обыкновенных линейных». Морфология этого рода охватывает уравнения

---

*) G. Temple, Linearization and delinearization.

**) Доклад зачитал проф. Титчмарш.

не более чем с тремя, от силы четырьмя особенностями. В случае же нелинейных уравнений теория групп Ли дает лишь слабый намек на схему классификации. Перед ботаническими экспедициями в поля нелинейности по-прежнему расстилается пышная флора редкостных уравнений и экзотических задач.

Сегодня я собираюсь говорить о некоторых линейных и нелинейных дифференциальных уравнениях, возникающих в математической физике, и о представляемых ими нерешенных задачах.

История математической физики за последнее столетие может быть разбита на два периода — линейный и нелинейный. В счастливые давние времена линейного периода безраздельно царствовал принцип суперпозиции, а все дифференциальные уравнения были линейными. В нынешнее многострадальное время большинство дифференциальных уравнений нелинейно, причем до сих пор не предложено никакого общего метода их решения. Существуют, однако, два практических приема: метод линеаризации, посредством которого нелинейное уравнение насильственно приводится к соответствующему приближенному линейному виду, и метод делинеаризации, когда нелинейность частично восстанавливается.

Линеаризация и делинеаризация составят главный предмет моего внимания, особенно в связи с уравнениями гидродинамики, но, вероятно, было бы желательно сначала проиллюстрировать природу рассматриваемых задач с помощью некоторых простейших примеров.

2. Регулярные и сингулярные возмущения. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dx}=F(x,\ u,\ \alpha),$$

где α — малый параметр. Классическая теорема существования, легко доказываемая методом мажорант (Гурса [7]), утверждает, что если F является аналитической функцией от x, u и α в некоторой окрестности точки $x=x_0$, $u=u_0$ и $\alpha=\alpha_0$, то заданное дифференциальное уравнение имеет решение $u=u(x,\ \alpha)$, аналитическое в некоторой окрестности точки $x=x_0$ и такое, что $u_0=u(x_0,\ \alpha)$, когда α принадлежит некоторой окрестности α_0. В задачах того типа, который мы собираемся изучать, особый интерес представляют решения, отвечающие малым значениям α, а следовательно, представляет интерес и *приведенное уравнение*

$$\frac{du}{dx}=F(x, u, 0),$$

которое на практике часто бывает много проще, чем исходное *возмущенное уравнение* $\frac{du}{dx}=F(x, u, \alpha)$. Решение приведенного уравнения называется *основным решением*: $f_0(x)=u(x, 0)$. Ясно, что возмущенное уравнение будет иметь решение вида

$$u=f_0(x)+\alpha f_1(x)+\ldots+\alpha^n f_n(x)+\ldots,$$

где ряд сходится в некотором интервале $|\alpha|<\rho$ и обращается в u_0 при $x=x_0$, если функция F аналитична вблизи $x=x_0$, $u=u_0$, $\alpha=0$. Кроме того, главный член $f_0(x)$ будет удовлетворять приведенному уравнению. В этом случае возмущение называется *регулярным* в точке (x_0, u_0). Если же функция F не аналитична вблизи $x=x_0$, $u=u_0$, $\alpha=0$, возмущение называется *сингулярным*. Здесь классическая теорема существования уже неприменима. Этот интересный случай часто встречается в прикладной математике.

Существует очевидный метод обращения с сингулярными возмущениями — это отыскание преобразования, приводящего к уравнению (или к уравнениям), для которого возмущение уже регулярно.

Рассмотрим, например, простейшее уравнение

$$(x+\alpha)\frac{du}{dx}+u=0$$

и соответствующее приведенное уравнение

$$x\frac{du}{dx}+u=0$$

при начальных условиях

$$x=1, \qquad u=1.$$

Полное возмущенное уравнение регулярно в плоскости x, u всюду, за исключением $x=0$. Решение возмущенного уравнения имеет вид

$$u(x, \alpha)=\frac{1+\alpha}{x+\alpha},$$

а основным решением служит

$$f_0(x) = x^{-1}.$$

Между основным и возмущенным решениями существует соотношение

$$u(x, \alpha) - f_0(x) = \frac{\alpha(1-x)}{x(x+\alpha)} = O(\alpha),$$

но обозначенный таким способом порядок аппроксимации не является равномерным для всех значений x. Действительно, равномерность имеет место лишь в областях, не содержащих $x = 0$ и $x = -\alpha$.

Если, однако, мы запишем уравнение и решение в обращенном виде:

$$u\frac{dx}{du} + x + \alpha = 0$$

и

$$x(u, \alpha) = -\alpha + (1+\alpha)u^{-1},$$

то здесь возмущение регулярно, основное решение имеет вид

$$x(u, 0) = u^{-1}$$

и отсюда

$$x(u, \alpha) - x(u, 0) = -\alpha + \alpha u^{-1} = O(\alpha)$$

равномерно вблизи $\alpha = 0$.

3. Близкие решения. Если $u = u(x, \alpha)$ — интегральная кривая уравнения

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \alpha),$$

проходящая через точку (x_0, u_0) некоторой области D, где дифференциальное уравнение регулярно, то

$$u(x, \alpha) - u(x, 0) = O(\alpha) \tag{3.1}$$

равномерно в D. Но, как показывает предыдущий пример, это неверно, если D содержит точки, в которых дифференциальное уравнение сингулярно.

Соотношение (3.1) означает, что интегральные кривые $u = u(x, \alpha)$ и $u = u(x, 0)$ являются *близкими кривыми*, ординаты которых отличаются в D на $O(\alpha)$. Но предыдущий пример дает намек на более общее понятие близости.

Элементарные геометрические соображения, приложенные к семейству кривых

$$\varphi(x, u, \alpha) = 0,$$

приводят к мысли, что кривые

$$\Gamma \quad \text{или} \quad \varphi(x, u, 0) = 0$$

и

$$C \quad \text{или} \quad \varphi(x, u, \alpha) = 0$$

следует считать *близкими* в области D, если с каждой точкой (ξ, η), лежащей на Γ, можно сопоставить точку (x, u), лежащую на C, такую, что

$$x - \xi = O(\alpha)$$

и

$$u - \eta = O(\alpha)$$

равномерно в D. В предыдущем примере

$$u = \eta, \qquad x - \xi = -\alpha(1 - \xi).$$

Отсюда понятно, что полное семейство кривых

$$\varphi(x, u, \alpha) = 0$$

следует рассматривать как семейство близких кривых, если их можно представить в параметрической форме:

$$x = X(z, \alpha), \qquad u = U(z, \alpha),$$

где X и U — аналитические функции от z и α, обращающиеся соответственно в ξ и η, когда $\alpha = 0$.

Поскольку ξ и η связаны соотношением $\varphi(\xi, \eta, 0) = 0$, такое представление равносильно представлению

$$x = \xi + \sum_1^\infty \alpha^n x_n(\xi), \qquad u = \eta(\xi) + \sum_1^\infty \alpha^n u_n(\xi)$$

в области, где $d\eta/d\xi$ ограничено.

Хотя нет оснований утверждать *a priori*, что решения какого-либо заданного уравнения с сингулярным возмущением должны образовывать семейство близких кривых, все же предыдущие идеи снабжают нас сильной и гибкой техникой отыскания решений и аппроксимаций, равномерных внутри области, содержащей особые точки. Эта техника, принадлежащая

Лайтхиллу, получила многочисленные применения в гидродинамике. Она напоминает метод малых возмущений, применявшийся Пуанкаре [16], однако целью работы Пуанкаре была не сингулярность возмущений, а практическое удобство вычисления периода нелинейных колебаний.

4. Униформизация. Если исходное уравнение

$$\frac{du}{dx}=F(x, u, \alpha) \qquad (u=u_0 \text{ при } x=x_0)$$

имеет семейство близких решений

$$x=x(\xi, \alpha), \qquad u=\eta(\xi, \alpha),$$

то уравнения относительно $x(\xi, \alpha)$ и $\eta(\xi, \alpha)$ должны быть регулярными вблизи $\xi=x_0$, $u=\eta(x_0, 0)$. Поэтому отыскание семейства близких решений сводится к введению новой переменной ξ и замене исходного уравнения

$$\frac{du}{dx}=F(x, u, \alpha)$$

двумя новыми уравнениями

$$\frac{dx}{d\xi}=X(\xi, x, u, \alpha), \qquad \frac{du}{d\xi}=U(\xi, x, u, \alpha),$$

регулярным относительно α.

Этот процесс можно назвать *униформизацией* исходного уравнения. Он эквивалентен методу, введенному Лайтхиллом [13].

Так, типичное уравнение, рассмотренное Лайтхиллом,

$$(x+\alpha u)\frac{du}{dx}+q(x)u=r(x)$$

имеет униформизированные уравнения

$$\frac{du}{d\xi}=r(x)-q(x)u,$$

$$\frac{dx}{d\xi}=x+\alpha u.$$

Эти уравнения очевидным образом аналитичны по α, а их решения в точности совпадают с решениями Лайтхилла, если положить $\xi=\ln z$.

Рассмотрим, например, уравнение

$$(x+\alpha u)\frac{du}{dx}+(2+x)\,u=0$$

с начальным условием

$$u=e^{-1} \quad \text{при} \quad x=1.$$

Приведенное уравнение

$$x\frac{du}{dx}+(2+x)\,u=0$$

имеет решение

$$u=x^{-2}e^{-x}.$$

Чтобы получить решение возмущенного уравнения, имеющее смысл вблизи $x=0$, мы должны произвести униформизацию путем введения вспомогательной переменной. Чтобы облегчить сравнение с решением Лайтхилла [13] (стр. 1190), запишем

$$z\frac{dx}{dz}=x+\alpha u, \qquad z\frac{du}{dz}=-(2+x)\,u$$

и

$$x=1, \quad u=e^{-1} \quad \text{при} \quad z=1.$$

Эти уравнения аналитичны по α и имеют решения вида

$$x=x_0+\alpha x_1+\ldots, \qquad u=u_0+\alpha u_1+\ldots,$$

где

$$x_0=z, \quad u_0=z^{-2}e^{-z}, \quad x_1=z\varphi(z),$$

$$u_1=-z^{-2}e^{-z}\int\limits_1^z \varphi(t)\,dt, \quad \varphi(z)=\int\limits_1^z s^{-4}e^{-s}ds.$$

Следовательно, вблизи $z=0$

$$x=z-\frac{1}{3}\alpha z^{-2}+O\left(\frac{\alpha^2}{z^4}\right),$$

$$u=z^{-2}-\frac{1}{6}\alpha z^{-4}+O\left(\frac{\alpha^2}{z^6}\right)$$

и при $x=0$

$$u=\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{2/3}+O(\alpha^{-1/3}).$$

Предложенный здесь метод униформизации систематизирует лайтхилловский метод разложения по степеням вспомогательной переменной. Его основное преимущество состоит в том, что он устанавливает *существование* решения, аналитического относительно малого параметра, не касаясь сложных деталей *вычисления* этого решения.

5. Сингулярные граничные условия. Уравнения с сингулярными возмущениями, возникающие в гидродинамике, часто носят несколько иной характер, чем это описано выше. Во-первых, они обычно имеют второй порядок, а во-вторых, сингулярность встречается не в самом уравнении, а в граничных условиях.

Первое различие несущественно, так как уравнение второго порядка всегда можно заменить двумя уравнениями первого порядка, а именно:

$$F\left(x,\ u,\ v,\ \frac{du}{dx},\ \alpha\right)=0, \quad \frac{dv}{dx}=u.$$

Процесс униформизации сводится тогда к введению вспомогательной переменной z таким образом, чтобы исходная система уравнений заменилась системой

$$\frac{dx}{dz}=X(z,\ x,\ u,\ v,\ \alpha),$$

$$\frac{du}{dz}=U(z,\ x,\ u,\ v,\ \alpha),$$

$$\frac{dv}{dz}=uX,$$

аналитической по α.

Второе различие много важнее и нуждается в систематическом изучении.

Для потока сжимаемой жидкости обзор подобных задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, сделан Лайтхиллом [12]. Некоторые из них требуют отыскания ударных волн и приводят к сингулярным граничным условиям.

У Лайтхилла [13] приведен замечательный пример относительно волн, возникающих в спокойном воздухе в результате медленного равномерного расширения круглого цилиндра, которое происходит с радиальной скоростью αa_0, где a_0 — скорость звука в спокойном воздухе, а α — малый параметр. Потенциал скорости имеет вид

$$\varphi=a_0^2 t f(x),$$

где t — время, протекшее с того момента, когда цилиндр имел нулевой радиус, а $x=r/(a_0t)$. Область возмущения ограничена извне ударной волной $r=Ma_0t$ или $x=M$, а изнутри — поверхностью цилиндра $r=\alpha a_0 t$ или $x=\alpha$. Основная задача состоит в вычислении M для малых значений α.

Уравнение Бернулли дает локальную скорость звука в виде

$$a=a_0\{1-(\gamma-1)(f-xf'+\frac{1}{2}f'^2)\}^{1/2},$$

а потенциал удовлетворяет уравнению

$$a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi=\ddot{\varphi}+2\varphi_r\dot{\varphi}_r+\dot{\varphi}_r^2\varphi_{rr}.$$

Следовательно,

$$\{1-(\gamma-1)(f-xf'+\frac{1}{2}f'^2)\}(f''+x^{-1}f')=(x-f')^2f''.$$

Граничные условия суть

(1) при $x=\alpha$, $f'(\alpha)=\alpha$,

(2) при $x=M$, $f(M)=0$

и

$$f'(M)=\frac{2(M-M^{-1})}{\gamma+1}.$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение в обычном виде, обозначим $f'=u$, $f=v$. Тогда

$$P\frac{du}{dx}+Q\frac{u}{x}=0, \qquad \frac{dv}{dx}=0,$$

где

$$P=1-x^2+(\gamma+1)xu-(\gamma-1)v-\frac{1}{2}(\gamma+1)u^2,$$

а

$$Q=1+(\gamma-1)(xu-v-\frac{1}{2}u^2).$$

Линеаризуя это уравнение, найдем

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0,$$

откуда

$$|u|=C|x^{-2}-1|^{1/2}$$

и

$$C=\alpha^2(1-\alpha^2)^{-1/2}.$$

Ясно, что эта аппроксимация непригодна, когда мы приближаемся к верхней границе $x=M$. Поэтому произведем униформизацию уравнения, полагая

$$z\frac{dx}{dz}=\frac{x}{Q}, \qquad z\frac{du}{dz}=-\frac{u}{P},$$

и построим решения в виде

$$x=z+\alpha^2 x_1+\alpha^4 x_2+\ldots,$$
$$u=\alpha^2 u_0+\alpha^4 u_1+\ldots$$
$$v=\alpha^2 v_0+\alpha^4 v_1+\ldots$$

Здесь в главных членах сохраняется решение линеаризованного уравнения, причем

$$u_0=(z^{-2}-1)^{1/2}.$$

Дальнейший ход решения следует рассуждению Лайтхилла [13] (стр. 191) и окончательно дает

$$M=1+\frac{3}{8}(\gamma+1)^2\alpha^4+\ldots$$

6. Возмущения, сингулярные почти всюду. Особенно интересный тип составляют возмущенные уравнения, сингулярные на плоскости x, u всюду, кроме некоторой кривой C, например уравнение

$$\alpha\frac{du}{dx}=F(x, u).$$

Классический пример подобного рода возникает в теории релаксационных колебаний, изученных ван дер Полем. Здесь возмущенное уравнение можно записать в виде

$$\alpha u\frac{du}{dx}=u-\frac{1}{3}u^3-x=F(x, u).$$

Периодическое решение приближенно изображается замкнутой кривой на плоскости x, u, состоящей из некоторых дуг кривой $F(x, u)=0$ и некоторых прямых, параллельных оси x (Стокер [18], стр. 128).

Основное уравнение

$$F=0 \quad \text{или} \quad x=u-\frac{1}{3}u^3$$

дает приближенное решение, за исключением окрестностей тех точек, где производная

$$\frac{dx}{du} \equiv 1 - u^2$$

исчезает, т. е.

$$x = \pm \frac{2}{3}, \quad u = \pm 1.$$

Вблизи этих точек униформизация легко осуществляется с помощью метода «растяжения по двум направлениям» Кэрьера [4]:

$$x = \pm \frac{2}{3} + \alpha^m \xi, \qquad u = \pm 1 + \alpha^n \eta$$

с подходящими показателями m и n, выбранными так, чтобы сделать окончательное уравнение регулярным. Простейший выбор

$$m = 1, \quad n = 0$$

приводит к регулярному уравнению

$$(\pm 1 + \eta) \frac{d\eta}{d\xi} = \mp \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 - \alpha\xi.$$

7. Задача о тонком профиле. Хотя существует большое количество интересных и важных задач гидродинамики, приводящих к сингулярным возмущениям для уравнений в частных производных, и многие из них были изучены и униформизированы Лайтхиллом [13], Кэрьером [4] и Уитхэмом (см. [21] и многочисленные последующие статьи), все же их теория значительно менее продвинута, чем соответствующая теория для обыкновенных уравнений. Поэтому представляется полезным привести несколько специфических примеров.

В первую очередь рассмотрим задачу о тонком двумерном симметричном профиле, имеющем уравнение границы

$$y = \pm \alpha f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

и помещенном в равномерный поток несжимаемой невязкой жидкости, при условии, что скорость имеет на бесконечности компоненты $(U \cos \alpha, U \sin \alpha)$ [14]. Потенциал $\alpha\varphi$ скоростей возмущенного потока удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

и граничным условиям:

$$\varphi = O(R^{-1})$$

для больших

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

а также

$$(U \sin \alpha + \alpha\varphi_y) = \pm (U \cos \alpha + \alpha\varphi_x)\, \alpha f'(x)$$

на поверхности профиля. Вблизи передней кромки

$$[f(x)]^2 = c^2 x + O(x^2) \qquad (c \neq 0)$$

и

$$f'(x) = O(x^{-1/2}).$$

Поэтому граничные условия на поверхности сингулярны на передней кромке.

Приведенное граничное условие

$$(U + \varphi_y) = \pm\, Uf'(x)$$

должно выполняться на оси x: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и это уравнение вместе с уравнением для потенциала φ составляет основу «теории тонкого профиля». Главная задача состоит в улучшении этого приближения, но так, чтобы не начинать все решение заново.

Граничные условия можно униформизировать путем введения параболических координат ξ, η, где

$$x + iy - \frac{1}{4}\alpha^2 c^2 = c^2 (\xi + i\eta)^2.$$

Тогда

$$x = c^2 \left(\xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\right), \qquad y = 2c^2 \xi\eta$$

и парабола $\eta = \frac{1}{2}\alpha$ касается участка передней кромки

$$y^2 = \alpha^2 c^2 x + O(x^2).$$

Следовательно, в параболических координатах граница $y = \alpha f(x)$ имеет уравнение вида

$$\eta = \frac{1}{2}\alpha + \alpha P(\xi) = \frac{1}{2}\alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^n,$$

а точное граничное условие переходит в

$$\{-2Uc^2\eta\cos\alpha+2Uc^2\xi\sin\alpha+\alpha\varphi_\eta\}=$$
$$=\alpha P'(\xi)\{2Uc^2\xi\cos\alpha+2Uc^2\eta\sin\alpha+\alpha\varphi_\xi\}.$$

Это условие регулярно, и следовательно, задача допускает решение вида

$$\varphi=\varphi_0(\xi,\ \eta)+\alpha\varphi_1(\xi,\ \eta)+\ldots$$

8. Пограничный слой плоской пластины. Другой задачей, иллюстрирующей одновременно приемы Лайтхилла и Кэрьера, является задача об установившемся течении несжимаемой вязкой жидкости, обтекающей полубесконечную плоскую пластину

$$y=0,\qquad x\geqslant 0,$$

расположенную параллельно основному потоку. Естественными единицами длины, скорости и давления служат ν/U, U и ρU^2, где ν — кинематическая вязкость, U — скорость основного потока и ρ — плотность. При таких единицах уравнения Навье — Стокса относительно давления p и компонент скорости жидкости принимают вид

$$uu_x+vu_y=-p_x+\Delta u,$$
$$uv_x+vv_y=-p_y+\Delta v,$$

где

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}.$$

Граничные условия суть

$$u\to 1,\qquad v\to 0\qquad \text{при}\qquad x^2+y^2\to\infty,$$

кроме самой плоской пластины $y=0$, $x\geqslant 0$, где

$$u=0,\qquad v=0.$$

Здесь ни уравнения, ни граничные условия не содержат параметра, однако из эксперимента известно, что частные производные от u и v по y малы по сравнению с частными производными по x, если не считать передней кромки $x=0$, $y=0$, где, по-видимому, преобладает производная в радиальном направлении. Эти условия удобно записываются в параболических координатах ξ, η, таких, что

$$x+iy=(\xi+i\eta)^2$$

или

$$\xi = \left[\frac{1}{2}(r+x)\right]^{1/2}, \qquad \eta = \left[\frac{1}{2}(r-x)\right]^{1/2},$$

где

$$r = [x^2 + y^2]^{1/2}.$$

Функция тока ψ определяется уравнениями

$$u = \psi_y, \qquad v = -\psi_x,$$

$\psi \sim y = 2\xi\eta$ для больших $\xi^2 + \eta^2$ ($\eta \neq 0$!), и в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$\rho^2\Delta^2\psi - 4(\xi\Delta\psi_\xi + \eta\Delta\psi_\eta - \Delta\psi) =$$
$$= -\rho^2(\psi_\xi\Delta\psi_\eta - \psi_\eta\Delta\psi_\xi) + 2(\eta\psi_\xi - \xi\psi_\eta)\Delta\psi,$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Для сравнения преобладающих членов запишем

$$\eta = \varepsilon\bar{\eta}, \qquad \psi = \varepsilon^{-1}\bar{\psi},$$

вводя таким образом малый параметр ε и получая регулярное уравнение с этим параметром. Удерживая члены низшего порядка (т. е. содержащие ε^{-5}), находим приведенное уравнение

$$\xi^2\bar{\psi}^{IV} = -\xi^2(\bar{\psi}_\xi\bar{\psi}''' - \bar{\psi}'\bar{\psi}_\xi'') - 2\xi\bar{\psi}'\bar{\psi}'',$$

где штрихи обозначают дифференцирование по $\bar{\eta}$. Если положить теперь

$$\bar{\psi} = \xi f(\xi, \bar{\eta}),$$

то после примечательных и неожиданных упрощений обнаруживается, что функция f удовлетворяет *обыкновенному* дифференциальному уравнению

$$f^{IV} = -ff''' - f'f'',$$

которое благодаря граничным условиям на бесконечности немедленно интегрируется, давая

$$f^{III} + ff^{II} = 0.$$

Это — хорошо известное уравнение Блазиуса с граничными условиями:

$$f \sim 2\eta \quad \text{при больших } \eta,$$
$$f = 0, \quad f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0.$$

Однако независимой переменной является здесь

$$\eta = r^{1/2} \sin \frac{1}{2} \theta,$$

в то время как в классической задаче Блазиуса ею служит

$$\frac{y}{x^{1/2}} = \frac{r^{1/2} \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}}.$$

Предыдущее исследование принадлежит Кэрьеру и Лину [5], и нет никаких сомнений в преимуществе их решения этой задачи перед классическим решением Блазиуса [2]. До некоторой степени сходные исследования относительно аппроксимации следующего порядка выполнены Куо [11].

9. Точность приближений. Предыдущий краткий перечень некоторых методов и задач, интересующих математика-прикладника, несомненно, наведет на ряд вопросов и чистого аналитика. Однако наиболее важным является, конечно, вопрос о точности полученных приближений. Теорема существования, которая упоминалась выше, не дает почти ничего, кроме гарантии разложимости решения в степенной ряд по возмущающему параметру α. Немедленно возникают следующие вопросы:

1) Каков радиус сходимости этого ряда?

2) Какова скорость его сходимости?

3) Можно ли заранее указать верхнюю границу абсолютной величины ошибки, возникающей при отбрасывании всех членов ряда после N-го? В частности, можно ли сделать это в применении к «основному решению», когда $N=1$?

Классическим примером такой проблемы служит уравнение Блазиуса, получаемое в качестве «приведенного уравнения» для уравнений Навье — Стокса, описывающих обтекание полубесконечной плоской пластины несжимаемой невязкой жидкостью. В этом случае, как и во многих других физических задачах, даже приведенное уравнение не является линейным.

Уравнение Блазиуса, полученное в п. 8, имеет вид

$$f''' + ff'' = 0,$$

где штрихи обозначают дифференцирование по η. Требуется найти решение, определенное при $0 \leqslant \eta < \infty$ и удовлетворяющее граничным условиям:

$$f=0 \quad \text{и} \quad f'=0 \quad \text{при} \quad \eta=0$$

и

$$f'\to 2 \quad \text{при} \quad \eta\to\infty.$$

Решение представляется в виде степенного ряда (полученного Блазиусом [2])

$$f=c\left\{\frac{(c\eta)^2}{2!}-\frac{(c\eta)^5}{5!}+\frac{11\,(c\eta)^8}{8!}-\ldots\right\},$$

где

$$c^3=f''(0).$$

Вейль [20] показал, что радиус сходимости R этого степенного относительно η ряда удовлетворяет неравенствам

$$18<c^3R^3<60,$$

а Пуннис [17] получил более точные границы:

$$3{,}11<cR<3{,}18,$$

показав, что степенной ряд имеет простой полюс при $\eta=-R$. Таким образом, для аналитика возникает реальная задача об определении такого значения c, при котором удовлетворяется условие $f'\to 2$ при $\eta\to\infty$, в то время как практик-вычислитель не встречает особых затруднений в отыскании приближенного значения

$$f''(0)=1{,}328\ \ldots$$

Совершенно иной подход к этой задаче открывает вейлевское преобразование [20] дифференциального уравнения в интегральное уравнение вида

$$\ln F''(\eta)=\Phi(F'')=-\frac{1}{2}\int_0^\eta(\eta-s)^2F''(s)\,ds,$$

где

$$f(\eta)=cF(c\eta)$$

и по-прежнему

$$c^3=f''(0).$$

Если определить процесс итераций условиями:

$$F''_0=0, \qquad F''_{n+1}=\Phi(F''_n),$$

то

$$F_0'' < F_1'', \quad F_1'' > F_2'', \quad F_2'' < F_3'' \text{ и т. д.}$$

Последовательность $\{F_n''\}$ сходится, и любые два последовательных ее члена образуют верхнюю и нижнюю границы для предельной функции. Кроме того,

$$F_2''(\eta) = \exp\left(-\frac{1}{6}\eta^3\right)$$

оказывается приемлемым приближением к пределу.

Интегральные уравнения вейлевского типа успешно использовал Мексин [15] во многих своих статьях по теории пограничного слоя, хотя сходимость процесса итераций все еще нуждается в исследовании. В качестве примеров других важных работ о приближенных решениях дифференциальных уравнений в частных производных можно указать статьи Вестфаля [19] и Гёртлера [6].

10. Заключение. В предыдущем изложении термин «делинеаризация» прилагался к тому случаю, когда мы пытались вернуться от линейного приближения к исходному нелинейному уравнению. Существует, однако, другой род делинеаризации, важность которого, как я рискну заявить, со временем будет возрастать, а именно тот случай, когда точное линейное уравнение заменяется точным нелинейным. Этот, казалось бы, попятный шаг может иногда давать преимущество, поскольку случается, что хорошие приближенные решения легче получить для нелинейного уравнения, чем для линейного.

Один пример доставляет так называемый метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна для решения волнового уравнения Шредингера

$$\varepsilon^2\psi'' + f(x)\psi = 0$$

при малых значениях параметра ε. Этот метод, принадлежащий Джеффрису [8, 9], состоит в том, что полагают

$$\psi = \exp\left\{i\varepsilon^{-1}\int \chi\, dx\right\}$$

и таким образом получают уравнение Риккати

$$-\chi^2 + i\varepsilon\chi' + f = 0$$

с решением в форме ряда

$$\chi=\chi_0-i\varepsilon\chi_1+\ldots, \qquad \chi_0=f^{1/2},\ \chi_1=-\frac{1}{2}\frac{\chi_0'}{\chi_0}.$$

Другой пример возникает из новой теории дифракции, ведущей начало от Биркгофа [1] и развитой Келлером, Льюисом и Секлером [10]. Здесь волновое уравнение для монохроматического света

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u+k^2u=0$$

решается в форме

$$u\sim e^{ik\psi}\sum_{n=0}^{\infty}(ik)^{-n}v_n,$$

где ψ, v_0, v_1, ... удовлетворяют нелинейным уравнениям

$$(\operatorname{grad}\psi)^2=1,$$

$$2\operatorname{grad} v_n\operatorname{grad}\psi+v_n\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=-\operatorname{div}\operatorname{grad} v_{n-1} \qquad (v_{-1}\equiv 0!).$$

Эти примеры наводят на мысль, что эра линейных уравнений и линеаризации нелинейных уравнений может смениться эрой делинеаризации линейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G. D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 681 (1933).
[2] Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. Phys. **56**, 1 (1908).
[3] Carrier G. F., Boundary layer problems in applied mathematics, Commun. Pure Appl. Math. **7**, 11—17 (1954).
[4] Carrier G. F., Boundary layer problems in applied mechanics, Advanc. Appl. Mech. **3**, 1—19 (1953).
[5] Carrier G. F. and Lin C. C., On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate, Quart. Appl. Math. **6**, 63—68 (1948).
[6] Görtler H., Über die Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vom Reibungsschichttypus, Z. angew. Math. Mech. **30**, 265—267 (1950).
[7] Goursat E., Cours d'analyse mathematique, t. II, p. 371, Paris, 1911.
[8] Jeffreys H., On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **23**, 428—436 (1925).
[9] Jeffreys H., Asymptotic solutions of linear differential equations, Phil. Mag. (7), **33**, 451—456 (1942).

[10] Keller J. B., Lewis R. M. and Seckler B. D., Asymptotic solution of some diffraction problems, Commun. Pure Appl. Math. **9**, 207—265 (1956).
[11] Kuo Y. H., On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds number, J. Math. Phys. **32**, 83—101 (1953).
[12] Lighthill M. J., The position of the shock wave in certain aerodynamic problems, Quart. J. Mech. Appl. Math. **1**, 309—318, Oxford (1948).
[13] Lighthill M. J., A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, Phil. Mag. (7), **40**, 1179—1201 (1949).
[14] Lighthill M. J., A new approach to thin aerofoil theory, Aeronaut. Quart. **3**, 193—210 (1951).
[15] Meksyn D., Integration of the laminar boundary layer equation. I. Motion of an elliptic cylinder. Separation. II. Retarded flow along a semi-infinite plane. Proc. Roy. Soc. **A**, 268—283 (1950).
[16] Poincare H., Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, I, ch. 3, Paris, 1892.
[17] Punnis B., Zur Differentialgleichung der Plattengrenzschicht von Blasius, Archiv Math. **7**, 165—171 (1956).
[18] Stoker J. J., Non-linear vibrations, p. 128, New York, 1950.
[19] Westphal H., Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen, Math. Z. **51**, 690—695 (1949).
[20] Weyl H., Concerning the differential equations of some boundary layer problems, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. **27**, 578 (1941).
[21] Whitham G. B., The behaviour of supersonic flow past a body revolution, far from the axis, Proc. Roy. Soc. **A201**, 89—109 (1950).

ОТ ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ МНОГООБРАЗИЙ К ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ МНОГООБРАЗИЯМ*)

Р. Том

(Франция)

1. Общие сведения о группах дифференцируемых гомеоморфизмов. Пусть V^n — произвольное связное отделимое дифференцируемое многообразие; под дифференцируемостью мы всегда будем понимать r-кратную дифференцируемость, где $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Символом $\mathrm{Dif}(V^n)$ обозначим группу всех автоморфизмов дифференцируемого многообразия V^n, снабженную C^r-топологией (в которой близость отображений определяется близостью их и их производных до порядка r включительно на каждом компакте). Если многообразие V^n ориентируемо, мы ограничимся рассмотрением дифференцируемых гомеоморфизмов степени 1.

Любой дифференцируемый гомеоморфизм f связного многообразия V можно продеформировать (в смысле C^r-топологии) в такой дифференцируемый гомеоморфизм g, для которого выполнены следующие условия:

1) g оставляет на месте некоторую заданную точку $p \in V$;

2) g касателен к тождественному отображению в точке p вплоть до порядка r;

3) g совпадает с тождественным отображением в некоторой окрестности точки p.

Первые два свойства известны; полное доказательство всех трех утверждений будет изложено в статье Жана Серфа, которая скоро выйдет в свет.

---

*) R. Thom, Des variétés triangulées aux variétés differentiables.

1.1. Дифференцируемые гомеоморфизмы шаров и сфер. Символами $\mathrm{Dif}(B^{n+1})$, $\mathrm{Dif}(S^n)$ обозначим группы дифференцируемых гомеоморфизмов первой степени $(n+1)$-мерного шара и n-мерной сферы. Символами $\pi_0(\mathrm{Dif}(B^{n+1}))$, $\pi_0(\mathrm{Dif}(S^n))$ обозначим дискретные фактор-группы этих групп по связным компонентам единицы. Милнор доказал следующий факт:

Теорема 1. *Группы* $\pi_0(\mathrm{Dif}(B^{n+1}))$ *и* $\pi_0(\mathrm{Dif}(S^n))$ *коммутативны.*

Доказательство. Пусть f, g — дифференцируемые гомеоморфизмы сферы S^n. В силу свойства 3 их можно деформировать соответственно в гомеоморфизмы f_1, g_1, первый из которых совпадает с тождественным на северной полусфере E^{n+} сферы S^n, а второй — на южной полусфере E^{n-}. Ясно, что в этом случае

$$f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1.$$

Ограничение гомеоморфизма шара до гомеоморфизма его границ определяет канонический гомоморфизм j: $\mathrm{Dif}(B^{n+1}) \to \mathrm{Dif}(S^n)$ (на самом деле он задает расслоение над связной компонентой единицы). Отсюда следует, что фактор-группа $\mathrm{Dif}(S^n)/j\mathrm{Dif}(B^{n+1})$ дискретна и изоморфна фактор-группе $\pi_0(\mathrm{Dif}(S^n))/j\pi_0(\mathrm{Dif}(B^{n+1}))$. Эту абелеву группу мы будем обозначать символом Γ_{n+1}. Известно, что некоторые из этих групп являются ненулевыми (например, Γ_7); тем не менее не известно ни одного примера отличной от нулевой группы $\pi_0(\mathrm{Dif}(B^m))$.

2. Дифференцируемые подразделения дифференцируемого многообразия. Пусть K — некоторое симплициальное разбиение, $|K|$ — соответствующее топологическое пространство. Предположим, что это пространство представляет собой многообразие, которое можно снабдить дифференцируемой структурой ($\mathscr{S}$). В этом случае мы говорим, что разбиение K представляет собой *дифференцируемое* подразделение многообразия X, если каноническое отображение $\sigma^k \to |K|$ любого симплекса представляет собой дифференцируемое отображение максимального ранга стандартного k-симплекса евклидова пространства в многообразие X. Любой симплекс тем самым оказывается частью многообразия, вложенного в X, а некоторая нормальная трубчатая окрестность симплекса σ^k содержит в качестве подмногообразий симплексы звезды симплекса σ^k. Пересекая ее в точке $x \in \sigma^k$ трансверсальной

$(n-k)$-плоскостью, получаем «трансверсальную звезду» симплекса σ^k, которая представляет собой $(n-k)$-мерный дифференцируемый шар, содержащий в качестве локально линейных подмногоообразий сечения симплексов звезды σ^k, размерность которых больше k. Отсюда следует, что такая триангуляция представляет собой «триангуляцию Брауэра» в терминологии Кэрнса*).

Предположим, что разбиение K задано, например, своей комбинаторной схемой. Ставится задача определить, можно ли снабдить многообразие $X=|K|$ дифференцируемой структурой в целом, содержащей K в качестве дифференциального подразделения, а также классифицировать все такие структуры с точностью до изоморфизма. Для того чтобы эта задача имела смысл, следует с самого начала предположить, что пространство $|K|$ является многообразием, а разбиение K — его «подразделением Брауэра», иначе говоря, что любому симплексу σ^r соответствует некоторая локальная карта, содержащая этот симплекс как линейное подмногообразие, причем все симплексы звезды симплекса σ^r также линейно вложены в эту карту.

Дифференцируемую структуру на многообразии X мы будем строить последовательно над остовами K^i. Дифференцируемая структура в окрестности 0-мерного остова задается сопоставлением каждой вершине соответствующей локальной карты, которая определяется свойством Брауэра подразделения K. Таким образом, задача будет состоять в том, чтобы заданную в окрестности границы $\partial\sigma^{k+1}$ $(k+1)$-мерного симплекса дифференцируемую структуру $(\mathscr{S})$ продолжить (если это возможно) на некоторую окрестность симплекса σ^{k+1}. В этом заключается проблема локального продолжения дифференцируемой структуры, которую мы изучим подробнее.

3. Локальное продолжение дифференцируемой структуры. Пусть заданы многообразие M с границей V и многообразие M' с границей V' той же размерности. Предположим, что в границах V, V' этих многообразий заданы два дифференцируемо гомеоморфных многообразия с границами $G \subset V$, $G' \subset V'$, причем $\dim G = \dim G' = \dim V$. Если в объединении $M \cup M'$ отождествить G с G' при помощи этого гомеомор-

*) Это условие не является ограничением, ибо, как показал Уайтхед, любое триангулированное многообразие обладает подразделением Брауэра.

физма, получится некоторое новое многообразие с границей P, структура которого определена однозначно с точностью до дифференцируемого гомеоморфизма. Эта структура не изменится также, если заменить гомеоморфизм склеивания g: $G \to G'$ гомеоморфизмом, который получается из g непрерывной деформацией.

Именно этот процесс мы используем для продолжения структуры $(\mathscr{S})$ с границы S^k нашего $(k+1)$-симплекса σ^{k+1} на внутренность этого симплекса. Поскольку структура $(\mathscr{S})$ определена в окрестности границы $\partial\sigma^{k+1}$, можно определить дифференцируемое относительно $(\mathscr{S})$ многообразие с границей M, являющееся регулярной «трубчатой окрестностью» границы $\partial\sigma^{k+1}$ относительно структуры $(\mathscr{S})$. Такая окрестность содержит пересечение $\sigma^{k+1} \cap M$ как подмногообразие, а пересечение границы $V = \partial M$ с симплексом σ^{k+1} представляет собой, по крайней мере топологически, k-сферу S^k, топологически изотопную (в несколько расширенном симплексе σ^{k+1}) полиэдральной границе $\partial\sigma^{k+1}$.

В качестве G выберем некоторую трубчатую окрестность сферы S^k внутри V. Симплексу σ^{k+1} соответствует его «карта Брауэра», в которой этот симплекс линеен. Нетрудно определить некоторую вложенную дифференцируемым образом сферу S^k, изотопную границе $\partial\sigma^{k+1}$ относительно дифференцируемой структуры $(\mathscr{T})$, связанной с картой Брауэра. В качестве M' выберем трубчатую окрестность симплекса σ^{k+1} относительно структуры $(\mathscr{T})$ на нормальных плоскостях к сфере S^k. Нормальная окрестность сферы S^k будет многообразием с границей G'. Мы выясним, являются ли многообразия G и G', представляющие собой $(n-k)$-сферические расслоения, дифференцируемо гомеоморфными. Если являются, мы применим общую конструкцию. Останется проверить, что полученное с помощью отождествления многообразие действительно гомеоморфно некоторой окрестности симплекса σ^{k+1}, а это следует из того, что две сферы S^k, отождествленные в σ^{k+1}, изотопны полиэдральной границе $\partial\sigma^{k+1}$, а нормальные к σ^{k+1} плоскости относительно структур $(\mathscr{S})$ и $(\mathscr{T})$ определяют полиэдры, изотопные трансверсальной звезде в каждой точке x симплекса σ^{k+1}, т. е. звезде, которая определена внутренним образом.

На самом деле многообразие M' как трубчатая окрестность шара дифференцируемо гомеоморфно произведению

$B^{k+1} \times B^{n-k}$. Поэтому требуемое отождествление окажется возможным, если удастся найти сферу $\sum$, близкую к $\partial\sigma^{k+1}$ относительно структуры $(\mathscr{S})$ и такую, что ее дифференцируемая структура совпадает с обычной, а ее нормальная окрестность тривиальна. Иначе говоря, если мы заметим, что симплекс σ^{k+1} дифференцируемо вложен относительно обеих структур $(\mathscr{S})$ и $(\mathscr{T})$, задача продолжения структуры $(\mathscr{S})$ окажется разбитой на две задачи:

1) *продолжение «касательной» структуры — ограничение структуры* $(\mathscr{S})$ *на симплекс* σ^{k+1};

2) *продолжение расслоенной структуры нормальных векторов на* σ^{k+1} *относительно* $(\mathscr{S})$.

Предположив временно, что первая задача решена, займемся второй задачей. Первая трудность состоит в том, чтобы показать, что расслоенная нормальная к $\sum$ относительно $(\mathscr{S})$ структура является структурой прямого произведения. Это можно сделать с помощью следующего замечания. Пусть σ^n — произвольный n-симплекс звезды симплекса σ^{k+1}. Его сечение нормальной (относительно $(\mathscr{S})$) к σ^{k+1} плоскостью в точке x определяет $(n-k-1)$-симплекс (максимальной размерности) «трансверсальной звезды» в точке x, симплекс, одна из вершин которого находится в точке x. Касательные векторы в точке x к ребрам этого симплекса-сечения определяют в каждой точке $x \in \sum$ некоторый репер расслоения нормальных векторов. Поскольку этот репер определен в каждой точке x и непрерывно меняется вместе с этой точкой, отсюда вытекает, что нормальное расслоение тривиально.

Таким образом, нормальную структуру продолжить легко, однако серьезное затруднение появляется вследствие того, что новая структура должна содержать симплексы звезды симплекса σ^{k+1} как линейные подмногообразия в каждой точке. Это условие выполнено для структуры $(\mathscr{T})$; будет ли оно выполнено для продолженной структуры $(\mathscr{S})$? При отождествлении нормальных расслоений относительно структур $(\mathscr{S})$ и $(\mathscr{T})$ можно предположить, что в качестве соответствующих берутся реперы, определенные симплексом σ^n трансверсальной звезды, как это было описано выше. Когда точка x меняется на $\sum$, сечение трансверсальной звезды нормальной сферой порождает некоторую переменную геодезическую триангуляцию этой сферы, в которой симплекс максимальной размерности (а именно сечение σ^{n-k} симплекса σ^n) остается постоянным. Тем самым задача продолжения будет разрешима, если отображение сферы S^k в пространство геодезических триангуляций сферы, изотопных заданной триангуляции (с фиксированным симплексом) гомотопно нулю. Обращая рассуждение, мы приходим к рассмотрению пространства всех полулинейных автоморфизмов некоторого симплициального подразделения симплекса. Задача, таким образом, сводится к доказательству следующего результата:

Теорема 2. *Пространство всех полулинейных гомеоморфизмов симплициального подразделения m-симплекса в себя, тождественных на границе этого симплекса, асферично.*

Полулинейным гомеоморфизмом симплекса s^m в себя называется гомеоморфизм s^m на себя, линейный на каждом из симплексов заданной триангуляции этого симплекса. Ясно, что такой гомеоморфизм вполне определяется заданием образов вершин. Следовательно, в пространстве таких гомеоморфизмов определена естественная топология открытого подмножества пространства $(R^m)^q$, соответствующего возможным положениям образов q вершин внутри s^m. Для заданного подразделения (K) симплекса s^m определим пространство (H) его полулинейных гомеоморфизмов. Предположим теперь, что один из m-симплексов (z) разбиения (K) подразделен с помощью введения новой вершины y внутри (z). Этим определяется новое подразделение (K'), пространство полулинейных гомеоморфизмов которого мы обозначим символом (H'). Любой элемент пространства (H') получается из некоторого элемента пространства (H) с помощью подразделения симплекса (z), чем определяется отображение пространства (H') в пространство (H). Слоем относительно этого отображения является множество положений точки y в симплексе (z), которое асферично. Поэтому пространства (H') и (H) имеют один и тот же гомотопический тип.

Мы доказали тем самым теорему для всех подразделений, которые получаются из тривиального подразделения m-симплекса с помощью последовательности «конических подразбиений» симплексов наибольшей размерности m. К сожалению, классические барицентрические подразделения не принадлежат к этому типу. Таким образом, здесь для получения теоремы во всей ее общности следовало бы обратиться к некоторой сильной форме «основной гипотезы».

Из сказанного вытекает, что если трансверсальные звезды симплексов разбиения K удовлетворяют описанному условию, то продолжение нормальной структуры возможно. Впредь мы будем считать это выполненным.

4. Продолжение касательной структуры. Для того чтобы продолжение касательной структуры было возможным, достаточно, чтобы сфера $\sum$, дифференцируемо близкая границе $\partial\sigma^{k+1}$ относительно структуры $(\mathscr{S})$, была изоморфна обычной сфере S^k. Кроме того, это условие необходимо для продолжения на $(k+1)$-мерный симплекс, ибо можно показать, что при заданной структуре объемлющего пространства дифференцируемая структура приближения к границе $\partial\sigma^{k+1}$ определяется однозначно.

Заметим, кроме того, что сфера $\sum$ обладает некоторым дифференцируемым подразделением, изоморфным $\partial\sigma^{k+1}$. Пусть s^k — один из симплексов этого подразделения. Тогда дополнение $\sum - s^k$, состоящее из k симплексов размерности k, дифференцируемо гомеоморфно одному из этих k-мерных симплексов (от одного симплекса к объединению k-симплексов мы переходим с помощью последовательности $k-1$ элементарных расширений в смысле Уайтхеда, но, поскольку евклидов шар изоморфен произведению $B^{n+1}\times I$, любое расширение определяет дифференцируемый гомеоморфизм).

Отсюда вытекает, что сфера $\sum$ получается склеиванием двух шаров (как полусфер) по их общей границе S^{k-1}. При этом условии две такие сферы будут или не будут дифференцируемо гомеоморфны в зависимости от того, принадлежат или не принадлежат гомеоморфизмы склеивания $S^{k-1}\to S^{k-1}$ одной и той же связной компоненте группы $\mathrm{Dif}(S^{k-1})$ по модулю $\mathrm{Dif}(B^k)$. Тем самым множество дифференцируемых структур сферы S^k (совместимых с дифференцируемым подразделением, изоморфным границе $(k+1)$-симплекса) отождествляется с абелевой группой Γ_k. Следовательно, эта группа определяет характер препятствия к продолжению на $(k+1)$-скелет дифференцируемой структуры, заданной на k-остове.

Кроме того, в случае, когда это препятствие обращается в нуль, сфера $\sum$ дифференцируемо гомеоморфна сфере S^k, так что их можно отождествить с помощью отображения $S^k\to\sum$. Меняя при необходимости параметризацию симплекса σ^{k+1}, можно изменить приклеивающее отображение на любой элемент группы Γ_{k+1}; таким образом, различные возможные продолжения находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы Γ_{k+1}.

Лемма сложения. *Пусть σ^{r+1} — стандартный $(r+1)$-мерный симплекс. Границей любой его грани F^r является сфера $\partial\sigma^r = S^{r-1}$. Можно изменить параметризацию каждой грани F_j, меняя отображение, приклеивающее S^{r-1} к F_j, на некоторый элемент γ_j группы Γ_r; тогда дифференцируемая структура в целом сферы S^r, полученной склеиванием так видоизмененных симплексов F_j, соответствует элементу $c \in \Gamma_r$, который определен формулой $c = \sum (-1)^\gamma \gamma_\gamma$.*

Продолжая предполагать возможность продолжения «нормальных» структур, мы видим, что продолжение «касательных» структур натыкается на препятствия с значениями в группах Γ_j. Можно проверить, что эти препятствия обладают всеми классическими свойствами препятствий теории гомотопий. Они являются коциклами, а обращение в нуль их класса представляет собой необходимое и достаточное условие возможности продолжения структуры, возможно, после некоторой деформации ее на скелете соответствующей размерности.

Кроме того, из леммы сложения следует, что для барицентрического подразделения K' разбиения K соответствующие K' препятствия при каноническом гомоморфизме $C(K') \to C(K)$ дают все препятствия, соответствующие K. Поэтому конструкция дифференцируемой структуры на K формально представляется как построение сечения расслоения $\hat{K} \to K$, слоем которого является такое абстрактное разбиение Γ, что $\pi_i(\Gamma) = \Gamma_i$. Такое расслоение порождает систему Постникова

$$\hat{K} \to \ldots \to \hat{K}_n \to \ldots \to \hat{K}_{j+1} \to \hat{K}_j \to \ldots \to K,$$

где слоем отображения $\hat{K}_{j+1} \to \hat{K}_j$ является «разбиение Эйленберга — Маклейна» $K(\Gamma_j j)$. Инварианты k_j этой системы оказываются последовательными препятствиями к построению сечения. Неизвестно, являются ли эти инварианты топологическими (они определяются комбинаторным путем). Один пример Милнора показывает, что они не являются инвариантами гомотопического типа.

5. Классификация дифференцируемых структур.

Теорема 3. *Пусть M^{n+1} — дифференцируемое многообразие с границей, гомеоморфное произведению $V^n \times I$, где V^n — такое дифференцируемое многообразие, что граница многообразия M^{n+1} гомеоморфна $(V, 0) \cup (V, 1)$. Обозначим символом K некоторое дифференцируемое подразделение многообразия V и предположим, что многообразие M^{n+1} обладает дифференцируемым подразделением, изоморфным произведению $K \times I$. Тогда подмногообразия $(V, 0)$ и $(V, 1)$ дифференцируемо гомеоморфны, а многообразие M^{n+1} дифференцируемо гомеоморфно произведению $V \times I$.*

5.1. Указания на метод доказательства. Рассмотрим в M дифференцируемые гиперповерхности $t = \text{const}$, $t \in I$. В любой точке $p \in M$ существует трансверсальный вектор к поверхности $t = t(p)$, касательный к образу $p \times I$ в многообразии M. На каждой гиперповерхности поле дифференцируемо в M, так что его можно приблизить дифференцируемым полем H, которое также будет трансверсально к гиперповерхностям $t = \text{const}$. Интегрирование векторного поля H (по некоторой норме) определит однопараметрическую группу дифференцируемых гомеоморфизмов, которая превратит многообразие M в дифференцируемое прямое произведение $V \times I$ (отметим, что эта структура прямого произведения не сохраняет заранее заданную триангуляцию $K \times I$). Пусть K — некоторое подразделение, которое можно снабдить двумя дифференцируемыми структурами $(\mathscr{S}^0)$ и $(\mathscr{S}^1)$. Предположим еще, что произведение $K \times I$ можно снабдить такой дифференцируемой структурой, что границы $(K, 0)$ и $(K, 1)$ окажутся дифференцируемо вложены в это произведение со структурами $(\mathscr{S}^0)$ и $(\mathscr{S}^1)$ соответственно. Тогда из теоремы 3 будет следовать, что структуры $(\mathscr{S}^0)$ и $(\mathscr{S}^1)$ изоморфны. Интерпретируя дифференцируемую структуру как сечение расслоения $\hat{K}$ со слоем Γ, мы получаем, что сечения, соответствующие $(\mathscr{S}^0)$ и $(\mathscr{S}^1)$, являются ограничением одного и того же сечения над $K \times I$ и потому являются гомотопными сечениями. Таким образом, гомотопным сечениям расслоения K соответствуют изоморфные дифференцируемые структуры.

Замечание. Полученная классификация структур тоньше, чем классификация с точностью до обыкновенных дифференцируемых автоморфизмов. Соответствующее соотношение эквивалентности можно было бы сформулировать так: два дифференцируемых многообразия V, V', снабженные изоморфными дифференцируемыми подразделениями K, K', называются «эквивалентными», если существует такой дифференцируемый гомеоморфизм h многообразия V на многообразие V', что подразделения K' и $h(K)$ многообразия V' «изотопны».

5.2. Некоторые следствия. Если принять следующий результат:

Теорема 4. *Пространство полулинейных автоморфизмов симплициального подразделения симплекса стягиваемо,* то можно доказать, что:

(I) Любое триангулированное стягиваемое многообразие обладает дифференцируемой структурой, совместимой с триангуляцией.

(II) На стягиваемом многообразии две дифференцируемые структуры, совместимые с триангуляцией, изоморфны.

Если принять к тому же «основную гипотезу», отсюда можно было бы вывести единственность дифференцируемой структуры шаров и евклидова пространства. В самом деле, расслоение над стягиваемой базой всегда имеет сечения, и любые два сечения гомотопны.

НЕКОТОРЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ *)

Г. Е. Уленбек

(Англия)

1. Введение. В свое время в 1950 году я уже имел удовольствие и честь обсуждать некоторые основные проблемы статистической механики в математической аудитории. Я чрезвычайно обязан за эту повторную возможность, особенно в связи с тем обстоятельством, что за последние десять лет наблюдалось возрождение интереса к проблемам статистической механики и, как следствие этого, имело место заметное продвижение в исследовании этих вопросов. Я, конечно, далек от мысли, что указанное возрождение явилось результатом моей первой лекции, однако сейчас, по-видимому, достаточно будет представить своего рода каталог еще не решенных проблем, в основном математического содержания, которые, быть может, смогут заинтересовать кого-либо из присутствующих здесь. Несомненно, что всякий интересующийся проблемами статистики или теории вероятностей может извлечь большую пользу из знакомства со статистической физикой. Вещество в молекулярном состоянии дает нам «популяции» всевозможных видов и типов, и, кроме того, статистические закономерности здесь допускают прямое экспериментальное исследование, так как они лежат в основе явлений и законов макроскопической физики. Этих законов имеется большое количество, но только очень немногое здесь может быть понято и объяснено на основе первичных фундаментальных принципов.

---

*) G. Uhlenbeck, Some fundamental problems in statistical physics.

Все проблемы статистической физики естественно разделить на *равновесные* и *неравновесные*. Если рассматриваемая система, состоящая, скажем, из N молекул с *известным* законом взаимодействия, находится в тепловом равновесии с резервуаром тепла, характеризуемым температурой T, то вероятность W такой системе находиться в некотором состоянии дается каноническим распределением

$$W \sim e^{-\frac{E}{kT}}, \tag{1}$$

где E — энергия всей системы — является функцией переменных, определяющих состояние системы. Это утверждение является общепризнанным, и можно сказать, что соотношение (1) «решает» полностью все равновесные проблемы. Действительно, так называемая функция состояний (статистическая сумма)

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}, \tag{2}$$

где суммирование распространяется на все состояния системы, связана со свободной энергией Ψ соотношением $\Psi = -kT \ln Z$, а зная Ψ, мы можем найти большинство наблюдаемых на опыте средних значений в результате простого дифференцирования. Конечно, как говорил Пуанкаре, проблема может считаться решенной только в большей или меньшей степени и никогда не может быть решенной до конца, и соотношения (1) и (2) на самом деле дают нам только очень малую часть того, что мы хотели бы знать. Сумма (2) может быть точно вычислена только в некоторых немногих случаях; обычно же мы должны использовать разложения в ряд по некоторому параметру или методы последовательных приближений, сходимость которых почти никогда не может быть установлена. При вычислениях мы сталкиваемся с тонкими проблемами комбинаторного анализа, некоторые из которых известны своей сложностью. В результате даже такие всем известные явления, как плавление твердого тела в некоторой вполне определенной точке плавления или существование критической точки для газов, пока еще не были объяснены с точки зрения фундаментальных принципов.

Я воздержусь от дальнейших подробностей главным образом ввиду отсутствия общих методов рассмотрения статистических сумм типа (2), которые бы допускали исследование предельных свойств при $N \to \infty$, что необходимо для объяснения явления фазовых переходов. Это не означает отсутствия физических подходов к решению этих проблем, но эти подходы обычно основаны на качественных соображениях или же интуитивных и «неконтролируемых» приближениях. Они представляют большую ценность, и я не хочу умалять их значения, но при этих подходах к проблеме редко предоставляется поле деятельности для математика, а поэтому они, вероятно, менее интересны для вас.

Я хотел бы сосредоточить свое внимание на неравновесных проблемах, поскольку, в определенном смысле, проблема приближения к состоянию равновесия является центральной проблемой статистической механики — я предлагаю назвать ее *проблемой Больцмана* — и поскольку в недавних работах выявилась некоторая общая точка зрения, которая, мне кажется, представляет и математический интерес, так как содержит намек на обобщение эргодической теории.

2. Уравнение Больцмана. Я начну с классической кинетической теории газов. Рассмотрим молекулярную систему простейшего типа: N точечных молекул в сосуде (объема V), отталкивающих друг друга под действием центрального монотонного потенциала $\varphi(r_{ij})$ для каждой пары (i, j), который имеет конечный радиус действия r_0, так что $\varphi(0) \to \infty$ и $\varphi(r_0) = 0$. Если число молекул очень велико, а r_0 мало в сравнении со средней длиной свободного пробега λ молекул, то состояние газа может быть описано при помощи функции распределения $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$, определяющей число молекул в элементарном объеме фазового пространства (μ-пространства), в момент времени t. Изменение состояния газа с течением времени описывается знаменитым уравнением Больцмана

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \int d\boldsymbol{v}_1 \int d\Omega g I(g, \theta)[f'f_1' - ff_1], \quad (3)$$

которое выражает предположение о том, что изменение f при перемещении вместе с молекулами в μ-пространстве происходит в результате столкновений с другими молекулами. В (3) $\boldsymbol{a}$ есть ускорение под действием *внешнего* потенциала $U(\boldsymbol{r})$; индексы у f отмечают только переменные скорости, так что, например, $f' \equiv f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t)$; четыре переменные скорости соответствуют скоростям при бинарном столкновении

$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1) \longleftrightarrow (\boldsymbol{v}', s_1')$; $g = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_1'|$ есть относительная скорость, которая при столкновении поворачивается на угол θ в телесном угле $d\Omega$; наконец, $I(g, A)$ есть дифференциальное поперечное сечение рассеяния, которое полностью определяется силовым законом $\varphi(r)$. Поскольку $\varphi(r)$ обладает конечным радиусом действия r_0, полное сечение

$$\sigma = \int d\Omega\, I(g, \theta) \tag{4}$$

также оказывается конечным.

Отложим пока критическое обсуждение уравнения (3), а сосредоточим свое внимание на математической стороне дела. После знаменитой работы Гильберта [1] 1910 года математики уделяли уравнению Больцмана довольно мало внимания, так что полезно будет указать здесь на некоторые до сих пор не решенные основные проблемы.

Во-первых, классические рассуждения Больцмана, основанные на его H-теореме, делают чрезвычайно вероятным то обстоятельство, что с течением времени *любое* начальное распределение $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, 0)$ перейдет в пределе $t \to \infty$ в равновесное распределение Максвелла — Больцмана:

$$f_0 = A \exp\left\{-\beta\left[\frac{mv^2}{2} + U(\boldsymbol{r})\right]\right\}, \tag{5}$$

где постоянные A и β определяются полным числом частиц и данной полной энергией. Доводы и аргументы Больцмана, занимающие центральное положение при обосновании законов термодинамики, вполне убедительны для физика, но надо признать, что им не хватает строгости, в основном потому, что заранее предполагается существование и единственность решения исходной задачи с начальными условиями. Поэтому может быть поставлена

Проблема I. *Показать, что в случае выполнения «соответствующих» условий при* $\boldsymbol{rv} \to \infty$ *и для «достаточного общего» вида внешнего потенциала* $U(\boldsymbol{r})$ *уравнение* (3) *имеет единственное решение задачи с начальными условиями, которое при* $t \to \infty$ *приближается к* (15).

Для пространственно однородного случая ($U \equiv 0$; f является функцией только $\boldsymbol{v}$ и t) и случая упругих сфер ($I(g, \theta) = \text{const}$) строгое доказательство этого утверждения было дано Карлеманом [2]. Распространение этого доказательства на случай другого закона взаимодействия, как мне кажется, не вызывает затруднений, но обобщение на пространственно неоднородный случай кажется далеко не очевидным.

3. Линеаризованное уравнение Больцмана. В случае наличия только малых возмущений равновесного состояния системы естественно положить

$$f = f_0 (l + h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)) \tag{6}$$

и пренебрегать членами, квадратичными по h. При этом мы получаем линеаризованное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(-\boldsymbol{v}\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{a}\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{v}}\right) + \int d\boldsymbol{v}_1 \int d\Omega g I(g, \theta)(h' + h' - - h_1 - h_1) f_{01} \equiv S(h) + C(h). \tag{7}$$

Сначала вновь рассмотрим случай пространственной однородности. Чтобы решить исходную задачу, важно найти собственные функции ψ_i и собственные значения λ_i оператора столкновений C, определяемые уравнением

$$C(\psi_i) = \lambda_i \psi_i. \tag{8}$$

Некоторые свойства этого уравнения совершенно очевидны. Всего имеется пять нулевых собственных значений, соответствующих собственным функциям 1, $\boldsymbol{v}$, v^2. Это следует из наличия пяти законов сохранения, выполняющихся при столкновениях. Все другие собственные значения должны быть отрицательными, что следует из неравенства

$$\int d\boldsymbol{v} f_0 \psi_i C(\psi_i) \leqslant 0. \tag{9}$$

Вследствие изотропности C собственные функции должны иметь форму

$$\psi_i = R_{rl}(v) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где использованы полярные координаты в пространстве скоростей. В одном случае (для так называемых максвелловских молекул, когда $gI(g, \theta) = F(\theta)$) ψ_i и λ_i были получены в явном виде, но относительно общих свойств известно очень мало. Вполне вероятно, что спектр собственных значений ограничен снизу, если полное сечение σ конечно. Предвосхищая отчасти результат, можно поставить следующую проблему.

Проблема II. *Показать, что линеаризованный оператор столкновений обладает дискретным спектром собственных значений $\lambda_i \leqslant 0$, ограниченным снизу.*

Зная ψ_i и λ_i, мы можем, очевидно, решить пространственно однородную задачу, разлагая $h(\boldsymbol{v}, t)$ по ψ_i, при этом получаем

$$h(\boldsymbol{v},\ t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \psi_i(\boldsymbol{v}), \tag{10}$$

где c_i определяются из $h(\boldsymbol{v},\ 0)$. Благодаря условию $\lambda_i < 0$ возмущение h затухает со временем.

Пространственно неоднородный случай здесь также оказывается значительно более сложным, что связано с различием в свойствах операторов S и C. Я хотел бы отметить только одну задачу, а именно задачу о распространении звука. Если интенсивность достаточно мала, звук представляет собой малое возмущение и должен, следовательно, описываться уравнением (7). Вследствие наличия скорости звука можно, по-видимому, считать, что уравнение (7) имеет характер уравнения распространения в том смысле, что решение $h(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ при любом t зависит только от начальных значений в конечной области. Я не думаю, что это утверждение является строгим, поскольку скорость звука не является предельной скоростью и на самом деле не существует никакой предельной скорости. Однако приближенно, для достаточно «гладких» начальных распределений, это должно быть справедливым. Таким образом, с некоторой неопределенностью может быть указана

Проблема III. *Показать, что решения линеаризованного уравнения Больцмана имеют в некотором приближенном смысле пропагационный характер.*

Д-р Ван Чан и автор [3] сделали попытку подойти к проблеме распространения звука, подбирая решения уравнения (7) в форме

$$h = h_0(\boldsymbol{v})\, e^{i(\omega t - \sigma z)}, \tag{11}$$

что соответствует волне, распространяющейся в направлении $+z$. При этом уравнение (7) принимает форму

$$i(\omega - \sigma v_z)\, h_0 = C(h_0), \tag{12}$$

если положить $a = 0$. Разлагая h_0 по собственным функциям C, мы получаем бесконечную систему однородных линейных уравнений. Приравнивая нулю бесконечный определитель, получаем соотношение между ω и σ, которое выражает собой закон дисперсии для газа. Обрывая детерминант при использовании только тех собственных функций ψ_i, которые соответствуют нулевым собственным значениям, находим выражение $\omega = V_0\sigma$, где $V_0 = (5kT/3m)^{1/2}$ — хорошо известная формула для скорости звука. Учитывая все большее и большее число собственных функций, можно показать, что скорость $V = \omega/\sigma_1$, где σ_1 есть действительная часть σ $(\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2)$, монотонно увеличивается при увеличении ω. Однако теперь, как и нужно было ожидать, возникает поглощение звуковой волны, выражаемое σ_2, которое также увеличивается с ростом ω. К сожалению, мы не смогли установить сходимость указанной процедуры. Опуская поэтому несущественные детали, мы формулируем следующую проблему:

Проблема IV. *Найти закон дисперсии для возмущения в форме* (11) *и показать, что как скорость, так и коэффициент поглощения при* $\omega \to \infty$ *стремятся к бесконечности.*

Вторая часть проблемы, конечно, является только предположением. Интересно, может быть, отметить, что эксперименты Гринспана [4], по-видимому, подтверждают это предположение; при самых высоких частотах скорость звука в гелии была уже в три раза больше V_0.

4. Разложение Чепмена—Энскога. Обычно макроскопические свойства газа описываются при помощи уравнений гидродинамики, так что возникает проблема вывода этих уравнений исходя из уравнения Больцмана. Этот вопрос получил свое решение в диссертации Энскога 1917 года, причем большое влияние на эти исследования оказал Гильберт. Чепмен, используя другой метод, восходящий еще к Максвеллу, пришел к тем же результатам. Давая здесь краткий обзор этой теории, я хочу подчеркнуть математические особенности проблемы, которые довольно любопытны и, как мне кажется, имеют фундаментальное значение. Дальнейшие подробности можно найти в монографии Чепмена и Коулинга [5].

Вернемся к уравнению Больцмана и проблеме приближения системы к состоянию равновесия. На основании физических соображений можно предполагать, что этот процесс протекает как бы в *два* этапа. Благодаря столкновениям между молекулами любое начальное распределение очень быстро (за время порядка среднего времени свободного пробега

$t_0=\lambda/v_{av}$) перейдет в локальное распределение Максвелла

$$f^{(0)}=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2}{2kT}\right], \tag{13}$$

где n, $\boldsymbol{u}$ и T (*макроскопические переменные*) все еще являются функциями $\boldsymbol{r}$ и t. Отметим различие между (13) и полностью равновесным распределением (5). На втором этапе происходит медленное изменение макроскопических переменных, которые приближаются к своим равновесным значениям; именно этот этап всего процесса мы рассмотрим более подробно. Положим

$$f=f^0[1+\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)] \tag{14}$$

и подставим это выражение в уравнение Больцмана. В интеграле столкновений сохраним только члены, линейные по φ, а в $\frac{\partial f}{\partial t}$ и членах, выражающих поток, оставим только $f^{(0)}$. Таким образом, мы получаем неоднородное линейное интегральное уравнение

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-S\right)f^{(0)}&=J(\varphi),\\ J(\varphi)&\equiv\int dv_1\int d\Omega gI(g, \theta)(\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1)f^{(0)}f_1^{(0)}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Однородное уравнение $J(\varphi)=0$ имеет пять решений 1, $\boldsymbol{v}$ и v^2, которые назовем φ_i. Для того чтобы (15) имело решение, необходимо, чтобы правая часть была ортогональна к φ_i. Оказывается, что уравнения разрешимости являются не чем иным, как уравнениями для идеальной жидкости или уравнениями Эйлера для n, $\boldsymbol{u}$ и T, причем $p=nkT$. Эти условия дают возможность выразить производные по времени через пространственные производные, так что в конце концов мы получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-S\right)f^{(0)}=f^{(0)}\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{U_\alpha}{T}\left(\frac{m}{2kT}U^2-\frac{5}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{kT}D_{\alpha\beta}\left(U_\alpha U_\beta+\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}U^2\right)\right], \tag{16}$$

где $U_i=v_i-u_i$ есть скорость теплового движения, а

$$D_{ij}=\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$$

— тензор деформаций. С правой частью вида (16) уравнение (15) имеет решение, которое является также и единственным, если потребовать выполнения условия

$$\int \varphi_i f^{(0)} \varphi \, d\boldsymbol{v} = 0,$$

которое соответствует тому, что макроскопические переменные выражаются только через $f^{(0)}$.

Обладая решением φ, мы можем вычислить тензор натяжений P_{ij} и поток тепла q_i, для которых находим хорошо знакомые формулы законов Ньютона и Фурье:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= p\delta_{ij} - 2\mu\left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha}\delta_{ij}\right), \\ q_i &= -\nu \frac{\partial T}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{17}$$

где, однако, коэффициенты вязкости и теплопроводности μ и ν являются уже известными величинами. Они выражаются через эффективное сечение рассеяния $I(q, \theta)$ и могут, таким образом, быть вычислены, если мы знаем закон взаимодействия между молекулами. С помощью (17) можно в дальнейшем «исправить» уравнения Эйлера и получить уравнения «второго порядка», или уравнения Навье—Стокса. В конце этого краткого обзора сделаем несколько замечаний:

(1) По существу, выше был изложен метод последовательных приближений, который может быть продолжен и далее. Параметр разложения — порядка относительного изменения макроскопических переменных на расстояниях, соответствующих длине свободного пробега, например: $(\lambda/T) \operatorname{grad} T$. Назовем этот параметр параметром однородности. Можно представить его также как отношение t_0/θ среднего времени свободного пробега к макроскопическому времени релаксации θ.

(2) В результате вычислений мы получаем решение уравнения Больцмана в форме

$$f = f^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \mid n, \boldsymbol{u}, T) + f^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \mid n, \boldsymbol{u}, T) + \ldots, \tag{18}$$

где каждый член $f^{(k)}$ является функцией $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ и макроскопических переменных n, $\boldsymbol{u}$, T и их пространственных производных; от времени $f^{(k)}$ явно не зависят. Зависимость от времени выражается полностью макроскопическими переменными, которые определяются гидродинамическими уравнениями последовательных порядков типа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = V_i^{(1)}(\boldsymbol{r} \mid n, \boldsymbol{u}, T) + V_i^{(2)}(\boldsymbol{r} \mid n, \boldsymbol{u}, T) + \ldots, \tag{19}$$

и аналогично для n и T. Здесь, как и в предыдущей формуле, отдельные члены $V_i^{(k)}$ явно от времени не зависят.

(3) Любопытная математическая особенность решения состоит, таким образом, в том, что развитие системы во времени полностью определяется заданием начальных значений n, $\boldsymbol{u}$, T, которые являются первыми пятью моментами (по скорости) функции распределения f, в то время как из самого уравнения Больцмана следует, что необходимо знание начального значения *самой* функции распределения. Поскольку эта особенность решения была впервые указана Гильбертом, можно, пожалуй, назвать ее парадоксом Гильберта.

(4) На основании физических соображений мы должны ожидать, что начальное распределение за время порядка t_0 принимает форму (18), каково бы ни было начальное распределение. Другими словами, по истечении времени t_0 (начальный период хаотизации) возможно «сужение» описания состояния газа, когда развитие системы во времени допускает описание при помощи во много раз меньшего числа переменных. Тот факт, что этими переменными оказываются n, $\boldsymbol{u}$ и T, соответствует тому, что именно эти переменные связаны с величинами 1, $\boldsymbol{v}$, v^2, которые сохраняются в каждом столкновении. Следовательно, столкновения не могут непосредственно влиять на n, $\boldsymbol{u}$ и T. Эти величины изменяются во времени только «секулярно», и поэтому по истечении некоторого периода полностью определяют зависимость от времени.

(5) Все это хотя и кажется вполне правдоподобным, не является, однако, доказанным! Возникает поэтому

Проблема V. *В каком точно смысле решение задачи с начальными условиями для уравнения Больцмана аппроксимируется разложением Чепмена — Энскога* [18] *и каковы условия сходимости этого разложения?*

5. Общее кинетическое уравнение Боголюбова. Вернемся теперь к вопросу о выводе уравнения Больцмана. Давно уже известно, что при обычном выводе уравнения, помимо законов механики, используется также определенное предположение о вероятности бинарных столкновений, так называемый

Stosszahl Ansatz [7]. Именно это предположение обеспечивает существование свойства необратимости процессов в газе. Более глубокий вывод, мне кажется, должен осветить взаимосвязь между механическими и вероятностными предположениями и, в дополнение к этому, указать пределы применимости уравнения Больцмана и наметить пути его обобщения, в особенности на случай более плотных газов, когда тройными столкновениями и столкновениями более высокого порядка уже нельзя более пренебречь. Я думаю, что все это в принципе было достигнуто в работе Боголюбова [6]. Перед тем как дать короткий набросок теории, сделаем несколько общих замечаний.

Поскольку в теории вероятностей мы всегда сопоставляем некоторые данные вероятности с другими производными вероятностями, ясно, что какие-то вероятностные предположения должны быть неизбежно сделаны. Так как основная задача всегда состоит в определении поведения системы во времени, единственным подходящим объектом для установления вероятностных предположений является начальное состояние системы. Вслед за этим должны использоваться только уравнения и законы механики. Кроме того, мы обычно интересуемся только такими системами, для которых временное развитие вскоре становится не зависящим от начального состояния. Мы хотим знать, каким образом теряется начальная информация, как система «перемешивается», и мы ожидаем, что этот процесс будет в значительной степени не зависящим от начального состояния. Я думаю, что только в этом смысле можно ожидать, что вероятностное описание всей механической системы (ансамбли Гиббса) описывает развитие во времени одной данной системы.

Оставляя эти общие рассуждения, рассмотрим нашу систему N частиц с известным законом взаимодействия в объеме V. Состояние всей системы должно описываться распределением вероятностей $D_N(x_1, x_2, \ldots, x_N, t)$ в фазовом пространстве (Г-пространстве) газа. D_N есть симметричная функция $x_1, x_2, \ldots, x_N$, причем $x_i \equiv \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i$ обозначают координаты и импульс i-й молекулы. Изменение D_N со временем дается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} = \{H_N, D_N\}, \tag{20}$$

где скобки означают скобки Пуассона, а H_N есть гамильтониан всего газа, состоящего из N частиц. Путем интеграции из уравнения (20) можно получить связанную систему уравнений для парциальных функций распределения

$$F_s = V^s \int \ldots \int D_N dx_{s+1} \ldots dx_N,$$

что было проделано многими авторами. Находим

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \{H_s, F_s\} + \frac{1}{v} \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \varphi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|), F_{s+1} \right\}, \quad (21)$$

где $v = \lim V/N$ при N и $V \to \infty$.

Уравнение Лиувилля (или эквивалентная ему система (21)) основано на законах механики и является фундаментальным уравнением статистической механики. Для замкнутой системы мы знаем (или лучше предполагаем), что любое начальное распределение $D_N(x_1, \ldots, x_N, 0)$ в дальнейшем приближается (в грубом смысле) к микроканоническому или однородному распределению по поверхности энергии, которое описывает равновесное состояние. Оказывается, что для любого действительного процесса мы должны знать $D_N(0)$, и часто говорят, что $D_N(0)$ должно быть выбрано так, чтобы «соответствовать нашим первоначальным макроскопическим сведениям о системе». Однако все авторитеты хранят молчание относительно того, как это должно быть сделано, что давно уже мне кажется существенным пробелом теории. Ответ на вопрос, я думаю, состоит в том, что мы интересуемся только теми явлениями, которые *не зависят* от $D_N(0)$. Чтобы понять, как это происходит, рассмотрим сначала основные времена релаксации системы. В нашем случае имеется всего *три* таких характеристических времени: время столкновения $\tau \sim r_0/v_{av}$ (r_0 есть радиус действия молекулярных сил), время между столкновениями $t_0 \sim \lambda/v_{av}$ и макроскопическое время релаксации

$$\Theta \sim \psi/v_{av} \operatorname{grad} \psi,$$

если ψ — макроскопическая величина. Обычно для не слишком плотных газов $\tau \ll t_0 \ll \Theta$.

Следуя Боголюбову, можно считать, что по истечении некоторого начального времени хаотизации порядка τ для *любого* начального состояния $D_N(0)$ достигается такая фаза процесса — Боголюбов называет ее *кинетической* фазой, — когда дальнейшее развитие состояния системы во времени полностью определяется временной зависимостью первой функции распределения F_1, которая описывается уравнением в форме

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A\,(x\,|\,F_1), \tag{22}$$

где A функционально зависит от F_1, но не зависит от времени. Все высшие функции распределения зависят от времени только через F_1 и имеют поэтому форму

$$F_s = F_s\,(x_1,\ x_2 \ldots x_s\,|\,F_1). \tag{23}$$

Сделаем ряд разъясняющих замечаний.

(1) Уравнение (22) выражает «сужение» описания состояния газа, которое совершенно аналогично решению уравнения Больцмана методом Чепмена — Энскога, описывающему вторую или гидродинамическую фазу процесса релаксации. Подобно тому как в методе Чепмена — Энскога производится разложение по параметру однородности, Боголюбов разлагает функционалы A и F_s по степеням $1/v$ (вириальное разложение):

$$A\,(x\,|\,F_1) = A_0\,(x\,|\,F_1) + \frac{1}{v}\,A_1\,(x\,|\,F_1) + \frac{1}{v^2}\,A_2\,(x\,|\,F_1) + \ldots$$

$$F_s = F_s^{(0)}\,(x_1 \ldots x_s\,|\,F_1) + \frac{1}{v}\,F_s^{(1)}\,(x_1 \ldots x_s\,|\,F_1) + \ldots \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что безразмерным параметром разложения в этом случае является величина τ/t_0.

(2) Тот факт, что в кинетической фазе именно F_1 является основной «секулярной» переменной, описывающей временное развитие, связан с тем обстоятельством, что междумолекулярные силы на F_1 непосредственно не влияют. Только для $s \geqslant 2$ «дрейфовый» член $\{H_s,\ F_1\}$ в (21) содержит междумолекулярную силу, так что F_s $(s \geqslant 2)$ быстро меняется за время порядка τ. Уравнение для случая $s = 1$, которое может быть записано в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{p_\alpha}{m}\frac{\partial F_1}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{v}\int dp_1 \int dr_1\, \frac{\partial \varphi\,(\,|\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1\,|\,)}{\partial r_\alpha}\, \frac{\partial F_2\,(x,\ x_1,\ t)}{\partial p_\alpha}, \tag{25}$$

содержит потенциал междумолекулярных сил φ только в члене «столкновений» под знаком интеграла, что приводит к значительно более медленному изменению F_1.

(3) Боголюбов находит решения в форме (22), (23), (24) на основе метода, которой вновь совершенно аналогичен методу Чепмена — Энскога для уравнения Больцмана. Здесь я только скажу, что $A_0(x \mid F_1)$ оказывается соответствующим дрейфовому члену $S(F_1)$ уравнения Больцмана; $A_1(x \mid F_1)$ эквивалентен члену столкновений, если можно пренебречь пространственной неоднородностью F_1 на расстояниях порядка r_0; $A_2(x \mid F_2)$ содержит, как и следовало ожидать, эффект тройных соударений и т. д.

(4) Как и в случае разложения Чепмена —Энскога здесь остается

Проблема VI. *В каком точно смысле решение задачи с начальными условиями для уравнения Луивилля аппроксимируется разложением Боголюбова и каковы условия сходимости этого разложения?*

Может оказаться, что природа приближения, осуществляемого разложением Боголюбова, совершенно отлична от той, какую мы имеем в случае аппроксимации разложением Чепмена — Энскога, вследствие иной природы оператора Лиувилля. Возможно, мы получим разложение Боголюбова в результате некоторого процесса усреднения, в то время как разложение Чепмена — Энскога действительно только асимптотически.

Я закончу замечанием, что, с моей точки зрения, последовательное сокращение числа переменных при описании изменений во времени состояния системы является существенной особенностью статистической механики неравновесных состояний. Именно в этом состоит причина отсутствия при рассмотрении так называемых необратимых процессов общих методов, аналогичных методу статистической суммы в теории термодинамического равновесия. Все зависит от того, каковы основные времена релаксации и их относительная величина, так что надлежащий переход к меньшему числу переменных при описании временного развития системы должен быть исследован в каждом отдельном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hilbert D., Grundzüge der linearen Integralgleichungen, chap. 22, Leipzig, Teubner Verlag, 1912.

[2] Carleman T., Problemes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Uppcala, 1957. Это обобщение предшествующей работы: Acta Math. **60**, 91 — 146 (1932).

[3] Chang W. and Uhlenbech G., эта работа до настоящего времени опубликована только в виде отчета под названием «On the propagation of sound on monatonic gases», Eng Res. Inst. Univ. of Mich., 1952.
[4] Greenspan M., Propagation of sound on rarified helium, J. Acoust. Soc. Am. **22**, 568 (1951).
[5] Chapman S. and Cowling T., The mathematical theory of nonuniform gases, Cambr., 1939.
[6] Bogolybow N., J. Phys. USSR **10**, 265 (1946). Это выдержка из его книги «Проблемы динамической теории в статистической физике», Москва, 1946.
[7] См. Ehrenfest P. and Ehrenfest T., Enc. der Math. Wiss. **4**, Art 32.

ПУТИ РАЗВИТИЯ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП*)

Г. Виланд

(ФРГ)

Несколько десятилетий назад казалось, что теория групп конечного порядка приблизилась к состоянию своего исчерпания и застоя. Правда, недостатка в значительных проблемах не было; вспомним только о не решенной до сих пор задаче описания всех простых конечных групп. Но отсутствовали методы, которые позволили бы бросить перспективный взгляд на проблемы в самом начале их изучения. С другой стороны, нельзя также утверждать, что не было совсем никаких методов. В распоряжении Гёльдера, Жордана, Фробениуса, Бернсайда и Шура имелись, между прочим, прекрасные методы, но задачи, доступные им, казалось, уже были исчерпаны.

Теперь положение изменилось в двух отношениях. С одной стороны, были развиты новые вспомогательные средства, которые при помощи своего мощного, широко развитого аппарата привели к обнадеживающим результатам, особенно о простых группах и о p-группах; на этих методах, связанных с модулярными представлениями и кольцами Ли, мы не будем здесь останавливаться; соответствующие доклады сделаны в 1954 году в Амстердаме Брауэром и на настоящем конгрессе — Хигманом и Шевалле. Напротив, будет показано, как, в свою очередь, расширился за последние три десятилетия круг вопросов, доступных старым методам. При этом мы

*) H. Wielandt, Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen.

ограничимся двумя центральными проблемами, которые можно было бы обозначить терминами *арифметическое строение* и *нормальное строение*.

Вопрос об арифметическом строении некоторой группы G связан с поведением G относительно заданных простых чисел. Прежде всего исследуются подгруппы, выделяющиеся экстремальными арифметическими свойствами своих порядков. Известным примером является теорема Силова, о которой будет речь ниже.

Нормальное строение группы G предполагает рассмотрение нормальных делителей группы G и ее фактор-групп; более общо, исследуются нормальные ряды

$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \ldots \supset G^l = 1, \qquad (1)$$

каждая группа которых инвариантна в предшествующей, и соответствующие фактор-группы

$$F^\lambda = G^{-1}/G^\lambda.$$

Сюда относится, например, классическая теорема Жордана — Гёльдера: если нормальная цепь является композиционным рядом, т. е. далее не уплотняется, то факторы F^λ, с точностью до изоморфизма и порядка следования, вполне определяются группой G. В частности, тогда однозначно определены индексы $|G^{\lambda-1}|G^\lambda|$, они называются композиционными индексами группы G.

За последние три десятилетия между тем и другим кругом вопросов были открыты, в первую очередь Филиппом Холлом, неожиданные взаимные связи. Этому вопросу и будет посвящен нижеследующий обзор, в основу которого положены отдельные, просто формулируемые, типичные теоремы. Мы начнем с высказываний относительно арифметического строения.

1. Силовские теоремы. Напомним основную теорему Силова (1872).

Пусть $|G| = \Pi p^\alpha$ *— разложение на простые множители порядка группы* G. *Тогда* G *содержит по меньшей мере одну подгруппу* G_p *порядка* p^α; *каждые две такие подгруппы сопряжены* в $G: \overline{G}_p = q^{-1} G_p g$. *Любая подгруппа порядка* p^β *содержится хотя бы в одной из групп* G_p.

Группы G_p называются силовскими подгруппами, соответствующими простому числу p, или, коротко, — *силовскими* p*-подгруппами* группы G. Значение их состоит в том, что в их строении и взаимном расположении отражается поведение группы G относительно простого числа p.

Хотя значение теорем Силова было понято сразу же, прошло более пятидесяти лет, прежде чем в направлении, проложенном Силовым, был достигнут существенный прогресс. И удалось это сделать в 1928 году Холлу в одной из работ, давшей толчок не завершенному еще к настоящему времени циклу исследований. Новое заключалось в том, что Холл рассмотрел сразу несколько простых чисел. Пусть ω — какое-нибудь множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется ω-группой, если ее порядок имеет вид

$$|H| = \prod_{p \in \omega} p^{\beta} \quad (\beta \geqslant 0).$$

Очевидно, $|H| \leqslant \prod\limits_{p \in \omega} p^{\alpha}$, где α — показатель, с которым простое число p входит в $|G|$. Если в этом соотношении стоит знак равенства, то, придерживаясь уже установившейся терминологии, мы назовем группу H *холловской* ω-подгруппой группы G. Индекс холловской подгруппы взаимно прост с ее порядком.

Может случиться, что для некоторого множества ω простых чисел данная группа G содержит хотя бы одну холловскую ω-подгруппу, что, далее, каждые две такие группы сопряжены в G и любая ω-подгруппа содержится в некоторой холловской ω-подгруппе. В этом случае будем коротко говорить, что в группе G имеет место силовская ω-теорема. Например, в каждой группе G для всякого простого числа p имеет место силовская ω-теорема.

Если ω состоит из более чем одного простого числа, то силовская ω-теорема в группе G не обязана выполняться. Точнее, G может не содержать ни одной холловской ω-подгруппы (например, в наименьшей простой группе, группе икосаэдра порядка 60, нет ни холловской $\{2, 5\}$-подгруппы, ни холловской $\{3, 5\}$-подгруппы). Когда имеется несколько холловских подгрупп, то они могут и не быть сопряженными. И даже в случае их сопряженности произвольная ω-подгруппа группы G вовсе не обязана содержаться в некоторой холловской ω-подгруппе; соответствующий пример с $\omega = \{2, 3\}$ снова доставляет группа икосаэдра.

Но в разрешимой группе G все высказанные утверждения выполняются. В этом заключается открытие Холла [4].

Если G — разрешимая группа и ω — произвольное множество, то в G имеет место силовская ω-теорема.

Эта теорема побуждает, так сказать, к изучению влияния нормального строения на арифметическое строение. В самом деле, предположение разрешимости означает, что все композиционные индексы группы G являются простыми числами, т. е. G обладает нормальным рядом с абелевыми фактор-группами F^{λ}.

Доказательство осуществляется простой индукцией, исходя из классической теоремы Силова. Теорема Холла наводит на мысль ослабить предположение о разрешимости группы G. В этом направлении, начиная с 1943 года, Чунихин опубликовал длинный ряд исследований. В них рассматривается следующий вопрос. Пусть задан нормальный ряд (1) какой-нибудь конечной группы G, и пусть что-то известно о холловских ω-подгруппах отдельных фактор-групп F^{λ}. Что можно сказать тогда о холловской ω-подгруппе группы G? В своих исследованиях Чунихин пришел к новому важному понятию. Он называет группу ω-разрешимой, если каждый ее композиционный индекс либо является некоторым простым числом из ω, либо совсем не делится ни на какое простое число из ω. Иными словами, группа G называется ω-разрешимой, если G обладает нормальным рядом, каждая фактор-группа которого является или ω'-группой, или же абелевой ω-группой, где ω' — дополнительное к ω множество простых чисел. (Разрешимая группа, следовательно, также ω-разрешима для каждого множества ω простых чисел.) Чунихин [2] доказал следующее обобщение теоремы Холла:

Пусть группа G ω-разрешима. Тогда в G имеют место как силовская ω-теорема, так и силовская ω'-теорема.

Доказательство основано на одной теореме Цасенхауза из теории расширений, которая будет упомянута позже.

В 1954 году Виланд обобщил теорему Силова в несколько ином направлении, чем Холл и Чунихин. О нормальных рядах не предполагается ничего, но зато требуется существование холловской ω-подгруппы специального вида [11].

Если группа G содержит нильпотентную холловскую ω-подгруппу, то в G имеет место силовская ω-теорема.

При этом группа называется нильпотентной, если она является прямым произведением своих силовских подгрупп. Условие нильпотентности, сразу же казавшееся, пожалуй, чрезмерно сильным, можно заменить, как показали Бэр [1] и другие, на родственные, несколько более слабые предположения. Однако слишком многого здесь нельзя добиться; известно, например, что условия разрешимости холловской ω-подгруппы недостаточно. По всему кругу вопросов, связанному с силовскими ω-теоремами, Холл написал в 1956 году содержательный обзор. Важнейший из его новых результатов означает следующее:

Пусть задан нормальный ряд (1) *группы* G. *И пусть в самой первой фактор-группе* F^1 *имеет место силовская* ω-*теорема, холловские* ω-*подгруппы в* F^1 *разрешимы, а каждый другой фактор* F^λ *содержит нильпотентную холловскую* ω-*подгруппу. Тогда в* G *имеет место силовская* ω-*теорема.*

Эта теорема охватывает как теорему Виланда, так и многие результаты Чунихина. Некоторые естественные вопросы остаются еще открытыми; верно ли, например, что силовская ω-теорема в группе G имеет место в том и только в том случае, когда она справедлива для каждого фактора F^λ некоторого нормального ряда группы G?

Мы переходим теперь к описанию результатов о нормальном строении, начав его с рассмотрения отдельных нормальных делителей.

2. Расширения групп. Пусть заданы две группы N и F. Как построить расширения группы N при помощи F, т. е. те группы G, которые содержат N в качестве нормального делителя с фактор-группой $G/N \cong F$?

Начиная с Гёльдера (1895), эта *задача о расширениях* рассматривалась много раз. Нам хочется начать с изложения особенно простой ситуации: пусть расширение G, которое надлежит исследовать, расщепляется, т. е. содержит некоторое дополнение к N. Дополнение C к N в группе G определяется двумя следующими требованиями:

(I) C — подгруппа из G;

(II) в каждом смежном классе группы G по N содержится точно по одному элементу из C.

Если в G существует дополнение C к N, то $C \cong F$ и каждый элемент из G можно разложить единственным образом на две компоненты из N и C:

$$g = nc \, (n \in N, \; c \in C),$$

Вычисления с этими компонентами осуществляются весьма просто ввиду инвариантности N:

$$g_1 g_2 = (n_1\ c_1\ n_2\ c_1^{-1})\ (c_1\ c_2).$$

Поэтому таблица умножения группы G известна, коль скоро известны соответствующие таблицы групп C (т. е. F) и N, а также автоморфизмы, испытываемые нормальным делителем N при трансформировании элементами из C. Это приводит к довольно прозрачной конструкции расщепляемых расширений.

Возникают вопросы о том, когда расщепляется заданное расширение и как найти все дополнения. По поводу последнего пункта нужно заметить, что всякая подгруппа из G, сопряженная с некоторым дополнением, снова является дополнением к тому же самому нормальному делителю. Мы сформулируем поэтому *задачу о дополнениях*. Пусть задан нормальный делитель N группы G. Когда в G содержится по крайней мере одно дополнение C к N и когда два заданных дополнения C, $\bar{C}$ к N сопряжены в G?

Важный вклад в изучение этой проблемы внес Гащюц в 1952 году. Его теорема [3] в несколько обобщенной форме может быть высказана так:

Пусть *N — абелев нормальный делитель группы G.*

(a) *Дополнение* к *N в G существует в том и только том случае, когда для каждого простого числа p существует дополнение* к *$G_p \cap N$ в G_p. Через G_p здесь обозначена силовская p-подгруппа из G.*

(*b*) *Два дополнения C, $\bar{C}$ нормального делителя N из G сопряжены в G в том и только том случае, когда для каждого простого числа p сопряжены в G силовские p-подгруппы $\bar{C}_p$ и C_p.*

Эта теорема сводит задачу о дополнениях в случае абелевого нормального делителя к исследованию p-групп. Частный случай теоремы Гащюца был найден Цасенхаузом еще в 1937 году. В этом случае пересечение $G_p \cap N$ равно либо G_p, либо 1, так что условия Гащюца всегда выполнены. Всегда, следовательно, существует дополнение и любые два дополнения сопряжены.

Кроме того, Цасенхауз заметил, что при помощи некоторого индуктивного процесса условие абелевости нормального делителя можно ослабить.

Полностью теорема Цасенхауза [14] формулируется так:

(a) *Пусть подгруппа N инвариантна в G и* $(|N|, |G/N|) = 1$. *Тогда в G существует дополнение к N.*

(b) *Пусть одна из групп, N или G/N, разрешима. Тогда любые два дополнения к N сопряжены в G.*

Цасенхауз привел веские доводы в пользу гипотезы о том, что условие разрешимости является излишним.

Было бы замечательно, если бы оказалось возможным исключить из теоремы Гащюца предположение о коммутативности нормального делителя N. К сожалению, это невозможно. Как показывают противоречащие примеры, теорема становится неверной уже при замене коммутативности нильпотентностью. Решение задачи о дополнениях для нильпотентных нормальных делителей относится, несомненно, к числу важных, поскольку, как будет показано ниже, из него можно было бы извлечь пользу и для случая произвольных нормальных делителей.

Здесь нам необходимо сделать одно замечание о доказательстве теорем Цасенхауза и Гащюца. В нем используются так называемые системы факторов, которые возникают следующим образом. Когда в группе G не существует ни одного дополнения к N (если, следовательно, не могут быть выполнены одновременно оба требования (I) и (II)) или же о дополнении ничего не известно, то всегда можно удовлетворить условию (II), отказавшись от условия (I). Нужно лишь из каждого смежного класса группы G по N выбрать по одному представителю $c_\rho (1 \leqslant \rho \leqslant |G/N|)$. Отклонение свойств выбранной системы представителей $C = \{c_\rho\}$ от групповых свойств выражается тогда в том, что в уравнения

$$c_\rho c_\sigma = n_{\rho\sigma} c_{\rho\sigma}$$

входят факторы $n_{\rho\sigma} \neq 1$; при этом через $c_{\rho\sigma}$ обозначен представитель смежного класса $N c_\rho c_\sigma$ и $n_{\rho\sigma} \in N$. Такого рода *системы факторов* $\{n_{\rho\sigma}\}$ были введены в одном частном случае (а именно когда N содержится в центре группы G) в 1904 году Шуром, а в полной общности — Шрейером в 1926 году. Ввиду ассоциативности умножения в G, система факторов удовлетворяет известному функциональному уравнению. К сожалению, лишь в случае абелева нормального делителя N это уравнение обозримо настолько, чтобы из него можно было получить существенное высказывание о строении группы G. Ничего пока не изменилось и от осуществленного в последнее десятилетие включения систем факторов в теорию когомологий (сошлемся по этому поводу на Куроша [9]). Другая трудность состоит в том, что благодаря упомянутому выше уравнению система факторов тесно связана с группой автоморфизмов нормального делителя N (вообще говоря, плохо известной), но не имеет непосредственного отношения к гораздо более известному строению самой подгруппы N (например, к ее силовским подгруппам и нормальным делителям).

В обход этих трудностей Холл в 1940 году пошел по пути, приведшему к новому поворотному пункту в проблеме о расширениях. В то время как Шрейер отказался от группового свойства системы представителей (требование (I)), стремясь к однозначности (требование (II)), Холл поступил как раз наоборот. Иначе говоря, Холл ищет в группе G с нормальным делителем N подгруппу S, обладающую тем свойством, что

$$G = NS. \tag{2}$$

Для краткости назовем такую подгруппу S обобщенным дополнением к N в группе G. Всегда существует тривиальное обобщенное дополнение, а именно $S = G$. Если существует некоторое нетривиальное обобщенное дополнение, то разложение (вообще говоря, неоднозначное)

$$g = ns \quad (n \in N,\ s \in S)$$

редуцирует проблему расширения, поскольку группа G заменяется в некотором смысле меньшей группой S. Редукция получается тем сильнее, чем меньше S, т. е. чем меньше пересечение $S \cap N = T$; когда $T = 1$, S является дополнением подгруппы N. Таким образом, становятся важными поиски небольших обобщенных дополнений. Холл проводит их, предполагая, что нормальный делитель N разрешим. Его идею нетрудно облечь в общую форму. Это делается ниже.

Пусть мы нашли в N систему $\sum$ подгрупп или комплексов $I_1, I_2, \ldots, I_\rho$, обладающую следующим свойством. Каждому автоморфизму τ подгруппы N соответствует некоторый ее внутренний автоморфизм, который действует на упомянутую систему так же, как и $\tau: n^{-1}I_\rho n = I_\rho^\tau$, $n \in N (\rho = 1, \ldots, r)$. Назовем такую систему *интравариантной* в N. Если затем G — произвольное расширение группы N и если под S мы понимаем нормализатор системы $\sum$ в G, следовательно,

$$S = \{s \mid s \in G, s^{-1} I_1 s = I_1, \ldots, s^{-1} I_r s = I_r\},$$

то S — подгруппа из G, обладающая ввиду интравариантности системы $\sum$ свойством (2).

Пересечение $S \cap N = T$ инвариантно в S, и согласно (2) $S/T \cong G/N \cong F$; поэтому S является расширением подгруппы T при помощи F.

Таким образом, чтобы получить все расширения группы N при помощи F, нужно рассмотреть некоторые расширения S фиксированной подгруппы T из N при помощи F и затем, коротко говоря, перемешать их с N в соответствии с условием (2). Последняя задача облегчается благодаря тому, что автоморфизмы группы N, индуцированные элементами из S, переводят каждую отдельную подгруппу I_ρ в себя.

Группа $T = S \cap N$ есть не что иное, как нормализатор системы $\sum$ в N. Нужно, следовательно, стараться определить $\sum$ так, чтобы нормализатор был небольшим и имел обозримое строение. Здесь оказываются полезными силовские теоремы. В самом деле, если в N имеет место силовская ω-теорема, то каждая холловская ω-подгруппа интравариантна в N. Легко показать, далее, что система $\sum = \{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$ интравариантна в N, если каждая из групп $I_1, I_2, \ldots, I_r$ интравариантна в N и, кроме того, их индексы в N попарно взаимно просты.

Так как в случае, рассматриваемом Холлом, группа N разрешима, то в качестве I_ρ можно брать полную систему холловских p_ρ^1-подгрупп из N (по одной для каждого простого делителя p_ρ порядка $|N|$). Легко видеть, что получающаяся при этом группа T всегда нильпотентна. Тем самым Холл получает формулируемую ниже теорему [6]:

В каждой разрешимой группе N существует нильпотентная подгруппа T, обладающая следующим свойством: любое расширение группы N при помощи произвольной группы F можно получить, расширяя подгруппу T при помощи F и перемешивая затем результат расширения S с N.

Холл подробно описывает процесс перемешивания, используя при этом исключительно приятные свойства построенной выше группы T (как нормализатор силовской системы подгруппа T определяется, с точностью до внутреннего автоморфизма, однозначно, и ее следует считать, наряду с коммутантом, важнейшей подгруппой разрешимой группы N). Теория становится особенно простой, когда все силовские подгруппы разрешимого нормального делителя N абелевы. Тогда проблема расширения сводится к уже достаточно изученному случаю абелевого нормального делителя при помощи следующей теоремы Холла [6]:

Если N — разрешимый нормальный делитель группы G, все силовские подгруппы которого абелевы, то в G существует дополнение S к коммутанту группы N. Пересечение $T = S \cap N$ абелево.

На этом пути Холл [6] и Тонт (1949) изучили конструкцию и строение разрешимых групп с чисто абелевыми силовскими подгруппами.

Если нормальный делитель N неразрешим, то силовские p'_ρ-теоремы уже нельзя использовать. Упомянем все же, что всегда можно прийти к цели, выбирая в качестве $\sum$ какую-нибудь максимальную в N интравариантную систему; ее нормализатор в N, как следует из классической теоремы Силова всегда нильпотентен. *Следовательно, предпоследняя из упомянутых выше теорем Холла верна и для любой конечной группы N.*

Намеченное здесь доказательство естественным образом подводит к изучению максимальных интравариантных систем в N и их нормализаторов T. От последних, естественно, нельзя ожидать тех же хороших свойств, которыми обладает нормализатор Холла силовской системы; ввиду этого обстоятельства описание процесса перемешивания становится более трудным, чем в случае разрешимого нормального делителя. Тем не менее здесь открывается заслуживающий дальнейшего развития путь сведения общей проблемы расширения к случаю нильпотентного нормального делителя. Что касается последней задачи, остающейся пока открытой, то кажется весьма полезным изучение представлений заданной группы автоморфизмами p-групп; решение этой задачи можно было бы связать с теорией модулярных представлений.

3. Нормальные ряды. Как было показано в первой части обзора, налагая некоторые ограничения на нормальные ряды группы G, можно получать высказывания о справедливости в G теорем силовского типа. Имеются также и обратные теоремы, гораздо более глубокие по содержанию. Так, в 1937 году Холл доказал [5] обращение своей теоремы от 1928 года:

Если в G имеет место любая силовская ω-теорема, то группа G разрешима.

Верно даже более сильное утверждение [5]:

Группа разрешима в том и только том случае, когда для каждого простого числа p она содержит холловскую p'-подгруппу.

Доказательство Холла опирается на теорему Бернсайда о разрешимости всякой группы порядка $p^{\alpha} q^{\beta}$, доказанную пока лишь при помощи теории характеров.

Только что сформулированная теорема Холла является ценным вспомогательным средством при доказательстве разрешимости конечных групп. Аналогичная характеризация ω-разрешимых групп еще неизвестна. Простые противоречащие теоремы показывают, что во всяком случае теорему Чунихина, которая упоминалась ранее, нельзя обратить; если в некоторой группе имеют место как силовская ω-теорема, так и силовская ω'-теорема, то она еще не обязана быть ω-разрешимой и ω'-разрешимой, т. е. быть просто разрешимой. Но утверждение становится верным, если предположение несколько усилить [13]:

Пусть G содержит холловские ω- и ω'-подгруппы, которые обе нильпотентны (ω и ω' — дополнительные друг к другу множества простых чисел). Тогда группа G разрешима.

Эта теорема интересна постольку, поскольку она предполагает известными только две холловские группы.

Замечательно, что Холл и Хигман в связи с исследованиями проблемы Бернсайда показали, что даже отдельная силовская p-подгруппа оказывает уже некоторое влияние на нормальные ряды групп G, во всяком случае, если группа p-разрешима, т. е. если каждый ее композиционный индекс или равен p, или взаимно прост с p. А именно, если силовская p-подгруппа имеет достаточно простое строение, то можно, коротко говоря, собрать вместе на некотором отрезке композиционные фактор-группы порядка p. Сформулируем лишь простейшую из целого ряда таких теорем [8]:

Пусть G — p-разрешимая группа, обладающая абелевой силовской p-подгруппой G_p. Тогда G обладает нормальным рядом вида

$$G \supset K \supset L \supset 1, \text{ где } K/L \cong G_p. \tag{3}$$

Влияние p на группу G проявляется здесь особенно наглядным образом в средних членах весьма специального нормального ряда.

Последняя теорема приводит к общему вопросу: что можно сказать о нормальном ряде произвольной конечной группы G, силовская p-подгруппа которой известна? Метод для изучения этого вопроса был недавно развит Виландом. Рассматривается совокупность SG субинвариантных подгрупп группы G. Это суть те подгруппы из G, которые входят в нормальные ряды группы G: все нормальные делители этой группы, все их нормальные делители и т. д. Субинвариантные подгруппы удивительно похожи на инвариантные. Например, при слабых дополнительных предположениях (можно было бы сказать, что почти всегда) они перестановочны друг с другом как целое, а пересечение их нормализаторов в G никогда не равно 1, если $G \neq 1$ (Виланд, 1957, 1958). Сейчас нам важно другое их свойство: пересечение и объединение субинвариантных подгрупп — субинвариантных подгрупп. Другими словами [10], *SG-подструктура структуры всех подгрупп группы G.*

Между нормальными рядами и силовскими подгруппами можно установить теперь непосредственную связь, выбирая некоторую фиксированную силовскую подгруппу G_p из G и сопоставляя каждой субинвариантной подгруппе A группы G пересечение $A \cap G_p = A_p$. Это пересечение, как легко показать, является силовской p-подгруппой группы A. Но, кроме того' имеет место следующее утверждение [12]:

Отображение $A \to A_p$ является структурным гомоморфизмом SG в SG_p (соответствующая теорема верна и для холловских подгрупп).

Если строение некоторой силовской подгруппы из G известно достаточно хорошо, то получаются сильные ограничения на структуру SG и тем самым на нормальные ряды группы G. Подробно исследован пока лишь случай циклической силовской подгруппы. Выяснилось следующее положение вещей [12]:

Если силовская p-подгруппа из G циклическая, то группа G либо p-разрешима, либо обладает только одним композиционным индексом, делящимся на p.

В первом случае, согласно Холлу и Хигману, группа G имеет нормальный ряд простого вида (3); во втором случае группу G можно соответственно назвать p-простой. Упомянутый выше структурный гомоморфизм точен в том и только том случае, когда каждый композиционный индекс группы G делится на p. Если это условие не выполнено, то достаточно привлечь к рассмотрению большее количество различных простых делителей порядка группы G. Получается теорема [12]:

Субинвариантная структура SG конечной группы G является подструктурой прямого произведения структур, каждая из которых суть структура всех подгрупп силовской p-подгруппы из G; p пробегает все различные простые числа.

Теоремы, о которых говорилось в последнем разделе, свидетельствуют о неожиданно сильном влиянии холловских подгрупп на нормальное строение. Очевидно, здесь налицо обширное поле для будущих исследований.

В общем, можно, пожалуй, сказать, что структурная теория конечных групп, связанная с классическими вопросами и методами, не является больше бедной уязвимыми проблемами, способными вознаградить труд исследователя. Кроме того, она может еще долгое время стимулировать развитие общей структурной теории бесконечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baer R., Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen, Arch. Math. **9**, 7—17 (1958).

[2] Чунихин С. А., О силовых свойствах конечных групп, ДАН СССР (новая серия) **73**, 29—32 (1950).

[3] Gaschütz W., Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, J. reine angew. Math. **190**, 93—107 (1952).

[4] Hall P., A note on soluble groups, J. Lond. Soc. **3**, 98—105 (1928).

[5] Hall P., A characteristic property of soluble groups, J. Lond. Math. Soc. **12**, 198—200 (1937).

[6] Hall P., The construction of soluble groups, J.reine angew. Math. **182**, 206—214 (1940).

[7] Hall P., Theorems like Sylow's, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **6**, 286—304 (1956).
[8] Hall P. and Higman G., On the *p*-length of *p*-soluble groups and reduchtion theorems for Burnside's problem, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **6**, 1—42 (1956).
[9] Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат, 1953.
[10] Wielandt H., Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z. **45**, 209—244 (1939).
[11] Wielandt H., Zum Satz von Sylow, Math. Z. **60**, 407—408 (1954).
[12] Wielandt, H., Sylowgruppen und Kompositions-Struktur, Abh. Sem. Hamburg **22**, 215—228 (1958).
[13] Wielandt H., Über Produkte von nilpotenten Gruppen, Illinois J. Math. **2**, 611—618 (1959).
[14] Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. 1, Teubner, Leipzig und Berlin, 1937.

~~92 п.~~